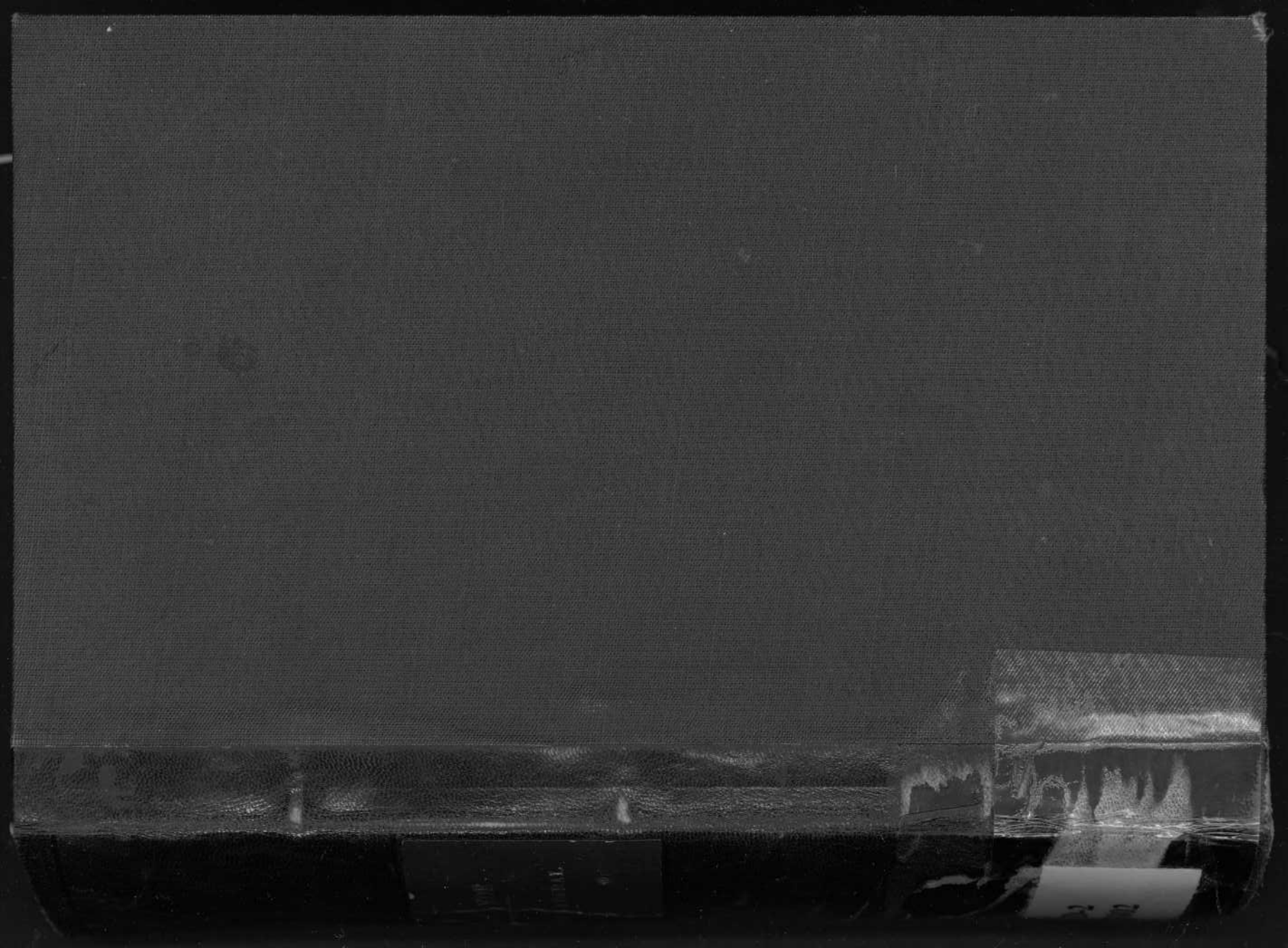
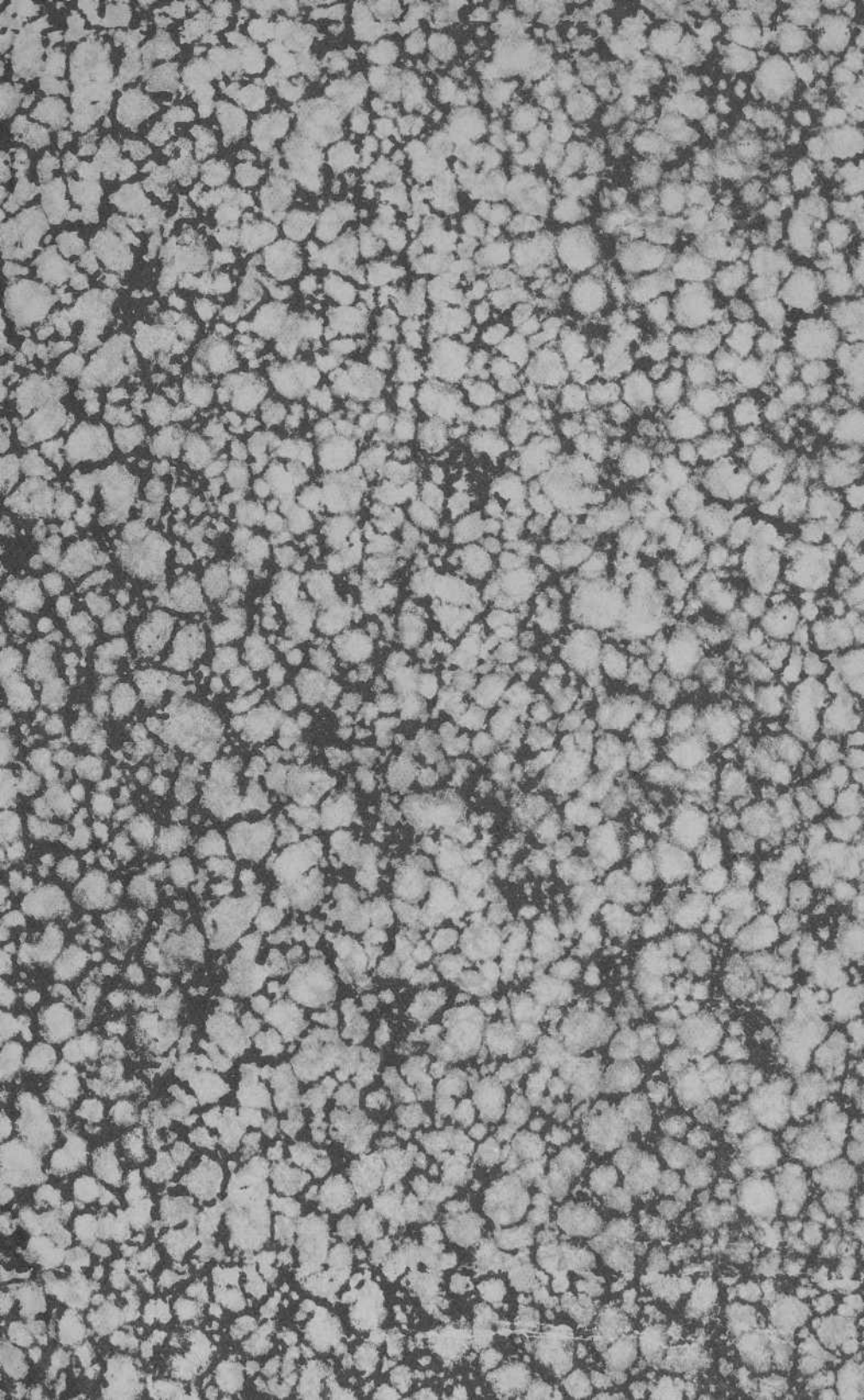
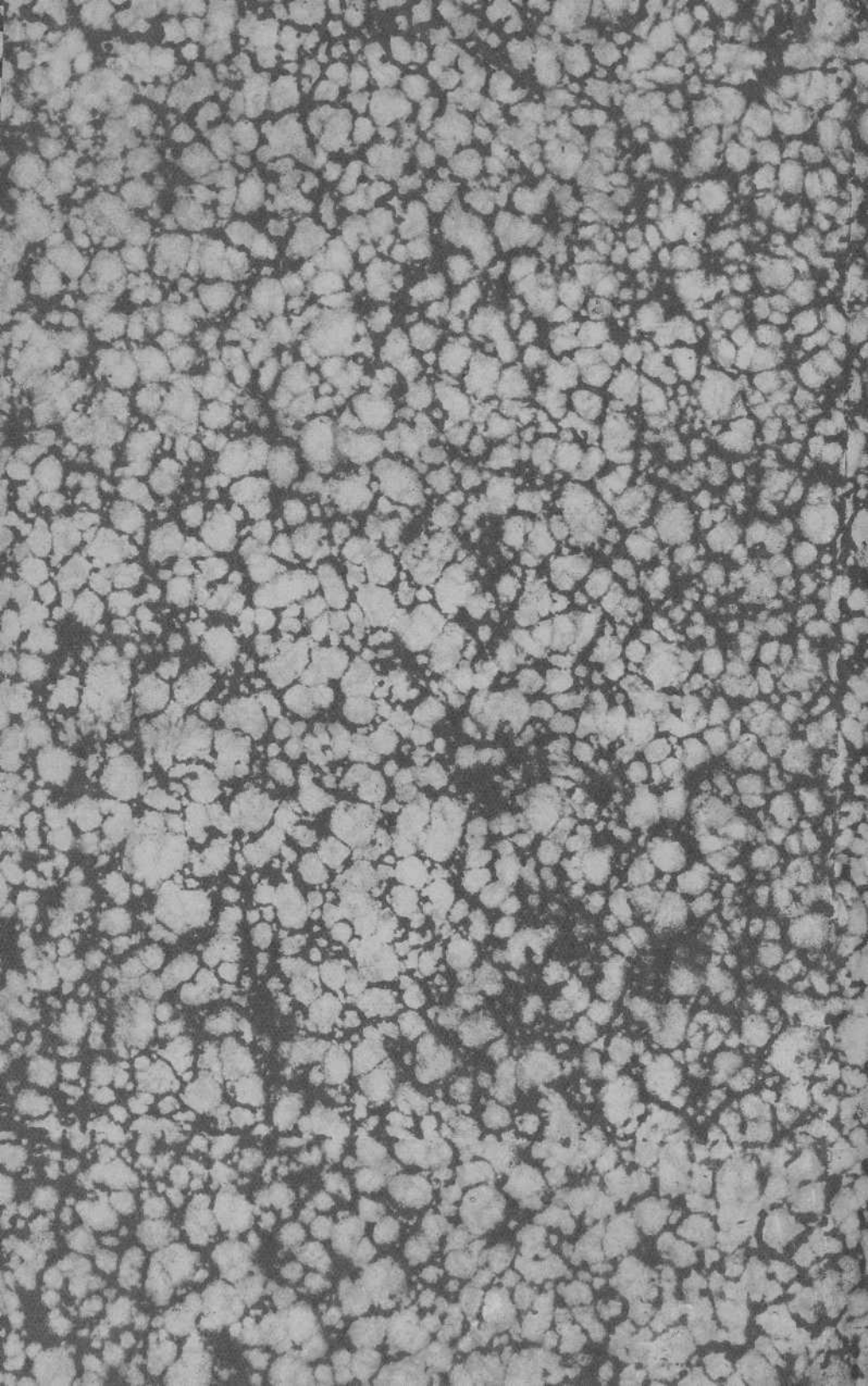


SG-9
3-3





MECÁNICA GENERAL

BIBLIOTECA PÚBLICA SORIA

B.P. de Soria
61112049
D-2 1002

D-2
1002

6
216

R. 2597

MECÁNICA GENERAL

POR

D. NICOMEDES ALCAYDE Y CARVAJAL

Coronel de Ingenieros

Ex-profesor de la Academia del Arma

BIBLIOTECA · SORIA

ALGORITMO MECÁNICO
CINEMÁTICA & DINÁMICA

Segunda edición

LIBRERIA DOSSAT

PLAZA DE SANTA ANA, 9

MADRID

1933

18
.25

ES PROPIEDAD DEL AUTOR.

QUEDA HECHO EL DEPÓSITO QUE MARCA LA LEY.

Establecimiento tipográfico del Sucesor de Antero Concha.
Plaza de San Esteban, 2.—GUADALAJARA

PRÓLOGO

«En el estado que hoy se encuentran las ciencias físicas, la publicación de una obra de Mecánica, exige, de parte del autor, una explicación previa de su propósito, sopena de ser calificado de pretencioso o impertinente»: conformes con este juicio, nos apresuramos a declarar que el presente trabajo no tiene más vuelos que el de una obra didáctica, dedicada a facilitar en nuestra Academia la enseñanza de materia tan importante como es, en la profesión del Ingeniero, la Mecánica general.

Por la forma especial en que se desarrolla el plan de estudios de la Academia de Ingenieros del Ejército, es muy difícil encontrar, entre las actuales publicaciones, un texto que responda a las necesidades del programa de dicha asignatura, y a llenar este vacío han tendido los notables trabajos publicados por profesores tan eminentes como Bruna, Ugarte, Gimeno, Belando, Calvo y García Antúnez, cuyas obras, juntamente con el anticuado Bour, constituían los textos oficiales de la misma.

La dificultad principal con que hemos tropezado en el desempeño de nuestra misión, durante los años que ha estado a nuestro cargo en la Academia la explicación de esta clase, ha sido la falta de unidad en la exposición de las teorías mecánicas que, no obstante el relevante mérito de todos y cada uno de dichos textos, tiene que existir, inevitablemente, en un trabajo desarrollado por tan distintos autores.

Y si se agrega el no contener las citadas obras algunas teorías,

cuyo conocimiento es hoy indispensable para el Ingeniero Militar, se encontrará justificado nuestro propósito, si bien creemos que, por falta de dotes para realizar tan arduo trabajo, nos hayamos quedado sin conseguirlo.

Sirva de disculpa, a los desaciertos que nuestros compañeros noten en este libro, el buen deseo que nos ha guiado para publicarlo.

ADVERTENCIA

Creemos oportuno consignar, por vía de advertencia, que después de dudar entre las varias notaciones que hemos empleado, y visto emplear, para indicar la equipolencia y suma gráfica de vectores, nos hemos decidido por el signo $\equiv$, con el mismo título que otros autores le han usado con distinta significación que la algorítmica de la *congruencia* y atendiendo a que, en la presente obra, no puede dar lugar a confusión alguna este recurso tipográfico.

INFORME

Del informe emitido por la Junta Facultativa de la Academia de Ingenieros del Ejército, al proponer a la Superioridad la adopción del presente libro como texto, para dicho Centro de enseñanza, entresacamos los siguientes párrafos:

«En resumen, el libro del Comandante Alcayde constituye un tratado completo de Mecánica general, donde están incluídos con perfecto orden todos los conocimientos de la materia exigidos en el programa de esta asignatura vigente en nuestra Academia.»

«Es trabajo de verdadero mérito por la claridad de su explicación y la genialidad de algunas ideas y métodos de exposición, así como por la tendencia a simplificar y facilitar los estudios de aplicación que los Alumnos han de hacer posteriormente.»

«Contiene la obra algunas teorías que no figuran en el programa, muchas de las de éste ampliadas para hacerlas más completas y, además, ciertas cuestiones de aplicación

a materias que figuran en el plan de enseñanza en cursos posteriores al que corresponde la Mecánica general.»

«El libro tiene, pues, un horizonte mucho mayor que el que señala el programa de la Academia y no se trata de una colección de lecciones, sin más aplicación que la enseñanza en este Centro, sino de una obra completa, digna de figurar al lado de las mejores publicadas en España y cuya extensión, no sólo no es inconveniente para su adopción como texto, sino que por ello mismo es ventajosa, por cuanto será útil al Alumno que curse Electrotecnia, Máquinas, Construcción, Balística, Aeronáutica, Automovilismo y otras asignaturas.»

Copiamos lo anterior para hacer, desde este lugar, público testimonio de nuestra gratitud, por tan lisonjeros conceptos, a los ilustrados profesores que formaron dicha Junta.

INTRODUCCIÓN

BIBLIOTECA PÚBLICA SORIA

MECÁNICA GENERAL

INTRODUCCIÓN

Objeto y divisiones de la Mecánica

1. Concepto de la Mecánica.—El fenómeno físico en virtud del cual, un ser material cualquiera, ocupa distintas posiciones en el espacio, con el transcurso del tiempo, se llama *movimiento*, y el estudio de las diversas circunstancias que pueden presentarse en dicho fenómeno, así como el de las causas que real o aparentemente lo producen y modifican, constituye una ciencia, con caracteres físico-matemáticos, que se designa con el nombre de *Mecánica*.

2. Causas del movimiento.—Fuerzas.—Las causas capaces de producir o modificar el movimiento de un cuerpo material, se designan con el nombre genérico de *fuerzas*. En su esencia son estas causas completamente desconocidas, pero la realidad de sus efectos nos induce a *admitir*, como cosa cierta, la existencia de un *agente* especial que en cada caso es el que produce o modifica las circunstan-

cias del movimiento de los seres materiales, y a este agente, cualquiera que sea su origen y modo de obrar, le llamamos fuerza.

3. Circunstancias del movimiento.—Cuando un cuerpo se mueve, decimos en lenguaje ordinario que marcha *de prisa* o *despacio*, según sea la mayor o menor rapidez con que se traslada de una a otra posición; esta rapidez o lentitud en cambiar de posición, tiene fácil expresión analítica por el cociente que resulta de dividir los espacios recorridos por los tiempos empleados en recorrerlos: dicho cociente que, según veremos, puede adoptar diversas formas, recibe en todas ellas el nombre de *velocidad* del movimiento.

De la misma manera puede ocurrir que los incrementos positivos o negativos de la velocidad tengan lugar en intervalos de tiempo más o menos grandes, y la relación entre aquellos incrementos y estos intervalos, expresará con claridad la propensión a variar de la velocidad de un móvil cualquiera: dicha relación se llama, de una manera general, *aceleración* del movimiento.

La aceleración, a su vez, puede tener mayor o menor propensión a variar, con el transcurso del tiempo, y las relaciones sucesivas que, análogamente a las anteriores, podrían formarse, constituirán otras tantas *circunstancias del movimiento;* pero en las aplicaciones solamente suele interesar el conocimiento de las dos relaciones expresadas, *velocidad* y *aceleración*, que juntamente con la *posición* del móvil y las *fuerzas* que sobre el mismo actúan, constituyen las *circunstancias principales del movimiento* de un cuerpo en cada instante, y de su conocimiento se deducen las consecuencias teóricas y prácticas que en la mayoría de los casos interesa conocer.

4. Cantidad de materia.—Masa.—Entre los elementos que más influyen en los efectos prácticos del movimiento

de un cuerpo, están la cantidad de materia que pueda contener y el estado físico de la misma. La cantidad de materia contenida en un cuerpo cualquiera, se llama *masa* de dicho cuerpo y su determinación se funda en el conocimiento de la *densidad* del mismo. Si representamos por δ dicha densidad, en un punto cualquiera del cuerpo y por v su volumen, la expresión de su masa es $M = f_v dv\delta$, o bien $M = v\delta$ cuando se trate de cuerpos homogéneos.

5. Magnitudes mecánicas.—Las fuerzas, velocidades, aceleraciones y diversas combinaciones que con estos elementos pueden hacerse, haciendo intervenir las masas y el tiempo, constituyen una serie de magnitudes, que sucesivamente iremos definiendo, con un carácter común que las distingue de las simplemente algebraicas: éstas quedan determinadas cuando se conoce su valor modular y el signo indicador en su cualidad; en las *magnitudes mecánicas* (*) es preciso conocer, además de dichos datos, *la dirección* en que obran y *el punto* del cuerpo sobre el cual actúan; este último dato se llama *punto de aplicación* de la correspondiente magnitud mecánica, y a la recta indefinida que, pasando por el punto de aplicación, señala la dirección en que ejerce su acción, se le da el nombre de línea *de acción, de posición* o *de situación* de la misma.

Resulta de lo anterior que una magnitud mecánica quedará perfectamente conocida y determinada, cuando se conozcan los siguientes elementos: *punto de aplicación, línea de acción, valor aritmético* o *modular* y *el sentido* que dentro de su línea de acción le corresponda.

En cuanto al tiempo y a la masa figurarán en los pro-

(*) Es frecuente llamar a estas magnitudes *magnitudes gráficas,* para distinguirlas de las algébricas; pero el nombre de gráficas parece referirse a la representación geométrica de tales magnitudes, que existen con independencia de dicha representación y cuyo cálculo puede hacerse lo mismo por métodos analíticos que gráficos; por esto creemos preferible el nombre de *magnitudes mecanicas* que le damos.

blemas mecánicos como cantidades algebraicas, susceptible de ser positiva o negativa la primera y con el carácter de valor numérico, siempre positivo, la segunda.

En todo nuestro estudio llamaremos cantidades algebraicas a las que no admitan más afección cualitativa que la positiva o negativa, y funciones algebraicas a las cantidades de dicha naturaleza que se relacionen entre sí por los símbolos del álgebra, sean o no *transcendentes* dichas relaciones.

6. Operaciones con las magnitudes mecánicas.—Las ideas que acabamos de expresar, sobre los elementos que intervienen en el *valor mecánico* de las citadas magnitudes, indican la necesidad de ampliar el concepto de las diversas operaciones algorítmicas, estableciendo reglas que permitan tener en cuenta aquellos elementos en los datos y resultados de dichas operaciones.

Esta consideración ha dado lugar a la formación de una parte especial de la Mecánica, que designaremos con el nombre de *Algoritmo mecánico* (*) y en ella comprenderemos, además de las reglas operativas a que pueden someterse las magnitudes mecánicas, algunas otras propiedades, de carácter geométrico o algebraico, que simplifican el estudio posterior de ciertas teorías mecánicas.

7. División del estudio de la Mecánica.—Prescindiendo del Algoritmo mecánico, cuyo objeto acabamos de indicar, se divide la Mecánica en dos partes principales que se llaman *Cinemática* y *Dinámica:* en la primera se estudian las propiedades del movimiento, con independencia de las causas que lo producen y sin tener en cuenta la naturaleza física de los cuerpos que se mueven; en la segunda se comprenden las propiedades del movimiento que resultan

(*) Generalmente se da el nombre de *Teoría vectorial* a esta parte de la Mecánica: creemos más expresivo el de *Algoritmo mecánico* y éste emplearemos usualmente.

de tener en cuenta las causas que pueden producirlo o modificarlo, y la naturaleza física de los cuerpos que se suponen en movimiento.

8. Aplicaciones de la Mecánica.—El estado de movimiento en que se encuentran en la Naturaleza todos y cada uno de los elementos que la integran, basta por sí solo para poner de manifiesto el alcance que pueden tener las teorías de la Mecánica.

Las investigaciones científicas hechas en diversos ramos del saber humano, parecen tender a reducir todos los fenómenos a simples vibraciones o movimientos más o menos complicados; esto hace vislumbrar un campo de acción tan extenso para esta ciencia, que no resulta exagerado creer que llegará un día en que todas las ciencias físicas no sean más que derivaciones de la Mecánica.

Limitándonos al estado actual de la Ciencia y a las aplicaciones que más pueden interesar al Ingeniero, observaremos que los principios de la Mecánica son los que sirven de base al cálculo y proyecto de toda clase de construcciones. La aplicación de dichos principios, con un fin determinado, constituye diversas ramas de la *Mecánica general* que reciben nombres particulares, en consonancia con la especialidad a que se dedican; tales son la *Termodinámica*, la *Electrotecnia*, la *Mecánica aplicada a las máquinas*, la *Mecánica aplicada a las construcciones*, la *Hidráulica aplicada*, la *Balística* y otras ciencias, en las que tienen frecuente empleo los diversos conocimientos que en la Mecánica general vamos a exponer.

9. Resumen del plan de estudio de la Mecánica general.—El siguiente cuadro expresa el plan que nos proponemos seguir en nuestro estudio, quedando, para el lugar correspondiente, la determinación del alcance que han de tener cada una de las subdivisiones que en el Algoritmo mecánico, Cinemática y Dinámica señalamos:

MECANICA GENERAL

- Introducción.... Objeto y divisiones de la Mecánica.
- Algoritmo mecánico.....
  - Elementos determinativos de las magnitudes mecánicas.
  - Equivalencia y composición de los sistemas vectoriales.
  - Polígonos y curvas funiculares.
  - Momentos estáticos, centros de gravedad y momentos de inercia.
  - Funciones gráficas.
- Cinemática.....
  - Del punto geométrico.
  - Del sólido geométrico.
  - De los sistemas articulados o teoría de los Mecanismos.
- Dinámica.....
  - Principios fundamentales y generalidades sobre las fuerzas.
  - Campos de fuerzas.
  - Dinámica del punto material.
  - Dinámica general de los sistemas materiales.
  - Dinámica especial de los sistemas invariables.
  - Dinámica especial de los sistemas articulados.
  - Dinámica especial de los sólidos y sistemas articulados naturales.
  - Dinámica especial de los sistemas flúidos.
  - Dinámica especial de las fuerzas instantáneas.
  - Apéndice.—Nociones de Balística.

PRIMERA PARTE

TEORÍA VECTORIAL

o

ALGORITMO MECÁNICO

TEORÍA VECTORIAL
o
ALGORITMO MECÁNICO

CAPITULO PRIMERO

Elementos determinativos de las magnitudes mecánicas

I

PRELIMINARES

10. Objeto del Algoritmo mecánico.—Según lo expuesto en la Introducción, el objeto de esta parte de la Mecánica es dar a conocer, formando cuerpo de doctrina, las diversas operaciones que con las magnitudes mecánicas pueden efectuarse, conservando el carácter de cantidades *directivas*, que las distingue esencialmente de las simplemente algebraicas.

También se incluirán en ella, como ya indicamos, algunas propiedades de carácter geométrico o analítico, que conviene dejar establecidas de antemano, para simplificar el estudio posterior de ciertas teorías mecánicas.

11. Representación gráfica de las magnitudes mecánicas.—Vectores.—La naturaleza de los elementos que determinan una magnitud mecánica, se presta con suma facilidad a la representación gráfica de las mismas.

Supongamos una recta limitada AB (fig. 1.ª) con una flecha en uno de sus extremos, el B por ejemplo; esta recta, a la que llamaremos *vector* cuando no precisemos su significación concreta, tiene *valor modular* expresado por la longitud AB o la BA, *línea de acción* señalada por la recta indefinida que une A con B, *punto de aplicación*, que convendremos sea el opuesto al que lleva la flecha, que a su vez recibe el nombre de *índice* del vector, y, por último, tiene *sentido*, indicado por la flecha, o sea por la dirección en que hay que recorrer el vector, para ir desde su punto de aplicación (*) al índice del mismo.

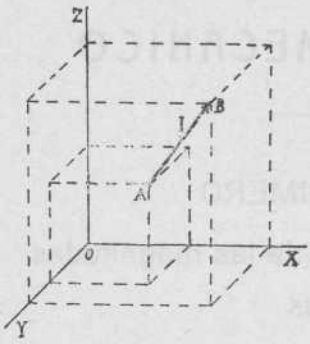


Fig. 1.ª

Resulta, pues, que si en una cierta región del espacio existe una magnitud mecánica y la reemplazamos por un vector, cuyos elementos determinativos sean los de la expresada magnitud, dicho vector nos indicará claramente las circunstancias de la misma, y cualquiera que sea la especie a que pertenezca tal magnitud mecánica, el expresado vector será su representación gráfica.

Para indicar un vector emplearemos la notación $[I_k]$, sirviendo los corchetes que abrazan a la letra I para expresar la naturaleza *directiva* del vector, por lo que prescindi-

(*) También se suele llamar *origen* del vector al punto de aplicación del mismo.

remos de ellos cuando nos refiramos solamente a su valor algebraico o modular.

12. Determinación analítica de un vector.—Analíticamente queda determinado un vector y la magnitud mecánica que representa, cuando se conozcan las coordenadas del punto de aplicación referidas a un sistema coordenado, que supondremos cartesiano rectangular, y se nos den las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados.

Con dichos datos, que representaremos por x_k, y_k, z_k, y X_k, Y_k, Z_k, se pueden calcular inmediatamente los elementos del vector; su valor modular es

$$I_k = \sqrt{X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2} ,$$

sus cosenos directores que, además de la dirección, indican el sentido, son

$$\cos\alpha_k = \frac{X_k}{\sqrt{X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2}} ,$$

$$\cos\beta_k = \frac{Y_k}{\sqrt{X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2}} ,$$

$$\cos\gamma_k = \frac{Z_k}{\sqrt{X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2}} ;$$

las ecuaciones analíticas de la línea de acción del vector serán:

$$x - x_k = \frac{X_k}{Z_k}(z - z_k),\ y - y_k = \frac{Y_k}{Z_k}(z - z_k) ,$$

o

$$\frac{x - x_k}{X_k} = \frac{y - y_k}{Y_k} = \frac{z - z_k}{Z_k} .$$

También queda determinado un vector cuando se dan las coordenadas de sus dos extremos, expresando cuál de

los dos es el punto de aplicación. El cálculo, en este caso, de los elementos del vector en función de dichas coordenadas, se hace con la misma facilidad que en el anterior.

Las proyecciones de un vector son magnitudes algebraicas, que deberán ir acompañadas del signo de su *cualidad*. En la figura 1.ª se ha supuesto que el vector [I] tiene sus tres proyecciones positivas; el cambio de signo de una cualquiera de ellas modificaría la posición del vector, y, en particular, el cambio de signo de las tres proyecciones conduce a un vector que está situado sobre la misma línea de acción del anterior, con el mismo valor modular y el mismo punto de aplicación, pero de sentido contrario; a los vectores que se encuentran en tales condiciones respecto a su punto de aplicación, dirección y sentido, se les llama *vectores directamente opuestos.*

13. Subvectores.—Cuando en una misma cuestión figuren magnitudes mecánicas de distinta especie, la representación gráfica de cada una de ellas se hará de la manera indicada; pero en el lenguaje ordinario llamaremos *subvectores* a los vectores representativos de magnitudes de orden secundario, cuando pudiera resultar confusión al emplear para todos el mismo nombre de vectores.

14. Sistemas de vectores.—Cuando en una región del espacio existen, representadas vectorialmente, dos o más magnitudes mecánicas, de la misma especie, relacionadas entre sí por ser datos o incógnitas de una misma cuestión, su conjunto recibe el nombre de *sistema vectorial* o *sistema de vectores.* Los sistemas vectoriales se representan simbólicamente colocando entre dos corchetes los vectores que lo forman del siguiente modo $[I_1, I_2 .. I_k]$.

15. Clasificación de los sistemas vectoriales.—Cuando los vectores de un sistema no cumplen ninguna condición especial, se dice que constituyen un *sistema cualquiera;* si

los vectores concurren en un punto, que generalmente es o se puede tomar como punto de aplicación de todos ellos, se llama el sistema *concurrente,* y cuando el punto de concurso de las líneas de acción de los vectores está en el infinito, el sistema se llama *paralelo.* Los sistemas que tienen todos sus vectores en un plano, se llaman *planos,* y en el caso contrario *alabeados.*

16. Sistemas vectoriales continuos y discontinuos.— Cuando en la región del espacio a que esté afecto el sistema vectorial pueda suponerse en cada punto un vector, cuyos elementos estén determinados por una ley cualquiera, el sistema vectorial así formado recibe el nombre de *continuo:* por oposición se llaman *discontinuos* los sistemas formados por un número limitado de vectores separados unos de otros por soluciones de continuidad.

Los sistemas vectoriales continuos pueden estar organizados de modo que el conjunto de los puntos de aplicación, de los infinitos vectores que los constituyen, formen una extensión geométrica cualquiera, y se les da el nombre de *lineales, superficiales* y *de volumen,* según la forma que afecte la expresada extensión geométrica.

17. Otros sistemas especiales.— Además de las clasificaciones generales que acabamos de hacer, hay algunos sistemas que, por su importancia y aplicaciones, reciben nombres especiales; así, por ejemplo, el sistema formado por dos vectores del mismo valor modular, paralelos y de sentido contrario, con distinta línea de acción, se llama *un par de vectores* o simplemente *un par,* y al formado por un par y un vector cuya línea de acción sea perpendicular al plano del par, se le llama *un torsor.*

Se llama *brazo* de un par la perpendicular común a los dos vectores que lo forman, limitada en la línea de acción de los mismos; el plano determinado por los dos vectores se llama *plano de acción* del par.

Eje de un torsor es la línea de acción del vector que entra en la formación de estos sistemas especiales.

II

SUMA GRÁFICA DE UN SISTEMA VECTORIAL. EQUIPOLENCIAS

18. Definiciones.—Cuando dos vectores iguales en valor modular, paralelos y del mismo sentido, tienen distinto punto de aplicación, se dicen que son *equipolentes* y esta circunstancia, que analíticamente se reconoce por la igualdad de los valores algebraicos de las proyecciones de los dos vectores sobre tres ejes coordenados, la expresaremos simbólicamente por la notación $[I] \equiv [I']$, llamada *equipolencia*, que se leerá diciendo [I] *equipolente a* [I'].

Si a partir de un punto cualquiera del espacio, el α de la figura 2.ª, se trazan, a continuación unos de otros, vectores equipolentes a los $[I_1]$, $[I_2]$ .... $[I_k]$ de un sistema vectorial, se formará un polígono abierto o cerrado, plano o alabeado, que recibe el nombre de *polígono vectorial* o *sumatorio* del sistema dado y el vector $[R] = [\alpha\omega]$ que resulta de unir el *origen* con el *fin* del polígono sumatorio, se llama *suma gráfica* del sistema en el punto α.

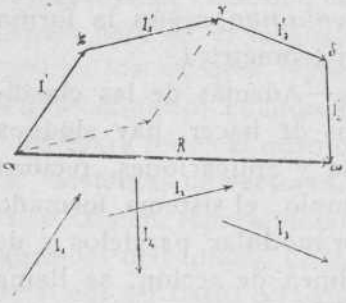


Fig. 2.ª

Se expresa que un vector [R] es la suma gráfica de un sistema vectorial en un punto, empleando la notación de equipolencia en la siguiente forma:

$$[R]^{\alpha} \equiv [I_1] + [I_2] + \ldots + [I_k].$$

El subíndice del primer miembro indica el punto donde se ha obtenido la suma gráfica, pudiéndose prescindir de él cuando no sea necesario tenerlo en cuenta; el signo + colocado entre los vectores del segundo miembro, sirve para expresar la operación sumatoria y los corchetes de los vectores indican que se trata de una suma gráfica y no algebraica.

19. Primeras propiedades de la suma gráfica de un sistema vectorial.—Del procedimiento indicado para obtener la suma gráfica de un sistema vectorial, se deducen las siguientes propiedades:

1.ª *El orden de los sumandos no altera el valor de la suma gráfica de un sistema vectorial en un punto.* En efecto, si los sumandos son dos consecutivos, su inversión conduce al mismo vértice del polígono vectorial, por la formación del paralelogramo que la figura 2.ª indica en los vectores I'_1 e I'_2, y pudiendo cambiarse el orden de dos consecutivos, podrán permutarse entre sí dos cualesquiera de los sumandos.

2.ª *Los vectores que representan la suma gráfica de un sistema vectorial en distintos puntos, son todos equipolentes.* Si las dos sumas $[R]_\alpha$ y $[R]_{\alpha'}$ se hacen en el mismo orden, resultan dos polígonos sumatorios con sus lados paralelos, iguales e igualmente dispuestos de dos en dos, de modo que las rectas que cierran a dichos polígonos resultarán también paralelas, iguales y del mismo sentido, siendo, por lo tanto, $[R]_\alpha \equiv [R]_{\alpha'}$; pero en virtud de la propiedad anterior, la equipolencia $[R]_\alpha = [R]_{\alpha'}$ también será cierta cualquiera que sea el orden en que se efectúe la operación sumatoria en los dos puntos α y α'.

3.ª *La suma gráfica de un sistema vectorial no se alterará cuando se sustituyen dos o más sumandos por su suma gráfica y recíprocamente.* Si los vectores que se han de sustituir son consecutivos, la proposición es evi-

dente, y si no lo son puede hacerse que lo sean en virtud de la 1.ª propiedad demostrada.

4.ª *Si a todos los sumandos de una suma gráfica se les da un incremento gráfico cualquiera, el de la suma es igual a la suma gráfica de los incrementos de los sumandos.*

5.ª *Si el valor modular de los sumandos de una suma gráfica se multiplica o divide por un mismo número, el de la suma gráfica queda multiplicado o dividido por el mismo número.*

6.ª *Si un sistema vectorial se proyecta sobre un plano, la suma gráfica del sistema proyectado es la proyección de la suma gráfica del sistema del espacio.*

7.ª *La proyección sobre un eje de la suma gráfica de un sistema, es igual a la suma algebraica de las proyecciones de los vectores que forman el sistema.*

8.ª *La suma gráfica de un sistema vectorial paralelo tiene por valor algebraico la suma algébrica de los vectores que lo forman.* Esta propiedad expresa que el concepto gráfico de la suma es más amplio que el algébrico, toda vez que aquél contiene a este último como caso particular del mismo.

20. Determinación analítica de la suma gráfica de un sistema vectorial. — Conocidas las proyecciones sobre los tres ejes coordenados de todos los vectores que forman un sistema, se determinarán las de su suma gráfica por las ecuaciones

$$X = \Sigma X_k, \quad Y = \Sigma Y_k, \quad Z = \Sigma Z_k$$

y una vez conocidas estas proyecciones, se podrá calcular el valor modular de [R] y sus cosenos directores como se indicó, para un vector cualquiera, en el número **12.** Las ecuaciones analíticas de la línea de acción de $[R]^{\alpha}$ serán

$$\frac{x - x'}{X} = \frac{y - y'}{Y} = \frac{z - z'}{Z},$$

suponiendo sean x', y', z' las coordenadas del punto α, y es de notar que estas coordenadas no influyen en el valor modular y cosenos directores de la suma gráfica, siendo esta consecuencia la comprobación analítica de la 2.ª propiedad demostrada en el número anterior.

Cuando se trate de sistemas planos y se tome por coordenado XY el del sistema dado, bastarán, para determinar el vector [R], las dos ecuaciones $X = \Sigma X_k$ e $Y = \Sigma Y_k$, reduciéndose la tercera a la identidad $o = o$.

Si el sistema es paralelo y tomamos el eje coordenado $o\,X$ en la dirección del sistema, quedará determinado el vector [R] por la ecuación $X = \Sigma X_k$ que, en este caso, será de la forma $R = \Sigma I_k$.

21. Sistemas de suma gráfica nula.—Cuando al trazar el polígono sumatorio de un sistema vectorial coincidan el origen y el fin del mismo, es decir, cuando dicha línea poligonal sea cerrada, el vector $[R] = [\alpha\omega]$ se reduce a cero y el sistema es de *suma gráfica nula*.

Analíticamente se reconoce esta circunstancia por las ecuaciones

$$\Sigma X_k = 0, \quad \Sigma Y_k = 0, \quad \Sigma Z_k = 0,$$

que expresan la anulación del vector [R], debiendo observarse que cuando se reduzcan a cero solamente una o dos de las ecuaciones anteriores, el vector [R] será paralelo a alguno de los planos o ejes coordenados.

22. Diferencia gráfica de dos vectores.—Se llama *diferencia gráfica* de dos vectores $[I_1]$ e $[I_2]$, otro vector que sumado con el $[I_2]$ reproduzca al $[I_1]$ o alguno de sus equipolentes; la operación sustractiva se indica simbólicamente por la notación $[I_1] - [I_2]$ y es fácil ver que si trazamos por un punto α (fig. 3.ª) dos vectores equipolentes al $[I_1]$ e $[I_2]$, el vector $[I_3]$ que une sus índices, con el sentido del sustraendo al minuendo, es la diferencia gráfica $[I_1] - [I_2]$.

También se ve que el vector $[I'_3]$, equipolente al $[I_3]$, es la suma gráfica del vector $[I_1]$ y de otro $[I''_2]$ paralelo, igual y de sentido contrario al $[I_2]$, resultando de esto que *la diferencia gráfica*, como la algebraica, *puede obtenerse sumando al minuendo el sustraendo con signo contrario.*

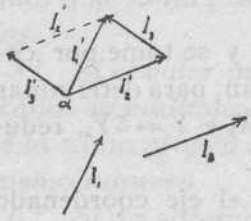


Fig. 3.ª

23. Sistemas vectoriales equipolentes. — Dos sistemas vectoriales que tengan la misma suma gráfica, en un punto cualquiera, se llaman *equipolentes*, y para indicar esta circunstancia se emplea la notación

$$[I_1] + [I_2] + [I_3] + \ldots + [I_m] \equiv [I'_1] + [I'_2] + [I'_3] + \ldots + [I'_n]$$

y abreviadamente, cuando no sea necesario poner de manifiesto los vectores que forman a dichos sistemas, se expresará por el símbolo $[S] \equiv [S']$.

El algoritmo expresivo de la equipolencia de dos sistemas vectoriales goza de varias propiedades interesantes que exponemos a continuación:

1.ª *El orden de los sumandos gráficos no altera la equipolencia existente entre los dos sistemas que forman el primero y el segundo miembro de la misma.*

2.ª *En una equipolencia se pueden sustituir dos o más sumandos por su suma gráfica y recíprocamente.*

3.ª *Si se suman o restan miembro a miembro varias equipolencias, resulta otra nueva equipolencia.*

4.ª *Si se le suma o resta un mismo vector a los miembros de una equipolencia, los resultados son equipolentes.*

5.ª *Si se multiplican o dividen por un mismo factor*

todos los vectores de una equipolencia, se obtiene otra nueva equipolencia.

6.ª *Se pueden pasar uno o varios vectores de un miembro a otro de una equipolencia, con tal que se cambie el signo a los vectores que pasan del uno al otro miembro.*

7.ª *El sistema formado por los vectores de uno de los miembros de una equipolencia y los del otro con signos contrarios es de suma gráfica nula.*

8.ª *Las proyecciones de los dos miembros de una equipolencia sobre un plano son también equipolentes.*

9.ª *Las proyecciones de los dos miembros de una equipolencia sobre un eje cualquiera son iguales.*

La última propiedad enunciada permite deducir de una equipolencia cuantas ecuaciones de proyección se deseen, cambiando la dirección del eje sobre el que se proyecta la equipolencia; de todas las ecuaciones que así se obtienen no hay más que tres que sean distintas, toda vez que la igualdad de proyecciones sobre tres ejes coordenados determina la equipolencia de los vectores correspondientes; todas las demás que puedan obtenerse sobre otros ejes indicarán relaciones que serán consecuencia de las tres primeras que se establezcan.

III

MOMENTO DE UN VECTOR RESPECTO A UN EJE Y CON RELACION A UN PUNTO

24. Objeto de esta teoría.—La influencia que las magnitudes mecánicas ejercen en el resultado de los problemas en que intervienen, suele depender, no solamente de su valor modular, dirección y sentido, sino también de la posición especial que la línea de acción de dicha magnitud

pueda tener con respecto a ciertos puntos y rectas, dando lugar esta consideración a la *teoría de los momentos* que vamos a exponer.

25. Momento de un vector respecto a un eje.—Recibe el nombre de *momento de un vector con relación a un eje* un subvector (*) contado sobre el mismo eje, cuyo valor modular se obtiene multiplicando la proyección del vector, sobre un plano perpendicular al eje, por la mínima distancia existente entre el vector y el eje y cuyo sentido se determina por la consideración siguiente: si se supone un observador, tendido sobre el eje y mirando a la indicada proyección del vector, podrá ocurrir que el sentido de ésta sea visto por el observador, de izquierda a derecha, o de derecha a izquierda; en el primer caso, el sentido del subvector del momento será el de la línea que va de los pies a la cabeza del observador, y al contrario cuando el sentido de la proyección del vector sea de derecha a izquierda.

En la figura 4.ª están señalados los subvectores $[N_1]$ y $[N_2]$ que representan los momentos, respecto al eje oZ, de los vectores $[I_1]$ e $[I_2]$; las longitudes de aquellos subvectores son:

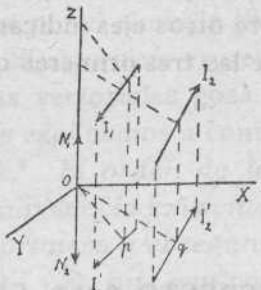


Fig. 4.ª

$$N_1 = I_1 \times op \text{ y } N_2 = I_2 \times oq,$$

y en cuanto al sentido se ve inmediatamente que el primero debe estar dirigido hacia la parte positiva del eje oZ y el segundo en sentido contrario. La mínima distancia entre el vector y el eje, proyectada en su verdadera magnitud en op, se llama *brazo* del momento.

(*) De acuerdo con lo dicho en el número 13 llamaremos *subvectores* a los vectores representativos de los momentos de un vector.

26. Observación.—Para facilitar la determinación del signo de un momento, puede seguirse la siguiente regla práctica: colocado el observador de modo que la línea de pies a cabeza esté dirigida en el sentido positivo del eje, los vectores que, imaginándolos en movimiento giratorio alrededor del eje en el sentido indicado por la flecha de su índice, *tiendan a girar en el mismo sentido en que giran las agujas de un reloj tendrán su momento positivo, y los que tiendan a girar en sentido contrario serán negativos.*

27. Notaciones.—Para indicar el momento de un vector respecto a un eje cualquiera, emplearemos el símbolo $M_\Delta [I_k]$, expresando el subíndice Δ el eje respecto al cual está tomado el momento del vector $[I_k]$. Cuando se trate de los momentos respecto a los ejes coordenados, sin perjuicio de emplear la notación general indicada cuando convenga, lo más frecuente será que los representemos por las letras L_k, M_k y N_k.

28. Consecuencias de la definición de momentos respecto a un eje.—De la definición de momentos respecto a un eje se deducen las siguientes consecuencias inmediatas:

1.ª *El momento de un vector respecto a un eje, no tiene origen determinado y puede tomarse su valor algebraico a partir de un punto cualquiera del eje.* Los vectores cuyo valor representativo no cambia cuando se trasladan en su línea de acción, como ocurre con los subvectores de momentos respecto a un eje, se dice que son de *origen indiferente.*

2.ª *El momento de un vector respecto a un eje, no varía cuando dicho vector se traslada sobre su línea de acción a una posición cualquiera.*

3.ª *El momento de un vector respecto a un eje, se anulará siempre que el vector corte o sea paralelo al eje.*

4.ª *El momento de un vector respecto a un eje, tiene por valor modular el doble del área del triángulo que resulta de unir los extremos de la proyección del vector, sobre el plano perpendicular al eje, con la traza de éste sobre el mismo plano.*

5.ª *Si por un punto cualquiera* A', *del eje de los momentos oZ, trazamos un vector* $[I_2] \equiv [I_1]$ *y por otro de la línea de acción de* $[I_1]$ *se traza un nuevo eje o'Z', paralelo al anterior, se verifica que el momento de* $[I_1]$ *respecto a Z y el de* $[I_2]$ *respecto a Z' son iguales y de sentido contrario.* Basta observar las construcciones de la figura 5.ª para darse cuenta de la propiedad expresada.

29. Coordenadas de un vector.—Las proyecciones de un vector y sus momentos sobre tres ejes coordenados rectangulares han recibido el nombre de *coordenadas* del mismo. Esta denominación se justifica observando que las proyecciones X e Y y el momento N de un vector, fijan en el plano XY la proyección de la línea de acción del vector, y del mismo modo, las proyecciones X y Z con el momento M, fijan la proyección de dicha línea sobre el plano XZ, con lo cual queda determinada en el espacio y sobre ella puede señalarse el vector, cuyo valor modular y sentido se deducen también de X, Y y Z **[12]**.

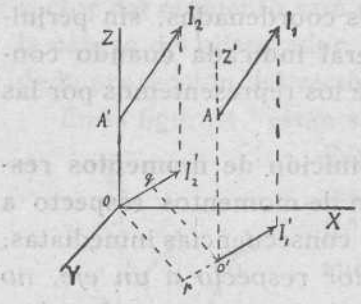


Fig. 5.ª

Verdad es que las referidas coordenadas no indican donde está situado el origen del vector; pero esta falta no tiene importancia, porque pronto hemos de ver que el efecto mecánico de los vectores es independiente (al menos en teoría) de la posición que dentro de su línea de acción se le asigne al referido origen.

30. Observación.—Los razonamientos hechos en el número anterior prueban que, para determinar un vector en la forma dicha, bastan las tres proyecciones X, Y y Z y dos momentos, y se deduce que señalados los valores de estas cinco coordenadas, el valor del otro momento queda determinado, puesto que depende de la posición que las otras coordenadas señalan a la línea de acción del vector; esto nos permite asegurar que entre estas seis coordenadas debe existir alguna relación constante, que servirá para determinar el valor de una de ellas cuando se conozcan las otras cinco. Para encontrar dicha relación conviene antes resolver la siguiente cuestión.

31. Ecuaciones analíticas de la línea de acción de un vector en función de las coordenadas del mismo.—Fórmulas de los momentos coordenados.—Sea el vector [I] (figura 6.ª) cuya proyección sobre el plano XY es [I']; la ecuación de la línea de acción de esta proyección es

$$y - y' = \frac{Y}{X}(x - x'),$$

siendo x' y' las coordenadas en el plano XY de un punto cualquiera del vector [I]; la distancia del origen o a la proyección [I'], o sea el brazo del momento, tiene por expresión

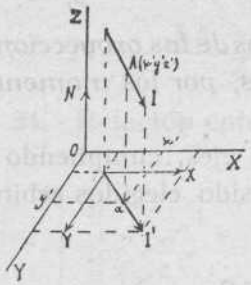


Fig. 6.ª

$$d = -\frac{-\left(y' - \frac{Y}{X}x'\right)}{\sqrt{\frac{Y^2}{X^2} + 1^2}} = \frac{x'\,Y - y'\,X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

y como, por otra parte, también es $d = \frac{N}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$, resulta $N = x'\,Y - y'\,X$.

Del mismo modo los momentos sobre los otros ejes

serán $M = z' X - x' Z$ y $L = y' Z - z' Y$, y como el punto $A\,(x'\ y'\ z')$, tomado sobre el vector [I], puede ser cualquiera de los infinitos de su línea de acción, se podrán suprimir los acentos de las coordenadas $x'\ y'\ z'$ y darle a éstas el carácter de coordenadas generales, con lo que las expresadas fórmulas se convierten en

$$L = yZ - zY,\ M = zX - xZ,\ N = xY - yX\ (*)$$

y representan las ecuaciones analíticas de la línea de acción del vector [I] en el espacio, en función de sus coordenadas, y al mismo tiempo se utilizarán para calcular los momentos, en función de las proyecciones, dando a x, y, z los valores $x'\ y'\ z'$ correspondientes al punto de aplicación del vector, o a otro cualquiera de la línea de acción del mismo.

32. Relación constante que liga a las coordenadas de un vector. — Las fórmulas del número anterior nos proporcionan el medio de encontrar la relación que anunciamos debía existir entre las coordenadas de un vector. Multiplicando la primera por X, la segunda por Y, la tercera por Z y sumándolas miembro a miembro, se obtiene

$$LX + MY + NZ = y\,XZ - zXY + zXY - xYZ + xYZ - y\,XZ = o;$$

es decir, que *la suma de los productos de las proyecciones del vector sobre los ejes coordenados, por los momentos respecto a los mismos, es nula.*

Como el origen y dirección de los ejes, cumpliendo la condición de ser rectangulares, han sido elegidos arbitrariamente, se deduce que la relación

$$LX + MY + NZ = o$$

existirá cualquiera que sea el sistema coordenado rectangular a que se refiera el vector.

(*) Obsérvese que por sustitución circular directa o inversa se pasa de cada una de estas fórmulas a la que le sigue o le precede.

33. Aplicación de las fórmulas anteriores.—Las fórmulas encontradas para expresar los momentos respecto a los ejes coordenados de un vector y la relación

$$LX + MY + NZ = o \ ,$$

que liga a las coordenadas del mismo, nos permiten resolver, entre otros, los siguientes problemas de aplicación:

1.° *Conocidas las proyecciones de un vector y las coordenadas de su punto de aplicación, determinar los momentos del mismo respecto a los ejes coordenados.* Sean los datos $X = 2$, $Y = -3$, $Z = 5$, $x = 1$, $y = 4$ y $z = 6$; los momentos pedidos serán

$$L = yZ - zY = 20 + 18 = 38 \ ,$$
$$M = zX - xZ = 12 - 5 = 7 \ ,$$
$$N = xY - yX = -3 - 8 = -11.$$

2.° *Conocidas cinco coordenadas de un vector, determinar la sexta.* Sean los datos $X = 2$, $Y = -3$, $Z = 5$, $L = 38$, y $M = 7$; el valor de N se deducirá de la relación

$$LX + MY + NZ = o$$

y es $$N = -\frac{LX + MY}{Z} = -\frac{76 - 21}{5} = -\frac{55}{5} = -11.$$

34. Relación entre los momentos de un vector respecto a ejes paralelos.—Los momentos de un vector, respecto a dos ejes paralelos, están ligados por una sencilla relación que permite pasar con facilidad de uno a otro.

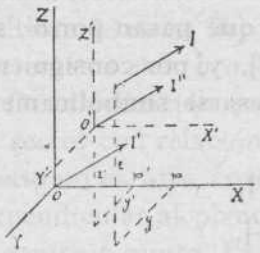


Fig. 7.ª

Sea un vector [I] (fig. 7.ª) cuyas coordenadas, referidas al sistema que tiene su origen en o, son X, Y, Z, L, M y N; tracemos

por el punto o' $(x'\,y'\,z')$ un sistema coordenado paralelo al anterior; las proyecciones del vector [I] sobre los ejes del nuevo sistema siguen siendo las mismas; el punto del vector que tuviera por coordenadas x, y y z en el primer sistema, tendrá respecto al segundo los valores $x - x'$, $y - y'$ y $z - z'$, y los momentos del vector, respecto a los nuevos ejes trazados por o' serán

$$L' = (y - y')\,Z - (z - z')\,Y,$$
$$M' = (z - z')\,X - (x - x')\,Z,$$
$$N' = (x - x')\,Y - (y - y')\,X;$$

la primera de estas fórmulas se convierte en

$$L' = (yZ - zY) - (y'Z - z'Y) = L - (y'Z - z'Y)$$

y lo mismo se tiene

$$M' = M - (z'X - x'Z),\ N' = N - (x'Y - y'X).$$

Si el vector [I], cuya línea de acción ocupa una posición cualquiera en el espacio, lo trasladamos paralelamente hasta que su línea de acción pase por o' $(x'\,y'\,z')$, los paréntesis que forman los substraendos de las fórmulas anteriores, expresan el momento del vector [I'] trasladado, respecto a los primitivos ejes coordenados. Pero el momento de un vector que pasa por o', respecto a los ejes que pasan por o, y el momento del vector [I'] equipolente al anterior, trazado por el origen o, respecto a los ejes que pasan por o', son iguales y de signos contrarios [**28**-5.ª], y, por consiguiente, las fórmulas anteriores pueden expresarse simbólicamente en la forma

$$L' = L + M_X'\ [I'],$$
$$M' = M + M_Y'\ [I'],$$
$$N' = N + M_Z'\ [I'],$$

siendo [I'] el vector, equipolente al dado, trazado por el origen del sistema coordenado primitivo.

34'.—Las fórmulas anteriores pueden utilizarse para calcular el momento de un vector que pase por el origen de coordenadas, respecto a los ejes, paralelos a los coordenados, trazados por un punto cualquiera $o'(x'\ y'\ z')$ del espacio; en este caso los sumandos L, M y N son nulos y los expresados momentos serán

$$L' = -(y'Z - z'Y),$$
$$M' = -(z'X - x'Z),$$
$$N' = -(x'Y - y'X).$$

35. Momento de un vector con relación a un punto.—Se llama *momento de un vector* [I] *respecto a un punto, o centro o,* (figura 8.ª) un subvector [G] con el origen en dicho punto, línea de acción perpendicular al plano del vector y el punto, sentido determinado en las condiciones que para los momentos respecto a ejes se establecieron y valor modular igual al producto del vector por la distancia del punto al mismo, o sea

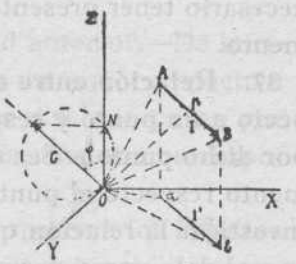


Fig. 8.ª

$$G = I \times op;$$

la distancia *op* se llama en estos momentos, como en los referentes a ejes, *brazo* del momento.

De la definición que acabamos de dar del momento de un vector con relación a un punto, se deduce que este momento no es otra cosa que el del vector respecto al eje perpendicular al plano del vector y el punto, trazado por este mismo punto. La única diferencia que en realidad exis-

te entre dichos momentos, estriba en que los momentos con relación a un punto tienen, por definición, su origen en el punto que se considere.

La analogía que existe entre los momentos con relación a puntos y con relación a ejes, permite extender a los primeros todas las propiedades demostradas para los segundos, independientes de la dirección de los ejes; así, por ejemplo, tendrán lugar en estos momentos propiedades análogas a las consignadas en las consecuencias 2.ª, 3.ª y 4.ª del número **28**.

36. Notación.—Para representar simbólicamente el momento de un vector respecto a un punto usaremos el símbolo $M_0[I_k]$, análogo al indicado para los momentos respecto a ejes, y para designar al subvector correspondiente emplearemos la notación $[G_k]_0$, expresando el subíndice de los corchetes el punto con relación al cual está tomado el momento y de cuyo subíndice prescindiremos cuando no sea necesario tener presente en la notación el *centro* del momento.

37. Relación entre el momento de un vector con respecto a un punto y respecto a los diversos ejes que pasan por dicho punto.—Sea el vector [I] de la figura 8, cuyo momento respecto al punto *o* es $M_0[I] = [G]$, y tratemos de investigar la relación que pueda existir entre dicho momento y el del mismo vector con relación a un eje arbitrario que pase por *o*. Supongamos que este punto se ha tomado por origen de coordenadas y que la recta arbitraria, que por tal punto hemos de trazar, sea uno de los ejes del sistema coordenado, el *oZ* por ejemplo.

El momento *N* de [I], respecto al eje *oZ*, está expresado en valor modular por la igualdad

$$N = 2 \times \text{área del triángulo } \overline{oab}$$

y, lo mismo, el valor modular de [G] es

$$G = 2 \times \text{área del triángulo } \overline{oAB};$$

en la figura se ve que el triángulo $\overline{oab}$ es la proyección ortogonal del $\overline{oAB}$ sobre el plano XY y, por lo tanto, será

$$\text{área } \overline{oab} = \text{área } \overline{oAB} \times \cos\varphi,$$

siendo φ el ángulo de los planos donde dichas áreas están situadas; pero este ángulo es el mismo que el que forman los subvectores [G] y [N], obteniéndose la igualdad $N = G \times \cos\varphi$; es decir, que *proyectando el subvector* $[G]_0$ *sobre una recta cualquiera que pase por o, tendremos trazado el momento del vector* [I] *con relación a dicha recta.*

Aunque los razonamientos anteriores se han referido al valor modular de los momentos, es fácil ver que el sentido de la proyección de $[G]_0$ sobre la recta arbitraria que se trace por *o*, es el que corresponde al momento del vector [I] con relación a dicha recta.

38. Consecuencias de la propiedad anterior.—De la relación que existe entre el momento de un vector respecto a un punto y con relación a los diversos ejes que pasan por dicho punto, se deducen algunas consecuencias que exponemos a continuación:

1.ª Los momentos de un vector, respecto a los infinitos ejes que pasan por un punto, tienen un valor máximo que corresponde al eje perpendicular al plano del vector y el punto. Este máximo es el momento del vector con relación al punto dado.

2.ª Si se traza una superficie esférica tangente al plano determinado por el vector y el punto, teniendo por diámetro el subvector $[G]_0$, la cuerda determinada en esta superficie esférica por una secante cualquiera que pase por *o*, es el momento del vector dado con relación a dicha secante.

3.ª Conocidos los momentos de un vector, respecto a

tres ejes rectangulares que concurran en un punto, se determinan inmediatamente los elementos del momento de dicho vector con relación al expresado punto. Basta observar que dichos momentos L, M y N, no son otra cosa que las proyecciones del subvector $[G]_0$ sobre los referidos ejes y la longitud de $[G]_0$ será

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

sus cosenos directores

$$\cos\lambda = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

y las ecuaciones de su línea de acción

$$\frac{x}{L} = \frac{y}{M} = \frac{z}{N}.$$

4.ª El momento de un vector respecto a un punto, es la suma gráfica, en dicho punto, de los momentos del mismo vector respecto a tres ejes rectangulares que pasen por el expresado punto. Esta consecuencia podía haberse supuesto incluida en la anterior: por su importancia y frecuente aplicación la enunciamos separadamente. Su expresión simbólica está contenida en la equipolencia

$$[G]_0 \equiv [L] + [M] + [N].$$

39. Momento de un vector con relación a un punto en función del momento del vector respecto a otro punto.— Supongamos que se nos dan las coordenadas de un vector

cualquiera [I] (fig. 9.ª) con relación al sistema coordenado que tiene su origen en *o*; sea [G] el momento del vector respecto a dicho punto y *L, M, N* sus proyecciones sobre los ejes; si queremos encontrar el momento [G'] del vector con relación a un nuevo centro *o'* (*x' y' z'*), sabemos que las proyecciones de [G'] sobre los ejes coordenados, o sobre sus paralelos trazados por *o'*, son **(34)**

$$L' = L - (y'Z - z'Y),$$
$$M' = M - (z'X - x'Z),$$
$$N' = N - (x'Y - y'X),$$

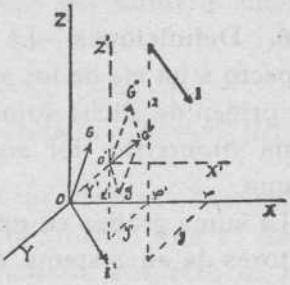


Fig. 9.ª

y estas fórmulas nos permitirán calcular el valor modular y cosenos directores de [G'], así como determinar las ecuaciones analíticas de su línea de acción.

39'.—Si en la misma figura 9.ª suponemos que el vector [I] se ha trasladado paralelamente a la posición [I'] y llamamos [g] el momento de [I'] respecto al punto *o'*, vamos a demostrar que el *momento* [*G'*] *del vector* [*I*], *respecto al punto o', es la suma gráfica, en este último punto, de los subvectores* [*G*] *y* [*g*].

En efecto, los momentos [G'], [G] y [g] satisfacen a las equipolencias siguientes:

$$[G'] \equiv [L'] + [M'] + [N'],$$
$$[G] \equiv [L] + [M] + [N],$$
$$[g] \equiv M_{X'}\,[I'] + M_{Y'}\,[I'] + M_{Z'}\,[I'],$$

y en virtud de las fórmulas establecidas en el número **34** resulta $[G'] \equiv [G] + [g]$, como queríamos demostrar.

IV

MOMENTOS DE UN SISTEMA VECTORIAL CON RELACION A UN EJE Y A UN PUNTO

40. Definiciones.—La suma gráfica de los momentos respecto a un eje de los vectores de un sistema, tomando por origen de dicha suma un punto cualquiera del eje, se llama *momento del sistema vectorial* con relación al mismo.

La suma gráfica en un punto de los momentos de los vectores de un sistema con relación al mismo, se llama *momento del sistema vectorial* con relación a dicho *punto*.

41. Determinación del momento de un sistema respecto a un eje.—Suponiendo conocidos los momentos de los vectores que forman el sistema, respecto a un eje cualquiera Δ, obtendremos, por definición, el momento del sistema respecto al mismo eje por la fórmula $M_\Delta [S] = \Sigma M_\Delta [I_k]$, puesto que la suma gráfica que la definición expresa, se convierte, en estos casos, en una suma algebraica de subvectores, contados todos sobre el eje Δ.

Aplicando el razonamiento anterior a los ejes coordenados y representando por L, M y N los momentos del sistema respecto a los mismos, estableceremos las fórmulas

$$L = \Sigma L_k\,, \quad M = \Sigma M_k\,, \quad N = \Sigma N_k\,,$$

y recordaremos que si los momentos de los vectores no fueran datos del problema, se calcularían por las conocidas fórmulas (**31**).

$$L_k = y_k Z_k - z_k Y_k,\ M_k = z_k X_k - x_k Z_k,\ N_k = x_k Y_k - y_k X_k,$$

en las que suponemos que $x_k\ y_k\ z_k$ son las coordenadas de un punto cualquiera de la línea de acción del vector $[I_k]$.

42. Caso de sistemas concurrentes.—La elección del punto de concurso $o'\ (x'\ y'\ z')$ de los vectores de un sistema concurrente, para utilizar sus coordenadas en el cálculo de los momentos respecto a un eje, conduce a una propiedad notable que nos conviene dejar establecida.

En dicha hipótesis las fórmulas del número anterior nos dan

$$L = \Sigma(y' Z_k - z' Y_k) = y' \Sigma Z_k - z' \Sigma Y_k =$$
$$= y'.Z - z'.Y = M_X\,[\mathrm{R}]_{o'}\ ,\quad M = M_Y\,[\mathrm{R}]_{o'}\ ,\quad N = M_Z\,[\mathrm{R}]_{o'}\ ,$$

que expresan que *el momento de un sistema concurrente respecto a un eje cualquiera es el mismo que el de su suma gráfica, en el punto de concurso, respecto al mismo eje.*

43. Momentos de un sistema respecto a ejes paralelos.—Sea $L = \Sigma L_k$ el momento de un sistema vectorial respecto al eje coordenado oX y veamos qué relación existe entre este momento y el del sistema con relación a un eje $o'X'$, paralelo al anterior, pasando por un punto cualquiera $o'\ (x'\ y'\ z')$.

Llamando L' a este último momento, se verificará

$$L' = \Sigma L'_k = L'_1 + L'_2 + \ldots\ldots + L'_k\ ,$$

pero llevando todos los vectores del sistema al origen o, resulta (**34**)

$$L'_1 = L_1 + M_{X'}\,[\mathrm{I}'_1],$$
$$L'_2 = L_2 + M_{X'}\,[\mathrm{I}'_2],$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$L'_k = L_k + M_{X'}\,[\mathrm{I}'_k],$$
$$L' = \Sigma L_k + \Sigma M_{X'}\,[\mathrm{I}'_k] = L + M_{X'}\,[\mathrm{R}]_o,$$

siendo $[\mathrm{R}]_o$ la suma gráfica del sistema en el origen de coordenadas.

Aplicando las mismas consideraciones a los tres ejes coordenados, se obtienen las fórmulas

$$L' = L + M_{X'}\,[\mathrm{R}]_o\,,$$
$$M' = M + M_{Y'}\,[\mathrm{R}]_o\,,$$
$$N' = N + M_{Z'}\,[\mathrm{R}]_o\,,$$

análogas a las encontradas antes para un solo vector.

Las fórmulas anteriores pueden expresarse en función de las *coordenadas* del sistema (*) poniendo en vez de los símbolos $M_{X'}\,[\mathrm{R}]_o$, $M_{Y'}\,[\mathrm{R}]_o$ y $M_{Z'}\,[\mathrm{R}]_o$ sus valores expresados por las fórmulas del número **34**; así se obtienen las siguientes:

$$L' = L - (y'Z - z'Y),$$
$$M' = M - (z'X - x'Z),$$
$$N' = N - (x'Y - y'X),$$

análogas también a las encontradas en el mismo número para un vector.

44. Determinación del momento de un sistema respecto a un punto.—Tomemos, en primer lugar, el punto dado o por origen de coordenadas y supongamos conocidos los momentos $[\mathrm{G}_1]$, $[\mathrm{G}_2]$, ... $[\mathrm{G}_k]$ de los vectores respecto al indicado punto. La definición del momento de un sistema, respecto a un punto, nos dice que

$$[G] \equiv [G_1] + [G_2] + \ldots\ldots + [G_k],$$

y proyectando esta equipolencia sobre un eje Δ, que pase por o, se obtendrá una proyección

$$[\mathrm{G}]_\Delta = \Sigma M_\Delta\,[\mathrm{I}]_k = M_\Delta\,[\mathrm{S}];$$

es decir, que en un sistema vectorial, como en un solo vec-

(*) Por analogía con lo hecho para un vector, si bien no con la misma propiedad, llamaremos, para abreviar, *coordenadas de un sistema vectorial* a las seis cantidades *X, Y, Z, L, M, N,* correspondientes al sistema referido a tres ejes rectangulares.

tor, *proyectando el momento del sistema, con relación a un punto, sobre un eje que pase por este punto, se obtiene el momento del sistema respecto a dicho eje.*

Aplicando esta propiedad a los tres ejes coordenados, resultan las proyecciones

$$L = \Sigma L_k,\ M = \Sigma M_k,\ N = \Sigma N_k,$$

que permiten calcular el valor modular, cosenos directores y las ecuaciones de la línea de acción del subvector [G].

44'.—Sea ahora [G'] el momento del sistema respecto al punto o' $(x'\ y'\ z')$ y veamos la manera de expresar las proyecciones de [G'] sobre los ejes coordenados, en función de las coordenadas del sistema; las proyecciones de [G'] sobre los ejes paralelos a los coordenados, trazados por o', son los momentos del sistema respecto a dichos ejes, y estos momentos están expresados por las fórmulas (**43**)

$$L' = L + M_{X'}\,[\mathrm{R}]_o\,,$$
$$M' = M + M_{Y'}\,[\mathrm{R}]_o\,,$$
$$N' = N + M_{Z'}\,[\mathrm{R}]_o\,,$$

y si llamamos [g] al momento de $[\mathrm{R}]_o$ respecto a o', se verificarán las equipolencias

$$[G] \equiv [L] + [M] + [N]$$
$$[g] \equiv M_{X'}\,[\mathrm{R}]_o + M_{Y'}\,[\mathrm{R}]_o + M_{Z'}\,[\mathrm{R}]_o\,;$$

sumadas miembro a miembro dan

$$[G] + [g] \equiv [L] + M_{X'}\,[\mathrm{R}]_o + [M] + M_{Y'}\,[\mathrm{R}]_o + [N] + M_{Z'}\,[\mathrm{R}]_o\,,$$
$$[G] + [g] \equiv [L'] + [M'] + [N'] \equiv [G']$$

y relacionando el primero con el último miembro

$$M_{o'}\,[\mathrm{S}] \equiv M_o\,[\mathrm{S}] + M_{o'}\,[\mathrm{R}]_o\,,$$

o sea que *el momento de un sistema vectorial, respecto*

a un punto o', es la suma del momento del sistema respecto a otro punto cualquiera y el momento respecto al primer punto de la suma gráfica del sistema en el segundo punto.

45. Consecuencias.—De la propiedad anterior se deducen las consecuencias siguientes:

1.ª *Dos sistemas vectoriales que tengan la misma suma gráfica y el mismo momento en un punto, tienen el mismo momento en todos los demás puntos del espacio.*

2.ª *El momento de un sistema concurrente, respecto a un punto cualquiera, es igual al de su suma gráfica en el punto de concurso respecto al mismo punto.*

3.ª *Si un sistema vectorial es de suma gráfica nula su momento tiene valor modular, dirección y sentido constantes en todos los puntos del espacio.*

4.ª *Si un sistema vectorial es de suma gráfica nula y su momento es cero en un punto cualquiera, también será cero en todos los demás del espacio.*

46. Momento de un par.—El ejemplo más sencillo de sistemas con el momento constante en todos los puntos del espacio es un par; en estos sistemas la suma gráfica es siempre nula y su momento, respecto a un punto cualquiera, es *un subvector con la línea de acción perpendicular al plano del par y valor modular determinado por el producto de uno de los vectores que forman el par por el brazo del mismo;* basta observar, para darse cuenta de esta propiedad, que, para un punto cualquiera *o* del plano del par (fig. 10), se verificará

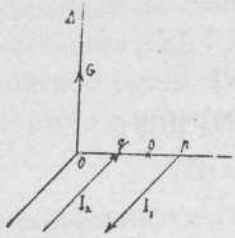


Fig. 10

$$G_o = I_1 . op \pm I_2 . oq = I_1 \times pq$$

y lo mismo será para los demás puntos del espacio. Tam-

bién se ve que el momento de un par es igual al de uno de sus vectores respecto a cualquier punto de la línea de acción del otro.

El sentido del momento de un par se determina con facilidad suponiéndose colocado el observador de pie sobre el plano de acción del par y en un punto situado entre los dos vectores; si el sentido en que éstos parecen tender a girar, alrededor del observador, es el mismo que el de las agujas de un reloj, la línea de pies a cabeza del observador indicará el sentido del momento, y si, por el contrario, el giro tendiera a producirse en sentido inverso, el sentido del momento sería el opuesto al señalado.

Se acostumbra a llamar *eje* de un par la línea de acción, perpendicular al plano del par, sobre la cual se cuenta el momento del par en un punto cualquiera. La constancia de esta dirección del eje del par nos demuestra, recordando la propiedad establecida en el número **44**, que *el momento de un par con relación a todos los ejes paralelos a su plano de acción, o situados en él, es siempre nulo.*

47. Constante característica de un sistema vectorial.— La relación $LX + MY + NZ = 0$, existente entre las coordenadas de un vector, es un caso particular de otra relación, más general, que liga las proyecciones y momentos respecto a tres ejes coordenados de un sistema vectorial cualquiera.

Sean X, Y, Z, L, M y N las coordenadas de un sistema vectorial correspondientes al sistema de ejes coordenados que tiene su origen en un punto o (fig. 11); se verificarán las igualdades

$$X = R\cos\alpha, \quad Y = R\cos\beta, \quad Z = R\cos\gamma,$$

$$L = G\cos\lambda, \quad M = G\cos\mu, \quad N = G\cos\nu,$$

que multiplicadas convenientemente dan

$$LX + MY + NZ = RG\cos\theta,$$

siendo θ el ángulo que forman en o el vector [R] y el subvector [G].

El segundo miembro de la última igualdad representa el producto de [R] por la proyección de [G] sobre [R] y es evidente que este producto es independiente de la orientación del sistema coordenado, que tiene su origen en el punto o.

En otro punto o' $(x'\ y'\ z')$ el subvector [G'] tendrá, en general, distinto valor modular y distinta dirección; pero vamos a demostrar que la expresión

$$L'X' + M'Y' + N'Z' = RG' \cos\theta'$$

tiene en el punto o' el mismo valor que en el punto o.

En efecto, las proyecciones X', Y' y Z', en los ejes paralelos a los anteriores trazados por o', son iguales a las X, Y y Z y los momentos L', M' y N' vienen dados por las ecuaciones [43]

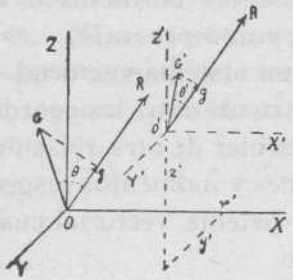


Fig. 11

$$L' = L - (y'Z - z'Y),$$
$$M' = M - (z'X - x'Z),$$
$$N' = N - (x'Y - y'X);$$

multiplicando por X', Y' y Z' los primeros miembros y por X, Y y Z los segundos, se obtiene

$$L'X' + M'Y' + N'Z' = LX + MY + NZ,$$

o sea

$$RG' \cos\theta' = RG \cos\theta;$$

es decir, que cualquiera que sea el origen y la orientación de los ejes coordenados, la expresión $LX + MY + NZ = K$

tiene constantemente el mismo valor, para un sistema vectorial determinado, recibiendo, por dicho motivo, el nombre de *constante característica del mismo.*

48. Consecuencias.—De la relación

$$LX + MY + NZ = RG \cos \theta = K$$

se deducen algunas consecuencias que interesa conocer:

1.ª La constante característica de un sistema vectorial expresa el valor del *producto geométrico* de la suma gráfica y del momento del sistema en todos los puntos del espacio.

2.ª La constante característica de un sistema vectorial sólamente puede ser nula en alguno de los tres casos siguientes: cuando el sistema sea de suma gráfica nula, cuando el momento del sistema sea nulo y cuando el vector [R] y el subvector [G] sean perpendiculares.

3.ª Como la suma gráfica de un sistema tiene el mismo valor modular en todos los puntos, se deduce que el producto $G. \cos \theta = g$, o sea la proyección del momento en un punto sobre la línea de acción de la suma gráfica del sistema, tiene el mismo valor en todos los puntos del espacio.

El valor algebraico de g, en función de las coordenadas del sistema, es $g = \dfrac{LX + MY + NZ}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$.

49. Eje central de un sistema vectorial.—Los momentos de un sistema vectorial, con relación a los infinitos puntos del espacio, pueden adquirir diversos valores modulares en relación con el ángulo θ que en cada punto forman [R] y [G], y si es fácil reconocer que dichos valores pueden crecer más allá de todo límite, lo mismo se ve que los expresados momentos tienen un mínimo, que corresponderá a todos aquellos puntos en que el ángulo θ se reduzca a *cero;*

en estos puntos, la suma gráfica y el momento del sistema tienen la misma línea de acción, y el lugar geométrico de los puntos en que se verifica dicha condición, se llama *eje central* del sistema vectorial dado.

El eje central de un sistema tiene varias propiedades que vamos a exponer:

1.ª *El eje central de un sistema vectorial es una línea recta.* Sea $o'\ (x'\ y'\ z')$ un punto del eje central, las coordenadas del sistema en tal punto son

$$X' = X,\ Y' = Y,\ Z' = Z,$$
$$L' = L - (y'Z - z'Y),$$
$$M' = M - (z'X - x'Z),$$
$$N' = N - (x'Y - y'X),$$

y por ser iguales los cosenos directores de [R] y [G'] se verificará

$$\frac{L'}{X'} = \frac{M'}{Y'} = \frac{N'}{Z'}$$

o bien

$$\frac{L - (y'Z - z'Y)}{X} = \frac{M - (z'X - x'Z)}{Y} = \frac{N - (x'Y - y'X)}{Z}$$

y estas últimas igualdades, si se da a $x'\ y'\ z'$ el carácter de coordenadas generales, representarán las ecuaciones analíticas del lugar geométrico buscado, que será una recta por ser de primer grado las ecuaciones encontradas.

2.ª *Si en un punto adquiere el momento del sistema su valor mínimo y trazamos por dicho punto una paralela a la suma gráfica del sistema, la recta trazada es el eje central del mismo.* Esta proposición, que es evidente después de lo demostrado, nos dice que en los sistemas

concurrentes el eje central es la línea de acción de la suma gráfica en el punto de concurso, por ser nulo el momento del sistema respecto a dicho punto.

3.ª *El eje central de un torsor es la línea de acción del vector que forma parte de tal sistema.* Puesto que en los puntos de dicha línea de acción es donde el momento del sistema se reduce a su valor mínimo, que es el momento del par que entra en la formación del torsor.

4.ª *El eje central de un sistema plano está situado en el plano de los vectores que forman el sistema.* En efecto, si suponemos que dicho plano es el coordenado XY, las coordenadas del sistema son

$$X = \Sigma X_k, \quad Y = \Sigma Y_k, \quad Z = o,$$
$$L = o, \quad M = o, \quad N = \Sigma N_k,$$

y las ecuaciones del eje central se reducen a

$$\frac{zY}{X} = \frac{-zX}{Y} = \frac{\Sigma N_k - (xY - yX)}{o};$$

los dos primeros miembros de esta igualdad conducen a la condición $z\,(X^2 + Y^2) = o$, que demuestra es $z = o$ en todos los puntos del eje central.

50. Observación.—La definición del eje central exige la existencia de la suma gráfica del sistema vectorial que se considere; la noción de tal eje carece de sentido en los sistemas de suma gráfica nula; esto no obstante, suele llamarse eje central, en estos sistemas, a una recta trazada por cualquier punto paralelamente a la dirección constante del momento del sistema.

CAPITULO SEGUNDO

Equivalencia y composición de los sistemas vectoriales

I

EQUIVALENCIA DE LOS SISTEMAS VECTORIALES

51. Definición.– Dos sistemas vectoriales son *equivalentes* cuando tienen la misma suma gráfica y el mismo momento en todos los puntos del espacio (*).

Es evidente, por otra parte, que si dos sistemas tienen el mismo momento en todos los puntos del espacio, sus momentos, respecto a cualquier eje, serán también iguales.

Cuando el efecto mecánico de las magnitudes concretas, representadas por los vectores, no dependa más que de la suma gráfica y momentos de los mismos, los sistemas equivalentes podrán sustituirse, unos por otros, en todas aquellas cuestiones en que dichas magnitudes intervengan.

En teoría se supone siempre que dichas circunstancias bastan para justificar la indicada sustitución; pero no debemos olvidar que en la práctica son algunas veces insuficientes: por este motivo cuando se concrete el significado

(*) En realidad bastaría para establecer la equivalencia de los sistemas la igualdad de momentos en todos los puntos del espacio, pues es fácil reconocer que esta condición lleva consigo, implícitamente, la igualdad de sumas gráficas en los dos sistemas, pero, por razones de orden didáctico, nos ha parecido conveniente definir la equivalencia como lo hemos hecho.

de los vectores, será preciso, para aplicar con libertad las reglas operativas que vamos a estudiar, reconocer en cada caso que las expresadas condiciones son prácticamente suficientes, y agregar, en caso contrario, las que sean necesarias para que la referida sustitución pueda hacerse, sin modificar el efecto mecánico del sistema sustituido.

52. Notación. La equivalencia de dos sistemas vectoriales la indicaremos por el símbolo

$$[S] = [S'], \text{ o bien } [I_1, I_2, \ldots I_k] = [I'_1, I'_2, \ldots I'_k]$$

cuando convenga poner de manifiesto los vectores constitutivos de uno y otro sistema.

53. Reconocimiento de la equivalencia de dos sistemas.—Para establecer la equivalencia de los sistemas vectoriales se utiliza la siguiente propiedad:

TEOREMA.—*Dos sistemas que tengan la misma suma gráfica y el mismo momento, en un punto cualquiera, son equivalentes.*

Basta recordar, para justificar esta proposición, que la suma gráfica de un sistema no cambia de valor modular, dirección ni sentido, al variar el origen del polígono sumatorio, y esto, unido a la propiedad establecida en el número **45**-1.ª, nos dice que si dos sistemas tienen común en un punto la suma gráfica y el momento, lo mismo les ocurrirá en todos los demás puntos del espacio, y serán, por tanto, equivalentes.

Llamaremos *valor mecánico relativo,* o simplemente *valor mecánico,* de un vector o sistema vectorial, *en un punto,* al conjunto de su suma gráfica y su momento en dicho punto, y así podremos decir que son equivalentes los sistemas vectoriales que tienen el mismo valor mecánico en todos los puntos del espacio, aun cuando ya hemos visto que basta, para establecer dicha equivalencia, que lo tengan en uno solo.

54. Sistemas nulos o en equilibrio. – Cuando un sistema vectorial tiene nulos su suma gráfica y su momento en todos los puntos del espacio, se dice que es un *sistema nulo*, o bien un *sistema en equilibrio;* pero en virtud de la propiedad demostrada, para establecer el equilibrio de un sistema, basta probar que la suma gráfica y el momento se anulan en un solo punto escogido de cualquier manera.

El ejemplo más sencillo de sistemas nulos es el formado por dos vectores iguales y directamente opuestos; la suma gráfica y los momentos de dicho sistema son evidentemente nulos en todos los puntos del espacio.

55. Expresión analítica de la equivalencia de dos sistemas vectoriales. – Para establecer analíticamente la equivalencia de dos sistemas vectoriales, basta expresar la igualdad de sus coordenadas por medio de las ecuaciones

$$\Sigma X_k = \Sigma X'_{k'}, \quad \Sigma Y_k = \Sigma Y'_{k'}, \quad \Sigma Z_k = \Sigma Z'_{k'},$$
$$\Sigma L_k = \Sigma L'_{k'}, \quad \Sigma M_k = \Sigma M'_{k'}, \quad \Sigma N_k = \Sigma N'_{k'}.$$

Las tres primeras, llamadas *ecuaciones de proyección*, expresan la igualdad de las sumas gráficas de los dos sistemas, y las tres segundas, que se llaman *ecuaciones de momentos*, expresan la igualdad de éstos, respecto al origen de coordenadas, en los dos sistemas.

56. Expresión analítica del equilibrio de un sistema vectorial. – Igualando a *cero* los segundos miembros de las ecuaciones anteriores, se obtienen

$$\Sigma X_k = o, \quad \Sigma Y_k = o, \quad \Sigma Z_k = o,$$
$$\Sigma L_k = o, \quad \Sigma M_k = o, \quad \Sigma N_k = o,$$

que expresan las condiciones necesarias y suficientes para que un sistema esté en equilibrio.

En los sistemas planos, suponiendo que se tome por plano coordenado XY el de situación de los mismos, se

convertirán en identidades las ecuaciones 3.ª, 4.ª y 5.ª, quedando como únicas condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio

$$\Sigma X_k = o, \quad \Sigma Y_k = o, \quad \Sigma N_k = o,$$

En los sistemas concurrentes las ecuaciones 4.ª, 5.ª y 6.ª son una consecuencia de las otras tres **(42)**, bastando para reconocer su equilibrio la verificación de las ecuaciones

$$\Sigma X_k = o, \quad \Sigma Y_k = o, \quad \Sigma Z_k = o.$$

57. Propiedades de los sistemas equivalentes.—De la definición de sistemas equivalentes se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª *Dos sistemas equivalentes a un tercero son equivalentes entre sí.*

2.ª *Dos vectores equipolentes, sobre la misma línea de acción, son equivalentes, y recíprocamente, dos vectores equivalentes tienen que ser iguales en valor modular, situados sobre la misma línea de acción y del mismo sentido.*

3.ª *Dos pares, cuyos momentos sean equipolentes, son equivalentes.*

4.ª *Un vector no puede equivaler a un par, ni un par puede equivaler a un vector.*

5.ª *La equivalencia de dos sistemas vectoriales no se altera por agregar o segregar a uno de ellos, o a los dos, uno o varios sistemas nulos* (*).

(*) Las observaciones hechas en el número **51** sobre la equivalencia práctica de los sistemas vectoriales, son, en particular, aplicables a la modificación de los sistemas por agregación o segregación de sistemas nulos. Un ejemplo sencillo aclarará este concepto: dos fuerzas iguales y de sentido contrario, aplicadas en los extremos de un hilo o cordón forman un sistema que, teóricamente, es nulo, cualquiera que sea la intensidad de dichas fuerzas; pero si las fuerzas adquieren un valor suficiente para romper el cordón, los sistemas nulos que con ellas pueden formarse, no podrán en la práctica sustituir a los sistemas nulos formados por fuerzas incapaces de romper el cordón que las enlaza.

6.ª *Si dos sistemas son equivalentes, sus proyecciones sobre un plano también lo son.* En efecto, los dos sistemas proyectados tienen la misma suma gráfica en un punto cualquiera del plano [**23**-8.ª] y el mismo momento por ser uno y otro igual al de los dos sistemas respecto al eje perpendicular al plano de proyección en el punto elegido.

58. Traslación de vectores.—La segunda propiedad del número anterior nos dice que un vector puede trasladarse, sobre su línea de acción, para llevar su origen al punto de la misma que se desee, sin alterar su valor mecánico. Esto justifica las consideraciones que hicimos al definir las coordenadas de un vector sobre la indeterminación en que dichas coordenadas dejaban su punto de aplicación **(29)**.

Cuando sea necesario trasladar el vector conservando su valor modular, dirección y sentido, a un punto situado fuera de su línea de acción, se recurre al artificio siguiente: sea el vector [I] aplicado al punto *o* y supongamos sea necesario trasladarlo, en la forma dicha, al punto *o'* (fig. 12); aplicando en el punto *o'* dos vectores iguales y directamente opuestos, siendo uno de ellos equipolente al [I], el sistema formado por [I], [I] y [— I] es equivalente al vector dado; los dos vectores [I] y [— I] forman un par cuyo momento en el punto *o'* es el subvector [G] y este momento es igual al del vector dado respecto al punto *o'*, de esto se deduce la siguiente regla práctica: *para trasladar un vector, paralelamente a sí mismo, a un punto cualquiera, hay que agregar al sistema un par cuyo momento sea el del vector dado con relación al punto a donde se lleva el origen del vector trasladado.*

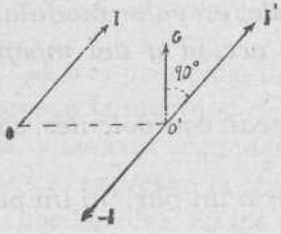


Fig. 12

El subvector [G] que se introduce para llevar un vector

a un punto cualquiera, se acostumbra a llamar *momento* o *par de traslación* del vector trasladado; la línea de acción de estos momentos es siempre perpendicular a la del vector, por serlo al plano que determinan el vector que se traslada y el punto a donde se lleva el origen del mismo.

59. Transformación de pares.—Ya hemos indicado la equivalencia que existe entre todos los pares cuyos momentos sean equipolentes; esto nos pone de manifiesto que en un par se podrán efectuar todas aquellas operaciones y transformaciones que no alteren la equipolencia de su momento; las principales transformaciones que se le puede hacer experimentar a un par son las siguientes:

1.ª *Un par puede trasladar su plano de acción paralelamente a sí mismo a cualquier punto del espacio.*

2.ª *Los vectores de un par pueden orientarse de cualquier modo en su plano de acción, con tal de no variar la distancia que los separa.*

3.ª *Un par puede transformarse en otro equivalente cuyos vectores, o cuyo brazo, tengan una longitud determinada.* Analíticamente se resuelve este problema por medio de las ecuaciones

$$I \times op = I_1 \times x \quad \text{o} \quad I \times op = x \times op',$$

en las que la incógnita x representa el brazo correspondiente a la longitud I_1 de los vectores, o el vector correspondiente a la longitud op' del brazo.

Para resolver gráficamente este problema (fig. 13), se toma sobre $[I]$ la longitud I_1, se une el índice de $[I_1]$ con b y la paralela a esta recta, trazada por el índice de $[I]$, determina el brazo ab' que se busca. Si ab' fuera el brazo que se quiere tenga el par, se une b' con el índice de $[I]$ y la paralela a esta recta, trazada por b, señalará en $[I]$ el índice del vector que se busca $[I_1]$.

Las construcciones anteriores son también aplicables al

caso de que las longitudes del brazo estén contadas en dirección oblicua a las líneas de acción de los vectores; en la figura 14 se comprueba fácilmente la equivalencia de los

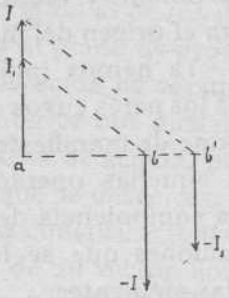


Fig. 13

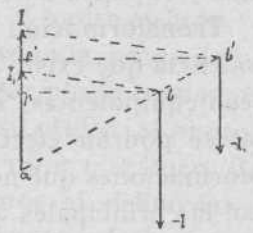


Fig. 14

pares [I_1, $-I_1$] y [I, — I], obtenido el primero del segundo por las mismas construcciones del caso anterior.

Por medio de la última transformación indicada, pueden reducirse varios pares a tener la misma longitud en sus brazos, o bien la misma longitud en los vectores que lo forman; esta operación se llama *reducción de pares al mismo brazo o al mismo vector.*

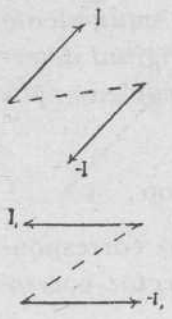


Fig. 15

Debe tenerse presente, en las transformaciones expresadas, que el sentido del par siga siendo el mismo que tuviera antes de la transformación, pues si al aplicar la 2.ª, por ejemplo, se invirtiera el sentido del par, como indica la figura 15, los dos pares [I, — I] y [I_1, $-I_1$] no serían equivalentes.

II

REDUCCIÓN DE SISTEMAS VECTORIALES

60. Definiciones.—De lo que llevamos dicho sobre la equivalencia de los sistemas vectoriales, se desprende que, dado uno cualquiera, podrán existir una infinidad que le sean equivalentes; pues, en resumen, la equivalencia sólo exige que los sistemas tengan las mismas coordenadas, o verifiquen las ecuaciones de proyección y de momentos consignadas en el número **55.**

Pero si al sistema que ha de sustituir al propuesto, se le imponen condiciones, se comprende que la indeterminación del problema disminuirá, y tales podrán ser dichas condiciones, que no haya más que un solo sistema equivalente al dado que las satisfaga y aún podrá ocurrir que el problema resulte imposible en determinados casos.

La sustitución de un sistema vectorial por otro equivalente de menor número de vectores, se llama *reducción* del sistema, y la operación material de encontrar al sistema *reducido* se designa con el nombre de *composición.* Inversamente se llama *descomposición* la operación que consiste en sustituir un sistema por otro de mayor número de vectores, aunque, generalmente, no se aplica dicha denominación más que a la sustitución de un solo vector por dos o más que formen sistema equivalente al vector *descompuesto.* La reducción o composición será *parcial* cuando el sistema reducido admita, a su vez, nuevas reducciones, y *total* cuando no puedan efectuarse más reducciones en el sistema obtenido.

La composición de un sistema vectorial se ejecuta por los procedimientos y reglas que sucesivamente iremos dan-

do a conocer; pero conviene dejar sentados algunos principios fundamentales que a dicha teoría se refieren, que nos servirán para conocer de antemano, al operar con un sistema vectorial, el grado de reducción que admite y la naturaleza del sistema reducido que ha de sustituir al propuesto.

61. Reducción de un sistema vectorial a un vector y a un par.—Supongamos un sistema cualquiera [S] y determinemos su suma gráfica [R] y su momento [G] en un punto arbitrario α; si se traza un plano perpendicular a [G] y situamos en él un par, de momento igual al subvector [G], habremos formado un sistema, con $[R]_\alpha$ y el indicado par, que es equivalente al propuesto [**53**].

Esta reducción se llama *reducción a resultante y par*, tomando el vector $[R]_\alpha$ el nombre de *resultante* del sistema en el punto α y el subvector $[G]_\alpha$ el de *momento resultante* en el mismo punto.

El punto α, elegido arbitrariamente como origen de $[R]_\alpha$ y $[G]_\alpha$, se llama *centro* de la reducción efectuada, y desde luego se comprende que si bien los vectores [R], correspondientes a distintos centros, serán todos equipolentes, no ocurrirá, en general, lo mismo con los subvectores que representan los momentos del sistema en cada centro de reducción que se elija.

62. Casos particulares de la reducción anterior.—Al reducir un sistema vectorial a resultante y par en un punto, pueden ocurrir los siguientes casos particulares:

1.° Que el vector $[R]_\alpha$ y el subvector $[G]_\alpha$ sean nulos, en cuyo caso el valor mecánico del sistema es *cero* en dicho punto y lo mismo en todos los demás del espacio; estaremos, pues, en presencia de un sistema *en equilibrio* [**54**].

2.° Que el vector $[R]_\alpha$ sea nulo y el subvector $[G]_\alpha$ tenga un valor cualquiera: en este caso el sistema se reduce a *un par* en dicho punto y como, por ser $[R] = 0$, el momento del sistema es el mismo en todos los puntos del espacio

[45-3.ª], se deduce que, en cualquier punto que hagamos la citada reducción, se obtendrán siempre subvectores equipolentes al $[G]_\alpha$ como resultado de dicha operación

3.° Que el vector $[R]_\alpha$ no sea nulo y el subvector [G] lo sea: en este caso existe en el punto α un vector, el $[R]_\alpha$, cuyo valor mecánico en dicho punto y en todos los demás del espacio, es el mismo que el del sistema propuesto, diciéndose que éste, en tales casos, se reduce a *resultante única* en el indicado punto.

4.° Que el vector $[R]_\alpha$ y el subvector $[G]_\alpha$ tengan valores distintos de *cero*, pero sus respectivas líneas de acción sean perpendiculares: en este caso el sistema no resulta directamente equivalente a un vector único; pero, por la posición especial de las líneas de acción [R] y [G], se deduce que si la reducción la ejecutamos en un punto cualquiera del eje central del sistema, el subvector [G] desaparecerá y estaremos en el caso anterior; por eso se dice, en este caso, que el sistema equivale en α a un vector y un par, pero *puede reducirse a resultante única*, eligiendo convenientemente el centro de reducción.

Si en el caso de resultante única cambiamos el centro de reducción, saliéndonos de la línea de acción de $[R]_\alpha$, se obtendrían un vector $[R]_{\alpha'}$ y un subvector de momento $[G]_{\alpha'}$ cuyas líneas de acción son perpendiculares; viéndose así que las reducciones de los casos 3.° y 4.° son reductibles la una a la otra, y que, el obtener una u otra solución, dependerá de que el centro de reducción se elija en el eje central o fuera de él.

5.° Que $[R]_\alpha$ y $[G]_\alpha$ sean distintos de cero y sus líneas de acción respectivas no sean perpendiculares: en este caso, que se llama de reducción a *resultante y par propiamente dichos*, no es posible encontrar ni vector único, ni par único, que equivalgan al sistema dado; pues debiendo ser constante la proyección de [G] sobre [R], no puede

ocurrir en ningún punto que desaparezca el subvector [G]. Lo que sí puede conseguirse es reducir el sistema dado a *un torsor*, tomando el centro de reducción en un punto cualquiera del eje central del sistema.

El ejemplo más sencillo de sistemas de esta naturaleza es el formado por dos vectores situados sobre dos rectas que se crucen; estos sistemas no pueden reducirse a un par, ni estar en equilibrio, por la imposibilidad de anularse su suma gráfica y tampoco pueden equivaler a un solo vector, pues si hacemos la reducción en un punto de la línea de acción de uno de ellos, se ve que el subvector [G] no puede ser perpendicular a [R]. Cuando un sistema se reduce a dos vectores, de las condiciones que estamos diciendo, la reducción correspondiente se distingue de las anteriores con el nombre de *reducción a dos vectores conjugados.*

63. Consecuencias.—Relacionando los datos de cada uno de los casos examinados con la constante característica del sistema, $R.G.\cos\theta = K$, se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª Cuando un sistema vectorial es reductible a un torsor, o a resultante y par propiamente dichos, su característica no puede ser nula, y recíprocamente, cuando la característica no es nula el sistema equivale a un torsor, o a resultante y par propiamente dichos, y, por tanto, no puede estar en equilibrio, ni equivaler a un par único ni a resultante única.

2.ª Cuando la característica de un sistema sea nula, tendrá que anularse alguno o algunos de los factores que entran en su formación; si la anulación proviene de ser $R = o$ y $G = o$, el sistema estará en equilibrio; si proviene de ser $R = o$ y $G \neq o$, el sistema equivaldrá a un par; y si $R \neq o$ y $G = o$, o bien $R \neq o$, $G \neq o$ y $\theta = 90^o$, el sistema podrá reducirse a resultante única en los puntos del eje central.

3.ª Cuando se conozcan las coordenadas analíticas del sistema y se exprese la característica en la forma

$$LX + MY + NZ = K,$$

podremos formar el siguiente cuadro expresivo de la clase de reducción a que el sistema podrá someterse:

$LX + MY + NZ \gtrless o$ — Sistema reductible a un torsor en el eje central, o a resultante y par propiamente dichos en los demás puntos del espacio.

$LX + MY + NZ = o$ —

- $X = Y = Z = L = M = N = 0$ — Sistema en equilibrio.
- $X = Y = Z = 0$ y $L \neq 0$ o $M \neq 0$ o $N \neq 0$ — Sistema reductible a un par.
- $X \neq 0$ o $Y \neq 0$ o $Z \neq 0$; $L \gtrless 0$, $M \gtrless 0$, $N \gtrless 0$ — Sistema reductible a un solo vector.

El caso de reducción a un torsor se puede desdoblar en otros dos, según que la característica sea positiva o negativa: en el primer caso el vector [R] y el subvector [G], obtenidos sobre el eje central, tienen el mismo sentido y el torsor se llama *directo*; cuando la característica es negativa ocurre lo contrario y el torsor se llama *inverso*.

64. Métodos generales de composición y descomposición de los sistemas vectoriales. — Las operaciones de composición y descomposición de los sistemas vectoriales pueden realizarse por métodos *gráficos* y *analíticos*, sobre cuyas ventajas e inconvenientes no tenemos necesidad de detenernos.

La resolución gráfica de un problema de composición consiste en determinar los elementos del sistema resultante, utilizando los conocimientos de la Geometría elemental, cuando se trate de sistemas planos y recurriendo a los de la Descriptiva en los alabeados, y análogamente, la descomposición gráfica tendrá por objeto determinar, por los

mismos procedimientos, los elementos determinativos de los vectores que, formando sistema, puedan equivaler a un cierto vector.

Igualmente, la resolución analítica de los problemas de composición consistirá en determinar las proyecciones y líneas de acción de los elementos que formen el sistema resultante, y como complemento la determinación de valores modulares, cosenos directores y ángulos que entre sí formen dichos elementos, y el problema de descomposición tendrá por objeto encontrar las proyecciones y momentos de los vectores que hayan de formar, cumpliendo ciertas condiciones, sistema equivalente al vector descompuesto.

III

COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN GRÁFICA DE LOS SISTEMAS VECTORIALES

65. Composición gráfica de sistemas concurrentes.—La composición gráfica de los sistemas concurrentes está basada en el siguiente lema:

LEMA.—*La resultante de dos vectores concurrentes es la diagonal del paralelogramo construido sobre dichos vectores, tomando el punto de concurso como origen de los vectores componentes.*

La demostración de este lema es inmediata: la expresada diagonal es, desde luego, la suma gráfica de los vectores dados, y el momento de la misma, respecto al punto de concurso, es nulo, como el del sistema dado, y ya sabemos que basta con estas dos condiciones para dejar sentada la equivalencia de dos sistema cualesquiera [**53**].

La aplicación sucesiva de este lema nos conducirá a la resultante de un sistema concurrente, cualquiera que sea

el número de vectores del sistema; pero en la práctica conviene seguir la marcha siguiente: si el sistema dado es plano, se construirá el polígono vectorial en un punto cualquiera y trazando por el de concurso un vector equipolente a la suma gráfica obtenida, este vector será el resultante del sistema, ahorrándose así el trazado de varias líneas que serían necesarias por el procedimiento elemental. Lo mismo podría hacerse en los sistemas concurrentes alabeados, pero la necesidad de aplicar en estas construcciones los métodos de la Geometría Descriptiva, exige la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA.—*La proyección sobre un plano de la resultante de un sistema concurrente en el espacio, es la resultante del sistema que se obtiene proyectando, sobre el mismo plano, los vectores del propuesto.* Si el sistema dado tuviera dos vectores solamente, sería el teorema evidente, por la propiedad geométrica de ser la proyección de un paralelogramo, sobre un plano, otro paralelogramo cuya diagonal es la proyección de la diagonal del primero, y cuando el sistema del espacio tenga más de dos vectores, se comprueba fácilmente la expresada propiedad, construyendo los paralelogramos sucesivos que el método elemental exige y proyectando sobre el plano todas las construcciones efectuadas.

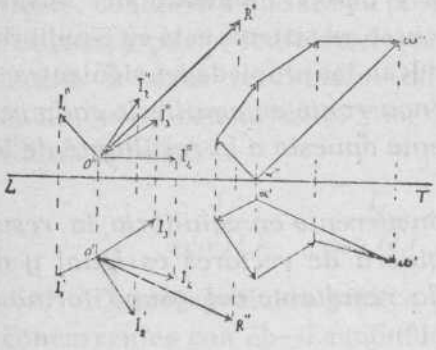


Fig. 16

Con el teorema demostrado, se reduce la composición de sistemas concurrentes alabeados a la de dos sistemas concurrentes planos; en la figura 16 se han indicado las

operaciones para componer un sistema concurrente en el punto $o(o',o'')$, con cuatro vectores $[I_1, I_2, I_3, I_4]$, cuyas proyecciones sobre el plano horizontal y vertical son los sistemas $[I'_1, I'_2, I'_3, I'_4]$ e $[I''_1, I''_2, I''_3, I''_4]$ respectivamente.

Los polígonos vectoriales de los sistemas de proyección se han trazado de modo que se correspondan sus vértices, pero se comprende fácilmente que esta condición no es necesaria y que los polígonos sumatorios pueden trazarse con entera independencia en las dos proyecciones.

Como caso particular, de frecuente aplicación en la composición de sistemas vectoriales concurrentes, notaremos que *la resultante del sistema formado por tres vectores es la diagonal del paralelepípedo construido sobre dichos vectores, tomando el punto de concurso como origen de los tres componentes.*

66. Casos de equilibrio en un sistema concurrente.—La condición que gráficamente se precisa y basta para reconocer el equilibrio de un sistema concurrente, es el cierre del polígono vectorial correspondiente, pues siendo nula la suma gráfica del sistema y nulo el momento del mismo, respecto al punto de concurso, el sistema está en equilibrio. En estos sistemas se verifican las propiedades siguientes:

1.ª *En un sistema concurrente en equilibrio cada vector es igual y directamente opuesto a la resultante de los demás.*

2.ª *En un sistema concurrente en equilibrio la resultante de un grupo cualquiera de vectores es igual y directamente opuesta a la resultante del grupo formado por los demás vectores.* (*)

3.ª *Tres vectores no paralelos, para estar en equilibrio, tienen que ser concurrentes y formar sistema plano,* puesto que la resultante de dos de ellos ha de ser igual y

(*) Esta propiedad y la anterior son ciertas para toda clase de sistemas vectoriales en equilibrio.

directamente opuesta al tercero y esto no puede verificarse en los sistemas alabeados de tres vectores, ni en los sistemas planos en que las líneas de acción de dichos vectores no sean concurrentes.

4.ª *Si tres vectores concurrentes están en equilibrio, cada uno de ellos es proporcional al seno del ángulo formado por los otros dos.* En efecto, el equilibrio del sistema exige que [R'] (fig. 17) sea igual y directamente opuesta a $[I_1]$ y en el triángulo formado por $I_2\ R'\ I'_3$ se verifica

$$\frac{R'}{\operatorname{sen} a} = \frac{I_2}{\operatorname{sen} b} = \frac{I'_3}{\operatorname{sen} c}$$

y sustituyendo

$$\frac{I_1}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{I_2}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{I_3}{\operatorname{sen} \gamma}\ .$$

66'.—La relación que expresa la propiedad que acabamos de demostrar, se refiere a los valores modulares de los vectores, y si bien es necesaria para el equilibrio, no es, sin embargo, suficiente; tres vectores equipolentes a los anteriores, cualquiera que sea su posición, verificarán la misma relación, y puede cambiársele de sentido a alguno y la relación se sigue verificando. En particular, dos vectores cualesquiera concurrentes y su resultante [R] también verifican la relación

$$\frac{I_1}{\operatorname{sen} \overline{R\,I_2}} = \frac{I_2}{\operatorname{sen} \overline{R\,I_1}} = \frac{R}{\operatorname{sen} \overline{I_1\,I_2}}\ .$$

67. Descomposición gráfica de un vector en otros dos concurrentes con él.—La infinidad de paralelogramos que pueden trazarse con una misma diagonal, indica que el problema de descomposición expuesto, si no se le agregan condiciones especiales, es indeterminado; los casos de determinación que con más frecuencia se presentan en la práctica, se resuelven de la manera siguiente:

1.° *Dados los valores modulares de los vectores componentes* $[I_1]$ *e* $[I_2]$, *determinar su dirección y sentido.* Se hará centro en los extremos de [R] y se trazarán circunferencias de radios I_1 e I_2 que, con sus puntos de intersección, resuelven el problema (fig. 18); las construcciones de la figura indican que el problema admite, en general, dos soluciones

$$[I_1, I_2] = [R] \quad y \quad [I'_1, I'_2] = [R].$$

2.° *Dadas las direcciones de* $[I_1]$ *e* $[I_2]$, *determinar el*

Fig. 17

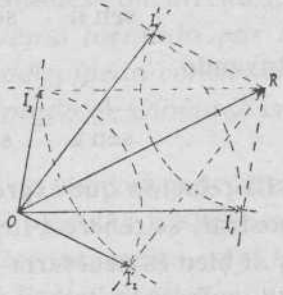


Fig. 18

valor modular y el sentido de los vectores componentes. Por el índice de [R] (fig. 19) se trazan paralelas a las dos direcciones dadas y señalarán en las líneas de acción de $[I_1]$ e $[I_2]$ los índices de estos vectores.

Fig. 19

3.° *Dados el valor modular y dirección de* $[I_1]$ *determinar el segundo vector* $[I_2]$. Uniendo el índice de $[I_1]$ con el de [R] se obtiene el valor modular, dirección y sentido de $[I_2]$; bastará trazar por *o* (fig. 19) el vector $[I_2]$ equipolente a la recta que une los índices expresados y quedará resuelto el problema.

4.° *Dado el valor modular de* $[I_1]$ *y la dirección de* $[I_2]$, *determinar los elementos desconocidos de los dos vectores componentes.* En el índice de [R] se hará centro y se trazará una circunferencia con el radio $[I_1]$; esta circunferencia cortará, en general, en dos puntos (fig. 20) a la línea

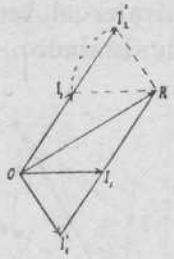


Fig. 20

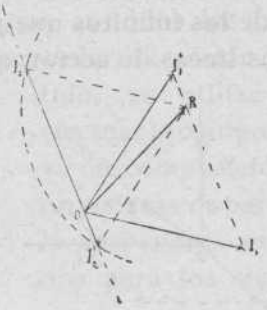


Fig. 21

de acción de $[I_2]$, siendo estos puntos los índices de los dos vectores $[I_2]$ e $[I'_2]$ que, agrupados respectivamente con $[I_1]$ e $[I'_1]$, constituyen las dos soluciones que, en general, tiene este caso de descomposición. Cuando el problema admite dos soluciones, puede suceder que el vector $[I_2]$ tenga el mismo sentido en las dos, como ocurre en la figura 20, o que le tenga contrario, como se ve en la fig. 21.

68. **Descomposición gráfica de un vector en más de dos concurrentes con él.**—Si se suponen dadas las líneas de acción de los vectores componentes y fueran tres rectas que unidas con la línea de acción del vector resultante no estuvieran tres a tres en un plano, el problema es determinado, pues bastará trazar por el índice de [R] tres planos paralelos a las caras del triedro formado por las líneas de acción de los vectores componentes y se habrá construido un paralelepípedo (fig. 22) cuyas tres aristas, concurrentes en *o*, son los vectores componentes que se buscan.

En los demás casos en que se den sólamente los datos

indicados, resulta el problema indeterminado; así, por ejemplo, si se da el vector [R] y las líneas de acción de tres vectores componentes en un plano (fig. 23), se trazaría por *o* una recta arbitraria [R'] y se descompondría [R] en las direcciones [I_1] y [R'], después se descompone [R'] en las direcciones [I_2] e [I_3] y se obtiene el sistema [I_1, I_2, I_3], que es uno de los infinitos que pueden equivaler al vector [R] sobre las líneas de acción que se hayan señalado.

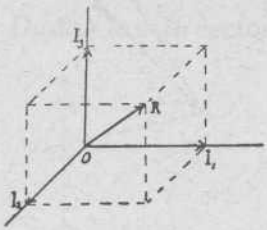


Fig. 22

Fig. 23

69. Descomposición gráfica de un vector en otros tres no concurrentes, formando sistema plano.—Aun cuando este caso de descomposición no se refiere a sistemas concurrentes, lo incluimos en este lugar, por fundarse su resolución en los casos considerados en los sistemas concurrentes.

Sea el vector [R] (fig. 24) que queremos descomponer en tres vectores situados sobre las líneas de acción que determinan los tres lados del triángulo $o'\ o''\ o'''$; unamos el punto *o* de intersección de [R] y $o''\ o'''$, con el o' y descompongamos a [R] según [I_1] y [R']; traslademos el origen de [R'] al punto o' y descompongamos a [R'] según [I_2] e [I_3]; los tres vectores obtenidos [I_1], [I_2] e [I_3] resuelven el problema.

La solución encontrada es única, cualquiera que sea el procedimiento que se siga para llegar a los tres vectores componentes, pues fijándonos en que el momento de [R] respecto al punto o' ha de ser igual al del vector compo-

nente que se obtenga sobre $o'' o'''$, este vector componente no puede tener más que un solo valor modular y un sentido determinado; lo mismo ocurre con los vectores componentes situados sobre $o' o''$ y $o' o'''$.

70. Composición y descomposición gráfica de pares por sus ejes.—La propiedad que tienen los pares de estar representados por un subvector que en todos los puntos del espacio tiene el mismo valor modular, dirección y sentido, se utiliza para efectuar la composición y descomposición de un sistema de pares por los principios estudiados para los sistemas concurrentes.

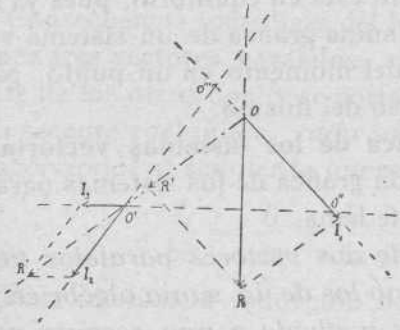


Fig. 24

Para darnos cuenta de estas operaciones, empezaremos por reconocer que el sistema formado por varios pares, por tener nula su suma gráfica, equivaldrá a otro par o estará en equilibrio. Supongamos ahora dos pares $[I_1, -I_1]$ e $[I_2, -I_2]$, cuyos ejes o subvectores representativos sean $[G_1]$ y $[G_2]$ que suponemos trazados, como siempre puede hacerse, en el mismo origen o; la diagonal $[G] \equiv [G_1] + [G_2]$ representará un par $[I, -I]$ situado en un plano perpendicular a la misma, y este par es equivalente al sistema de los primeros, por tener la misma suma gráfica y el mismo momento en el punto o. Recíprocamente, si el eje de un par $[G]$ se descompone de cualquier manera en otros dos subvectores $[G_1]$ y $[G_2]$, el sistema de pares representados por estos últimos es equivalente al par propuesto.

En resumen, cuando se tiene un sistema de pares representados por sus ejes, se llevarán éstos al mismo origen y

se procede en las operaciones de composición y descomposición por los mismos procedimientos explicados para los sistemas vectoriales concurrentes, sustituyendo después, si la naturaleza de la cuestión lo exige, a los subvectores obtenidos por los vectores constitutivos de los pares representados por aquéllos.

Si al hacer las operaciones anteriores resultara cerrado el polígono sumatorio de los ejes de los pares, sería prueba de que el sistema propuesto está en equilibrio, pues ya sabemos que siendo nula la suma gráfica de un sistema vectorial, basta la anulación del momento en un punto, para que tenga lugar el equilibrio del mismo.

71. Composición gráfica de los sistemas vectoriales paralelos.—La composición gráfica de los sistemas paralelos, se funda en el siguiente lema:

LEMA.—*La resultante de dos vectores paralelos tiene por valor modular y signo los de la suma algébrica de los vectores componentes y divide a una secante cualquiera en dos segmentos inversamente proporcionales a los expresados vectores;* estos segmentos serán aditivos o substractivos, según que los vectores dados tengan el mismo o contrario sentido.

La primera parte del lema es evidente, por ser las sumas gráficas, en el caso de vectores paralelos, sumas algebraicas, y para la segunda bastará demostrar que el vector [R] (fig. 25), que cumpla las condiciones expresadas, tiene el mismo momento que el sistema $[I_1\ I_2]$ respecto a un punto cualquiera.

Tracemos la secante *MN* y supongamos se verifique $\frac{ca}{cb} = \frac{I_2}{I_1}$; tomando los momentos respecto al punto *c*, en que dicha secante corta a [R], se verificará

$$M_c\,[R] = o,\ M_c\,[I_1\ I_2] = I_1 .\ cp - I_2 .\ cq;$$

pero $\frac{ca}{cb} = \frac{cp}{cq}$, luego

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{cp}{cq} \quad \text{e} \quad I_1 \times cp = I_2 \times cq,$$

de donde

$$M_c\,[I_1\,I_2] = o \quad \text{y} \quad M_c\,[\mathrm{R}] = M_c\,[\mathrm{I}_1\,\mathrm{I}_2],$$

como queríamos demostrar.

Consecuencia inmediata del lema anterior es que si se tienen tres vectores paralelos, siendo uno de ellos resultante de los otros dos, y se cortan sus líneas de acción por una secante cualquiera, *cada uno de dichos vectores es proporcional al segmento interceptado por los otros dos:*

$$\frac{I_1}{bc} = \frac{I_2}{ac} = \frac{I_1 \pm I_2}{bc \pm ac} = \frac{R}{ab}.$$

Para efectuar la reducción de un sistema paralelo de dos vectores, se aplicará el lema demostrado trazando una secante cualquiera (fig. 25), que corte a los dos vectores dados [I_1] e [I_2], y dividiendo a la recta *ab* en dos segmentos inversamente proporcionales a I_1 e I_2, tendremos el punto *c* donde la resultante [R] corta a la secante trazada; con este punto y sabiendo que [R] ha de ser paralela a los vectores componentes y tener un valor algébrico igual a la suma de I_1 e I_2, queda resuelto el problema.

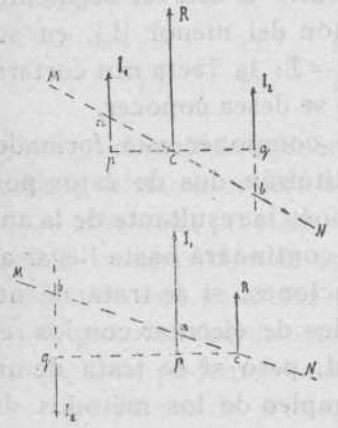


Fig. 25

Para determinar el punto *c*, puede seguirse cualquiera de los procedimientos que enseña la Geometría elemental,

para dividir una recta en una relación determinada; en la Mecánica se emplea un procedimiento especial, basado en la teoría de los polígonos funiculares, que más adelante desarrollaremos; pero en tanto que demos a conocer esta teoría, puede seguirse el que indican las figuras 26 y 27, que consiste en tomar sobre la línea de acción del mayor de

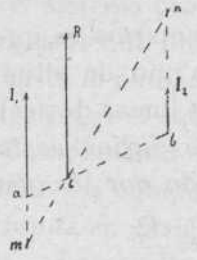


Fig. 26

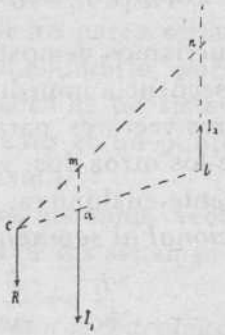


Fig. 27

los vectores [I_1], en sentido contrario a éste el segmento $am = I_2$, y sobre la línea de acción del menor [I_2], en su mismo sentido, el segmento $bn = I_1$; la recta *mn* cortará a la secante *ab* en el punto *c* que se desea conocer.

Si el sistema que se trata de componer está formado por más de dos vectores, se sustituirán dos de éstos por su resultante, se encontrará después la resultante de la anterior y del tercer vector y así se continuará hasta llegar al último del sistema. Estas operaciones, si se trata de un sistema paralelo plano, son fáciles de ejecutar con los recursos de la Geometría elemental; pero si se trata de un sistema alabeado, se precisa el empleo de los métodos de la Geometría Descriptiva y esto exige la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA.—*La resultante del sistema proyección sobre un plano de un sistema vectorial paralelo, es la proyec-*

ción, sobre el mismo plano, de la resultante del sistema en el espacio. Sea el sistema formado por los dos vectores $[I_1]$ e $[I_2]$, cuya resultante es [R] (fig. 28); proyectando sobre el plano XY se obtiene el sistema paralelo $[I'_1, I'_2]$, y nos proponemos probar que [R'], proyección de [R], es la resultante de $[I'_1, I'_2]$; para esto tiene que ser

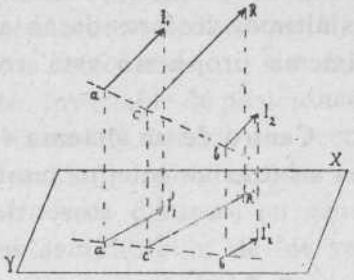


Fig. 28

$$R' = I'_1 + I'_2 \quad \text{y} \quad \frac{c'a'}{c'b'} = \frac{I'_2}{I'_1};$$

la primera condición se comprueba por las igualdades

$$R' = R\cos\varphi = [I_1 + I_2]\cos\varphi = I_1\cos\varphi + I_2\cos\varphi = I'_1 + I'_2$$

y la segunda por las relaciones

$$\frac{c'a'}{c'b'} = \frac{ca}{cb} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{I_2\cos\varphi}{I_1\cos\varphi} = \frac{I'_2}{I'_1}.$$

Esta demostración se generaliza, con facilidad, para el caso en que el sistema tuviera mayor número de vectores.

La aplicación práctica del teorema anterior permite reducir la composición de un sistema paralelo alabeado a la de dos sistemas paralelos planos. No ponemos en este lugar ningún ejemplo de estas aplicaciones, por reservarlos para cuando podamos encontrar las resultantes parciales, sobre los planos de proyección, empleando las propiedades de los polígonos funiculares a que ya hemos aludido.

Cuando hay vectores de distinto sentido en un sistema paralelo suele ser ventajoso el componer separadamente los de uno y otro sentido y después reducir los dos de sen-

tido contrario que se hayan encontrado como resultantes parciales de cada grupo. Las condiciones en que resulten estos últimos vectores darán a conocer inmediatamente si el sistema propuesto está en equilibrio o si equivale a un par.

72. Centro de un sistema vectorial paralelo. — Si se señalan arbitrariamente los puntos de aplicación de los vectores de un sistema paralelo en la línea de acción de cada uno y se hacen girar un cierto ángulo, para dar al sistema otra orientación cualquiera, las resultantes de los diversos sistemas, que así pueden originarse, pasan todas por un punto fijo que se llama *centro* del sistema vectorial dado, *correlativo* con el sistema de puntos de aplicación para que los vectores componentes se hayan elegido.

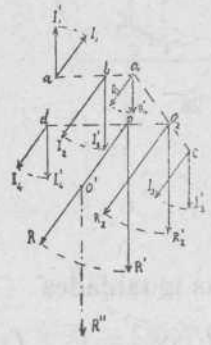


Fig. 29

Para demostrar la existencia del centro, supongamos el sistema de cuatro vectores $[I_1 I_2 I_3 I_4]$ de la fig. 29, y sean *a, b, c* y *d* los puntos de aplicación de los mismos; hagamos las operaciones indicadas en el número **71** para determinar la resultante [R] del sistema y veremos que el punto *o* de aplicación de [R], obtenido por las referidas construcciones, es precisamente el centro del sistema: en efecto, al efectuar con el sistema $[I'_1 I'_2 I'_3 I'_4]$ las mismas operaciones, para obtener su resultante [R'], los puntos de aplicación de las resultantes parciales sucesivas, no se alteran, y lo mismo le ocurre al punto *o* de la resultante final. El orden en que se ejecuten las referidas operaciones de composición no influyen en la posición del centro correlativo con los puntos *a, b, c y d* de aplicación de los vectores, pues si cambiando el orden de las operaciones se llegara a otro

punto o' de la resultante [R], sería preciso admitir que el sistema $[I'_1 I'_2 I'_3 I'_4]$ tenía dos resultantes distintas.

De las consideraciones anteriores se deduce que, fijados los puntos de aplicación de los vectores de un sistema, el centro del mismo es un punto, invariable de posición, alrededor del cual girará la resultante [R], cuando los vectores componentes cambien de dirección, para tomar otra orientación cualquiera. Este centro será distinto, en general, cuando se cambien los puntos de aplicación de los vectores del sistema, y será preciso, cuando se hable del centro de un sistema vectorial paralelo, expresar el sistema de puntos de aplicación con el cual dicho centro es *correlativo*, a menos que, por suponerse conocida, no se considere necesario mencionar tal circunstancia.

73. Propiedades del centro de un sistema paralelo. — 1.ª *Si se multiplican o dividen todos los vectores de un sistema paralelo por un mismo factor, su centro permanece invariable.*

2.ª *El centro de un sistema paralelo compuesto de otros dos está sobre la recta que une a los centros de los dos sistemas componentes.*

3.ª *El centro de un sistema paralelo compuesto de otros tres está sobre el plano determinado por los centros de los tres sistemas componentes.*

4.ª *El centro de un sistema plano, proyección de otro sistema paralelo alabeado, coincide con la proyección sobre el plano, del centro del sistema del espacio.*

5.ª *El centro de los sistemas paralelos de suma gráfica nula está en el infinito, y si el sistema está en equilibrio, cualquier punto del espacio puede considerarse como centro del mismo.*

74. Descomposición gráfica de un vector en otros dos paralelos. — Pueden ocurrir en esta descomposición los mismos casos que vimos al tratar de los sistemas concu-

rrentes; pero fundándose las construcciones gráficas de esta descomposición en la teoría de los polígonos funiculares, dejamos para más adelante la resolución de este problema.

75. Composición gráfica de un sistema vectorial cualquiera.—Distinguiremos en esta composición los casos de ser el sistema plano o alabeado, para estudiarlos separadamente.

Primer caso.—Sistemas planos.—En un sistema plano siempre se pueden combinar los vectores, de dos en dos, de modo que resulten concurrentes o paralelos: la aplicación repetida de los lemas demostrados [**65** y **71**] nos conducirá, por un procedimiento elemental, a la determinación de la resultante del sistema dado, y las mismas operaciones nos indicarán si el sistema está en equilibrio o si se reduce a un par. Las operaciones de composición de los sistemas planos, se simplifican notablemente con el empleo de los polígonos funiculares, como ya veremos.

Segundo caso.—Sistemas alabeados.—En este caso resulta más ventajoso el empleo de los métodos analíticos, y únicamente como ejercicio indicamos en la figura 30 la marcha general de las operaciones gráficas, para encontrar, en el punto *o*, la resultante [R] y el momento resultante [G] del sistema alabeado formado por los vectores $[I_1]$ e $[I_2]$, cuyas proyecciones sobre los planos horizontal, vertical y de perfil, señalamos por las mismas letras $[I_1]$ e $[I_2]$, con uno, dos y tres acentos respectivamente.

Las proyecciones del vector resultante son

$$[R'] \equiv [r'] = [I'_1] + [I'_2] \text{ y } [R''] \equiv [r''] = [I''_1] + [I''_2]$$

y para encontrar las [G'] y [G''] del momento resultante nos hemos valido de un procedimiento indirecto que abrevia las construcciones: consiste en trazar por *o* tres ejes rectangulares, oL, oX' y oX'', determinar los momentos

del sistema respecto a esos tres ejes y de estos momentos deducir las proyecciones de $[G]_o$ respecto a los planos del sistema de proyección.

El momento del sistema respecto a oX' es el momento de $[r'']$ con relación a o, y para encontrarlo se ha trazado

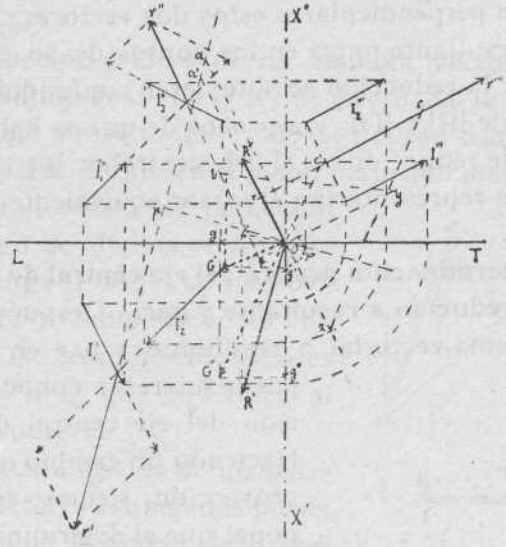


Fig. 30

la perpendicular oq a la línea de acción de $[r'']$, se ha tomado el segmento $qoy = 3$ centímetros por unidad, el $qb = r$, se ha unido y con b y trazado la paralela ob' a la recta yb; el segmento qb' representa el valor modular del momento del sistema $[I_1\ I_2]$ respecto a oX', y en cuanto al sentido, se ve fácilmente que es positivo; el segmento $og' = qb'$ será, por consiguiente, la representación vectorial del citado momento. El del sistema respecto a oX'' es negativo, y está representado por el subvector $og'' = pa'$, encontrado por el mismo procedimiento, y el momento respecto a oL, determinado por medio del plano de perfil $X'X''$, es el subvector $og = rc'$. Los tres segmentos og, og', og'' determinan las dos

proyecciones [G'] y [G''] del subvector [G] que nos proponíamos encontrar.

Si al hacer las construcciones anteriores resultaran nulos [R] y [G], el sistema estaría en equilibrio; si fuera nulo [R] y no lo fuera [G], el sistema equivaldría a un par, y por último, si se verifica que no siendo nulo [R] lo fuese [G], o bien fueran perpendiculares estos dos vectores, el sistema admitirá resultante única en los puntos de su eje central. Si al hacer la reducción se obtuvieran confundidas las proyecciones de [R] y [G], era prueba de que se había tomado el centro de reducción en el eje central y los vectores determinados representarían el torsor equivalente al sistema propuesto.

76. Determinación gráfica del eje central de un sistema vectorial reducido a resultante y par.—Después de reducido un sistema vectorial a resultante y par en un punto, puede interesar conocer la posición del eje central del mismo. Haciendo un cambio de planos de proyección, siempre se puede suponer que el determinado por [R] y [G], en un centro de reducción cualquiera, sea el horizontal de proyección, como se expresa en la figura 31; para determinar el eje central del sistema correspondiente a esta figura, se elevará el vector [R], en su plano proyectante sobre el horizontal, paralelamente a sí mismo, hasta un punto $o'o'''$, respecto al cual, sea el momento de [R] igual y de sentido contrario a la componente [g''] del subvector [G]; el sistema reducido, en el punto $o'o'''$, así determinado, equivale al torsor [R'], [R'''], [g'], [g'''] y la línea de acción de este torsor será el eje central buscado.

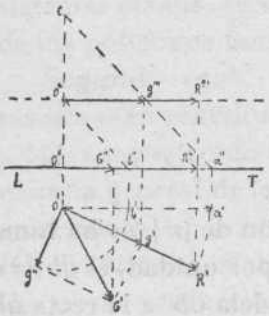


Fig. 31

Para darse cuenta de las construcciones de la figura 31, obsérvese que se ha colocado el vector [R] paralelo al plano vertical, en $o'a' - o''a''$, se ha supuesto $o''C$ igual a la unidad, se ha tomado $o''b'' = o'g''$ y la paralela a $a''C$, trazada por b'', nos ha señalado el punto o''', respecto al cual el momento de [R] es igual y contrario a la componente [g''] del subvector [G].

77. Reducción gráfica de un sistema vectorial a dos vectores conjugados.—Después de efectuada la reducción de un sistema a resultante y par, se podrán trazar los dos vectores de este último en el plano perpendicular a su eje, trazado por el centro de reducción (fig. 32); uno de dichos vectores se hará que tenga el origen común con la resultante y componiéndolo con esta última, se tendrán dos vectores conjugados [I_1 I_2] que equivalen al sistema propuesto.

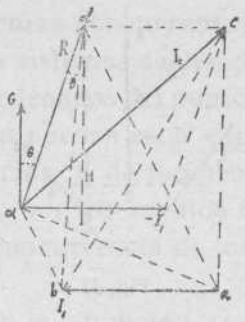


Fig. 32

La reducción gráfica de un sistema a dos vectores conjugados puede hacerse de una infinidad de maneras, cesando esta indeterminación cuando se fijen ciertas condiciones para dichos vectores; la escasa aplicación de estas reducciones hace que no nos detengamos a estudiar algunos casos de determinación del problema expuesto, si bien creemos de interés la demostración de las propiedades siguientes:

1.ª *El volumen del tetraedro construido sobre cada dos vectores conjugados, equivalentes a un sistema, es constante.* Sean [I_1] e [I_2] (fig. 32) los dos vectores conjugados resultantes de la reducción de un sistema; el tetraedro αabc es equivalente al αabd y éste tiene por volumen $V = \frac{1}{3} BH$, siendo $B = \frac{1}{2} G$ el área del triángulo αab y $H = R\cos\theta$ la altura del tetraedro; sustituyendo resulta

$$V = \tfrac{1}{6} RG \cos\theta = \tfrac{1}{6} K$$

que es constante, por serlo la característica $K = RG \cos\theta$ del sistema; esta propiedad se conoce con el nombre de *teorema de Möbius.*

2.ª *El eje central de un sistema corta perpendicularmente a la mínima distancia entre cada dos vectores conjugados.* Siendo *ab* (fig. 33) perpendicular común a $[I_1]$ e $[I_2]$, será perpendicular al plano $\alpha\omega$, donde está situada la suma gráfica $(\alpha\omega)$ de los dos vectores conjugados y esta circunstancia demuestra la perpendicularidad del eje central $o\Delta$ sobre la recta *ab.*

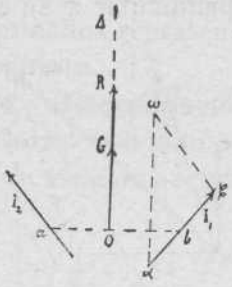


Fig. 33

Si ahora observamos que el momento del sistema es nulo respecto al eje *ab,* se deducirá que la suma de los momentos de [R] y del par [G], respecto a la misma recta *ab,* también será *cero,* y como el plano de acción de dicho par es paralelo a la recta *ab,* su momento es nulo y, por tanto, nulo tendrá que ser también el de la resultante [R] respecto a dicha recta, y no pudiendo ser paralelos [R] y [*ab*], tendrán que cortarse, como queríamos demostrar.

Si hacemos girar los vectores $[I_1]$ e $[I_2]$, alrededor del eje central, su suma gráfica y momentos, en el punto *o,* estarán constantemente representados por [R] y [G], y esto nos dice que en todas las posiciones que tomen, estos vectores equivalen al sistema propuesto; así resulta que los vectores conjugados equivalentes a un sistema vectorial y que formen ángulos constantes con el eje central, están situados sobre la superficie de dos hiperboloides de revolución, llamados *conjugados,* cuyo eje común es el central de dicho sistema.

3.ª *Las proyecciones de dos vectores conjugados sobre un plano perpendicular al eje central forman un par.* Debiendo ser equivalentes las proyecciones de $[I_1 I_2]$ y las de [RG] sobre dicho plano [**57**-6.ª] y siendo esta última un par, la de los vectores $[I_1]$ e $[I_2]$ será también otro par.

IV

COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN ANALÍTICA DE LOS SISTEMAS VECTORIALES

78. Composición analítica de sistemas concurrentes.— Los vectores que forman esta clase de sistemas suelen darse por sus proyecciones y por las coordenadas del punto de concurso de todos ellos; pero también pueden estar expresados por sus coordenadas de proyección y de momentos y en este caso convendrá comprobar, por los medios que la Geometría Analítica enseña, la concurrencia de todos los vectores en un punto.

Los sistemas concurrentes verifican la condición

$$LX + MY + NZ = o$$

por ser nulo el momento del sistema respecto al punto de concurso; son, por lo tanto, reductibles a un solo vector. Si se supone conocido el punto de concurso del sistema, quedará determinada la resultante por las ecuaciones de proyección

$$X = \Sigma X_k, \quad Y = \Sigma Y_k, \quad Z = \Sigma Z_k.$$

Cuando el punto de concurso del sistema no se conozca y se den las coordenadas de los vectores componentes, se empezará por determinar el eje central [**49**]

$$\frac{L - (yZ - zY)}{X} = \frac{M - (zX - xZ)}{Y} = \frac{N - (xY - yX)}{Z}$$

y tomando un punto cualquiera de esta recta por origen del vector $[R] \equiv [X] + [Y] + [Z]$, se tendrá la resultante del sistema.

Al hacer la composición anterior hemos supuesto, implícitamente, que la suma gráfica del sistema no era nula, circunstancia que se aprecia, con los datos analíticos del sistema, viendo si alguna de las proyecciones

$$X = \Sigma X_k\,, \quad Y = \Sigma Y_k \quad \text{o} \quad Z = \Sigma Z_k\,,$$

deja de ser nula; pero si se verifica que

$$\Sigma X_k = o, \quad \Sigma Y_k = o \quad \text{y} \quad \Sigma Z_k = o,$$

el sistema estará en equilibrio [**56**].

79. Observaciones.—1.ª De lo expuesto se deduce que un sistema concurrente puede reducirse a resultante y par en un punto cualquiera, a un solo vector en los puntos del eje central, y será nulo cuando $\Sigma X_k = \Sigma Y_k = \Sigma Z_k = o$; pero *nunca podrá reducirse a un par, ni tampoco a un torsor.*

2.ª En los sistemas concurrentes planos la resultante está en el mismo plano del sistema y bastarán, para su determinación, las coordenadas (*)

$$X = \Sigma X_k, \quad Y = \Sigma Y_k, \quad N = \Sigma N_k,$$

y si se conoce el punto de concurso basta con

$$X = \Sigma X_k, \quad Y = \Sigma Y_k.$$

80. Descomposición analítica de un vector en otros dos concurrentes con él.—Sea el vector [R] que se quiere descomponer en otros dos $[I_1]$ e $[I_2]$ concurrentes en el punto o' situado sobre la línea de acción de [R]; tomemos por plano coordenado XY el determinado por $[I_1]$ e $[I_2]$, en donde se encontrará situada también la resultante [R].

(*) Se supone que el plano de situación del sistema es el coordenado XY.

Las ecuaciones de proyección y de momentos que tendrán que satisfacer los sistemas componentes y resultante son:

$$X = X_1 + X_2, \quad Y = Y_1 + Y_2,$$

$$N = N_1 + N_2 = x' Y_1 - y' X_1 + x' Y_2 - y' X_2 = x'(Y_1 + Y_2) - y'(X_1 + X_2).$$

Si no se impone alguna condición especial a los vectores $[I_1]$ e $[I_2]$ el problema es indeterminado y la indeterminación es más grande de lo que a primera vista pudiera parecer, por ser la última ecuación una consecuencia de las otras dos, que deberá ser suprimida del planteo del problema.

Las cuatro incógnitas del mismo tendrán que satisfacer a las ecuaciones

$$X = X_1 + X_2, \quad Y = Y_1 + Y_2,$$

pudiéndose imponer dos condiciones a los vectores componentes, para que el problema sea determinado. Los casos de descomposición determinada, que con más frecuencia se presentan en la Mecánica son los siguientes:

1.° Dados los valores modulares de $[I_1]$ e $[I_2]$, determinar sus direcciones y sentido.

2.° Dadas las direcciones de $[I_1]$ e $[I_2]$, determinar el valor modular y sentido de estos vectores componentes.

3.° Dados el valor modular y dirección de uno de los vectores, encontrar los elementos desconocidos del otro.

4.° Dado el valor modular de $[I_1]$ y la dirección de $[I_2]$, determinar la dirección y sentido de $[I_1]$ y el valor de $[I_2]$.

Para la resolución de estos cuatro casos de descomposición, conviene dar a las ecuaciones anteriores la siguiente forma:

$$R\cos\alpha = I_1\cos\alpha_1 + I_2\cos\alpha_2, \quad R\operatorname{sen}\alpha = I_1\operatorname{sen}\alpha_1 + I_2\operatorname{sen}\alpha_2.$$

81. Descomposición analítica de un vector en otros tres concurrentes con él.—Este problema tiene particular apli-

cación cuando se señalan las direcciones de los tres vectores componentes y se quieren determinar los valores modulares y el sentido de los mismos.

Las ecuaciones que resuelven el problema son:

$$R\cos\alpha = I_1\cos\alpha_1 + I_2\cos\alpha_2 + I_3\cos\alpha_3,$$
$$R\cos\beta = I_1\cos\beta_1 + I_2\cos\beta_2 + I_3\cos\beta_3,$$
$$R\cos\gamma = I_1\cos\gamma_1 + I_2\cos\gamma_2 + I_3\cos\gamma_3.$$

Estas ecuaciones forman un sistema determinado con las incógnitas I_1, I_2 e I_3 y se comprende que puedan hacerse diversas combinaciones que darán lugar a otros tantos casos de descomposición de un vector en tres componentes.

Implícitamente se ha supuesto que los vectores componentes y la resultante no están tres a tres en un plano; fácil es ver que si se tratara de un sistema plano, no bastaría el conocimiento de las direcciones de los vectores componentes, para determinar los demás elementos de los mismos.

82. Composición analítica de los sistemas vectoriales paralelos.—Los sistemas paralelos cumplen, como los concurrentes, la condición $LX + MY + NZ = o$ (*), serán, por consiguiente, reductibles a un vector único, a un par único, o estarán en equilibrio.

La circunstancia del paralelismo de los vectores se comprueba por la proporcionalidad que, entre sus proyecciones, establece la ecuación de los cosenos directores; así, si los vectores [I_1] e [I_2] son paralelos, se deberá verificar

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

y lo mismo para todos los demás del sistema.

(*) Basta imaginar trazado el momento del sistema, en un punto cualquiera, para ver que el subvector correspondiente está contenido en un plano perpendicular a la dirección general del mismo y siendo $\theta = 90°$, el producto $R.\ G.\ \cos\theta$ será nulo.

Para determinar la resultante, se toma un punto cualquiera del eje central y se tendrá el punto de aplicación de dicho vector, cuyas proyecciones son

$$X = \Sigma X_k, \quad Y = \Sigma Y_k, \quad Z = \Sigma Z_k.$$

Se ha supuesto que la suma gráfica del sistema era distinta de *cero*; si fuera nula, circunstancia que se reconoce fácilmente por ser $X = Y = Z = o$, el momento es constante en todos los puntos del espacio (**45**-3.ª) y el sistema dado se podrá sustituir por un par, cuyo eje tenga por origen un punto cualquiera del espacio y cuyas proyecciones serán

$$L = \Sigma L_k, \quad M = \Sigma M_k, \quad N = \Sigma N_k.$$

Si además de ser $X = Y = Z = o$, se verificara $L = M = N = o$, el sistema propuesto estará en equilibrio.

83. Observaciones.—1.ª En los sistemas paralelos la resultante es paralela a la dirección general del sistema y el eje central tendrá los mismos cosenos directores que cada uno de los vectores que lo forman.

2.ª Si al hacer la elección de planos coordenados, los elegimos de modo que el eje oX sea paralelo a la dirección general del sistema, las coordenadas Y_k, Z_k, L_k de cada vector son nulas y lo mismo ocurrirá con las correspondientes del sistema.

El vector y par equivalentes al sistema en el punto $o'(x'y'z')$ son:

$$X = \Sigma X_k, \; M' = M - (z'X - x'Z), \; N' = N - (x'Y - y'X),$$

que se reducen a

$$R = \Sigma I_k, \; M' = M - z'R, \; N' = N + y'R.$$

3.ª En los sistemas paralelos planos la resultante está en el mismo plano XY del sistema y bastarán para su determinación las ecuaciones

$$X = \Sigma X_k, \quad Y = \Sigma Y_k, \quad N = \Sigma N_k.$$

Si se toman los ejes de modo que el oX, por ejemplo, sea paralelo a los vectores, bastarán las dos ecuaciones.

$$R = \Sigma I_k, \quad Ry = \Sigma I_k . y_k .$$

84. Descomposición analítica de un vector en otros dos paralelos al mismo.—Si tomamos el vector [R] por eje de las abscisas y llamamos $[I_1]$ e $[I_2]$ a sus componentes, existirán entre éstos las relaciones

$$R = I_1 + I_2 , \quad Ry = I_1 . y_1 + I_2 . y_2 = o ,$$

que permitirán determinar las incógnitas correspondientes a los siguientes casos de descomposición:

1.° Dados [R] y las líneas de acción, $y = y_1$, $y = y_2$, de los vectores componentes, encontrar el valor modular y el sentido de estos últimos.

2.° Dados [R] y uno de los vectores componentes $[I_1]$, determinar los elementos del otro componente $[I_2]$.

3.° Dado [R], el valor modular de $[I_1]$ y la línea de acción, $y = y_2$, del vector $[I_2]$, determinar los demás elementos de $[I_1]$ e $[I_2]$.

Si en la descomposición anterior se dieran los valores de $[I_1]$ e $[I_2]$, resulta el problema indeterminado; esta indeterminación proviene de que los datos expresados no constituyen más que una condición y queda una sola ecuación, $I_1 y_1 + I_2 y_2 = o$, para calcular las dos incógnitas y_1 e y_2.

85. Composición analítica de un sistema vectorial cualquiera.—En la composición de un sistema cualquiera pueden presentarse dos casos que consideraremos separadamente; se refiere el primero a aquellos sistemas en que se verifique la condición $LX + MY + NZ = o$ y el segundo a los que la característica tenga un valor cualquiera distinto de cero.

Primer caso: $LX + MY + NZ = o$.—El examen de las coordenadas del sistema nos dirá inmediatamente si se tra-

ta de un sistema nulo, o de un sistema reductible a resultante única o a un par único. Si alguna de las coordenadas X, Y o Z es diferente de cero, habrá resultante única; para encontrarla se tomará un punto del eje central [**49**]

$$\frac{L-(yZ-zY)}{X}=\frac{M-(zX-xZ)}{Y}=\frac{N-(xY-yX)}{Z}$$

y haciendo en él la reducción, se tendrá el vector [R] equivalente al sistema; si la reducción se hace en un punto cualquiera que no sea del eje central, se obtendrán un vector y un par cuyo eje será perpendicular a la resultante en dicho punto.

Cuando las tres coordenadas X, Y y Z sean nulas y alguna de las L, M o N sea distinta de *cero*, el sistema será reductible a un par único, cuyo momento tendrá por proyecciones las tres coordenadas

$$L=\Sigma L_k,\quad M=\Sigma M_k,\quad N=\Sigma N_k,$$

que bastan para determinarlo (por ser de línea de acción indiferente) y si todas las coordenadas se reducen a *cero* el sistema estará en equilibrio.

En los sistemas generales planos, el eje central está situado en el plano del sistema y siempre se verifica en ellos $LX+MY+NZ=o$ (*). De esto se deduce que los sistemas planos podrán reducirse a un solo vector, contenido en su plano, y como casos particulares podrá ocurrir que equivalgan a un par, o que estén en equilibrio.

Las ecuaciones necesarias y suficientes para determinar en estos casos el sistema resultante, son, cuando hay resultante única,

$$X=\Sigma X_k,\quad Y=\Sigma Y_k,\quad N=\Sigma N_k$$

y sencillamente $N=\Sigma N_k$, cuando sea caso de par único; la

(*) Bastará, para comprobar la última circunstancia, encontrar el momento del sistema respecto a un punto de su plano y ver que el ángulo que forma con la suma gráfica es $\theta=90°$.

anulación de X, Y y N indicará que el sistema está en equilibrio.

Segundo caso: $LY + MY + NZ \gtrless o$.—En este caso no puede el sistema equivaler a un vector único, ni a un par único, ni puede estar en equilibrio, por exigir cualquiera de estos casos la condición de característica nula. El sistema será reductible a un vector [R] y a un par [G] en un punto cualquiera, formando los vectores [R] y [G] un ángulo que no puede valer 90°; este ángulo se reduce a *cero* en los puntos del eje central del sistema, obteniéndose en ellos el torsor, directo o inverso, que equivale al sistema propuesto.

86. Reducción analítica de un sistema vectorial a tres vectores paralelos a los ejes coordenados.—La posibilidad de esta reducción se deduce de lo dicho en los números **81** y **83-2.ª**, pues si tomamos en cada vector un punto arbitrario x_k, y_k, z_k y lo descomponemos en las direcciones oX, oY y oZ, las tres componentes de $[I_k]$ serán sus proyecciones X_k, Y_k y Z_k aplicadas al punto x_k, y_k, z_k; haciendo lo mismo con todos los vectores tendremos tres sistemas, cuyo conjunto equivale al propuesto y cada uno de los cuales tendrá su resultante paralela al eje coordenado correspondiente.

Para encontrar estas resultantes parciales llamemos y_x, z_x las coordenadas de la traza sobre el plano YZ del vector $X = \Sigma X_k$ y lo mismo x_y, z_y la traza sobre XZ del $Y = \Sigma Y_k$ y x_z, y_z la correspondiente a $Z = \Sigma Z_k$ sobre el plano XY. Con estos datos, y teniendo en cuenta las fórmulas del número **83-2.ª**, quedará determinado el vector resultante parcial [X] por las ecuaciones

$$X = \Sigma X_k, \quad M_x - z_x X = o, \quad N_x + y_x X = o \ (*)$$

(*) Hay que tener en cuenta que el momento M' de X respecto al eje Y' trazado por $y_x\ z_x$ es nulo, por pasar X por el punto $y_x\ z_x$; lo mismo pasa con el N'.

el [Y] por las

$$Y = \Sigma Y_k, \quad N_y - x_y Y = o, \quad L_y + z_y Y = o,$$

y el [Z] por las

$$Z = \Sigma Z_k, \quad L_z - y_z Z = o, \quad M_z + x_z Z = o,$$

representando por L_y, L_z, M_x, M_z, N_x y N_y los momentos respecto a los ejes oX, oY y oZ de los sistemas parciales paralelos a los ejes que indican los subíndices que acompañan a los símbolos L, M y N.

Los tres vectores [X], [Y] y [Z], equivalentes al sistema propuesto, se cruzarán en general; si en algún caso se cortan dos de ellos, o resultaran concurrentes los tres, se conocería inmediatamente por los valores comunes que se obtengan en las coordenadas z_x, y_x, x_y, z_y, y_z, x_z, de las trazas sobre los planos coordenados de los expresados vectores.

87. Reducción de un sistema vectorial a dos vectores conjugados.—Analíticamente se demuestra la indeterminación de esta reducción observando que las condiciones de equivalencia entre un sistema [S] y los dos vectores conjugados [I_1] e [I_2], son

$$X_1 + X_2 = X, \quad Y_1 + Y_2 = Y, \quad Z_1 + Z_2 = Z,$$
$$L_1 + L_2 = L, \quad M_1 + M_2 = M, \quad N_1 + N_2 = N,$$

y estas ecuaciones, unidas a las relaciones fundamentales

$$L_1 X_1 + M_1 Y_1 + N_1 Z_1 = o,$$
$$L_2 X_2 + M_2 Y_2 + N_2 Z_2 = o,$$
$$LX + MY + NZ = K$$

constituyen un sistema indeterminado.

Entre las condiciones que se suelen imponer a los vectores conjugados, para que el problema de composición

sea determinado, están el fijar la línea de acción de uno de ellos, señalar los puntos de aplicación de los vectores resultantes, y otras análogas, que dan lugar a diversos casos y discusiones especiales, en las que no insistiremos, por la escasa aplicación que en nuestro curso haremos de esta reducción especial.

88. Composición analítica de sistemas vectoriales continuos.—Los sistemas vectoriales continuos no admiten, en general, más procedimiento de composición que el analítico, por la imposibilidad de manejar gráficamente los vectores elementales que los forman.

A estos sistemas les son aplicables los principios generales de composición y descomposición analítica estudiados para los sistemas discontinuos, con la única observación de sustituir las sumas finitas que figuran en las fórmulas por *integrales definidas* o sumas de infinitos sumandos infinitamente pequeños; para indicar la manera de proceder resolveremos los dos ejemplos siguientes:

1.° *Determinar la resultante de un sistema vectorial continuo de directriz rectilínea, cuyos vectores sean normales y proporcionales a los elementos de la directriz a que están aplicados.* La expresión analítica de uno cualquiera de los vectores del sistema es $I = Kdx$, siendo dx el elemento rectilíneo de la directriz, que suponemos situada sobre el eje coordenado oX, y K el coeficiente de proporcionalidad.

El valor modular de la resultante es

$$R = \Sigma I_h = \int_{x_1}^{x_2} Kdx = KL,$$

siendo L la longitud de la directriz, y para determinar el punto de aplicación bastará la ecuación de momentos con relación al eje oZ, que es

$$R \cdot a = \Sigma I_k x_k = \int_{x_1}^{x_2} K dx \cdot x = K \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}$$

y de la cual se deduce la abscisa a del punto que buscamos

$$a = K \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} : KL = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)} = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

que es la del punto medio de la directriz, como pudimos haber previsto por la regularidad del sistema.

2.° *El mismo anterior, suponiendo que los vectores sean proporcionales a los elementos de la directriz y a su distancia, $x - x_1$, a uno de los extremos de la misma recta.* La expresión de los vectores elementales es ahora $I = K(x - x_1)\,dx$, o bien $I = Kxdx$, si se supone el origen de coordenadas confundido con el extremo x_1 de la directriz.

La resultante tiene por valor modular

$$R = \int_0^L Kxdx = \frac{KL^2}{2}$$

y la abscisa de su punto de aplicación se calculará por la ecuación de momentos

$$Ra = \int_0^L Kxdx.x = \frac{KL^3}{3}$$

de donde se obtiene

$$a = \frac{KL^3}{3} : \frac{KL^2}{2} = \frac{2}{3} L.$$

CAPITULO TERCERO

Polígonos y curvas funiculares

I

POLÍGONOS FUNICULARES

89. Definiciones.—Supongamos un sistema vectorial cualquiera $[S] = [I_1\, I_2\, I_3\, I_4]$ (fig. 34), e imaginemos una línea poligonal $o'\, a\, b\, c\, d\, o''$, cuyos vértices se apoyen sobre las líneas de acción de los vectores del sistema y éstos resulten contenidos en los planos determinados por los dos lados que concurren en los mismos; descompongamos ahora cada vector en las dos direcciones señaladas por dichos lados, y siempre que resulten iguales y de sentido contrario las componentes $[m]$ y $[m']$, $[n]$ y $[n']$, $]p]$ y $[p']$ situadas sobre los lados *intermedios* de la línea poligonal trazada, ésta recibe el nombre de *polígono funicular* del sistema vectorial propuesto.

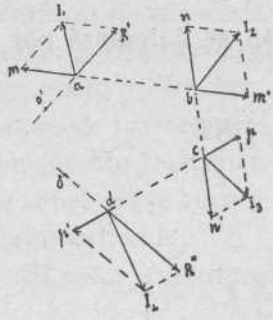


Fig. 34

Los lados $o'\, a$ y $o''\, d$ del polígono funicular se llaman *extremos* o *primero* y *último* respectivamente, para distinguirles de los demás que sirven de enlace a los vectores

del sistema y a los que ya hemos dado el nombre de *intermedios*.

Cuando el sistema vectorial sea alabeado también lo serán sus polígonos funiculares y desde luego se ve que en los sistemas planos los funiculares serán líneas planas. Aunque algunas de las propiedades que vamos a estudiar en estos polígonos, se verifican igualmente en los sistemas planos y en los alabeados, prescindiremos de estos últimos y nos referiremos en toda esta teoría a los sistemas planos, que nos interesan más directamente que los alabeados.

Cuando en un polígono funicular se cumple la condición de resultar confundidos el primero y último lado, se dice que dicho polígono es *cerrado* y en estos casos tienen, en general, tantos lados y vértices como vectores tenga el sistema dado.

90. Construcción de polígonos funiculares.—Para demostrar la existencia de líneas que cumplan las condiciones apuntadas y puedan ser consideradas como funiculares de un sistema vectorial, supongamos que se traza la recta $o'\ a$ arbitraria (fig. 34) y sobre ella se señala el vector $[R']$, también arbitrario; descompongamos a $[I_1]$ en el $[R']$ y otro que será el $[m]$; prolonguemos la línea de acción de $[m]$ hasta que corte a $[I_2]$ y tomemos, a partir de b, el vector $[m'] = -[m]$, descomponiendo a $[I_1]$ en el $[m']$ y otro que será el $[n]$; procedamos con este vector y los sucesivos como se ha hecho con el anterior y es indudable que la línea $o'\ a\ b\ c\ d\ o''$, que así formamos, es un polígono funicular del sistema propuesto.

El método seguido para llegar a la línea $o'\ a\ b\ c\ d\ o''$ de la figura 34, pone de manifiesto la pluralidad de los funiculares que pueden trazársele a un sistema vectorial cualquiera, pues bastará cambiar la dirección del primer lado, el valor modular de $[R']$ o el punto de partida o', por don-

de se trazó dicho primer lado, para que resulten tantos polígonos funiculares distintos como se deseen.

91. Construcción de Varignon.—El procedimiento más usual para trazar los polígonos funiculares de un sistema vectorial plano, es el llamado de *Varignon*, que consiste en lo siguiente: tracemos el polígono vectorial $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \omega$ (figura 35) del sistema $[S] = [I_1\ I_2\ I_3\ I_4]$, tomemos en su plano un punto P, que llamaremos *polo* del funicular correspondiente, y unámosle con los vértices de dicho polígono vectorial, constituyendo la *radiación* $P\ .\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\ \omega$; tracemos ahora, por un punto arbitrario o' del plano del sistema, una paralela al primer radio $\alpha\ P$ de la radiación, hasta que corte en a al primer vector $[I_1]$, por a tracemos la paralela al segundo radio $\beta\ P$, hasta que corte en b al segundo vector $[I_2]$ y así sucesivamente hasta trazar la paralela $d\,o''$ al último radio $\omega\ P$; el polígono $o'\,a\,b\,c\,d\,o''$, así construido, es un funicular del sistema propuesto.

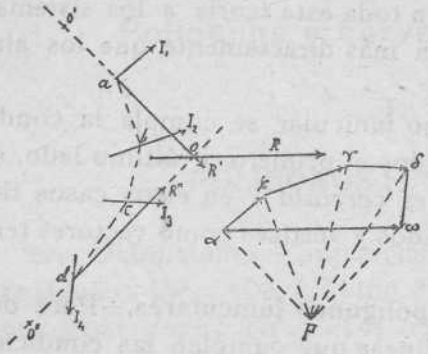


Fig. 35

En efecto, si descomponemos el vector $[I_1]$ en la dirección de $o'\,a$ y $a\,b$, estas dos componentes serán respectivamente equipolentes a $[\alpha\ P]$ y $[P\ \beta]$ y si descomponemos al $[I_2]$ en las direcciones de $a\,b$ y $b\,c$, estas dos componentes serán equipolentes a $[\beta\ P]$ y $[P\ \gamma]$, resultando que las dos componentes situadas sobre el lado $a\,b$ son equipolentes a $[P\beta]$ y $[\beta\ P]$ y, por tanto, iguales y directamente opuestas, como se precisa y basta para que la línea $o'\,a\,b\,c\,d\,o''$ sea un polígono funicular del sistema dado.

Las tres causas de indeterminación que antes vimos

existían en el trazado de los polígonos funiculares, se refieren, en la construcción de *Varignon*, a las dos direcciones o radios que fijan el polo de la radiación y a la arbitrariedad del punto de partida o'; conservando éste y variando el polo se obtendrán infinidad de funiculares diferentes, así como conservando el polo y variando el punto de partida se podrán construir otra infinidad de ellos, con la particularidad de tener sus lados *homólogos* paralelos.

92. Primeras propiedades de los polígonos funiculares.—Los polígonos funiculares de un sistema vectorial gozan de gran número de propiedades interesantes y conviene que dejemos establecidas las siguientes:

1.ª *El punto de intersección de los lados extremos de un polígono funicular, correspondiente a un sistema vectorial, pertenece a la línea de acción de la resultante de dicho sistema.*—En efecto, si se descomponen los vectores del sistema dado en la dirección que señalan los dos lados del funicular que se cortan sobre cada vector, el sistema quedará reducido a dos vectores $[R']$ y $[R'']$ (fig. 35), situados sobre dichos lados extremos y es evidente que la resultante de estos dos vectores, que es la del sistema propuesto, tendrá que pasar por el punto de concurso de $o'a$ y $o''d$.

Como aplicación inmediata de la propiedad demostrada, se deduce un procedimiento de composición de los sistemas planos más sencillo que los expuestos en los números **71** y **75**; pues conociéndose por el polígono vectorial, el valor modular, dirección y sentido de la resultante, bastará conocer un punto de su línea de acción para que quede determinada, y este punto lo proporciona la intersección de los lados extremos de uno cualquiera de los funiculares del sistema propuesto. En la figura 35 se ha indicado en $[R]$ la posición de la resultante del sistema formado por cuatro vectores cualesquiera y la figura 36 es un ejemplo de composición de sistemas paralelos; si en éstos hubiera

vectores de uno y otro sentido las construcciones serían idénticas.

2.ª *La intersección de dos lados cualesquiera de un polígono funicular está situada sobre la línea de acción de la resultante de los vectores del sistema comprendidos entre los expresados lados del funicular considerado.* Esta propiedad es la misma anterior enunciada con más generalidad.

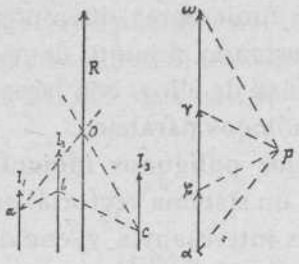


Fig. 36

3.ª *En los sistemas vectoriales de suma gráfica nula, los lados extremos de los polígonos funiculares son siempre paralelos o están confundidos.* Puesto que en todas las posiciones del polo resultan confundidos los radios $P\alpha$ y $P\omega$ de la radiación correspon-correspondiente.

4.ª Si se imaginan trazados sobre los lados extremos de un funicular cualquiera los dos vectores

$$[R'] \equiv [\alpha P] \quad \text{y} \quad [R''] \equiv [P\omega]$$

que pueden sustituir al sistema dado, se ve que, en el caso de ser la suma gráfica nula, los dos vectores $[R']$ y $[R'']$ son iguales en valor modular y dirección, pero de sentido contrario, resultando de esto, que si los lados extremos del funicular trazado están confundidos, los dos vectores $[R']$ y $[R'']$ se reducirán a *cero* y el sistema estará *en equilibrio*, y en los demás casos formarán *un par* equivalente al sistema propuesto.

Como un sistema no puede estar en equilibrio y equivaler a un par, al mismo tiempo, se deduce que si un polígono funicular cualquiera, correspondiente a un sistema vectorial de suma gráfica nula, resulta cerrado, todos los fu-

niculares de dicho sistema estarán en las mismas condiciones, y recíprocamente, si un sistema vectorial está en equilibrio todos sus polígonos funiculares tienen que ser

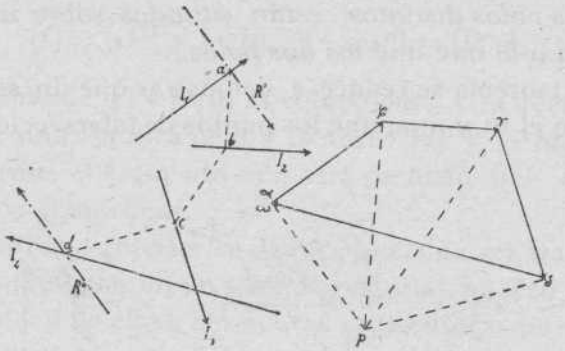


Fig. 37

cerrados. En resumen, *la condición necesaria y suficiente para que un sistema, de suma gráfica nula, esté en equilibrio, consiste en el cierre de uno cualquiera de sus polígonos funiculares.*

Las figuras 37 y 38 son ejemplos de sistemas vectoriales de suma gráfica nula, que se reducen a un par el de la primera y a *cero* el de la segunda.

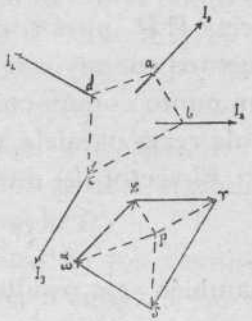


Fig. 38

93. Polígonos funiculares correspondientes a polos distintos. — Veamos ahora las relaciones que puedan existir entre los polígonos funiculares que corresponden a dos polos distintos, en un sistema vectorial determinado.

Supongamos el sistema $[I_1, I_2, I_3]$ (fig. 39) y dos polígonos funiculares del mismo $o\ a\ b\ c\ o$ y $o'\ a'\ b'\ c'\ o'$, correspondientes a los polos P y P'; entre estos

polígonos existe la notable relación que expresa el siguiente teorema:

TEOREMA.—*Los puntos de intersección de los lados homólogos de dos polígonos funiculares, correspondientes a dos polos distintos, están situados sobre una recta paralela a la que une los dos polos.*

Este teorema se reduce a demostrar que un segmento, tal como el *m n*, que une los puntos de intersección de dos

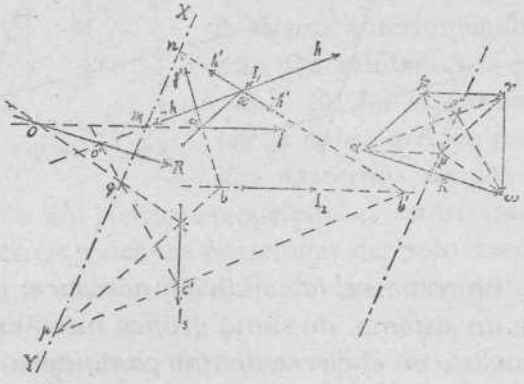


Fig. 39

pares de lados homólogos consecutivos, es paralelo a la recta $P\,P'$, pues comprobada esta circunstancia, los segmentos sucesivos *n p*, *p q*, etc., teniendo cada uno de ellos un punto común con el anterior, se confundirán en una sola recta paralela a $P\,P'$, como se desea demostrar.

El vector $[I_1]$ puede reemplazarse por las componentes.

$$[f] \equiv [\alpha P] \quad \text{y} \quad [f'] \equiv [P\,6]\,;$$

también será resultante de

$$[h] \equiv [\alpha P'] \quad \text{y} \quad [h'] \equiv [P'\,6]$$

y es evidente que cambiando el sentido de $[h]$ y $[h']$ formaremos con $[f]$, $[f']$, $[-h]$ y $[-h']$ un sistema nulo, en el cual

la resultante de $[f]$ y $[-h]$ será igual y directamente opuesta a la de $[f']$ y $[-h']$, teniendo por línea de acción común estas dos resultantes parciales la recta $m\,n$; pero siendo

$$[f] \equiv [\alpha P] \text{ y } [-h] \equiv [-\,\alpha P'] = [P'\,\alpha]\,,$$

la resultante de $[f]$ y $[-h]$ es equipolente a la recta $P'\,P$, que es la suma gráfica de los vectores $[f]$ y $[-h]$, y, por consiguiente, el segmento $m\,n$ será paralelo a $P'\,P$, como queríamos comprobar.

Del teorema anterior se deduce que, una vez trazado un polígono funicular en un sistema vectorial, pueden trazarse una infinidad de ellos, sin nuevas radiaciones; pues bastará trazar una secante XY a los lados del polígono funicular ya trazado, señalar los puntos m, n, p, q en que corta a dichos lados y trazando por m un lado arbitrario $m\,a'$, de un segundo polígono funicular, se unirá a' con n y tendremos el segundo lado $a'\,b'$ del nuevo funicular, uniendo b' con p tendremos el lado $b'\,c'$ y así sucesivamente hasta el último $c'\,q$.

Para conocer el polo del segundo funicular, bastará trazar por α una paralela al primer lado $m\,a'$ y el punto en que corte a la recta $P\,P'$, paralela a la secante XY, es el polo buscado; si no se hubiera trazado la recta $P\,P'$, bastará trazar por ω (o por cualquiera otro vértice intermedio del polígono vectorial) la paralela al lado correspondiente del funicular y la intersección de los dos radios, trazados en la radiación, determinaría el nuevo polo P'.

94. Caso de vectores paralelos.—Cuando los vectores del sistema son paralelos, como ocurre en la figura 40, se verifica que los segmentos $a\,a'$, $b\,b'$, etc., de las líneas de acción de los vectores, interceptados entre los dos funiculares, son proporcionales a los segmentos $a\,a_1$, $b\,b_1$, etc., comprendidos entre el primer funicular y la recta $m\,r$ que

contiene los puntos de intersección de los lados homólogos de los dos funiculares.

En efecto, considerando las tres rectas que concurren en n, cortadas por las paralelas $[I_1]$ e $[I_2]$, resulta $\frac{a\,a'}{a\,a_1} = \frac{b\,b'}{b\,b_1}$, y lo mismo

$$\frac{b\,b'}{b\,b_1} = \frac{c\,c'}{c\,c_1} \text{ y } \frac{c\,c'}{c\,c_1} = \frac{d\,d'}{d\,d_1},$$

y teniendo una razón común las relaciones anteriores, se verificará

$$\frac{a\,a'}{a\,a_1} = \frac{b\,b'}{b\,b_1} = \frac{c\,c'}{c\,c_1} = \frac{d\,d'}{d\,d_1},$$

como se quería demostrar.

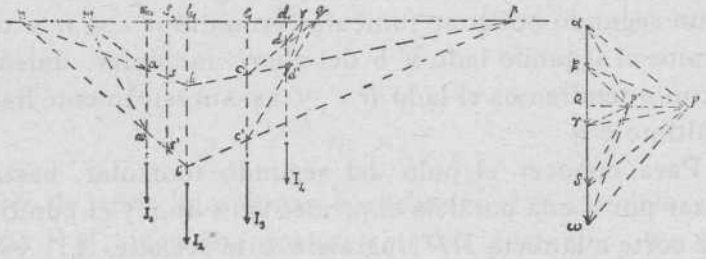


Fig. 40

De esta propiedad se deduce otro procedimiento, para trazar polígonos funiculares en los sistemas paralelos, sin necesidad de nuevas radiaciones: bastará trazar una secante arbitraria $m\,r$, prolongar los vectores hasta que corten a esta secante, dividir en una relación cualquiera a los segmentos $a\,a_1$, $b\,b_1$ ..... y uniendo los puntos m, a', b', c', d' y r, se tendrá un polígono funicular cuyo polo se encontrará sobre la recta $P\,Q$ trazada por P paralelamente a la secante $m\,r$.

95. Polígonos funiculares de un sistema vectorial cumpliendo determinadas condiciones.—La indeterminación que existe en el trazado de los polígonos funiculares puede restringirse, y aun desaparecer, imponiendo ciertas condiciones a dicho trazado. Entre los múltiples problemas a que este asunto puede dar lugar, resolveremos los casos siguientes, que son los de más aplicación para nosotros.

1.° *Polígonos funiculares cuyos lados extremos pasan por dos puntos dados.*—Supongamos conocida la línea de acción de la resultante [R] del sistema vectorial dado (figura 41), tomemos en ella un punto o arbitrario, unámosle con A y B, que son los puntos por donde se quiere hacer pasar los lados extremos de los polígonos funiculares que se buscan; ahora se trazarán en el polígono vectorial los radios αP y ωP, paralelos respectivamente a oA y oB, y tendremos el polo P de uno de los polígonos funiculares que se desea conocer; en efecto, completando la radiación y trazando el polígono funicular correspondiente, tomando a A como punto de partida del primer lado, llegaremos al último lado, que ha de ser paralelo a ωP y cortar al primero en el punto o, luego este último lado no puede ser otro que la recta oB trazada anteriormente.

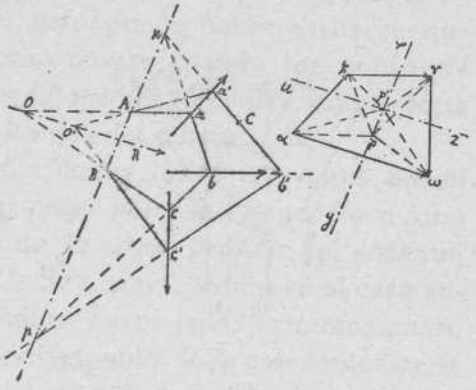


Fig. 41

Si ahora tomamos otro punto o' en la línea de acción de [R] y repetimos las construcciones, se obtendrá otro polígono funicular en las mismas condiciones; pero este

segundo funicular puede trazarse, con más facilidad, utilizando la propiedad del número **93**; ahora la secante *X Y* de la figura 39 es la recta *A B* de la 41; los polos de todos los funiculares que así se tracen, están sobre la recta *x y* trazada en el polígono vectorial, paralelamente a la recta *A B* y pasando por el primer polo *P*.

Cuando los vectores son paralelos se resuelve el problema del mismo modo; la figura 42 es un ejemplo que corresponde a este caso; en ella se han trazado dos de los infinitos funiculares que pueden pasar por *A* y *B*, teniendo todos los polos sobre la recta *P P'* paralela a *A B*.

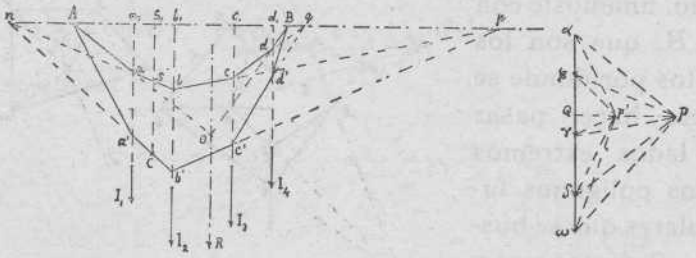


Fig. 42

2.° *Polígono funicular cuyos lados extremos pasan por dos puntos dados y uno de los lados intermedios pasa también por un punto fijo.*—Resolviendo el problema anterior se trazará un polígono funicular, cuyos lados extremos pasen por *A* y *B*, para determinar, sobre la recta *A B*, los puntos *n*, *p* ..... de intersección de los lados homólogos de los diversos funiculares que cumplan con la condición de pasar sus lados extremos por *A* y por *B*; supongamos ahora que se desea que el lado comprendido entre el primero y el segundo vector pase por el punto fijo *C* (fig. 41); se unirá *C* con *n* y quedará trazado el lado *a' b'* del funicular que buscamos; uniendo *a'* con *A*, *b'* con

p y c' con B, tendremos trazado el polígono *único* que cumple con las condiciones impuestas.

En el caso de sistemas paralelos se puede seguir otro procedimiento para pasar del polígono $A\ a\ b\ c\ d\ B$ (figura 42) al $A\ a'\ b'\ c'\ d'\ B$, que pasa por el punto intermedio C, señalado entre los vectores $[I_1]$ e $[I_2]$: tracemos la secante Css_1 paralela a los vectores del sistema, determínese la relación de los segmentos $C\,s$ y $C\,s_1$ y dividiendo en la misma relación a los segmentos $a\,a_1$, $b\,b_1$, $c\,c_1$ y $d\,d_1$, tendremos los vértices del polígono funicular que pasa por los puntos A, B y C. En general resulta este procedimiento más complicado que el anterior; pero puede haber casos en que convenga su empleo, como ocurre cuando los puntos de intersección de los lados del primer funicular, con la recta $A\ B$, estén fuera de los límites del dibujo.

3.° *Polígono funicular cuyos lados extremos pasan por dos puntos dados y cuyo polo se encuentre a una distancia determinada de la suma gráfica del sistema, en el polígono vectorial.*—Se trazará, como en el caso anterior, un polígono funicular, cuyos lados extremos pasen por A y por B (fig. 41); por el polo P de este funicular se trazará la recta $x\ y$ paralela a $A\ B$; paralelamente a la suma gráfica del polígono vectorial y a la distancia que se señale para el polo P', se trazará la recta $u\ z$; la intersección de $x\ y$ con $u\ z$ es el polo P' del polígono funicular que se desea obtener.

II

APLICACIONES DE LOS POLÍGONOS FUNICULARES

96. Determinación del momento de un sistema vectorial plano con relación a un punto.—Además de las aplicaciones que ya hemos visto se deducen de las primeras

propiedades de los polígonos funiculares, se utilizan éstos para resolver un gran número de problemas de aplicación en la Mecánica: indicaremos los más interesantes para nuestro estudio, empezando por la determinación del momento de un sistema vectorial plano, con relación a un punto de su mismo plano.

Sea el sistema $[S] = [I_1\, I_2\, I_3]$ de la figura 43 y propongámonos determinar su momento respecto al punto A, por

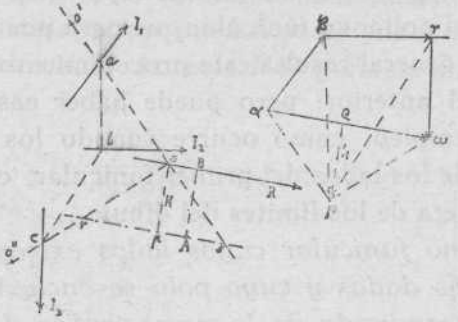


Fig. 43

medio del funicular $o\, a\, b\, c\, o$, correspondiente a un polo P cualquiera, que supondremos situado a la distancia h de la suma gráfica $[\alpha\ \omega]$.

Tracemos por el punto A una paralela a la citada suma gráfica y vamos a demostrar que *el segmento r s interceptado entre los lados extremos del funicular, multiplicado por la distancia h, representa el valor modular del momento del sistema con relación al punto A*. En efecto, suponiendo trazada la resultante $[R]$ del sistema, dicho momento es

$$M_A\,[S] = R.\,A\,B = R.\,o\,p = R.\,H;$$

pero de la semejanza de los triángulos $r\, o\, s$ y $\alpha P \omega$, se deduce que $\dfrac{r\,s}{H} = \dfrac{\alpha\ \omega}{h}$, o bien

$$\alpha\omega \times H = R.\ H = r\,s \times h$$

y por último $M_A[S] = r\,s \times h$, como queríamos demostrar.

Es evidente que tomando el polo a una distancia $h = 1$ de la suma gráfica $[\alpha\ \omega]$, el segmento $r\,s$ expresará, sin modificación, el valor modular del momento del sistema. Igualmente se vería que si se trazara por A una paralela a la diagonal $\alpha\gamma$ del polígono vectorial, el segmento interceptado en ella por los lados oa y bc del polígono funicular, representaría el momento de los vectores $[I_1]$ e $[I_2]$ con relación al punto A, y lo mismo, la paralela a la diagonal $\beta\omega$ nos daría, entre los lados $a\,b$ y $c\,o$, el momento de los vectores $[I_2]$ e $[I_3]$ respecto al mismo punto.

97. Descomposición de un vector en otros dos paralelos al mismo.—Esta descomposición, que dejamos aplazada en el número **74**, se efectúa de la manera siguiente, mediante el empleo de los polígonos funiculares.

1.° *Se suponen conocidas las líneas de acción de los vectores componentes.* – Se traza la suma gráfica $[\alpha\ \omega]$ (figura 44) y se toma un polo arbitrario P; se conocen así los radios αP y ωP, que permiten trazar los lados $o\,a$ y $o\,b$ del polígono funicular; el radio βP será paralelo a la recta $a\,b$ y nos determinará, en la suma gráfica, los dos segmentos $\alpha\beta$ y $\beta\omega$, que representan el valor modular y el sentido de los dos vectores $[I_1]$ e $[I_2]$ que se buscan. Si las líneas de acción dadas estuvieran a un mismo lado de $[R]$, serían $[I_1]$ e $[I_2]$ de sentido contrario; la construcción, en este caso, es idéntica a la anterior.

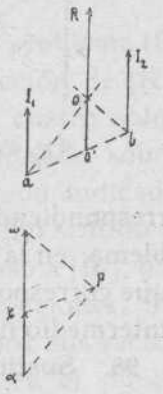


Fig. 44

2.° *Se suponen conocidos la línea de acción, valor modular y sentido de uno de los vectores componentes.*—El valor modular y sentido del segundo

vector componente también será conocido y basta con determinar un punto de su línea de acción: construidos el polígono vectorial (fig. 44) y la radiación completa, se trazarán por *o* los lados *ob* y *oa* y por *a* la paralela a δP, que en su intersección con la *ob*, nos da el punto *b* que necesitamos.

3.° *Se suponen conocidos el valor modular y sentido de* $[I_2]$ *y la línea de acción de* $[I_1]$. — Con el valor modular de $[I_2]$ se construirá, como en el caso anterior (fig. 44), el polígono vectorial y la radiación, determinando el punto *b* la línea de acción de $[I_2]$ y en cuanto al valor algebraico de $[I_1]$ se deducirá del polígono vectorial.

4.° *Se suponen conocidos los valores modulares de los dos vectores componentes.* — Ya dijimos en la resolución analítica de este problema [84], que los dos datos equivalían a uno solo y que por esto resultaba indeterminado. Gráficamente se nota la indeterminación observando que el lado intermedio del polígono funicular, no tiene que cumplir más condición, después de trazados el primero y último, que ser paralelo al radio δP de la radiación y así puede tener una infinidad de posiciones, correspondiendo a cada una de ellas una solución del problema; en la figura 45 están indicadas las tres soluciones que corresponden a las posiciones *a b*, *a' b'* y *a'' b''* del lado intermedio del polígono funicular.

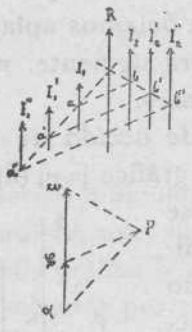


Fig. 45

98. Sustitución de un sistema vectorial por dos vectores que cumplan condiciones determinadas. — El fundamento de esta sustitución está en la propiedad, ya observada, de que si en los lados extremos de un polígono funicular suponemos situados vectores equipolentes a los ra-

dios $[\alpha P]$ y $[P\omega]$ de las radiaciones correspondientes, los dos vectores $[R']$ y $[R'']$ así construidos, podrán sustituir al sistema vectorial correspondiente, por serle equivalentes. Como esta sustitución puede hacerse de muchas maneras, indicaremos a continuación algunos casos de aplicación:

1.° *Sustitución del sistema vectorial dado por dos vectores de longitud determinada.*—Después de trazado el polígono vectorial se hará centro en α y ω con los radios $\alpha P = R'$ y $\omega P = R''$ y las intersecciones de los arcos

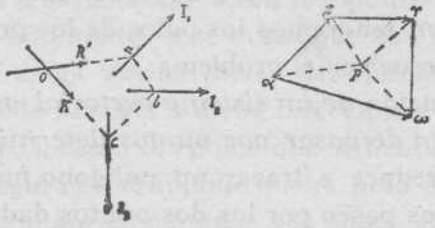


Fig. 46

trazados señalarán los polos que resuelven el problema (figura 46); si se fijara un punto de la línea de acción de $[R']$ o de $[R'']$, el problema admitirá, en general, cuatro soluciones. Si $R = R' \pm R''$ el polo P estará situado sobre $[\alpha\ \omega]$, o en su prolongación, y la construcción indicada conducirá a dos vectores paralelos y del mismo sentido o de sentido contrario; si se fija un punto de paso a $[R']$, o a $[R'']$, el problema no admitirá más que dos soluciones. En particular, si se quiere sustituir un sistema por dos vectores iguales y paralelos bastará tomar el polo en el punto medio de la suma gráfica $[\alpha\ \omega]$.

2.° *Sustitución de un sistema vectorial por dos vectores de dirección determinada.*—Bastará trazar por α y ω las paralelas a las direcciones dadas y su intersección propor-

cionará el polo de uno de los funiculares que resuelven el problema.

3.° *Sustitución de un sistema vectorial por dos vectores, conociendo la longitud y dirección de uno de ellos.*— Se trazará por α o por ω una paralela a la dirección conocida de uno de los vectores, se toma sobre ella la longitud del mismo y el extremo será el polo buscado.

4.° *Sustitución de un sistema vectorial por dos vectores, conociendo la longitud de uno de ellos y la dirección del otro.*—Se trazará por α o por ω una paralela a la dirección conocida de uno de los vectores que se buscan y haciendo centro en ω o en α, con un radio igual a la longitud del otro vector, tendremos los polos de los polígonos funiculares que resuelven el problema.

5.° *Sustitución de un sistema vectorial por dos vectores que hayan de pasar por puntos determinados.*—Este problema se reduce a trazar un polígono funicular cuyos lados extremos pasen por los dos puntos dados, como vimos en el número **95**-1.°; la infinidad de soluciones que este problema admite, se reducen a dos cuando se señala el valor modular o la dirección de uno de los vectores que se buscan.

En la figura 47 se ha supuesto un sistema formado por cuatro vectores iguales y paralelos y se quiere sustituir por dos vectores $[R']$ y $[R'']$ que pasen por los puntos A y B. Por la simetría del sistema se puede señalar la línea de acción de la resultante, sin recurrir a ningún polígono funicular auxiliar; tomemos

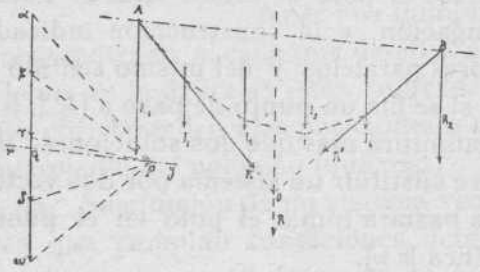


Fig. 47

en ella el punto arbitrario *o* y unámosle con *A* y *B*; trazando las paralelas a dichas rectas por α y ω. tenemos el polo *P* de uno de los infinitos funiculares que resuelven la cuestión; la figura indica las restantes construcciones para obtener los dos vectores [*R'*] y [*R''*].

Si se traza por *P* la recta *xy*, paralela a *AB*, sabemos que en esta recta están los polos de todos los polígonos funiculares que cumplen con la condición del trazado y si se quiere que uno de los vectores [*R'*] o [*R''*] tenga una longitud determinada, bastará hacer centro en α u ω, con un radio igual a la longitud dada y los puntos en que estos arcos corten a la recta *xy*, serán los polos que se necesitan. Del mismo modo, si se desea que uno de los vectores [*R'*] o [*R''*] tenga una dirección determinada, se trazará por α o por ω la paralela a dicha dirección y los puntos en que corten a *xy* serán los polos que se buscan.

Si en la figura 47 se supone que el polo se traslada sobre la recta *xy*, aproximándose a la suma gráfica [α ω], el ángulo α *P* ω irá aumentando hasta valer *180°* cuando el polo llega al punto *Q*; en esta posición desaparece el polígono funicular, pero como en todas las anteriores los radios [α *P*] y [*P* ω] representan el valor modular dirección y sentido de los dos vectores [*R'*] y [*R''*], que aplicados en *A* y en *B* equivalen al sistema dado, en dicho límite se obtendrán dos vectores paralelos [R_1] y [R_2], equipolentes respectivamente a [α *Q*] y [*Q* ω], que podrán, igualmente que los anteriores, sustituir al sistema propuesto.

99. Determinación de dos vectores que cumpliendo ciertas condiciones equilibren a un sistema vectorial.—Si a un sistema vectorial se le agrega un vector igual y directamente opuesto a su resultante, el sistema que se obtiene está en equilibrio y si dicho vector adicionado se descompone en dos que cumplan las condiciones exigidas, quedará resuelto el problema propuesto; pero el empleo de los

polígonos funiculares resuelve directamente esta cuestión, pues basta hacer la sustitución del sistema dado por dos vectores (**98**), cuyas condiciones se relacionen con las que hayan de tener los dos *equilibradores* que se piden y cambiándoles el sentido, se obtendrán los que se desean.

El caso más frecuente es la determinación de dos vectores equilibradores que pasen por dos puntos determinados (cálculo de *reacciones*) y fácilmente se ve que haciendo pasar un polígono funicular por dichos puntos y aplicando en ellos dos vectores iguales y directamente opuestos a los que, sobre los lados extremos del funicular trazado, señalan los radios αP y $P\omega$, o sea equipolentes a $[P\alpha]$ y $[\omega P]$, el sistema que se forme resultará en equilibrio. Así, por ejemplo, en la figura 47 se obtendrán dos vectores, que equilibran al sistema, aplicando en A y en B dos vectores de sentido contrario a los $[R']$ y $[R'']$, o a los $[R_1]$ y $[R_2]$, antes obtenidos como equivalentes al sistema propuesto.

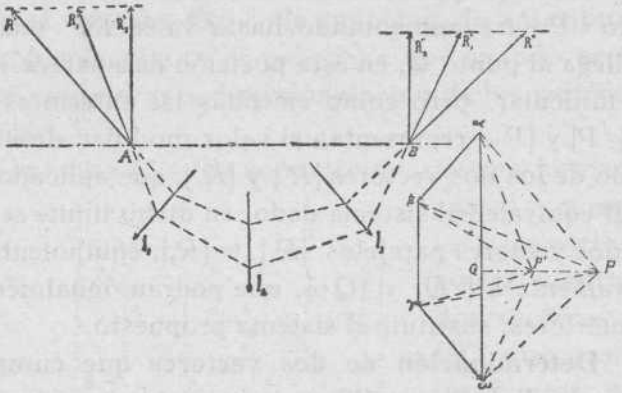


Fig. 48

100. Línea de cierre de los polígonos funiculares.—Al hacer pasar por dos puntos A y B (fig. 48) los dos vectores $[R']$ y $[R'']$ equipolentes a $[P\alpha]$ y $[\omega P]$, que equilibran al sistema dado $[I_1 I_2 I_3]$, se verifica que cualquier polígono

funicular que se trace al sistema $[I_1 I_2 I_3 R' R''] = o$, con el polo sobre la recta PQ, paralela a AB, tendrá sus lados extremos sobre la recta AB, (*) y por este motivo se llama a dicha recta *línea final o de cierre* de los polígonos funiculares del sistema primitivo $[I_1 I_2 I_3]$.

Si se une un punto cualquiera de PQ con α y ω, se obtienen los valores modulares, dirección y sentido de los vectores análogos a $[R']$ y $[R'']$ que aplicados en A y B equilibran al sistema; en particular, dicha paralela a la línea de cierre determina sobre la suma gráfica $\alpha\,\omega$ los valores modulares y el sentido de los dos vectores equilibradores R'_2 y R''_2, paralelos a la resultante.

101. Momento de los sistemas paralelos con relación a un punto. — La importancia que en las aplicaciones tienen

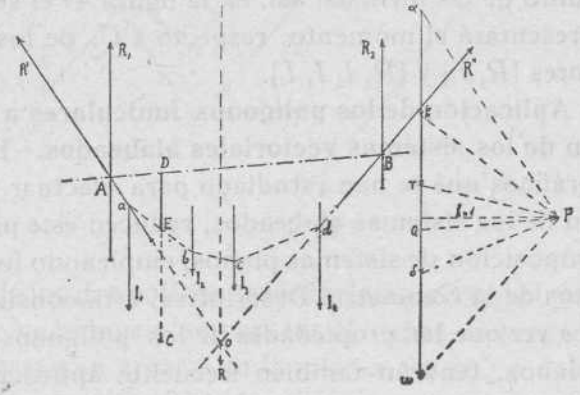


Fig. 49

los sistemas vectoriales paralelos, hace que volvamos a insistir, con referencia a ellos, sobre el método indicado en el número **96** para determinar los momentos de los sistemas planos con relación a puntos de su plano.

Supongamos el sistema paralelo $[I_1 I_2 I_3 I_4]$ (fig. 49) y los

(*) Se supone que empieza la construcción del polígono funicular en el punto A.

dos vectores $[R_1]$ y $[R_2]$, paralelos al mismo, que le equilibran en los puntos A y B, estando el polo P a una distancia $h = 1$ de la suma gráfica $[\alpha\ \omega]$. Según sabemos, si se traza por C una paralela a $\alpha\ \omega$, los segmentos interceptados entre los lados del polígono funicular $A\ a\ b\ c\ d\ B$, representan los momentos de los grupos de vectores que, en orden correlativo, se puedan formar con los $[I_1]$, $[I_2]$, $[I_3]$ e $[I_4]$; pero teniendo en cuenta que si se incluyen los vectores $[R_1]$ y $[R_2]$ en el sistema propuesto, el primero y el último lado del funicular están sobre la línea de cierre AB, resulta que las *ordenadas* del polígono funicular citado, tomando por base de las mismas la línea de cierre AB, representan los momentos de los grupos de vectores que quedan a uno y otro lado de dichas ordenadas, con relación a cualquier punto de las mismas; así, en la figura 49 el segmento DE representará el momento, respecto a C, de los grupos de vectores $[R_1\ I_1]$ y $[R_2\ I_2\ I_3\ I_4]$.

102. Aplicación de los polígonos funiculares a la composición de los sistemas vectoriales alabeados. — Los métodos gráficos que se han estudiado para efectuar la composición de los sistemas alabeados, reducen este problema a la composición de sistemas planos, empleando los procedimientos de la Geometría Descriptiva; esta consideración nos hace ver que las propiedades de los polígonos funiculares planos, tendrán también frecuente aplicación en la composición de los sistemas alabeados y para darnos mejor cuenta de estas aplicaciones resolveremos algunos ejemplos.

1.° *Composición de un sistema vectorial paralelo.*— Las proyecciones de un sistema de las condiciones enunciadas tendrán, en general, una disposición análoga a la expresada en la figura 50, para un sistema de tres vectores. Según el teorema demostrado en el número **71**, bastará encontrar las resultantes parciales de los sistemas planos de

proyección y estos dos vectores serán las proyecciones de la resultante del sistema en el espacio.

Los polígonos vectoriales y funiculares de los dos sistemas parciales son completamente independientes entre sí y puede dibujarse cada uno en la parte de la figura que más convenga. Si el sistema del espacio es de suma gráfica nula, los dos sistemas parciales también lo serán y el equilibrio del primero lleva consigo el de los dos segundos, o sea el

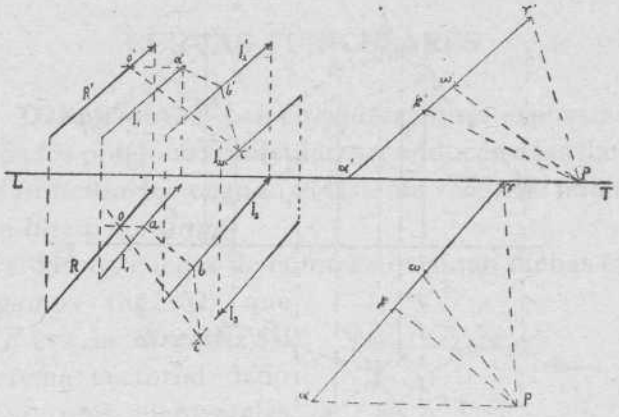


Fig. 50

cierre de los dos polígonos funiculares; pero si el sistema del espacio se reduce a un par, los sistemas de proyección, se presentarán en general en la misma forma, y decimos en general porque puede haber alguna posición especial, para el par del espacio, que produzca en uno de los planos de proyección un sistema en equilibrio; si se presenta esta circunstancia, nos indicará que el par del sistema en el espacio tiene su plano de acción perpendicular al de proyección correspondiente y fácil es ver que, no siendo nulo el sistema del espacio, no pueden serlo al mismo tiempo sus dos proyecciones.

2.° *Composición de un sistema vectorial paralelo per-*

pendicular a uno de los planos de proyección. – Cuando el sistema vectorial esté colocado, como el de la figura 51, perpendicularmente a uno de los planos de proyección, no se puede seguir el procedimiento anterior; pero vamos a ver que, aun en estos casos, puede servirnos el polígono funicular de la proyección vertical, para determinar la proyección sobre el plano horizontal de la resultante del sistema en el espacio.

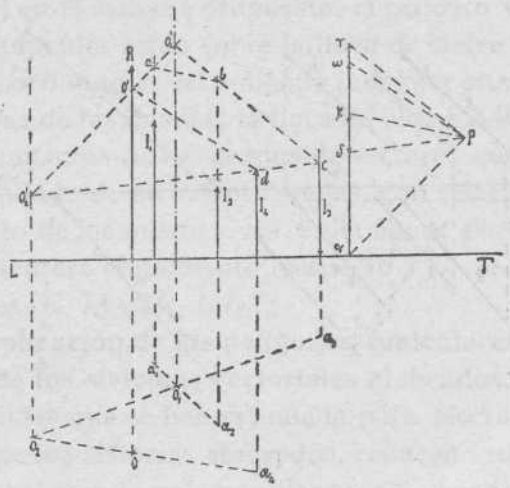


Fig. 51

Para conseguirlo observemos que la resultante de $[I_1]$ e $[I_2]$ pasará, en proyección vertical, por el punto o'_1 de intersección del primero y tercer lado del polígono funicular y en proyección horizontal estará en el punto o_1 de la recta $a_1 a_2$; del mismo modo, la resultante de $[I_1]$, $[I_2]$ e $[I_3]$ pasará, en proyección vertical, por el punto o'_2 de intersección del primero y cuarto lado del polígono funicular y en proyección horizontal estará en el punto o_2 de la recta $o_1 a_3$ y, por último, la resultante total del sistema será el vector $[R]$, que pasa en proyección vertical por la intersección o' del primero y último lado del polígono funicular y en proyección

horizontal estará proyectado en el punto *o* de la recta o_2a_4. Vemos, por consiguiente, de qué manera se pueden ir refiriendo, sobre la proyección horizontal, los puntos de intersección del primer lado del polígono funicular con cada uno de los demás, para llegar al punto proyección horizontal de la resultante que se busca.

III

CURVAS FUNICULARES

103. Definiciones.—Las consideraciones expuestas en la teoría de los polígonos funiculares, conducen a las llamadas *curvas funiculares*, cuando el sistema vectorial dado es un sistema *lineal continuo*.

Para darnos cuenta de cómo se originan dichas curvas, supongamos (fig. 52) que *AB... F* sea la *directriz* (*) del sistema vectorial dado y los vectores elementales $[I_1]$, $[I_2]$... los correspondientes a los segmentos infinitesimales *A*, *B*... *F* de la directriz, indicados en la figura; tracemos por un origen cualquiera α el polígono vectorial $\alpha\,\beta\,\gamma\,\ldots\,\omega$ y tomando un polo arbitrario *P*, construiremos la radiación $P\alpha$, $P\beta$ ... $P\omega$; con estos datos podemos trazar en el sistema vectorial el polígono funicular *o a b... f o*; pero siendo los vectores $[I_1]$, $[I_2]$... infinitamente pequeños, el polígono vectorial se

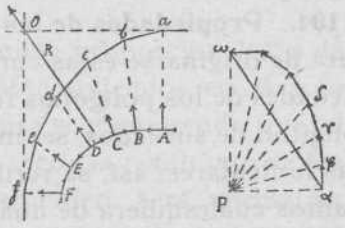


Fig. 52

(*) Llamamos *directriz* de un sistema vectorial, continuo y lineal, al lugar geométrico de los puntos de aplicación de los infinitos vectores que forman el sistema.

convierte en una curva cuya cuerda $\alpha\,\omega$ es la suma gráfica de los infinitos vectores elementales aplicados a la directriz *AB... F*, y como las líneas de acción de dos vectores elementales consecutivos forman ángulos infinitamente pequeños, el polígono funicular trazado será también una curva cuyas tangentes extremas se cortan en un punto *o* de la resultante del sistema dado.

Al polígono $\alpha\,\beta...\,\omega$ se le da, en estos casos, el nombre de *curva vectorial* del sistema propuesto y al funicular *a b c... f* se le llama *curva funicular* del mismo. Si llamamos *radiación vectorial* a la figura formada por el sistema vectorial, siendo los vectores los radios de dicha radiación, podemos expresar la correlación que existe entre las curvas vectorial y funicular, diciendo que *la tangente en un punto cualquiera de cada una de ellas es paralela al radio correspondiente en la otra*, proporcionando esta propiedad el medio de señalar con facilidad puntos o radios homólogos de dichas curvas.

104. Propiedades de las curvas funiculares.—De la manera de originarse estas curvas se deduce que todas las propiedades de los polígonos funiculares, independientes de la longitud de sus lados, serán igualmente aplicables a las curvas funiculares; así, se verificará que las tangentes en dos puntos cualesquiera de una curva funicular se cortarán en la línea de acción de la resultante de los vectores elementales comprendidos entre los respectivos puntos de contacto y la dirección de dicha resultante será la de la cuerda que une los puntos homólogos en la curva vectorial.

Del mismo modo se verificará que las curvas funiculares, correspondientes a un mismo polo, tendrán sus tangentes homólogas paralelas y los puntos de intersección de las tangentes homólogas, en dos curvas funiculares correspondientes a distinto polo, estarán situados sobre una recta paralela a la que une los polos de las curvas.

105. Trazado gráfico de curvas funiculares. — Desde luego se comprende que el procedimiento seguido para definir las curvas funiculares, en los párrafos anteriores, no puede aplicarse en la práctica, por la imposibilidad de manejar gráficamente los elementos infinitesimales que intervienen en las construcciones indicadas.

Pero si dicho procedimiento no puede realizarse con todo rigor, lo podemos utilizar para encontrar, con cierta aproximación, las curvas funiculares correspondientes a los sistemas vectoriales, cuya ley de formación nos sea conocida. Sea, por ejemplo, el sistema continuo definido por una serie de vectores elementales normales a un arco de círculo *A B... F* (fig. 53), siendo sus longitudes proporcionales a la de los elementos lineales a que están aplicados en el arco director; por la simetría de la figura se comprende que al considerar un segmento finito de arco, la resultante de los vectores elementales que le corresponden, será normal en el punto medio y sensiblemente proporcional a la longitud del segmento tomado.

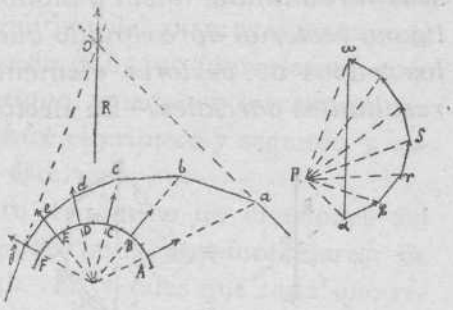


Fig. 53

Dividamos el arco director en un cierto número de partes iguales y tracemos el vector correspondiente a cada una de dichas partes, aplicado al punto medio de las mismas; procediendo con el sistema así formado, como hemos hecho en la figura 52, trazaremos en la 53 un polígono vectorial *α β... ω* y otro funicular *a b c... f*, que se aproximarán tanto más a las curvas vectorial y funicular, cuanto mayor sea el número de partes en que se haya dividido al arco director

del sistema vectorial propuesto. Si ahora se redondean los ángulos de los polígonos encontrados, tendremos dos curvas que, para la mayor parte de las aplicaciones prácticas, podrán sustituir a las verdaderas curvas vectorial y funicular; pero a fin de obtener un trazado que, sin aumentar las construcciones, disminuya las causas de error, conviene demostrar los dos teoremas siguientes:

TEOREMA 1.°—*La curva vectorial correspondiente a un sistema continuo, lineal y plano, está circunscrita al polígono vectorial aproximado que se obtiene sustituyendo los grupos de vectores elementales del sistema por sus resultantes parciales.*—En efecto, si duplicamos el número de divisiones efectuadas en el arco director, tendríamos doble número de vectores; los dos que ahora corresponden a cada una de las divisiones anteriores, tienen por resultante al vector anterior de la misma y, por lo tanto, el nuevo polígono vectorial tendrá doble número de lados, pero los vértices del anterior (fig. 54) seguirán siendo vértices del nuevo; continuando del mismo modo aumentando el número de divisiones del arco director, llegaríamos en el límite a la curva vectorial que contendría los vértices de los polígonos anteriores, siendo circunscrita a todos ellos.

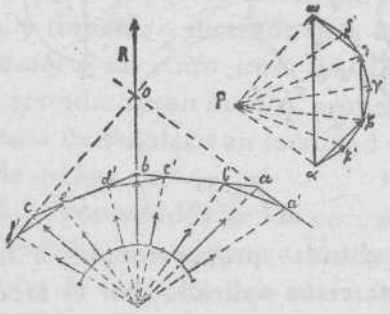


Fig. 54

TEOREMA 2.°—*La curva funicular correspondiente a un sistema continuo, lineal y plano, está inscrita en el polígono funicular aproximado que se obtiene sustituyendo los grupos de vectores elementales del sistema por sus resultantes parciales.*—En efecto, si se duplica el número

de divisiones del arco director, el nuevo polígono funicular tendrá el primer lado común con el anterior, el segundo distinto, y el tercero paralelo, al parecer, con el segundo del polígono funicular primitivo, pero observando que el punto donde se cortan el primero y tercero actuales (fig. 54) ha de estar situado sobre el primer vector primitivo (que es resultante de los dos primeros actuales), se deduce que dicho tercer lado del polígono funicular actual, se confundirá con el segundo lado del primitivo; del mismo modo se vería que el quinto lado del segundo polígono funicular se confunde con el tercero del antiguo, quedando inscritos el segundo y cuarto de aquél, entre el primero y segundo y entre el segundo y tercero de éste.

Continuando en aumento el número de divisiones del arco director, se van trazando polígonos funiculares, de mayor número de lados cada vez, y tales que cada uno resulta inscrito en todos los anteriores, y en el límite se obtendrá la curva funicular, que resultará inscrita en cualquiera de los polígonos anteriores.

106. Observación.—Después de lo demostrado en los teoremas anteriores, se comprende que al obtener un polígono vectorial y otro funicular, como aproximaciones de las curvas vectorial y funicular correspondientes, y se desee dibujar con un trazo contínuo las expresadas curvas, se procurará contornear al polígono vectorial en forma tal que la curva trazada pase por todos los vértices y resulte circunscrita al mismo, y por el contrario, para dibujar la curva funicular se deberá llevar el trazado de modo que resulte tangente a los lados del polígono y se obtenga una línea inscrita en el mismo; el trazado se obtiene con bastante precisión observando que los puntos de tangencia están sobre la línea de acción de los vectores correspondientes a los puntos de división del arco director.

107. Determinación analítica de las curvas funiculares

en algunos casos especiales. — Conocida la ley de formación de un sistema vectorial continuo y la naturaleza de su línea directriz, se puede en algunos casos determinar la ecuación analítica de las curvas funiculares que corresponden al mismo. Nos limitaremos a considerar los dos casos que exponemos a continuación.

Primer caso. — *Curvas funiculares de forma parabólica.* — Supongamos un sistema vectorial continuo definido por la directriz arbitraria *A B C D E*, sobre la que están aplicados los vectores elementales paralelos y proporcionales a la longitud de las proyecciones de los elementos rectilíneos de la directriz sobre una recta perpendicular a la dirección de los vectores (fig. 55); vamos a demostrar que las curvas funiculares de los sistemas así definidos son parábolas de segundo grado.

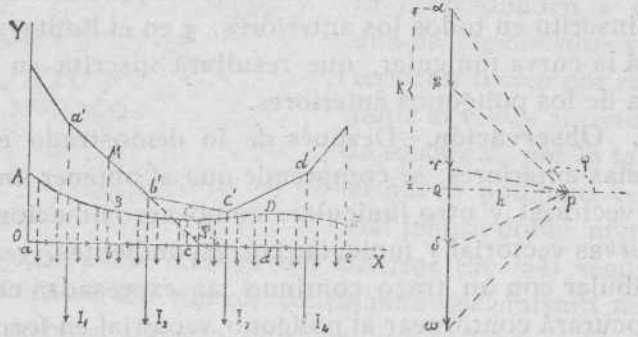


Fig. 55

Tomemos como ejes coordenados la recta *oX* perpendicular a los vectores y la *oY* paralela a los mismos, pasando por el origen *A* de la directriz del sistema; dividamos a la directriz en cuatro partes cualesquiera por los puntos *B*, *C* y *D* y sean $[I_1]$, $[I_2]$, $[I_3]$ e $[I_4]$ las resultantes parciales de cada grupo, aplicadas en los puntos medios de *a b*, *b c*, *c d* y *d e* y cuyos valores modulares son proporcionales a

dichos segmentos tomados sobre la proyección de la directriz en el eje oX.

Con estos datos y el trazado previo del polígono vectorial y radiación $P.\ \alpha\beta\gamma\delta\omega$, construiremos el funicular $a'\ b'\ c'\ d'$; los lados de éste serán tangentes a la curva funicular cuya ecuación queremos encontrar; tomemos sobre $a'\ b'$ el punto M de tangencia y llamando x e y a las coordenadas de este punto, podremos establecer la siguiente ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}\,\varphi = -\frac{\beta Q}{PQ} = -\frac{\alpha Q - \alpha\beta}{PQ}.$$

El segmento αQ tiene un valor constante, cualquiera que sea el punto tomado en la curva funicular, y lo representaremos por K; el $\alpha\beta$ es proporcional a la abscisa del punto M y su expresión es $\alpha\beta = m\,x$, y al PQ, también constante, le llamaremos h; sustituyendo estos valores en la ecuación obtenida, se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{K - m\,.\,x}{h} = \frac{m\,x - K}{h},$$

$$dy = 2\,p\,x\,dx + q\,dx.$$

Integrando la ecuación anterior, obtenemos, para ecuación finita de las curvas funiculares del sistema vectorial propuesto

$$y = p\,x^2 + q\,x + r,$$

que nos demuestra lo que deseábamos.

En esta ecuación tienen los coeficientes los valores

$$p = \frac{m}{2\,h},\quad q = -\frac{K}{h}$$

y r es una constante arbitraria que puede elegirse con la

condición de hacer pasar la curva funicular por algún punto determinado.

Segundo caso.—Curvas funiculares de forma de catenaria.—Si en las mismas condiciones del sistema vectorial del caso anterior, se supone que los vectores elementales son proporcionales a la longitud de los elementos de la línea directriz, se obtienen las curvas funiculares de forma de catenaria, según vamos a demostrar.

En este caso el segmento $\alpha\beta$ de las fórmulas anteriores es proporcional a la longitud de la directriz desde A hasta B y llamando s a esta longitud será $\alpha\beta = m \cdot s$ y la ecuación diferencial de la curva funicular es ahora

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ms - K}{h}.$$

Para efectuar la integración de esta ecuación, diferenciémosla con respecto a x y se obtendrá

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{m}{h} \cdot \frac{ds}{dx} = a \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

y representando por z el coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}$, resulta

$$\frac{dz}{dx} = a\sqrt{1 + z^2};$$

haciendo ahora la hipótesis $\sqrt{1 + z^2} = u - z$, de la que se deduce $\frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{du}{u}$, se convierte la ecuación anterior en $\frac{du}{u} = adx$, de donde

$$1 \cdot u = 1\left(z + \sqrt{1 + z^2}\right) = ax + constante.$$

Prencindiendo de la constante de la integración (*), se obtiene

$$z + \sqrt{1 + z^2} = e^{ax},$$

$$1 + z^2 = e^{2ax} - 2e^{ax} \cdot z + z^2,$$

$$z = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{ax} - e^{-ax}\right)$$

y por último

$$y = \frac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right) + constante,$$

que es la ecuación de una catenaria.

Como ejemplos sencillos en que las curvas funiculares están comprendidas en los casos anteriores, se presentan los sistemas vectoriales formados por los *pesos elementales* aplicados en cada punto o elemento rectilíneo de una viga recta, sometida a la acción de su propio peso o a la de una carga cualquiera uniformemente repartida, y el formado de la misma manera por los pesos elementales de un cordón sostenido por sus extremos en dos puntos situados a menor distancia que la longitud del cordón; en el primer caso, ya esté la viga colocada horizontalmente o inclinada, la curva funicular es una parábola, y en el segundo caso una catenaria. (**)

108. Momento de un sistema vectorial continuo respecto a un punto.—El procedimiento indicado en los números

---

(*) Prescindir de dicha constante equivale a suponer que la curva que se busca tendrá en el eje oY, donde $x = o$, la tangente paralela al eje oX, correspondiendo además dicha circunstancia al punto situado a la distancia de A, $s = \frac{K}{m}$, contada sobre la directriz del sistema.

(**) Por consideraciones que se harán en otra parte del curso, se demostrará que la forma que adopta el cordón, al suspenderse de la manera indicada, es también una catenaria.

96 y **101** para determinar el momento de un sistema vectorial con relación a un punto, utilizando las propiedades de los polígonos funiculares, se aplica del mismo modo a un sistema continuo del cual se haya trazado una de sus curvas funiculares.

Sea, por ejemplo el sistema continuo de la figura 56, cuya directriz es la recta $A\,B$ y cuyos vectores elementales suponemos iguales a la longitud de los elementos de la directriz a que están aplicados; las curvas funiculares de tal sistema son parábolas **(107)** y en la figura se ha supuesto trazada la que pasa por A y B, correspondiente al polo P de la radiación.

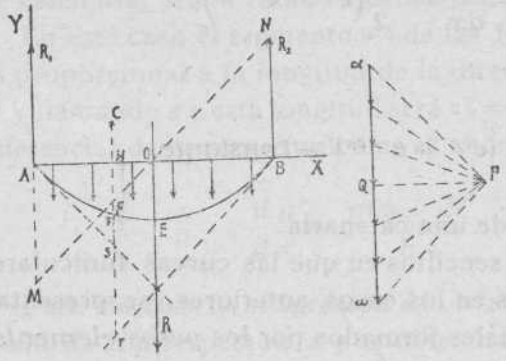


Fig. 56

El momento del sistema, respecto al punto C, está determinado por el segmento $r\,s \times P\,Q$, o bien por $r\,s$ si $P\,Q = 1$, puesto que las tangentes en A y B a la parábola, paralelas a los radios $P\alpha$ y $P\omega$, constituyen los lados primero y último del polígono funicular, convertido en curva funicular. Del mismo modo, la ordenada $H\,F$ de la curva funicular expresará el momento, respecto a C **(101)**, de todos los vectores elementales aplicados desde A hasta H y del vector equilibrador $[R_1] \equiv [Q\alpha]$, o bien, prescindiendo del signo, el de todos los vectores comprendidos desde B hasta H y el equilibrador $[R_2] \equiv [\omega\,Q]$.

109. Observación.—El trazado de curvas funiculares se simplifica cuando dichas curvas son integrales de otras lí-

neas trazadas, o fáciles de trazar en el dibujo, recurriendo a los procedimientos de integración gráfica o mecánica estudiados en el curso de Cálculo integral.

Asi, por ejemplo, la parábola del caso anterior (fig. 56), es la integral de la recta $y = x - \frac{1}{2}$ y disponiendo de un intégrafo bastaría hacer que el estilete recorriera dicha recta $M\,N$, para que el trazador del aparato, debidamente colocado, nos proporcione la parábola $A\,E\,B$.

CAPITULO CUARTO

Momentos estáticos, centros de gravedad y momentos de inercia

I

MOMENTOS CON RELACIÓN A PLANOS DE LOS SISTEMAS VECTORIALES PARALELOS

110. Definiciones.—Se llama *momento de un vector con relación a un plano* el producto de su valor modular por la distancia de su punto de aplicación al expresado plano.

Los momentos con relación a planos de varios vectores sólo se comparan entre sí cuando dichos vectores son paralelos: en estos casos se dice que dos momentos son *del mismo signo* cuando los factores que entran en su formación son del mismo o de contrario sentido, y dichos momentos son *de signo contrario* cuando los expresados factores tienen dos de ellos el mismo sentido y los otros dos sentido contrario; así, en la figura 57, los momentos de los vectores $[I_1]$, $[I_2]$ e $[I_4]$, respecto al plano PQ, son del mismo signo y los momentos de los vectores $[I_3]$ e $[I_5]$ serán de signo contrario a los anteriores.

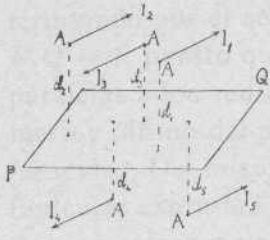


Fig. 57

En cuanto al signo que se deba atribuir a uno u otro grupo de momentos es convencional en cada caso, conviniendo en llamar positivos, y afectar del signo *más*, a los momentos de uno cualquiera de los dos grupos que se pueden formar y, por oposición, serán negativos, y se afectarán del signo *menos*, los del grupo opuesto.

Momento de un sistema vectorial paralelo (*) *con relación a un plano* es la suma algebraica de los momentos de todos los vectores de dicho sistema, con relación al expresado plano.

De la definición de momentos con relación a planos se deduce que estas nuevas magnitudes dependen esencialmente del punto de aplicación que se señale a los vectores, pudiendo suceder que el momento de un vector, con relación a un plano, sea positivo, nulo o negativo, según la situación que, respecto al mismo, tenga el punto que se considere como origen del vector.

111. Notación.—Los momentos de vectores y sistemas vectoriales con relación a planos los representaremos simbólicamente por la notación $E[I_s]$ o $E[S]$, colocando entre corchetes el vector o sistema vectorial cuyo momento se quiera expresar. Cuando sea preciso indicar el plano con relación al que se hayan tomado los momentos, se pondrá a la letra E un subíndice indicador de dicho dato.

112. Determinación gráfica del momento de un sistema paralelo respecto a un plano.—Cualquiera que sea la forma del sistema paralelo, cuyo momento con relación a un plano se quiere determinar, puede encontrarse dicho momento por una construcción gráfica, basada en las aplica-

(*) La teoría de los momentos con relación a planos se refiere sólamente a los sistemas vectoriales paralelos, teniendo, por consiguiente, un carácter más algebraico que mecánico: esto, sin embargo, no impide que sus propiedades sean de frecuente uso en la Mecánica general y en sus aplicaciones prácticas.

ciones de los polígonos funiculares, que proporciona el valor algébrico de expresiones de la forma $E[S] = \Sigma I_k \,.\, d_k$.

Tracemos (fig. 58) dos ejes rectangulares oX y oY; a partir de o tomemos sobre oX las distancias

$$od_1 = d_1, \quad od_2 = d_2, \quad \ldots\ldots od_k = d_k$$

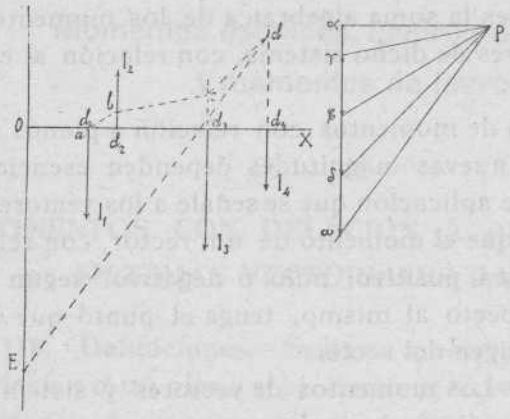


Fig. 58

y en los puntos d_1 d_2 .... d_k, así señalados, aplicaremos, paralelamente a oY, los vectores correspondientes del sistema, en un sentido u otro, según sea el signo de su momento. Hecho lo anterior, se ve que la expresión $\Sigma I_k \,.\, d_k$ no es otra cosa que el momento respecto al punto o del sistema vectorial auxiliar que se ha constituido; podremos, por consiguiente, aplicar las construcciones explicadas en el número **96** para obtener el segmento

$$oE = \Sigma I_k \,.\, d_k = E[S].$$

113. Propiedad fundamental de los momentos con relación a planos.—Entre las diversas propiedades de que gozan los momentos con relación a planos de los sistemas vectoriales paralelos, la más importante, por sus aplicaciones, se expresa en el siguiente *teorema*.

El momento de un sistema vectorial paralelo con relación a un plano, es igual al momento de su resultante,

tomando como punto de aplicación de esta última el centro del sistema.—Sea el sistema $[I_1, I_2 \ldots\ldots I_k]$, concretado en la figura 59 en sus tres primeros vectores, y supongamos efectuadas las operaciones de reducción necesarias para determinar el centro o de dicho sistema **(72)**, representemos por d, d', d_1, d_2, d_3 las distancias al plano PQ de los puntos O, O_1, A_1, A_2 y A_3 y tracemos las perpendiculares O_1n y A_1m a la recta A_2a_2; con estos datos tendremos

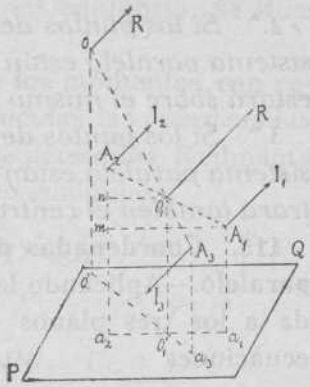


Fig. 59

$$R_1 \,.\, d' = (I_1 + I_2) \,.\, o_1\, o'_1 = I_1 \,.\, (d_1 + m\,n) +$$
$$+ I_2 \,.\, (d_2 - A_2\, n) = I_1 \,.\, d_1 + I_2 \,.\, d_2 + I_1 \,.\, m\,n - I_2 \,.\, A_2\, n;$$

pero de la relación $$\frac{m\,n}{A_2\,n} = \frac{o_1\,A_1}{o_1\,A_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

se deduce que

$$I_1 \,.\, m\,n = I_2 \,.\, A_2\, n \quad \text{y} \quad R_1 \,.\, d' = I_1 \,.\, d_1 + I_2 \,.\, d_2 \,.$$

Aplicando esta fórmula al vector resultante de $[R_1]$ e $[I_3]$, se obtiene

$$R \,.\, d = R_1 \,.\, d' - I_3 \,.\, d_3 = I_1 \,.\, d_1 + I_2 \,.\, d_2 - I_3 \,.\, d_3$$

o de un modo general

$$R \,.\, d = \Sigma I_k \,.\, d_k = E\,[S],$$

como queríamos demostrar.

114. Consecuencias.—Del teorema demostrado se deducen, como corolarios inmediatos, las siguientes consecuencias:

1.ª *Los momentos de un sistema paralelo con relación*

a todos los planos que pasan por su centro son nulos y recíprocamente.

2.ª *Si los puntos de aplicación de los vectores de un sistema paralelo están en un plano, el centro del sistema estará sobre el mismo plano.*

3.ª *Si los puntos de aplicación de los vectores de un sistema paralelo están sobre una recta, en ella se encontrará también el centro del sistema.*

115. Coordenadas del centro de un sistema vectorial paralelo. — Aplicando la propiedad fundamental demostrada a los tres planos coordenados, se obtienen las tres ecuaciones

$$R \cdot a = \Sigma I_k \cdot x_k, \quad R \cdot b = \Sigma I_k \cdot y_k, \quad R \cdot c = \Sigma I_k \cdot z_k,$$

que permiten calcular las coordenadas a, b, c, del centro del sistema, en función de los momentos del mismo respecto a los expresados planos coordenados.

Las fórmulas que dan los valores de a, b, c, adquieren valores finitos y determinados en todos los casos que no se trate de sistemas de suma gráfica nula y toman la forma de imposibilidad en los expresados sistemas; en estos últimos casos puede ocurrir que si el sistema dado está en equilibrio, la forma que adopten las referidas fórmulas sea la de indeterminación (*) y con este motivo se suele decir

(*) Si se determinan, en un sistema paralelo en equilibrio, separadamente los centros de los grupos de vectores que están dirigidos en los dos sentidos opuestos, podrá suceder, escogiendo convenientemente los puntos de aplicación de los vectores, que coincidan dichos dos centros parciales y entonces el momento del sistema, respecto a cualquier plano, será nulo y los valores de a, b, c, serán

$$a = \frac{0}{0}, \quad b = \frac{0}{0}, \quad c = \frac{0}{0}.$$

En el caso de sistemas paralelos de suma gráfica nula, sin estar en equilibrio, se encontrarían los dos vectores del par equivalente, aplicados en los dos centros parciales, y la elección conveniente de los puntos de aplicación de los vectores podría hacer que una o dos coordenadas del centro tomaran la expresada forma de indeterminación, pero la tercera tendría la forma de imposibilidad.

que en los sistemas paralelos en equilibrio, todos los puntos del espacio pueden ser centro del mismo, así como en los de suma gráfica nula, sin estar en equilibrio, se dice que su centro está en el infinito.

116. Determinación analítica de los momentos con relación a planos.—Suponiendo conocidas las coordenadas del centro de un sistema paralelo, se determina fácilmente su momento con relación a un plano cualquiera

$$Ax + By + Cz + D = o$$

por la fórmula [**113**]

$$E[S] = R \cdot d = \Sigma I_k \frac{Aa + Bb + Cc + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

y si los datos son los momentos del sistema, respecto a los tres planos coordenados, el valor de $E[S]$ será

$$E[S] = \frac{A \Sigma I_k x_k + B \Sigma I_k y_k + C \Sigma I_k z_k + D \Sigma I_k}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

117. Momentos con relación a planos paralelos.—Los momentos de un sistema respecto a dos planos paralelos, separados por una distancia δ, están relacionados por la fórmula

$$E'[S] - E[S] = R \cdot \delta;$$

en efecto, siendo d' y d las distancias del centro a los dos planos paralelos, tendremos

$$E'[S] = R \cdot d', \; E[S] = R \cdot d,$$

$$E'[S] - E[S] = R(d' - d) = R \cdot \delta.$$

En las aplicaciones de la fórmula anterior hay que tener en cuenta que si el centro está entre los dos planos,

$\delta = d + d'$; pero entonces los dos momentos son de signo contrario, la expresión $E'[S] - E[S]$ se convierte en suma y la fórmula encontrada sirve para todos los casos.

118. Aplicación de los momentos con relación a planos en la composición de los sistemas vectoriales paralelos.— El procedimiento establecido en el número **82**, fundado en el conocimiento del eje central, para determinar un punto de la línea de acción de la resultante de un sistema paralelo, se puede sustituir ventajosamente por el empleo de los momentos con relación a los planos coordenados, consignados en el número **115**, que llenan el mismo cometido.

En este concepto las seis ecuaciones que se utilizarán, para resolver analíticamente los problemas de composición de los sistemas paralelos, son

$$X = \Sigma X_K, \quad Y = \Sigma Y_K, \quad Z = \Sigma Z_K,$$

$$a \,.\, \Sigma I_K = \Sigma I_K \,.\, x_K \,,$$

$$b \,.\, \Sigma I_K = \Sigma I_K \,.\, y_K \,,$$

$$c \,.\, \Sigma I_K = \Sigma I_K \,.\, z_K \,.$$

Estas ecuaciones proporcionan siempre la resultante del sistema cuando ésta existe; pero si $X = Y = Z = o$ y las tres últimas ecuaciones no se presentan en forma indeterminada, no sabremos si el sistema se reduce a un par o si está en equilibrio, siendo generalmente necesario recurrir a los métodos del capítulo segundo para dilucidar dicha circunstancia.

119. Propiedad que relaciona a la resultante de tres vectores paralelos con sus componentes.—Supongamos cortado el sistema (fig. 60) por un plano cualquiera; éste determinará en los vectores componentes los puntos a_1, a_2, a_3, y su intersección o con $[R]$ será el centro del sistema correlativo con a_1, a_2, a_3; uniendo entre sí estos cuatro

puntos se obtienen cuatro triángulos t_1, t_2, t_3 y T, que juntamente con los vectores $[I_1]$, $[I_2]$, $[I_3]$ y $[R]$ verifican el teorema siguiente:

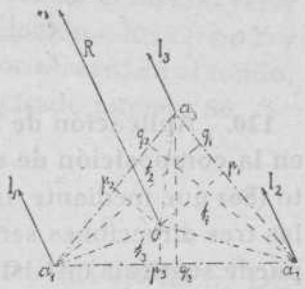


Fig. 60

TEOREMA.—*Cada uno de los vectores componentes y la resultante de un sistema alabeado de tres vectores paralelos, es proporcional al área del triángulo formado, sobre un plano secante, por las trazas de los otros tres.* En efecto, suponiendo el plano secante perpendicular a la dirección de los vectores y tomando los momentos del sistema respecto al plano de $I_2\ I_3$, obtendremos las igualdades

$$I_1 \,.\, q_1 = R \,.\, p_1 \text{ o } \frac{R}{I_1} = \frac{q_1}{p_1} = \frac{\text{triáng}^{o}.\ a_1\ a_2\ a_3}{\text{triáng}^{o}.\ o\ a_2\ a_3} = \frac{T}{t_1}\ ;$$

lo mismo se tendría

$$\frac{R}{I_2} = \frac{\text{triáng}^{o}.\ a_1 a_2 a_3}{\text{triáng}^{o}.\ o\ a_1\ a_3} = \frac{T}{t_2} \text{ y } \frac{R}{I_3} = \frac{\text{triáng}^{o}.\ a_1 a_2 a_3}{\text{triáng}^{o}.\ o\ a_1\ a_2} = \frac{T}{t_3}$$

y, relacionándolas entre sí, resulta

$$\frac{I_1}{t_1} = \frac{I_2}{t_2} = \frac{I_3}{t_3} = \frac{R}{T}\ ,$$

como queríamos demostrar.

Si el plano secante no fuera perpendicular se verificaría lo mismo, pues los triángulos t_1, t_2, t_3 y T, determinados por un plano perpendicular, serían proyecciones de los determinados por el plano oblicuo y siendo

$$t_1 = t'_1 \cos\alpha,\quad t_2 = t'_2 \cos\alpha,\quad t_3 = t'_3 \cos\alpha,\quad T = T' \cos\alpha,$$

se verificará

$$\frac{I_1}{t'_1} = \frac{I_2}{t'_2} = \frac{I_3}{t'_3} = \frac{R}{T}.$$

120. Aplicación de los momentos con relación a planos en la composición de un sistema cualquiera. — Hemos visto **(86)** que mediante la descomposición de un vector en las tres direcciones señaladas por los ejes coordenados, se puede sustituir un sistema cualquiera por otros tres paralelos y aplicando a cada uno de éstos las fórmulas del número **118**, tendremos determinadas las resultantes parciales $[X]$, $[Y]$ y $[Z]$, que equivalen al sistema propuesto.

Las citadas fórmulas, aplicadas a este caso, se simplifican y se reducen a tres para cada uno de los vectores $[X]$, $[Y]$ y $[Z]$: las del vector $[X]$ son

$$X = \Sigma X_K, \quad y_x \,.\, \Sigma X_K = \Sigma X_K \,.\, y_K, \quad z_x \,.\, \Sigma X_K = \Sigma X_K \,.\, z_K;$$

las del $[Y]$ serán

$$Y = \Sigma Y_K, \quad x_y \,.\, \Sigma Y_K = \Sigma Y_K \,.\, x_K, \quad z_y \,.\, \Sigma Y_K = \Sigma X_K \,.\, z_K,$$

y, por último, las del $[Z]$ son

$$Z = \Sigma Z_K, \quad x_z \,.\, \Sigma Z_K = \Sigma Z_K \,.\, x_K, \quad y_z \,.\, \Sigma Z_K = \Sigma Z_K \,.\, y_K. \ (*)$$

Cada grupo de estas fórmulas determina el vector correspondiente por su traza sobre uno de los planos coordenados, que tiene dos coordenadas comunes con el centro del sistema parcial que se considere.

Cuando un sistema vectorial paralelo tiene la dirección de un eje coordenado, el oX por ejemplo, los momentos

---

(*) Se representan por $y_x\ z_x$ las coordenadas de la traza de $[X]$ sobre el plano YZ y análogamente por $x_y\ z_y$, $x_z\ y_z$ las de los vectores $[Y]$ y $[Z]$ sobre los planos coordenados correspondientes.

con relación a los planos XY y XZ, tienen el mismo valor algebraico que los del sistema con relación a los ejes oY y oZ y de aquí que las fórmulas anteriores sean, en el fondo, las mismas que las expresadas en el citado número **86.**

II

CENTROS DE DISTANCIAS PROPORCIONALES, DE DISTANCIAS MEDIAS Y DE GRAVEDAD EN UN SISTEMA DE PUNTOS AISLADOS

121. Definiciones.—Si imaginamos un sistema de puntos aislados en el espacio y en cada uno de ellos aplicamos un vector, cuyo valor modular sea proporcional a cualquiera magnitud geométrica o mecánica afecta a los expresados puntos, formando con todos ellos un sistema paralelo, del mismo sentido en todos los vectores, el centro del sistema vectorial así constituido, es el *centro de distancias proporcionales* del referido sistema de puntos.

Cuando las magnitudes afectas a los diversos puntos sean todas iguales, lo serán también los vectores del sistema que se forma y los centros de distancias proporcionales toman el nombre de *centros de distancias medias*, siendo evidente que un sistema de puntos puede tener muchos centros de distancias proporcionales y uno solo de distancias medias.

Cuando las magnitudes mecánicas, representadas por los vectores que se aplican en cada punto, son los *pesos* de porciones de materia, que por cualquiera circunstancia estén afectas a los indicados puntos, los centros de distancias proporcionales, o de distancias medias, reciben el nombre especial de *centros de gravedad* del sistema de puntos de que se trate.

El mismo nombre recibe el centro que resulta de considerar a los vectores del sistema proporcionales a las masas de los cuerpos materiales afectos a cada punto; en la generalidad de los casos resulta el mismo centro para un sistema de puntos, ya sean los pesos o las masas las magnitudes que se tengan en cuenta para determinarlo; pero puede haber casos en que sean distintos y por esto hay quien propone que se llame *centro de inercia* al determinado por medio de las masas; pero sigue siendo costumbre general llamar centro de gravedad al de inercia y nosotros así lo haremos también.

Es evidente que una vez fijados los pesos o masas afectos a cada punto, el centro de gravedad del sistema ocupa una posición fija respecto al mismo.

122. Determinación de los centros de distancias proporcionales, medias y de gravedad de los sistemas de puntos aislados. — Las ecuaciones de los momentos con relación a tres planos coordenados, proporcionan en cada caso las coordenadas de los citados centros, pues éstos no difieren en nada, desde este punto de vista, de los centros ordinarios de los sistemas paralelos.

Sea, por ejemplo, el sistema de puntos A_1, $A_2 \ldots A_n$ a los que van afectas magnitudes cuyos valores sean K_1, $K_2 \ldots K_n$; las citadas ecuaciones de momentos del sistema vectorial correspondientes son [**115**]

$$a \,.\, \Sigma K_n = \Sigma K_n \,.\, x_n \,,$$

$$b \,.\, \Sigma K_n = \Sigma K_n \,.\, y_n \,,$$

$$c \,.\, \Sigma K_n = \Sigma K_n \,.\, z_n \,,$$

y de ellas se deducen inmediatamente las coordenadas a, b, c del centro que se busca.

Cuando se trate de centros de distancias medias, se simplifican las ecuaciones anteriores, convirtiéndose en

$$a \cdot n = \Sigma x_n \,,\quad b \cdot n = \Sigma y_n \,,\quad c \cdot n = \Sigma z_n \,.$$

Si en cualquiera de los casos anteriores se supone que las magnitudes representadas por K_1, K_2 ... K_n, fueran *pesos* o *masas* de cuerpos materiales, los centros de distancias proporcionales, o medias, determinados por las ecuaciones anteriores, serían los centros de gravedad de los sistemas de puntos considerados.

Además del procedimiento analítico que acabamos de indicar, para determinar los referidos centros, se pueden emplear todas las construcciones gráficas que se han expresado en la investigación de resultantes y centros ordinarios de los sistemas vectoriales paralelos.

123. Propiedades de los centros de distancias medias de un sistema de puntos.—Todas las propiedades demostradas para los centros de los sistemas paralelos, en general, son aplicables a los centros de distancias proporcionales y medias; pero estos últimos tienen, además, otras propiedades peculiares que interesa conocer:

1.ª *El centro de distancias medias de los índices de los vectores de un sistema vectorial concurrente, en equilibrio, es el punto de concurso de los vectores que lo forman* (*).—En efecto, tomando el punto de concurso del sistema por origen de coordenadas, las proyecciones de los vectores serán las coordenadas de su índice y las del centro de estos puntos serán

$$a = \frac{\Sigma X_K}{n} \,,\quad b = \frac{\Sigma Y_K}{n} \,,\quad c = \frac{\Sigma Z_K}{n} \,;$$

pero el equilibrio del sistema exige que

$$\Sigma X_K = \Sigma Y_K = \Sigma Z_K = o$$

y esto hace que el centro tenga sus tres coordenadas nulas.

(*) Este enunciado supone que el origen de los vectores del sistema está en el punto de concurso de todos ellos.

2.ª *Si se une el centro de distancias medias con cada uno de los puntos del sistema por una serie de vectores que tengan su origen en el expresado centro y los índices en los puntos del sistema, el vectorial que resulta está en equilibrio.* – Esta propiedad es recíproca de la anterior y se demuestra siguiendo el cálculo de ésta en orden inverso. (*)

3.ª *Si el sistema de puntos admite un plano que divida en dos partes iguales las rectas que resultan de unir de dos en dos los puntos del sistema, el centro de distancias medias se encontrará en dicho plano.* – Bastará, para probar este enunciado, componer de dos en dos los vectores correspondientes a las rectas que el plano divide en dos segmentos iguales y recordar después la propiedad segunda del número **114.**

Es evidente que si el sistema admite dos planos de las condiciones del expresado, el centro de distancias medias se encontrará sobre la intersección de dichos planos y si admitiera tres que cumplan dicha condición, sería el centro de distancias medias el punto común a los tres planos.

4.ª *Si el sistema de puntos admite una recta que divida en dos partes iguales a los segmentos rectilíneos que resultan de unir de dos en dos los puntos del sistema, el centro de distancias medias se encontrará sobre dicha recta.* – Se demuestra esta propiedad como la anterior, recordando la tercera del número **114.** Es evidente que si el sistema admite dos rectas de las condiciones expresadas, éstas se cortarán y el centro de distancias medias será el punto de intersección de las citadas rectas.

(*) Tanto esta propiedad como la anterior fueron demostradas, por primera vez, por el célebre matemático *Leibnitz.*

III

MOMENTOS ESTÁTICOS Y CENTROS DE GRAVEDAD DE EXTENSIONES GEOMÉTRICAS

124. Definiciones.—Si suponemos una extensión geométrica cualquiera (línea, superficie o volumen) y en cada uno de sus diversos elementos, m, aplicamos un vector de módulo igual al mismo, dando a todos la misma dirección y sentido, se habrá formado un sistema vectorial continuo, cuya resultante $[R] = \Sigma m$, expresará, en la escala de representación que se adopte, la medida M de la extensión geométrica dada. (*)

Si se multiplica cada uno de estos vectores elementales por la distancia de su punto de aplicación a un cierto plano y sumamos algebraicamente los productos de la forma mr, se formará el momento de dicho sistema vectorial, con relación al expresado plano, y podrán hacerse extensivas a esta clase de sistemas todas las propiedades demostradas en los paralelos discontinuos, siempre que sean independientes de la naturaleza finita o infinitesimal de los vectores componentes.

El momento, con relación a un plano cualquiera, del sistema vectorial afecto en la forma dicha a una extensión geométrica determinada, se refiere a dicha extensión llamándole *momento estático* de la misma con relación al

(*) Téngase presente que siendo m un elemento infinitamente pequeño de la extensión dada, su valor será

$$m = d\,l, \quad m = d^2 s \text{ o } m = d^3 v,$$

según los casos, y el de $[R]$ que llamamos M, será una integral de la forma

$$M = \int_D dl = l, \quad M = \int_D d^2 s = s \text{ o } M = \int_D d^3 v = v.$$

indicado plano; estos momentos se representan por el símbolo $E = \Sigma m r$, aun cuando su verdadera expresión (que será preciso poner de manifiesto cuando se trate de calcular el valor de los mismos) será

$$E = \int_D dl \,.\, r, \quad E = \int_D d^2 s \,.\, r \text{ o } E = \int_D d^3 v \,.\, r,$$

según que la extensión propuesta sea una línea, una superficie o un volumen.

Cuando la extensión dada sea plana y el plano, con relación al que se ha de tomar el momento estático, sea perpendicular al de la figura, las distancias de los elementos de la extensión al referido plano, son las mismas que existen entre dichos elementos y la traza de los expresados planos; por esta razón se dice, en estos casos, que el momento estático está tomado *con relación al eje* determinado por dicha traza, pero sin perder de vista que estos momentos *con relación a un eje* son verdaderos momentos *con relación a planos* y siempre deben ir acompañados de su calificativo de *estáticos*, para no confundirlos con los momentos ordinarios respecto a ejes, de que nos hemos ocupado en los capítulos anteriores.

El centro del sistema vectorial continuo, afecto a una extensión geométrica en la forma dicha, por no depender más que de la posición y naturaleza de los diversos elementos que integran a la extensión, se refiere también a ella y se llama *centro de gravedad geométrico* de la misma.

125. Propiedades de los momentos estáticos de las extensiones geométricas.—De la definición de momentos estáticos y de las propiedades demostradas en los momentos con relación a planos de los sistemas vectoriales paralelos, se deducen las siguientes, que se utilizan para el cálculo de aquellos momentos:

1.ª *Si los elementos de la extensión o figura dada están todos a la misma distancia del plano o eje, su momento estático será*

$$E = \Sigma m r = r \Sigma m = M r.$$

2.ª *Si la extensión se puede descomponer en partes cuyos momentos estáticos se determinen separadamente, el de toda la figura será de la forma*

$$E = \Sigma m_1 r_1 + \Sigma m_2 r_2 + \ldots + \Sigma m_n r_n = \Sigma \Sigma m r .$$

3.ª *Los momentos estáticos de dos figuras iguales y cuyos elementos tengan todos la misma posición con relación al plano o eje de los momentos, son iguales.*

4.ª *El momento estático de una figura cualquiera es igual a su extensión, M, multiplicada por la distancia, k, del centro de gravedad de la figura al plano o eje del momento.* Esta propiedad es una consecuencia inmediata del teorema del número **113**; su expresión analítica conduce a la ecuación $\Sigma m r = M . k$ de frecuente aplicación en esta teoria.

5.ª *Los momentos estáticos de una figura, respecto a todos los planos o ejes que pasan por su centro de gravedad, son nulos, y recíprocamente.*

126. Momentos estáticos de una figura cualquiera respecto a planos paralelos.—Los momentos estáticos de una figura cualquiera, respecto a dos planos paralelos, están relacionados por la ecuación $E_2 - E_1 = M . \Delta$ siendo M la medida de la extensión geométrica considerada y Δ la distancia de los dos planos paralelos.

En efecto, los momentos E_1 y E_2 están expresados por

$$E_2 = M K_2 \text{ y } E_1 = M K_1$$

siendo K_2 y K_1 las distancias del centro de gravedad de la

figura a los planos correspondientes; restando se obtiene

$$E_2 - E_1 = M\,(K_2 - K_1) = M\,.\,\Delta\,.$$

En el caso de estar el centro de gravedad entre los dos planos será $\Delta = K_2 + K_1$; pero en dichos casos la diferencia $E_2 - E_1$, por ser E_2 y E_1 de signo contrario, se convierte en suma de valores modulares y también se verifica la propiedad enunciada.

127. Cálculo analítico de momentos estáticos de extensiones geométricas.—Para indicar la manera de proceder, cuando se quiere calcular el momento estático de una figura, vamos a resolver varios casos que bastarán para comprender la marcha de las operaciones en otros que se pudieran presentar. En las figuras planas determinaremos únicamente momentos estáticos con relación a ejes situados en su plano.

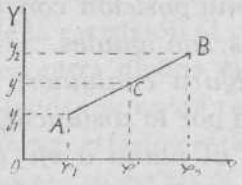


Fig. 61

1.° *Segmento rectilíneo con relación a un eje cualquiera o X* (fig. 61).—Sea $y = a\,x + b$ la ecuación de la recta donde está situado el segmento $A\,B$, siendo $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$ las coordenadas de sus extremos. El momento del elemento $m = d\,L$ respecto al eje o X es

$$d\,E = d\,L\,.\,y = d\,x\,\sqrt{1 + a^2}\,(a\,x + b)$$

y el de todo el segmento

$$E_X = a\,\sqrt{1 + a^2}\int_{X_1}^{X_2} x\,d\,x + b\,\sqrt{1 + a^2}\int_{X_1}^{X_2} d\,x =$$

$$= \sqrt{1 + a^2}\left[a\,\frac{x_2^{\,2} - x_1^{\,2}}{2} + b\,(x_2 - x_1)\right] =$$

$$= (x_2 - x_1)\,\sqrt{1 + a^2}\,\left(a\,\frac{x_2 + x_1}{2} + b\right) = L\,(a\,x' + b) = L\,y'\,,$$

siendo $x' = \frac{x_1 + x_2}{2}$ e $y' = a\ x' + b$ las coordenadas del punto medio del segmento y

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}$$

la longitud del segmento.

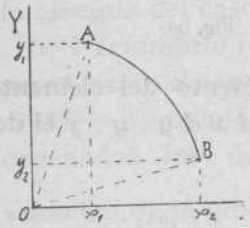


Fig. 62

Del mismo modo se vería que el momento respecto al eje $o\ Y$ es $E_Y = L\ .\ x'$.

2.° *Arco de círculo con relación a un eje o X que pase por su centro* (fig. 62). — Sea $x^2 + y^2 = r^2$ la ecuación de la circunferencia donde está situado el arco $A\ B$, y $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$ las coordenadas de sus extremos. El momento del elemento $m = d\ L$ respecto al eje $o\ X$ es

$$d\ E = d\ L\ .\ y = d\ x \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}\ .\ y = r\ d\ x$$

y el de todo el arco será

$$E_X = r \int_{X_1}^{X_2} d\ x = r\ (x_2 - x_1).$$

Lo mismo se vería que el momento respecto al eje $o\ Y$ es

$$E_Y = r\ (y_2 - y_1)\ .$$

Cuando el eje del momento sea paralelo a la cuerda del arco (fig. 63), el momento es

$$E_X = r\ (x_2 - x_1) = r\ .\ c\ .$$

3.° *Area comprendida entre una línea* $y = f(x)$, *el eje o X y las dos ordenadas de sus extremos con relación a*

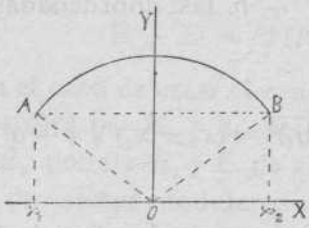


Fig. 63

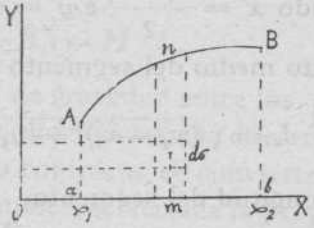


Fig. 64

los ejes coordenados (fig. 64).—El momento del elemento $d\,x\,d\,y$ respecto al eje $o\,X$ es $d\,E_x = d\,x\,d\,y\,.\,y$, y el del área total

$$E_X = \int_{X_1}^{X_2} d\,x \int_{o}^{y} y\,d\,y = \frac{1}{2}\int_{X_1}^{X_2} y^2\,d\,x = \frac{1}{2}\int_{X_1}^{X_2} (f(x))^2\,d\,x\,.$$

Del mismo modo se vería que

$$E_Y = \int_{X_1}^{X_2} x\,y\,d\,x = \int_{X_1}^{X_2} f(x)\,x\,d\,x\,.$$

4.° *Rectángulo con relación a uno de sus lados* (figura 65).—Sea $y = h$ la ecuación del lado $A\,B$ del rectángulo; la primera fórmula del caso anterior se convierte en

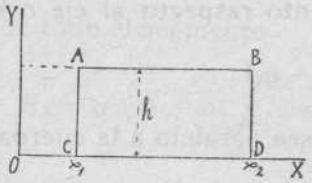


Fig. 65

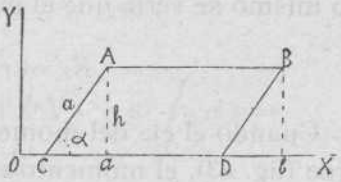


Fig. 66

$$E_X = \frac{1}{2}\int_{X_1}^{X_2} h^2\,d\,x = \frac{h^2}{2}\,(x_2 - x_1) = \frac{b\,h^2}{2} = \frac{1}{2}\,S\,h\,,$$

siendo b la base del rectángulo, h la altura y S el área del mismo.

5.° *Paralelogramo con relación a uno de sus lados* (figura. 66).—El momento estático del paralelogramo $A\ B\ C\ D$, respecto al eje $o\ X$, es el mismo que el del rectángulo $A\ B\ a\ b$ (**125**—3.ª) y estará dado por la fórmula del caso anterior.

6.° *Triángulo rectángulo respecto a uno de sus catetos* (figura 67).—Tomando por ejes coordenados los dos catetos, la ecuación de la hipotenusa es $\frac{x}{b}+\frac{y}{h}=1$, o bien

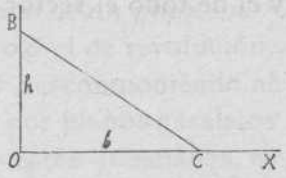


Fig. 67

$$y=h-\frac{h}{b}x=\frac{h}{b}(b-x)$$

y la fórmula del caso 3.° nos da

$$E_X=\frac{1}{2}\int_0^b \frac{h^2}{b^2}(b-x)^2\,dx=\frac{h^2}{2b^2}\left[b^2x-bx^2+\frac{x^3}{3}\right]_0^b=$$

$$=\frac{h^2}{2b^2}\cdot\frac{b^3}{3}=\frac{1}{6}bh^2=\frac{1}{3}Sh.$$

7.° *Triángulo cualquiera respecto a uno de sus lados* (figura 68).—Sea el triángulo $A\ B\ C$ y tratemos de determinar su momento estático respecto al lado $A\ C=b$; trazando la altura $B\ D=h$ se descompondrá en dos triángulos rectángulos, cuyos momentos sabemos determinar y el del total será

$$E=\frac{1}{6}A\,D\,.\,h^2+\frac{1}{6}C\,D\,.\,h^2=\frac{bh^2}{6}=\frac{1}{3}Sh.$$

8.° *Sector circular respecto a un eje que pase por su*

centro (figura 69).—Descomponiendo el sector en elementos de valor $d\varsigma = \rho\, d\alpha\, d\rho$, el momento estático de uno de éstos respecto al eje $o\,X$ es

$$d^2 E = \rho\, d\alpha\, d\rho \,.\, y = \rho\, d\alpha\, d\rho \,.\, \rho \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha \,.\, \rho^2 \,.\, d\rho$$

y el de todo el sector

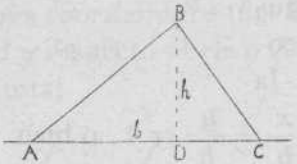


Fig. 68

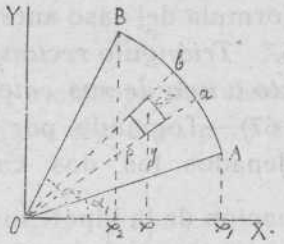


Fig. 69

$$E = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha \int_{o}^{r} \rho^2\, d\rho = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \operatorname{sen}\alpha\, d\alpha \frac{r^3}{3} =$$

$$= \frac{r^3}{3}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Si $\alpha_1 = o$ y $\alpha_2 = 90°$, se verificará $E = \frac{r^3}{3}$ y para un semicírculo respecto a su diámetro $E = \frac{2}{3} r^3$.

9.ª *Superficie de revolución con relación a un plano perpendicular al eje.*—Sea $x = f(z)$ la ecuación de la curva meridiana en el plano $X\,Z$ y tomemos por coordenado $X\,Y$ el plano de los momentos y por eje oZ el de revolución de la superficie propuesta; el momento del elemento superficial $2\pi\, x\, d\, l$ es

$$dE = 2\pi\, x\, d\, l \times z = 2\pi f(z) \,.\, z \,.\, dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2}$$

y el de la superficie comprendida entre los paralelos z_1 y z_2

$$E = 2\pi \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} f(z)\, z\, dz.$$

10.ª *Volumen de revolución respecto a un plano perpendicular al eje.* — Tomando por eje oZ el de revolución, por plano XY el de los momentos y descomponiendo al volumen en rebanadas infinitesimales, por planos paralelos al coordenado XY, el momento de estas rebanadas es $dE = \pi x^2 dz \,.\, z$ y el de todo el volumen

$$E = \pi \int_{z_1}^{z_2} x^2 z\, dz.$$

El valor de x, en función de z, se deducirá de la ecuación de la meridiana en el plano XZ y si es $x = f(z)$, se obtendrá

$$E = \pi \int_{z_1}^{z_2} (f(z))^2 z\, dz.$$

128. Determinación mecánica de momentos estáticos de áreas planas. — Los momentos estáticos de las áreas planas, se pueden calcular por medio de aparatos integradores que automáticamente realizan las operaciones que dicho cálculo exige; el más usual para estos casos es el integrador cartesiano de *Amsler*, cuya descripción y uso se suponen conocidos por nuestros lectores (*).

129. Determinación analítica de centros de gravedad geométricos. — La fórmula general $\Sigma m r = M \,.\, K$ (**125**—4.ª), que relaciona el momento estático de una extensión geométrica con la distancia K que separa a su centro de gra-

(*) Figuran en la obra «Complemento del Cálculo infinitesimal» del General de Ingenieros D. Celestino García Antúnez.

vedad del plano o eje de los momentos, permite, aplicándola a los tres planos coordenados, formar las ecuaciones

$$\Sigma m x = M a, \quad \Sigma m y = M b, \quad \Sigma m z = M c,$$

que sirven para calcular las coordenadas a, b y c de dicho centro.

Para ver la manera de hacer uso de estas fórmulas, las aplicaremos a varios ejemplos, teniendo en cuenta que por ser el centro de gravedad de una extensión *homogénea* el centro de distancias medias de sus diversos puntos, le serán aplicables las propiedades demostradas para estos centros, entre las cuales producen particular simplificación las 3.ª y 4.ª del número **123**, que indican la situación del centro de gravedad sobre los diámetros o planos diametrales que contenga la extensión propuesta, y esto excusa en tales casos el cálculo de alguna de las coordenadas de dichos puntos.

1.°—*Centro de gravedad de un segmento rectilíneo.*—Evidentemente debe coincidir este centro con el punto medio del segmento y, en efecto, de la ecuación $\Sigma m x = M a$ se deduce

$$a = \frac{\Sigma m x}{M} = \frac{L \cdot x'}{L} = x' \text{ y } b = \frac{L y'}{L} = y'.$$

2.° *Centro de gravedad de un arco de círculo.*—Suponiendo colocado el arco, con relación a los ejes coordenados, como indica la figura 63, bastará la ordenada

$$b = \frac{\Sigma m y}{M} = \frac{r \cdot c}{L}$$

para determinar el centro de gravedad.

En función del valor gradual del arco es

$$b = \frac{r \cdot 2r \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\pi r \alpha}{180}} = \frac{360}{\alpha} \cdot \frac{r \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\pi}.$$

Cuando el arco sea un cuadrante resulta $b = \frac{2r\sqrt{2}}{\pi}$ y para una semicircunferencia $b = \frac{2r}{\pi}$.

3.° *Centro de gravedad de un sector circular.* — Considerando el sector A o B de la figura 63, se tiene

$$b = \frac{\Sigma m y}{M} = \frac{\frac{c r^2}{3}}{\frac{1}{2} L r} = \frac{2}{3} \times \frac{c r}{L},$$

o

$$b = \frac{2}{3} \cdot \frac{2 r^2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\frac{\pi r \alpha}{180}} = 240 \cdot \frac{r \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\pi \alpha}.$$

Si el sector corresponde a un cuadrante es $b = \frac{4}{3} \cdot \frac{r\sqrt{2}}{\pi}$, y si a una semicircunferencia será $b = \frac{4r}{3\pi}$.

130. Determinación gráfica de centros de gravedad geométricos. — Las operaciones gráficas que se suelen emplear para determinar centros de gravedad, consisten, en general, en descomponer la figura en otras más sencillas, cuyos centros se conozcan, y aplicando en estos puntos vectores paralelos a una dirección cualquiera, determinar, por los procedimientos de la composición gráfica de los

sistemas vectoriales, el punto de aplicación de la resultante del sistema formado en cada caso (*).

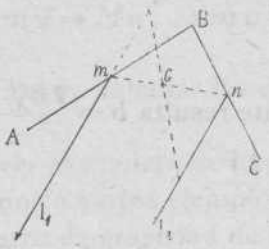


Fig. 70

La existencia de diámetros, o planos diametrales, simplifica estas construcciones gráficas, por las mismas razones expresadas en el cálculo analítico de centros de gravedad; a continuación exponemos los siguientes ejemplos:

1.° *Centro de gravedad de una línea poligonal* (fig. 70).— Sea primeramente la línea formada por los dos segmentos $A\,B$ y $B\,C$; aplicando en los puntos medios m y n los vectores paralelos

$$I_1 = A\,B \text{ e } I_2 = B\,C$$

y determinando el punto G de la recta $m\,n$ que cumpla la condición

$$\frac{G\,m}{G\,n} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{B\,C}{A\,B},$$

se tendrá el centro de gravedad del perímetro $A\,B\,C$.

Si en vez de tener dos lados, tuviera varios la línea poligonal propuesta, se aplicará sucesivamente la construcción indicada, hasta obtener el punto de aplicación de la resultante final del sistema vectorial formado.

2.° *Centro de gravedad del perímetro de un triángulo.*—Aplicando las construcciones del caso anterior, se ve que este centro coincide con el punto de intersección de las bisectrices del triángulo inscrito en los puntos medios del propuesto.

(*) Inútil parece advertir que los expresados vectores serán proporcionales a la parte de extensión a que cada uno se refiera.

3.° *Centro de gravedad del área de un triángulo.*—Siendo las medianas diámetros de dicha área, su punto de concurso es el centro de gravedad del triángulo dado.

4.° *Centro de gravedad de un trapecio.*—Sea el trapecio *A B C D* (fig. 71); la diagonal *A D* lo descompone en dos triángulos, cuyos centros son *g* y *g'*; el del trapecio tendrá que estar sobre la recta *g g'* y sobre la línea diametral *E F*, siendo el punto *G*, donde dichas rectas se cortan.

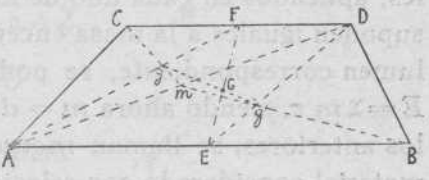


Fig. 71

5.° *Centro de gravedad del volumen de un tetraedro.*—Este centro se determina uniendo dos vértices con el centro de gravedad de la cara opuesta, pues el punto en que estas dos rectas se corten, es el de concurso de los planos diametrales determinados por cada arista y el punto medio de la opuesta.

También se ve que dicho centro coincide con el de la sección paralela a una de las caras, trazada a la cuarta parte de la altura correspondiente a la misma cara.

6.° *Centro de gravedad de una pirámide y de un cono.*—Están situados los centros de estos volúmenes en coincidencia con el de las secciones paralelas a las bases, trazadas a la cuarta parte de su altura.

7.° *Centro de gravedad de un prisma y de un cilindro.*—Si el prisma es triangular, su centro está en el punto medio de la recta que une los centros de las dos bases, por ser el de concurso de tres planos diametrales. También puede decirse que dicho centro es el de la sección transversal paralela y equidistante de las bases.

Si el prisma no es triangular, se descompone en prismas de esta clase y resultará que el centro del prisma total

se encontrará en el de la sección paralela y equidistante de las bases, o sea el punto medio de la recta que une los centros de las dos bases. Las mismas reglas se aplican a la determinación del centro de gravedad de un cilindro.

131. Momentos estáticos y centros de gravedad de sistemas materiales continuos.—Si los vectores infinitesimales, aplicados en cada uno de los puntos de un cuerpo, se suponen iguales a la masa encerrada en el elemento de volumen correspondiente, se podrán formar los momentos $E = \Sigma m r$, siendo ahora $m = d^3 v \cdot \delta$, que, lo mismo que los anteriores, se llaman *momentos estáticos* del cuerpo material considerado con relación al plano o eje a que correspondan las distancias r.

La introducción de la densidad δ en todas las fórmulas de los momentos geométricos, no modifica la estructura de las mismas y permite extender a los cuerpos materiales las propiedades de los momentos estáticos de las líneas, superficies y volúmenes.

Del mismo modo, las ecuaciones

$$\Sigma m x = Ma, \quad \Sigma m y = Mb, \quad \Sigma m z = Mc$$

servirán para determinar las coordenadas del centro de gravedad *mecánico* de un cuerpo cualquiera, cuando m tenga la significación indicada, y fácil es ver que, en los cuerpos homogéneos, el centro de gravedad geométrico de su volumen y el mecánico de su masa coinciden en uno solo.

132. Teoremas de Guldin.—Por la relación que tienen con la teoría que estamos estudiando, vamos a demostrar las dos propiedades siguientes llamadas *teoremas de Guldin.*

1.° *El área engendrada por una línea plana que gira alrededor de un eje situado en su plano, es igual a la longitud de dicha línea multiplicada por el arco descrito*

por su centro de gravedad.— El área descrita por el elemento $m\,n = d\,L$ de la línea $A\,B$ (fig. 72), en una revolución alrededor del eje oZ, es $d\,A = 2\,\pi\,x\,d\,L$ y la total engendrada por $A\,B$ será

$A = 2\,\pi \int_D x\,d\,L$; pero el momento estático de $A\,B$ respecto a $o\,Z$ es $E = \int_D x\,d\,L = L\,.\,\overline{gG}$ y multiplicando por $2\,\pi$ se obtiene

$$2\,\pi \int_D x\,d\,L = L\,.\,2\,\pi\,\overline{gG}\,,$$

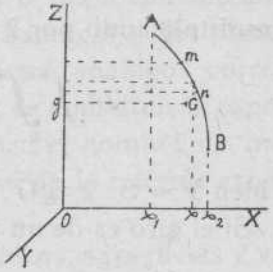


Fig. 72

o bien $A = L\,.\,2\,\pi\,\overline{gG}$, como queríamos demostrar.

Si en vez de verificar una revolución completa, girara sólamente la línea generatriz un ángulo α, sería

$$A = L\,\frac{2\,\pi\,\overline{gG}}{360}\,\alpha = L\,\frac{\pi\,\overline{gG}\,\alpha}{180}\,.$$

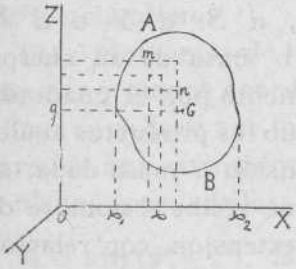


Fig. 73

2.° *El volumen engendrado por una superficie plana que gira alrededor de un eje situado en su plano, es igual al área de dicha superficie multiplicada por el arco descrito por su centro de gravedad.*—El volumen engendrado por el elemento $m\,n = d\,x\,d\,z$ (fig. 73) de la superficie $A\,B$, en una revolución alrededor de $o\,Z$, es $d^2\,V = 2\,\pi\,x\,d\,x\,d\,z$ y el engendrado por el área total será

$$V = 2\,\pi \int_D \int x\,d\,x\,d\,z\,;$$

pero el momento estático del área $A\,B$ respecto al eje $o\,Z$ es

$$E = \int_D \int dx\,dz\,x = S \,.\, \overline{gG}$$

y multiplicando por 2π se obtiene

$$2\pi \int_D \int x\,dx\,dz = S \,.\, 2\pi\,\overline{gG}\,,$$

o bien $V = S \,.\, 2\pi\,\overline{gG}$, como queríamos demostrar.

Si el giro es de un ángulo α, será

$$V = S \,.\, \frac{2\pi\,\overline{gG}}{360}\,\alpha = S\,\frac{\pi\,\overline{gG}\,\alpha}{180}\,.$$

IV

MOMENTOS DE INERCIA O DE SEGUNDO ORDEN

133. Definiciones.—Si representamos por m la expresión del elemento diferencial $d\,L$, $d^2\,S$, $d^3\,V$ o $d^3\,M$ de una línea, superficie, volumen o masa de un cuerpo material y multiplicamos dicho elemento por el cuadrado de su distancia a un eje fijo, sumando los productos análogos correspondientes a toda la extensión o masa dada, se formará la expresión $I = \Sigma\, m\, r^2$, que recibe el nombre de *momento de inercia* de la referida extensión, con relación al citado eje.

La cantidad K que verifique la condición $\Sigma\, m\, r^2 = M\, K^2$, recibe en esta teoría el nombre de *radio de giro* (*) del mo-

(*) Consideramos impropio el nombre de *radio de giro* aplicado a la cantidad K; creemos preferible llamarle *radio* o *brazo de inercia*, como han propuesto algunos autores; pero lo extendida que está la primera denominación nos induce a conservarla.

mento considerado; aparte de su significación analítica, representa la distancia del eje a que sería necesario colocar toda la extensión, concentrada en un punto, sin cambiar el valor de su momento de inercia.

Si el elemento m, de la extensión o masa considerada, se multiplica por el producto de su distancia a dos planos perpendiculares, sumando los productos análogos correspondientes a toda la extensión dada, se constituirán expresiones de la forma $\Sigma m r r'$, que reciben el nombre de *momentos rectangulares* o *biplanarios* de la referida extensión o masa.

Los momentos de inercia de las líneas, superficies y volúmenes, se llaman *geométricos*, para distinguirlos de los momentos de inercia de las masas, que llamaremos momentos *mecánicos*; el paso de los primeros a los segundos se efectúa mediante la consideración de la densidad del cuerpo en cada punto, y por tal motivo nos referiremos por ahora sólamente a los momentos geométricos.

Los momentos de inercia de figuras planas, referidos a ejes perpendiculares al plano de la figura, se llaman *polares* y los relativos a ejes situados en su plano, momentos de inercia *planos*.

134. Momentos de inercia y rectangulares relativos a los ejes y planos coordenados.—De las definiciones anteriores se deduce que los momentos de inercia y rectangulares de una extensión geométrica, con relación a los ejes y planos coordenados, tendrán por expresión

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m (x^2 + z^2), \quad C = \Sigma m (x^2 + y^2)$$
$$D = \Sigma m y z, \quad E = \Sigma m x z, \quad F = \Sigma m x y,$$

teniendo en cuenta, para el cálculo de estas fórmulas, que los segundos miembros representan integrales definidas, entre los límites que correspondan para comprender a la extensión propuesta.

En el caso de figuras planas situadas en el coordenado XY, se simplifican las fórmulas anteriores reduciéndose a

$$A = \Sigma m y^2,\ B = \Sigma m x^2,\ C = \Sigma m (x^2 + y^2),\ F = \Sigma m x y.$$

135. Relación entre los momentos polares y los planos de una figura plana.—Si trazamos por el pie de un eje polar y en el mismo plano de la figura, dos ejes rectangulares, se verifica que *el momento de inercia, respecto al primero, es la suma de los momentos correspondientes a los dos segundos.* En efecto, si tomamos a dichos ejes como coordenados, será

$$C = \Sigma m (x^2 + y^2) = \Sigma m x^2 + \Sigma m y^2 = B + A,$$

como queríamos demostrar.

Como esta propiedad es independiente de la dirección que, en el plano de la figura, se haya dado a los ejes oX y oY, se deduce que *la suma de los momentos de inercia de una figura plana con relación a dos ejes rectangulares, trazados por un punto cualquiera de su plano y contenidos en el mismo, es constante.*

136. Relación entre los momentos de inercia de una extensión cualquiera respecto a dos ejes paralelos.—Supongamos sea $I = \Sigma m r^2$ el momento de inercia de una figura cualquiera, respecto a un eje oZ (fig. 74) que pase por su centro de gravedad G, y propongámonos determinar el correspondiente al eje $o'Z'$, paralelo al anterior y distante del mismo la longitud $PQ = h$.

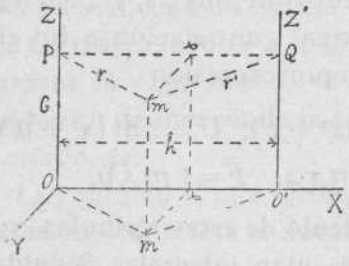


Fig. 74

Sea m un elemento de la extensión propuesta, su momento respecto a Z' es

$$m r'^2 = m (r^2 + h^2 - 2 h x)$$

y el de toda la extensión

$$I' = \Sigma m r'^2 = \Sigma m r^2 + \Sigma m h^2 - 2 h \Sigma m x;$$

pero el momento estático $\Sigma m x$, relativo al plano YZ, es nulo, por contener este plano al centro de gravedad de la extensión, luego, en resumen, será

$$\Sigma m r'^2 = \Sigma m r^2 + M h^2 \text{ o } I' = I + M h^2.$$

137. Consecuencias. — De la fórmula anterior se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª *Entre todos los ejes paralelos a una dirección cualquiera, el momento de inercia mínimo de una figura corresponde al eje que pasa por su centro de gravedad.*

2.ª *Los momentos de inercia de una figura, respecto a ejes paralelos y equidistantes de su centro de gravedad, son todos iguales.*

3.ª *El cuadrado del radio de giro del momento relativo al eje Z' es igual al del momento con relación al eje Z, aumentado en el cuadrado de la distancia entre los dos ejes;* puesto que los momentos I e I' son

$$I = M K^2, \quad I' = M K'^2$$

y de la relación demostrada resulta $K'^2 = K^2 + h^2$.

138. Momentos de inercia con relación a los diversos ejes que pasan por un punto. — Supongamos conocidos los momentos de inercia y rectangulares de la extensión dada respecto a los ejes y planos coordenados y tratemos de

determinar, en función de ellos, el momento con relación a un eje cualquiera que pase por el origen de coordenadas, siendo α, β y γ los ángulos que este eje forma con los coordenados de referencia.

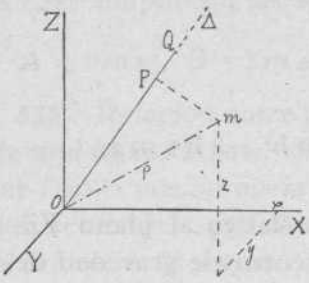


Fig. 75

Sea m (fig. 75) un elemento de la extensión considerada y $o\Delta$ el eje respecto al cual queremos encontrar el momento de inercia; el del elemento m es

$$m r^2 = m (\rho^2 - \overline{oP}^2) =$$

$$= m \left[(x^2 + y^2 + z^2) - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2\right] =$$

$$= m \left[x^2 (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) + y^2 (\cos^2 \alpha + \cos^2 \gamma) + z^2 (\cos^2 \alpha + \right.$$

$$+ \cos^2 \beta) - 2 x y \cos \alpha \cos \beta - 2 x z \cos \alpha \cos \gamma -$$

$$\left. - 2 y z \cos \beta \cos \gamma\right] = m \left[(y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + \right.$$

$$+ (x^2 + z^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma -$$

$$\left. - 2 x y \cos \alpha \cos \beta - 2 x z \cos \alpha \cos \gamma - 2 y z \cos \beta \cos \gamma\right] .$$

Si suponemos formadas las ecuaciones análogas para todos los elementos de la extensión propuesta y sumamos, resulta

$$\Sigma m r^2 = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma -$$

$$- 2 F \cos \alpha \cos \beta - 2 E \cos \alpha \cos \gamma - 2 D \cos \beta \cos \gamma ,$$

cuya fórmula resuelve el problema.

Cuando se trate de figuras planas, situadas en el plano

$X\,Y$, se convierte la fórmula anterior, para los ejes que pasen por el origen en dicho plano, en

$$\Sigma m r^2 = A \cos^2 \alpha + B \operatorname{sen}^2 \alpha - 2 F \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha .$$

139. Elipsoide de inercia.—Si tomamos, sobre cada eje que pasa por o (fig. 75), el segmento $O\,Q = \dfrac{1}{\sqrt{\Sigma m r^2}}$ inverso de la raiz cuadrada del momento de inercia de la extensión propuesta, con relación al mismo eje, se formará con los puntos Q un lugar geométrico, cuya ecuación vamos a determinar.

Sean ξ, η y ζ las coordenadas generales de dichos puntos,

$$\xi = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\Sigma m r^2}} , \quad \eta = \frac{\cos \beta}{\sqrt{\Sigma m r^2}} , \quad \zeta = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{\Sigma m r^2}} ;$$

sustituyendo los valores de $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$ en la fórmula del número anterior, resulta, después de suprimir el factor común $\Sigma\, m r^2$,

$$A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2 - 2 F \xi \eta - 2 E \xi \zeta - 2 D \eta \zeta = 1 ,$$

que es la ecuación de un elipsoide real.

El elipsoide, cuya ecuación acabamos de obtener, recibe el nombre de *elipsoide de inercia* de la extensión dada, en el punto o, y por la manera de originarse nos dice que *si trazamos un semidiámetro cualquiera, el momento de inercia de la figura, con relación a dicho semidiámetro como eje, es el número inverso del cuadrado de su longitud.*

También se deduce que entre los diversos ejes que pasan por un punto hay uno para el que el momento de inercia es *máximo* y otro para el que es *mínimo*, coincidiendo respectivamente sus direcciones con los ejes menor y mayor del elipsoide de inercia.

Cuando el punto, para el cual se ha determinado el elipsoide de inercia, es el centro de gravedad de la extensión considerada, se le da el nombre de elipsoide *central* de inercia y fácil es ver que el semidiámetro de este último, correspondiente a una dirección cualquiera, será de mayor longitud que el semidiámetro paralelo correspondiente a otro elipsoide de inercia de la misma figura.

140. Elipse de inercia en las figuras planas. — Si aplicamos las consideraciones anteriores a los momentos de inercia de una figura plana, con relación a los diversos ejes contenidos en su plano, que pasen por un punto *o*, se forma el lugar geométrico

$$A\xi^2 + B\eta^2 - 2F\xi\eta = 1,$$

que representa una elipse y se llama *elipse de inercia* de la figura propuesta en el punto *o*, agregándole el calificativo de *central*, cuando el punto *o* sea el centro de gravedad de la figura.

141. Ejes principales de inercia. — Los ejes de simetría del elipsoide de inercia que corresponde a una figura cualquiera en un punto, se llaman *ejes principales de inercia* de la citada figura en el indicado punto.

En general, toda figura tiene tres ejes principales de inercia en un punto cualquiera, pero puede haber casos particulares en que el elipsoide de inercia sea de revolución y entonces habrá una infinidad de ejes principales en el plano ecuatorial de dicho elipsoide y, como caso extremo, si éste se convierte en una esfera, todas las rectas que pasen por su centro serán ejes principales de inercia de la figura en dicho punto.

La investigación de los ejes principales de inercia que le corresponden a una figura en un punto, es un problema interesante por sus aplicaciones en la Mecánica: su resolu-

ción constituye una cuestión de Geometría Analítica, que no es de este lugar desarrollar.

Si suponemos determinados los ejes principales de inercia de una figura en un punto y los tomamos por ejes coordenados, la ecuación del ilipsoide se reducirá a la forma

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

que exige la anulación de los momentos rectangulares

$$F = \Sigma m x y,\ E = \Sigma m x z,\ D = \Sigma m y z$$

y en la que A, B y C representan los momentos de inercia de la figura respecto a sus ejes principales en el punto de referencia.

Conocidos estos momentos *principales* en un punto, se determinará el correspondiente a otro eje cualquiera, que pase por o, por la fórmula del número **138**, que se convierte en

$$\Sigma m r^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

En las figuras planas se verificará, del mismo modo, la anulación del momento rectangular $F = \Sigma m x y$, cuando los ejes oX y oY sean los principales de inercia, que en su plano y en el punto señalado tiene la figura; la ecuación de la elipse de inercia referida a estos ejes es

$$A\xi^2 + B\eta^2 = 1$$

y la fórmula de los momentos planos, respecto a los ejes que pasen por o,

$$\Sigma m r^2 = A\cos^2\alpha + B\operatorname{sen}^2\alpha.$$

142. Observación.—Como la suma de los tres coeficientes, $A + B + C$, es un invariante de la transformación que consiste en pasar de un sistema coordenado rectangular a otro de la misma naturaleza, se puede decir que *la suma*

de los momentos de inercia de una figura, con relación a tres ejes rectangulares que pasen por un punto, es constante e igual a la suma de los tres momentos principales que en dicho punto corresponden a la citada figura.

143. Procedimiento para reconocer si una recta puede ser eje principal de inercia en un punto.—Tomemos un sistema coordenado que tenga por uno de sus ejes, el oX por ejemplo, la recta dada y por origen un punto arbitrario de la misma; la ecuación del elipsoide de inercia en el origen elegido es

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2F\xi\eta - 2E\xi\zeta - 2D\eta\zeta = 1,$$

siendo evidente que si el eje oX fuera uno de los principales de inercia, en el punto o, la ecuación anterior tendrá que verificarse para tres valores de la forma ξ, η, ζ y $-\xi$, η, ζ y esto exige la anulación de los coeficientes E y F, expresando, por consiguiente, las ecuaciones

$$\Sigma m x z = 0, \quad \Sigma m x y = 0$$

las condiciones necesarias y suficientes para que la recta dada sea eje principal de inercia en el punto o.

Si estas condiciones no se verifican, no quiere esto decir que la recta no pueda ser eje principal en otro punto y para hacer esta investigación, traslademos paralelamente el plano YZ a un punto indeterminado o', distante $h = oo'$ del anterior, y si se encuentra un valor de h que verifique las ecuaciones

$$\Sigma m (x + h) z = 0, \quad \Sigma m (x + h) y = 0,$$

o $$\Sigma m x z + h \Sigma m z = 0, \quad \Sigma m x y + h \Sigma m y = 0,$$

el eje oX será principal de inercia en el punto o'.

Si suponemos que el plano coordenado XZ, que hemos empleado en la investigación anterior, contiene al centro

de gravedad de la figura, será $\Sigma m y = o$ y la segunda ecuación demuestra la necesidad de que se verifique, en cualquier punto del eje $o X$, la condición $\Sigma m x y = o$, para que este eje pueda ser principal de inercia en algún punto, y cumplida esta condición desaparece la incompatibilidad del sistema de ecuaciones establecido, proporcionando la primera el valor de

$$h = - \frac{\Sigma m x z}{\Sigma m z}$$

que fija la posición del punto o' para el cual es eje principal de inercia la recta propuesta.

Cuando esta recta contenga al centro de gravedad de la figura dada, las dos ecuaciones de condición, en el punto o', se convierten en

$$\Sigma m x z = o \quad \text{y} \quad \Sigma m x y = o ,$$

que son las mismas que las del punto o y esto demuestra que, si dichas condiciones se verifican en un punto, se verificarán en todos y si no se verifican en uno, no se verificarán en ninguno, o de otro modo, *las rectas que pasan por el centro de gravedad de una figura o son ejes principales de inercia de la misma en todos sus puntos o no lo son en ninguno.* (*)

Si en lugar de referirnos al eje $o X$ nos hubiéramos referido a cualquiera de los otros dos coordenados, veríamos que la condición necesaria y suficiente para que el eje $o Y$ sea principal de inercia, en el punto o, es que se verifiquen las ecuaciones

$$\Sigma m x y = o , \quad \Sigma m y z = o$$

y lo mismo para el eje $o Z$ serán

$$\Sigma m x z = o , \quad \Sigma m y z = o ,$$

(*) Los ejes del elipsoide central de inercia son las únicas rectas que son ejes principales de inercia en todos sus puntos.

siendo evidente que si dos de los ejes coordenados son principales de inercia, en el punto o, el tercero lo será también.

144. Caracteres para reconocer en algunos casos a los ejes principales de inercia.—El cálculo analítico de los momentos rectangulares de una figura suele ser enojoso en la mayor parte de los casos y de aquí la conveniencia de establecer algunas reglas que permitan, en algunas figuras de uso frecuente, reconocer sin cálculos previos a los citados ejes.

1.ª *Los ejes de simetría de una figura son principales de inercia en todos sus puntos.*—Tomemos el eje de simetría de la figura por coordenado $o\,Z$ y por plano $X\,Y$ uno cualquiera, perpendicular a $o\,Z$; el momento rectangular de un elemento de la figura, respecto a los planos $X\,Y$ y $X\,Z$, es $m\,y\,z$ y el de toda la extensión $E = \Sigma\, m\,y\,z$; pero la simetría respecto al eje $o\,Z$ demuestra que al elemento m, de coordenadas x, y, z, tiene que corresponder en la figura otro de coordenadas $-x, -y, z$, cuyo momento, respecto a los planos $X\,Y$ y $X\,Z$ será $-m\,y\,z$, de modo que en la expresión $D = \Sigma\, m\,y\,z$ entran una serie de sumandos que de dos en dos se destruyen y verificarán la condición $\Sigma\, m\,y\,z = o$; lo mismo se vería, con los planos $X\,Y$, $Y\,Z$, la condición $\Sigma\, m\,x\,z = o$, que unida a la anterior demuestran que el eje de simetría propuesto es principal de inercia en cualquiera de sus puntos.

2.ª *En las figuras de revolución, el eje, es principal de inercia en todos sus puntos.*—Puesto que los ejes de revolución son siempre ejes de simetría.

3.ª *En las figuras planas, los ejes polares, son principales de inercia en el punto en que cortan al plano de la figura.*—Es evidente esta propiedad por ser *cero* la coordenada que corresponde al eje polar en todos los puntos de la figura.

145. Elipse de los radios de giro en las figuras planas.— Además de la elipse de inercia que en cada punto de su plano corresponde a una figura plana, se puede trazar otra, relacionada con los radios de giro de los momentos de inercia de la misma, en la forma que ahora veremos, pero no sin advertir antes que esta elipse, que nosotros llamamos *de los radios de giro*, para no confundirla con la anteriormente establecida, es también llamada *elipse de inercia* por algunos autores, particularmente en los tratados de *Mecánica aplicada a las construcciones.*

Sean $o\,X$ y $o\,Y$ los ejes principales de inercia que en el punto o (fig. 76) corresponden a una figura plana cualquie-

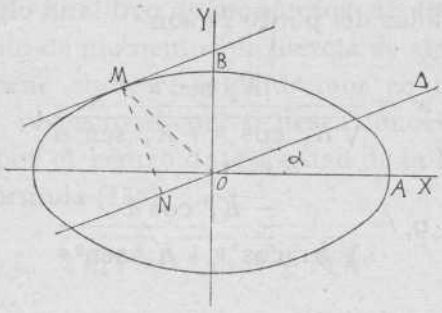


Fig. 76

ra; tomemos sobre ellos los segmentos $o\,A = K_2$ y $o\,B = K_1$, siendo K_1 y K_2 los radios de giro de los momentos principales correspondientes a $o\,X$ y $o\,Y$; tracemos la elipse

$$\frac{x^2}{K_2^2} + \frac{y^2}{K_1^2} = 1$$

que tiene por semiejes dichos segmentos y vamos a demostrar que *si trazamos por* o *un eje cualquiera* o Δ *y desde el extremo M del diámetro conjugado con él trazamos la perpendicular M N, el segmento M N representa el radio de giro del momento relativo al eje* o Δ.

Desde luego se verifica esta propiedad para los ejes principales, por la construcción indicada, y para demostrarlo en otro cualquiera $o\,\Delta$, observemos que los coeficientes angulares, a y a', de $o\,M$ y $o\,\Delta$ cumplen la condición

$$\frac{1}{K_2^2}+\frac{1}{K_1^2}\,a\,a'=0\ ,$$

de donde se deduce que la ecuación de $o\,M$ será

$$y=a'x=-\frac{K_1^2}{K_2^2\,a}\,.\,x=-\frac{K_1^2\,x}{K_2^2\,\operatorname{tg}\alpha}$$

y las coordenadas del punto M son

$$x'=\frac{K_2^2\,\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{K_1^2\cos^2\alpha+K_2^2\,\operatorname{sen}^2 a}}\ ,$$

$$y'=\frac{-K_1^2\cos\alpha}{\sqrt{K_1^2\cos^2\alpha+K_2^2\,\operatorname{sen}^2\alpha}}\ .$$

Pero de la fórmula (**141**)

$$\Sigma\, m\,r^2=A\cos^2\alpha+B\,\operatorname{sen}^2\alpha\ ,$$

o

$$M\,K^2=M\,K_1^2\cos^2\alpha+M\,K_2^2\,\operatorname{sen}^2\alpha\ ,$$

se deduce que

$$K^2=K_1^2\cos^2\alpha+K_2^2\,\operatorname{sen}^2\alpha$$

y las coordenadas de M se reducen a

$$x'=\frac{K_2^2\,\operatorname{sen}\alpha}{K}\ ,\quad y'=\frac{-K_1^2\cos\alpha}{K}\ .$$

La longitud del segmento $M\,N$ estará expresada por la fórmula

$$MN = \frac{a\,\dfrac{K_2^2 \operatorname{sen}\alpha}{K} + \dfrac{K_1^2 \cos\alpha}{K}}{\sqrt{1+a^2}} =$$

$$= \frac{K_2^2 \operatorname{sen}^2\alpha + K_1^2 \cos^2\alpha}{K\sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}} = \frac{K^2}{K} = K,$$

que es lo que se quería demostrar.

146. Cálculo analítico de momentos de inercia.—Para hacer el cálculo de momentos de inercia de algunas figuras que nos conviene conocer, supondremos en todos los casos que el eje, respecto al cual se desea conocer dicho momento, pasa por el centro de gravedad de la figura y después por la fórmula (**136**)

$$\Sigma\, m\, r'^2 = \Sigma\, m\, r^2 + M h^2$$

se pasará a cualquier otro eje paralelo al anterior.

En las figuras planas no determinaremos más que momentos respecto a ejes contenidos en su plano y en el caso de que interese conocer algún momento polar de estas figuras, haremos uso de la fórmula (**135**)

$$\Sigma\, m\, r^2 = \Sigma\, m\, x^2 + \Sigma\, m\, y^2 .$$

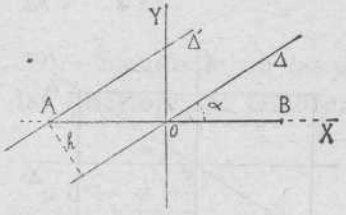


Fig. 77

147. Momentos de inercia de líneas planas.—1.° *Segmento rectilíneo.*—El momento del segmento $A\,B$ (fig. 77) respecto al eje $o\,Y$ es

$$I_Y = \Sigma m x^2 = \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} d\,x\,x^2 = \frac{L^3}{12}$$

y respecto al eje $o\,X$, $I_X = \Sigma m y^2 = o$.

El momento respecto a otro eje $o\,\Delta$, que pase por o, será

$$I = A\cos^2\alpha + B\,\mathrm{sen}^2\alpha \text{ (*)} \quad \text{o} \quad I = \frac{L^3}{12}\,\mathrm{sen}^2\alpha$$

y el correspondiente al $A\,\Delta'$, paralelo al anterior, trazado por el extremo A del segmento

$$I' = \frac{L^3}{12}\,\mathrm{sen}^2\alpha + L\,.\,h^2 = \frac{1}{3}\,L^3\,\mathrm{sen}^2\alpha\,.$$

2.° *Circunferencia.*—Es evidente que en una circunferencia los momentos respecto a todos los diámetros serán iguales y mitad del momento polar en el centro (**135**), cuyo valor es $2\pi r \times r^2$; así se obtiene para los primeros

$$I = \pi r^3 = \frac{1}{2}\,L\,.\,r^2\,.$$

El momento respecto a una tangente cualquiera es

$$I' = \frac{1}{2}\,L\,.\,r^2 + L\,.\,r^2 = \frac{3}{2}\,L\,r^2\,.$$

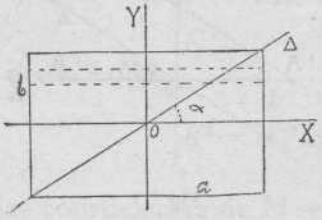


Fig. 78

148. Momentos de inercia de áreas planas.—1.° *Rectángulo.*—Sea el rectángulo de la figura 78 cuyas dimensiones son a y b; descomponiéndolo en zonas infinitesimales paralelas al eje $o\,X$ será, el mo-

(*) Es indudable que los ejes $o\,X$ y $o\,Y$ son los principales de inercia, respecto al punto o, del segmento $A\,B$.

mento de cada una, $a \,.\, dy \,.\, y^2$ y el de toda la figura

$$I = a \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2 \, dy = \frac{ab^3}{12} = \frac{S\,b^2}{12} \,.$$

Lo mismo, respecto al eje $o\,Y$, será $I' = \dfrac{ba^3}{12} = \dfrac{S\,a^2}{12}$.

Los momentos, respecto a los lados del rectángulo, son

$$I_a = \frac{ab^3}{12} + ab \,.\, \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{ab^3}{3} = \frac{Sb^2}{3} \text{ e } I_b = \frac{ba^3}{3} = \frac{Sa^2}{3} \,.$$

Como los ejes de simetría $o\,X$ y $o\,Y$ son los principales de inercia en el punto o, el momento respecto a un eje cualquiera $o\,\Delta$ será

$$I = \frac{ab^3}{12} \cos^2 \alpha + \frac{ba^3}{12} \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{S}{12} \left(b^2 \cos^2 \alpha + a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha\right)$$

y si el eje $o\,\Delta$ coincide con la diagonal del rectángulo, se reduce el momento a

$$I = \frac{S}{12} \left(b^2 \frac{a^2}{D^2} + a^2 \frac{b^2}{D^2}\right) = \frac{S^3}{6\,D^2} \,.$$

2.° *Corona rectangular* (fig. 79).—Siendo a y b las dimensiones exteriores y a' y b' las interiores de la corona rectangular, se tendrá

$$I_X = \frac{ab^3}{12} - \frac{a'b'^3}{12} = \frac{a\,b^3 - a'\,b'^3}{12}$$

y lo mismo

$$I_Y = \frac{ba^3}{12} - \frac{b'a'^3}{12} = \frac{b\,a^3 - b'\,a'^3}{12} \,.$$

3.° *Sección doble T* (fig. 80).—Los momentos de esta figura, respecto a los ejes principales $o\,X$ y $o\,Y$ son

$$I_x = \frac{a\,b^3}{12} - 2\,\frac{\frac{1}{2}\,a'\,b'^3}{12} = \frac{a\,b^3 - a'\,b'^3}{12},$$

$$I_y = \frac{(b-b')\,a^3}{12} + \frac{b'\,(a-a')^3}{12} = \frac{(b-b')\,a^3 + b'\,(a-a')^3}{12}.$$

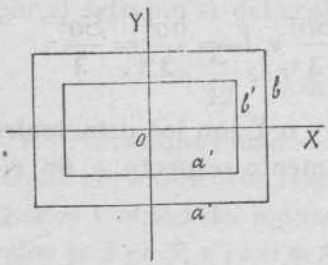


Fig. 79

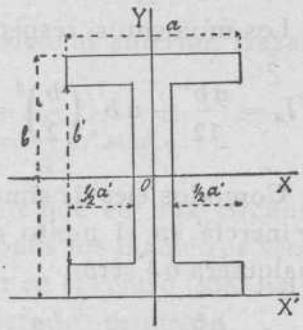


Fig. 80

El momento respecto al eje X' paralelo al X, trazado por la base de la doble T, es

$$I = \frac{a\,b^3 - a'\,b'^3}{12} + \frac{(a\,b - a'\,b')\,b^2}{4} = \frac{4\,a\,b^3 - a'\,b'\,(b'^2 + 3\,b^2)}{12}.$$

4.° *Momento de inercia de un sector circular respecto a un diámetro.*—Sea el sector $A\,B$ y el eje $o\,X$ (fig. 81) respecto al cual vamos a determinar su momento de inercia; el elemento de área tiene por expresión $d\varsigma = \rho\,.\,d\alpha\,.\,d\rho$ y su momento es

$$d^2\,I = d\alpha\,\rho^3\,d\rho\,\operatorname{sen}^2\alpha\,.$$

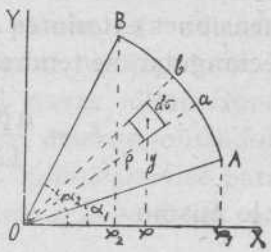


Fig. 81

El de todos los elementos comprendidos en el sector infinitesimal $a\ o\ b$ será $d\,I = \frac{r^4}{4}\,\mathrm{sen}^2\,\alpha\,d\,\alpha$ y el del sector

$$I = \frac{r^4}{4}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathrm{sen}^2\,\alpha\,d\,\alpha =$$

$$= \frac{r^4}{4}\left[\frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{1}{4}\times\left(\mathrm{sen}\,2\,\alpha_2 - \mathrm{sen}\,2\,\alpha_1\right)\right].$$

Como caso particular se obtiene el momento de un círculo, respecto a uno de sus diámetros, haciendo $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 2\,\pi$; así resulta

$$I = \frac{r^4}{8}(2\,\pi - 0) = \frac{\pi\,r^4}{4} = \frac{S\,r^2}{4}$$

y lo mismo el de una corona circular

$$I = \frac{\pi\,r^4}{4} - \frac{\pi\,r'^4}{4} = \frac{1}{4}\,\pi\,(r^2 + r'^2)\ (r^2 - r'^2) = \frac{S\,(r^2 + r'^2)}{4}.$$

5.° *Momento de inercia del área comprendida entre una curva, el eje o X y las ordenadas de sus extremos con relación al mismo eje o X.*—Sea la curva $A\,B$ de la figura 82, que juntamente con el eje $o\,X$ y las ordenadas $a\,A$ y $b\,B$ limitan el área cuyo momento queremos determinar; el del elemento $d\,\varsigma = d\,x\,d\,y$ es $d^2\,I = d\,x\,d\,y\,y^2$; el de todos los comprendidos en la faja infinitesimal $m\,n$

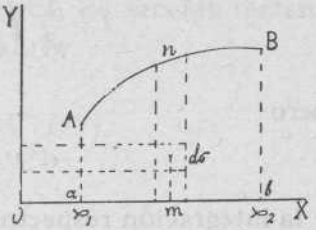


Fig. 82

$$d\,I = d\,x\int_0^y y^2\,d\,y = d\,x\,\frac{y^3}{3} = \frac{1}{3}\,y^3\,d\,x$$

y, por último, el de toda la figura

$$I=\frac{1}{3}\int_{X_1}^{X_2} y^3\,dx=\frac{1}{3}\int_{X_1}^{X_2} f(x)^3\,dx\,.$$

149. Momentos de inercia de superficies curvas y volúmenes. —1.° *Superficie esférica.*—El momento de una superficie esférica respecto a un diámetro es igual al tercio de la suma de los momentos respecto a tres ejes perpendiculares entre sí, trazados por su centro; así se tiene **(142)**

$$I=\frac{1}{3}\left[\int_D\int d^2s\,(x^2+y^2)+\int_D\int d^2s\,(x^2+z^2)+\right.$$

$$\left.+\int_D\int d^2s\,(y^2+z^2)\right]=$$

$$=\frac{2R^2}{3}\int_D\int d^2s=\frac{2}{3}SR^2\,.$$

2.° *Volumen de la esfera.*—Lo mismo que en el caso anterior se obtiene

$$I=\frac{1}{3}\int\int\int_D d^3v\,.\,2\rho^2\,;$$

pero

$$d^3v=\rho^2\,d\rho\,d\psi\,d\theta$$

y la integración respecto a ψ y θ, siendo ρ constante, proporciona el volumen $dv=4\pi\rho^2\,d\rho$ de la parte de esfera comprendida entre las superficies de radios ρ y $\rho+d\rho$ y, con este valor, el de I se convierte en

$$I=\frac{1}{3}\int_0^R 8\pi\rho^4\,d\rho=\frac{8\pi R^5}{15}=\frac{2}{5}VR^2\,.$$

3.° *Paralelepípedo rectángulo.*—El momento de inercia de un paralelepípedo rectángulo respecto a su eje longitudinal, siendo a, b y c sus dimensiones, es

$$I_c = \int\int\int_D dx\,dy\,dz\,(x^2+y^2) =$$

$$= \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} x^2\,dx +$$

$$+ \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} dz \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} y^2\,dy =$$

$$= \frac{a^3\,b\,c}{12} + \frac{a\,b^3\,c}{12} = \frac{a\,b\,c}{12}\left(a^2+b^2\right) = V\frac{D^2}{12},$$

siendo D la diagonal correspondiente a la sección recta del paralelepípedo.

El momento de una columna hueca, de sección rectangular, respecto a su eje longitudinal, es

$$I = \frac{1}{12}\left(V\,D^2 - V'\,D'^2\right)$$

y también

$$I = \frac{H}{12}\left(S\,D^2 - S'\,D'^2\right),$$

representando por H la altura de la columna y S y S' las áreas de las secciones $a\,b$ y $a'\,b'$.

4.° *Cilindro de revolución.*—El momento de inercia de

un cilindro de revolución respecto a su eje es

$$I = \int_0^R 2\pi\rho\, d\rho \,.\, H \,.\, \rho^2 = \frac{\pi R^4 H}{2} = \frac{1}{2} V R^2 .$$

Si el cilindro es hueco, como ocurre en las columnas metálicas empleadas en las construcciones, es

$$I = \frac{\pi H}{2}(R^4 - R'^4) = \frac{\pi H (R^2 + R'^2)(R^2 - R'^2)}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} V (R^2 + R'^2) .$$

5.° *Volantes de llanta rectangular.* —Están en el mismo caso que las columnas huecas del caso anterior; pero prácticamente se determina este momento por medio de una fórmula que, si bien no es exacta, se calcula con más facilidad.

Sea e el espesor de la llanta y R_m el radio medio del volante; tendremos

$$R^2 = \left(R_m + \frac{e}{2}\right)^2 = R_m^2 + e\, R_m + \frac{e^2}{4} ,$$

$$R'^2 = \left(R_m - \frac{e}{2}\right)^2 = R_m^2 - e\, R_m + \frac{e^2}{4} ,$$

de donde

$$R^2 + R'^2 = 2\, R_m^2 + \frac{e^2}{2} ;$$

despreciando el sumando $\frac{e^2}{2}$ puede suponerse, con alguna aproximación, $R^2 + R'^2 = 2\, R_m^2$, y el momento del volante respecto a su eje de giro será

$$I = \frac{1}{2} V (R^2 + R'^2) = V R_m^2 .$$

que equivale a suponer concentrado todo el volumen en el radio medio de la llanta.

150. Determinación mecánica de momentos de inercia.—Lo mismo que para los momentos estáticos existen aparatos integradores que mecánicamente realizan las operaciones de integración necesarias para calcular momentos de inercia de figuras planas; uno de los más usados es el que ya citamos en la teoría de los momentos estáticos y cuyo manejo, para esta clase de operaciones, se supone conocido por nuestros lectores.

151. Momentos de inercia mecánicos.—Si en las fórmulas de los momentos de inercia geométricos se introduce la densidad δ, multiplicando al elemento de extensión que se considere, se obtienen los momentos de inercia mecánicos.

En los cuerpos homogéneos se verifica sencillamente la transformación, sustituyendo la medida de la extensión total que en las fórmulas suele aparecer, por la de la masa total, que le corresponde; así, por ejemplo, el momento mecánico de un volante respecto a su eje de giro será

$$I = V \delta R_m^2 = M R_m$$

y análogamente se procederá en los demás casos.

CAPITULO QUINTO

Teoría de las funciones gráficas o geométricas

I

FUNCIONES GRÁFICAS Y SUS DERIVADAS LINEALES, ANGULARES Y AREOLARES

152. Definiciones.—Cuando un vector $[\rho]$ tiene su punto de aplicación fijo y su valor modular, dirección y sentido dependen del valor que se atribuya a una variable algébrica t, constituye una *función gráfica* o *geométrica* de la citada variable.

Se expresa simbólicamente esta dependencia por la notación $[\rho] = F(t)$, en la que los corchetes que comprenden a la letra ρ, bastan para indicar la naturaleza vectorial de la función considerada.

El punto de aplicación común a todos los vectores que componen la función $[\rho] = F(t)$, se llama *polo* de la misma.

El lugar geométrico de las posiciones que puede ocupar la *semirecta* de posición del vector $[\rho]$, correspondientes a todos los valores posibles de la variable t, forma la superficie *de situación* de la función gráfica dada, y la línea determinada en esta superficie por los índices de los vectores, recibe el nombre de *indicatriz* de la misma función.

153. Clasificación de las funciones gráficas.—Atendiendo a la forma que afecta la superficie de situación de una

función gráfica, se clasifican éstas en *rectilíneas, planas* y *cónicas* o *alabeadas*; debiendo observarse que las primeras, por tener todos los vectores que las forman sobre la misma línea de acción, serán simples funciones algebraicas.

Por la forma de la indicatriz pueden ser las funciones gráficas de *indicatriz rectilínea, plana* y *alabeada*; las funciones alabeadas podrán tener su indicatriz alabeada o plana, las funciones planas tendrán necesariamente su indicatriz plana y como caso particular rectilínea, y las funciones rectilíneas serán de indicatriz rectilínea o nula.

Independientemente de las clasificaciones anteriores, se dice que una función gráfica es de *valor modular constante*, cuando el vector $[\rho]$ tiene la misma longitud, para todos los valores de la variable t, y es evidente que en estos casos la indicatriz de la función será una curva esférica.

154. Incrementos elementales de una función gráfica. — Sean $[\rho] = oM$ y $[\rho'] = oM'$ (fig. 83) las posiciones del vector de la función $[\rho] = F(t)$, correspondientes a los valores t y $t' = t + dt$ de la variable algébrica; el paso de la posición oM a la oM' origina en la función gráfica, en correlación con el incremento dt de la variable, los siguientes *incrementos elementales:*

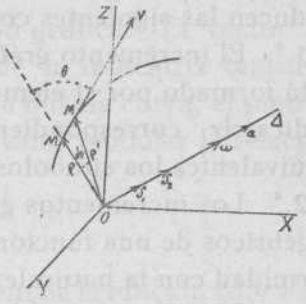


Fig. 83

Incremento algébrico, es, como ya se sabe, la diferencia de los valores algébricos de oM' y oM, representada por la notación $d\rho = \rho' - \rho$.

Incremento gráfico lineal, es la diferencia gráfica de

los vectores $[\rho']$ y $[\rho]$, representada por el símbolo $d\,[\rho] = [\rho'] - [\rho]$.

Incremento gráfico angular, es el ángulo $M\,o\,M' = d\,\psi$ que forman las dos posiciones $[\rho]$ y $[\rho']$, representado vectorialmente en la forma que sigue: tracemos por el polo o de la función el eje $o\,\Delta$ perpendicular al plano determinado por las posiciones $o\,M$ y $o\,M'$ del vector $[\rho]$ y sobre este eje imaginemos el segmento $o\,\delta_1$, cuyo valor modular sea igual a $d\,\psi$ y cuyo sentido esté determinado por la condición de que un observador colocado sobre $o\,\Delta$, con los pies en o, vea el paso de $o\,M$ a $o\,M'$ de izquierda a derecha. El vector $[o\,\delta_1]$, así constituido, es el incremento gráfico angular de $[\rho] = F(t)$, correspondiente a los valores t y $t + d\,t$ de la variable algébrica. Simbólicamente representaremos al vector $[o\,\delta_1]$ por la notación $d\,[\psi]$.

Incremento gráfico areolar, es el área del triángulo infinitesimal $M\,o\,M' = d\,A$, representada vectorialmente por $[o\,\delta_2]$, en la misma forma que se ha dicho para los incrementos angulares y simbólicamente por la notación $d\,[A]$.

155. Consecuencias.—De las definiciones anteriores se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª El incremento gráfico lineal de la función $[\rho] = F(t)$ está formado por el elemento rectilíneo $M\,M' = d\,e$ de la indicatriz, correspondiente al mismo valor de t, siendo equivalentes los símbolos $d\,e$ y $d\,[\rho]$.

2.ª Los incrementos gráficos lineales y los incrementos algébricos de una función rectilínea son idénticos, de conformidad con la naturaleza algébrica de esta clase de funciones gráficas.

3.ª Los incrementos gráficos angulares y areolares de las funciones rectilíneas son nulos, para todos los valores de la variable t.

156. Relaciones algébricas entre los incrementos elementales de una función gráfica.—Los valores algébricos

de los tres incrementos gráficos definidos, se relacionan entre sí del siguiente modo: considerando al triángulo $M o M' = d A$ (fig. 83) como un sector de radio ρ y ángulo $d \psi$, se obtiene la ecuación

$$d A = \frac{1}{2} \rho^2 \, d \psi$$

que relaciona los valores algébricos de los incrementos angular y areolar, y si llamamos θ al ángulo que forma el vector $[\rho]$ con su incremento lineal, $d\,[\rho]$, tendremos la igualdad

$$d A = \frac{1}{2} \rho \, d e \operatorname{sen} \theta ,$$

que sirve para relacionar los valores algébricos de los incrementos gráficos lineal y areolar, y de los dos valores obtenidos para $d A$, resulta la relación

$$d e \, . \operatorname{sen} \theta = \rho \, . \, d \psi ,$$

que se utiliza para pasar del valor algébrico del incremento lineal al del angular y viceversa.

157. Derivadas de una función gráfica.—El vector $[v]$ (fig. 83) aplicado en el punto M de la indicatriz teniendo por línea de acción la tangente a la misma curva, el sentido del incremento lineal $d\,[\rho]$ y por valor modular la relación

$$v = \frac{d\,[\rho]}{d t}$$

constituye la *derivada gráfica lineal* de la función $[\rho] = F(t)$, correspondiente al valor t de la variable algébrica.

Si sobre el eje $o\,\Delta$, de la misma figura, se señala un vector $[\omega]$, con el sentido indicado por $d\,[\psi]$ y cuyo valor modular sea

$$\omega = \frac{d\,[\psi]}{d t}$$

se origina la *derivada gráfica angular* de la función dada, correlativa con el valor t de la expresada variable, y análogamente, el vector

$$[a] = \frac{d\,[A]}{d\,t}$$

situado también sobre $o\,\Delta$, representa la *derivada gráfica areolar* de la misma función, correspondiente al indicado valor de t.

158. Primeras propiedades de relación entre las derivadas gráficas de la función.—De las definiciones establecidas, se deduce que las derivadas angular y areolar tienen la misma línea de acción y el mismo sentido, para todos los valores de t, y que dicha línea de acción es perpendicular a la dirección que, en cada punto de la indicatriz, señalan la función $[\rho]$ y la derivada lineal $[v]$.

Para relacionar los valores algébricos de las expresadas derivadas, utilizaremos las relaciones establecidas entre los incrementos elementales (**156**), que conducen, dividiendo por $d\,t$, a las ecuaciones.

$$v \operatorname{sen} \theta = \rho \,.\, \omega, \quad a = \frac{1}{2} v\, \rho \operatorname{sen} \theta, \quad a = \frac{1}{2} \rho^2 \omega,$$

que resuelven la cuestión propuesta; la segunda nos dice además que *la derivada areolar de una función gráfica representa, para todos los valores de t, la mitad del momento de la derivada lineal, respecto al polo de la función.*

159. Proyección de una función gráfica sobre un plano.—La proyección de una función gráfica sobre un plano constituye otra función gráfica $[\rho_1] = F_1(t)$, cuyos elementos deben guardar cierta relación con los de la primera.

Por lo pronto se ve que la indicatriz de la función proyectada es la proyección de la indicatriz del espacio, y vamos a demostrar que *la derivada lineal de la función proyectada es la proyección de la derivada lineal de la función del espacio.*

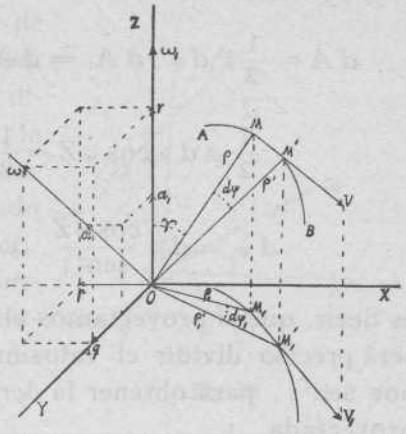


Fig. 84

Supongamos hecha la proyección de la función $[\rho] = F(t)$ sobre el plano coordenado $X\,Y$ (fig. 84); desde luego se advierte que la línea de acción y el sentido de $[v_1]$ son los que corresponden a la proyección de la derivada $[v]$, y en cuanto al valor modular, se verifica

$$v_1 = \frac{\overline{M_1 M'_1}}{dt} = \frac{\overline{M M'} \cos \nu}{dt} = v \cos \nu ,$$

como deseábamos comprobar.

Respecto a la derivada areolar de la función proyectada es

$$a_1 = \frac{dA_1}{dt} = \frac{dA \cos \overline{aZ}}{dt} = a \cos \overline{aZ}$$

y se verifica, como en las lineales, que *la derivada areolar de la función proyectada es igual a la proyección, sobre el eje correspondiente, de la derivada areolar de la función* $[\rho] = F(t)$ *del espacio.*

Las derivadas angulares de $[\rho]$ y $[\rho_1]$ no cumplen la con-

dición establecida para las otras dos, como demuestra el siguiente cálculo:

$$dA = \frac{1}{2}\rho^2\, d\psi\,,\quad dA_1 = dA\cos\omega\overline{Z} = \frac{1}{2}\rho_1^2\, d\psi_1\,,$$

$$\frac{1}{2}\rho^2\, d\psi\cos\omega\overline{Z} = \frac{1}{2}(\rho\,\mathrm{sen}\,\gamma)^2\, d\psi_1\,,$$

$$d\psi_1 = d\psi\,\frac{\cos\omega\overline{Z}}{\mathrm{sen}^2\gamma} \quad \text{y} \quad \omega_1 = \frac{\omega\cos\omega\overline{Z}}{\mathrm{sen}^2\gamma}\,;$$

es decir, que si proyectamos el vector $[\omega]$ sobre el eje oZ, será preciso dividir el valor modular de esta proyección por $\mathrm{sen}^2\gamma$, para obtener la derivada angular de la función proyectada.

160. Proyección de una función gráfica sobre un eje.— La proyección de una función gráfica sobre un eje cualquiera produce una función rectilínea, que se relaciona con la del espacio por la propiedad siguiente: *la proyección de la derivada lineal de una función gráfica sobre un eje es igual a la derivada algébrica de la proyección de dicha función sobre el mismo eje.*

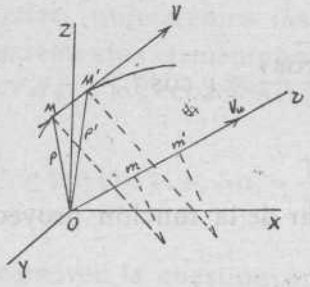


Fig. 85

Sea $u = F(t)$ la función rectilínea que se obtiene al proyectar sobre el eje oU (figura 85) la función $[\rho] = F(t)$; la derivada algébrica de la función proyectada es

$$\frac{du}{dt} = \frac{m\,m'}{dt} = \frac{\overline{M\,M'}\cos\overline{v\,U}}{dt} = v\,.\cos\overline{v\,U}\,,$$

como queríamos demostrar.

161. Componentes radial y circular de la derivada lineal de una función gráfica.—Las proyecciones MR y MS de la derivada lineal de una función gráfica (fig. 86), situada la primera sobre la dirección de la función $[\rho]$ y la segunda sobre la perpendicular a $[\rho]$ en el plano determinado por $[\rho]$ y $[v]$, reciben respectivamente los nombres de *componente radial* y *componente circular* de la derivada lineal $[v]$.

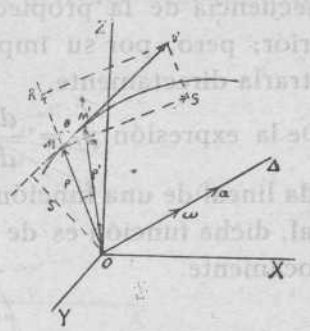


Fig. 86

El valor algébrico de la componente circular es

$$v_c = v \operatorname{sen} \theta = \rho \,.\, \omega = \rho \frac{d\psi}{dt},$$

viéndose que v_c representa *el momento del vector* $[\omega]$ *respecto al punto M.*

El valor de la componente radial se determina por la siguiente propiedad: *la proyección de la derivada lineal de una función gráfica sobre la dirección de la función, en el mismo punto, es igual a la derivada algébrica de la función gráfica propuesta;* (*) para demostrarlo, basta observar que

$$v_r = v \cos \theta = \frac{d[\rho]}{dt} \cos \theta = \frac{d\rho}{dt},$$

por ser

$$d\rho = m M' = M M' \cos \theta = d[\rho] \cos \theta .$$

(*) Se supone en toda esta teoría que las derivaciones, tanto algebraicas como gráficas, están efectuadas respecto a la variable algébrica t considerada como independiente.

También podría establecerse la fórmula $v_r = \frac{d\rho}{dt}$ como consecuencia de la propiedad demostrada en el número anterior; pero, por su importancia, hemos preferido demostrarla directamente.

De la expresión $v_r = \frac{d\rho}{dt}$ se deduce que cuando la derivada lineal de una función gráfica no tenga componente radial, dicha función es de valor modular constante y recíprocamente.

II

FUNCIONES GRÁFICAS DERIVADAS DE OTRA FUNCIÓN

162. Definiciones.—Si se trazan por el polo de una función $[\rho] = F(t)$ la serie de vectores equipolentes a las derivadas lineales de dicha función en los diversos puntos de su indicatriz, se obtiene otra función gráfica (fig. 87) que, por su manera de originarse, llamaremos *función derivada lineal* de la *primitiva* $[\rho] = F(t)$ y la representaremos por el símbolo $[v] = F'(t)$.

Del mismo modo, el lugar geométrico de las derivadas angulares y areolares de la función dada, constituyen otras funciones, que llamaremos *funciones derivadas angular* y *areolar* de la misma primitiva y las representaremos por las notaciones

$$[\omega] = F'(t) \quad \text{y} \quad [a] = F'(t) ,$$

bastando la indicación del símbolo del primer miembro, para saber a cual de las tres funciones derivadas nos referimos.

Las funciones derivadas que acabamos de definir, son las *derivadas de primer orden* de $[\rho] = F(t)$ y, si se repiten en ellas las mismas operaciones de derivación, se formarán

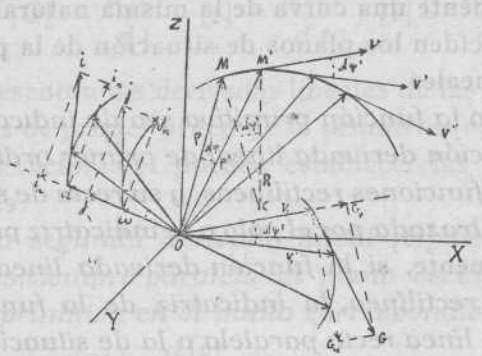


Fig. 87

las funciones derivadas de *segundo orden* y sucesivamente se llegaría hasta obtener las de cualquier orden, debiendo observarse que cada función derivada tiene, a su vez, en general, derivadas lineales, angulares y areolares. En las aplicaciones mecánicas sólamente tienen importancia las funciones derivadas de primer orden y las derivadas lineales de estas funciones.

163. Relaciones de posición entre las funciones derivadas y la primitiva $(\rho) = F(t)$.—Considerando primero las derivadas lineales estableceremos las proposiciones siguientes:

1.ª *Cuando la función primitiva sea de indicatriz plana, la función derivada lineal de primer orden y las sucesivas son funciones planas, y su plano de situación es el paralelo al de la indicatriz primitiva trazado por el polo.*

Recíprocamente, *si la función derivada lineal de pri-*

mer orden es plana, la indicatriz de la primitiva es una curva plana situada en un plano paralelo al de situación de la función derivada.

Cuando la primitiva sea función plana, su indicatriz será evidentemente una curva de la misma naturaleza y en este caso coinciden los planos de situación de la primitiva y derivadas lineales.

2.ª *Cuando la función primitiva sea de indicatriz rectilínea, la función derivada lineal de primer orden y las sucesivas son funciones rectilíneas, y su recta de situación es la paralela trazada por el polo a la indicatriz primitiva.*

Recíprocamente, *si la función derivada lineal de primer orden es rectilínea, la indicatriz de la función primitiva es una línea recta paralela a la de situación de la función derivada.*

Cuando la función primitiva sea rectilínea su indicatriz lo será también y en este caso coinciden las rectas de situación de la función primitiva y de sus derivadas lineales sucesivas.

163'. En las funciones derivadas angulares se verifica:

1.° *La función derivada angular de primer orden de una función plana es rectilínea y las sucesivas derivadas angulares son nulas.*

Recíprocamente, *si la función derivada angular de una primitiva es rectilínea dicha primitiva es plana.*

El plano de esta última será el perpendicular trazado por el polo a la recta de situación de la función $[\omega] = F'(t)$.

2.° *Las funciones derivadas angulares de una primitiva cualquiera no pueden ser funciones planas en ningún caso.*

Si se consideran las funciones derivadas areolares sucesivas de la primitiva $[\rho] = F(t)$, se verificarán, del mismo modo que para las angulares, las dos propiedades anteriores.

164. Propiedades de la derivada lineal de las funciones derivadas de primer orden.—En la figura 87 están señalados los vectores.

$$[G] = \frac{d\,[v]}{d\,t}\,,\quad [j] = \frac{d\,[\omega]}{d\,t}\,,\quad [i] = \frac{d\,[a]}{d\,t}\,,$$

que representan las derivadas lineales de las tres funciones derivadas de primer orden de la primitiva $[\rho] = F(t)$ y sobre estos vectores se pueden establecer las proposiciones siguientes:

1.ª *La segunda derivada lineal* $[G]$ *de una función gráfica es siempre paralela al plano osculador de la indicatriz primitiva en el punto correspondiente.*—En efecto, el vector $[G] = \frac{d\,[v]}{d\,t}$ (fig. 87) está situado en el plano de $[v]$ y $[v']$ en la función $[v] = F'(t)$ y este plano es paralelo al determinado por las dos tangentes consecutivas trazadas a la indicatriz primitiva en los índices de los vectores $[\rho]$ y $[\rho']$.

2.ª *La componente radial de la segunda derivada lineal de una función gráfica es igual a la segunda derivada algébrica de los arcos de la indicatriz primitiva.*—En efecto, dicha componente tiene por expresión $G_t = \frac{d\,v}{d\,t}$ (**161**) y como

$$v = \frac{d\,[\rho]}{d\,t} = \frac{d\,e}{d\,t}\,,$$

resulta $G_t = \frac{d^2\,e}{d\,t^2}$, como queríamos demostrar.

Esta componente de $[G]$, por ser igual a la proyección de este vector sobre la tangente a la indicatriz primitiva, recibe el nombre de componente *tangencial* de dicho vector.

Cuando $G_t = o$ la función $[v] = F'(t)$ es de valor modular constante y recíprocamente.

3.ª *La componente circular de la segunda derivada lineal de una función gráfica, es igual al cuadrado de la primera derivada dividido por el radio de curvatura de la indicatriz primitiva en el punto correspondiente.* En efecto, la componente circular está dada por la fórmula (161) $G_n = v \cdot \frac{d\psi'}{dt}$ (fig. 87); pero trazando las normales MC y $M'C$ a la indicatriz primitiva, en el plano osculador correspondiente, se verificará

$$MM' = d[\rho] = R\, d\psi' ,$$

siendo R el radio de curvatura de la indicatriz en el punto M, y por tanto

$$G_n = v \frac{d[\rho]}{R\, dt} = \frac{v^2}{R} ,$$

como se quería demostrar.

La componente G_n, por ser igual a la proyección del vector $[G]$ sobre la normal principal de la indicatriz primitiva, recibe el nombre de componente *normal* de dicha segunda derivada lineal.

4.ª *Cuando la componente normal de la segunda derivada lineal de una función gráfica es nula, la indicatriz primitiva es necesariamente rectilínea.*—Puesto que la condición $G_n = o$ exige que R sea infinito y esto demuestra el enunciado (*). La recíproca también es cierta.

5.ª *La componente radial de la derivada lineal de la función derivada angular de primer orden es igual a la*

(*) La derivada lineal $[v]$ no puede ser cero más que siendo $[\rho]$ un vector constante en valor modular, dirección y sentido, en cuyo caso no existiría la función gráfica que se ha supuesto.

segunda derivada algébrica de los ángulos descritos por la función primitiva en su superficie de situación.—En efecto (**161**),

$$j_a = \frac{d\,\omega}{d\,t} = \frac{d}{d\,t} \cdot \frac{d\,\psi}{d\,t} = \frac{d^2\psi}{d\,t^2} .$$

A esta componente de $[j]$ se le llama *axial*, por estar situada sobre el eje de los incrementos angulares.

Cuando $j_a = o$ la función $[\omega] = F'(t)$ es de valor modular constante y recíprocamente.

6.ª *La componente circular de la derivada lineal de la función derivada angular de primer orden, es igual al producto de las dos primeras derivadas angulares de la primitiva.*—Puesto que (**161**)

$$j_n = \omega \frac{d\,\varphi}{d\,t} = \omega \,.\, \omega' .$$

Esta componente de $[j]$ se llama *normal*, por estar situada sobre la perpendicular al eje de los incrementos angulares.

7.ª *Cuando la componente normal* $[j_n]$ *del vector* $[j]$ *sea nula, la función primitiva será necesariamente plana.*—Puesto que para ser $j_n = \omega \,.\, \omega' = o$ tiene que ser $\omega' = o$ o bien $\omega = o$; la primera hipótesis indica que $[\omega] = F'(t)$ es rectilínea y $[\rho] = F(t)$ será plana. La hipótesis $\omega = o$ equivale a suponer que la primitiva es rectilínea, o sea un caso particular de las funciones planas.

La recíproca de esta propiedad es también cierta; es decir, que si la función primitiva es plana será $j_n = o$.

Las componentes i_a e i_n de la derivada lineal de la función derivada areolar de primer orden, $[a] = F'(t)$, también reciben los nombres de *axial* y *normal* respectivamente; la primera tiene por expresión

$$i_a = \frac{da}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{dA}{dt} = \frac{d^2 A}{dt^2}$$

y la segunda

$$i_n = a \frac{d\varphi}{dt} = a \cdot \omega',$$

pudiéndose deducir de estas fórmulas las mismas consecuencias establecidas sobre las componentes del vector $[j]$.

III

DETERMINACIÓN ANALÍTICA DE UNA FUNCIÓN GRÁFICA

165. Ecuaciones de proyección.—Una función gráfica $[\rho] = F(t)$ está determinada analíticamente cuando se dispone del número suficiente de relaciones entre sus diversos elementos y la variable t, para que, dado un valor cualquiera a esta variable, se puedan señalar en el espacio las posiciones del vector $[\rho]$, su superficie de situación, indicatriz, derivadas y cuantos datos interese conocer de la referida función.

El procedimiento más sencillo que se suele emplear, para conseguir dicho objeto, consiste en referir la función dada a un sistema coordenado rectangular, cuyo origen coincida con el polo de la función propuesta y expresar, en función de t, las proyecciones del vector $[\rho]$ sobre los referidos ejes coordenados: así se obtienen tres ecuaciones de la forma

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

que resuelven la cuestión y, por la significación de sus primeros miembros, las llamaremos *ecuaciones de proyección* de la función gráfica que se considere.

Estas ecuaciones de proyección constituyen, por otra parte, la representación analítica de las funciones rectilíneas que se obtienen al proyectar sobre los ejes coordenados la función $[\rho] = F(t)$, y cada dos de dichas ecuaciones representarán analíticamente a la función plana que resulta de proyectarla sobre los planos coordenados correspondientes.

166. Valor modular, cosenos directores y ecuaciones de la línea de acción del vector $[\rho]$.—Estos elementos se determinan, lo mismo que para un vector cualquiera, por las fórmulas **(12)**

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

y representando por ξ, η y ζ las coordenadas generales de los diversos puntos de la línea de acción de $[\rho]$, sus ecuaciones analíticas serán

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta}{z}.$$

167. Ecuaciones de la indicatriz.—Se obtienen eliminando al parámetro variable t entre las ecuaciones de

proyección de la función; así resultarán tres ecuaciones

$$F_1(x\,y) = o, \quad F_2(x\,z) = o, \quad F_3(y\,z) = o,$$

que representan las proyecciones de dicha línea sobre los tres planos coordenados; para determinarla basta, como sabemos, con dos cualesquiera de estas ecuaciones.

168. Ecuación de la superficie de situación. – La superficie cónica de situación de la función gráfica tiene por generatriz la recta

$$\xi = \frac{x}{z}\,\zeta, \quad \eta = \frac{y}{z}\,\zeta,$$

cuya posición depende de t; eliminando esta variable entre las ecuaciones de la generatriz se obtendrá una ecuación $F(\xi\,\eta\,\zeta) = o$, que es la de la superficie que buscamos.

169. Determinación de la derivada lineal. – Las proyecciones del vector $[v] = \dfrac{d\,[\rho]}{d\,t}$ sobre los ejes coordenados serán, en virtud de lo demostrado en el número **160**,

$$v_x = \frac{d\,x}{d\,t} = f_1'(t), \quad v_y = \frac{d\,y}{d\,t} = f_2'(t), \quad v_z = \frac{d\,z}{d\,t} = f_3'(t)\ .$$

Abreviadamente las representaremos por

$$x' = f_1'(t), \quad y' = f_2'(t), \quad z' = f_3'(t).$$

El valor modular de $[v]$ es

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

y las ecuaciones de su línea de acción, siendo x, y, z las coordenadas del índice del vector $[\rho]$, donde se quiere trazar dicha derivada, son

$$\frac{\xi - z}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'}\ .$$

Los cosenos directores de $[\nu]$ serán de la misma forma expresada para $[\rho]$, sustituyendo las variables x, y, z por las x', y', z'.

170. Determinación del ángulo que forman la función (ρ) y su derivada lineal (v).—Este ángulo θ (fig. 83) se calcula en función de t por la fórmula

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu =$$

$$= \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)}}.$$

Como este ángulo figura por su *seno* en varias cuestiones, observemos que esta relación trigonométrica es

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} =$$

$$= \sqrt{\frac{(y\,z' - z\,y')^2 + (z\,x' - x\,z')^2 + (x\,y' - y\,x')^2}{(x^2 + y^2 + z^2) \times (x'^2 + y'^2 + z'^2)}}.$$

En las funciones rectilíneas es $\operatorname{sen}\theta = o$ y tendrán que ser nulos los binomios del numerador de la última fórmula; recíprocamente, la anulación de estos binomios lleva consigo la condición de ser rectilínea la función $[\rho] = F(t)$.

En las funciones de valor modular constante es $\theta = 90.^\circ$ y

$$x\,x' + y\,y' + z\,z' = o$$

expresa la condición analítica necesaria y suficiente para que dicha circunstancia se verifique.

171. Ecuación del plano determinado por los vectores (ρ) y (v). – La ecuación de un plano cualquiera que contenga al vector $[\rho]$ es de la forma

$$\xi - \frac{x}{z}\zeta = K\left(\eta - \frac{y}{z}\zeta\right)$$

y para que este plano contenga a la derivada lineal $[\nu]$ deberá darse a K el valor

$$K = \frac{\frac{x}{z} - \frac{x'}{z'}}{\frac{y}{z} - \frac{y'}{z'}} = \frac{x z' - z x'}{y z' - z y'};$$

así resulta, sustituyendo y haciendo reducciones, la ecuación

$$(y z' - z y')\,\xi + (z x' - x z')\,\eta + (x y' - y x')\,\zeta = o.$$

El plano que se acaba de determinar es el tangente a la superficie de situación a lo largo del vector $[\rho]$ y podría obtenerse de la función $F(\xi\,\eta\,\zeta) = o$, cuando se disponga de esta ecuación.

Los cosenos directores de este plano son

$$\cos\alpha_1 = \frac{y z' - z y'}{\sqrt{(y z' - z y')^2 + (z x' - x z')^2 + (x y' - y x')^2}},$$

$$\cos\beta_1 = \frac{z x' - x z'}{\sqrt{(y z' - z y')^2 + (z x' - x z')^2 + (x y' - y x')^2}},$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{x y' - y x'}{\sqrt{(y z' - z y')^2 + (z x' - x z')^2 + (x y' - y x')^2}}.$$

172. Plano osculador de la indicatriz en un punto cualquiera. — Está determinado por dos derivadas lineales consecutivas $[\nu]$ y $[\nu']$ (fig. 87), y para mayor sencillez determinemos primero el paralelo al mismo trazado por el polo.

La paralela a $[\nu]$ trazada por dicho punto es

$$\xi = \frac{x'}{z'}\zeta, \quad \eta = \frac{y'}{z'}\zeta$$

y la correspondiente a $[\nu']$ siendo $x'' = \frac{dx'}{dt}$, $y'' = \frac{dy'}{dt}$ y $z'' = \frac{dz'}{dt}$, será

$$\xi = \frac{x' + x''\,dt}{z' + z''\,dt}\,\zeta\,,\quad \eta = \frac{y' + y''\,dt}{z' + z''\,dt}\,\zeta\,;$$

estas rectas determinan el plano

$$\xi - \frac{x'}{z}\,\zeta = \frac{x'z'' - z'x''}{y'z'' - z'y''}\left(\eta - \frac{y'}{z'}\,\zeta\right),$$

o lo que es lo mismo

$$(y'z'' - z'y'')\,\xi + (z'x'' - x'z'')\,\eta + (x'y'' - y'x'')\,\zeta = o$$

y por último, el osculador que buscamos será

$$(y'z'' - z'y'')\,(\xi - x) + (z'x'' - x'z'')\,(\eta - y) + \\ + (x'y'' - y'x'')\,(\zeta - z) = o.$$

173. Radio de curvatura de la indicatriz de un punto.— La curvatura de flexión de una línea está determinada por la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2}}{de^3}$$

de donde sustituyendo valores en función de t (*) y despejando R, resulta

---

(*) Los valores sustituidos son

$$dx = x'\,dt\,,\ dy = y'\,dt\,,\ dz = z'\,dt\,,$$
$$d^2x = x''\,dt^2\,,\ d^2y = y''\,dt^2\,,\ d^2z = z''\,dt^2\,,$$
$$de = dt\,\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,.$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}} .$$

174. Componentes radial y circular de la derivada lineal (v).—Las fórmulas que darán, en función de t, las componentes expresadas son **(161)**

$$v_r = v \cos \theta = \frac{d\rho}{dt} = \frac{x x' + y y' + z z'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ,$$

$$v_c = v \operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{(y z' - z x')^2 + (z x' - x z')^2 + (x y' - y x')^2}{x^2 + y^2 + z^2}} .$$

En el caso de funciones rectilineas es $v_r = v$ y $v_c = o$ y en las de valor modular constante, inversamente, será $v_c = v$ y $v_r = o$.

175. Determinación de los incrementos elementales de la función (ρ).—Para determinar estos incrementos, en función de t, estableceremos las siguientes fórmulas:

$$d e = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = dt \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} ,$$

$$d\psi = \frac{d e \operatorname{sen} \theta}{\rho} = dt \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{(y z' - z y')^2 + (z x' - x z')^2 + (x y' - y x')^2}{(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)}} =$$

$$= \frac{dt \sqrt{(y z' - z y')^2 + (z x' - x z')^2 + (x y' - y x')^2}}{x^2 + y^2 + z^2} ,$$

$$dA = \frac{1}{2} \rho^2 d\psi =$$

$$= \frac{1}{2} dt \times \sqrt{(y z' - z y')^2 + (z x' - x z')^2 + (x y' - y x')^2} .$$

176. Determinación de la derivada angular.—El valor modular de $[\omega] = \frac{d[\psi]}{dt}$ se deduce de la segunda fórmula del número anterior y es

$$\omega = \frac{\sqrt{(y z' - z y')^2 + (z x' - x z')^2 + (x y' - y x')^2}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Los cosenos directores de este vector son los determinados en el número **171**, como directores del plano tangente a la superficie de situación de la función $[\rho]$, y con estas fórmulas y el valor modular de $[\omega]$, expresaremos las proyecciones de este vector sobre los ejes coordenados, representándolas por p, q y r en la forma siguiente:

$$p = \frac{y z' - z y'}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad q = \frac{z x' - x z'}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r = \frac{x y' - y x'}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

177. Determinación de la derivada areolar.—El valor modular de $[a]$ es

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{(y z' - z y')^2 + (z x' - x z')^2 + (x y' - y x')^2};$$

los cosenos directores son los mismos que los de la derivada angular y sus proyecciones sobre los ejes, representándolas por l, m y n son

$$l = \frac{1}{2}(y z' - z y'), \qquad m = \frac{1}{2}(z x' - x z'),$$

$$n = \frac{1}{2}(x y' - y x').$$

Recordemos, por la importancia que tiene esta propiedad, que $[a]$ es la mitad del momento de la derivada lineal

$[\nu]$ respecto al polo de la función **(158)** y, por tanto, los valores de l, m y n *expresarán los momentos del vector* $\frac{1}{2}[\nu]$ *con relación a los tres ejes coordenados* **(37)**.

178 Ecuaciones de proyección de las funciones derivadas de primer orden de $(\rho) = \mathbf{F}(t)$.—Las ecuaciones

$$x' = f_1'(t), \quad y' = f_2'(t), \quad z' = f_3'(t),$$
$$p = \varphi_1(t), \quad q = \varphi_2(t), \quad r = \varphi_3(t),$$
$$l = \psi_1(t), \quad m = \psi_2(t), \quad n = \psi_3(t),$$

constituyen las ecuaciones de proyección de las funciones derivadas (lineal, angular y areolar) de primer orden de la primitiva $[\rho]$, y desde luego se comprende que procediendo con ellas en la forma que lo hemos hecho con las

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

de la citada primitiva, se podrán determinar la indicatriz, derivadas y demás elementos que a dichas funciones corresponden.

SEGUNDA PARTE

CINEMÁTICA

CINEMÁTICA

PRELIMINARES

179. Objeto de la Cinemática.—Ya se dijo en la Introducción que la Cinemática es la parte de la Mecánica general que se ocupa del estudio del movimiento de los cuerpos, haciendo abstracción de las causas que lo producen o modifican, así como de la naturaleza física de la materia que constituye a los sujetos móviles.

180. Movimiento absoluto y relativo.—Reposo.—El movimiento de los cuerpos es un fenómeno de relación, del que nos damos cuenta refiriendo las posiciones del móvil a un *sistema de referencia* que puede ser fijo, o estar, a su vez, dotado de movimiento con relación a un segundo sistema de referencia: en el primer caso se dice que el movimiento del cuerpo es un *movimiento absoluto,* y en el segundo se obtiene un movimiento especial que, por depender esencialmente de las condiciones de movilidad del sistema de referencia elegido, se llama *movimiento relativo* al mismo.

No existiendo o no habiéndose podido encontrar, un sistema de referencia que esté fijo de una manera absoluta, se deduce que todos los movimientos que observamos son

relativos; pero estos movimientos relativos, presenciados por un observador unido invariablemente al sistema de referencia y participando del movimiento del conjunto, suelen presentar los mismos caracteres que si fueran absolutos, y en este concepto, resulta conveniente el estudio del movimiento referido a sistemas que se supongan fijos, investigando después, como complemento indispensable, las modificaciones que en las circunstancias de tales movimientos pueda introducir la movilidad del sistema de referencia.

Cuando un cuerpo carece de movimiento se dice que está en *reposo,* y este estado puede ser, como el de movimiento, *absoluto* y *relativo*; entendiéndose que, cuando hablemos del reposo absoluto, nos referimos a sistemas de referencia fijos en hipótesis, toda vez que el reposo absoluto, en el sentido estricto de la palabra, parece no existir en la naturaleza.

181. Sistemas de referencia.—Los sistemas fijos o móviles a que se refieren las distintas posiciones de un móvil, para estudiar su movimiento, pueden ser de muy distinta naturaleza, pues sólo exige su misión el conocimiento de su posición, cuando ésta sea fija, o el de su movimiento cuando se trate de referencias móviles.

El procedimiento más sencillo que puede emplearse, consiste en referir las posiciones del móvil a tres ejes trazados por un punto arbitrario, constituyendo un *triedro de referencia,* cuyo vértice, y la dirección de sus aristas, se eligen en cada caso en la forma que más convenga para la resolución de los problemas mecánicos.

182. División de la Cinemática.—Las formas geométricas, cuyo movimiento vamos a estudiar en esta parte de la Mecánica, se clasifican en *deformables* e *indeformables,* según que los enlaces existentes entre sus diversos elementos consientan, o no, el cambio de posición relativa de unos

respecto a otros durante el movimiento del conjunto: los sólidos naturales cumplen, hasta cierto punto, la condición de indeformabilidad y por este motivo se acostumbra a dar a las formas indeformables el nombre de *sólidos geométricos*.

Cuando los cuerpos deformables están compuestos de partes finitas indeformables, produciéndose las deformaciones por el cambio de posición relativa de cada una de dichas partes, reciben el nombre de *sistemas articulados* o *de enlace*, conservando este mismo nombre cuando los enlaces entre las diversas piezas del sistema articulado impiden su deformación, convirtiéndolo en sólido geométrico.

Cuando los enlaces existentes entre los diversos elementos infinitesimales de una forma geométrica, permiten el cambio de posición relativa de los expresados elementos, se dice que la citada forma constituye un *sistema flúido*, por su analogía con los cuerpos naturales que se encuentran en dicho estado.

La clasificación hecha de las formas geométricas motiva la división de la Cinemática en tres partes, que se ocuparán del movimiento de cada una de ellas; pero estando todas formadas por la reunión de varios o infinitos puntos, enlazados de una u otra manera, se comprende la conveniencia de estudiar en primer lugar el movimiento de un solo punto, para dar a conocer algunas propiedades generales del movimiento, aplicables a todos los móviles y facilitar el estudio posterior de las circunstancias especiales del movimiento de las citadas formas geométricas.

Respecto a la cinemática de los sistemas flúidos debemos hacer la observación de que su estudio forma parte de otra teoría más general, llamada *cinemática de los medios continuos*, cuyo desarrollo se sale fuera del marco de nuestra obra; por este motivo prescindimos de dicha

teoría, limitándonos a exponer directamente, en la dinámica especial de equellos sistemas, los conocimientos cinemáticos que consideremos indispensables para el estudio que hayamos de hacer del movimiento y equilibrio de los cuerpos flúidos.

En resumen, por las razones expuestas, dividiremos a esta parte de la Mecánica en los tres capítulos siguientes:

1.° Cinemática del punto geométrico.

2.° Cinemática del sólido geométrico.

3.° Cinemática de los sistemas de enlace o teoría de los Mecanismos.

CAPITULO PRIMERO

Cinemática del punto geométrico

I

TRAYECTORIA Y FUNCIÓN GRÁFICA DEL MOVIMIENTO DE UN PUNTO

183. Trayectoria.—El lugar geométrico de las posiciones que un punto móvil ocupa en el espacio, durante su movimiento, se llama *trayectoria* de dicho punto.

Como un móvil no puede pasar de una posición a otra, no inmediata, sin ocupar antes otras intermedias, las líneas que se consideren como trayectorias de un punto cualquiera, no pueden presentar soluciones de continuidad entre las posiciones extremas del recorrido efectuado por el móvil; cumplida esta condición *de continuidad,* toda línea, cualquiera que sea su forma y condiciones, puede ser considerada como trayectoria de un punto.

Las trayectorias figuran en los problemas mecánicos unas veces como dato y otras como incógnita; en todo caso estarán determinadas cuando se haga el trazado gráfico de la línea que las representa o cuando se conozcan sus ecuaciones analíticas referidas a un sistema coordenado de posición conocida. Generalmente haremos uso de los sistemas cartesianos rectangulares, tomando por ejes coordenados las aristas del tiedro de referencia.

184. Clasificación de los movimientos de un punto por la forma de su trayectoria.—Atendiendo a la forma de la línea descrita por un punto en su movimiento, se clasifican éstos en *rectilíneos* y *curvilíneos*, subdividiéndose los últimos en *planos* y *alabeados*. Los movimientos sobre trayectorias cerradas se llaman, en general, *revolutivos*, distinguiéndose entre éstos los *circulares* y *elípticos*, cuyas trayectorias reciben el nombre de *órbitas*, si bien en Astronomía se suele aplicar esta denominación a las trayectorias de todos los cuerpos celestes, cualquiera que sea su forma.

185. Función gráfica del movimiento de un punto.—Si al recorrer el móvil su trayectoria se le imagina unido, por medio de una recta, con un punto fijo (que supondremos, si no se advierte lo contrario, que es el origen de coordenadas) y consideramos a dicha recta como un vector $[\rho]$, cuyo índice esté en el móvil y su punto de aplicación en el citado punto fijo, es evidente que el valor modular, dirección y sentido del mismo dependerán del tiempo o instante del movimiento que se considere, y habremos constituido una función gráfica, dependiente de dicha variable algébrica; esta función $[\rho] = F(t)$, cuya indicatriz es la trayectoria del móvil, por su manera de originarse y por el papel que desempeña, la llamaremos *función gráfica del movimiento* del punto considerado.

186. Desplazamientos elementales del punto móvil.—Supongamos sea M (fig. 88) la posición de un punto sobre su trayectoria en el instante correspondiente al valor t del tiempo, y M' la posición, infinitamente próxima a la primera, correspondiente al tiempo $t' = t + dt$; este cambio de posición del móvil origina en la función gráfica del movimiento los incrementos elementales (lineal, angular y areolar) que se han dado a conocer en la teoría de las funciones gráficas (**154**) y que en estos casos se distinguen

con el nombre de *desplazamientos elementales* del móvil, correlativos con el incremento $dt = t' - t$ que ha experimentado la variable t.

Así se dirá que, en el expresado tiempo $t' - t = dt$, el móvil ha efectuado un desplazamiento *lineal* $[MM'] = d[\rho] = [de]$, otro *angular* $d\psi = ang.^o\ M\,o\,M'$, representado vectorialmente por el segmento $[o\,\delta_1] = d[\psi]$, y otro *areolar* $dA = área\ M\,o\,M'$, representado geométricamente por el segmento $[o\,\delta_2] = d[A]$. (*)

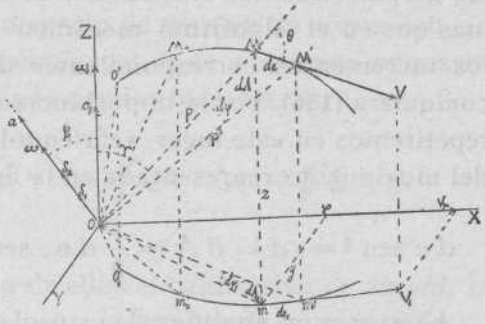


Fig. 88

De un modo general representaremos por el símbolo $d[E]$ a uno cualquiera de los desplazamientos elementales de un punto móvil, cuando no sea necesario particularizar la naturaleza del que se considere.

187. Observación.—Entre el desplazamiento lineal de un punto y los angulares y areolares existe la diferencia esencial de que estos últimos dependen del polo que se elija para la función gráfica del movimiento, en tanto que el primero es independiente de dicha circunstancia y está representado, en todos los casos, por el elemento lineal de la trayectoria descrita por el móvil.

(*) Supondremos por ahora que, como ocurre en los movimientos ordinarios que vamos a estudiar, la relación entre los arcos, ángulos y áreas descritos por un punto móvil y el tiempo sea de forma tal que los desplazamientos elementales definidos sean infinitesimales del mismo orden que el incremento $t' - t = dt$ de la variable t. Las dos posiciones M y M', correspondientes a los valores t y $t' = t + dt$, suelen llamarse *consecutivas*.

188. Relaciones entre los desplazamientos elementales de un punto y expresión de los mismos en función de las coordenadas del móvil. — Las relaciones existentes entre los desplazamientos elementales de un punto, son las mismas que en el Algoritmo mecánico se establecieron para los incrementos correspondientes de una función gráfica cualquiera (**156**); por la importancia de tales relaciones las repetiremos en este lugar, refiriéndolas a la función gráfica del movimiento representada en la figura 88

$$d\,e\,\operatorname{sen}\theta = \rho\,d\psi\,,\quad dA = \frac{1}{2}\,d\,e\,\rho\,\operatorname{sen}\theta\,,\quad dA = \frac{1}{2}\,\rho^2\,d\psi\,.$$

La expresión analítica de estos desplazamientos, en función de las coordenadas del móvil, es

$$d\,e = \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2}\,,$$

$$d\psi = \frac{d\,e\,\operatorname{sen}\theta}{\rho} =$$

$$= \frac{\sqrt{(y\,d\,z - z\,d\,y)^2 + (z\,d\,x - x\,d\,z)^2 + (x\,d\,y - y\,d\,x)^2}}{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

$$dA = \frac{1}{2}\,\rho^2\,d\psi =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2}.$$

En el caso de trayectorias planas, situadas en el plano coordenado XY, se simplifican las fórmulas anteriores, convirtiéndose en

$$d\,e = \sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}\,,\quad d\psi = \frac{x\,d\,y - y\,d\,x}{x^2 + y^2}\,,$$

$$dA = \frac{1}{2}\,(x\,d\,y - y\,d\,x)\,.$$

189. Desplazamientos finitos del punto móvil.—La suma algebraica de los desplazamientos elementales que, en un tiempo cualquiera $\Delta t = t_2 - t_1$, experimenta un móvil, constituye los *desplazamientos finitos* del mismo, correspondientes a dicho intervalo de tiempo; la expresión analítica de estos desplazamientos, que no tienen representación vectorial, está dada por las fórmulas

$$e = \int_D de, \quad \psi = \int_D d\psi, \quad A = \int_D dA,$$

dándosele a cada uno de ellos el calificativo de *lineal, angular* o *areolar* que por su naturaleza le corresponda.

El desplazamiento lineal correspondiente a un tiempo finito, $\Delta t = t_2 - t_1$, está constituido por la longitud del arco recorrido por el móvil sobre su trayectoria en el tiempo Δt, y del mismo modo, los desplazamientos angulares y areolares correspondientes al mismo intervalo de tiempo, expresan el ángulo o el área que determinan, en el desarrollo plano de la superficie de situación de la función gráfica del movimiento, las posiciones del vector $[\rho]$ en los instantes extremos t_1 y t_2 del indicado intervalo de tiempo.

Para medir los desplazamientos finitos de un móvil se señala, en la función gráfica del movimiento, una posición conocida del vector $[\rho]$ y a partir de esta posición $o\,o'$ (figura 88) se cuentan los desplazamientos lineales, angulares y areolares que el móvil efectúa en su recorrido.

190. Movimientos rotatorios.—Cuando la trayectoria seguida por un móvil, en un tiempo cualquiera, es un arco de círculo, el movimiento se llama *de rotación* alrededor del centro del expresado arco o *del eje* determinado por la perpendicular al plano de la trayectoria en el citado centro.

Aplicando esta definición a un intervalo de tiempo infinitesimal, se deduce que el paso del móvil de una posición

cualquiera M a la siguiente M', puede considerarse como una rotación alrededor de infinitos centros y ejes, correspondientes a los infinitos círculos que tengan común con la trayectoria el elemento lineal MM' recorrido por el móvil en el tiempo $t' - t = dt$; los centros y los ejes de todas estas rotaciones elementales están situados en el plano normal a la trayectoria en el elemento MM'.

Cuando los planos normales sucesivos de la trayectoria pasan todos por una misma recta (en cuyo caso la trayectoria será necesariamente circular) y se consideran las rotaciones sucesivas alrededor de dicha recta, se dice que la rotación del móvil es *permanente* y este mismo calificativo se aplica al eje y al centro del movimiento.

Si los planos normales indicados pasan todos por un punto (en cuyo caso la trayectoria será necesariamente una curva esférica) y se consideran las rotaciones elementales sucesivas alrededor de dicho punto, se dice que el movimiento consiste en una serie de *rotaciones instantáneas de centro fijo* alrededor de los diversos ejes que, pasando por dicho punto, corresponden a los desplazamientos rotatorios elementales; los ejes de estos movimientos elementales se llaman también *ejes instantáneos de rotación.*

Cuando los planos normales de la trayectoria no cumplan las condiciones que se han expresado, los movimientos finitos del móvil, podrán suponerse como resultado de una serie de rotaciones sucesivas, pero estas rotaciones se verifican alrededor de *ejes instantáneos sin condición especial,* expresando con esta frase la particularidad de no ser concurrentes.

191. Diversas formas de considerar el movimiento de un punto.—Los cambios de posición de un punto en el espacio y las distintas circunstancias que le acompañan, se estudian en Cinemática desde varios puntos de vista, que se presentan con más o menos facilidad, en los diversos

casos, a deducir las propiedades del movimiento. El fundamento de estos diferentes métodos consiste en relacionar con el tiempo alguna *magnitud espacial* (longitudes, ángulos, áreas, etc.) que se imagine engendrada, con sujeción a reglas determinadas, por los cambios de posición del móvil, y aun cuando el movimiento del punto sea siempre el mismo, cualquiera que sea la forma de considerarlo, recibe, sin embargo, nombres distintos, según sea la naturaleza de la magnitud espacial que se relaciona con el tiempo, para realizar el indicado estudio.

Cuando dicha magnitud esté constituida por los desplazamientos lineales que el móvil efectúa sobre su trayectoria, el movimiento del punto se llama *lineal* y el mismo nombre se aplica a las diversas circunstancias que de dicha consideración se deduzcan.

Si la magnitud espacial relacionada con el tiempo se refiere a los desplazamientos angulares o areolares del móvil, el movimiento del punto se distingue con los nombres de *angular* o *areolar* y estas mismas denominaciones se aplican a las diversas circunstancias que de esta consideración puedan deducirse.

En los movimientos angulares y areolares reciben el nombre de *centro* y *ejes* de los mismos, el polo de la función gráfica del movimiento y las rectas de posición de los vectores representativos de los desplazamientos correspondientes.

II

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UN PUNTO

192. Definiciones.—Las relaciones que en cada caso se establezcan entre las magnitudes espaciales engendradas por un punto móvil y el tiempo empleado en originarlas,

reciben el nombre de *ecuaciones del movimiento* de dicho punto.

La forma general de estas ecuaciones será $F(E\,t) = o$, convirtiéndose en las expresiones

$$F(e\,t) = o,\ F(\Downarrow t) = o \text{ o } F(A\,t) = o,$$

según que se trate de estudiar el movimiento desde los puntos de vista lineal, angular o areolar.

Las representaciones gráficas de la ecuación $F(E\,t) = o$ se llaman *diagramas espaciales* del movimiento y su construcción suele ser útil para poner de manifiesto, con claridad y rapidez, determinadas propiedades, como veremos al estudiar los detalles de este asunto.

193. Condiciones generales de las ecuaciones del movimiento.—Hemos *admitido* anteriormente que los desplazamientos elementales de un punto eran infinitesimales del mismo orden que el incremento correspondiente del tiempo, $t' - t = d\,t$, y esta hipótesis equivale a suponer que las ecuaciones del movimiento sean funciones *continuas* de t, para todos los valores de esta variable comprendidos entre los instantes correspondientes a las posiciones extremas del punto móvil.

En la práctica tiene lugar la expresada circunstancia en la inmensa mayoría de los movimientos que observamos; pero existen algunos, de carácter especial, en los cuales no se verifica la expresada continuidad: estos movimientos extraordinarios suelen ser fácilmente reconocidos y en ellos no se pueden aplicar, sin previo examen, las consecuencias que deduzcamos, basadas en la continuidad de las ecuaciones del movimiento. En el lugar correspondiente de la Dinámica nos ocuparemos de algunos detalles referentes a estos movimientos especiales a que estamos aludiendo.

En los movimientos angulares y areolares puede ocurrir que la ecuación $F(E\,t) = o$ deje de ser continua, para

algunos valores de t, sin tratarse de movimientos extraordinarios, por la situación inconveniente que se haya elegido para el polo de la función del movimiento; pero como dicha situación es arbitraria y podemos cambiarla cuando nos convenga, supondremos en lo que sigue que la continuidad de la ecuación $F(E\,t) = o$ tiene lugar para todos los movimientos que en esta parte de la Mecánica tengamos necesidad de estudiar.

Como segunda condición, que deben satisfacer las ecuaciones del movimiento de un punto, es la de ser siempre de primer grado respecto a la magnitud espacial E, pues lo contrario indica la posibilidad de ocupar un móvil distintas posiciones en el mismo instante y esto es absurdo suponerlo. En cambio, respecto a t pueden ser de cualquier grado, pues nada impide que el móvil pase repetidas veces, en tiempos distintos, por una posición determinada.

Siendo las ecuaciones del movimiento de primer grado respecto a E, podrá despejarse esta variable y expresarlas en la forma

$$E = E_o + f(t)\,,$$

representando por E_o el término independiente de t que resulte en el segundo miembro, y cuyo término representa el valor del espacio E correspondiente a la anulación del tiempo. Cuando no sea necesario poner de manifiesto el término E_o en las ecuaciones del movimiento, se dejan en la forma $E = f(t)$, teniendo en cuenta que ahora se convertirá $f(t)$ en E_o, cuando se sustituya el valor $t = o$.

194. Clasificación de los movimientos por la naturaleza de las ecuaciones del mismo.—Las ecuaciones del movimiento de un punto pueden ser, como hemos dicho, de cualquier grado respecto a t y esto da lugar a la siguiente clasificación de movimientos: cuando dicha ecuación sea de primer grado, el movimiento es *uniforme*; si es de se-

gundo grado se llama *uniformemente variado*, y en todos los demás casos se dice que es *variado*.

Debe observarse, que el ser un movimiento de una u otra clase, desde uno de los tres puntos de vista que vamos a emplear para estudiar sus circunstancias, no quiere decir que pertenezca a la misma clase desde los otros dos, pues el grado de la ecuación $E = f(t)$ puede ser, y lo es en general, diferente, según que el símbolo E represente los arcos de trayectoria, los ángulos o las áreas descritas por el móvil en su recorrido.

Entre los movimientos variados hay algunos que reciben nombres especiales y uno de los grupos más interesantes es el constituido por los movimientos llamados *periódicos*, que son todos aquellos en que la magnitud espacial E es función periódica de la variable t, llamándose *período*, en estos movimientos, los intervalos de tiempo, iguales entre sí, en que el móvil pasa por las mismas posiciones y en idénticas condiciones.

Según las definiciones anteriores la expresión general de los movimientos uniformes será de la forma

$$E = E_0 + W \cdot t$$

y la de los uniformemente variados

$$E = E_0 + W_0 t + \frac{1}{2} K t^2,$$

teniendo cada uno de los coeficientes de estas ecuaciones una significación especial que más adelante puntualizaremos.

195. Propiedad característica de los movimientos uniformes.—La relación que liga a la magnitud espacial E con el tiempo t, en los movimientos uniformes, permite establecer la siguiente propiedad que caracteriza a estos movimientos:

En todo movimiento uniforme los espacios recorridos por el móvil son proporcionales a los tiempos empleados en recorrerlos; en efecto, el arco, ángulo o área del recorrido en el tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, en los movimientos de dicha naturaleza, estarán expresados por la fórmula

$$E_2 - E_1 = W(t_2 - t_1)$$

y por consiguiente

$$\frac{E_2 - E_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta E}{\Delta t} = W = \textit{constante.}$$

La propiedad característica que se acaba de demostrar, constituye la definición ordinaria de los *movimientos uniformes,* siendo evidente que, al verificarse, la ecuación del movimiento correspondiente será de *primer grado* respecto al tiempo.

La relación constante $\frac{\Delta E}{\Delta t} = W$ recibe el nombre de *velocidad* en esta clase de movimientos (lineal, angular o areolar) y está representada por el coeficiente de t en la ecuación del movimiento, cuando se despeja en ella el valor de E (*).

La propiedad demostrada permite reconocer con facilidad los movimientos uniformes, considerando diversos espacios recorridos y comparándolos con los tiempos empleados en recorrerlos.

De ella también se deduce que, conocido el valor de la velocidad, se determinará el espacio recorrido por el móvil, en un movimiento uniforme, multiplicando dicha velocidad por el tiempo que haya durado el movimiento.

(*) Este concepto de la velocidad solo es aplicable a los movimientos uniformes; para los demás se considera esta magnitud mecánica desde un punto de vista más general, teniendo carácter vectorial, en la forma que pronto hemos de ver.

196. Determinación de las posiciones del móvil utilizando la ecuación de su movimiento lineal. — Sean

$$F_1(x\,y\,z) = 0\,, \quad F_2(x\,y\,z) = 0\,,$$

o

$$y = F_1(x)\,, \quad z = F_2(x)$$

las ecuaciones de la trayectoria, y o' (fig. 88) el origen señalado en la misma, para contar los arcos recorridos por el móvil. Representemos por $e = e_0 + f(t)$ la ecuación del movimiento lineal del punto y con estos datos vamos a determinar la posición del móvil en un instante cualquiera.

Si en la ecuación del movimiento hacemos $t = o$, se obtiene la *posición inicial* del móvil (*) midiendo sobre la trayectoria el arco $o' M_0 = e_0 + f(o) = e_0$, y lo mismo haríamos para otro valor cualquiera de t, tomando el arco $o' M = e_0 + f(t)$; pero no siendo en general rectilíneas las trayectorias, resulta más cómodo calcular las coordenadas del móvil en función de t y, determinadas estas coordenadas, señalar la posición correspondiente, sin necesidad de medir las longitudes de los arcos sobre la trayectoria.

El expresado cálculo se efectúa combinando la ecuación

$$e - e_0 = \int_D \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

con la $e - e_0 = f(t)$, tomando sucesivamente en la primera por variable independiente cada una de las tres coordenadas del móvil; así resultará

$$\int_{x_0}^{x} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = f(t)\,,$$

(*) La posición correspondiente a $t = o$ suele llamarse *inicial*, por establecerse generalmente las ecuaciones de modo que el valor del tiempo $t = o$ coincida con el principio del movimiento. Si esta circunstancia no tiene lugar resulta impropia la denominación, pero sigue empleándose en el mismo sentido.

de donde podrá despejarse, mediante las ecuaciones de la trayectoria, la coordenada $x = f_1(t)$, y lo mismo se obtendrían

$$y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

Las tres ecuaciones encontradas resuelven el problema propuesto y es evidente que los términos independientes de t, en sus segundos miembros, representarán las coordenadas iniciales del móvil, pues serán los valores que tomarán x, y y z para $t = o$: poniendo de manifiesto las coordenadas de la posición inicial, se dará a las ecuaciones encontradas la forma

$$x = x_o + f_1(t), \quad y = y_o + f_2(t), \quad z = z_o + f_3(t).$$

Cuando se trate de movimientos planos, situados en alguno de los coordenados, bastarán dos ecuaciones para determinar las posiciones del móvil y en los movimientos rectilíneos, sobre los ejes, será suficiente con una sola para el mismo objeto.

197. Movimientos coordenados de un punto.—Las fórmulas encontradas en el número anterior representan las ecuaciones del movimiento de la proyección del móvil sobre los ejes correspondientes; por esta razón se les da el nombre de *ecuaciones del movimiento lineal proyectado sobre los ejes*, y por lo mismo se llaman *movimientos coordenados cartesianos* del móvil a los definidos por dichas tres ecuaciones, y fácilmente se concibe la posibilidad de deducir las propiedades del movimiento de un punto en el espacio, por las que presenten los indicados movimientos coordenados.

Cuando las ecuaciones de la trayectoria se expresen en coordenadas esféricas (fig. 89), se podrán calcular de un

modo análogo, en función de t, los valores de las coordenadas

$$\rho = \rho_0 + f_1(t), \quad \varphi = \varphi_0 + f_2(t), \quad \theta = \theta_0 + f_3(t),$$

empleándose estas ecuaciones con el mismo objeto que las de los movimientos proyectados sobre los ejes cartesianos y recibiendo, los movimientos especiales que representan, los nombres de *movimientos coordenados esféricos.*

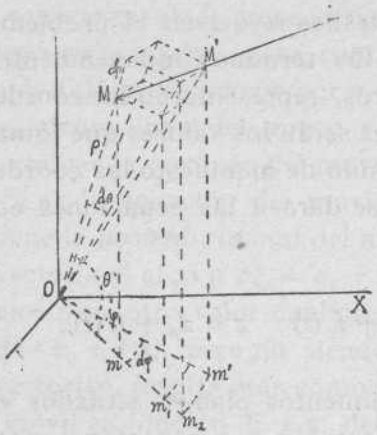


Fig. 89

198. Determinación de la trayectoria cuando se conocen los movimientos coordenados de un punto.—La eliminación de la variable t, entre las ecuaciones de los movimientos coordenados de un punto, conducirá a dos ecuaciones, independientes de dicho parámetro, que quedarán satisfechas por las coordenadas del móvil en todas sus posiciones y representarán la trayectoria del mismo.

Conocidas las ecuaciones de esta línea, se podrán encontrar sus diversas circunstancias de curvatura, concavidad o convexidad, etc., en uno cualquiera de sus puntos, por los procedimientos estudiados en las aplicaciones geométricas del Cálculo diferencial; pero si dichas circunstancias se quieren obtener en función del tiempo, para cada posición del móvil, observaremos que las ecuaciones del movimiento proyectado sobre los ejes cartesianos no son otra cosa que las ecuaciones de proyección **(165)** de la función gráfica del movimiento y ya hemos visto en el Algo-

ritmo mecánico cómo pueden determinarse, en función de la variable t, las ecuaciones del plano osculador, tangentes, plano normal, radio de curvatura, etc , de la indicatriz de una función gráfica cualquiera que, en los casos de funciones de movimiento, representan las trayectorias seguidas por los puntos móviles.

199. Determinación de la ecuación del movimiento lineal sobre la trayectoria, cuando se conocen los movimientos coordenados de un punto. – Supongamos conocidas las ecuaciones

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t);$$

sustituyendo en

$$e - e_0 = \int_D \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

los valores de dx^2, dy^2, dz^2, deducidos de las tres ecuaciones anteriores, resultará

$$e - e_0 = \int_D f'(t)\, dt = f(t),$$

que es la ecuación del movimiento lineal que buscábamos. Análogamente se procedería si partiéramos de los movimientos coordenados esféricos o expresados en otro sistema de coordenadas.

200. Determinación de las posiciones de un punto utilizando la ecuación de su movimiento angular. – Para resolver este problema, determinando las coordenadas del móvil, utilizaremos la relación $de \cdot \operatorname{sen} \theta = \rho\, d\psi$ **(188)**, de la que se deduce $\psi - \psi_0 = \pi(x)$, mediante el empleo de las ecuaciones de la trayectoria, que se suponen conocidas; lo mismo se determinarían

$$\psi - \psi_0 = \pi_2(y), \quad \psi - \psi_0 = \pi_3(z)$$

y sustituyendo en los primeros miembros el valor $\psi - \psi_0 = f(t)$, deducido de la ecuación del movimiento angular, se obtendrán los movimientos coordenados cartesianos del punto móvil.

201. Determinación de las posiciones de un punto utilizando la ecuación de su movimiento areolar. — Se resuelve este problema como el anterior, partiendo de la relación **(188)** $dA = \frac{1}{2} de\, \rho \operatorname{sen} \theta$, que integrada nos dá $A - A_0 = \pi_1(x)$ y lo mismo

$$A - A_0 = \pi_2(y), \quad A - A_0 = \pi_3(z);$$

con estas ecuaciones y la del movimiento areolar, $A - A_0 = f(t)$, se obtienen los movimientos coordenados cartesianos del punto considerado.

Observación.—En los problemas anteriores se ha supuesto el caso general de trayectorias cualesquiera en el espacio; cuando el movimiento sea plano o rectilíneo, se tomará el sistema coordenado en relación con dichos datos y se simplificarán notablemente los cálculos.

202. Movimiento de la proyección del móvil sobre los planos coordenados.—Análogamente a lo dicho sobre el movimiento proyectado en los ejes coordenados, se comprende que deberán existir ciertas relaciones entre el movimiento de un punto en el espacio y el de su proyección sobre un plano cualquiera; refiriéndonos a los coordenados, se ve que estos movimientos proyectados están determinados por la combinación, de dos en dos, de las tres ecuaciones de proyección sobre los ejes y del estudio de estas ecuaciones, agrupadas en la forma dicha, se podrán deducir las trayectorias y los movimientos lineal, angular y areolar de las referidas proyecciones, así como los elementos de la función gráfica plana que les corresponde.

Concretándonos, por ejemplo, al plano $X\ Y$, se partirá de las ecuaciones $x = f_1(t)$ e $y = f_2(t)$; eliminando a t, resultará $F(x\ y) = o$ para ecuación de la trayectoria de la proyección del móvil, y aplicando las fórmulas conocidas, se obtendrán las ecuaciones

$$e - e_o = \int_D \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_D f'(t)\, dt = f(t)\ ,$$

$$\psi - \psi_o = \int_D \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2 + y^2} = \int_D f'(t)\, dt = f(t)\ ,$$

$$A - A_o = \frac{1}{2} \int_D (x\, dy - y\, dx) = \int_D f'(t)\, dt = f(t)\ ,$$

que representan el movimiento lineal, angular y areolar de la proyección del móvil sobre el indicado plano coordenado.

203. Resolución gráfica del problema de la determinación de las posiciones del móvil en algunos casos especiales.—Suponiendo una trayectoria rectilínea situada en el plano $X\ Y$ (fig. 90), se calcularán, por la ecuación del movimiento lineal, los segmentos

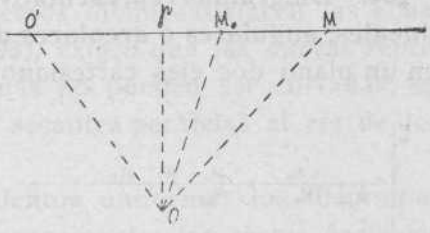


Fig. 90

$$o'\ M = e = e_o + f(t)$$

correspondientes a un instante cualquiera y podrán señalarse en el papel las distintas posiciones del móvil.

La ecuación del movimiento angular permitirá calcular el ángulo

$$o' o M = \psi = \psi_0 + f(t)$$

para cada valor de t y, con el uso del transportador, se señalarán las posiciones correspondientes al punto móvil.

De la ecuación del movimiento areolar se deducirán las áreas de los triángulos

$$o' o M = A = A_0 + f(t)$$

y calculadas estas áreas, bastará dividirlas por el factor constante $\frac{o p}{2}$, para obtener la distancia $o' M$ que separa al móvil, en cada instante, del origen tomado sobre la trayectoria.

En todos los casos anteriores, si se empieza por señalar la posición inicial del móvil M_0, se podrán medir en la figura las longitudes, ángulos y áreas descritos por el móvil, desde que empezó el movimiento hasta un instante cualquiera.

204. Diagramas representativos de los desplazamientos lineales, angulares o areolares de un punto. — Si trazamos en un plano dos ejes cartesianos rectangulares (independientes del sistema de referencia de la trayectoria) y consideramos a uno de ellos como eje de los tiempos y al otro de los espacios (figura 91), podremos hacer la representación gráfica de la ecuación

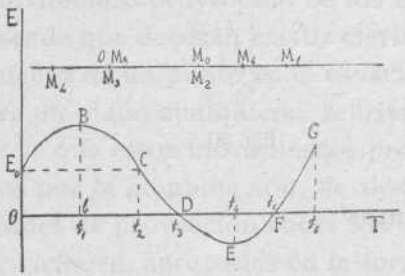


Fig. 91

$$E = E_0 + f(t)$$

y de esta representación, llamada *diagrama* de los despla-

zamientos o de los espacios recorridos por el móvil, deducir las posiciones del punto en un instante cualquiera y, recíprocamente, averiguar los instantes en que el móvil pasa por posiciones determinadas.

La construcción de los diagramas es sumamente útil para apreciar, a la simple inspección de la figura, un gran número de circunstancias del movimiento; así, en el caso de la figura 91 y suponiendo que los desplazamientos son lineales, se ve que el móvil partió de su posición inicial M_0, alejándose hacia la derecha hasta el instante t_1 en que cambió el sentido de su movimiento; en el instante t_2 volvió a pasar por la posición inicial y continuando su retroceso llegó al origen o', en el instante t_3; se alejó después hacia la izquierda del mismo, hasta el instante t_4 en que volvió a cambiar de sentido la marcha, pasando otra vez por el origen en el instante t_5 y terminando el movimiento en el tiempo t_6 (*). La situación de los puntos en que tuvieron lugar los cambios de marcha, estará dada por las ordenadas de B y E en el diagrama, así como la de G señala la posición final del movimiento M_6.

Las condiciones que hemos dicho satisfacen las ecuaciones del movimiento **(193)**, exigen que las curvas representativas de los diagramas no pueden ser cortadas, en más de un punto, por las secantes paralelas al eje de los espacios.

En el caso de movimientos uniformes los diagramas resultan rectilíneos y recíprocamente; las rectas paralelas al eje oT constituyen la representación del reposo y fácil es ver que las paralelas al eje oE representan movimientos absurdos.

Los diagramas espaciales de los movimientos uniformemente variados **(194)**

(*) Los segmentos de la trayectoria están en escala doble que las ordenadas del diagrama.

$$E = E_0 + W_0 t + \frac{1}{2} K t^2$$

son parábolas de segundo grado con su eje paralelo al de los espacios; las particularidades de estas parábolas se interpretan en la forma general antes dicha, para deducir las correlativas del movimiento del punto.

205. Puntos de encuentro de dos móviles sobre la misma o distinta trayectoria.—Conocidas las ecuaciones del movimiento de dos móviles sobre la misma trayectoria.

$$E = E_0 + f_1(t) \quad \text{y} \quad E' = E'_0 + f_2(t)$$

es evidente que las raices de la ecuación

$$f_1(t) - f_2(t) = E'_0 - E_0$$

indicarán los instantes en que los dos móviles están a la misma distancia del origen y señalarán los puntos de encuentro que se buscan.

Las distancias de los puntos de encuentro al origen se calcularán sustituyendo dichas raíces en cualquiera de las dos ecuaciones de partida, suponiendo se refieran al movimiento lineal de los dos puntos; en caso contrario las ecuaciones proporcionarán los ángulos o áreas que corresponden a los puntos de encuentro.

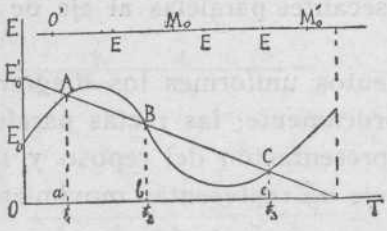


Fig. 92

Si se tienen construidos los diagramas espaciales de los dos movimientos (fig. 92), se verá que los dos móviles se encuentran en los instantes t_1, t_2 y t_3, y que la distancia del origen o' a los puntos de encuentro E_1, E_2 y E_3, estarán

dadas por las ordenadas $a\,A$, $b\,B$ y $c\,C$ de los diagramas.

Cuando los puntos se mueven sobre trayectorias distintas es preciso, para que haya encuentro, que coincidan los dos en el paso por la intersección de las trayectorias y esta circunstancia se expresa, tomando dicho punto por origen, por la condición de tener raíces comunes las ecuaciones

$$E_o + f_1(t) = o \quad \text{y} \quad E'_o + f_2(t) = o\,.$$

Supongamos, por ejemplo, que los dos movimientos sean linealmente uniformes, con velocidades v_1 y v_2; las ecuaciones anteriores se convierten en

$$e_o + v_1 t = o, \quad e'_o + v_2 t = o$$

y la condición de compatibilidad estará expresada por la relación $\frac{e_o}{v_1} = \frac{e'_o}{v_2}$; si ésta no se cumple los dos móviles pasan en distinta época por el punto de intersección de las trayectorias.

206. Problema. — *Averiguar la distancia mínima a que estarán dos móviles que recorren con movimiento uniforme trayectorias rectilíneas y perpendiculares.* La distancia a que están en un instante cualquiera es

$$\delta = \sqrt{e^2 + e'^2} = \sqrt{(e_o + v_1 t)^2 + (e'_o + v_2 t)^2}$$

y el mínimo de esta distancia corresponde al valor de t que verifique la ecuación $\frac{d\delta}{dt} = o$, o sea $t = -\frac{e_o v_1 + e'_o v_2}{v_1^2 + v_2^2}$;

el valor del mínimo que se busca es $\delta_o = \frac{e_o v_2 - e'_o v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$, que se reduce a *cero*, indicando el encuentro de los móviles, cuando sea $\frac{e_o}{v_1} = \frac{e'_o}{v_2}$.

207. Gráficos de marcha.—Los diagramas del movimiento que corresponden a diversos móviles que recorren una misma trayectoria, en la cual se disponen puntos especiales de parada y apartaderos para dar el paso a unos u otros, evitando los encuentros o choques en el mismo lugar, reciben el nombre de *gráficos de marcha* de los citados móviles; estos gráficos son muy empleados en las redes de ferrocarriles y se utilizan igualmente por los jefes de columnas de operaciones, para abarcar de una ojeada las horas y puntos de descanso de las diversas fracciones o escalones que componen la columna puesta a sus órdenes.

III

TEORÍA DE LAS VELOCIDADES EN EL MOVIMIENTO DE UN PUNTO

208. Definiciones.—Las derivadas lineal, angular y areolar de la función gráfica del movimiento de un punto, correspondientes a una posición cualquiera M del móvil (figura 88), reciben en Cinemática los nombres respectivos de *velocidad lineal*, *velocidad angular* y *velocidad areolar* del expresado móvil, *en el instante* que se considere.

Estos tres vectores, cuyo punto de aplicación, línea de acción y sentido nos son conocidos, se representan por los símbolos $[v]$, $[\omega]$ y $[a]$ y sus valores algébricos están dados por las expresiones **(157)**

$$v = \frac{d[\rho]}{dt} = \frac{de}{dt}, \quad \omega = \frac{d\psi}{dt}, \quad a = \frac{dA}{dt}.$$

Cuando nos refiramos a una cualquiera de estas tres velocidades, sin precisar la que sea, nos serviremos del

símbolo $[W] = \frac{d\,[E]}{d\,t}$, que puede representar a cualquiera de ellas.

En el lenguaje ordinario se aplica la palabra *velocidad*, para designar la mayor o menor rapidez con que un móvil se traslada de un punto a otro y fácil es ver que el concepto cinemático de esta magnitud mecánica, está de acuerdo con su significación vulgar, pues el valor modular de los coeficientes diferenciales

$$\frac{d\,e}{d\,t}, \quad \frac{d\,\psi}{d\,t}, \quad \frac{d\,A}{d\,t}$$

indica y da, en cada caso, perfecta idea de la rapidez conque el móvil verifica sus desplazamientos, por ser evidente que, al comparar diversos movimientos, tendrán mayores valores las expresiones anteriores en aquellos móviles que efectúen, en el mismo tiempo $d\,t$, mayores desplazamientos.

La representación vectorial de las velocidades proporciona, además, la ventaja de indicar la dirección del movimiento, sin contar las muchas aplicaciones que de dicha representación se hace en toda la Mecánica.

Se llaman *velocidades medias* de un punto, en un intervalo de tiempo finito $\Delta\,t = t_2 - t_1$, al cociente que resulte de dividir los desplazamientos efectuados por el móvil, en dicho intervalo de tiempo, por el valor del mismo tiempo; la expresión general de las velocidades medias es

$$W_m = \frac{E_2 - E_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\,E}{\Delta\,t},$$

y de esto se deduce que las velocidades antes definidas son en realidad velocidades medias, correspondientes a intervalos de tiempo infinitamente pequeños y por tal motivo se les da el nombre de velocidades *en el instante* o *posición* que les corresponda.

En los movimientos uniformes resultará constante la velocidad media, correspondiente a intervalos de tiempo cualesquiera, y esta constante es el valor algébrico del coeficiente diferencial, $\frac{dE}{dt}$, en la expresión $E = E_0 + Wt$, justificándose con esto el nombre dado a la relación $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ al demostrar la propiedad característica de los movimientos uniformes **(195)**.

209. Relaciones que ligan a las velocidades lineal, angular y areolar de un punto.—Son las mismas que para estas derivadas se establecieron en la teoría de las funciones gráficas **(158)** y que repetimos en este lugar:

$$v \operatorname{sen} 0 = \rho \cdot \omega, \; a = \frac{1}{2} v \rho \operatorname{sen} 0, \; a = \frac{1}{2} \rho^2 \omega,$$

recordando que *el vector* [a] *representa, en todos los casos, la mitad del momento de* [v] *respecto al polo del movimiento* y que en las trayectorias esféricas, con el polo en el centro de la esfera (movimientos rotatorios de centro fijo), es $\operatorname{sen} 0 = 1$ y *la velocidad lineal representa el momento del vector* [ω] *con relación al punto móvil.*

210. Velocidades de la proyección del móvil sobre un plano y sobre un eje.—Fundándonos en las relaciones establecidas **(159 y 160)** entre los elementos de una función gráfica y los de la misma función proyectada sobre un plano y un eje (fig. 88), podremos enunciar las siguientes propiedades:

1.ª *La velocidad lineal de la proyección del móvil sobre un plano o sobre un eje es igual a la proyección sobre el mismo plano o eje de la velocidad lineal del punto en el espacio.*

2.ª *La velocidad areolar de la proyección del móvil sobre un plano, se obtiene proyectando sobre el eje del*

movimiento areolar proyectado la velocidad areolar del punto en el espacio.

3.ª *La velocidad angular de la proyección del móvil sobre un plano no se corresponde por proyección con la velocidad angular del punto en el espacio.*—Entre estas velocidades angulares existe la relación demostrada en las funciones gráficas, $\omega_1 = \frac{\omega \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \gamma}$, para las derivadas angulares ω_1 y ω.

4.ª *En las trayectorias planas la velocidad lineal del móvil es constantemente paralela a un plano y, recíprocamente, si la velocidad lineal del punto es constantemente paralela a un cierto plano, la trayectoria del móvil es plana.*

5.ª *En los movimientos rectilíneos la velocidad lineal es constantemente paralela a una dirección y, recíprocamente, si la velocidad lineal de un punto es siempre paralela a una cierta dirección, la trayectoria del móvil es rectilínea.*

211. Componentes coordenadas de las velocidades de un punto.—Las proyecciones de las velocidades de un móvil, sobre los tres ejes coordenados, reciben el nombre de *componentes coordenadas cartesianas* de dichas velocidades, pudiéndose expresar en función del tiempo por las fórmulas

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f'_1(t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = f'_2(t), \quad v_z = \frac{dz}{dt} = f'_3(t),$$

para las tres proyecciones de la velocidad lineal (**169**);

$$p = \omega \cos \alpha = \frac{y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$q = \frac{z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}}{x^2+y^2+z^2}, \quad r = \frac{x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}}{x^2+y^2+z^2},$$

para las proyecciones de la velocidad angular (**176**), y

$$l = a\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right),$$

$$m = \frac{1}{2}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right), \quad n = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

para las de la velocidad areolar (**177**).

211'. Cuando se hace el estudio del movimiento en coordenadas esféricas, se forma con los incrementos infinitesimales del desplazamiento lineal del móvil, correspondientes a las tres variables ρ, φ y θ, un paralelepípedo rectángulo (fig. 89), cuyas tres aristas tienen por longitud $d\rho$, $\rho\cos\theta\, d\varphi$ y $\rho\, d\theta$, y si consideramos las proyecciones del vector $[v]$ sobre estas tres direcciones, se obtienen las *componentes coordenadas esféricas* de la velocidad, cuyos valores son

$$v_r = \frac{d\rho}{dt}, \quad v_\theta = \rho\cos\theta\frac{d\varphi}{dt}, \quad v'_\theta = \rho\frac{d\theta}{dt},$$

que reciben los nombres de *velocidad de resbalamiento, velocidad de circulación en longitud* y *velocidad de circulación en latitud* respectivamente.

En los movimientos planos, sobre el coordenado XY, se hará

$$z = \frac{dz}{dt} = o, \quad \theta = \frac{d\theta}{dt} = o,$$

convirtiéndose las fórmulas anteriores en

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f'_1(t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = f'_2(t),$$

$$r = \omega = \frac{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{x^2 + y^2},$$

$$n = a = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

$$v_r = \frac{d\rho}{dt}, \quad v_c = \rho\frac{d\varphi}{dt}.$$

La componente $v_c = \rho\frac{d\varphi}{dt}$ se llama en estos casos *velocidad de circulación* alrededor del punto *o*.

212. Proyecciones de la velocidad lineal sobre los ejes en función de las componentes coordenadas de (ω) en los movimientos rotatorios.—Ya hemos visto (**209**) que en estos movimientos la velocidad [v] representa en cada instante el momento de [ω] con relación al punto móvil, luego las proyecciones de [v] sobre los ejes coordenados serán los momentos de [ω] respecto a los tres paralelos a los coordenados que, en cada instante, se pueden trazar por la posición del móvil; aplicando las fórmulas de estos momentos (**34'**), se obtienen las siguientes

$$v_x = qz - ry, \quad v_y = rx - pz, \quad v_z = py - qx,$$

que resuelven el problema propuesto y son de frecuente aplicación en todo el curso de Mecánica.

Cuando el movimiento rotatorio sea de eje fijo y éste se confunda con el coordenado *o Z*, siendo $p = q = o$ y $r = \omega$ será

$$v_x = -\omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = o.$$

213. Medida de las velocidades.—Unidades.—Las velocidades son magnitudes derivadas de los espacios recorridos y del tiempo y se emplean para medirlas, como unidades, *las del movimiento que recorra uniformemente la unidad de espacio en la unidad de tiempo.*

En el sistema *cegesimal* se toma por unidad de velocidad lineal *el centímetro por segundo,* cuyas dimensiones son

$$\frac{L}{T} = L\,T^{-1};$$

por unidad de velocidad angular *el radiante por segundo,* representado por el símbolo

$$\frac{L^0}{T} = T^{-1},$$

y por unidad de velocidad areolar *el centímetro cuadrado por segundo,* cuya fórmula es

$$\frac{L^2}{T} = L^2\,T^{-1}.$$

Además de estas unidades teóricas, que no han recibido nombres especiales (*), se emplean

el metro por segundo $= 100\,L\,T^{-1}$,

el kilómetro por hora $= \frac{10^3}{36}\,L\,T^{-1}$,

la milla por hora $= \frac{1852}{36}\,L\,T^{-1}$,

la vuelta por segundo $= 2\,\pi\,T^{-1}$,

el grado por segundo $= \frac{\pi}{180}\,T^{-1}$,

el metro cuadrado por segundo $= 10^4\,L^2\,T^{-1}$.

(*) Hay, sin embargo, quien llama *cine* a la unidad cegesimal de velocidad lineal.

214. Determinación del movimiento cuando se conocen la trayectoria y la ecuación o la ley de las velocidades.—La relación que liga a las velocidades con el tiempo, en un movimiento cualquiera, se llama *ecuación o ley de las velocidades*, con el calificativo de *lineal*, *angular* o *areolar*, según la forma de considerar el movimiento.

La forma general de estas ecuaciones es

$$W = \frac{d\,E}{d\,t} = f'\,(t)$$

y vamos a ver cómo se determina el movimiento cuando se conoce esta ecuación y la trayectoria del punto móvil.

Supongamos primeramente que el movimiento sea lineal; la ley de las velocidades lineales será $v = \frac{d\,e}{d\,t} = f'\,(t)$, e integrando se obtiene

$$e = \int v\,d\,t = \int f'\,(t)\,d\,t = f\,(t) + c\,,$$

que es la ecuación del movimiento lineal del punto.

Para que la ecuación a que hemos llegado quede determinada, es preciso hacer desaparecer la indeterminación de la constante c, y esto exige conocer algún valor particular de e, correspondiente a otro determinado de t; generalmente se señala el valor $e = e_o$ correspondiente a $t = o$, o sea la posición inicial del móvil; con esta sustitución la ecuación obtenida se convierte en

$$e = e_o + f\,(t)$$

y el movimiento queda determinado.

Si se dan las componentes cartesianas de la velocidad en función del tiempo, se obtienen, por su integración, las ecuaciones de los movimientos proyectados sobre los ejes, siendo preciso fijar las coordenadas iniciales x_o, y_o, z_o del móvil, para que el movimiento quede determinado, sin necesidad de tener la trayectoria como dato.

Cuando se den las leyes de las velocidades angulares y areolares, se procede análogamente que en el caso anterior, pero el poco uso que se hace de las fórmulas generales de este problema nos dispensa de desarrollar su cálculo.

215. Velocidad en los movimientos uniformemente variados.—En los movimientos uniformemente variados se verifica la propiedad característica de ser *los incrementos de velocidad, correspondientes a intervalos de tiempo cualesquiera, proporcionales a estos intervalos de tiempo.* En efecto, de la ecuación general

$$E = E_0 + W_0 t + \frac{1}{2} K t$$

se deduce que la ley de las velocidades es $W = W_0 + K t$ y si son W_1 y W_2 las correspondientes a los instantes t_1 y t_2, se verificará

$$W_2 - W_1 = K (t_2 - t_1) \quad \text{o} \quad \frac{W_2 - W_1}{t_2 - t_1} = K = \textit{constante.}$$

La propiedad que se acaba de demostrar puede tomarse como definición de los movimientos *uniformemente variados,* siendo evidente que, cuando se verifique, la ecuación del movimiento será de *segundo grado* respecto al tiempo.

La relación $\frac{W_2 - W_1}{t_2 - t_1}$, representada por el coeficiente K, recibe el nombre de *aceleración* de los citados movimientos y expresa, multiplicada por el tiempo, el incremento de velocidad que adquiere el móvil entre dos instantes cualesquiera.

216. Representación gráfica de la ley de las velocidades.—Si se supone trazado el diagrama de los espacios de un movimiento y sobre los mismos ejes oT y oE se construye la curva $W = W_0 + f'(t)$, se podrá determinar gráfi-

camente (fig. 93) la velocidad del móvil en una posición o instante determinados y, recíprocamente, calcular los instantes o posiciones que corresponden a valores dados de la velocidad.

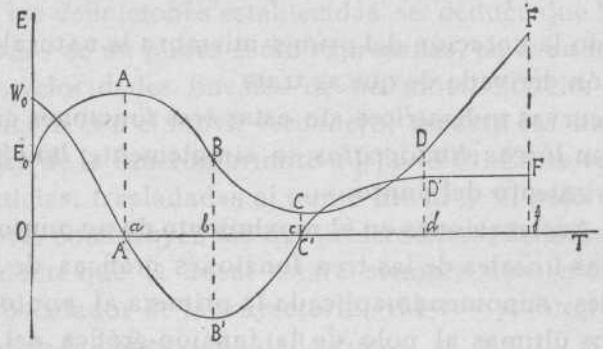


Fig. 93

Siendo la curva de las velocidades la derivada de la de los espacios, se podrá construir geométricamente por los procedimientos de derivación gráfica ya conocidos, o por puntos sustituyendo valores en la ecuación correspondiente.

IV

TEORÍA DE LAS ACELERACIONES EN EL MOVIMIENTO DE UN PUNTO

217. Funciones gráficas de las velocidades en el movimiento de un punto.—Líneas hodógrafas.—Suponiendo aplicados, en cada instante, en un punto cualquiera fijo (generalmente el mismo polo de la función del movimiento) los vectores representativos de las velocidades del móvil (fig. 94), se forman las *funciones gráficas de las velo-*

cidades de dicho punto, que no son otra cosa que las funciones derivadas de primer orden, de la función del movimiento $[\rho] = F(t)$; la expresión simbólica de dichas funciones es

$$[v] = F'(t)\,,\quad [\omega] = F'(t)\,,\quad [a] = F'(t)\,,$$

indicando la notación del primer miembro la naturaleza de la función derivada de que se trata.

Las curvas indicatrices de estas tres funciones gráficas se llaman *líneas hodógrafas*, o simplemente *hodógrafas* del movimiento del punto.

218. Aceleraciones en el movimiento de un punto.—Las derivadas lineales de las tres funciones gráficas de las velocidades, suponiendo aplicada la primera al punto móvil y las dos últimas al polo de la función gráfica del movimiento, constituyen tres vectores (figura 94) que reciben el nombre común de *aceleraciones* del movimiento del punto, distinguiéndose unas de otras por los calificativos de *lineal, angular* y *areolar*, según sea la naturaleza de la función de las velocidades de que procede.

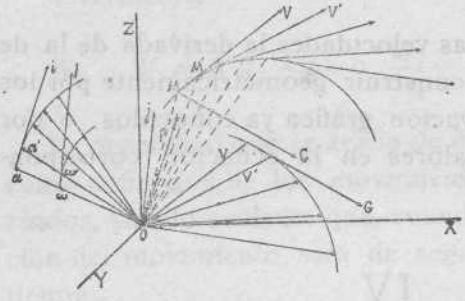


Fig. 94

La expresión simbólica de estos vectores es

$$[K] = \frac{d\,[W]}{d\,t}$$

para las tres aceleraciones en general, y emplearemos las notaciones

$$[G] = \frac{d[v]}{dt}\ ,\quad [j] = \frac{d[\omega]}{dt}\ ,\quad [i] = \frac{d[a]}{dt}\ ,$$

para representar a cada una de ellas, cuando sea necesario considerarlas separadamente.

De las definiciones establecidas se deduce que las aceleraciones de un punto están expresadas, en cada instante, por las velocidades lineales de un móvil ficticio, que en correlación con el móvil verdadero, recorra las líneas hodógrafas de la función primitiva $[\rho] = F(t)$. Estas velocidades ficticias, trasladadas al punto móvil y al polo del movimiento, constituyen las tres aceleraciones definidas; siendo evidente que la lineal estará siempre contenida en el plano osculador de la trayectoria (**164**-1.ª) y dirigida en el sentido de la concavidad de la curva.

En el lenguaje ordinario suele decirse que un movimiento es *acelerado* cuando su velocidad aumenta progresivamente y en este concepto la definición cinemática de las aceleraciones está conforme con la significación vulgar de esta palabra, pues los coeficientes diferenciales definidos, aparte de expresar la dirección en que se verifican los incrementos de la velocidad, indican explícitamente la propensión a variar en cada instante de dichas magnitudes mecánicas, permitiendo hacer la comparación directa de diversos movimientos y deducir en cuál de ellos se verifica con más o menos rapidez el aumento de velocidad.

Cuando las velocidades disminuyen, los movimientos son *retardados*; desde el punto de vista cinemático se expresa esta circunstancia por el cambio de signo de la aceleración, y aun cuando hay quien propone llamar *deceleraciones* a las aceleraciones negativas, se sigue usando el nombre de *aceleración* para unas y otras y este último será el que nosotros emplearemos.

219. Aceleraciones de la proyección del móvil sobre un pla-

no y sobre un eje.—De las relaciones que ligan a una función gráfica con los elementos de la que se obtiene proyectando dicha función sobre un plano o eje P se deducen las siguientes propiedades:

1.ª *La aceleración lineal de la proyección del móvil sobre un plano o sobre un eje es igual a la proyección sobre el mismo plano o eje de la aceleración lineal del punto del espacio;* puesto que

$$G_p = \frac{d\,[V_p]}{d\,t} = \frac{d\,[V]\cos \overline{G\,P}}{d\,t} = [G]\cos \overline{G\,P}\ (*).$$

2.ª *La aceleración areolar de la proyección del móvil sobre un plano se obtiene proyectando sobre el eje del movimiento areolar proyectado la aceleración areolar del punto en el espacio;* en efecto,

$$i_p = \frac{d\,[A_p]}{d\,t} = \frac{d\,[A]\cos \overline{a\,z}}{d\,t} = [a]\cos \overline{a\,z}.$$

3.ª *La aceleración angular de la proyección del móvil sobre un plano no se corresponde por proyección con la aceleración angular del punto en el espacio.*—Puesto que la aceleración angular del móvil proyectado sobre el plano $X\,Y$, por ejemplo, es $j_1 = \frac{d\,\omega_1}{d\,t}$ y la proyección del vector $[j]$ sobre el eje oZ es **(160)** $j_z = \frac{dr}{dt}$ y ya hemos visto **(210)** que entre ω_1 y r existe la relación

$$\omega_1 = \frac{\omega\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\gamma} = \frac{r}{\operatorname{sen}^2\gamma}.$$

(*) Obsérvese que el ángulo que forma $d\,[V]$ con el plano o eje P es el mismo que corresponde al vector $[G]$.

220. Componentes coordenadas de las aceleraciones.— Las proyecciones de los vectores $[K] = \frac{d\,[W]}{d\,t}$, sobre los ejes coordenados, son las *componentes coordenadas cartesianas* de las aceleraciones correspondientes; su expresión analítica está dada por las fórmulas **(211)**

$$G_x = \frac{d\,v_x}{d\,t} = \frac{d^2\,x}{d\,t^2} = f''_1\,(t)\,,$$

$$G_y = \frac{d\,v_y}{d\,t} = \frac{d^2\,y}{d\,t^2} = f''_2\,(t),$$

$$G_z = \frac{d\,v_z}{d\,t} = \frac{d^2\,z}{d\,t^2} = f''_3\,(t),$$

para las aceleraciones lineales;

$$j_x = \frac{d\,p}{d\,t} = \frac{\left(y\frac{d^2\,z}{d\,t^2} - z\frac{d^2\,y}{d\,t^2}\right) - 2\,p\left(x\frac{d\,x}{d\,t} + y\frac{d\,y}{d\,t} + z\frac{d\,z}{d\,t}\right)}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$j_y = \frac{d\,q}{d\,t} = \frac{\left(z\frac{d^2\,x}{d\,t^2} - x\frac{d^2\,z}{d\,t^2}\right) - 2\,q\left(x\frac{d\,x}{d\,t} + y\frac{d\,y}{d\,t} + z\frac{d\,z}{d\,t}\right)}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$j_z = \frac{d\,r}{d\,t} = \frac{\left(x\frac{d^2\,y}{d\,t^2} - y\frac{d^2\,x}{d\,t^2}\right) - 2\,r\left(x\frac{d\,x}{d\,t} + y\frac{d\,y}{d\,t} + z\frac{d\,z}{d\,t}\right)}{x^2 + y^2 + z^2},$$

para las angulares, y

$$\left.\begin{aligned} i_x &= \frac{d\,l}{d\,t} = \frac{1}{2}\left(y\frac{d^2\,z}{d\,t^2} - z\frac{d^2\,y}{d\,t^2}\right) \\ i_y &= \frac{d\,m}{d\,t} = \frac{1}{2}\left(z\frac{d^2\,x}{d\,t^2} - x\frac{d^2\,z}{d\,t^2}\right) \\ i_z &= \frac{d\,n}{d\,t} = \frac{1}{2}\left(x\frac{d^2\,y}{d\,t^2} - y\frac{d^2\,x}{d\,t^2}\right) \end{aligned}\right\} \text{ para las areolares.}$$

En los movimientos planos, sobre el coordenado $X\,Y$, se reducen las fórmulas anteriores a

$$G_x = \frac{d^2x}{dt^2} = f''_1(t), \quad G_y = \frac{d^2y}{dt^2} = f''_2(t),$$

$$j = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) - 2\omega\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)}{x^2 + y^2},$$

$$i = \frac{da}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

De las fórmulas de las componentes coordenadas del vector $[i]$ se deduce que este vector *representa, en el polo de la función del movimiento, la mitad del momento de la aceleración lineal aplicada al punto móvil,* del mismo modo que el vector $[a]$ representaba la mitad del momento de la velocidad lineal del móvil con relación al citado polo **(209)**.

221. Componentes tangencial y normal o centrípeta de la aceleración lineal.—Las proyecciones de la aceleración lineal de un punto sobre la tangente y sobre la normal principal de la trayectoria, en cada posición del móvil, se llaman *componentes tangencial y normal* de la referida aceleración; estas componentes son respectivamente la *radial* y *circular* de la derivada gráfica de segundo orden, que ha servido para definir al vector $[G]$. Los valores de estas componentes son **(164-2.ª y 3.ª)**

$$G_t = \frac{dv}{dt}, \quad G_n = v\frac{d\psi'}{dt} = \frac{v^2}{R},$$

representando por R el radio de curvatura de la trayectoria en la posición correspondiente del móvil. Por la dirección en que está siempre dirigida G_n, se suele llamar también *aceleración centrípeta.*

De las fórmulas anteriores se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª *La condición necesaria y suficiente, para que el movimiento de un punto sea uniforme, es que sea nula la componente tangencial de su aceleración lineal.*

2.ª *La condición necesaria y suficiente, para que el movimiento de un punto sea rectilíneo, es que sea nula la componente normal de su aceleración lineal.*

3.ª *La condición necesaria y suficiente, para que el movimiento de un punto sea rectilíneo y uniforme, es que sea nula su aceleración lineal.*

4.ª *La condición necesaria y suficiente, para que un movimiento lineal sea uniformemente variado, es que sea constante la componente tangencial de su aceleración lineal.*

222. Componentes axial y normal de las aceleraciones angular y areolar.—Las proyecciones de los vectores $[j]$ e $[i]$ sobre el eje del movimiento angular o areolar y sobre la perpendicular al mismo, en el plano determinado por dichos vectores y el eje, se llaman componentes *axial* y *normal* de la aceleración correspondiente.

Como estas proyecciones no son más que las componentes *radial* y *circular* de la derivada gráfica de la función de las velocidades correspondientes, sus valores estarán expresados por las fórmulas **(164)**

$$j_a = \frac{d\omega}{dt}, \; j_n = \omega \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot \omega',$$

$$i_a = \frac{da}{dt}, \; i_n = a \frac{d\varphi}{dt} = a \cdot \omega',$$

y de ellas se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª *La condición necesaria y suficiente, para que sea uniforme el movimiento angular o areolar de un punto,*

es que sean nulas las componentes axiales de las aceleraciones respectivas.

2.ª *La condición necesaria y suficiente, para que sea plano el movimiento de un punto en el espacio, es que sean nulas las componentes normales de las aceleraciones angular o areolar.*

3.ª *La condición necesaria y suficiente, para que el movimiento de un punto sea plano y uniforme, desde el punto de vista angular o areolar, es que sea nula la aceleración correspondiente.*

4.ª *La condición necesaria y suficiente, para que el movimiento angular o areolar de un punto sea uniformemente variado, es que sea constante la componente axial de la aceleración correspondiente.*

223. Aceleraciones tangenciales y axiales medias en intervalos finitos de tiempo.—Las relaciones que resultan de dividir los incrementos finitos de los valores algébricos de las velocidades de un punto, por el tiempo empleado en adquirirlos, se llaman *aceleraciones tangenciales o axiales medias*, o simplemente *aceleraciones medias* correspondientes al indicado intervalo de tiempo.

La expresión de estas aceleraciones medias es de la forma

$$G_m = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta V}{\Delta t},$$

$$j_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t},$$

$$i_m = \frac{a_2 - a_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta a}{\Delta t};$$

cuando el intervalo de tiempo Δt es diferencial, se convierten en las aceleraciones tangenciales o axiales, correspondientes a un instante determinado, indicando que estas últimas son aceleraciones medias referidas a un intervalo de tiempo infinitesimal.

Las aceleraciones medias representan la constante que debería tener un móvil ficticio, que hiciera el mismo recorrido que el móvil verdadero con movimiento uniformemente variado, para que, teniendo en el instante t_1 la velocidad W_1, llegara a adquirir la W_2 en el instante t_2.

224. Medida de las aceleraciones.—Unidades.—Para medir las aceleraciones se toma como unidad la aceleración tangencial o axial de un movimiento uniformemente variado, que produzca al móvil un incremento de velocidad igual a la unidad, en la unidad de tiempo, y podrán admitirse tantas unidades de aceleración como combinaciones puedan hacerse con las adoptadas para las velocidades y el tiempo; en el sistema *cegesimal* se emplean:

el centímetro por segundo por segundo $= LT^{-2}$ (*)
el radiante por segundo por segundo $= T^{-2}$,
el centímetro cuadrado por segundo por segundo $= L^2T^{-2}$.

En la práctica suelen emplearse

el metro por segundo por segundo $= 100\ LT^{-2}$,
el metro cuadrado por segundo por segundo $= 10^4 L^2T^{-2}$.

Pudiera parecer que estas unidades, por referirse a aceleraciones tangenciales o axiales, no servirán para las aceleraciones normales; pero fácilmente se ve que estas últimas magnitudes son de la misma naturaleza que las primeras, determinando la fórmula de sus dimensiones.

225. Determinación del movimiento de un punto cuando se conoce la trayectoria y la ecuación o ley de las aceleraciones tangenciales o axiales.—La integración de la ecuación $\varphi(Kt) = o$, despejando el valor de $K = \frac{dW}{dt} = f''(t)$, conduce a la ley de las velocidades

(*) Podría llamarse *cine por segundo.*

$$W = \int f''(t)\,dt + W_0 = f'(t) + W_0$$

y, repitiendo la integración, llegaremos a la ecuación

$$E = \int dt \int f''(t)\,dt + W_0 t + E_0 = f(t) + W_0 t + E_0 ,$$

para cuya determinación será suficiente conocer la posición y velocidad inicial del móvil. Conocida la ecuación del movimiento y la trayectoria se podrán señalar las posiciones del móvil en un instante cualquiera.

Cuando se den las componentes coordenadas de la aceleración lineal, se pasará, por dos integraciones sucesivas, a las ecuaciones

$$x = x_0 + v_{ox}\,t + f_1(t) ,$$
$$y = y_0 + v_{oy}\,t + f_2(t) ,$$
$$z = z_0 + v_{oz}\,t + f_3(t) ,$$

que determinan el movimiento, con las coordenadas de la posición y velocidad inicial, sin exigir como dato las ecuaciones de la trayectoria.

226. Diagramas de las aceleraciones tangenciales y axiales. — Las representaciones gráficas efectuadas con las ecuaciones

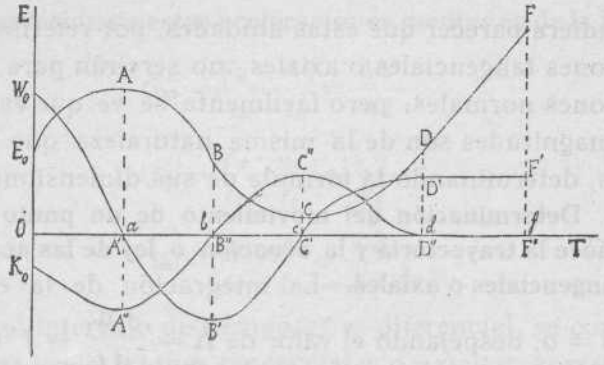


Fig. 95

del movimiento de un punto y con la ley de las velocidades, se completan agregando a dichos diagramas el que

corresponde a las aceleraciones tangenciales o axiales del movimiento.

La curva que representa la ley de estas aceleraciones se obtiene de la curva de las velocidades por los procedimientos que se indicaron para obtener esta última del diagrama de los espacios.

La figura 95 representa el diagrama completo de un movimiento, en el que se puede obtener, con suma facilidad, la posición del móvil, con la velocidad y aceleración que le corresponden en un instante cualquiera y resolver los problemas análogos que se indicaron al construir las curvas E y W.

227. Desviaciones en los movimientos curvilíneos.—Supongamos sea $A\,B$ (fig. 96) el elemento lineal de la trayectoria recorrido por un punto en el tiempo $d\,t$, cuyo instante final corresponde al tiempo $t' = t + d\,t$; si en lugar de seguir el móvil su camino $A\,B$, se imagina que, al llegar al punto A, desapareciera su aceleración $[G]$, el móvil marcharía en la dirección de la velocidad $[v]$, recorriendo en el tiempo $t' - t = d\,t$ el espacio $A\,B' = v\,d\,t$: el segmento $B'\,B$, que une las dos posiciones extremas indicadas, recibe el nombre de *desviación elemental* producida por la aceleración $[G]$ en el referido intervalo de tiempo.

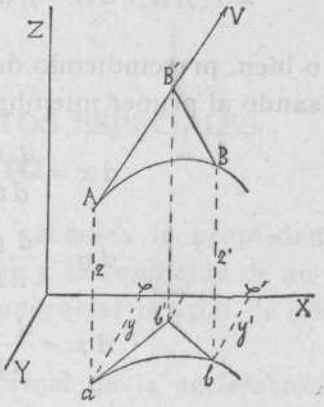


Fig. 96

Las desviaciones producidas por las aceleraciones tendrán que guardar cierta relación de dirección y magnitud con éstas y, para encontrarla, llamemos x, y, z las coordenadas de A; x', y', z' las de B y x'', y'', z'' las de B';

estas coordenadas están relacionadas por las ecuaciones

$$x' = x + dx, \quad y' = y + dy, \quad z' = z + dz,$$

$$x'' = x + \frac{dx}{dt}dt, \; y'' = y + \frac{dy}{dt}dt, \; z'' = z + \frac{dz}{dt}dt,$$

y las proyecciones de la desviación $D = B'B$ son

$$D_x = x' - x'' = dx - \frac{dx}{dt}dt,$$

$$D_y = dy - \frac{dy}{dt}dt, \quad D_z = dz - \frac{dz}{dt}dt.$$

Pero de las ecuaciones del movimiento proyectado sobre los ejes se deduce

$$x' = f_1(t + dt) = f_1(t) + f'_1(t)\,dt + f''_1(t)\frac{dt^2}{2} + \ldots.$$

o bien, prescindiendo de diferenciales de tercer orden y pasando al primer miembro el término $f_1(t) = x$.

$$dx = \frac{dx}{dt}dt + \frac{1}{2}G_x\,dt^2,$$

$$dy = \frac{dy}{dt}dt + \frac{1}{2}G_y\,dt^2,$$

$$dz = \frac{dz}{dt}dt + \frac{1}{2}G_z\,dt^2.$$

Según esto las proyecciones coordenadas de la desviación elemental son

$$D_x = \frac{1}{2}G_x\,dt^2, \; D_y = \frac{1}{2}G_y\,dt^2, \; D_z = \frac{1}{2}G_z\,dt^2$$

y demuestran *el paralelismo de D respecto a* $[G]$ y *la relación algebraica* $D = \frac{1}{2}G\,dt^2$.

228. Sobre-aceleraciones. —Si trasladamos al polo de la función del movimiento todos los vectores representativos de las aceleraciones de un punto, se habrán constituído tres funciones gráficas, derivadas de 2.° orden de la primitiva $[\rho] = F(t)$, cuyas derivadas lineales constituirán otras magnitudes mecánicas, relacionadas con el movimiento, que podrían llamarse *aceleraciones de 2.° orden* y sucesivamente podrían considerarse las aceleraciones de *3.°, 4.° .... n.° orden.*

Estas aceleraciones de orden superior al primero se llaman, en conjunto, *sobre-aceleraciones*; su estudio no ofrece particularidades de interés, para las aplicaciones que vamos a hacer de esta teoría, por cuyo motivo nos limitamos a expresar la definición de tales magnitudes.

V

EJEMPLOS DE MOVIMIENTOS ESPECIALES DE UN PUNTO

229. Movimientos uniformes. —Ya sabemos la propiedad característica **(195)** que los distingue y la condición de nulidad que cumple la componente tangencial o axial de las aceleraciones correspondientes.

En cuanto a la componente normal de la aceleración lineal es $G_n = \frac{v^2}{\rho}$, inversamente proporcional al radio de curvatura de la trayectoria, constante en los movimientos circulares y nula en los rectilíneos.

El diagrama de estos movimientos estará formado por una recta inclinada (cuyo coeficiente angular es la velocidad) para los espacios, y una paralela al eje de los tiempos para la velocidad.

230. Movimientos uniformemente variados.—También sabemos la propiedad **(215)** que caracteriza a los incrementos de velocidad en estos movimientos y la condición que cumplen de ser constantes las componentes tangenciales o axiales de las aceleraciones correspondientes.

Los movimientos uniformemente variados verifican, además, las siguientes propiedades:

1.ª *En los movimientos uniformemente variados indefinidos* (*) *hay siempre una posición única del móvil, en que éste cambia el sentido de su movimiento.*—En efecto, la ecuación de la velocidad en estos movimientos es

$$W = K \cdot t + W_0$$

y por ser de primer grado habrá un valor único de t que la convertirá en *cero,* siendo de signo contrario los valores de W anteriores y posteriores al citado valor de t.

El instante en que la velocidad se anula y tiene lugar el retroceso del móvil, es $t = -\frac{W_0}{K}$, que será positivo cuando W_0 y K sean de signo contrario y negativo cuando sean del mismo signo.

Las dos partes del movimiento, anterior y posterior a $t = -\frac{W_0}{K}$, están caracterizadas por el valor decreciente o creciente de W, diciéndose que en la primera el movimiento es *uniformemente retardado* y en la segunda *uniformemente acelerado.*

2.ª *En los movimientos uniformemente variados los espacios recorridos, a partir del instante en que la velocidad se anula, son proporcionales a los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos.*—En efecto, toman-

(*) Llamaremos *indefinidos* aquellos movimientos para los que no se señala *principio* ni *fin,* comprendiendo todos los valores de t desde

$$-\infty \text{ a } +\infty .$$

do el punto citado para posición inicial del móvil, la ecuación del movimiento es

$$E = E_0 + \frac{1}{2} K t^2$$

y de aquí se deduce

$$\frac{E - E_0}{t^2} = \frac{1}{2} K = constante,$$

como queríamos demostrar.

Esta propiedad se utiliza en la práctica para reconocer si un movimiento es uniformemente variado, midiendo los espacios recorridos y comparándolos con los tiempos empleados en recorrerlos.

3.ª *En los movimientos uniformemente variados el espacio recorrido en la primera unidad de tiempo, a partir del instante en que la velocidad se anula, es igual a la mitad de la aceleración tangencial o axial.*

4.ª *La velocidad adquirida al llegar a una posición cualquiera, a partir del instante en que la velocidad es nula, es igual a la raiz cuadrada del doble del producto de la aceleración tangencial o axial por el espacio recorrido.*—En efecto, en el instante t, a partir de la citada posición, se verifica

$$E - E_0 = \frac{1}{2} K t^2,$$

$$W = K t = K \sqrt{\frac{2 (E - E_0)}{K}} = \sqrt{2 K (E - E_0)}.$$

5.ª *La diferencia de los cuadrados de las velocidades, en dos posiciones cualesquiera del móvil, es igual al doble del producto de la aceleración tangencial o axial por*

el espacio que separa a las dos posiciones consideradas.—De la propiedad anterior se deduce que

$$W_2^2 = 2K(E_2 - E_0), \quad W_1^2 = 2K(E_1 - E_0)$$

y restando

$$W_2^2 - W_1^2 = 2K(E_2 - E_1).$$

6.ª *La velocidad media correspondiente a un intervalo de tiempo cualquiera, la media de las velocidades extremas y la velocidad en el instante medio de dicho intervalo de tiempo, son iguales.*—La velocidad media en el tiempo $t_2 - t_1$ es

$$W_m = \frac{E_2 - E_1}{t_2 - t_1} = \frac{W_0(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}K(t^2_2 - t^2_1)}{t_2 - t_1} =$$

$$= W_0 + K\frac{t_2 + t_1}{2},$$

y lo mismo

$$W_m = \frac{(W_0 + Kt_2) + (W_0 + Kt_1)}{2} = \frac{W_2 + W_1}{2}.$$

Los últimos miembros de las dos igualdades anteriores representan, respectivamente, la velocidad en el instante medio de $t_2 - t_1$ y la media de las velocidades extremas correspondientes al mismo intervalo de tiempo.

Los diagramas de los movimientos uniformemente variados estarán constituídos por la parábola $E = E_0 + W_0 t + \frac{1}{2}Kt^2$, la recta inclinada $W = W_0 + Kt$ y la paralela $G = K$ al eje $o\,T$, en representación de los espacios, las velocidades y las aceleraciones tangenciales o axiales.

La figura 97 representa el movimiento uniformemente variado de un punto que, partiendo de la posición inicial M_0, marcha con velocidad decreciente, de derecha a izquierda, hasta el instante $t_1 = o\,m_1$ (posición $o'M_1 = m_1 H$) en que se anula su velocidad y retrocede, para continuar indefinidamente de izquierda a derecha su movimiento acelerado; el paso por la posición inicial tiene lugar, en el retroceso, en el instante $t_2 = o\,m_2$.

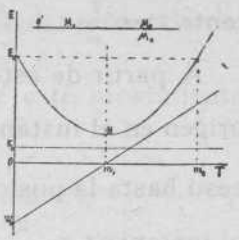


Fig. 97

231. Movimiento armónico simple.—Vibración rectilínea.—Recibe el nombre de *movimiento armónico simple* el movimiento rectilíneo de un punto definido por la ecuación

$$e = a \cos (\omega t - \varepsilon),$$

en la que los coeficientes a, ω y ε son valores constantes que tienen cierta significación especial, que después señalaremos.

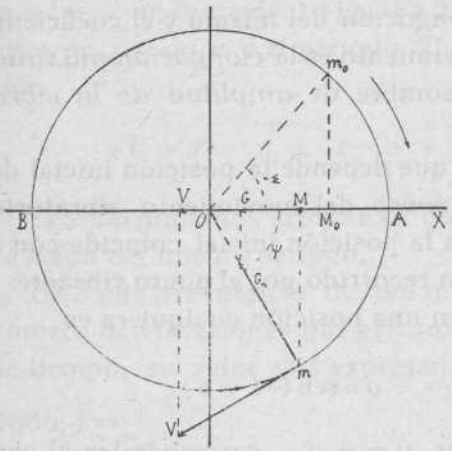


Fig. 98

Supongamos verificándose el movimiento sobre el eje $o\,X$ (fig. 98), siendo el origen de coordenadas el origen de los espacios; la forma de la ecuación nos indica que se trata de un *movimiento periódico*, que empieza en la posición inicial

$$x_0 = o\,M_0 = a \cos \varepsilon,$$

marchando el móvil hacia la derecha, a medida que aumenta t y llegando a la posición extrema $o\,A = a$, en el instante $t = \frac{\varepsilon}{\omega}$.

A partir de este instante retrocede, para pasar por el origen en el instante $t = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{\varepsilon}{\omega}$, continuando su retroceso hasta la posición extrema $o\,B = -a$, correspondiente al instante $t = \frac{\pi}{\omega} + \frac{\varepsilon}{\omega}$; en este punto vuelve a retroceder para recorrer otra vez, indefinidamente, los trayectos $B\,A$ y $A\,B$.

El movimiento que estamos estudiando recibe también el nombre de *vibración rectilínea*, por ser el que con más exactitud se acomoda a las circunstancias prácticas de los *movimientos vibratorios* que la Física considera como originadores de un gran número de fenómenos naturales.

La distancia x del móvil al punto o, en un instante cualquiera, se llama *elongación* del mismo y el coeficiente a de la ecuación del movimiento es la *elongación máxima*, que también recibe el nombre de *amplitud de la vibración* (*).

El parámetro ε, del que depende la posición inicial del móvil, suele llamarse *época* del movimiento vibratorio; cuando la época es nula la posición inicial coincide con el extremo A del segmento recorrido por el punto vibrante.

La velocidad lineal en una posición cualquiera es

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\,\omega \operatorname{sen}(\omega t - \varepsilon)$$

y se ve que sus máximos, $v = \pm a\,\omega$, corresponden al paso del móvil por el origen o, pues los valores de t que hagan

(*) Hay quien llama amplitud del movimiento vibratorio al duplo del coeficiente a.

sen $(\omega t - \varepsilon) = \pm 1$, hacen cos $(\omega t - \varepsilon) = o$. Los mínimos de valor modular, $v = o$, corresponden, como no podía menos de suceder, a los extremos A y B del recorrido del punto móvil.

La ley de las aceleraciones lineales de este movimiento está expresada por la ecuación

$$G = - a \omega^2 \cos (\omega t - \varepsilon) = - x \omega^2,$$

que nos dice que *en cada instante es proporcional a la distancia del móvil al origen,* siendo negativa cuando aquél se encuentra a la derecha de dicho origen y positiva cuando está a la izquierda; los máximos de G corresponden a los puntos A y B y los mínimos al paso del móvil por el origen.

Para determinar el *período,* o sea el tiempo que transcurre entre dos pasos del móvil por una misma posición, en el mismo sentido, se ve que experimentando el ángulo $\omega t - \varepsilon$ un incremento igual a 2π, se reproducen los valores de x y de v y el período T estará dado por la ecuación

$$\omega (t + T) - \varepsilon = \omega t - \varepsilon + 2\pi \text{ o } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Los movimientos armónicos que tienen común el valor de ω son del mismo período.

Se llama *frecuencia* de un movimiento vibratorio, el número de vibraciones que el móvil realiza en la unidad de tiempo; su valor está expresado por la inversa del período, $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

La cantidad variable $\omega t - \varepsilon$ se llama *fase* del movimiento considerado y dos movimientos armónicos del mismo período y cuyas épocas sean iguales, o se diferencien en un número cualquiera de circunferencias, se dice que

están *en la misma fase*. Cuando la diferencia de las épocas $\varepsilon' - \varepsilon$ tiene un valor distinto del señalado, los dos movimientos están *defasados*, diciéndose que marchan con un *avance* o *retraso* de fase indicado por la diferencia

$$(\omega t - \varepsilon) - (\omega t - \varepsilon') = \varepsilon' - \varepsilon .$$

232. Diagramas sinusoidales de los movimientos armónicos.—Aplicando el procedimiento general expuesto anteriormente para construir los diagramas de un movimiento cualquiera, al caso actual de los movimientos armónicos, se obtienen las tres líneas representadas en la figura 99, cuyo empleo para determinar la posición, velocidad y aceleración del móvil en un instante cualquiera y problemas recíprocos, no necesitaremos repetir; pero estos diagramas tienen el inconveniente de la dificultad o pesadez de su construcción, por cuyo motivo se sustituyen por otra representación gráfica, muy sencilla, que se funda en la propiedad que vamos a estudiar a continuación.

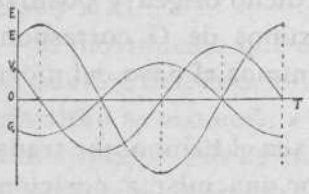


Fig. 99

233. Proyección del movimiento circular uniforme sobre un diámetro del mismo círculo.—Si suponemos un móvil que recorra la circunferencia de diámetro $2\,a$ (fig. 98) con una velocidad angular constante e igual a ω, partiendo de la posición inicial m_0 correlativa de la M_0, se verifica que la proyección del móvil ficticio m, sobre el diámetro $A\,B$, se corresponde en todos los instantes con la posición del móvil verdadero M.

En efecto, la ecuación del movimiento angular de m es

$$\psi = \psi_0 + \omega t ,$$

pero si tomamos por origen de los ángulos el eje $o\,X$ y

consideramos como positivos los descritos en el sentido de las agujas de un reloj, el ángulo inicial ψ_0 cumple la condición de ser

$$\psi_0 = \text{áng.} \left(\cos = \frac{x_0}{a} \right) = - \varepsilon$$

y la ecuación del citado movimiento angular es $\psi = \omega t - \varepsilon$; de esto se deduce que la abscisa de la proyección del móvil m es, en cada instante,

$$x = a \cos \psi = a \cos (\omega t - \varepsilon)$$

y demuestra lo que deseábamos.

Pero no sólamente se verifica la correspondencia expresada en lo que se refiere a las posiciones del móvil, sino que, del mismo modo, las proyecciones sobre $A B$ de la velocidad lineal $V = \omega . a$ y de la aceleración normal $G_n = \frac{V^2}{a} = \omega^2 . a$, representan en cada instante la velocidad y aceleración lineales del móvil M; en efecto, la proyección de $[V]$ es

$$v = - V \operatorname{sen} \psi = - a \omega \operatorname{sen} (\omega t - \varepsilon)$$

y la de $[G_n]$

$$G = - G_n \cos \psi = - a \omega^2 \cos (\omega t - \varepsilon) .$$

234. Diagramas circulares de los movimientos armónicos. — Fundándonos en las propiedades del número anterior, se deduce el siguiente procedimiento para representar gráficamente las circunstancias del movimiento vibratorio; sea $A B$ (fig 100) la trayectoria del punto vibrante; haciendo centro en su punto medio, tracemos tres circunferencias de radios a, $a\omega$ y $a\omega^2$; imaginemos ahora un radio de la primera o m_0 correspondiéndose con la posición inicial del móvil M_0, tracemos otro radio de la segunda o V_0 perpen-

dicular al anterior y en el sentido del avance del movimiento, y, por último, otro radio $o\,G_0$ de la tercera circunferencia en prolongación del primero $o\,m_0$.

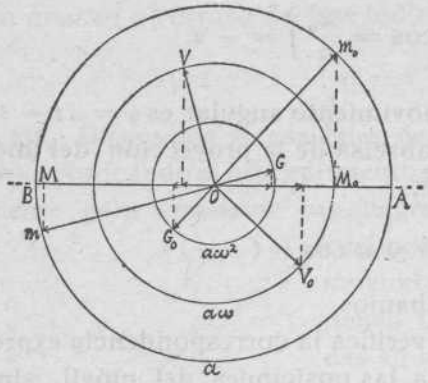


Fig. 100

Si ahora suponemos que los tres radios giran con velocidad angular ω, sus respectivas proyecciones marcarán en cada instante, sobre $A\,B$, la posición, velocidad y aceleración del móvil; así es que si quieren determinarse estas circunstancias, para un valor cualquiera de t, basta poner al primer radio en la posición que corresponda al ángulo $\psi = \omega\,t - \varepsilon$ y proyectando sobre $A\,B$ los tres índices de $o\,m$, $o\,V$ y $o\,G$, se obtendrán las referidas circunstancias en valor modular y signo.

Los tres radios $o\,m$, $o\,V$ y $o\,G$ que, por su proyección sobre $A\,B$, proporcionan la posición del móvil y su velocidad y aceleración lineal, constituyen la función gráfica del movimiento del punto m, referida al centro o como polo, y sus dos primeras derivadas lineales.

235. Movimientos con aceleración central.—Cuando un movimiento, definido por la ley de su aceleración lineal, sea tal que el vector [G] esté constantemente dirigido hacia un punto fijo o *centro*, las aceleraciones correspondientes se llaman *centrales* y en todo movimiento en que tenga lugar la expresada circunstancia se verifican las propiedades siguientes:

1.ª *El movimiento areolar del móvil proyectado sobre*

un plano cualquiera que pase por el centro de las aceleraciones, es uniforme. En efecto, tomando dicho centro por origen de coordenadas y tres planos rectangulares arbitrarios por coordenados, se verificará que el momento de la aceleración lineal respecto a los ejes coordenados será nulo, y refiriéndonos al eje $o\,Z$ y plano $X\,Y$ tendremos **(220)**

$$i_z = \frac{d\,n}{d\,t} = \frac{1}{2}\left(x\,\frac{d^2\,y}{d\,t^2} - y\,\frac{d^2\,x}{d\,t^2}\right) = o\,,$$

$$n = \frac{d\,A_1}{d\,t} = constante \quad o \quad A_1 = A_{1o} + n\,t\,,$$

para expresión del movimiento areolar proyectado sobre el citado plano.

2.ª *El movimiento del punto es necesariamente plano, pasando por el centro el plano de la trayectoria.*—Puesto que siendo l, m y n constantes, el vector $[a] = [l] + [m] + [n]$ representativo de la velocidad areolar del móvil en un instante cualquiera, es un vector fijo y esto exige que la función del movimiento, cuya indicatriz es la trayectoria, sea una función plana.

Es evidente, por otra parte, que el plano de la trayectoria será perpendicular al vector $[a]$, cuya línea de acción tiene por ecuaciones $\dfrac{x}{l} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}$,

y la de dicho plano será $l\,x + m\,y + n\,z = o$.

También se deduce inmediatamente que el movimiento areolar, en el plano de la trayectoria, es uniforme y su velocidad areolar $[a]$ la mayor que corresponde a todos los planos de proyección que pasen por el centro del movimiento.

236. Movimientos rotatorios de ejes permanentes.—Hemos dicho que estos movimientos angulares están caracte-

rizados por la trayectoria circular del móvil, cuando el polo de la función del movimiento coincide con el centro de la expresada trayectoria.

En algunos casos aparecen referidos estos movimientos a funciones gráficas cuyo polo está situado en un punto del eje, distinto del centro de la trayectoria, en cuyos casos la rotación permanente se presenta como equivalente, por lo que a las posiciones del móvil se refiere, a una serie de rotaciones instantáneas sucesivas, cuyas velocidades angulares guardan, con la de la rotación permanente, la relación constante expresada por la condición *de ser cada una de las primeras igual a la proyección de la permanente sobre el eje instantáneo correspondiente.*

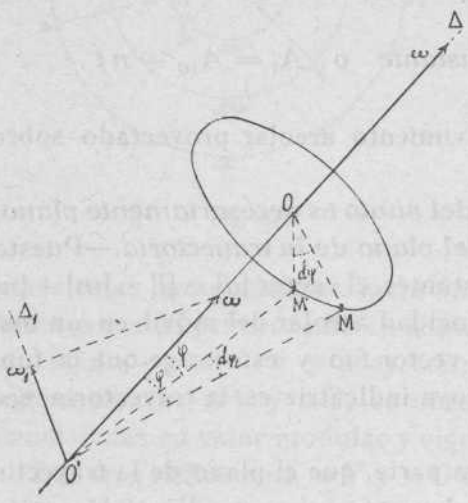


Fig. 101

En efecto, en la figura 101 se ve que los desplazamientos angulares del móvil a su paso de M a M', según que el polo esté en o o en o', son

$$d\psi = M\,o\,M' \quad \text{y} \quad d\psi_1 = M\,o'\,M'$$

y si representamos por φ el ángulo constante del eje $o\,\Delta$ con el vector de la función del movimiento, cuando el polo está en o', se verificará

$$\frac{1}{2}\,\overline{o\,M^2}\,d\psi = \frac{1}{2}\,\overline{o'\,M^2}\,d\psi_1 \,.\, \text{sen}\,\varphi$$

y siendo $o\,M = o'\,M$ sen φ resulta

$$d\,\psi_1 = d\,\psi \text{ sen } \varphi \quad \text{y} \quad \omega_1 = \omega \text{ sen } \varphi = \omega \cos \widehat{\omega\,\omega_1}\,.$$

En lo sucesivo siempre que nos refiramos al movimiento de rotación de un punto, se supondrá que el polo de la función del movimiento coincide con el centro del arco descrito por el móvil.

VI

MOVIMIENTOS SIMULTÁNEOS DE UN PUNTO

237. Definiciones.—Cuando el movimiento de un punto se refiere a un sistema coordenado, que a su vez esté dotado de cierto movimiento, respecto a otro sistema de referencia, se dice que el móvil ejecuta dos movimientos *simultáneos:* uno el *relativo* al sistema coordenado que suponemos móvil y otro el de *arrastre* que la movilidad del sistema de referencia le comunica en cada instante, pareciendo inútil advertir que de la combinación de dichos movimientos le resultará al móvil un movimiento *único*, que llamamos *absoluto,* y que la expresada simultaneidad no deberá entenderse en el sentido de que el punto se mueva, en un instante determinado, de dos maneras distintas.

Como el sistema de referencia que hemos supuesto fijo, puede ser móvil con relación a otro, y así sucesivamente pueden coexistir varios arrastres simultáneos, será preciso, para obtener el movimiento absoluto, tener en cuenta las circunstancias de cada uno de ellos, además de las del relativo al primer sistema móvil.

238. Composición de movimientos simultáneos.—La operación que consiste en determinar el movimiento absoluto de un punto, cuando se conocen el movimiento relati-

vo y los arrastres del mismo, así como el problema recíproco de pasar del movimiento absoluto al relativo, constituye la teoría de la *composición de movimientos*, de que nos vamos a ocupar, empezando por indicar la forma de determinar los movimientos de arrastre de los triedros móviles.

239. Determinación de los movimientos de arrastre.— El movimiento de un triedro queda determinado cuando se sepan expresar, en función del tiempo, las coordenadas de su vértice y los ángulos directores de sus aristas; para lo primero se necesitan tres ecuaciones de la forma

$$a = \varphi_1(t), \quad b = \varphi_2(t), \quad c = \varphi_3(t),$$

y para lo segundo bastan con otras tres que relacionen con t a los nueve ángulos citados, pues si bien parece que debieran necesitarse nueve ecuaciones, hay que tener en cuenta que entre dichos ángulos existen las conocidas relaciones

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1,$$
$$\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1,$$
$$\cos^2 \alpha_3 + \cos^2 \beta_3 + \cos^2 \gamma_3 = 1,$$
$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0,$$
$$\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 = 0,$$
$$\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 = 0,$$

que reducen a tres el número de ecuaciones necesarias, para determinar los nueve ángulos en función del tiempo.

Como regla práctica, para recordar el ángulo a que se refieren cada uno de los símbolos α, β y γ, que repetidas veces tendremos que manejar, convendrá formar el cuadro siguiente:

	X′	Y′	Z′
X	α_1	α_2	α_3
Y	β_1	β_2	β_3
Z	γ_1	γ_2	γ_3

en el cual se ve con facilidad que β_3, por ejemplo, es el ángulo que forma el eje móvil Z' con el fijo Y, y lo mismo para los demás.

Algunas veces conviene expresar, para determinar el arrastre, las coordenadas eulerianas del triedro móvil en función del tiempo y las ecuaciones de dicho movimiento se presentarán en la forma

$$\varphi_1(a\,b\,c\,t) = 0\,,\quad \varphi_2(a\,b\,c\,t) = 0\,,\quad \varphi_3(a\,b\,c\,t) = 0\,,$$
$$\varphi_4(\varphi\,\psi\,0\,t) = 0\,,\quad \varphi_5(\varphi\,\psi\,0\,t) = 0\,,\quad \varphi_6(\varphi\,\psi\,0\,t) = 0\,.$$

Sea de un modo o de otro, supondremos en lo que sigue que son conocidas las ecuaciones que determinan el movimiento de arrastre de los ejes móviles.

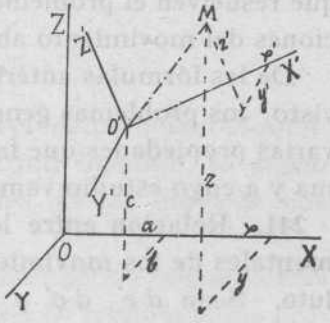


Fig. 102

240. Paso del movimiento relativo al absoluto y recíprocamente. — Este problema se resuelve haciendo uso de las fórmulas de transformación de coordenadas, establecidas en Geometría Analítica, para pasar de un sistema cartesiano rectangular a otro de la misma naturaleza; si representamos por x', y', z' las coordenadas del movimiento relativo

de un punto M (fig. 102) y por x, y, z las del movimiento absoluto, se verificarán las relaciones

$$x = a + x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 ,$$
$$y = b + x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 ,$$
$$z = c + x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 ,$$

que servirán para pasar de las ecuaciones del movimiento relativo

$$x' = f_1(t) , \quad y' = f_2(t) , \quad z' = f_3(t) ,$$

a las del movimiento absoluto

$$x = F_1(t) , \quad y = F_2(t) , \quad z = F_3(t) .$$

Del mismo modo se verifican las ecuaciones

$$x' = (x - a) \cos \alpha_1 + (y - b) \cos \beta_1 + (z - c) \cos \gamma_1 ,$$
$$y' = (x - a) \cos \alpha_2 + (y - b) \cos \beta_2 + (z - c) \cos \gamma_2 ,$$
$$z' = (x - a) \cos \alpha_3 + (y - b) \cos \beta_3 + (z - c) \cos \gamma_3 ,$$

que resuelven el problema recíproco de pasar de las ecuaciones del movimiento absoluto a las del relativo.

De las fórmulas anteriores que resuelven, como hemos visto, los problemas generales de esta teoría, se deducen varias propiedades que facilitan las aplicaciones de la misma y a cuyo estudio vamos a pasar.

241. Relación entre los desplazamientos lineales elementales de los movimientos relativo, de arrastre y absoluto. - Sean de', de'' y de los desplazamientos lineales elementales que, en cada uno de los expresados movimientos, efectúa el móvil; la proyección del último sobre el eje oX es

$$de_x = dx = (da + x' d \cos \alpha_1 + y' d \cos \alpha_2 + z' d \cos \alpha_3) +$$
$$+ (dx' \cos \alpha_1 + dy' \cos \alpha_2 + dz' \cos \alpha_3) ,$$

pero el segundo paréntesis representa la proyección sobre el mismo eje de de' y el primero la del desplazamiento de'' correspondiente al arrastre (*) y generalizando para los otros dos ejes, se verifican las tres ecuaciones

$$de_x = de'_x + de''_x\,,\quad de_y = de'_y + de''_y\,,\quad de_z = de'_z + de''_z\,,$$

que demuestran la equipolencia $[de] \equiv [de'] + [de'']$.

Como lo mismo se vería en el caso de varios arrastres, se podrá establecer, de un modo general, que *cuando un punto está sometido a varios movimientos simultáneos, el desplazamiento lineal absoluto que experimenta en el tiempo infinitamente pequeño dt, es la suma gráfica de los desplazamientos lineales que por cada uno de los movimientos componentes le correspondan.*

242. Relación entre las velocidades.—Si se dividen los dos miembros de la equipolencia

$$[de] \equiv [de'] + [de''] + [de'''] + \ldots.$$

por el tiempo dt, se convierte en una suma gráfica de velocidades lineales

$$[v] \equiv [v'] + [v''] + [v'''] + \ldots.\,,$$

demostrando esta relación que *la velocidad del movimiento absoluto de un punto es, en cada instante, la suma gráfica de las velocidades lineales de los movimientos componentes.*

Las fórmulas que expresan el valor de las componentes cartesianas de la velocidad absoluta, en función de las proyecciones de las velocidades componentes, son

---

(*) Si se suponen a x', y', z' constantes, el movimiento absoluto y el del arrastre son una misma cosa y en esta hipótesis el valor de de_x se convierte en

$$de_x = da + x'\,d\cos\alpha_1 + y'\,d\cos\alpha_2 + z'\,d\cos\alpha_3\,,$$

representando esta expresión la proyección de de'' sobre oX.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\cos\alpha_1 + \frac{dy'}{dt}\cos\alpha_2 + \frac{dz'}{dt}\cos\alpha_3\right) +$$

$$+ \left(\frac{da}{dt} + x'\frac{d\cos\alpha_1}{dt} + y'\frac{d\cos\alpha_2}{dt} + z'\frac{d\cos\alpha_3}{dt}\right),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\cos\beta_1 + \frac{dy'}{dt}\cos\beta_2 + \frac{dz'}{dt}\cos\beta_3\right) +$$

$$+ \left(\frac{db}{dt} + x'\frac{d\cos\beta_1}{dt} + y'\frac{d\cos\beta_2}{dt} + z'\frac{d\cos\beta_3}{dt}\right),$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\cos\gamma_1 + \frac{dy'}{dt}\cos\gamma_2 + \frac{dz'}{dt}\cos\gamma_3\right) +$$

$$+ \left(\frac{dc}{dt} + x'\frac{d\cos\gamma_1}{dt} + y'\frac{d\cos\gamma_2}{dt} + z'\frac{d\cos\gamma_2}{dt}\right).$$

242'. La propiedad del número anterior nos permite demostrar que *en los movimientos rotatorios alrededor de ejes concurrentes o paralelos, la velocidad angular del movimiento absoluto es también la suma gráfica de las velocidades angulares de los movimientos componentes.*

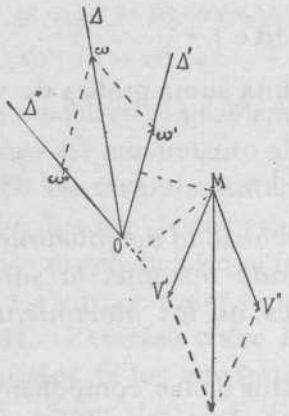


Fig. 103

Sea, en efecto, el punto M (fig. 103) que está dotado de un movimiento rotatorio alrededor del eje $o\Delta'$ con la velocidad angular $[\omega']$ y supongamos que al mismo tiempo el eje $o\Delta'$ gira alrededor del $o\Delta''$ con la velocidad angular $[\omega'']$; vamos a probar que el estado de movimiento del punto M, por consecuencia de estas dos rotaciones, es el mismo que si se le supone girando alrededor de $o\Delta$ con la velocidad angular $[\omega] \equiv [\omega'] + [\omega'']$.

Las rotaciones parciales comunican a M las velocidades lineales (**209**)

$$[v'] = M_M\,[\omega'] \quad \text{y} \quad [v''] = M_M\,[\omega''],$$

que dan lugar a la velocidad absoluta $[v] = [v'] + [v'']$; pero el giro alrededor de $o\,\Delta$ comunicaría al móvil una velocidad lineal

$$[v_1] = M_M\,[\omega] = [v'] + [v''],$$

luego esta velocidad $[v_1]$ y la $[v]$ anterior, son una misma, como queríamos demostrar.

Si las rotaciones componentes fueran paralelas, o más de dos, la demostración se haría de la misma manera.

243. Relación entre las aceleraciones.—Si representamos por $[G]$ la aceleración lineal del movimiento absoluto y por G_x, G_y y G_z sus proyecciones sobre los ejes fijos, tendremos

$$G_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\cos\alpha_1 + \frac{d^2y'}{dt^2}\cos\alpha_2 + \frac{d^2z'}{dt^2}\cos\alpha_3\right) +$$

$$+ \left(\frac{d^2a}{dt^2} + x'\frac{d^2\cos\alpha_1}{dt^2} + y'\frac{d^2\cos\alpha_2}{dt^2} + z'\frac{d^2\cos\alpha_3}{dt^2}\right) +$$

$$+ 2\left(\frac{dx'}{dt}\cdot\frac{d\cos\alpha_1}{dt} + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{d\cos\alpha_2}{dt} + \frac{dz'}{dt}\cdot\frac{d\cos\alpha_3}{dt}\right),$$

$$G_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\cos\beta_1 + \frac{d^2y'}{dt^2}\cos\beta_2 + \frac{d^2z'}{dt^2}\cos\beta_3\right) +$$

$$+ \left(\frac{d^2b}{dt^2} + x'\frac{d^2\cos\beta_1}{dt^2} + y'\frac{d^2\cos\beta_2}{dt^2} + z'\frac{d^2\cos\beta_3}{dt^2}\right) +$$

$$+ 2\left(\frac{dx'}{dt}\cdot\frac{d\cos\beta_1}{dt} + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{d\cos\beta_2}{dt} + \frac{dz'}{dt}\cdot\frac{d\cos\beta_3}{dt}\right),$$

$$G_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \left(\frac{d^2x'}{dt^2}\cos\gamma_1 + \frac{d^2y'}{dt^2}\cos\gamma_2 + \frac{d^2z'}{dt^2}\cos\gamma_3\right) +$$

$$+ \left(\frac{d^2c}{dt^2} + x'\frac{d^2\cos\gamma_1}{dt^2} + y'\frac{d^2\cos\gamma_2}{dt^2} + z'\frac{d^2\cos\gamma_3}{dt^2}\right) +$$

$$+ 2\left(\frac{dx'}{dt}\cdot\frac{d\cos\gamma_1}{dt} + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{d\cos\gamma_2}{dt} + \frac{dz'}{dt}\cdot\frac{d\cos\gamma_3}{dt}\right).$$

Los primeros paréntesis de las ecuaciones anteriores representan las proyecciones sobre los ejes respectivos de la aceleración $[G']$ del movimiento relativo; si se supone que x', y', z' son constantes, para que no subsista más que el movimiento de arrastre, desaparecen los primeros y terceros paréntesis, revelando esta circunstancia que los segundos representan las proyecciones sobre los citados ejes de la aceleración $[G'']$ del movimiento de arrastre.

Resulta de esto que si, por un punto cualquiera, trazamos el polígono sumatorio de $[G']$ y $[G'']$, la suma gráfica de estos dos vectores no se corresponderá, en general, con la aceleración $[G]$ del movimiento absoluto; pero si imaginamos que en cada instante acompaña al móvil una tercera aceleración $[G_c]$, cuyas proyecciones sean los terceros paréntesis de las igualdades anteriores, se verificará la equipolencia

$$[G] \equiv [G'] + [G''] + [G_c] .$$

Esta aceleración ficticia, que para cerrar el polígono vectorial de las aceleraciones se necesita, es un vector perfectamente determinado por sus proyecciones

$$G_{cx} = 2\left(\frac{dx'}{dt} \cdot \frac{d\cos\alpha_1}{dt} + \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{d\cos\alpha_2}{dt} + \frac{dz'}{dt} \cdot \frac{d\cos\alpha_3}{dt}\right),$$

$$G_{cy} = 2\left(\frac{dx'}{dt} \cdot \frac{d\cos\beta_1}{dt} + \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{d\cos\beta_2}{dt} + \frac{dz'}{dt} \cdot \frac{d\cos\beta_3}{dt}\right),$$

$$G_{cz} = 2\left(\frac{dx'}{dt} \cdot \frac{d\cos\gamma_1}{dt} + \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{d\cos\gamma_2}{dt} + \frac{dz'}{dt} \cdot \frac{d\cos\gamma_3}{dt}\right),$$

y recibe el nombre de *aceleración complementaria* producida por el arrastre de los ejes móviles.

En resumen, *cuando un punto está dotado de un movimiento relativo y varios arrastres, la aceleración lineal del movimiento absoluto es, en cada instante, la suma gráfica de la aceleración del movimiento relativo, de la*

de los arrastres y de las complementarias que a cada uno de estos últimos movimientos pueda corresponderle. (*)

De las fórmulas establecidas se deduce que cuando el movimiento de arrastre sea tal que no se modifique la dirección de los ejes móviles, no existirá la aceleración complementaria, y se verificará la equipolencia de $[G]$ con $[G'] + [G'']$; lo mismo ocurre en los casos de reposo relativo.

244. Determinación gráfica de la aceleración complementaria. — Supongamos un punto M dotado de un movimiento relativo que le haga experimentar el desplazamiento lineal MM' (figuras 104 y 105) en el tiempo dt, siendo

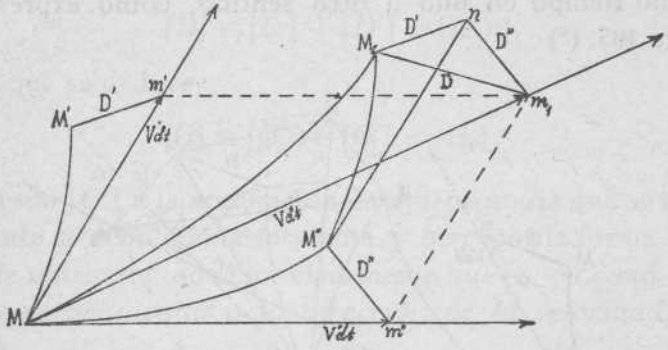


Fig. 104

$[v']$ la velocidad de este movimiento en el instante t; sea $[v'']$ la velocidad del arrastre y MM'' el desplazamiento lineal correspondiente a este movimiento en el mismo tiempo; la velocidad del movimiento absoluto será $[v] \equiv [v'] + [v'']$, y MM_1 podrá representar el desplazamiento de este último movimiento.

(*) El enunciado de esta propiedad se conoce con el nombre de *teorema de Coriolis.*

Tomemos en la dirección de las velocidades los segmentos

$$Mm' = v' dt,\ Mm'' = v'' dt,\ Mm_1 = v dt$$

y uniendo los extremos de dichos segmentos con los puntos M', M'' y M_1, se obtienen las desviaciones elementales

$$D' = m' M',\ D'' = m'' M'',\ D = m_1 M_1$$

correspondientes a los movimientos relativos, de arrastre y absoluto.

El paso de la trayectoria relativa MM' a la posición final $M'' M_1$ puede verificarse trasladándose paralelamente a sí misma, como indica la figura 104, o inclinándose al mismo tiempo en uno u otro sentido, como expresa la figura 105. (*)

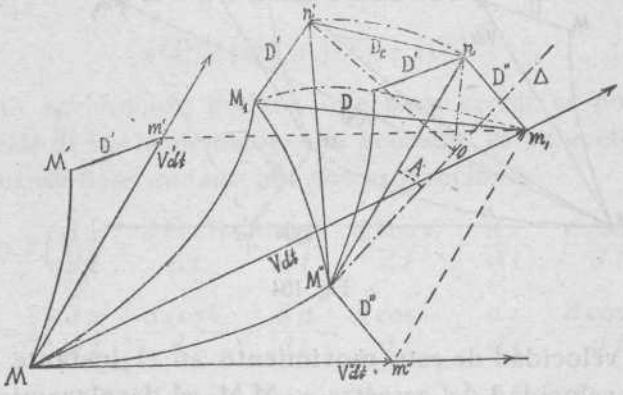


Fig. 105

En el primer caso se ve que la desviación del movimiento absoluto es suma gráfica de las desviaciones [D'] y

(*) Más adelante veremos que cualquiera que sea el movimiento general de un cuerpo geométrico, puede suponerse reducido a los dos movimientos expresados: una *traslación* y una *rotación* alrededor de un cierto eje.

$[D'']$ y multiplicando por $\frac{2}{dt^2}$ los dos miembros de la equipolencia

$$[D] \equiv [D'] + [D'']$$

se obtiene

$$[G] \equiv [G'] + [G''],$$

confirmándose la falta de aceleración complementaria, cuando el arrastre no modifica la dirección de los ejes móviles.

Pero en el segundo caso es preciso agregar al polígono sumatorio la *desviación complementaria* $[D_c]$, para formar la equipolencia

$$[D] \equiv [D'] + [D''] + [D_c],$$

de la que se deduce

$$[G] \equiv [G'] + [G''] + [G_c],$$

llamando $[G_c]$ a la aceleración complementaria que analíticamente se definió anteriormente y que, por la forma gráfica de obtenerla, nos dice claramente que *es, en cada instante, perpendicular a la dirección de la velocidad relativa.*

245. Valor modular, dirección y sentido de la aceleración complementaria.—Para determinar el valor modular y precisar más la dirección y sentido del vector $[G_c]$, observemos que si la rotación que ha producido la inclinación $n\,M''\,n'$ de la trayectoria relativa, se ha efectuado alrededor del eje permanente o instantáneo $M''\,\Delta$, el vector $[G_c]$, prolongación del arco $n\,n'$, será perpendicular al radio $o\,n$ y al eje de la rotación $M''\,\Delta$; esto nos dice que *la dirección de la aceleración complementaria es perpendicular al plano que determinan las direcciones de la velocidad relativa y el eje de la rotación del arrastre, siendo*

su sentido el que señala la dirección del giro de dicho arrastre.

El valor modular de $[G_c]$ se obtiene observando que es

$$G_c = 2\,\frac{D_c = nn'}{dt^2} = 2\,\frac{v'\,dt\,.\,\text{sen}\,A\,.\,d\psi}{dt^2} = 2\,v'\,\omega\,\text{sen}\,A\,,$$

siendo $\omega = \dfrac{d\psi}{dt}$ la velocidad angular de la rotación del arrastre y A el ángulo que forman la dirección de la velocidad relativa y el eje de la expresada rotación.

De la fórmula

$$G_c = 2\,v'\,\omega\,\text{sen}\,A$$

se deduce que G_c se reduce a *cero*, según ya se había visto, cuando sea $\omega = o$ o $v' = o$, y ahora encontramos, como nueva condición de nulidad para la aceleración complementaria, que la velocidad relativa tenga la dirección del eje de la rotación del arrastre.

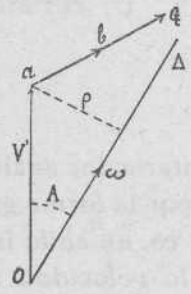


Fig. 106

Como resumen de estas consideraciones se deduce que si por un punto cualquiera o (fig. 106) se trazan dos vectores $[v']$ y $[\omega]$ equipolentes a la velocidad relativa y a la angular de la rotación del arrastre y construimos el subvector $[a\,b]$ que represente el momento de $[\omega]$ con relación al índice de $[v']$, este subvector será

$$a\,b = \omega\,.\,\rho = \omega\,v'\,\text{sen}\,A$$

y su duplo

$$2\,.\,a\,b = 2\,v'\,\omega\,\text{sen}\,A$$

representará en valor modular, dirección y sentido, la aceleración complementaria que el arrastre produce en el móvil considerado.

246. Expresión de las proyecciones de (G_c) en función de (ω) y (v').—La circunstancia anterior puede aprovecharse para expresar las proyecciones de $[G_c]$ sobre los ejes coordenados, en función de las componentes cartesianas de $[\omega]$ y $[v']$: supongamos que el punto o (fig. 106) es el origen de coordenadas y que por a trazamos tres ejes auxiliares paralelos a los coordenados; las proyecciones de $[G_c]$ sobre estos ejes serán iguales al duplo de los momentos de $[\omega]$ con relación a los mismos; así se obtiene **(34')**

$$G_{cx} = 2\left(q\frac{dz'}{dt} - r\frac{dy'}{dt}\right),$$

$$G_{cy} = 2\left(r\frac{dx'}{dt} - p\frac{dz'}{dt}\right),$$

$$G_{cz} = 2\left(p\frac{dy'}{dt} - q\frac{dx'}{dt}\right),$$

puesto que las coordenadas de a son las proyecciones de $[v']$ sobre los ejes coordenados.

247. Velocidad y aceleración lineal del movimiento relativo cuando se conocen el absoluto y el de arrastre.—Ya hemos visto cómo se pasa de las ecuaciones del movimiento absoluto a las del relativo y, una vez obtenidas estas últimas, se podrán determinar analíticamente todas las circunstancias cinemáticas del movimiento relativo; pero en la práctica suele bastar con el conocimiento de las velocidades y aceleraciones lineales y para hacer esta determinación se usan las propiedades siguientes, que son consecuencia inmediata de lo establecido en esta teoría.

1.ª *La velocidad lineal relativa de un punto se encuentra sumando gráficamente a su velocidad absoluta otra igual y de sentido contrario a la del arrastre.*

2.ª *La aceleración lineal relativa de un punto se encuentra sumando gráficamente a su aceleración lineal*

absoluta una igual y de sentido contrario a la del arrastre y otra igual y de sentido contrario a la complementaria. El vector igual y directamente opuesto a la aceleración complementaria suele llamarse *aceleración centrífuga compuesta;* su valor algébrico es

$$G_{cc} = -2\,v'\,\omega \operatorname{sen} A$$

y sus proyecciones sobre los ejes coordenanos estarán expresadas por las mismas fórmulas que se establecieron para las de G_c, cambiando los signos de los segundos miembros.

248. Aplicación de los principios del Algoritmo mecánico en la composición de movimientos.—Los principios establecidos en esta teoría demuestran que los desplazamientos y velocidades lineales y las velocidades angulares en las rotaciones alrededor de ejes concurrentes y paralelos, son magnitudes cinemáticas, que cumplen la condición primordial de las cantidades vectoriales, *de poderse expresar el efecto mecánico que producen dos de ellas, al obrar sobre un punto, por la diagonal del paralelogramo construido sobre las mismas* y esta condición permite hacer extensivas a esta clase de vectores todas las propiedades que en el Algoritmo mecánico se establecieron para las magnitudes mecánicas en general.

Respecto a las aceleraciones lineales podremos hacer lo mismo que con los desplazamientos y velocidades, siempre que se hagan intervenir las aceleraciones complementarias o centrífugas compuestas correspondientes, cuando los movimientos de arrastre, reales o supuestos, no cumplan las condiciones necesarias para que sean nulas estas últimas aceleraciones.

VII

EJEMPLOS ESPECIALES DE MOVIMIENTOS COMPUESTOS DE UN PUNTO

249. Composición de dos movimientos rectilíneos y uniformes.—Tomando las trayectorias de los movimientos componentes por ejes oX y oY y siendo $x = v' \,.\, t$ e $y = v'' \,.\, t$ las respectivas ecuaciones de estos dos movimientos, se obtiene para ecuación de la trayectoria del resultante

$$\frac{x}{v'} = \frac{y}{v''} \quad \text{o} \quad y = \frac{v''}{v'}\, x \,.$$

La ecuación del mismo resulta de integrar la expresión

$$de = \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy\cos\theta} =$$

$$= dt\sqrt{v'^2 + v''^2 + 2\,v\,v'\cos\theta} = v\,dt$$

y es $$e = v \,.\, t + e_0 = v \,.\, t \,,$$

representando por v la constante $\sqrt{v'^2 + v''^2 + 2\,v\,v'\cos\theta}$ y por θ el ángulo de las dos trayectorias.

Los resultados obtenidos nos dicen que *el movimiento resultante de dos rectilíneos y uniformes es también rectilíneo y uniforme.*

Si los movimientos componentes son más de dos se llegaría a la misma consecuencia, siendo en todos los casos la trayectoria del movimiento absoluto la línea de acción de la suma gráfica de las velocidades lineales componentes, en una posición cualquiera del punto móvil.

250. Composición de dos movimientos rectilíneos, uno uniforme y otro uniformemente variado.—Tomemos, co-

mo antes, por ejes coordenados las trayectorias de los dos movimientos componentes, correspondiendo el eje $o\,X$ al uniforme $x = v'\,t$ y el $o\,Y$ al uniformemente variado $y = v''\,t + \frac{1}{2}\,g\,t^2$.

La ecuación de la trayectoria es

$$y = v''\,.\,\frac{x}{v'} + \frac{1}{2}\,g\,\frac{x^2}{v'^2} = \frac{v''}{v'}\,x + \frac{g}{2\,v'^2}\,x^2 = a\,x + b\,x^2\,,$$

que representa una parábola de segundo grado con su eje paralelo al coordenado $o\,Y$.

Este movimiento es el que aproximadamente adquieren los objetos lanzados con una cierta velocidad, bajo la acción de la pesantez, y en la Dinámica nos ocuparemos con más extensión del mismo.

251. Composición de dos movimientos armónicos de la misma dirección y período.—Supongamos un punto solicitado por dos causas que separadamente tienden a imprimirle los movimientos armónicos

$$x' = a'\cos(\omega\,t - \varepsilon')\,,\quad x'' = a''\cos(\omega\,t - \varepsilon'')$$

sobre la misma recta, que tomaremos por eje coordenado $o\,X$. En el tiempo $d\,t$ experimentará el móvil un desplazamiento lineal $d\,x = d\,x' + d\,x''$, que integrado entre o y t y suponiendo que el origen se tome de modo que la constante de la integración sea nula, conduce a la ecuación del movimiento resultante

$$x = x' + x'' = a'(\cos\omega\,t\cos\varepsilon' + \operatorname{sen}\omega\,t\operatorname{sen}\varepsilon') +$$
$$+ a''(\cos\omega\,t\cos\varepsilon'' + \operatorname{sen}\omega\,t\operatorname{sen}\varepsilon'') = \cos\omega\,t\,(a'\cos\varepsilon' +$$
$$+ a''\cos\varepsilon'') + \operatorname{sen}\omega\,t\,(a'\operatorname{sen}\varepsilon' + a''\operatorname{sen}\varepsilon'');$$

pero si por un punto o (figura 107) trazamos dos segmen-

tos $o\,A' = a'$ y $o\,A'' = a''$ que formen con una dirección fija $o\,\Delta$ los ángulos ε' y ε'' y construimos el paralelogramo $o\,A$, cuya diagonal es la suma gráfica de las amplitudes de los movimientos componentes, tomadas en las direcciones señaladas por las épocas ε' y ε'', los dos paréntesis de la ecuación encontrada representan las proyecciones de $o\,A = a$ sobre el eje $o\,\Delta$ y sobre su perpendicular $o\,\Delta'$, o sea, llamando ε al ángulo de $o\,A$ con $o\,\Delta$

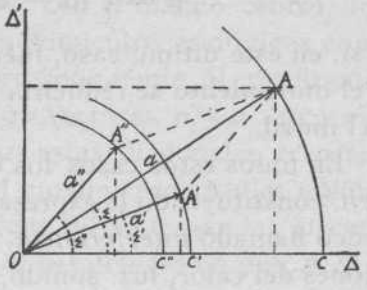


Fig. 107

$$a' \cos \varepsilon' + a'' \cos \varepsilon'' = a \cos \varepsilon\,,$$
$$a' \operatorname{sen} \varepsilon' + a'' \operatorname{sen} \varepsilon'' = a \operatorname{sen} \varepsilon\,;$$

con estas simplificaciones la ecuación del movimiento resultante es

$$x = a \cos \omega t \cos \varepsilon + a \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \varepsilon = a \cos (\omega t - \varepsilon)$$

y nos dice que *el movimiento resultante de dos armónicos simples de la misma dirección y período es también un movimiento armónico del mismo período que los componentes.*

La amplitud del movimiento resultante es

$$a = \sqrt{a'^2 + a''^2 + 2\,a'\,a'' \cos (\varepsilon' - \varepsilon'')}\,,$$

dependiendo, como expresa la fórmula, de la diferencia de las épocas ε' y ε'', o sea de la diferencia de fases de los movimientos componentes.

Cuando ε' y ε'' son iguales, la amplitud a es

$$a = \sqrt{(a' + a'')^2} = a' + a''$$

y si $\varepsilon' - \varepsilon'' = \pi$, será

$$a = \sqrt{(a' - a'')^2} = a' - a'',$$

y si, en este último caso, fueran iguales a' y a'', sería $a = o$ y el movimiento se reduciría a $x = o$, indicando el reposo del móvil.

En todos estos casos los dos movimientos *se interfieren*, constituyendo la expresada particularidad el fenómeno físico llamado *interferencia*, que se presenta en las aplicaciones del calor, luz, sonido, electricidad, etc. Cuando los movimientos vibratorios, que dan lugar al expresado fenómeno, tienen la misma fase, es $\varepsilon' = \varepsilon''$ y *se refuerzan;* cuando la diferencia de fases es $\varepsilon' - \varepsilon'' = \pi$, *se debilitan*, y el caso de $\varepsilon' - \varepsilon'' = \pi$ y $a' = a''$, en que el móvil queda en reposo, se llama *de interferencia absoluta.*

La época del movimiento resultante se determina por la fórmula

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{a' \text{ sen } \varepsilon' + a'' \text{ sen } \varepsilon''}{a' \cos \varepsilon' + a'' \cos \varepsilon''}$$

y por ella se ve que si los movimientos componentes tienen la misma fase es $\text{tg } \varepsilon = \text{tg } \varepsilon' = \text{tg } \varepsilon''$, y lo mismo cuando la diferencia de fases sea $\varepsilon' - \varepsilon'' = \pi$.

Si en el caso que estamos considerando fueran más de dos los movimientos armónicos componentes, se verificarían igualmente las propiedades demostradas, siendo

$$x = a \cos (\omega t - \varepsilon)$$

la ecuación del movimiento resultante, y

$$a = \sqrt{(\Sigma a_n \cos \varepsilon_n)^2 + (\Sigma a_n \text{ sen } \varepsilon_n)^2}, \quad \text{tg } \varepsilon = \frac{\Sigma a_n \text{ sen } \varepsilon_n}{\Sigma a_n \cos \varepsilon_n},$$

la amplitud y época del mismo, pudiéndose producir las interferencias, con refuerzo o debilitación, cuando las fa-

ses de los movimientos componentes sean iguales o se diferencien en π.

Si se suponen construidos, con el mismo centro, los diagramas circulares de los movimientos armónicos componentes, se obtendrá el correspondiente al resultante, trazando las diagonales de los vectores a' y a'', ν'_0 y ν''_0, G'_0 y G''_0 (*) y suponiendo que estas diagonales recorren sus círculos respectivos con el movimiento angular uniforme $\psi = \omega t - \varepsilon$; así, si en la figura 107 se trazan las circunferencias c, c' y c'' y se supone al paralelogramo $o\,A'\,A\,A''\,o$ girando alrededor de o, en la forma dicha, las proyecciones de A', A'' y A sobre $o\,\Delta$ señalarán las posiciones del móvil por efecto de cada uno de los movimientos componentes y por la del resultante. Análogamente se construirán los paralelogramos de las velocidades y aceleraciones.

252. Composición de movimientos armónicos de la misma dirección y distinto período.—Sean

$$x' = a \cos (\omega' t - \varepsilon') \text{ y } x'' = a \cos (\omega'' t - \varepsilon'')$$

los dos movimientos componentes, que supondremos de la misma amplitud a; la ecuación del movimiento resultante es

$$x = a\left[\cos (\omega' t - \varepsilon') + \cos (\omega'' t - \varepsilon'')\right] =$$
$$= 2\,a \cos (\omega_1 t - \varepsilon_1) \cos (\omega_2 t - \varepsilon_2),$$

representando por ω_1, ε_1, ω_2 y ε_2 las cantidades

$$\frac{\omega' - \omega''}{2},\ \frac{\varepsilon' - \varepsilon''}{2},\ \frac{\omega' + \omega''}{2} \text{ y } \frac{\varepsilon' + \varepsilon''}{2}.$$

El resultado obtenido se puede interpretar como un

(*) Si son más de dos los movimientos componentes, se trazarán las sumas gráficas de los sistemas vectoriales correspondientes, para obtener el diagrama del movimiento resultante.

movimiento vibratorio especial de amplitud A variable y regulada por las elongaciones del movimiento auxiliar

$$A = 2\,a \cos (\omega_1 t - \varepsilon_1) .$$

Los mínimos y máximos de A se corresponden con los de la función periódica $\cos (\omega_1 t - \varepsilon_1)$ y son, en valor absoluto, *cero* y $2\,a$; el período de transformación de la amplitud es

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{4\pi}{\omega' - \omega''} ,$$

siendo siempre diferente del

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{4\pi}{\omega' + \omega''}$$

que corresponde a la vibración resultante.

En la fase del movimiento en que A aumenta, los dos movimientos componentes *se refuerzan,* y cuando A disminuye *se debilitan;* los refuerzos y debilitaciones sucesivas se llaman *latidos* o *pulsaciones.*

Circunstancias análogas se presentarían cuando las amplitudes de los armónicos componentes fueran desiguales.

253. Composición de movimientos armónicos de igual período y distinta dirección.—Vibraciones elípticas.—Supongamos ahora que un punto (fig. 108) se encuentra solicitado por una causa capaz de producir sobre el mismo el movimiento armónico

$$x = a \cos (\omega t - \varepsilon)$$

y al propio tiempo exista otra que le obligue a seguir sobre distinta trayectoria el indicado por la ecuación

$$y = a' \cos (\omega t - \varepsilon') ;$$

las posiciones del móvil se encontrarán, en cada instante,

dando valores a t en las dos ecuaciones y calculando las coordenadas x e y correspondientes a los movimientos componentes.

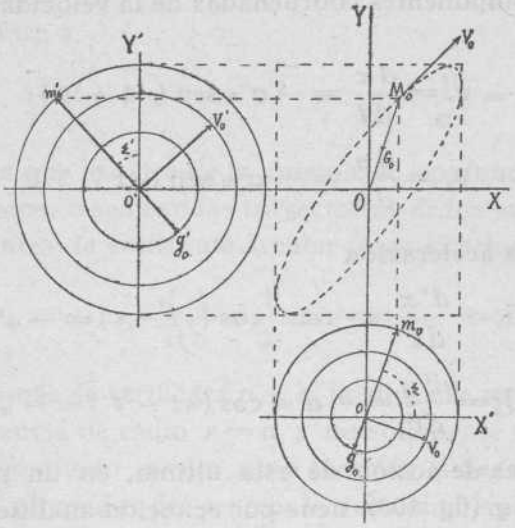


Fig. 108

Para encontrar la ecuación de la trayectoria seguida por el móvil, despejaremos $\cos \omega t$ y $\operatorname{sen} \omega t$ de las ecuaciones

$$x = a \cos \omega t \cos \varepsilon + a \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \varepsilon ,$$
$$y = a' \cos \omega t \cos \varepsilon' + a' \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \varepsilon' ,$$

y sustituyendo sus valores

$$\cos \omega t = \frac{x a' \operatorname{sen} \varepsilon' - y a \operatorname{sen} \varepsilon}{a a' \operatorname{sen} (\varepsilon - \varepsilon')} ,$$

$$\operatorname{sen} \omega t = \frac{y a \cos \varepsilon - x a' \cos \varepsilon'}{a a' \operatorname{sen} (\varepsilon - \varepsilon')} ,$$

en la relación $\cos^2 \omega t + \operatorname{sen}^2 \omega t = 1$, se obtiene

$$a'^2 x^2 + a^2 y^2 - 2 a a' \cos (\varepsilon' - \varepsilon) x y = a^2 a'^2 \operatorname{sen}^2 (\varepsilon' - \varepsilon) ,$$

que es la ecuación de una elipse, cuyo centro coincide con el origen de coordenadas (*), pero cuyos ejes pueden tener una dirección cualquiera respecto a los coordenados, en correlación con los valores de los parámetros a, a', ε y ε'.

Las componentes coordenadas de la velocidad del móvil son

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -a\,\omega\,\text{sen}\,(\omega\,t - \varepsilon)\,,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -a'\,\omega\,\text{sen}\,(\omega\,t - \varepsilon')\,,$$

y las de la aceleración

$$G_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\,\omega^2\cos(\omega\,t - \varepsilon) = -\omega^2\,x\,,$$

$$G_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -a'\,\omega^2\cos(\omega\,t - \varepsilon') = -\omega^2\,y\,.$$

La línea de acción de esta última, en un punto cualquiera $x'\ y'$ (fig. 108), tiene por ecuación analítica

$$\frac{x - x'}{G_{x'}} = \frac{y - y'}{G_{y'}} \quad \text{o} \quad y = \frac{y'}{x'}\,x$$

y demuestra que está dirigida constantemente hacia el centro de la trayectoria, verificándose la *uniformidad del movimiento areolar* del móvil, alrededor de dicho centro (235-1.ª).

El valor de la velocidad constánte de este movimiento areolar es

$$n = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,a\,a'\,\omega\,\text{sen}\,(\varepsilon' - \varepsilon)\,.$$

(*) Esto justifica el nombre de *vibración elíptica* que recibe esta clase de movimiento.

254. Casos particulares del movimiento vibratorio elíptico.—1.° Si en las ecuaciones generales de este movimiento se supone que la diferencia de fases de los dos componentes es $\varepsilon' - \varepsilon = \frac{\pi}{2}$, la ecuación de la trayectoria se reduce a

$$a'^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 a'^2 \quad \text{o} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a'^2} = 1$$

y nos dice que los ejes de la misma se confunden con los coordenados, o sea con las trayectorias de los movimientos componentes; la constante areolar toma el valor

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} a a' \omega .$$

Si además se verificara $a = a'$ la elipse se reduce a una circunferencia de radio $r = a$ y no sólamente será uniforme el movimiento areolar, sino también el lineal y angular del móvil alrededor del centro; la velocidad areolar es para estos casos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} a^2 \omega = \frac{1}{2} r^2 \omega$$

y la lineal y la angular serán **(209)**

$$v = \frac{2\frac{dA}{dt}}{r} = r\omega \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r} = \omega .$$

Estos resultados nos dicen que, recíprocamente a lo demostrado en el número **233**, todo movimiento circular uniforme se puede considerar resultante de dos armónicos simples situados sobre dos diámetros perpendiculares, cuyas amplitudes sean iguales al radio de la trayectoria; la constante ω de los movimientos componentes será la velo-

cidad angular del movimiento circular y las épocas respectivas los ángulos ε y $\varepsilon' = \varepsilon + \frac{\pi}{2}$ que el radio $o\,M$ (figura 109) forma con los ejes $o\,X$ y $o\,Y$, en la posición inicial del móvil.

Las ecuaciones de proyección de este movimiento circular uniforme son

$$x = r \cos(\omega t - \varepsilon),$$

$$y = r \cos\left(\omega t - \varepsilon - \frac{\pi}{2}\right) = r \operatorname{sen}(\omega t - \varepsilon).$$

2.° Cuando la diferencia de fases de los dos movimientos componentes sea $\varepsilon' - \varepsilon = o$, la trayectoria del resultante se reduce a la recta

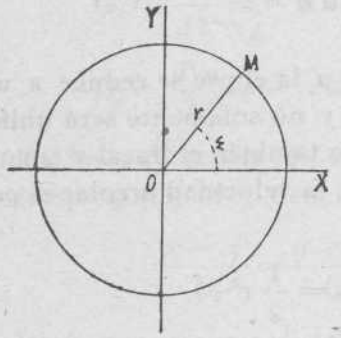


Fig. 109

$$a'x - ay = o \quad \text{o} \quad y = \frac{a'}{a}x$$

diagonal del paralelogramo o rectángulo construído sobre a y a', siendo, por consiguiente, una vibración rectilínea del mismo período y época que las dos vibraciones componentes y variando únicamente su amplitud, que está expresada por la referida diagonal.

Lo mismo ocurre cuando la diferencia de fases es $\varepsilon' - \varepsilon = \pi$; pero la trayectoria de la vibración resultante es $y = -\frac{a'}{a}x$, que corresponde a la diagonal construida sobre a' y $-a$.

255. Determinación gráfica de la trayectoria, velocidad y aceleración del móvil en el movimiento vibratorio elíptico.—Construyendo los diagramas circulares de los movi-

mientos armónicos componentes del vibratorio elíptico, se puede determinar gráficamente la posición, velocidad y aceleración del móvil en un instante cualquiera.

En la figura 108 se indica la manera de situar dichos diagramas, con la posición de los vectores

$$[o\,m_o],\quad [o\,v_o],\quad [o\,g_o],$$

que corresponden a la posición inicial M_o del móvil en el movimiento proyectado sobre el eje $O\,X$, y la de los vectores

$$[o'\,m'_o],\quad [o'\,v'_o],\quad [o'\,g'_o],$$

que tienen la misma significación para el eje $O\,Y$; si suponemos formadas las ecuaciones de los movimientos angulares uniformes de los citados vectores, que son

$$\psi = \omega\,t - \varepsilon,\quad \psi' = \omega'\,t - \varepsilon',$$

bastará dar a t un valor cualquiera, situar dichas funciones gráficas en las posiciones que resulten de los ángulos ψ y ψ' y las proyecciones de $o\,m_o$ y $o'\,m'_o$ señalarán las coordenadas del punto vibrante, las de $o\,v_o$ y $o'\,v'_o$ las componentes coordenadas de su velocidad lineal y, por último, las de $o\,g_o$ y $o'\,g'_o$ expresarán las de la aceleración del mismo móvil.

256. Composición de dos movimientos circulares uniformes sobre la misma circunferencia.—Cuando existen dos causas que traten de producir, independientemente una de otra, en un cierto punto M los movimientos

$$\psi = \omega\,t - \varepsilon,\quad \psi' = \omega'\,t - \varepsilon,$$

sobre la circunferencia de radio $o\,M = r$ (fig. 109), puede obtenerse el movimiento resultante descomponiendo a cada uno de ellos en los armónicos

$$x = r\cos(\omega\,t - \varepsilon),\quad y = r\,\mathrm{sen}\,(\omega\,t - \varepsilon),$$
$$x = r\cos(\omega'\,t - \varepsilon),\quad y = r\,\mathrm{sen}\,(\omega'\,t - \varepsilon)$$

y combinar los dos de cada eje, para obtener en definitiva las ecuaciones

$$x = 2\,r\,\cos\frac{\omega-\omega'}{2}\,t \times \cos\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\,t - \varepsilon\right),$$

$$y = 2\,r\,\text{sen}\,\frac{\omega-\omega'}{2}\,t \times \text{sen}\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\,t - \varepsilon\right).$$

Estas ecuaciones revelan la existencia de un movimiento resultante de otros dos vibratorios de amplitudes variables, que se reducen a armónicos simples de amplitud constante, $A = 2\,r$, cuando $\omega = \omega'$.

Si en algún caso particular fuese $\omega = -\omega'$ y $\varepsilon = o$ se presenta la particularidad notable de ser

$$x = 2\,r\,\cos\omega\,t \quad \text{e} \quad y = o,$$

que nos dice que *el movimiento resultante de dos circulares uniformes, con velocidades angulares iguales y de sentido contrario, es un movimiento armónico simple, situado sobre la recta que une la posición inicial del móvil con el centro de los movimientos circulares.*

VIII

OTRAS APLICACIONES DE LA TEORÍA DEL MOVIMIENTO RELATIVO

257. Sector abordable en los globos dirigibles. — Cuando un globo dirigible se mueve en una admósfera tranquila, puede dirigirse en todas las direcciones con la velocidad propia [v'], desarrollada por el esfuerzo de su motor; pero si la masa de aire que lo envuelve está dotada de una velocidad de arrastre [v_a], la absoluta del móvil se obtendrá componiendo esta última con la propia o relativa [v'], pu-

diendo suceder, en consecuencia, que el globo pueda marchar en ciertas direcciones y le sea imposible verificarlo en otras.

El ángulo que forman las direcciones extremas en que, a derecha e izquierda, puede marchar el dirigible, se llama *sector abordable* por el mismo y su determinación se efectúa por la construcción siguiente: a partir de M, situación del móvil (fig. 110), trácese en la dirección del viento el vector $[v_a]$ y, haciendo centro en el índice del mismo, la circunferencia $A\,B\,N$, de radio v'; las dos tangentes $M\,A$ y $M\,B$ trazadas desde M a esta circunferencia, señalan el sector $A\,M\,B$ que comprende las direcciones en que el globo puede marchar; en efecto, teniendo que ser $[v] \equiv [v_a] + [v']$, el índice de $[v]$ tiene que estar sobre la circunferencia trazada y toda recta, tal como la $M\,A'$, que no corte a dicha circunferencia, imposibilita la formación de la equipolencia $[v] \equiv [v_a] + [v']$ y no puede ser línea de acción de $[v]$; en cambio, las situadas dentro del sector $A\,M\,B$, tal como la $M\,A''\,A'''$, nos indican que orientando al dirigible en la dirección $M\,Q$ o $M\,P$, el globo marchará en la señalada por dicha recta con la velocidad absoluta

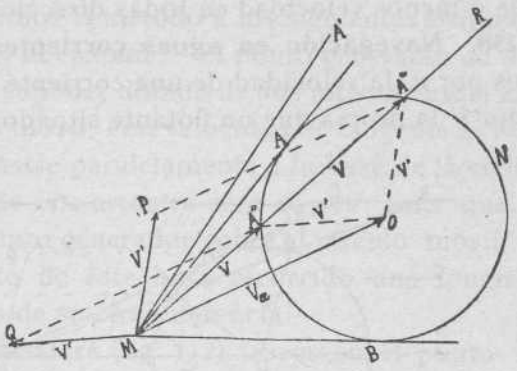


Fig. 110

$$v = MA'' \quad \text{o} \quad v = MA'''.$$

Es evidente que en las aplicaciones se orientará el eje

del globo, para marchar en una dirección determinada MR, en la que señale la recta MP, que más se aproxime a la dirección del viento, pues así se obtiene una velocidad absoluta mayor que la que se obtendría orientando al globo en la dirección MQ.

Si la velocidad v_a del viento es igual a la propia del dirigible, el sector abordable está formado por el semicírculo situado al frente del globo, en la dirección del viento, y se ve que si v' es mayor que v_a, el dirigible podrá marchar con más o menos velocidad en todas direcciones.

258. Navegación en aguas corrientes.—Si representamos por v_a la velocidad de una corriente de agua (fig. 111) y por v' la propia que un flotante situado en M puede des-

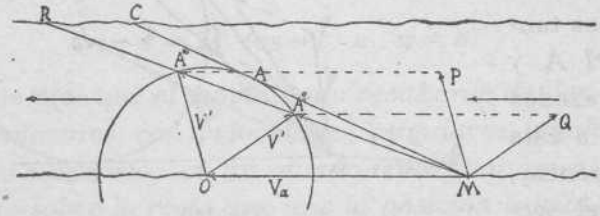


Fig. 111

arrollar, se obtendrá el punto más próximo C de la orilla opuesta, a donde el flotante puede llegar, por la misma construcción indicada en el caso de los globos dirigibles y las rectas MP y MQ señalarán, lo mismo que antes, las direcciones en que el flotante tiene que orientarse si se propone llegar al punto R.

Cuando v' sea mayor que v_a, podrá el flotante navegar agua arriba, con la velocidad absoluta $v = v' - v_a$.

259. Trazado de tangentes por el método de Roverval.—Los principios cinemáticos de la teoría del movimiento relativo proporcionan, en muchos casos, procedimientos geométricos para trazar tangentes a ciertas curvas con re-

lativa facilidad: el fundamento del método, llamado *de Roverval,* consiste en suponer la curva como trayectoria de un movimiento absoluto, descomponiendo a éste en otros dos cuya dirección y relación de velocidades sea fácil determinar, pues trazando después la diagonal del paralelogramo que forman las dos velocidades auxiliares componentes, se tendrá la velocidad del movimiento absoluto imaginado sobre la curva dada, que será, evidentemente, la tangente que se desea trazar. Para indicar la manera de proceder, aplicaremos el método a los siguientes ejemplos:

1.° *Tangente a la cicloide.*—El punto generador de una cicloide se puede suponer dotado de dos movimientos: uno relativo al círculo móvil, con velocidad v' tangente al mismo, y otro de arrastre paralelamente a la base de la cicloide; la velocidad de este arrastre será $v_a = v'$ para que al dar la vuelta el punto generador sobre el círculo móvil, el punto de contacto de éste haya recorrido una longitud igual al desarrollo de su circunferencia.

Siendo $v' = v_a$ bastará (fig. 112) trazar en el punto M, donde se quiere construir la tangente, la circunferencia generadora, señalar la tangente $M\,a$, y sobre esta recta y la $M\,b$, paralela a la base, construir un rombo cualquiera cuya diagonal será la tangente a la cicloide.

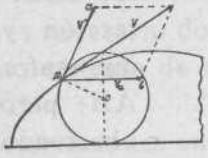


Fig. 112

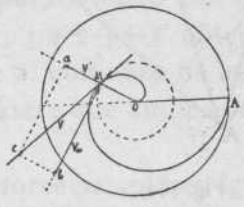


Fig. 113

2.° *Tangente a la espiral de Arquímedes.*—El punto generador de esta curva se puede suponer dotado de dos movimientos: uno relativo sobre el radio $o\,A = r$ (fig. 113)

con velocidad cualquiera $v' = \frac{r}{t}$ y otro de arrastre circular, ocasionado por el giro de este radio alrededor de o, con la velocidad angular

$$\omega = \frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi v'}{r};$$

este último produce en el punto generador la velocidad lineal de arrastre

$$v_a = \omega \cdot \rho = 2\pi v' \times \frac{\rho}{r}.$$

Siendo la relación $\frac{v'}{v_a} = \frac{r}{2\pi\rho}$, se deduce la construcción siguiente: sobre el radio Ma y su perpendicular Mb se toman dos segmentos que verifiquen esta relación y la diagonal Mc del rectángulo consiguiente es la tangente a la espiral en el punto M.

260. Movimiento relativo de un punto con relación a otro móvil.— Supongamos un punto B moviéndose sobre una trayectoria cualquiera (fig. 114) y un observador colocado en el punto fijo A; este observador se dará cuenta de la movilidad de B por los cambios de dirección y longitud que sufre la recta AB; pero si dicho observador se mueve, a su vez, sobre otra trayectoria, siendo A, A', A'', A'''... (fig. 115) las posiciones correlativas a las B, B', B'', B'''... del primer móvil, las apariencias del movimiento observado, indicadas por las direcciones y longitudes AB, $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ ...,

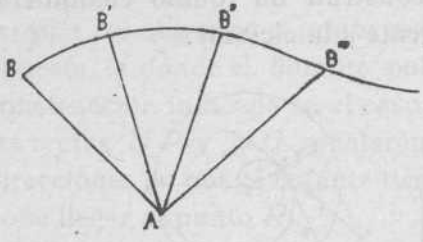


Fig. 114

serán completamente diferentes de las del caso anterior.

Si ahora trazamos por un punto fijo A_1 las rectas A_1B_1, $A_1B'_1$, $A_1B''_1$, $A_1B'''_1$ iguales y paralelas a las anteriores, se obtendrá una curva especial $B_1B'_1B''_1B'''_1\ldots$, sobre la cual se mueve un punto ficticio B_1, cuyas circunstancias de movimiento relativas al punto A_1 son las mismas que las del móvil B respecto al observador A; la trayectoria $B_1B'_1B''_1B'''_1\ldots$ se llama *trayectoria relativa de B con relación a A*, y lo mismo se construiría la de A con relación a B, que se ve fácilmente es una curva simétrica de la anterior, con relación al punto donde se suponga colocado el observador fijo.

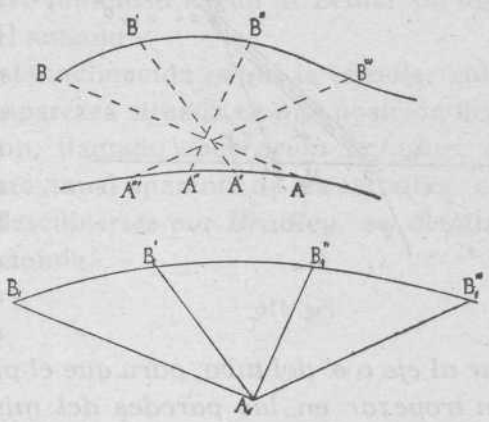


Fig. 115

La velocidad de estos movimientos relativos se obtiene componiendo la propia del punto móvil con otra igual y contraria a la del observador, pues para obtener la fijeza del mismo es necesario dotar al conjunto de los dos móviles de un movimiento de arrastre que anule el que tiene el observador.

Las consideraciones anteriores se aplican igualmente al caso de que el observador A esté en movimiento y el punto observado B sea fijo; en este caso se obtiene para trayectoria relativa de B, con relación a A, una curva simétrica de la trayectoria real del punto A, y si ésta es plana será aquélla superponible a la misma. Según esto, la tra-

yectoria aparente del sol, con relación a la tierra, será una elipse igual a la que la tierra describe alrededor del sol y la velocidad relativa de aquel movimiento es, en cada posición, paralela y de sentido contrario a la real que tiene la tierra en la posición correlativa.

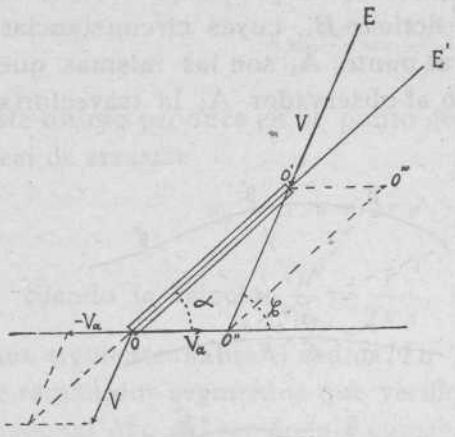


Fig. 116

261. Problema.— *Un punto llega, animado de una velocidad* (v), *al extremo de un tubo* (figura 116) *que se traslada paralelamente a sí mismo con la velocidad* (v_a), *¿qué dirección habrá que dar al eje o o' del tubo, para que el punto llegue al fondo sin tropezar en las paredes del mismo?*— Supongamos sea α el ángulo pedido; esto exige que, en el tiempo que el punto recorre el espacio $o' o'' = v\,t$, el tubo se ha de trasladar de $o\,o'$ a $o''\,o'''$, recorriendo un espacio $o\,o'' = v_a \,.\, t$, y, por tanto,

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\beta-\alpha)} = \frac{o'\,o''}{o\;o''} = \frac{v}{v_a},$$

de cuya relación podrá despejarse el ángulo buscado α (*); cuando β sea igual a 90° es $\alpha = \text{áng}\left(\text{tg} = \frac{v}{v_a}\right)$.

Cuando v sea muy grande con relación a v_a la diferencia

(*) Gráficamente se vé que la dirección $o\,o'$ es paralela a la diagonal del paralelogramo construido, en cualquier punto, sobre las velocidades $[v_a]$ y $-[v]$ o sobre $[v]$ y $-[v_a]$.

$\beta - \alpha$ es inapreciable y esto ocurre, por ejemplo, cuando se compara la velocidad de la luz con la relativa de los puntos materiales situados sobre la superficie terrestre; pero no ocurre lo mismo al comparar dicha velocidad con la del arrastre que la traslación de la tierra alrededor del sol, comunica a todos los objetos situados sobre ella; esto exige que al observar una estrella con un anteojo o telescopio, este aparato se incline en el sentido del movimiento de la tierra, para que el rayo luminoso llegue al ocular sin incidir en las paredes del anteojo.

El resultado de esta inclinación es que la estrella, colocada en E (fig. 116), aparezca situada en una posición ficticia E' y este fenómeno, llamado *aberración de la luz,* da lugar a un movimiento anual aparente de las estrellas, cuyas circunstancias, descubiertas por *Bradley*, se detallan en el curso de Astronomía.

CAPITULO SEGUNDO

Cinemática del sólido o cuerpo geométrico

I

MOVIMIENTOS SIMPLES DE UN CUERPO GEOMÉTRICO.—COMPOSICIÓN DE LOS MISMOS

262. Condiciones que fijan la posición de un sólido en el espacio.—El movimiento de un cuerpo indeformable queda determinado cuando se tienen elementos suficientes para señalar, en un instante dado, la posición de tres de sus puntos; parece, pues, que se necesitarán nueve ecuaciones de relación entre las coordenadas de los tres puntos y el tiempo; pero como la indeformabilidad del móvil permite establecer tres ecuaciones independientes del tiempo entre dichas coordenadas, resulta, en resumen, que el número de condiciones que se necesitan, para fijar la posición de un sólido en el espacio, son seis.

Estas seis condiciones suelen ser seis ecuaciones de la forma

$$f(x_1\, y_1\, z_1\, x_2\, y_2\, z_2\, x_3\, y_3\, z_3\, t) = o\,;$$

en algunos casos es más cómodo utilizar las coordenadas eulerianas del sólido, trazando en el interior de éste un triedro $o'\, X'\, Y'\, Z'$, que se supone unido invariablemente al mismo y cuya situación quedará definida, cuando se conozcan las ecuaciones del movimiento del vértice o' $(a,$

b, c) y tres relaciones de la forma $f(\varphi\,\psi\,\theta\,t) = o$, que permitan calcular, en función de t, las coordenadas eulerianas del triedro, que se refieren al sólido propuesto.

En todos los casos, las seis ecuaciones que relacionan con el tiempo a las variables $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ o a las a, b, c, φ, ψ y θ, constituyen las *ecuaciones del movimiento general del sólido*, por poderse deducir de ellas la trayectoria y demás circunstancias del movimiento de uno cualquiera de sus puntos, en la forma que vamos a exponer.

263. Determinación de la trayectoria y circunstancias del movimiento de un punto cualquiera del sólido.—Sea el punto $M(x'\,y'\,z')$, cuyas distancias a los tres directores del movimiento, $A(x_1\,y_1\,z_1)$, $B(x_2\,y_2\,z_2)$ y $C(x_3\,y_3\,z_3)$ son conocidas; estas distancias se podrán expresar por las ecuaciones

$$d = \sqrt{(x' - x_1)^2 + (y' - y_1)^2 + (z' - z_1)^2},$$

$$d' = \sqrt{(x' - x_2)^2 + (y' - y_2)^2 + (z' - z_2)^2},$$

$$d'' = \sqrt{(x' - x_3)^2 + (y' - y_3)^2 + (z' - z_3)^2},$$

en las que sustituyendo los valores de $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ en función del tiempo, podrá llegarse a las ecuaciones

$$x' = f_1(t), \quad y' = f_2(t), \quad z' = f_3(t),$$

que resuelven los problemas referentes al movimiento del punto M.

Análogamente se procedería cuando las ecuaciones dadas se refieran a las coordenadas eulerianas del cuerpo móvil.

264. Relación constante que liga a las velocidades lineales de los diversos puntos de un sólido.—Los cálculos laboriosos a que da lugar el método indicado en el número

anterior, para estudiar las circunstancias del movimiento de cada punto de un sólido, se simplifican en la mayoría de los casos haciendo uso de relaciones especiales, que se establecen entre dichas circunstancias, y de la propiedad notable que expresa el siguiente teorema, considerado como fundamental en la cinemática de los sólidos geométricos.

TEOREMA.—*Las proyecciones de la velocidad lineal de dos puntos de un sólido geométrico, sobre la recta que une estos dos puntos, son iguales en todos los instantes del movimiento de dicho sólido.* Sean A y B (figura 117) los dos puntos considerados, $[v]$ y $[v']$ sus velocidades que forman con AB los ángulos α y β y supongamos que en el tiempo dt pasan a ocupar estos puntos las posiciones A' y B'. Como el ángulo de $A'B'$ con AB es infinitamente pequeño y la indeformabilidad del sistema exige que sea $A'B' = AB$, podremos establecer las siguientes igualdades:

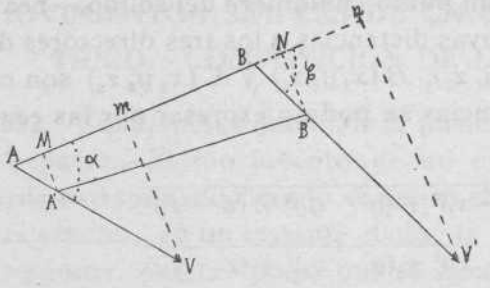


Fig. 117

$$MN = A'B' = AB, \quad AM = AA' \cos\alpha = BN = BB' \cos\beta;$$

pero $AA' = v\,dt$ y $BB' = v'\,dt$, luego

$$v\,dt \cos\alpha = v'\,dt \cos\beta \quad \text{y} \quad v \cos\alpha = v' \cos\beta.$$

264'. De esta propiedad se deduce que conocidas las velocidades de tres puntos de un sólido, se determinan las de otro cualquiera M, por sus proyecciones sobre las rectas que resultan de unir con M a los tres primeros puntos;

así, si en la figura 118 son $[v']$, $[v'']$, $[v''']$ las velocidades de A, B y C se trazarán los segmentos

$$Ma' = Aa, \quad Mb' = Bb, \quad Mc' = Cc$$

y éstos serán las proyecciones de $[v]$ sobre las rectas MA, MB y MC: el punto de intersección de los planos perpendiculares a estas rectas, en a', b' y c' determinarán el índice del vector $[v]$.

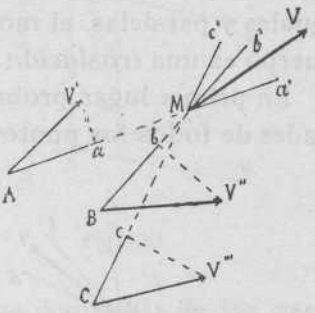


Fig. 118

Como caso particular de esta construcción, se ve que si la velocidad de A fuera perpendicular a la recta AM, en las mismas condiciones se encontrará la de este punto; si la de B es también perpendicular a BM el vector $[v]$ será perpendicular al plano AMB y, como caso extremo, si las tres velocidades $[v']$, $[v'']$ y $[v''']$ fueran perpendiculares a AM, BM y CM, el punto M estaría en reposo, y, recíprocamente, *si el sólido tiene un punto en reposo, las velocidades de todos los demás serán perpendiculares a la recta que los una con el punto fijo.*

265. Movimientos simples de un sólido. – Un sólido con tres puntos fijos, no situados en línea recta, no puede tener, sin deformación, movimiento alguno; será necesario para que el movimiento exista que el sólido tenga dos, uno o ningún punto fijo.

Es evidente que al tener un sólido dos puntos fijos, lo estarán también todos los de la recta que los une y los demás describirán, alrededor de ésta, trayectorias circulares cuyos planos son perpendiculares a la recta fija y cuyos centros coinciden con la misma; este movimiento especial se llama *de rotación alrededor de un eje* y juntamente con el de *traslación* que ahora vamos a definir, constitu-

yen los llamados *movimientos simples* de los sistemas móviles, por poderse reducir a uno de los dos, o a una combinación de ambos, todos los demás movimientos de un cuerpo.

266. Movimiento de traslación.—Cuando las velocidades de todos los puntos de un sólido son, en cada instante, iguales y paralelas, el movimiento de que está animado el cuerpo es una *traslación*.

En primer lugar probaremos que, para que las velocidades de todos los puntos de un sólido sean iguales y paralelas, basta reconocer que esta condición se verifica en tres puntos del mismo; sean éstos los A, B y C de la figura 119 y tomemos un cuarto punto M del sólido; las proyecciones de $[v]$ sobre MA, MB y MC son las que $[v']$, $[v'']$ y $[v''']$ producen respectivamente sobre las mismas rectas, pero siendo equipolentes las tres últimas velocidades, las proyecciones de $[v']$ sobre MB y MC serán Mb' y Mc' y teniendo $[v]$ las mismas proyecciones que $[v']$ sobre tres rectas, estos dos vectores serán iguales y paralelos, como queríamos demostrar.

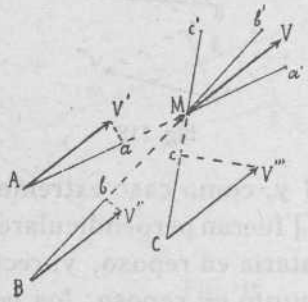


Fig. 119

En el movimiento de traslación tiene lugar la propiedad característica de que *todas las rectas que puedan imaginarse uniendo puntos del sólido, se conservan paralelas a su primitiva posición durante todo el movimiento* y, recíprocamente, *si las rectas que unen a los diversos puntos del sólido, se mueven conservando el paralelismo a su primitiva posición, el movimiento es de traslación.*

Sean A y B dos puntos del sólido (fig. 120) que con sus

velocidades iguales y paralelas pasan sucesivamente a las posiciones simultáneas A' y B', A'' y B'', etc.; la figura $A\,B\,B'\,A'$, por ser $A\,A' = v\,d\,t$ igual a $B\,B' = v_1\,d\,t$ es un paralelogramo y $A'\,B'$ paralela a $A\,B$; lo mismo se vería que esta recta en la posición $A''\,B''$, y en todas las demás se conserva paralela a su primitiva dirección $A\,B$.

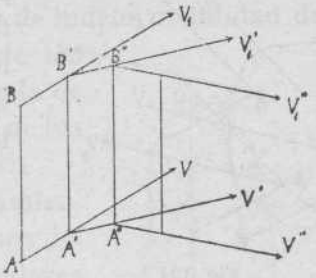


Fig. 120

Para demostrar la recíproca observaremos que siendo $A'\,B'$ igual y paralela a $A\,B$, será $A\,A'$ igual y paralela a $B\,B'$ y de la igualdad y paralelismo de estos segmentos se deduce la de los vectores $[v]$ y $[v_1]$, y lo mismo en todos los demás puntos del sólido y en todos los instantes del movimiento.

267. Representación gráfica de los movimientos de traslación.—Para indicar que un sólido está animado de un movimiento de traslación, se le aplica, en un punto cualquiera, un vector $[v]$ que señale el valor modular, dirección y sentido de la velocidad de todos sus puntos; estos vectores se llaman, por su significación, *traslaciones*, y por su índole se ve que tienen su línea de posición indiferente.

268. Composición de traslaciones.—La representación vectorial de las traslaciones proporciona el medio de efectuar, con estas magnitudes mecánicas, las operaciones de composición y descomposición estudiadas en el Algoritmo mecánico; pero esto exige la demostración previa del siguiente teorema:

TEOREMA.—*Cuando un sólido está animado de dos movimientos simultáneos* (*) *de traslación, el movimiento*

(*) Recuérdese, sobre el concepto de esta simultaneidad de movimientos, lo dicho en la composición de movimientos de un punto.

absoluto del mismo es otra traslación representada por la diagonal del paralelogramo construido sobre las dos primeras. En efecto, si el cuerpo S está animado de las dos traslaciones $[v']$ y $[v'']$ (fig. 121), los puntos A, B, etc., del sólido estarán dotados de las velocidades absolutas

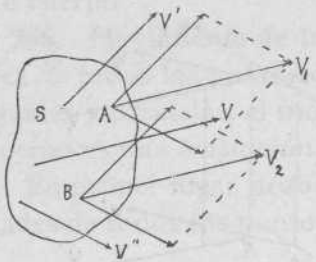


Fig. 121

$$[v_1] \equiv [v'] + [v''] ,$$
$$[v_2] \equiv [v'] + [v''] ,$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$

siendo equipolentes todas entre sí, lo que prueba que el movimiento que le resulta al sólido por la combinación de las traslaciones $[v']$ y $[v'']$, es otra traslación $[v] \equiv [v'] + [v'']$.

Si en vez de dos traslaciones componentes, fueran más, se verificaría igualmente

$$[v] \equiv [v'] + [v''] + [v'''] + \ldots .$$

269. Movimiento de rotación alrededor de un eje.—Ya dijimos que cuando un sólido tiene dos puntos fijos todos los demás adquirían movimientos circulares alrededor de la recta o *eje* que los unía, siendo los planos de dichos círculos perpendiculares al eje y estando sobre esta recta los centros de todas las trayectorias individuales.

Si ahora suponemos que para estudiar los desplazamientos angulares de cada punto del sólido, se toma como centro el de la trayectoria respectiva, tiene lugar la propiedad característica que expresa el siguiente enunciado: *en el movimiento de rotación de un sólido alrededor de un eje los desplazamientos angulares de todos los puntos, con relación al centro de su trayectoria, en un intervalo de tiempo cualquiera, son iguales.* En efecto, si en el tiem-

po $\Delta t = t_2 - t_1$ han pasado los puntos A y B (fig. 122) a las posiciones A' y B', los desplazamientos angulares

$$\psi = A\,C\,A' \quad \text{y} \quad \psi' = B\,C'\,B'$$

serán iguales por la condición de indeformabilidad del sólido, que exige la igualdad de los diedros $A\,o\,o'\,B$ y $A'\,o\,o'\,B'$ y la de estos diedros lleva consigo la de los $A\,o\,o'\,A'$ y $B\,o\,o'\,B'$ o sea $\psi = \psi'$.

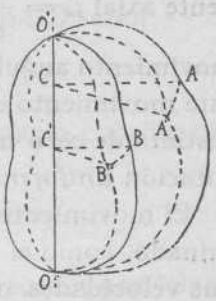


Fig. 122

Siendo iguales los desplazamientos angulares de todos los putos del sólido, las velocidades angulares medias, en cualquier intervalo de tiempo, y las correspondientes a un instante cualquiera, serán comunes para todos ellos: esta velocidad angular, común a todos los puntos, se llama *velocidad angular del sólido* en su rotación alrededor del eje y se representa gráficamente por un vector $[\omega] = \dfrac{d\,[\psi]}{d\,t}$ situado sobre dicho eje; este vector, por su significación, recibe el nombre de *rotación* y por su naturaleza se ve que tiene el punto de aplicación indiferente dentro de su línea de posición.

270. Ecuación del movimiento angular de un sólido en la rotación alrededor de un eje.—La relación

$$f(\psi\,t) = o \quad \text{o} \quad \psi = f(t),$$

que relaciona con el tiempo a los desplazamientos angulares del sólido (*), constituye la ecuación de su movimiento angular y de ella, por derivación, se deduce la velocidad

(*) *Desplazamientos angulares del sólido* son los ángulos descritos por los diversos planos que, pasando por el eje, se supongan unidos al cuerpo móvil; son los mismos desplazamientos que corresponden a cada uno de los puntos del sólido y se miden con relación a uno de los citados planos que se imagine permaneciendo fijo.

angular del mismo $\omega = \frac{d\psi}{dt} = f'(t)$, o sea el valor de la rotación.

La derivada gráfica $[j] = \frac{d[\omega]}{dt}$, reducida a su componente axial $j_a = \frac{d\omega}{dt} = f''(t)$, expresa la aceleración del movimiento angular del sólido y su anulación indicará que este movimiento es *uniforme*, así como el ser constante y distinta de *cero* nos dirá que se trata de un movimiento de rotación *uniformemente variado*.

El movimiento de rotación de un sólido quedará determinado, como el de un punto, cuando se nos dé la ley de sus velocidades o aceleraciones angulares, con tal que se señale la posición inicial del cuerpo en el primer caso, y este dato, con la velocidad inicial del mismo, en el segundo.

271. Ecuación del movimiento lineal de un punto cualquiera del sólido.—Si de la ecuación del movimiento angular de un sólido, se desea pasar a la lineal de un punto cualquiera de éste, bastará multiplicar por la distancia del punto al eje (radio de giro del citado punto) y se obtendrá la ecuación que se pide; pues en estos movimientos el desplazamiento lineal de un punto, en cualquier intervalo de tiempo, es igual al radio por el ángulo descrito; así tendremos,

$$e = r\psi = rf(t), \quad v = \frac{de}{dt} = r\omega = rf'(t),$$

$$G_t = rj = rf''(t), \quad G_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = r\omega^2,$$

para expresar las circunstancias del movimiento lineal de un punto cualquiera.

Si representamos por p, q y r las componentes coordenadas de la rotación $[\omega]$, se podrán expresar las proyec-

ciones de la velocidad lineal de un punto del sólido, sobre los ejes coordenados, por las ecuaciones establecidas en el número **212**

$$v_x = q\,z - r\,y\,, \quad v_y = r\,x - p\,z\,, \quad v_z = p\,y - q\,x\,,$$

que evidentemente son aplicables a la rotación del sólido; si el eje del movimiento es el coordenado $o\,Z$ serán

$$v_x = -\,\omega\,y\,, \quad v_y = \omega\,x\,, \quad v_z = o$$

y si el eje de la rotación es paralelo al mismo coordenado, sin confundirse con él, se tiene

$$v_x = -\,\omega\,(y - b), \quad v_y = \omega\,(x - a)\,, \quad v_z = o\,.$$

272. Composición de rotaciones concurrentes y paralelas.— La representación vectorial de los movimientos de rotación de un sólido, en la forma expresada en el número **269**, permite aplicar a estas magnitudes mecánicas los principios de la composición y descomposición vectorial; basta para ello observar que, según lo demostrado en el número **242'**, si el sólido está animado de dos rotaciones concurrentes o paralelas, el movimiento de cada punto tiene lugar como si fuera una sola rotación alrededor de la diagonal construida sobre las rotaciones componentes, luego el movimiento absoluto del sólido, en los casos expresados, podrá representarse por la referida rotación resultante.

273. Pares de rotaciones.—Su equivalencia.—Como caso particular se presenta la composición de dos rotaciones paralelas, iguales y de sentido contrario, o sea *un par* de rotaciones: la velocidad lineal de un punto cualquiera del sólido está representada, en cada instante, por el momento respecto al punto escogido de las dos rotaciones componentes y siendo el momento de un par constante en valor modular, dirección y sentido, se deduce la notable consecuencia de que *el movimiento de un sólido, resultante de*

dos rotaciones paralelas, iguales y de sentido contrario, es una traslación. La dirección de esta traslación es perpendicular al plano del par de rotaciones y su valor algébrico es el del momento de dicho par.

Recíprocamente podrán sustituirse, cuando convenga, las circunstancias cinemáticas de la traslación de un sólido, por las producidas por un par de rotaciones, situado en un plano perpendicular a la traslación, y cuyo momento tenga el valor algébrico de la misma.

274. Composición de rotaciones situadas sobre ejes que se cruzan.—Sean $[\omega']$ y $[\omega'']$ (fig. 123) las rotaciones simultáneas de un sólido, situadas sobre ejes que se cruzan; el estado cinemático del móvil no se alterará introduciendo en *o*, punto arbitrario de $[\omega'']$, dos rotaciones iguales y opuestas $[\omega_1']$ y $[\omega_2']$, que supondremos paralelas e iguales en valor modular a $[\omega']$; pero las dos rotaciones $[\omega'']$ y $[\omega_2']$ pueden sustituirse por una sola $[\omega]$ y el par $[\omega', \omega_1']$ equivale a la traslación $[v] = M_o\,[\omega']$; de aquí se deduce que dos rotaciones simultáneas de un sólido, situadas sobre ejes que se cruzan, pueden sustituirse por una sola rotación $[\omega] \equiv [\omega'] + [\omega'']$ y una traslación $[v]$ de valor variable, como dependiente del punto escogido para verificar la reducción de los dos movimientos.

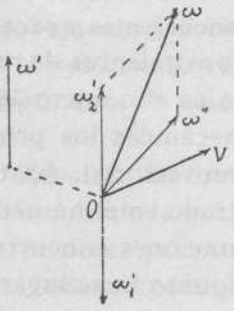


Fig. 123

La sustitución anterior puede efectuarse de infinitas maneras, cambiando el centro de reducción; pero fácilmente se ve que la rotación $[\omega]$ será constante en valor modular, dirección y sentido, y que *la traslación* $[v]$ *está determinada por la velocidad lineal del punto del sólido donde se haga la reducción.*

275. Observación.—Las consideraciones del número anterior pueden aplicarse al caso de estar dotado el sólido de un solo movimiento rotatorio y llegaríamos a demostrar que *la rotación de un cuerpo alrededor de un eje puede sustituirse, cinemáticamente, por la misma rotación trasladada paralelamente a otro eje cualquiera, combinada con una traslación cuyo valor modular, dirección y sentido sean los del momento de la primera rotación respecto a un punto cualquiera de la línea de acción de la segunda.*

276. Composición de traslaciones y rotaciones.—Cuando un sólido experimenta varias rotaciones y traslaciones simultáneas, se pueden reducir todos estos movimientos a una sola rotación y traslación, llevándolas todas paralelamente a un punto cualquiera del sólido, introduciendo las traslaciones que el cambio de las rotaciones exija y sumando separadamente en el punto elegido las rotaciones y traslaciones parciales; así por ejemplo, en la figura 124 se ha supuesto que $[\omega']$, $[\omega'']$, $[v']$ y $[v'']$ son dos rotaciones y dos traslaciones simultáneas de un cierto sólido; llevando todos estos vectores al punto α y efectuando la reducción en la forma dicha, se obtienen la rotación $[\omega]$ y la traslación $[v]$, que equivalen a los movimientos anteriores y bastan para expresar el estado de movimiento del sólido en el instante considerado.

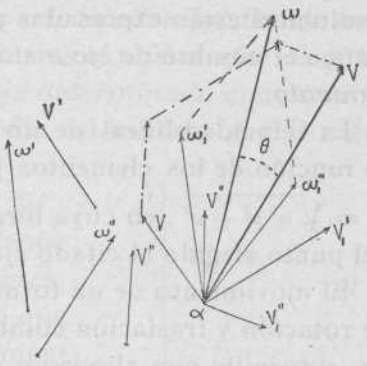


Fig. 124

Examinando las operaciones efectuadas y viendo el pa-

pel que desempeñan los vectores representativos de las rotaciones y traslaciones, se ve que dichas operaciones son idénticas a las efectuadas en el Algoritmo mecánico para reducir los sistemas vectoriales; lo que allí eran vectores simplemente aquí son rotaciones, y los subvectores de momentos que allí figuraban son las traslaciones de este caso.

Esta comparación nos permite aplicar a los sistemas de rotaciones y traslaciones las propiedades generales allí demostradas, entre las cuales recordaremos la que relaciona **(47)** a los vectores $[\omega]$ y $[v]$, en todos los centros de reducción, expresada por la ecuación $\omega \cdot v \cdot \cos \theta = K$, cuyo valor será la *constante característica* del sistema de rotaciones y traslaciones propuesto.

277. Eje instantáneo de rotación y resbalamiento.—El eje central del sistema vectorial formado por las rotaciones y traslaciones aplicadas a un cuerpo **(49)**, o sea el lugar geométrico de los puntos en que la rotación y traslación resultantes están expresadas por un torsor, recibe en Cinemática el nombre de *eje instantáneo de rotación y resbalamiento.*

La velocidad lineal de un punto cualquiera del sólido, en función de los elementos $[\omega]$ y $[v]$, de dicho torsor, es $v_1 = \sqrt{\omega^2 \rho^2 + v^2}$, en cuya fórmula representa ρ la distancia del punto elegido al citado eje.

El movimiento de un tornillo en su tuerca es un caso de rotación y traslación combinados en la forma expresada; el tornillo gira alrededor de su eje y al mismo tiempo avanza en la dirección del mismo; la representación gráfica de este movimiento sería un torsor situado sobre el eje del tornillo, y esto justifica el nombre de movimientos *helicoidales* que reciben todos los que se expresan en dicha forma.

II

MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO ALREDEDOR DE UN PUNTO

278. Naturaleza de este movimiento.—Cuando un sólido se mueve teniendo un punto fijo, las trayectorias de todos los demás son curvas esféricas cuyo centro común es el punto fijo; el movimiento de cada uno está formado, por consiguiente, de una serie de rotaciones instantáneas alrededor de ejes que pasan por dicho punto, verificándose que todas estas rotaciones aisladas e independientes se pueden reducir a una especial, alrededor de un cierto eje, en virtud del siguiente teorema llamado *de D'Alembert.*

TEOREMA.—*En el movimiento de un sólido alrededor de un punto el estado de las velocidades lineales de todos sus puntos, en cada instante,* es *el mismo que si girara el cuerpo alrededor de un eje determinado que pasa por dicho punto.* Sea *o* el punto fijo del sólido y *A* y *B* (figura 125) dos puntos del mismo animados de la velocidad $[v]$ y $[v']$; trazando en *A* y *B* dos planos perpendiculares a estos vectores, se cortarán según la recta $o\,\Delta$ que pasará por *o* y vamos a demostrar que esta recta tiene todos sus puntos en reposo en el instante considerado, y por lo tanto el estado de movimiento del sólido será como si estuviera animado en dicho instante de un movimiento de rotación alrededor del eje $o\,\Delta$; tomemos un punto *C* de este eje y uniéndolo

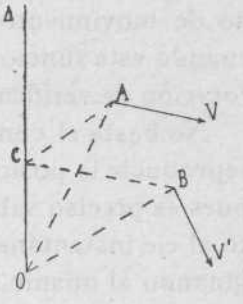


Fig. 125

con A y B, se ve que la velocidad de C da proyección nula sobre Co, CA y CB y siendo nula la velocidad de este punto, como la de todos los demás de $o\Delta$, esta recta está en reposo, como queríamos demostrar.

Fuera del eje $o\Delta$ no puede haber otro punto en reposo, pues quedaría inmóvil el cuerpo, y esto nos dice que todos los planos normales a las velocidades en cada punto del sólido pasarán por la recta $o\Delta$ determinada por los dos primeros.

Resulta de esto que el movimiento de rotación alrededor de un punto, puede estudiarse, en cada instante, como si fuera una rotación alrededor de un eje; este eje se supone fijo durante el tiempo dt, al final de cuyo intervalo se habrá modificado el estado de velocidades lineales del sólido y cambiará, en general, de posición; por este motivo se llama a dicha recta *eje instantáneo de rotación del sólido* y a la velocidad angular correspondiente, *velocidad angular instantánea del mismo móvil.*

Tomando en cada uno de los infinitos ejes que corresponden a un movimiento continuo de esta naturaleza, los vectores representativos de la rotación correspondiente, se forma una función gráfica $[\omega] = F(t)$ que expresará el estado de movimiento del sólido en un instante cualquiera; cuando esta función gráfica se convierta en rectilínea, la rotación se verificará alrededor de un eje permanente.

No basta el conocimiento de esta función gráfica para reproducir la posición del sólido en un instante cualquiera, pues es preciso saber la posición que el móvil tiene respecto al eje instantáneo de la rotación; esto se consigue imaginando al mismo tiempo la función gráfica $[\omega_1] = F_1(t)$ que los vectores $[\omega]$ forman en el cuerpo móvil, suponiendo que, después de haber desempeñado sus funciones de eje de rotación, siguieran acompañando al cuerpo en su movimiento: haciendo coincidir los vectores $[\omega]$ y $[\omega_1]$ correlati-

vos a un valor determinado de t, se tendría la posición del sólido y el estado de movimiento que en el citado instante le corresponde.

279. Determinación del movimiento en la rotación de un sólido alrededor de un punto.—Para determinar la posición del sólido en un instante cualquiera, en esta clase de movimientos, son necesarias tres condiciones que pueden expresarse por relaciones que liguen con el tiempo a las coordenadas de dos de sus puntos, o bien imaginar un triedro trirrectángulo, unido invariablemente al sólido con el vértice en el punto fijo, y relacionar con el tiempo las coordenadas eulerianas de este triedro por ecuaciones de la forma

$$\varphi = f_1(t), \quad \psi = f_2(t), \quad \theta = f_3(t).$$

Este último procedimiento es el que seguiremos y veremos cómo pueden obtenerse de las ecuaciones anteriores las de proyección de las dos funciones gráficas $[\omega] = F(t)$ y $[\omega_1] = F_1(t)$ que dijimos en el número anterior se necesitaban para reproducir el estado de movimiento del sólido en un instante cualquiera.

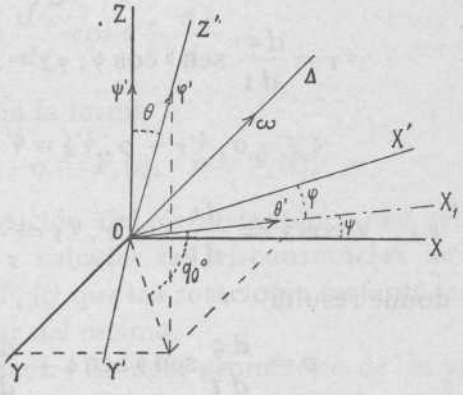


Fig. 126

280. Proyecciones de la rotación instantánea (ω) sobre los ejes coordenados en función de las coordenadas eulerianas.—Sean φ, ψ y θ (fig. 126) las coordenadas del sólido en un instante determinado; el pa-

so de esta posición a otra infinitamente próxima se verifica, según el teorema de D'Alembert, mediante la rotación [ω] alrededor del eje instantáneo $o\,\Delta$; pero dicho paso se puede efectuar mediante tres rotaciones

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \psi' = \frac{d\psi}{dt}, \quad \theta' = \frac{d\theta}{dt}$$

de duración infinitesimal, alrededor de los ejes $o\,Z$, $o\,X_1$ y $o\,Z'$, siendo

$$[\omega] = [\varphi'] + [\psi'] + [\theta'],$$

$$p = \omega \cos \alpha = \varphi'_X + \psi'_X + \theta'_X,$$

$$q = \omega \cos \beta = \varphi'_Y + \psi'_Y + \theta'_Y,$$

$$r = \omega \cos \gamma = \varphi'_Z + \psi'_Z + \theta'_Z.$$

Las proyecciones de φ', ψ' y θ', que figuran en las ecuaciones anteriores, son

$$\varphi'_X = \varphi' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi = \frac{d\varphi}{dt} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi,$$

$$\varphi'_Y = \frac{d\varphi}{dt} \operatorname{sen} \theta \cos \psi, \quad \varphi'_Z = \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta,$$

$$\psi'_X = o, \quad \psi'_Y = o, \quad \psi'_Z = \psi' = \frac{d\psi}{dt},$$

$$\theta'_X = \theta' \cos \psi = \frac{d\theta}{dt} \cos \psi, \quad \theta'_Y = \frac{d\theta}{dt} \operatorname{sen} \psi, \quad \theta'_Z = o,$$

de donde resulta

$$p = \frac{d\varphi}{dt} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi + \frac{d\theta}{dt} \cos \psi,$$

$$q = \frac{d\varphi}{dt} \operatorname{sen} \theta \cos \psi - \frac{d\theta}{dt} \operatorname{sen} \psi,$$

$$r = \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta + \frac{d\psi}{dt}.$$

La sustitución en las ecuaciones anteriores de $\varphi, \psi, \theta, \varphi', \psi'$ y θ' por sus valores, en función de t, nos daría las ecuaciones de proyección

$$p = F_1(t), \quad q = F_2(t), \quad r = F_3(t),$$

que determinan la función gráfica $[\omega] = F(t)$ de las rotaciones instantáneas del sólido.

281. Proyecciones de la rotación instantánea (ω) sebre las aristas del triedro móvil. — Si proyectamos la rotación $[\omega]$ y sus componentes $[\varphi']$, $[\psi']$ y $[\theta']$ sobre los ejes X', Y' y Z', que se suponen unidos invariablemente al cuerpo móvil, se obtendrán, por el mismo procedimiento del número anterior, las ecuaciones

$$p_1 = \frac{d\psi}{dt} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + \frac{d\theta}{dt} \cos \varphi ,$$

$$q_1 = \frac{d\psi}{dt} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi - \frac{d\theta}{dt} \operatorname{sen} \varphi ,$$

$$r_1 = \frac{d\varphi}{dt} \cos \theta + \frac{d\psi}{dt} ,$$

que servirán, puestas en la forma

$$p_1 = F_4(t), \quad q_1 = F_5(t), \quad r_1 = F_6(t),$$

para determinar la posición del eje instantáneo con relación al cuerpo móvil y calcular las circunstancias de la función gráfica $[\omega_1] = F_1(t)$ que las rotaciones instantáneas engendran en el interior del mismo.

282. Conos de Poinsot. — El lugar geométrico de las posiciones que, en el espacio y en el cuerpo móvil, toma el eje instantáneo de las rotaciones que se verifican alrededor de un punto, constituye dos superficies cónicas, con una generatriz común en cada instante del movimiento, que han recibido el nombre de *conos de Poinsot.*

Las ecuaciones analíticas de estos conos, que no son otra cosa que las superficies de situación de las funciones gráficas [ω] y [ω₁] , se determinan formando las ecuaciones de las generatrices

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \quad , \quad \frac{x}{p_1} = \frac{y}{q_1} = \frac{z}{r_1}$$

y eliminando el tiempo entre las dos ecuaciones de cada una de dichas generatrices.

Trazándole a estos conos los planos tangentes a lo largo de la generatriz común, se vería que los dos planos coinciden, siendo, por consiguiente, tangentes los dos conos en todas sus posiciones y del mismo modo, si se determinan los desplazamientos angulares de la generatriz común, sobre uno y otro cono, se vería que son iguales, expresando esta circunstancia que el movimiento del cono móvil es de *simple rodadura* sobre el cono fijo. (*)

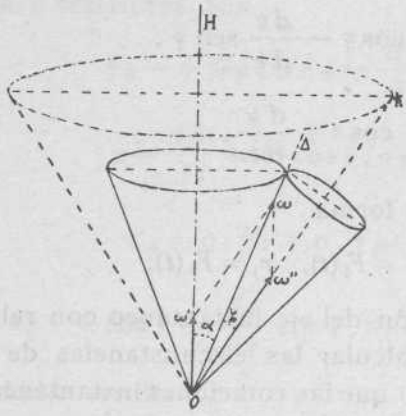


Fig. 127

283. Rotaciones precesionales.— Cuando los conos de Poinsot, que se originan en la rotación de un sólido alrededor de un punto, son de revolución, el movimiento se llama *precesional.*

Las rotaciones precesionales se pueden considerar como el resultado de una rotación permanente [ω'] (fig. 127) alrededor del eje *o H* del cono fijo, y de otra instantánea [ω"]

(*) Si los citados desplazamientos angulares fueran diferentes, el movimiento del cono móvil sobre el fijo, sería de rodadura *con rebalamiento.*

alrededor del eje *o K* del cono móvil: determinados los ángulos α y β, que forman las generatrices de los dos conos con sus ejes respectivos, se calculan ω' y ω'' por las conocidas ecuaciones **(66')**

$$\omega' = \omega \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} (\alpha + \theta)}, \quad \omega'' = \omega \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} (\alpha + \theta)};$$

de la ecuación $\omega'' = f_1'(t)$, o $\psi = f_1(t) + \psi_0$ se deducirá la posición del sólido móvil respecto al eje *o K*, y de la análoga $\omega' = f_2'(t)$ o $\varphi = f_2(t) + \varphi_0$ la de este eje respecto al fijo *o H*.

La relación de los tiempos empleados en verificar el cuerpo las dos revoluciones completas de la *precesión*, es la misma que la de las áreas de los dos conos, limitados por una superficie esférica cualquiera, y como estas áreas son proporcionales a los senos de los ángulos α y θ, será $T : t = \operatorname{sen} \alpha : \operatorname{sen} \theta$.

En el movimiento precesional del eje de la tierra es

$$\alpha = 23^\circ\ 27'\ 28'' \quad \text{y} \quad \theta = 0'',\ 00867$$

y como t es igual a un día sideral, el valor de T resulta aproximadamente igual a *26.000* años.

III

MOVIMIENTOS GENERALES DE UN SÓLIDO. SU COMPOSICIÓN.

284. Definición. — Cuando no se impone ninguna condición especial, relativa a la fijeza o dirección de las velocidades de los puntos de un sólido móvil, su movimiento será diferente de los que hemos estudiado hasta ahora y se distingue de ellos diciendo que es un *movimiento general*.

285. Reducción a una traslación y una rotación.—Los movimientos generales de un sólido se determinan por medio de seis ecuaciones, en la forma que se dijo en el número **262**; pero puede simplificarse el procedimiento, observando que si por un punto del sólido se trazan tres ejes paralelos a los coordenados, el movimiento del cuerpo, respecto a estos tres ejes, presentará los caracteres del movimiento de rotación alrededor de un punto, que podrá considerarse, en cada instante, como rotación alrededor de un eje que pasa por dicho punto **(278)**, teniendo en cuenta las circunstancias del movimiento de conjunto que la traslación de los ejes móviles comunica al cuerpo.

Resulta de esto que todo movimiento general de un sólido se puede estudiar como resultante de dos movimientos simples: una traslación de arrastre determinada por las ecuaciones del movimiento

$$a = f_1(t), \quad b = f_2(t), \quad c = f_3(t)$$

de un punto arbitrario elegido en el cuerpo y una rotación relativa alrededor de un eje instantáneo, cuyas circunstancias podrán deducirse de las ecuaciones

$$\varphi = f_4(t), \quad \psi = f_5(t), \quad \theta = f_6(t),$$

que señalan las coordenadas eulerianas de un segundo triedro móvil, unido invariablemente al sólido, con su vértice en el punto de coordenadas a, b y c.

286. Representación geométrica.—Si se suponen trazados los conos de Poinsot, que en el movimiento relativo del cuerpo se originan y construída la trayectoria del punto A $(a\ b\ c)$ (fig. 128), se tendrá una representación geométrica del movimiento general del sólido, imaginando que, al mismo tiempo que el punto A recorre el arco AA', el cono c, unido al cuerpo, ha rodado sobre el cono C, unido

a los tres ejes X' Y' Z', pasando la arista de contacto de la posición A a a la A' a'.

287. Composición de movimientos cualesquiera de un sólido.—Si suponemos a un sólido dotado de un número cualquiera de movimientos generales simultáneos, puede hacerse la reducción cinemática de todos ellos a una rotación y una traslación sustituyendo cada uno de dichos movimientos por la traslación y rotación equivalentes y componiendo después estas últimas en la forma ya explicada.

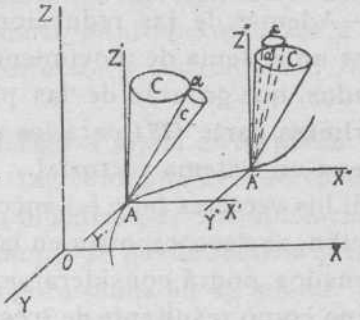


Fig. 128

Para comodidad de las operaciones convendrá tomar el mismo punto del sólido para hacer las reducciones parciales; así resultarán concurrentes las rotaciones relativas de cada movimiento general y el eje instantáneo de la rotación resultante pasará por el mismo punto; la traslación final representará en todos los casos la velocidad lineal absoluta del punto del sólido que se haya elegido para hacer la reducción **(274)**.

El producto $\omega \,.\, v \,.\, \cos \theta = K$ *será la constante característica* del sistema de movimientos de que está afectado el sólido, y cuando sea nula nos indicará la posibilidad de reducir a rotación o traslación únicas el conjunto de movimientos aplicados al móvil **(63)**.

288. Reducción a un movimiento helicoidal.– Si la reducción efectuada se hace en un punto del eje central del sistema de movimientos, se obtendrá el torsor representativo del movimiento helicoidal equivalente al mismo; la construcción gráfica indicada en el número **76** del Algorit-

mo mecánico, o las ecuaciones analíticas del **49**, nos permitirán determinar la posición del eje instantáneo de rotación y resbalamiento, donde están situados los elementos de dicho torsor.

289. Otras reducciones de un sistema de movimientos.—Además de las reducciones expuestas, puede sustituirse un sistema de movimientos por *dos rotaciones conjugadas*, que gozarán de las propiedades demostradas en la primera parte **(77)** para los vectores conjugados equivalentes a un sistema vectorial.

Si los vectores $[v]$ y $[\omega]$ encontrados en un centro de reducción, se descomponen en la dirección de tres ejes coordenados, podrá considerarse el movimiento absoluto del cuerpo como resultante de *tres rotaciones* y *tres traslaciones* paralelas a las direcciones de los citados ejes coordenados: las consideraciones hechas en el número **86** del Algoritmo mecánico tienen aplicación a este caso.

IV

MOVIMIENTO DE UN CUERPO PARALELAMENTE A UN PLANO.—MOVIMIENTO DE UNA FIGURA PLANA EN SU PLANO.

290. Movimiento de un cuerpo paralelamente a un plano.—Este movimiento está definido por la condición de que las velocidades lineales de los puntos del sólido sean paralelas a un cierto plano, en todos los instantes del movimiento. Los diversos puntos del sólido permanecen en esta clase de movimientos a distancias invariables del *plano director* y las trayectorias seguidas por todos ellos serán curvas planas, situadas en planos paralelos al director correspondiente.

Para reconocer que el movimiento de un sólido se verifica paralelamente a un plano, basta comprobar esta circunstancia en tres puntos que no estén en línea recta, pues, verificándose para éstos, basta imaginar un cuarto punto unido a ellos y la indeformabilidad del tetraedro correspondiente exige que dicho cuarto punto permanezca a distancia invariable del plano director y su velocidad lineal será paralela al mismo.

291. Reducción al de una figura plana en su plano. —El movimiento de sólidos, en las condiciones que estamos considerando, tiene gran importancia por sus aplicaciones en la teoría de los Mecanismos y se puede reducir al estudio del movimiento de una figura plana en su plano: bastará proyectar al sólido sobre el plano director y seguir el movimiento de esta proyección, para deducir la posición del cuerpo en el espacio y demás circunstancias de su movimiento que interese conocer.

En el movimiento de una figura plana en su plano consideraremos sucesivamente los casos de tener dicha figura un punto fijo o de no tener ninguno.

292. Movimiento de una figura plana con punto fijo. — La posición de una figura plana que se mueve en su plano, teniendo un punto fijo, se determina señalando la posición de otro cualquiera de la misma, que se conocerá por las ecuaciones $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ de sus movimientos coordenados.

Analíticamente se pueden encontrar los movimientos coordenados de otro punto cualquiera $M\ (x'\ y')$ por las relaciones

$$d_1^2 = (x' - a)^2 + (y' - b)^2,$$

$$d_2^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2,$$

que, juntamente con las anteriores, permitirán determinar

las ecuaciones $x' = F_1(t)$, $y' = F_2(t)$ de dichos movimientos coordenados del punto M.

Pero teniendo en cuenta que el movimiento de la figura es una rotación permanente alrededor del punto fijo, que se puede tomar por origen de coordenadas y polo de la función gráfica del movimiento, se estudiarán con más comodidad las circunstancias del correspondiente al conjunto y las de cada uno de los puntos, haciendo uso de la ecuación del movimiento angular $\psi = f(t)$, común a toda la figura, y por derivación obtener la velocidad y aceleración angulares en un instante cualquiera.

292'. Cuando se establezca la ecuación del movimiento angular de la figura, se pasa a la del lineal de un punto cualquiera, mediante la multiplicación por la distancia que lo separa del punto fijo, y las ecuaciones **(271)**

$$e = r f(t), \quad v = r f'(t) = r \omega, \quad G_t = r f''(t) = r \cdot j_a$$

señalarán las posiciones, velocidad lineal y aceleración tangencial del punto elegido; la aceleración normal será

$$G_n = \omega^2 \cdot r \text{ y la total } G = r \sqrt{j_a^2 + \omega^4}.$$

Si el movimiento angular de la figura es uniforme, el lineal de todos sus puntos lo es también, reduciéndose la aceleración total a su componente normal $G = G_n = r \cdot \omega^2$.

293. Movimiento libre de una figura plana en su plano. – El número de condiciones necesarias para determinar el movimiento general de una figura plana en su plano son tres, expresadas por ecuaciones en la forma

$$f_1(x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, t) = o,$$
$$f_2(x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, t) = o,$$
$$f_3(x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, t) = o,$$

que relacionan las coordenadas de dos puntos $A(x_1\, y_1\, z_1)$

y $B\,(x_2\ y_2\ z_2)$ con el tiempo; entendiéndose que a estas ecuaciones hay que unir la que expresa la constancia de la distancia

$$A\,B = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = d\,.$$

Las ecuaciones anteriores servirán para determinar los movimientos coordenados de un punto cualquiera de la figura, por el procedimiento explicado en el número **263**, y de dichos movimientos coordenados se deducirían las circunstancias que interese conocer; pero este estudio se realiza más fácilmente auxiliándose de construcciones gráficas que se derivan de las siguientes propiedades.

294. Centro instantáneo de rotación.—Teorema de Bernoulli.—*En el movimiento de una figura plana en su plano, el estado de las velocidades lineales de sus diversos puntos es, en cada instante, el mismo que si toda la figura girara alrededor de un cierto punto.* Sea la línea $A\,B\,C\,D$ (fig. 129) la posición del móvil en un instante cualquiera y v_1, v_2 las velocidades de los puntos A y B; trazándole las perpendiculares $A\,o$ y $B\,o$ se determina un punto que, si se supone unido a la figura, permanecerá inmóvil en el instante considerado, por ser nulas las proyecciones de su velocidad sobre las dos rectas $o\,A$ y $o\,B$; y como ningún otro punto de la figura puede estar en las mismas condiciones, se deduce que trazando las perpendiculares a las velocidades de todos los puntos en sus respectivos puntos de aplicación, dichas perpendiculares concurrirán en o **(264')** y el movimiento de la figura se verifica en aquél ins-

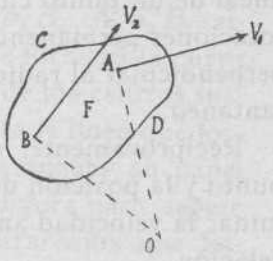


Fig. 129

tante, por lo que a las velocidades se refiere, como si fuera una rotación alrededor del citado punto.

Es evidente que, en general, al pasar de un instante al siguiente y modificarse el estado de velocidades de la figura, el centro de la nueva rotación será distinto al anterior, siendo el movimiento general una serie de *rotaciones instantáneas* alrededor de diversos *centros instantáneos*, cuyo lugar geométrico, en el plano y en la figura móvil, forma dós líneas con un punto siempre común, y cuyas ecuaciones analíticas se encontrarán por procedimientos de cálculo análogos a los indicados para determinar las de los conos de Poinsot en el número **282**; el análisis de estas ecuaciones nos demostraría que las referidas líneas son tangentes en todas las posiciones de la figura móvil.

La velocidad angular [ω] que en cada instante tiene el conjunto de la figura móvil, alrededor de su centro instantáneo correspondiente, sirve para determinar la velocidad lineal de un punto cualquiera; pues, lo mismo que en las rotaciones permanentes, es $v = r \cdot \omega$ y su línea de acción perpendicular al radio que une al punto con el centro instantáneo.

Recíprocamente, conocida la velocidad lineal de un punto y la posición del centro instantáneo, se podrá determinar la velocidad angular instantánea del conjunto por la relación

$$\omega = \frac{v}{r} .$$

295. Trazado gráfico del lugar geométrico de los centros instantáneos de rotación.—Cuando se conocen, o se pueden trazar, las trayectorias de dos puntos de la figura móvil, se determina el lugar geométrico de los centros instantáneos de rotación sobre el plano por el siguiente procedimiento: sean las curvas $A_1 A_2 A_3 \ldots$ y $B_1 B_2 B_3 \ldots$,

(figura 130) las citadas trayectorias y $d = A\,B$ la distancia invariable de los dos puntos A y B, que se supone dirigen el movimiento de una figura plana cualquiera; señalaremos sobre la trayectoria del A las posiciones A_1, A_2, A_3 .... tan próximas como se quiera, según el grado de exactitud que se desee alcanzar, y después, haciendo centro en las posiciones señaladas con radios iguales a d, se determinarán las posiciones de B correlativas o simultáneas a las indicadas de A: las normales a las trayectorias en las referidas posiciones simultáneas se cortan en los puntos $o_1\ o_2\ o_3$ .... , que unidos por un trazo continuo forman el lugar geométrico buscado.

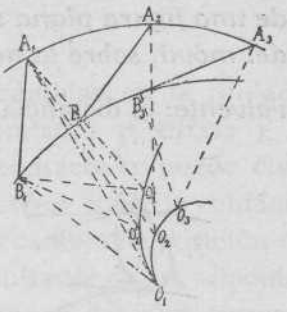


Fig. 130

Si ahora se refieren los triángulos $A_2\,o_2\,B_2$, $A_3\,o_3\,B_3$, etcétera, a la primera posición $A_1\,o_1\,B_1$, se formará la curva $o_1\ o'_2\ o'_3$ .... , que es el lugar geométrico de los centros instantáneos referidos a la figura móvil, o sea la línea que formarán dichos puntos si, después de desempeñar su papel de centros de rotación, se unieran a la figura para seguir su movimiento. Dentro de poco demostraremos que haciendo *rodar* la curva $o_1\ o'_2\ o'_3$ sobre la $o_1\ o_2\ o_3$ .... , los puntos o'_2, o'_3 .... , van coincidiendo sucesivamente con los o_2, o_3 .... , reproduciéndose el paso de la figura móvil por las mismas posiciones de su primer movimiento.

295'. Hemos visto que las normales a las trayectorias de los diversos puntos de la figura móvil pasan todas por el centro instantáneo que a cada posición corresponde; de modo que si suponemos trazada la envolvente de una figura plana (fig. 131) y una posición cualquiera F de la envuelta, el elemento $A\,B$ común a estas curvas, es el camino

recorrido por el punto A en el tiempo dt que transcurre en el paso de la figura F a la posición inmediata F', luego se puede asegurar que *el centro instantáneo de rotación de una figura plana se encuentra, en todas las posiciones del móvil, sobre la normal común a la figura y su envolvente;* la distancia $A\,o$ será en cada caso $A\,o = \frac{v}{\omega}$.

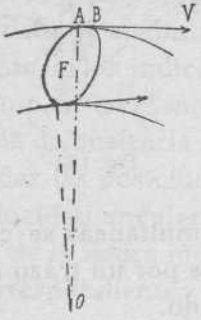


Fig. 131

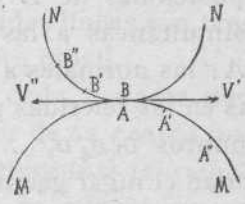


Fig. 132

296. Movimientos epicicloidales.—El movimiento de una figura plana que se apoya sobre otra, permaneciendo constantemente tangente a ella, se puede verificar de los siguientes modos. Sea *NN* (fig. 132) la curva móvil que llamaremos *roldana* y *MM* la curva fija o *base* del movimiento (*), que en la posición indicada son tangentes en el punto A; si la roldana se mueve conservando el mismo punto de tangencia B con la base, el contacto con ésta tomará las posiciones sucesivas $A'\,A''$ .... diciéndose entonces que la roldana *resbala sobre la base* con la velocidad $v' = \frac{A\,A'}{dt}$; si el punto de tangencia permanece fijo en la base y en la

(*) Es evidente que la *base* de estos movimientos es la envolvente de las posiciones de la roldana o figura móvil.

roldana cambia de posición, pasando por B', B'' ...., la roldana *resbala sobre sí misma* con la velocidad

$$v'' = \frac{BB'}{dt}.$$

Cuando los puntos de contacto cambian en la roldana y en la base, se dice que el resbalamiento es *mixto* y el movimiento absoluto del punto de contacto se puede considerar como resultante de uno relativo, sobre la roldana, y otro de arrastre ocasionado por el cambio de posición de aquella curva sobre la base, y la resultante de las velocidades propias del punto de contacto en las dos curvas, $[v] \equiv [v'] \pm [v'']$, se llama *velocidad de resbalamiento mixto*, o simplemente *velocidad de resbalamiento* de la roldana sobre la base.

El paso de la posición N de la roldana, a la inmediata N' (fig. 133), se verifica, como el de una figura plana cualquiera, por medio de una rotación alrededor del centro instantáneo o, situado como ya dijimos **(295')**, en la normal común en el punto A a las curvas M y N y la velocidad absoluta del punto de contacto se expresará, en función de la angular instantánea, por la repetida fórmula $v = \omega \, . \, o\,A$.

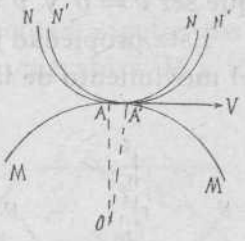


Fig. 133

Cuando las velocidades del punto de contacto en la roldana y en la base son iguales y de sentido contrario, la velocidad del resbalamiento, $v = v' - v''$, se reduce a *cero* y el movimiento toma el nombre especial de *rodadura*; el valor modular común a las velocidades v' y v'' se llama *velocidad de rodadura* de la roldana, y en estos movimientos, llamados también *epicicloidales*, se verifican las propiedades siguientes:

1.ª *Los arcos recorridos por el punto de contacto en la roldana y en la base, en un intervalo de tiempo cualquiera, son iguales.* Puesto que siendo

$$v' = \frac{AA'}{dt}, \quad v'' = \frac{BB'}{dt} \text{ y } v' = v''$$

el elemento BB' de la roldana es igual al AA' de la base y como lo mismo ocurrirá en cada intervalo infinitesimal de tiempo, los arcos finitos, correspondientes a un tiempo cualquiera, serán también iguales. La recíproca es cierta: si $AA' = BB'$, será $v' = v''$ y por tanto $v = o$.

2.ª *En las rodaduras, el centro instantáneo de rotación coincide, en cada posición de la roldana, con el punto de contacto de las dos curvas.* De la fórmula $v = \omega \, . \, oA$, antes establecida, se deduce que siendo $v = o$, tiene que ser $oA = o$ y el centro o coincidirá con el punto A. La recíproca también es cierta, puesto que siendo $oA = o$ tiene que ser $v = o$ y $v' = v''$.

Esta propiedad justifica lo dicho en el número **295** sobre el movimiento de la curva $o_1 \, o'_2 \, o'_3 \ldots$. (fig. 130), que se dijo era una rodadura sobre la línea fija $o_1 \, o_2 \, o_3 \ldots$, y así debe ser por estar situado el centro instantáneo del movimiento de la figura móvil en coincidencia con el de contacto de las dos citadas curvas.

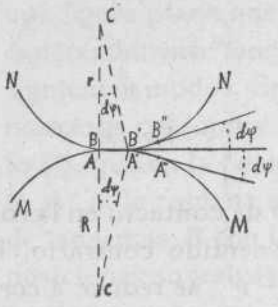


Fig. 134

297. Relación entre la velocidad angular instantánea y la de rodadura en los movimientos epicicloidales. – Sean AA' y BB' (fig. 134) los elementos de la base y de la roldana que están en coincidencia en un instante cualquiera, $A'A''$ y $B'B''$ los inmediatos correspondientes a la posición siguiente; el giro

de conjunto de la roldana, para llegar a esta segunda posición, produce un desplazamiento angular $d\alpha = d\varphi + d\Psi$ y la velocidad angular instantánea de este movimiento es

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\Psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt};$$

pero si representamos por R y r los radios de curvatura de la base y de la roldana en el punto de contacto, será

$$\omega = \frac{\frac{AA'}{dt}}{R} + \frac{\frac{BB'}{dt}}{r} = \frac{v'}{R} + \frac{v''}{r} = v\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right).$$

La rodadura representada en la figura 134 es *exterior*; cuando la roldana y la base ocupen la posición de la figura 135, la rodadura es *interior* y

$$\omega = v\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right).$$

En las rodaduras *uniformes* la velocidad angular instantánea, por depender de los radios de curvatura R y r, será variable; pero si la roldana y la base son circunferencias, la constancia de v llevará consigo la de ω y recíprocamente.

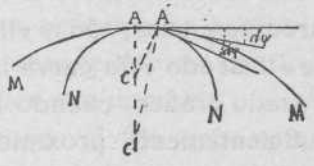


Fig. 135

298. Reducción a un movimiento epicicloidal del general de una figura en su plano.— El movimiento general de una figura plana en su plano se puede reproducir enlazando a dicha figura con el lugar de los centros instantáneos $o_1\, o'_2\, o'_3$ .... (fig. 130) y haciendo rodar a esta curva sobre el lugar geométrico $o_1\, o_2\, o_3$ ... de los mismos centros en el plano.

Para formarnos idea más clara de la utilidad de esta reducción, resolveremos las siguientes cuestiones:

1.ª *Determinación de la trayectoria de un punto cualquiera de la figura móvil.*—Sea F esta figura, supuesta enlazada a la roldana $N\,N$ que rueda sobre la base $M\,M$ (fig. 136): señalemos en la roldana los arcos $B\,B'$, $B'\,B''$, etc., iguales respectivamente a los $A\,A'$, $A'\,A''$ etc. de la base y unamos los primeros con el punto P, cuya trayectoria se quiere trazar; en la posición de la figura 136 la velocidad de P es perpendicular a la recta $P\,B$, de modo que si trazamos una circunferencia, con el centro en A y radio $P\,A = P\,B$, esta línea será tangente a la velocidad [v] en el punto P y por lo tanto a la trayectoria del citado punto.

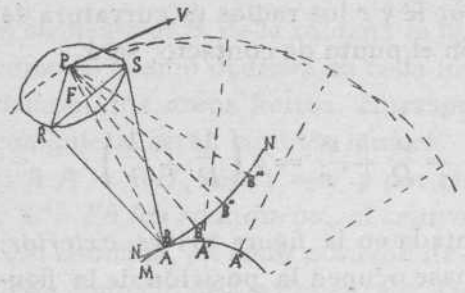


Fig. 136

Esto nos dice que si hacemos centro en A', A'', A''' .... y con radios $P\,B'$, $P\,B''$, $P\,B'''$ .... trazamos una serie de circunferencias, todas ellas serán tangentes a la trayectoria de P, siendo esta curva la envolvente de las mismas y cuyo trazado gráfico, cuando los puntos A, A', A'', etc. estén suficientemente próximos, se podrá hacer con bastante exactitud.

2.ª *Trazado de la envolvente de las posiciones de una curva cualquiera unida a la figura móvil.*—Sea la curva $C\,C$ (fig. 137), que suponemos pertenece a la figura móvil y cuya envolvente queremos determinar: los puntos B, B', B'' .... y A, A', A'' .... , se señalarán lo mismo que en el caso anterior, e imaginemos trazadas las normales por B, B', B'' .... , a la curva propuesta; si hacemos centro en

A, con el radio $B\,P$, se trazará una circunferencia tangente en P a dicha curva y como el punto de contacto de ésta con su envolvente tiene que estar en el pie de la normal trazada a $C\,C$ desde el centro instantáneo correspondiente, la circunferencia trazada será tangente en P a la envolvente que buscamos; de esto se deduce que si trazamos una serie de circunferencias con los centros en A, A', A'' ..., y radios $B\,P$, $B'\,P'$, $B''\,P''$ ... todas estas líneas serán tangentes a dicha envolvente, presentándose esta línea como envolvente también de las circunferencias trazadas; esta circunstancia permite trazarla, cuando los puntos A, A', A'' .... estén suficientemente próximos, con la exactitud necesaria para las aplicaciones prácticas.

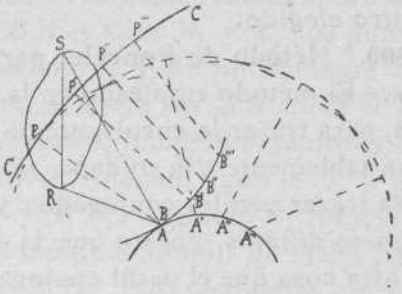


Fig. 137

299. Perfiles conjugados.—Cuando una curva plana rueda sobre otra fija y existen otras dos, enlazadas invariablemente a la roldana y a la base, que permanecen tangentes durante el movimiento, dichas líneas se llaman *conjugadas* y se les da el nombre de *perfiles conjugados.*

El movimiento del perfil móvil sobre el fijo tiene que ser necesariamente un movimiento de resbalamiento, pues la rodadura indicaría la existencia de dos centros de rotación simultáneos y esto es imposible: la velocidad de dicho resbalamiento se podrá determinar por la relación $v_r = \omega \,.\, A\,o$, siendo ω la angular instantánea, A el punto de contacto de los dos perfiles y o el centro instantáneo correspondiente.

Recordemos, por la importancia que tiene esta propie-

dad, que la normal en el punto de contacto a dos perfiles conjugados pasa siempre por el centro instantáneo de rotación y que si desde este punto se traza una normal al perfil fijo, *el pie de esta normal es el punto en que tiene que tocarle el perfil móvil, en la posición correspondiente al centro elegido.*

300. Método de Poncelet para trazar perfiles conjugados.—El método empleado en la cuestión 2.ª del número **298**, para trazar la envolvente de una curva o perfil, unido invariablemente a la roldana, se llama *método de Poncelet* para trazar perfiles conjugados y se aplica como en dicho número dijimos, puesto que la envolvente determinada no es otra cosa que el perfil conjugado de la curva *C C* (figura 137), considerada como perfil móvil.

Este procedimiento aproximado suele bastar en la práctica y es el que se emplea cuando la roldana, la base, o el perfil dado son curvas de generación desconocida o complicada; pero cuando esto no ocurra, pueden obtenerse dichos perfiles con mayor exactitud, investigando la ley de generación de los mismos y aplicando a cada caso las reglas del trazado especial que le corresponda; esto ocurre en los ejemplos de aplicación que exponemos a continuación.

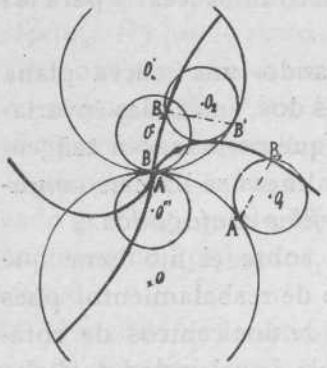


Fig. 138

301. Perfiles conjugados en la rodadura de una circunferencia sobre otra circunferencia.—Sean las dos circunferencias *0* y *0'* (fig. 138) tangentes en el punto *A B*, e imaginemos una tercera circunferencia *0''*, *o roldana auxiliar*, que partiendo de la posición de tangencia en *A B* ruede exte-

riormente sobre 0 e interiormente sobre $0'$: vamos a demostrar que *las epicicloides e hipocicloides engendradas en estos dos movimientos, son perfiles conjugados en la rodadura de 0' sobre 0, o de 0 sobre 0'.*

En efecto, hagamos rodar la roldana auxiliar sobre 0 y $0'$ un mismo arco $A\,A' = B\,B'$ y sean B_1 y B_2 los puntos límites de los arcos de epicicloide y de hipocicloide que dicho movimiento engendra; si ahora rueda $0'$ sobre 0 llevando consigo la circunferencia 0_2, cuando el punto B' llegue a A', la roldana auxiliar 0_2 coincidirá con la 0_1 y por ser iguales los arcos $A'\,B_1$ y $B'\,B_2$, el punto B_2 coincidirá con el B_1 y los dos perfiles tendrán común, en dicha posición, las normales $A'\,B_1$ y $B'\,B_2$; esto demuestra que son tangentes en el punto B_1, B_2, y como lo mismo se verifica en otra posición cualquiera, los expresados perfiles serán conjugados. (*)

Si se invierte la roldana auxiliar colocándola en $0''$ (figura 138) y se hace rodar por el interior de 0 y exterior de $0'$, hacia la izquierda, se engendran perfiles conjugados que se pueden considerar como prolongación de los anteriores, por unirse tangencialmente a ellos en el punto $A\,B$; esta propiedad se verifica aunque la segunda roldana auxiliar sea distinta a la primera.

Si las circunferencias O y O' fueran tangentes interiormente y la roldana auxiliar rodara por el exterior o por el interior de ambas, resultarían dos epicicloides, o dos hipocicloides, que del mismo modo se demostraría que eran perfiles conjugados.

Cuando la roldana auxiliar tiene por diámetro el radio de $0'$, la hipocicloide correspondiente se reduce a un diá-

(*) Los razonamientos hechos no exigen que la roldana auxiliar sea, precisamente, una circunferencia para engendrar perfiles conjugados; puede tener otra forma cualquiera, si bien entonces no serán dichos perfiles epicicloides e hipocicloides circulares.

metro de dicho círculo, como expresa la figura 139, donde están trazados los perfiles $A'\ A\ A_1\ A_2$ y $B'\ B\ B_1\ B_2$ que son conjugados y se compone cada uno de ellos de un diámetro del círculo correspondiente y una epicicloide engendrada por las roldanas auxiliares $0'''$ y $0''$.

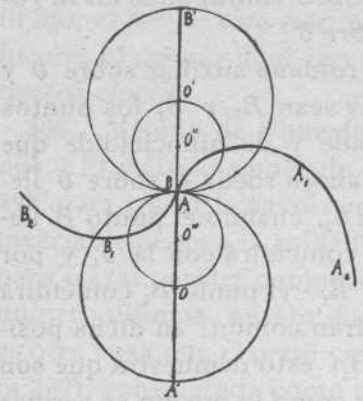


Fig. 139

Si la roldana auxiliar fuera igual al círculo $0'$ engendraría en 0 una epicicloide cuyo perfil conjugado se reduce a un punto, por ser imposible la rodadura de tal roldana por el interior de $0'$.

302. Perfiles conjugados en la rodadura de una circunferencia sobre una recta.—Cuando la base del movimiento sea una recta y la roldana del mismo una circunferencia, se puede emplear el método de Poncelet, para trazar el

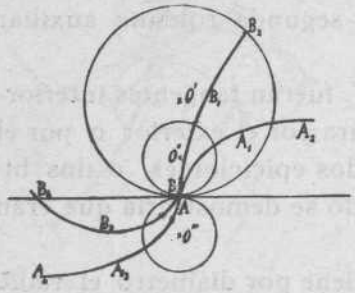


Fig. 140

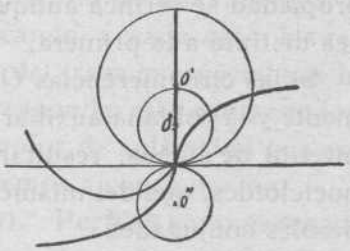


Fig. 141

perfil conjugado de una curva cualquiera unida a la roldana o a la base; pero, lo mismo que en los casos anteriores resulta más cómodo el empleo de una roldana auxiliar que

rodando sobre la recta y la roldana principal engendra perfiles conjugados.

La figura 140 representa los arcos de cicloide $A_2\ A_1\ A\ A_3\ A_4$ conjugados de las hipocicloide y epicicloide $B_2\ B_1\ B\ B_3\ B_4$, engendradas por las roldanas auxiliares $0''$ y $0'''$; la 141 expresa el caso particular de tener la roldana auxiliar por diámetro el radio de la principal $0'$.

La demostración de que los perfiles engendrados por la roldana auxiliar son conjugados, se hace exactamente igual que cuando la base del movimiento de rodadura era circular.

Cuando la roldana auxiliar es igual al círculo $0'$, la cicloide unida a la base tiene por perfil conjugado un punto.

303. Perfiles conjugados de evolvente de círculo — Supongamos ahora que el perfil unido a la roldana $0'$ (fig. 142) es la evolvente $B_1\ B'\ B_2$ de un círculo $a\ b$ concéntrico con $0'$ y vamos a demostrar que su perfil conjugado es la evolvente de un círculo $c\ d$ concéntrico con 0 y cuyo radio $0\ c$ se determina por cierta relación que encontraremos.

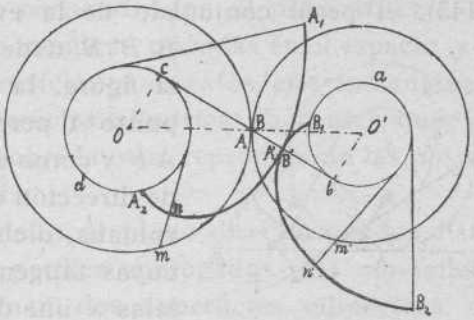


Fig. 142

En la posición de la figura la normal trazada desde A a la evolvente $B_1\ B'\ B_2$ corta a esta curva en el punto en que su perfil conjugado le es tangente **(299)**; la distancia $0\ c$ de aquella normal al centro 0 de la base del movimiento es $0\ c = 0\ A\ \frac{0'\ b}{0'\ A}$, deducida de la semejanza de los triángulos $0\ A\ c$ y $0'\ A\ b$; pero siendo el producto $0\ A\ \frac{0'\ b}{0'\ A}$ inde-

pendiente de la posición asignada a la roldana, resulta que el perfil que se busca tiene la propiedad de tener sus normales equidistantes de *0*, su evoluta será la circunferencia de radio *0 c* y él es una evolvente de la misma circunferencia.

Si sobre la roldana y la base se toman los arcos iguales *A m* y *B m'* y desde *m* y *m'* se trazan las tangentes a los círculos *c d* y *a b*, los segmentos *m n* y *m' n'* serán iguales, por ser las normales que tienen que coincidir, cuando la roldana llegue rodando a poner su punto *m'* en contacto con el *m* de la base; los pies de las normales *m n* y *m' n'* son puntos *correspondientes* de los dos perfiles conjugados.

303'.—Cuando la base de la rodadura es una recta (figura 143), el perfil conjugado de la evolvente de círculo $B_1\ B'\ B_2$ tiene, en la posición de la figura, la tangente *TT* en el punto *A'* perpendicular a la recta *A b* y como esta recta no cambia de dirección en la rodadura de la roldana, dicho perfil es una línea cuyas tangentes son todas paralelas a una dirección fija y esta propiedad no se cumple más que en las lineas rectas; la tangente *T T* antes trazada, es, por consiguiente, el perfil conjugado de la evolvente $B_1\ B'\ B_2$.

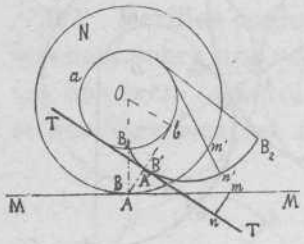


Fig. 143

Lo mismo que en el caso anterior, si se señalan los segmentos de recta y de arco $A\ m = A\ m'$ y se trazan las normales *m n* y *m' n'*, los puntos *m'* y *n'* serán *correspondientes* de los dos perfiles y los dos segmentos *m n* y *m' n'* tendrán la misma longitud. Por la misma razón serán puntos correspondientes aquellos en que los dos perfiles conjugados corten a las circunferencias o rectas a que se suponen unidos.

304. Consecuencias de esta teoría aplicables al movimiento de un cuerpo paralelamente a un plano.—Ya hemos visto como, el movimiento de un cuerpo paralelamente a un plano, se ha referido al de una figura plana en su plano y que este último se puede siempre reducir a un movimiento epicicloidal o de rodadura de una curva sobre otra, formándose la base y la roldana de estas rodaduras con los lugares geométricos de los centros instantáneos de rotación en el plano y en la figura móvil.

Refiriendo, en sentido inverso, estas propiedades al movimiento del cuerpo, se podrá establecer que *el movimiento de un cuerpo paralelamente a un plano se verifica, en cada instante, por lo que a las velocidades lineales de sus diversos puntos se refiere, como si fuera una rotación alrededor de un eje perpendicular al plano director del movimiento,* y si se imaginan trazadas en el espacio y en el cuerpo todas las posiciones de estos ejes instantáneos, se formarán dos superficies cilíndricas tangentes que, por la rodadura de una sobre la otra, reproducirán las posiciones del cuerpo móvil.

Si trazamos normales al plano director por los distintos puntos de dos perfiles conjugados del movimiento proyectado, se forman dos superficies cilíndricas que resbalando una sobre otra son tangentes durante el movimiento.

La velocidad angular instantánea de la figura proyección y la de resbalamiento que corresponde al punto de contacto de los perfiles conjugados, se refieren al sólido en el espacio y constituyen su velocidad angular instantánea y la velocidad de resbalamiento de los *cilindros conjugados.*

Cuando la proyección del sólido tiene un punto fijo, su movimiento es una rotación permanente alrededor del eje perpendicular al plano director en el punto fijo: de la velo-

cidad y circunstancias de la figura proyección, se deducen fácilmente las correspondientes a cada punto en la rotación del sólido.

305. Movimiento de una figura esférica en su esfera.— Por las analogías que este movimiento tiene con el de una figura plana en su plano, exponemos en este lugar las nociones necesarias para nuestras aplicaciones que a dicho movimiento se refieren.

Si los puntos de la figura esférica se unen con el centro de la esfera se formará un cono, de vértice fijo, cuyo movimiento será una consecuencia del de dicha figura y recíprocamente; según esto el movimiento de la figura esférica será en cada instante una rotación alrededor de un eje que pasará por el punto fijo del cono, o sea el centro de la esfera; este eje corta a la superficie esférica en un punto que se llama *polo* de la rotación instantánea considerada y como las velocidades de todos los puntos de la figura serán normales al radio esférico que los separa de este polo, se dice que el movimiento es una *rotación esférica* alrededor de un polo permanente o instantáneo, según sea el eje que lo determina.

Los distintos ejes instantáneos del movimiento alrededor del centro forman, referidos al espacio y a la figura móvil, los dos conos de Poinsot, cuyas trazas sobre la superficie esférica producen dos curvas (lugar geométrico de los polos en la esfera y en la figura móvil) que permanecen tangentes durante el movimiento y rodarán, sin resbalar, una sobre otra, permitiendo reproducir las posiciones de la figura móvil por medio de dicho movimiento epicicloidal esférico.

Del mismo modo que en las figuras planas existirán perfiles esféricos conjugados, que permanecerán tangentes durante la expresada rodadura y cuya velocidad de resbalamiento, en el contacto, será proporcional a la distancia

al polo instantáneo correspondiente, reduciéndose a *cero*, es decir, convirtiéndose en rodadura, cuando el contacto tenga lugar en el polo instantáneo de la rotación esférica.

V

MOVIMIENTO RELATIVO DE UN SÓLIDO CON RELACIÓN A OTRO MÓVIL

306. Definición.—El movimiento que le resulta a un sólido al combinar el suyo propio con otro igual y contrario al de un segundo sólido, se llama movimiento relativo del primero con relación al segundo. Este movimiento relativo es el que puede ver y examinar un observador que no se de cuenta del movimiento propio, colocado en el segundo cuerpo, y por esto se llama también movimiento *aparente* del referido sólido con relación al segundo.

En la teoría de los Mecanismos, que después estudiaremos, se presenta el caso de estudiar movimientos combinados de dos cuerpos, y desde luego se comprende la simplificación que en este estudio se introducirá suponiendo inmóvil a uno de ellos: esto puede realizarse mediante la teoria que vamos a desarrollar, considerando en el segundo, no su movimiento propio, sino el aparente que le resulte como consecuencia de la inmovilización del primero.

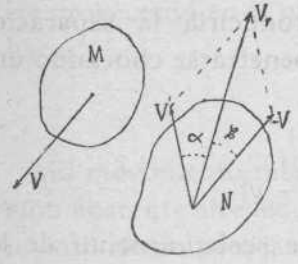


Fig. 144

A continuación examinamos los casos que tienen más aplicación en la citada teoría de los Mecanismos.

307. Movimiento relativo cuando los dos sólidos están dotados de movimientos de traslación.—Sean los cuerpos

M y N, dotados de los movimientos traslatorios $[v]$ y $[v']$, (fig. 144); el resultante de componer $[v']$ con $-[v]$ es otra traslación $[v_r]$ y esto nos dice que el movimiento aparente de N, con relación a M, es una traslación cuyo valor modular, dirección y sentido, están expresados por el vector $[v_r]$.

Analíticamente se relacionan estos datos por **(66')**

$$\frac{v}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{v'}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_r}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)},$$

y también se puede emplear la fórmula $v_r = v\cos\beta + v'\cos\alpha$.

307'.—Puede ocurrir que M y N estén en contacto (figura 145) y se desee que el movimiento relativo se verifique sin perder los cuerpos dicho contacto; para esto es preciso que si, en un instante determinado, son A y B los puntos de contacto, la *velocidad relativa* de B esté contenida en el plano tangente común a los dos cuerpos, pues la menor inclinación, en uno u otro sentido, produciría la separación de los mismos, o su tendencia a penetrarse chocando uno con el otro.

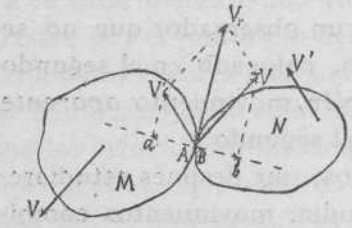


Fig. 145

La velocidad relativa

$$[v_r] \equiv [v'] + [-v]$$

del punto B, se llama velocidad *de resbalamiento* de los dos cuerpos que están en contacto.

Proyectando sobre la normal común a las dos superficies en contacto la equipolencia $[v_r] \equiv [v'] + [-v]$, se obtienen los segmentos $A\,a$ y $B\,b$ que son iguales y de sentido contrario y esto nos dice que *para que dos cuerpos dotados de movimientos de traslación permanezcan en*

contacto, es preciso que las proyecciones de las dos traslaciones sobre la normal común, en cada instante sean iguales y del mismo sentido.

308. Movimiento relativo cuando los dos cuerpos están dotados de movimientos de rotación alrededor de ejes paralelos.—Supongamos a los cuerpos M y N proyectados sobre el plano vertical de la figura 146, siendo 0 y $0'$ los centros de rotación fijos de uno y otro y $[\omega]$ y $[\omega']$ las velocidades angulares respectivas que se proyectan horizontalmente en su verdadera magnitud; el resultado de componer el movimiento $[\omega']$ con $-[\omega]$ es la rotación $[\omega_r] \equiv [\omega'] + +[-\omega]$, que se verifica alrededor del eje proyectado en el punto $0\,0'$ cumpliendo la condición de hacer

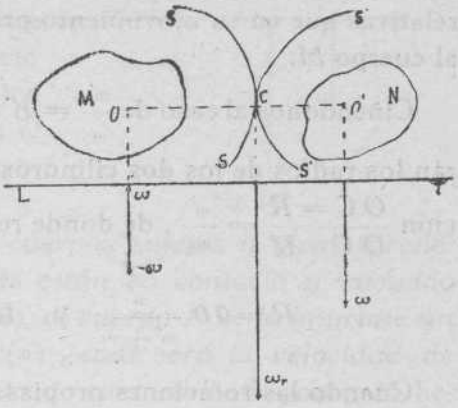


Fig. 146

$$\frac{oC}{o'C} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

El movimiento relativo es, por consiguiente, una rotación aparente alrededor de un eje situado en el plano de las rotaciones propias de los cuerpos M y N; esta rotación aparente será permanente cuando $\frac{\omega'}{\omega}$ sea constante, e instantánea cuando $\frac{\omega'}{\omega}$ sea variable.

Si, lo mismo en uno que en otro caso, se supone que el eje de la rotación aparente, después de cumplir su papel,

acompañara a los dos cuerpos en sus rotaciones propias, se engendrarían dos superficies cilíndricas $S\,S$ y $S'\,S'$, que serán tangentes durante todo el movimiento de M y N y cuyo movimiento relativo será de rodadura, por serlo el de sus trazas en el plano vertical **(304)**. De esto se deduce que si inmovilizamos al cuerpo M y cilindro $S\,S$ y hacemos rodar el $S'\,S'$ sobre el anterior, arrastrando al cuerpo N, se reproducirán, para este cuerpo, todas las posiciones relativas que en su movimiento propio toma con relación al cuerpo M.

Ciñéndonos al caso de $\frac{\omega'}{\omega} = K = constante$, se calcularán los radios de los dos cilindros $S\,S$ y $S'\,S'$ por la relación $\frac{O\,C = R}{O'\,C = R'} = \frac{\omega'}{\omega}$, de donde resulta

$$R = 0\,0' \frac{\omega'}{\omega' + \omega} \quad \text{y} \quad R' = 0\,0' \frac{\omega}{\omega' + \omega}.$$

Cuando las rotaciones propias $[\omega]$ y $[\omega']$ sean del mismo sentido son

$$R = 0\,0' \frac{\omega'}{\omega' - \omega} \quad \text{y} \quad R' = 0\,0' \frac{\omega}{\omega' - \omega}.$$

308'.—Veamos ahora lo que ocurre si los dos cuerpos M y N han de estar en contacto (fig. 147) durante todo su movimiento; la velocidad de resbalamiento en el punto o generatriz de contacto (*) $A\,B$ tiene que estar situada en el plano tangente común a los dos cuerpos, y esto exige que las normales trazadas a lo largo de dicha generatriz corten al eje de la rotación relativa, o sea, refiriéndonos al movimiento proyectado sobre el plano vertical, que *la normal común en el punto A B pase por el centro instantáneo C*

(*) Supondremos se trata de cuerpos cilíndricos por ser el único caso que vamos a aplicar.

de la rotación aparente. Los perfiles de los dos cuerpos M y N tendrán que ser necesariamente conjugados con relación al movimiento de rodadura de la curva $S'\,S'$ sobre la $S\,S$, o de la $S\,S$ sobre la $S'\,S'$ (*).

La velocidad de resbalamiento de los dos cuerpos es $v_r = \omega_r \,.\, A\,C$ y se reduce a cero cuando el contacto tiene lugar en la línea de los centros 0 y $0'$, o sea en el plano de los ejes de las rotaciones propias

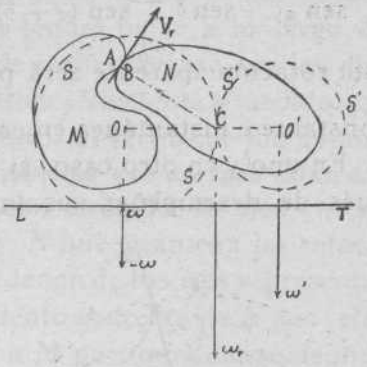


Fig. 147

309. Problema. — *Dos cuerpos sujetos a girar alrededor de dos ejes paralelos están en contacto y apoyado uno sobre el otro* (fig. 147), *al cuerpo N se le imprime un movimiento de rotación* (ω') *¿cuál será la velocidad de resbalamiento en el punto de contacto?* — Suponiendo hecho el dibujo de los perfiles representados en la figura 147, se trazará la normal común a las dos curvas en el punto $A\,B$, esta normal cortará a $0\,0'$ en C y se verificará $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{0\,C}{0'\,C}$ de donde $\omega = \omega' \frac{0'\,C}{0\,C}$, y $v_r = \omega_r \;\; A\,C = (\omega' \pm \omega) \,.\, A\,C$.

310. Movimiento relativo cuando los dos cuerpos están dotados de movimientos de rotación alrededor de ejes que se cortan. — Componiendo $[\omega']$ con $-[\omega]$ (fig. 148) se obtiene, para movimiento aparente de N con relación a M, la rotación $[\omega_r]$ alrededor de un eje $o\,\Delta$ situado en el plano de las rotaciones propias de los dos sólidos, y cuyo valor mo-

(*) Las superficies $S\,S$ y $S'\,S'$ que se toman como base de ciertos trazados que veremos en la teoría de los Mecanismos, se llaman *primitivas* del movimiento correspondiente en este caso y en los que siguen.

dular, dirección y sentido se determinan por las relaciones

$$\frac{\omega}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\omega'}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\omega_r}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)} \quad \text{y} \quad \omega_r = \omega' \cos\alpha + \omega \cos\beta;$$

esta rotación aparente será permanente cuando $\frac{\omega}{\omega'}$ sea constante e instantánea en caso contrario.

En uno y en otro caso, si se supone que el eje $o\Delta$, después de desempeñar sus funciones de eje de rotación, acompañara a los dos cuerpos M y N en sus rotaciones propias, se engendrarían dos conos S y S' que serán tangentes durante todo el movimiento y cuyo movimiento relativo es de rodadura, por serlo el de sus trazas sobre una superficie esférica que tenga el centro en el punto de concurso de los ejes de las rotaciones. De esto se deduce que si inmovilizamos al cuerpo M y cono S y hacemos rodar al S' sobre el anterior, arrastrando consigo al cuerpo N, se reproducirán, para este cuerpo, todas las posiciones relativas que en su movimiento propio toma con relación al cuerpo M.

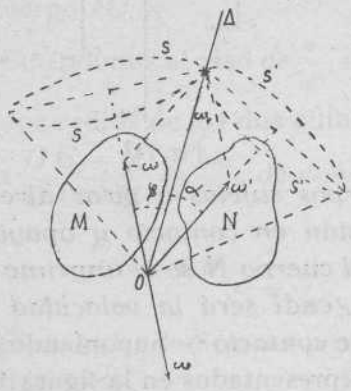


Fig. 148

Ciñéndonos al caso de $\frac{\omega}{\omega'} = K = \textit{constante}$, los conos S y S' serán de revolución y su abertura se calculará por la relación $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$ unida a la condición $\alpha + \beta = \delta$, llamando δ al ángulo de los ejes de las rotaciones propias.

310'.—Si los cuerpos giratorios han de estar en contacto, la sección por una superficie esférica, con el centro en o,

deberá producir curvas esféricas conjugadas respecto a la base y roldana que los conos S y S' determinen en la misma. Suponiendo que dichos cuerpos tengan forma cónica con el vértice en 0, el contacto tendrá lugar a lo largo de una generatriz y la velocidad de resbalamiento, en los distintos puntos de ésta, será distinta y creciente a medida que aumenta la distancia de los puntos al vértice de los conos.

331. Movimiento relativo cuando los dos cuerpos están dotados de movimientos de rotación alrededor de ejes que se cruzan.—Sean los cuerpos M y N que giran con las velocidades angulares $[\omega]$ y $[\omega']$ alrededor de los ejes representados en la figura 149, el movimiento aparente de N con relación a M puede reducirse de muchas maneras a una rotación $[\omega_r] \equiv [\omega'] + [-\omega]$ y una traslación representada por los momentos de $[\omega']$ y $-[\omega]$ con relación al punto donde se haga la reducción; pero de todas estas reducciones, la más sencilla es la que convierte a dicho movimiento en helicoidal representado por los vectores $[\omega_r]$ y $[v_r]$ situados en el eje central $o\,\Delta$ del sistema de rotaciones $[\omega']$ y $[\omega]$ **(277).**

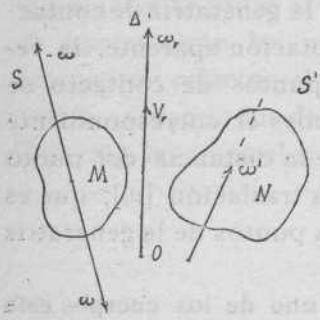


Fig. 149

Cuando la relación $\frac{\omega'}{\omega}$ es constante, la posición de $o\,\Delta$ es fija; en caso contrario el expresado eje será variable.

Si suponemos que el eje $o\,\Delta$, después de desempeñar su papel de eje de rotación, acompaña a los dos cuerpos en sus movimientos propios, se engendrarán dos superficies regladas S y S', tangentes a lo largo de una generatriz, que permitirán reproducir las posiciones relativas al cuerpo N, con relación al M, haciendo rodar la S' sobre la S y suponiendo que al mismo tiempo que se produce la rodadura,

avanza el cuerpo N en el sentido de la generatriz de contacto la longitud que corresponda por la presencia de la traslación $[\nu_r]$.

En el caso de ser $\frac{\omega'}{\omega} = K = constante$, dichas superficies regladas son dos hiperboloides de revolución y el corrimiento longitudinal, necesario para reproducir el movimiento relativo del cuerpo N, se obtiene haciendo que por efecto de la rodadura no dejen de tocarse las respectivas circunferencias de garganta.

311'.—Si los cuerpos M y N hubieran de estar en contacto, suponiéndolos de forma de hiperboloides de revolución, las normales trazadas a lo largo de la generatriz de contacto tendrán que cortar al eje de la rotación aparente; la velocidad de resbalamiento en los puntos de contacto se compondrá de dos sumandos gráficos: el correspondiente a la rotación $[\omega_r]$, que dependerá de la distancia del punto al eje $o\Delta$ y el correspondiente a la traslación $[\nu_r]$, que es común en cada instante a todos los puntos de la generatriz de contacto.

312. Movimiento relativo cuando uno de los cuerpos está dotado de un movimiento de rotación y el otro de una traslación perpendicular a la rotación del primero.—Para componer la rotación $[\omega']$ (fig. 150) con la traslación $-[\nu]$ perpendicular a la primera, traslademos a $[\omega']$ sobre Oa, perpendicular a $[\nu]$, hasta un punto C tal que el momento de $[\omega']$ respecto al mismo sea $M_c[\omega'] = \omega' . OC = \nu$; conseguido esto tendremos en el punto C la rotación $[\omega_r]$ y las dos traslaciones $[\nu']$ y $-[\nu]$ que se destruyen y reducen el movimiento aparente de N, con relación a M,

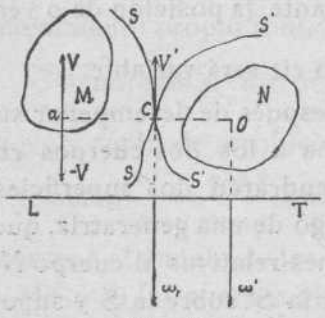


Fig. 150

a una rotación $[\omega_r]$ alrededor de un eje proyectado en el punto C, definido por la relación $OC = \frac{v}{\omega'}$.

La rotación $[\omega_r]$ será permanente cuando $\frac{v}{\omega'}$ sea constante e instantánea en caso contrario; si en uno y otro caso se supone que el eje de dicha rotación, una vez efectuada ésta, acompaña a los cuerpos M y N en sus respectivos movimiento propios, se engendrarán dos superficies cilíndricas S y S' tangentes y cuyo movimiento relativo es de rodadura, por serlo el de sus trazas sobre el plano vertical de proyección. Suponiendo inmóvil al cuerpo M y cilindro S y haciendo rodar al S' sobre el S, acompañado de N, se reproducirán las posiciones relativas de este último cuerpo con relación al M.

312'.—Cuando los dos cuerpos hayan de estar en contacto (fig. 151), las normales trazadas a lo largo de la generatriz

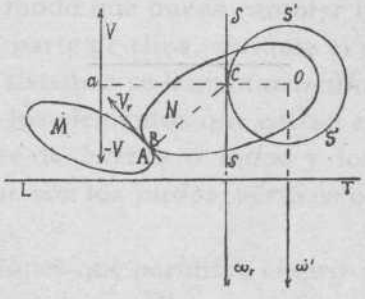


Fig. 151

común (*) cortarán al eje de la rotación aparente y refiriéndonos a las trazas de dichos cuerpos sobre el plano vertical de proyección elegido, la normal común a los dos

(*) Se suponen cilíndricos los dos cuerpos, por ser el caso de aplicación que nos interesa.

perfiles en el punto $A\,B$ pasará por el centro instantáneo de rotación C; estas trazas serán perfiles conjugados en la rodadura de la línea S' sobre la S, o de la S sobre la S'.

La velocidad de resbalamiento de los cuerpos M y N en su contacto es $v_r = \omega_r \,.\, A\,C$, reduciéndose a cero cuando dicho contacto tenga lugar en el plano, perpendicular a la dirección de la traslación, que pasa por el eje de la rotación propia del cuerpo N.

CAPITULO TERCERO

Cinemática de los sistemas de enlace
Teoría de los mecanismos

I

PRELIMINARES

313. Definiciones.—Ya dijimos, al empezar la Cinemática, que las formas geométricas, cuyo movimiento íbamos a estudiar en este tercer capítulo, se suponían formadas por varios elementos finitos indeformables, enlazados unos con otros de tal modo que pueda cambiar la posición relativa de todos, o parte de ellos, durante el movimiento del conjunto. Estos sistemas se llaman *articulados* o *de enlace*; cada uno de los elementos que entran en su formación reciben el nombre de *barras* o *lados* y los puntos donde se unen dos lados son los *nudos, vértices* o *articulaciones* del sistema.

Las articulaciones que permiten el giro relativo de los lados en todos sentidos se llaman *esféricas* o de *rótula*; las que sólo consienten dicho giro en el plano determinado por dos lados que concurren en un vértice son *cilíndricas* o de *charnela*.

314. Clasificación de los sistemas articulados.—Los sistemas articulados se clasifican de diversas maneras atendiendo a su naturaleza, forma y aplicaciones; así los hay *planos* y *alabeados*; en los primeros se supone que las ar-

ticulaciones son cilíndricas, para que el movimiento de sus diversas piezas se realice en el plano determinado por sus ejes. Los sistemas articulados planos que se emplean en las construcciones (vigas, armaduras, etc.), suelen afectar la forma de *red*, más o menos alargada, y de aquí el nombre de *reticulares* que a dichos sistemas se les da.

Cuando los elementos de un sistema articulado están formados por cuerdas, alambres, o, en general, por materiales flexibles que no sean aptos para resistir *esfuerzos de compresión* se llaman *funiculares*.

Los sistemas articulados que hemos definido, son, por su naturaleza, *deformables*, es decir, que se supone pueden alterar su forma, sin modificar las longitudes de sus

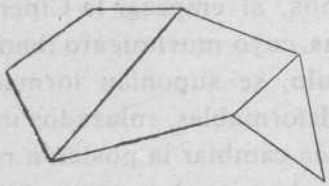


Fig. 152

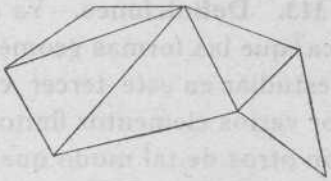


Fig. 153

lados; pero se comprende que si en un sistema deformable aumentamos los enlaces mutuos, por medio de nuevos lados que se agreguen al sistema, se llegará a convertir en *indeformable*, quedando desde este momento incluido en la categoría de *sólido geométrico*; no obstante esto, los sistemas indeformables organizados de esta manera, continúan llamándose *articulados* y se subdividen en *estrictamente indeformables*, cuando pasan a ser deformables al suprimirle uno cualquiera de sus lados, y

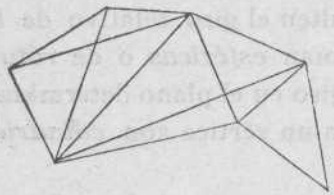


Fig. 154

sistemas de *líneas sobrantes* cuando la supresión de algún lado no lleva consigo la condición de deformabilidad; las figuras 152, 153 y 154 son ejemplos de sistemas reticulares deformables, estrictamente indeformables y de líneas sobrantes.

314'.—Como el número de condiciones que determinan una figura plana de n vértices es $2n - 3$, se deduce que en las figuras estrictamente indeformables, si llamamos l al número de lados y n al de sus nudos, se verificará la relación $l = 2n - 3$, quedando caracterizados los tres grupos de sistemas definidos por la condición $l \lessgtr 2n - 3$ y constituyendo la diferencia $(2n - 3) - l = K$ el número de condiciones de *deformabilidad* de los sistemas deformables y $K = l - (2n - 3)$ el número de los lados *superfluos* en las figuras de líneas sobrantes. (*)

Los sistemas indeformables son, como hemos dicho, por lo que a su estudio cinemático se refiere, sólidos geométricos, por cuyos motivos prescindiremos de ellos y nos referiremos en esta parte de la Cinemática a los sistemas deformables, y de éstos únicamente consideraremos los llamados *sistemas de enlaces completos*, o sea aquellos que sólo tienen una condición de deformabilidad $K = (2n - 3) - l = 1$, por ser este el caso que se presenta en los Mecanismos, cuya teoría cinemática vamos a establecer. Es evidente que en un sistema de enlaces completo se deducirán las posiciones de todos los elementos que lo forman cuando se conozca la de uno de ellos.

315. Máquinas.—Mecanismos.—Las máquinas son, en

(*) Se supone, para poder deducir del valor $K = l - (2n - 3)$, si un sistema articulado plano es deformable, estrictamente indeformable o de líneas sobrantes, que no presenta dicho sistema *organización defectuosa* que pudiera dar lugar a consecuencias contrarias a la realidad; así puede suceder que un sistema tenga K' líneas sobrantes en una de sus partes y K' condiciones de deformabilidad en otra y, verificándose $K = l - (2n - 3) = o$, el sistema sería deformable.

su concepto más general, *un conjunto de piezas de suficiente resistencia, dispuestas de tal modo que, bajo la acción de las fuerzas que las solicitan, pueden tomar sólamente movimientos de antemano determinados.*

Según esta definición las diversas piezas de una máquina deben formar un sistema de enlaces completo; pues de lo contrario el movimiento resultante a una pieza, como consecuencia del adquirido por otra con ella enlazada, no quedaría determinado.

Las diversas piezas que unen entre sí a los órganos más importantes de una máquina (*receptor* y *operador* generalmente), cumpliendo la misión cinemática de transformar las circunstancias del movimiento de uno de dichos órganos, en las que debe tener el segundo, para realizar la operación mecánica que le esté encomendada, constituyen los llamados *mecanismos.*

316. Clasificación de los mecanismos.—En los mecanismos hay que distinguir tres elementos principales: la *pieza conductora,* la *conducida* y el *órgano de transmisión.* Cuando este último está formado por una sola pieza, o bien la transmisión se verifica por el contacto de las piezas conductora y conducida, el mecanismo es *simple*; si el órgano de transmisión se compone de varias piezas, el mecanismo es *compuesto.*

Los mecanismos compuestos se descomponen con facilidad en mecanismos simples, considerando sus diversas piezas de tres en tres a partir de la primera (*) y tomando como pieza conductora de cada grupo, la conducida del grupo anterior.

Los mecanismos simples se subdividen en tres *géneros* por la naturaleza del órgano de transmisión que una a las piezas conductora y conducida.

(*) De dos en dos si la transmisión se verifica por contacto.

Constituyen el *primer género* los mecanismos en que dichas piezas están unidas por un *órgano rígido*, cuya disposición suele ser la de una barra alargada (mecanismos de *biela*), o la de una cruz (mecanismos de *cruceta* o *juntas*); el *segundo género* lo constituyen los mecanismos en que la transmisión se verifica por intermedios deformables, generalmente *flexibles e inextensibles* (mecanismos de *correas*) y con menos frecuencia por intermedios flúidos (mecanismos *hidráulicos* y *neumáticos*), y forman el *tercer género* los *mecanismos de contacto* o sea aquellos en que la transmisión se verifica, como su nombre indica, por el simple contacto de las piezas conductora y conducida. En estos últimos se dice que el mecanismo es de *contacto plano*, cuando las piezas conductora y conducida se mueven paralelamente a un mismo plano y de *contacto no plano*, en el caso contrario.

Los movimientos que pueden tener las piezas de un mecanismo, pueden ser variados en número indefinido; pero en las aplicaciones sólamente se suelen emplear en las piezas conductoras y conducidas los movimientos circulares y rectilíneos, pudiéndose agrupar los diversos mecanismos, de cada uno de los tres géneros anteriores, en las tres especies siguientes: mecanismos de *1.ª especie* los que tengan por objeto transformar un movimiento rectilíneo en otro de la misma naturaleza; de *2.ª especie* los que se propongan convertir un movimiento circular en otro también circular, y por último, serán de *3.ª especie* los que tengan por objeto transformar un movimiento rectilíneo en circular o, recíprocamente, de circular en rectilíneo.

317. Mecanismos reversibles.—Los mecanismos en que se pueda cambiar el papel de las piezas conductora y conducida, sin perturbaciones en su funcionamiento, se llaman *reversibles*: teóricamente todos los mecanismos son reversibles, pero en la práctica hay casos en que la acción

de la pieza conducida (convertida en conductora), se verifica en tan malas condiciones de aprovechamiento de la fuerza motriz, que serían necesarias fuerzas desproporcionadas, que ocasionarían seguramente la rotura del mecanismo, para verificar la transmisión en sentido inverso; los mecanismos en que se producen pérdidas notables de fuerza motriz, para hacerlos funcionar en dicho sentido inverso, se dice que son *irreversibles* o *no reversibles*.

318. Descripción de los órganos más importantes que entran en la formación de los mecanismos.—Los órganos de las máquinas destinados a hacer que las piezas del mecanismo sigan trayectorias determinadas de antemano, se llaman *guías*.

Las guías de movimientos rectilíneos se obtienen con *resbaladeras M M* (fig. 155) que conducen al *taco H*, con

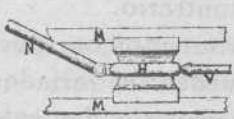


Fig. 155

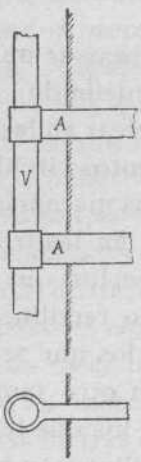


Fig. 156

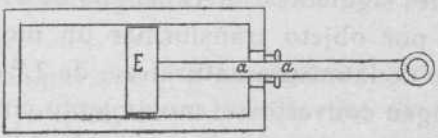


Fig. 157

anillas (fig. 156) que abrazan a las varillas móviles y por otros órganos *compuestos* que después veremos. Los cilindros de las máquinas de vapor (fig. 157) con el orificio de paso *a a*, para la varilla del *émbolo*, constituyen también guías de movimiento rectilíneo.

Para producir movimientos circulares, el procedimiento más sencillo consiste en montar las piezas móviles sobre ejes o *árboles giratorios* (figura 158); estos árboles descansan por sus *muñones* en *cojinetes* y *soportes* (fig. 159) destinados a sostenerlos; cuando los árboles son verticales se llaman *quicios* y al apoyo inferior se le da el nombre de *rangua* o *quicionera* (fig. 160).

Fig. 158

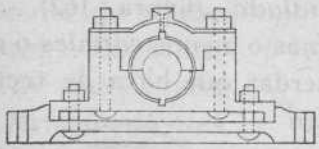


Fig. 159

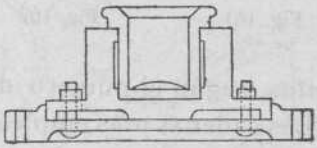


Fig. 160

Las piezas montadas sobre los árboles giratorios son generalmente *poleas, tambores, ruedas dentadas, levas, excéntricas* y *volantes.*

Las poleas, tambores y ruedas dentadas se emplean lo mismo para recibir que para transmitir el movimiento; las levas y excéntricas para transmitirlo generalmente y los volantes son ruedas de gran diámetro que se montan sobre los ejes para regularizar la marcha de las máquinas, como se verá en la Dinámica, y cuyo papel cinemático suele ser nulo.

Las poleas pueden estar *acuñadas* sobre el eje (poleas de *transmisión*) o sin acuñar (poleas *locas*), empleándose estas últimas cuando, sin detener el movimiento general de la máquina, se quiere evitar el funcionamiento de los órganos dependientes del árbol donde está montada la polea. Los tambores se emplean con el mismo objeto que las poleas y no se diferencian de ellas más que por el tamaño

relativo, que les hace tomar aquel nombre cuando exceden de las dimensiones ordinarias.

Las poleas son de *llanta convexa* (fig. 161) cuando están destinadas a recibir correas, siendo necesaria esta forma para evitar que la correa *salte* de la polea; cuando la transmisión se verifica con *cadenas, cables* o *cuerdas,* son de *llanta acanalada* (figura 162), con más o menos *canales* o *gargantas,* según el número de cuerdas que haya de recibir.

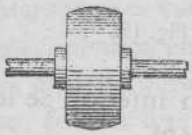


Fig. 161

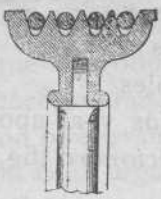


Fig. 162

Las cadenas más empleadas en estas transmisiones pueden ser *ordinarias* (fig. 163), o especiales de los *sistemas Vaucanson* (figura 164), *Galle* (fig. 165), o *Neusstad* (fig. 166); en todos estos casos, la sección recta de la garganta de la polea afecta la forma de polígono regular, cuyos lados

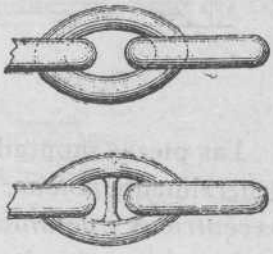


Fig. 163

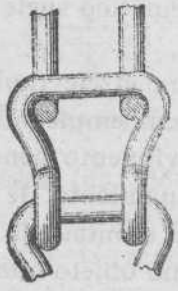


Fig. 164

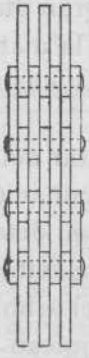


Fig. 165

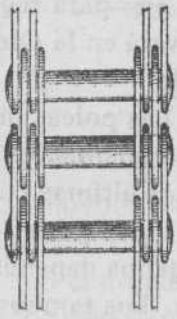


Fig. 166

tienen la misma longitud que los *eslabones* de la cadena y frecuentemente están dotados de salientes que engranan en los citados eslabones, para mayor seguridad en la transmisión.

Las *ruedas dentadas* (fig. 167) son poleas cuya llanta está guarnecida de una serie de salientes y entrantes, destinados a recibir (los segundos) y a penetrar (los primeros) en los entrantes y salientes de otra rueda análoga montada sobre un eje o árbol próximo. Los salientes de estas ruedas se llaman *dientes*, distinguiéndose en ellos la *cabeza a a'*, *raíz b b'*, *caras m a*, *m' a'*, *flancos m b*, *m' b'*, *altura r s* y *espesor m m'* (medido sobre la *circunferencia primitiva* que después definiremos); los entrantes se llaman *huecos*, midiéndose su *anchura* sobre la misma circunferencia primitiva. Cuando los entrantes y salientes anteriores están montados sobre una barra rectilínea recibe ésta el nombre de *cremallera* (fig. 168).

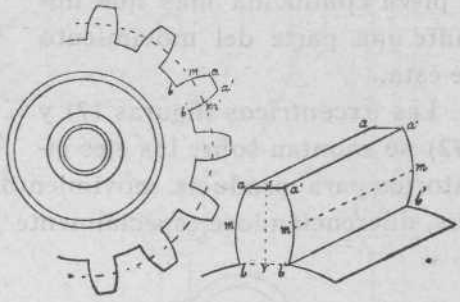


Fig. 167

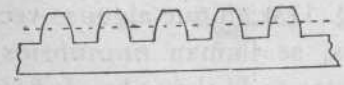


Fig. 168

De las dos ruedas dentadas que se engranan en una transmisión, se llama *piñón* a la de menor diámetro y *rueda* propiamente dicha a la mayor y su conjunto constituye un *engranaje*; la anchura ocupada por el espesor de un diente y un hueco en la rueda y en el piñón se llama paso del *engranaje*.

Las *levas* (figs. 169 y 170) tienen por objeto producir en una pieza inmediata movimientos alternativos de rotación

o traslación, con la particularidad de que no actúan sobre

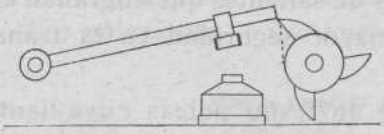


Fig. 169

la pieza conducida más que durante una parte del movimiento de ésta.

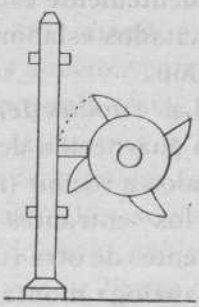


Fig. 170

Las *excéntricas* (figuras 171 y 172) se montan sobre los ejes giratorios para producir movimientos rectilíneos alternativos, diferenciándose especialmente de las levas en que su

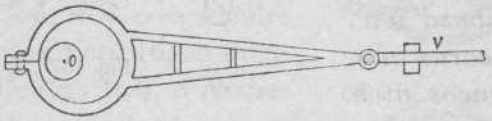


Fig. 171

acción, sobre la pieza conducida, es permanente durante todo el movimiento. La excéntrica de la figura 171 se llama *de collar* y la de la figura 172 *de corazón*.

Los brazos acodados *N* (fig. 173) en que algunas veces terminan los árboles giratorios, se llaman *manubrios* y *manivelas* y al *muñón H* de éstas se da el nombre de *botón* de la manivela. Cuando el acodamiento se produce entre los muñones del eje (fig. 174) se llama *cigoñal* o *cigüeñal*.

Las piezas de forma alargada (fig. 175) que se articulan en los cigoñales y en las manivelas se llaman *bielas*; constando estos últimos órganos de *cuerpo, cabeza* y *pie*.

Las destinadas a girar con movimientos alternativos de pequeña amplitud, alrededor de un eje, se llaman *balancines* (fig. 176).

Cuando la longitud de los árboles giratorios es excesiva, y con más frecuencia aún, porque las necesidades del funcionamiento lo exigen, se construyen de dos o más piezas que se unen permanente o accidentalmente por medio de *embragues*; las uniones permanentes, tales como las representadas en las figuras 177 *(de platillos)* y 178 *(de manguito M y llave o chaveta a b)*, son verdaderos *empalmes* más bien que *embragues*, pues este último nombre no se aplica generalmente más que a las uniones accidentales que, por medio de órganos apropiados, se producen o interrumpen, a voluntad, durante el funcionamiento.

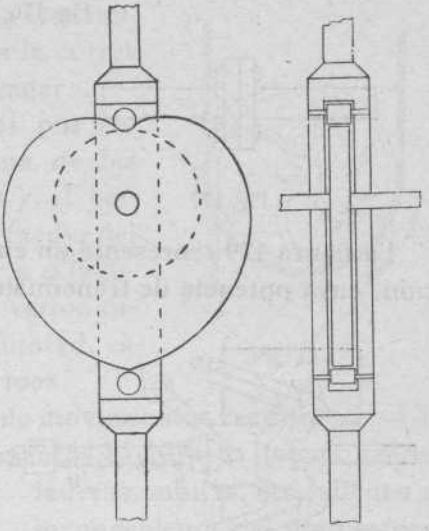


Fig. 172

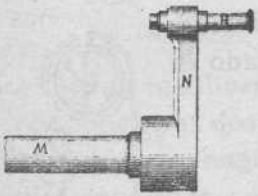


Fig. 173

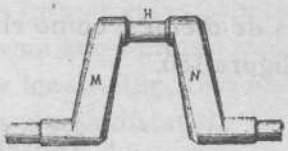


Fig. 174

Fig. 175

Fig. 176

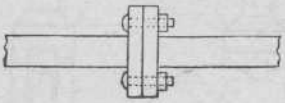


Fig. 177

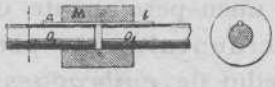


Fig. 178

La figura 179 representa un embrague por *conos de fricción,* cuya potencia de transmisión depende de la presión que se establezca entre las superficies en contacto; la expresada figura se refiere a un tipo de embrague usado en los automóviles; la palanca *P* sirve para interrumpir o establecer la conexión, que se asegura por la acción del muelle en espiral *H;* el cono interior está guarnecido por una banda de cuero *m m* que suaviza la acción del embrague. En los talleres son más frecuentes los embragues ordinarios *de dientes,* como el representado en la figura 180.

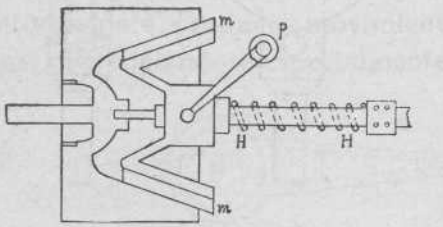


Fig. 179

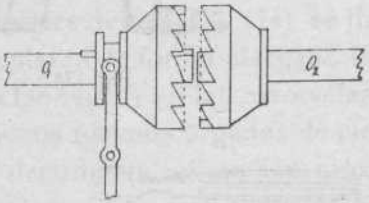


Fig. 180

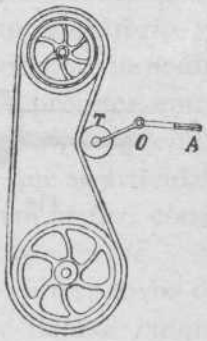


Fig 181

El embrague de ejes unidos por correas, se consigue por medio de *tensores A o T* (fig. 181) o *pasacorreas P* (figura 182); el segundo procedimiento exige el empleo de una polea loca, inmediata a la transmisión, sobre la cual se pasa la correa cuando se quiere desembragar.

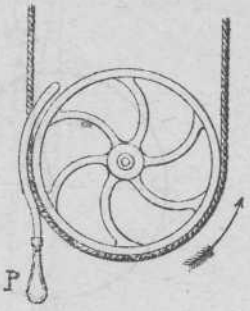


Fig. 182

Si los ejes están unidos por engranajes, se hace que una de las ruedas dentadas sea loca y el embrague se establece por medio del manguito o rueda auxiliar *a a* (figura 183), provista de uno o varios topes *n*, que penetran, a voluntad, en los orificios *c* de la rueda loca.

319. Guias especiales de movimientos rectilíneos. — Las guias ordinarias de movimientos rectilíneos (tacos, resbaladeras, anillas, etc.) tienen el inconveniente del gran esfuerzo motor que consume el rozamiento de las superficies en contacto y tanto por este motivo, como para utilizar el movimiento de otros órganos montados con distinto objeto, se suelen formar guias especiales de movimiento rectilíneo, en la forma que vamos a indicar.

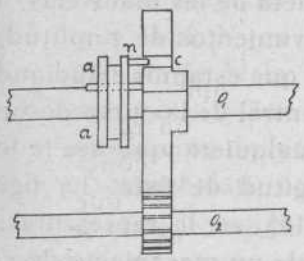


Fig. 183

1.° Supongamos dos manivelas iguales (fig. 184) unidas por una biela cuya longitud sea igual a la distancia de los ejes y hagamos girar a éstos en sentido contrario, produciendo una revolución completa: el punto medio de la biela describe la curva *de larga inflexión a o b*, cuyos elementos centrales *m n* se diferencian tan poco de una línea recta, que prácticamente puede suponerse rectilíneo el camino recorrido por el punto medio de la biela, siempre que

la amplitud de los giros de las manivelas, a uno y otro lado de la posición media, indicada en la figura, no exceda de 18^o ó 19^o.

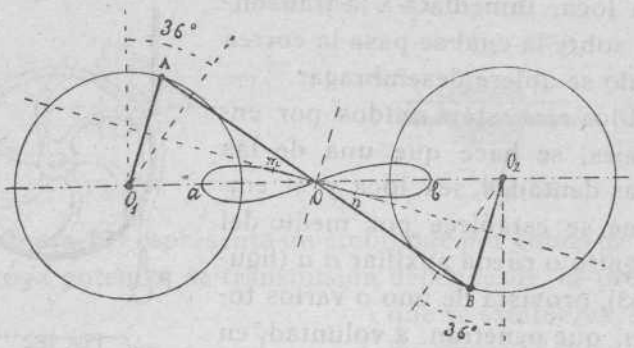


Fig. 184

La condición de longitud impuesta a la biela, necesaria para producir la revolución completa de las manivelas, no lo es cuando se desea obtener movimientos de amplitud limitada, como ocurre en las guias que estamos estudiando, que sólamente utilizan la parte central de la curva descrita por el punto medio de la biela, cualquiera que sea la longitud de ésta. La figura 185 es la representación de un mecanismo de esta naturaleza; las dos manivelas están reemplazadas por el balancín *o c* y el contrabalancín *o' b*, cuyas oscilaciones producen el movimiento rectilíneo alternativo de la varilla *v* articulada en el punto medio *a* de la biela *b c*.

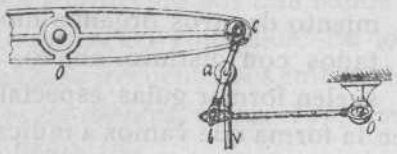


Fig. 185

Las longitudes del balancín, contrabalancín y biela, guardan cierta relación con la *carrera* que se desea obtener en la varilla *v*, impuesta por la necesidad de que los giros de los dos primeros órganos no excedan en amplitud

del límite señalado; prácticamente se hace el trazado de este mecanismo en la forma siguiente: sea $A B$ (fig. 186) la carrera que se desea obtener; se toma $A D = B E = \frac{1}{2} A B$ y se construye el rectángulo $F G$ cuya base es $F M = \frac{1}{12} A B$; los radios de los círculos determinados por M, a y M' y N, b y N' son las longitudes del balancín y contrabalancín, la diagonal $M N = a b = M' N'$ es la longitud de la biela y los puntos o y o' indican la situación de los ejes donde deben montarse el balancín y contrabalancín.

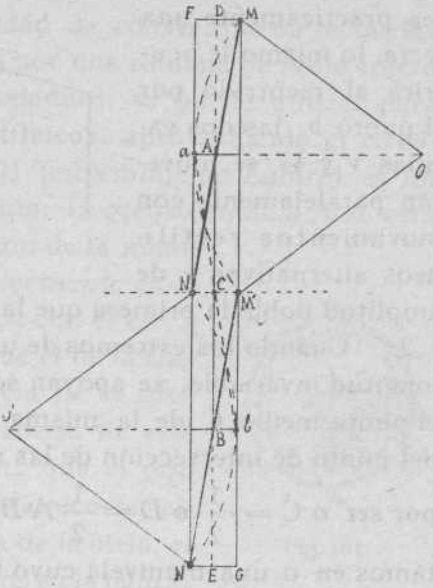


Fig. 186

El *paralelogramo de Watt* (fig. 187) es un mecanismo, fundado en la teoría anterior, que produce dos movimientos rectilíneos alternativos y paralelos, de amplitud doble uno del otro, en la forma siguiente: el balancín $o d$ se prolonga hasta $o c = 2 . o d$, agregando las dos piezas $a b = d c$ y $b c = a d$; la semejanza de los triángulos $o c b$ y $o d m$ (fig. 188), en todas las posiciones del mecanismo, hace que el punto m coincida siempre con el punto medio de la biela $a d$ y el camino recorrido por b resulta ser una curva homotética del descrito

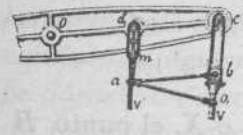


Fig. 187

por el punto m, y como éste es el arco central de una curva de larga inflexión, o sea prácticamente una recta, lo mismo le ocurrirá al recorrido por el punto b; las dos varillas V y V' se moverán paralelamente con movimientos rectilíneos alternativos y de amplitud doble la primera que la segunda.

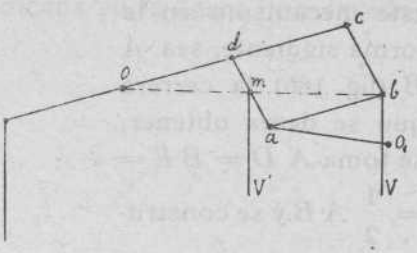


Fig. 188

2.° Cuando los extremos de una recta $A\,B$ (fig. 189), de longitud invariable, se apoyan sobre dos perpendiculares, el punto medio C de la misma equidista constantemente del punto de intersección de las referidas perpendiculares, por ser $o\,C = \frac{1}{2}\,o\,D = \frac{1}{2}\,A\,B$; esto nos dice que si montamos en o una manivela cuyo botón se articule al punto medio de la biela $A\,B$ y se hace al extremo A de esta últi-

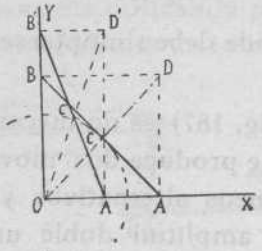


Fig. 189

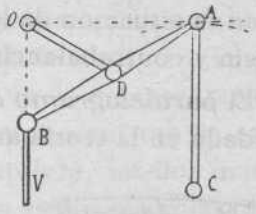


Fig. 190

ma pieza recorrer el camino rectilíneo $o\,X$, el punto B se moverá, sin necesidad de otras guias, sobre la recta $o\,Y$. En esto está fundado el mecanismo llamado *balancín Oliver Evans*, representado en la figura 190, en el cual se supone que el arco recorrido por el punto A es de gran radio y pequeña amplitud gradual, para que pueda suponerse

prácticamente rectilíneo el movimiento producido en el punto *B*.

3.° La conocida propiedad de convertirse en rectas las hipocicloides engendradas por una roldana de radio mitad que la de la base de la rodadura, se puede utilizar para producir movimientos rectilíneos, aprovechando el circular de un eje. La figura 191 *(engranaje de Lahire)* es un ejemplo de esta combinación; la rueda dentada *A A* está montada loca sobre el botón de la manivela *o B*, y engrana *interiormente* en la rueda fija *C C*, concéntrica con el eje, y cuyo diámetro es doble que el de la rueda *A A*; la cabeza de la biela *m* se articula en un punto de la periferia de esta última rueda, y es evidente que el giro del eje y manivela *o B* hará recorrer alternativamente, a la cabeza de la biela, el diámetro indicado de puntos en la figura.

Fig. 191

320. Problemas generales de la teoría cinemática de los mecanismos.—Las cuestiones que hay que resolver en esta teoría son dos:

1.ª *Conocidas la trayectoria y la forma de las piezas conductora y conducida, determinar la relación de sus velocidades (cuestión directa).*

2.ª *Conocida la relación de velocidades y naturaleza del movimiento que han de tener las piezas conductora y conducida, determinar la forma más apropiada que debe dársele a dichas piezas (cuestión inversa).*

El problema referente a la cuestión inversa interesa especialmente al constructor de máquinas, por cuyo motivo reduciremos este estudio a la cuestión directa enunciada, exponiendo ligeros detalles de la inversa en algunos mecanismos de contacto que especialmente conviene conocer.

Consideraremos sucesivamente los tres géneros de me-

canismos que se han establecido y, dentro de cada género, se estudiarán las particularidades de las tres especies que puedan corresponderle.

II

MECANISMOS DE PRIMER GÉNERO

321. Teoría de los mecanismos de biela. — Supongamos una recta $A\,B$ (fig. 192) cuyos extremos se obligan a reco-

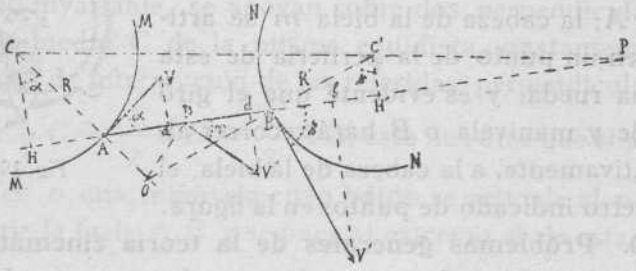


Fig. 192

rrer las trayectorias curvilíneas $M\,M$ y $N\,N$; las velocidades lineales de A y B cumplirán la condición **(264)**

$$v \cos \alpha = v' \cos \beta \quad \text{o} \quad \frac{v}{v'} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha},$$

que permitirá calcular, en una posición cualquiera de $A\,B$, la relación de velocidades de los extremos de dicha recta.

El centro instantáneo de la rotación, que corresponde a la posición señalada, es O, intersección de las normales en A y en B a las dos trayectorias **(295)** y uniendo O con un punto cualquiera D de la recta $A\,B$, se podrá trazar la velocidad v'' del punto D, cuando se conozcan v o v'.

La velocidad angular instantánea de la recta AB, en su giro alrededor de O, es

$$\omega = \frac{v}{OA} = \frac{v'}{OB} = \frac{v''}{OD}$$

y la especial que corresponde a los puntos A y B, en sus giros alrededor de los centros de curvatura C y C' de sus trayectorias respectivas, es, para el punto A, $\omega = \frac{v}{CA} = \frac{v}{R}$ y para el punto B, $\omega' = \frac{v'}{C'B} = \frac{v'}{R'}$.

La relación $\frac{\omega}{\omega'}$ de estas últimas velocidades *es inversa de la de los dos segmentos en que la recta AB divide a la línea de los centros CC'*; en efecto, de la semejanza de los triángulos CHP y $C'H'P$ se deduce $\frac{PC'}{PC} = \frac{C'H'}{CH}$, y como

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{v}{R} : \frac{v'}{R'} = \frac{v}{v'} \cdot \frac{R'}{R} = \frac{R' \cos \beta}{R \cos \alpha} = \frac{C'H'}{CH},$$

resulta en definitiva $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{PC'}{PC}$.

Cuando la biela AB ocupa posiciones en que sea normal a cualquiera de las trayectorias M o N, será nulo el coseno del ángulo α o del β y la ecuación $v \cos \alpha = v' \cos \beta$, exige que la velocidad del punto correspondiente, correlativa con otra cualquiera del otro punto, sea *infinita*, y como estas velocidades infinitas no pueden producirse en la práctica, se deduce que la biela no podrá pasar, por sí sola, por dichas posiciones, que se llaman *puntos muertos* de estos mecanismos. Esta consecuencia es sólo cierta cuando el mecanismo parte del reposo en dichas posiciones, pues durante la marcha se salvan con facilidad los puntos muertos, gracias a la *velocidad adquirida* antes de

llegar a ellos, que permite verificar la ecuación $v \cos \alpha = v' \cos \delta$, con valores nulos de v' cuando $\alpha = 90^o$, o con la reducción a *cero* de v cuando $\delta = 90^o$.

Las relaciones establecidas sirven de base para resolver el problema general de esta teoría en las tres especies de mecanismos de biela.

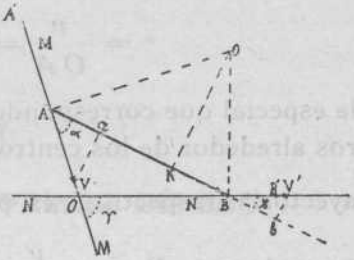


Fig. 193

322. Mecanismos de biela de 1.ª especie.—Supongamos que las curvas MM y NN de la figura 192 sean dos rectas, como expresa la figura 193, y A y B las piezas conductora y conducida, unidas por la biela AB; en este caso sólo interesa la relación de velocidades lineales

$$\frac{v}{v'} = \frac{\cos \delta}{\cos \alpha} = \frac{\cos (\gamma - \alpha)}{\cos \alpha},$$

siendo γ el ángulo de las guías de las piezas A y B.

Las posiciones extremas de A y B se determinan tomando $o\,A' = o\,B' = AB$; cuando A está en A', B está en o y cuando A llega a o, B está en B'. Al principio es $\alpha < \delta$ y por tanto $v < v'$; la relación $\frac{v}{v'}$ aumenta con α, desde $\cos \gamma$ hasta ser $\frac{v}{v'} = 1$ cuando $\alpha = \delta$; después sigue aumentando, hasta tomar el valor extremo $\frac{1}{\cos \gamma}$, cuando la pieza conductora llega al punto o.

Si desde el centro instantáneo 0 se traza la perpendicular $0\,K$ a la biela, el pie K de la misma es el punto de tangencia de dicha pieza con la envolvente de sus posiciones **(295')**; la velocidad de K está dirigida sobre el eje de la biela.

Cuando el ángulo $\gamma = 90^o$, es $\frac{v}{v'} = \text{tg } \alpha$ y las posiciones extremas de la biela son *puntos muertos* del mecanismo.

323. Mecanismos de biela de 2.ª especie.—Si las dos curvas M y N de la figura 192 se convierten en dos circunferencias, como expresa la figura 194, estaremos en el caso de transformación de un movimiento circular sobre M en otro también circular sobre N, mediante la biela $A\,B$. En este caso interesa conocer la relación de velocidades angulares de los ejes C y C' y la de las lineales de A y B.

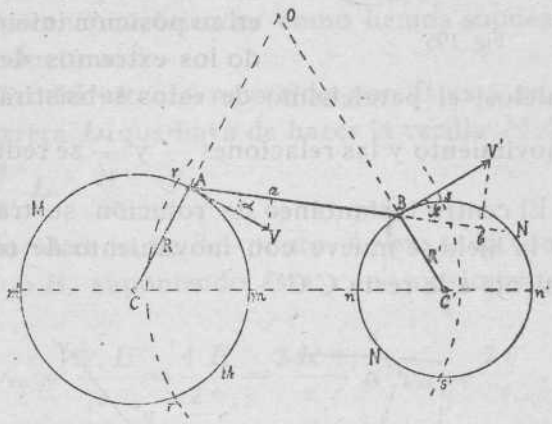


Fig 194

La relación $\frac{\omega}{\omega'}$ es **(321)** inversa de la de los segmentos $P\,C$ y $P\,C'$ (fig. 192) y por consiguiente variable en general. La de las velocidades lineales es (fig. 194)

$$\frac{v}{v'} = \frac{\Omega \,.\, o\,A}{\Omega \,.\, o\,B} = \frac{o\,A}{o\,B}$$

igualmente variable con las distintas posiciones de la biela.

El recorrido que los botones A y B pueden efectuar, en sus círculos correspondientes, se señala haciendo centro

en C y en C' con radios iguales a $AB + CA$ y $AB + C'B$ y trazando los arcos $r\,r'$ y $s\,s'$, que determinan los $r\,m\,r'$ y $s\,n\,s'$ donde se mueven A y B.

Si el arco $s\,s'$ resultara tangente en n' al círculo de la derecha, la manivela $C'B$ podría dar la vuelta completa y para verificarse esta circunstancia en los dos ejes, es preciso que sean iguales las dos circunferencias y la longitud de la biela precisamente igual a la distancia de los ejes $C\,C'$.

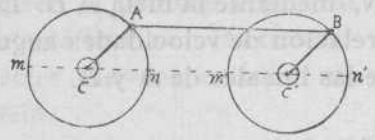


Fig. 195

Si en este último caso (figura 195) se supone la biela, en su posición inicial, uniendo los extremos de dos radios paralelos, el paralelismo de estos subsistirá durante todo el movimiento y las relaciones $\frac{\omega}{\omega'}$ y $\frac{v}{v'}$ se reducen a la unidad. El centro instantáneo de rotación se traslada al infinito y la biela se mueve con movimiento de traslación paralelamente a la recta $C\,C'$.

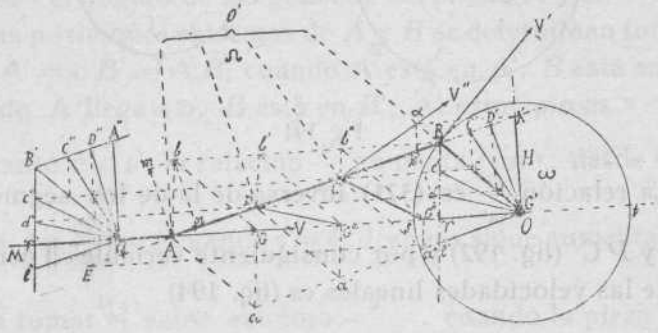


Fig. 196

324. Mecanismos de biela de 3.ª especie. — Supongamos se trata de convertir el movimiento rectilíneo de A (figura 196) en el circular del punto B. En este caso interesará conocer la relación entre las velocidades lineales de

A y B y la angular de la manivela $o\,B$ con la lineal de A.

Según lo establecido la relación entre v y v' será

$$\frac{v}{v'} = \frac{o'\,A}{o'\,B} = \frac{o\,A'}{o\,B} = \frac{H}{R}\ (*)\ ,$$

variable con la posición del mecanismo, por serlo $H = o\,A'$.

La relación $\frac{v}{\omega}$ se deduce de la anterior por ser $\omega = \frac{v'}{R}$, obteniéndose $\frac{v}{\omega\,R} = \frac{H}{R}$ o $v = \omega\,.\,H$.

Los extremos del diámetro $s\,t$ son los *puntos muertos* de este mecanismo, siendo, como hemos supuesto, A la pieza conductora.

El radio del círculo recorrido por B está en relación con la carrera L que haya de hacer la varilla $M\,A$, siendo $o\,B = \frac{1}{2}\,L$.

La velocidad media del punto A, en cada vuelta de la manivela $o\,B$, suponiendo ésta con movimiento uniforme, es

$$v_m = \frac{2\,.\,L}{t} = \frac{4\,R}{\frac{2\,\pi}{\omega}} = \frac{2\,R\,\omega}{\pi} \quad \text{o} \quad v_m = \frac{2\,v'}{\pi}\ ,$$

y en función del número n de revoluciones por minuto

$$v_m = \frac{2\,n\,L}{60}\ .$$

324'.—Por la importancia práctica de este mecanismo vamos a detallar algunas propiedades relativas a las velocidades y aceleraciones de los distintos puntos de la biela.

Velocidades.—La relación $v = \omega\,.\,H = \omega\,.\,o\,A'$ encontrada para determinar la velocidad del pie de la biela, en función de ω, es un caso particular de la construcción siguien-

(*) Llamamos R a la longitud $o\,B$ del manubrio o manivela.

te: tracemos por un punto cualquiera C de la biela la paralela $C\,c$ a la varilla $M\,A$; por el punto c de la manivela levantemos la perpendicular $c\,C'$ a la misma varilla y vamos a demostrar que la velocidad lineal de C es $v'' = \omega \times o\,C'$ y su dirección perpendicular a $o\,C'$; en efecto, por la construcción hecha el punto C' divide a $B\,A'$ en dos segmentos proporcionales a $C\,B$ y $C\,A$ y las rectas $o\,C'$ y $o'\,C$ serán paralelas, demostrándose con esto que $[v'']$ es perpendicular a $o\,C'$; el valor de v'', comparado con v', nos da

$$\frac{v''}{v'} = \frac{o'\,C}{o'\,B} = \frac{o\,C'}{o\,B} \quad \text{y} \quad v'' = v' \frac{o\,C'}{o\,B} = \omega \times o\,C' .$$

Resulta de esto que llevando los diversos puntos de $A\,B$ a la recta $B\,A'$, en la forma dicha, tendremos una serie de segmentos análogos al $o\,A'$ y $o\,C'$ que expresarán, multiplicados por ω, el valor de las velocidades respectivas. En la figura está indicado el segmento $o\,D'$, perpendicular a $B\,A'$, que corresponde al punto D cuya velocidad, en la posición considerada, tiene la misma dirección que la biela.

Aceleraciones.—Suponiendo la velocidad angular de la manivela constante, la aceleración lineal del punto B es $G' = \omega^2 . R$ y dirigida en la dirección $B\,o$; esta recta $B\,o$ podrá representar al vector $[G']$ en la escala $\frac{1}{\omega^2}$, que conviene emplear en la construcción gráfica de las aceleraciones de este mecanismo.

Para determinar la acelaración de A supongamos que el paso de $A\,B$, a la posición infinitamente próxima siguiente, se descompone en una traslación, que deje a B en la posición que le corresponda, y una rotación alrededor de B, para colocar a A en la suya; por el primer movimiento todos los puntos de $A\,B$ adquirirán la misma aceleración $[B\,o]$ del punto B y la de A, por este concepto, será $[A\,a] = [B\,o]$; en el giro de conjunto alrededor de B la ve-

locidad angular es Ω y las componentes normal y tangencial de la aceleración de A son $\Omega^2 . AB$ y $\frac{d\Omega}{dt} . AB$, que que podremos representar por

$$A_n = \frac{\Omega^2}{\omega^2} . AB \quad \text{y} \quad A_m = \frac{1}{\omega^2} . \frac{d\Omega}{dt} . AB$$

y $[A\,b] \equiv [A\,n] + [A\,m]$ será la aceleración que por efecto de la rotación instantánea corresponde a A; sumando los vectores $[A\,a]$ y $[A\,b]$ se obtiene finalmente la aceleración total $[G]$ del indicado punto. El vector $[G]$ resulta sobre la recta $A\,o$, como podía haberse previsto de antemano.

Para otro punto cualquiera de la biela se harán las mismas construcciones, pero siendo las componentes de $[A\,b]$ proporcionales a su distancia al punto B, las aceleraciones de la rotación en los puntos D, C, etc., de la biela serán paralelas y sus índices b, b', b'' ... estarán en línea recta con B; lo mismo, las aceleraciones debidas a la traslación, todas equipolentes a $[B\,o]$, tendrán sus índices sobre $a\,o$. Resulta de esto que trasladando el paralelogramo $A\,b\,G\,a\,A$ de modo que se conserve la dirección de sus lados, el vértice A recorra la biela y los puntos a y b las rectas $a\,o$ y $b\,B$, quedarán determinadas las aceleraciones $[G'']$, $[G']$ etc., de los diversos puntos de la biela, salvo el factor ω^2.

Si ahora trazamos la recta $B\,\gamma$ paralela a $A\,b$ (*) y refe-

---

(*) La recta $B\,\gamma$ se puede señalar sin el trazado previo de $A\,b$, por la construcción $A'\,\alpha\,\hat{\sigma}\,\gamma$, que se indica en la figura 196. Basta observar que las proyecciones de $B\,\gamma$ y $A\,b$ sobre la biela tienen que ser iguales y que por la construcción indicada el segmento $B\,\hat{\sigma}$ tiene por valor $B\,\hat{\sigma} = \frac{\Omega^2}{\omega^2} . AB = A\,n$, como se deduce del siguiente cálculo:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{B\,\hat{\sigma}}{B\,\alpha} = \dfrac{B\,A'}{B\,o}\,,\ \dfrac{B\,\alpha}{B\,A'} = \dfrac{B\,o}{B\,A}\,,\ B\,\hat{\sigma} = \dfrac{B\,A'^2}{B\,A} \\ \dfrac{\Omega}{\omega} = \dfrac{o\,B}{o'\,B} = \dfrac{B\,A'}{A\,B}\,,\ \dfrac{\Omega^2}{\omega^2} = \dfrac{B\,A'^2}{B\,A} \times \dfrac{1}{A\,B} \end{array}\right\} B\,\hat{\sigma} = \frac{\Omega^2}{\omega^2} \times AB .$$

rimos a ella, por paralelas a la varilla, los puntos de la biela, se obtendrán una serie de rectas $o\,c'$, $o\,d'$, ..., que análogamente a las $o\,C'$, $o\,D'$, ... respecto a las velocidades, representarán en magnitud y dirección, en la escala adoptada, las aceleraciones de los diversos puntos de la biela y recíprocamente se puede determinar el punto en que la aceleración tenga una dirección determinada.

Como en las aplicaciones hay que repetir estas construcciones para distintas posiciones de la biela, pueden hacerse aparte, como se indica a la izquierda de la figura, evitándose la confusión de líneas que resultaría de la superposición de los diversos trazados.

325. Mecanismo de biela con cilindro giratorio.—El mecanismo anterior *de biela, manivela y varilla guiada*, se aplica en las máquinas de vapor y motores de explosión, siendo dicha varilla el vástago del émbolo E (fig. 197) que se mueve, por la acción del vapor o gases de la explosión, en el interior del cilindro $C\,C$.

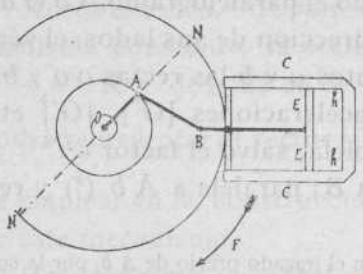


Fig. 197

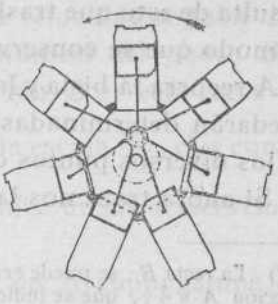


Fig. 198

Pero imaginemos ahora que la manivela $O\,A$ se acuñe en forma tal que su giro se imposibilite y montemos en cambio el cilindro de modo que pueda girar alrededor del eje O, por el cual se hace llegar a la cámara $h\,h$ el gas motor; la acción de éste, al empujar el émbolo de derecha a

izquierda, obligará a retroceder a la tapa posterior del cilindro, alejándola del botón *A* de la manivela, y para que este alejamiento se produzca, es preciso que el cilindro gire, en el sentido de la flecha *F*, hasta llegar a la posición *N'* en la cual, o antes generalmente, tiene que desaparecer el empuje del gas contenido en la cámara *h h*.

Al rebasar, por la velocidad adquirida, la posición *N'*, podrá llegar el cilindro a la *N*, en la que puede volver a producirse la explosión de la gasolina (*), y repetirse indefinidamente las circunstancias de este movimiento.

El mecanismo así constituído se llama *de cilindro giratorio* y para evitar las irregularidades que produciría en la marcha la falta de acción motora, en la semirrevolución de *N'* a *N*, se disponen varios cilindros formando corona alrededor del eje, todos unidos por su biela correspondiente al botón *A* de la manivela o codo del árbol *O*, y se arregla la distribución de la gasolina en forma tal que la acción motora no deje de ejercerse en ningún instante del movimiento.

La figura 198 representa la disposición general de uno de estos mecanismos; se refiere al motor *Gnôme, tipo* Ω, de siete cilindros, sobre cuyos detalles nos impide entrar el carácter cinemático del estudio que estamos realizando; sólamente observaremos que no actuando los gases de la explosión más que por una cara del émbolo, se ha suprimido la tapa anterior del cilindro y aquella pieza se une directamente, por la biela, al botón de la manivela sin la varilla intermedia de los cilindros ordinarios.

326. Mecanismo de cruceta o juntas.—El movimiento circular de un eje *A* (fig. 199) se puede comunicar a otro *B*, inmediato a él, por medio de un enlace especial llamado

(*) Lo general es que la explosión de la gasolina tenga lugar después de dos revoluciones a contar desde la explosión anterior.

de cruceta o *junta*, consistente, como la figura indica, en una pieza rígida en forma de cruz, cuyos brazos se articulan en los extremos a a' y $b\,b'$ de las horquillas en que terminan los dos ejes A y B. (*)

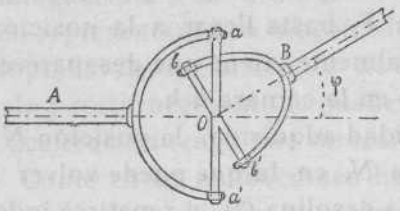


Fig. 199

El giro de A en un sentido cualquiera obliga a los puntos a y a' a recorrer un círculo de plano perpendicular al eje y cuyo centro coincide con el punto o de concurso de A y B; el giro de $a\,a'$ produce el movimiento de $b\,b'$ sobre otro círculo perpendicular a B y cuyo centro está también en o; los dos círculos citados pertenecen a una misma superficie esférica cuyo centro es o y cuyo radio es la longitud de los brazos de la cruz; el ángulo de sus planos es constante e igual al φ que forman los ejes.

Para encontrar la relación de velocidades angulares de los dos ejes, en una posición cualquiera, refiramos las posiciones de a y de b al diámetro común $P\,P'$ (fig. 200) de los dos círculos máximos $a\,P\,a'\,P'$ y $b\,P\,b'\,P'$ que recorren estos puntos; llamemos α al ángulo $a\,o\,P$ y β al $b\,o\,P$, que corresponden a una posición cualquiera del mecanismo, y, en virtud de un conocido teorema trigonométrico, tendremos $\cot\beta + \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\varphi = o$; derivando la anterior relación respecto al tiempo, se verifica

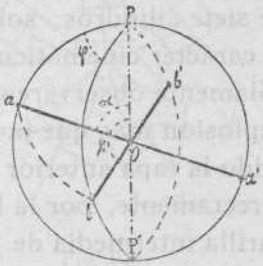


Fig. 200

(*) También se llama a dicho mecanismo *junta universal o de Cardan.*

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt} \cos \varphi = o,$$

y como $\frac{d\theta}{dt} = \omega'$ y $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$, resulta $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$.

Para eliminar a θ de esta relación, observemos que

$$\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

y

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

La relación entre ω y ω' pasa por su valor máximo $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{1}{\cos \varphi}$ cuando $\alpha = o$, y por el mínimo $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos \varphi} = \cos \varphi$ cuando el brazo $a\,a'$ ocupa la posición $\alpha = \frac{\pi}{2}$, perpendicular a la anterior.

La amplitud de los límites entre los cuales varía $\frac{\omega}{\omega'}$, depende de φ y se convierte $\frac{\omega}{\omega'}$ en constante, e igual a la unidad, si los ejes están en prolongación formando el ángulo $\varphi = o$.

Cuando el ángulo φ toma valores de consideración, la relación de velocidades oscila entre límites tan extensos que el mecanismo se hace impracticable y teóricamente se ve que para $\varphi = \frac{\pi}{2}$ dicha relación debe variar, en cada cuarto de revolución, entre o e ∞.

El caso del ángulo $\varphi = o$ (ejes en prolongación) parece que no debiera tener aplicación, por poderse sustituir este

enlace por un embrague o un empalme; sin embargo, está indicado dicho procedimiento, para unir diversos tramos de un eje, cuando sean de temer asientos o movimientos de cualquier género en los apoyos, pues los procedimientos ordinarios de unión producirían flexiones perjudiciales en el eje, al presentarse dichos asientos, y el empleo de las *juntas* da cierta flexibilidad que evita los inconvenientes citados.

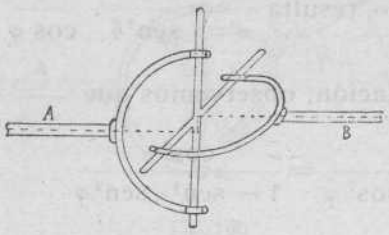


Fig. 201

Cuando los dos ejes, siendo paralelos, no están en prolongación, debe emplearse la junta *Oldham* (fig. 201), que permite el desplazamiento de la cruceta en sentido normal a los ejes, para acomodarse a las distintas posiciones de las horquillas terminales de los mismos.

III

MECANISMOS DE SEGUNDO GÉNERO

327. Teoría de los mecanismos de correa.—En el grupo formado por los mecanismos de segundo género entran todos aquellos cuya transmisión se verifica por intermedios *deformables*, cualquiera que sea su naturaleza; nosotros nos limitaremos al estudio de los llamados *mecanismos de correa*, cuya transmisión se verifica enlazando las piezas conductora y conducida por órganos flexibles como correas, cuerdas, cables, cadenas, etc., todos los cuales se suponen, para los efectos de la teoría, perfectamente *flexi-*

bles e *inextensibles* y, como consecuencia de esta inextensibilidad se deduce que, cuando dichos órganos se muevan longitudinalmente, ya sea en línea recta o siguiendo la dirección que le permita la superficie de un cuerpo, sobre el cual se deslicen, *la velocidad lineal de sus elementos es la misma en todos sus puntos,* cuya propiedad constituye el fundamento de la teoría de estos mecanismos.

328. Mecanismos de correa de primera especie.—Polea simple.—El más sencillo de estos mecanismos es la *polea simple* (fig. 202) por cuya garganta se pasa la cuerda transmisora $P\ n\ m\ Q$; la tracción ejercida en P comunicará al *ramal* $P\ n$ una cierta velocidad v y a la pieza conducida Q la v', que *será igual a la anterior*, en virtud del principio establecido en el número precedente; la polea en este mecanismo no sirve más que para cambiar la dirección del movimiento, toda vez que no modifica la velocidad de la pieza conductora al transmitirla a la conducida.

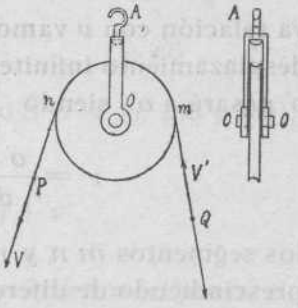


Fig. 202

La pieza *o A* en forma de horquilla, que abraza a la polea y sirve para suspenderla, por medio del gancho *A*, se llama *armadura* de la polea; la colocación de la cuerda o cable en la garganta, exige, en las poleas ordinarias, que uno de los extremos de la misma esté libre para que pueda penetrar entre la polea y la armadura, y en algunos casos puede ser necesario montar la cuerda en la polea, estando enlazados sus extremos a cuerpos que no pueden pasar por dicho hueco; para estos casos se usan las llamadas *paztecas*, que tienen una de las ramas de su armadura articulada con una visagra y sujeta por un pasador que per-

mite a voluntad abrir la armadura y dar paso a la cuerda, sin necesidad de hacerla pasar desde el extremo.

329. Polea móvil.—Supongamos ahora que el cordón que une a las piezas conductora y conducida pase sobre una polea fija o y otra móvil o' en la forma que indica la figura 203; en el extremo P se ejerce la tracción que comunica al ramal conductor la velocidad v, el otro extremo del cordón se fija en el punto B; de este modo la armadura de la polea o' subirá con una velocidad v' cuya relación con v vamos a calcular; sea $P\,P'$ (fig. 204) un desplazamiento infinitesimal del ramal conductor; la polea o' pasará a o'', siendo

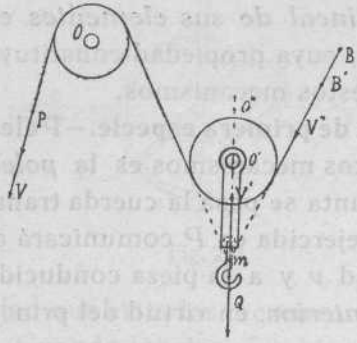


Fig. 203

$$v' = \frac{o'\,o''}{d\,t} \quad \text{y} \quad v = \frac{P\,P'}{d\,t};$$

los segmentos $m\,n$ y $m'\,n'$ y los $B\,r$ y $B\,r'$ son iguales, prescindiendo de diferenciales de segundo orden; por otra parte

$$n\,p = o'\,o''\,.\,\cos\alpha, \quad q\,r = o'\,o''\,.\,\cos\beta$$

y como $P\,P' = n\,p + q\,r$, resulta

$$\frac{P\,P'}{d\,t} = \frac{o'\,o''}{d\,t}\,.\,\cos\alpha + \frac{o'\,o''}{d\,t}\cos\beta,$$

o $$v = v'\,(\cos\alpha + \cos\beta).$$

Si $\alpha = \beta$, como ocurre en la práctica casi siempre, será $v = 2\,v'\cos\alpha$ y si además los ramales intermedios son paralelos (fig. 205), se verificará $v = 2\,v'$.

Si al verificarse la tracción del cordón en P, se supone que el punto B se traslada a B', al mismo tiempo que la

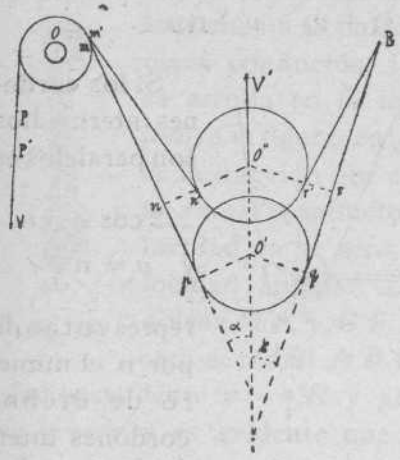


Fig. 204

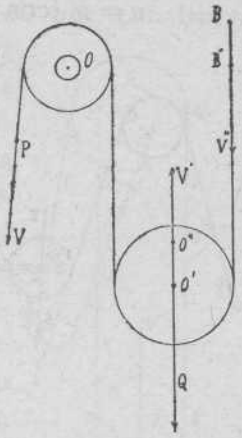


Fig. 205

pieza conducida Q recorre su camino $o'\ o''$ (figs. 203 y 205), la velocidad de P es

$$v = v' (\cos \alpha + \cos \beta) + v'',$$

siendo $v'' = \dfrac{B\,B'}{d\,t}$ la velocidad del *corrimiento* del punto B.

El mecanismo que estamos considerando se llama *polea móvil* o *trócula de dos cordones*.

330. Tróculas y motones.—Supongamos, como nuevo ejemplo de mecanismo de esta especie, el formado por una serie de poleas fijas o_1 y o_2 (fig. 206) y otro grupo de móviles o' y o'', enlazadas estas últimas por una armadura $C\,D$, que se considerará guiada para que le resulte, como pieza conducida, una velocidad de traslación v', cuando se ejerza el esfuerzo tractor sobre el ramal conductor P.

Para encontrar la relación entre v y v', llamemos v_1 la

velocidad del ramal situado entre o' y o_2 y se tendrá

$$v_1 = v' (\cos \alpha + \cos \delta)$$

y $$v = v' (\cos \gamma + \cos \delta) + v_1 = v' \Sigma \cos \alpha .$$

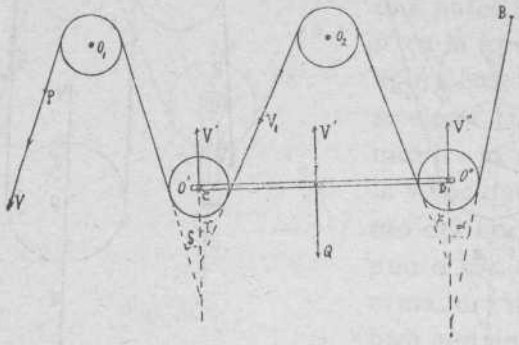


Fig. 206

Si los cordones intermedios son paralelos es

$$\Sigma \cos \alpha = n$$

y $$v = n v',$$

representando por n el número de dichos cordones intermedios.

Las combinaciones de poleas fijas y móviles, enlazadas por una sola cuerda se llaman *tróculas*, si tienen dichas poleas armaduras independientes, como expresa la figura 207 (trócula de tres cordones); pero si las fijas, y lo mismo las móviles, están montadas sobre la misma armadura (figura 208) se llaman *motones*; los motones pueden ser *sin centrar*, como el de la figura 208 y *centrados* como el de la figura 209, y lo mismo en unos que en otros se suponen paralelos los cordones para determinar la relación de las velocidades; en la trócula de la figura 207 es $v = 3 v'$ y en los motones de las 208 y 209, $v = 6 v'$.

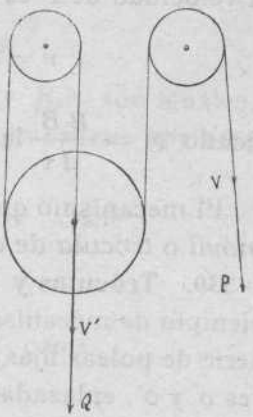


Fig. 207

Fig. 208

331. Polea diferencial.—Consta este mecanismo (figura 210) de dos poleas fijas montadas sobre el mismo eje o y cuyos radios son R y r; los ramales $A\,B$ y $C\,D$ sostienen a la polea móvil o', que constituye la pieza conducida; la cuerda se arrolla en la forma que indica la figura; en P se ejerce la tracción que comunica al ramal conductor la velocidad v; el giro, con velocidad angular ω, de las poleas $H\,A$ y $C\,F$, comunicará al ramal $A\,B$ la velocidad ascendente $v = \omega\,R$ y al $C\,D$ la $v_1 = \omega\,.\,r$ y es evidente que la de la pieza conducida será

Fig. 209

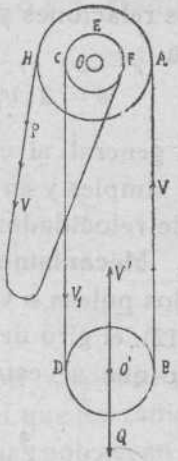


Fig. 210

$$v' = \frac{1}{2}(v - v_1) = \frac{1}{2}\,\omega\,(R - r) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\omega\,R\left(1 - \frac{r}{R}\right) = v\,\frac{R - r}{2\,R}, \quad \text{o} \quad v = v'\,\frac{2\,R}{R - r}.$$

La relación $\frac{v}{v'}$ puede hacerse tan grande como se quiera, disminuyendo la diferencia $R - r$ entre los radios de $H\,A$ y $C\,F$; generalmente esta diferencia se aprecia en una fracción de R, $R - r = \frac{R}{n}$, y de este modo la relación de velocidades se expresa por la ecuación $v = 2\,n\,v'$.

332. Aparejos o polipastros.—Reciben este nombre las combinaciones de poleas, tróculas o motones que se enlazan por varios cordones. La figura 211 es un ejemplo de *aparejo* formado por una polea móvil y una trócula de tres cordones; la relación de velocidades se encuentra, como

en todos los mecanismos compuestos, calculando primero la relación de velocidades entre P y Q_1 en la polea móvil, y después, considerando a Q_1 como pieza conductora de la trócula siguiente, establecer la de Q_1 y Q; multiplicando las dos relaciones se encontrará la que liga a v con v'; así resulta

$$v = 2 \,.\, v_1\,, \quad v_1 = 3\, v' \quad \text{y} \quad v = 2 \,.\, 3 \,.\, v'.$$

En general, si el mecanismo compuesto está formado por K simples y en éstos es n, n', n'', ... $n^{(K)}$ la multiplicación de velocidades será en total $v = n \,.\, n' \,.\, n'' \,.\, \ldots \,.\, n^{(K)} \,.\, v'$.

333. Mecanismos de correa de 2.ª especie.—Supongamos dos poleas o y o' enlazadas por la correa $A\,B\,F\,C\,D\,E$ (fig. 212); el giro de una de ellas hará avanzar, por el rozamiento que se establece entre las superficies en contacto de la llanta y la correa, a los diversos elementos de ésta y este movimiento de la correa provoca el giro de la segunda polea, verificándose la transmisión del movimiento circular del eje o al eje o', o recíprocamente.

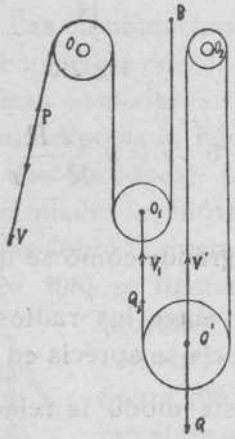


Fig. 211

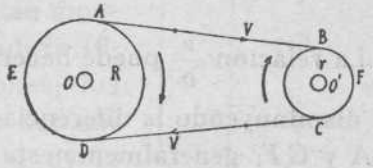


Fig. 212

La relación de velocidades angulares de los dos ejes es

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{v}{R} : \frac{v}{r} = \frac{r}{R}$$

inversa de la de los radios de las dos poleas.

El ramal de las correas que verifica la tracción de la polea conducida, se llama *ramal conductor* de la transmisión.

Pudiera parecer, a primera vista, que el funcionamiento de estos mecanismos exige que los ejes *o* y *o'* sean parale-

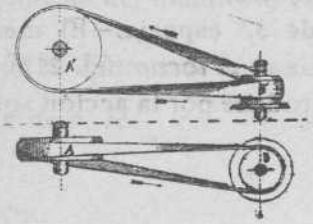


Fig. 213

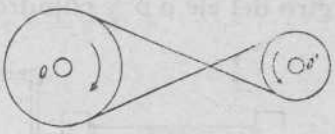


Fig. 214

los, pero no es necesaria esta condición y sólo se precisa que el montaje de las dos poleas sea tal que los ramales de la correa entren, al salir de una de dichas poleas, en el plano de la otra, como expresa la figura 213, que representa una transmisión de esta especie entre dos ejes perpendiculares.

El giro de las poleas puede producirse en sentido contrario cruzando la correa como indica la figura 214.

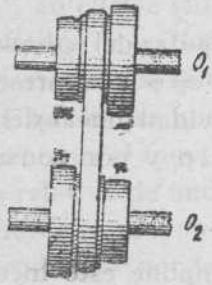


Fig. 215

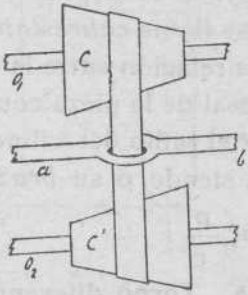


Fig. 216

Para cambiar la relación de velocidades en estos me-

canismos se emplea la disposición de la figura 215, que permite obtener, con la misma correa, tres relaciones de velocidades, o la representada en la figura 216, que por la maniobra del pasacorreas *a b*, puede hacer variar dicha relación en los conos *C* y *C'* por grados tan pequeños como se quiera, dentro de ciertos límites.

334. Mecanismos de correa de 3.ª especie.—El mecanismo más sencillo de esta especie es el *torno* (fig. 217); el giro del eje *o o'* y cilindro *C* se produce por la acción sobre

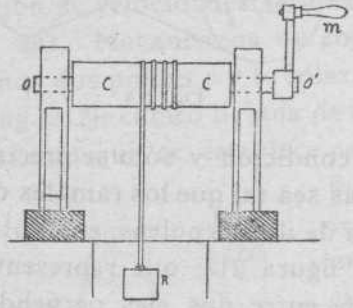


Fig. 217

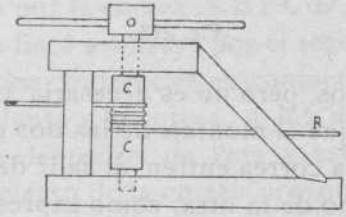


Fig. 218

el *manubrio m* y al arrollarse la cuerda en dicho cilindro, se consigue la subida de la pieza conducida *R*. Cuando el cilindro *C* se dispone verticalmente, como indica la figura 218, se llama *cabrestante*.

La relación entre la velocidad angular del cilindro *C* y la lineal de la pieza conducida, es $v' = \omega \cdot r$, representando por *r* el radio del cilindro. La velocidad lineal del manubrio, siendo *p* su *brazo*, es $v = \omega \cdot p$ y por consiguiente

$$v = v' \frac{p}{r} .$$

335. Torno diferencial.—Se compone este mecanismo (fig. 219), de dos cilindros de radios *R* y *r*, montados en el mismo eje y una polea móvil cuya armadura sostiene a la pieza conducida *Q*. Al girar el eje por la acción del manu-

brio, la cuerda se arrolla en uno de los cilindros y se desarrolla en el otro, produciendo en Q la velocidad lineal

$$v' = \frac{1}{2}(v_1 - v_2) = \frac{1}{2}(\omega \cdot R - \omega \cdot r) = \frac{1}{2}\omega(R - r)$$

y como la del manubrio es $v = \omega \cdot p$, resulta $v = v' \dfrac{2p}{R - r}$.

Si la diferencia de los radios $R - r$ se aprecia en fracción de p, $R - r = \dfrac{p}{n}$, se obtiene $v = 2n \cdot v'$.

IV

MECANISMOS DE TERCER GÉNERO
CASOS DE CONTACTO PLANO

336. Fundamento de la teoría de los mecanismos de contacto.—El estudio del movimiento de dos cuerpos en contacto se simplifica mediante la teoría del movimiento relativo, establecida en el capítulo 2.°; en ella se vió, limitándonos a varios casos particulares, que son los que ahora nos interesan, que el movimiento relativo de uno de dichos cuerpos podía reproducirse por la rodadura de ciertas superficies unidas a uno y otro y que una vez trazadas estas superficies *primitivas* y conocido el perfil de uno de los

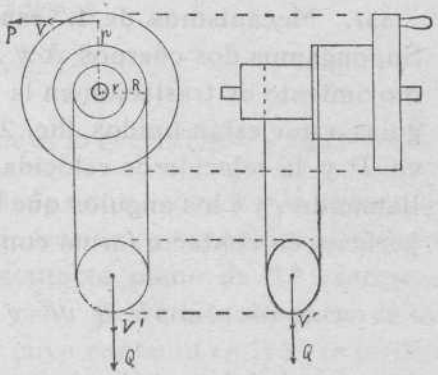


Fig. 219

cuerpos móviles, se podría trazar el del segundo, como conjugado que había de ser del anterior. Recordemos que, cuando alguno de los movimientos es de rotación, por el punto o puntos de contacto de las superficies o líneas primitivas pasa constantemente el eje de la rotación instantánea relativa de los dos cuerpos, que las normales trazadas en dichos puntos de contacto cortan al eje y por último que la velocidad del resbalamiento mutuo en el contacto, así como la relación de las velocidades angulares propias de los dos cuerpos, dependen de la distancia de dicho contacto al eje de las rotaciones instantáneas.

Cuando los movimientos de los dos cuerpos sean de traslación, se deberá cumplir la condición establecida en el número **307'**, de ser iguales las proyecciones de las dos traslaciones sobre la normal común a las superficies en contacto.

Sentados estos preliminares, aplicables lo mismo a los casos de contacto plano o no plano, pasemos a considerar las tres especies de mecanismos en el caso de contactos planos.

337. Mecanismos de 1.ª especie de contacto plano.— Supongamos dos cuerpos A y B obligados a moverse con movimiento de traslación en la dirección señalada por las guías a que están unidos (fig. 220); el contacto tiene lugar en P y la relación de velocidades de las dos traslaciones, llamando α y β los ángulos que la normal común a las superficies en contacto forma con las guías, será **(307')**

$$v \cos \alpha = v' \cos \beta \quad \text{o} \quad v = v' \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = v' \frac{\cos (\gamma - \alpha)}{\cos \alpha}.$$

La velocidad de resbalamiento

$$[v_r] = [-v] + [v'] \quad \text{o} \quad [v_r] = [v] + [-v'],$$

tiene por valor modular $v_r = \sqrt{v^2 + v'^2 - 2vv' \cos \gamma}$.

Cuando el ángulo de las guias sea $\gamma = 90°$, es

$$v = v' \operatorname{tg} \alpha \quad \text{y} \quad v_r = \sqrt{v^2 + v'^2}$$

y también $v_r = \dfrac{v}{\operatorname{sen} \alpha} = \dfrac{v'}{\cos \alpha}$.

338. Cuña. —La cuña es un mecanismo de primera especie (fig. 221) en que las superficies en contacto son planas,

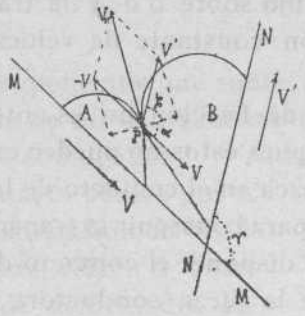


Fig. 220

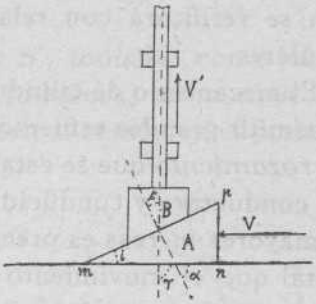


Fig. 221

siendo constantes los ángulos que forma la normal común con las guias de la pieza conductora y conducida.

La relación de velocidades es

$$v = v' \frac{\cos (\gamma - \alpha)}{\cos \alpha},$$

o bien, cuando $\gamma = 90°$, que es lo general, $v = v' \operatorname{tg} \alpha = v' \dfrac{b}{a}$,

siendo $b = m\,n$ la *base* de la cuña y $a = n\,p$ la *cabeza* de la misma, suponiéndola de sección de triángulo rectángulo.

339. Mecanismos de contacto plano de 2.ª especie.— Sean los dos cuerpos M y N, giratorios alrededor de los ejes o y o' (fig. 147) y por cuyo contacto en $A\,B$ se verifica la transmisión del movimiento, con la relación de velocidades angulares $\dfrac{\omega}{\omega'} = \dfrac{o'\,C}{o\,C}$ y velocidad de resbalamiento $v_r = \omega_r \,.\, A\,C = (\omega' + \omega)\,A\,C$.

Si se quiere conseguir que la transmisión se verifique sin resbalamiento, será preciso que los cuerpos M y N se substituyan por las superficies cilíndricas *primitivas* S y S', que, como sabemos, están formadas por los lugares geométricos de los ejes instantáneos de rotación en el movimiento relativo de M y N; el mecanismo así constituido se llama de *cilindros de fricción* y si estos cilindros son de revolución, el punto C estará fijo sobre $o\,o'$ y la transmisión se verificará con relación constante de velocidades angulares.

El mecanismo de cilindros de fricción no es apto para transmitir grandes esfuerzos, pues éstos no pueden exceder del *rozamiento* que se establezca en el contacto de las piezas conductora y conducida; para conseguir la transmisión de mayores fuerzas es preciso disponer el contacto de modo tal que el movimiento de la pieza conductora no se pueda verificar sin el desplazamiento simultáneo de la pieza conducida, circunstancia que se reconoce fácilmente viendo que la velocidad propia del punto de contacto de dicha primera pieza *penetra en el interior de la segunda.*

340. Ruedas dentadas.—Para realizar en la práctica la transmisión que estamos considerando, sin más limitación que la impuesta por la resistencia de las ruedas, cumpliendo, además, la condición de constancia en la relación de velocidades angulares, se emplean los *engranajes cilíndricos*, cuyo trazado se verifica con arreglo a los siguientes principios.

Sean o y o' (fig. 222) los ejes de las ruedas; dividamos la distancia $o\,o'$ en dos segmentos cuya relación $\frac{o'\,C}{o\,C}$ sea igual a la inversa, $\frac{\omega}{\omega'} = K$, de las velocidades angulares; las circunferencias de radios $R = o\,C$ y $R' = o'\,C$ son las *circunferencias primitivas del engranaje* y sobre ellas se

realizan todas las construcciones que este trazado exige; los radios de las circunferencias primitivas son

$$R = o\,o' \frac{\omega'}{\omega + \omega'} = o\,o' \frac{1}{1 + K},$$

$$R' = o\,o' \frac{\omega}{\omega + \omega'} = o\,o' \frac{K}{1 + K}.$$

Si suponemos que sobre S y S', tomadas como base y roldana de un movimiento de rodadura, se montan dos perfiles conjugados M y N, la normal común en el punto P de contacto pasará por C y la transmisión se verificará con relación constante de velocidades angulares, siendo evidente que se cumplirá la condición de estar dirigida la velocidad propia $[v]$ del punto de contacto, en la rueda conductora, hacia el interior del apéndice N de la rueda conducida.

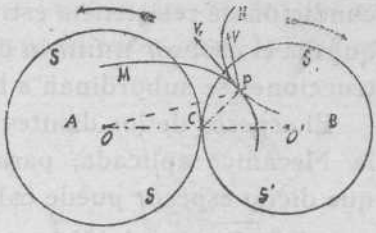


Fig. 222

Para realizar la transmisión de una manera continua, es necesario dotar a las ruedas de un cierto número de perfiles conjugados (*dientes*) que se distribuyen sobre la periferia de una y otra de modo que al cesar el contacto de dos cualesquiera empiece el de los siguientes y la transmisión no se interrumpa; en la práctica conviene que el contacto tenga lugar entre dos pares de perfiles, para que si en un momento se produce la rotura de uno de ellos, la transmisión continúe verificándose por el otro; esto se consigue haciendo que, cuando dos dientes estén en la posición media de su *conducción*, los dos que le hayan prece-

dido estén cesando en su contacto y los dos que le sigan lo están empezando.

La fracción de revolución que un diente de una rueda conductora puede hacer recorrer a la rueda conducida, depende de su longitud; pero aparte de la debilidad natural que un exceso de longitud produce en los dientes de los engranajes, hay otra causa que obliga a reducir sus dimensiones en dicho sentido, ésta es la presencia del resbalamiento en el punto de contacto, cuya velocidad depende de la distancia al centro de la rotación instantánea y el valor de $v_r = \omega_r \cdot PC$, cuando es grande, produce pérdidas de esfuerzo motor que conviene evitar. Fundados en esto se determina el número de dientes de un engranaje, por la condición de resistencia estricta del esfuerzo a transmitir, que fija el *espesor mínimo* de los mismos y las demás construcciones se subordinan a la expresada dimensión.

El espesor de los dientes se fija por consideraciones de la Mecánica aplicada; para concretar ideas indicaremos que dicho espesor puede calcularse por la sencilla fórmula $e = K\sqrt{P}$, siendo K un coeficiente práctico, que para la fundición vale 0,83, estando expresados e en milímetros y P en kilogramos.

Teóricamente pueden ser iguales las dimensiones del espesor de un diente y del hueco donde tiene que penetrar, pero la práctica demuestra la necesidad de hacer el hueco algo mayor, y a esta diferencia se llama *juego* del engranaje, expresándose en una fracción de dicho espesor, que depende de la naturaleza del mecanismo y suele oscilar entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{10}$ de e. Según ésto, en la práctica se formará el paso con los sumandos $p = 2e + j = \frac{15}{7} e$ por término medio.

El número de dientes de cada rueda se determina por los cocientes

$$N = \frac{c'}{p} = \frac{2\pi R}{p} \quad \text{y} \quad N' = \frac{c}{p} = \frac{2\pi R'}{p}$$

y como estos números deben ser enteros, se introduce en p la variación correspondiente, modificando ligeramente a e o j, para conseguir dicho resultado. La relación $\frac{N}{N'}$ es igual a la inversa de las velocidades angulares de las ruedas correspondientes, por ser

$$\frac{N}{N'} = \frac{R}{R'} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Una vez conocido el número de dientes, se dividen, a partir de la línea de los centros, las dos circunferencias en las N y N' partes iguales correspondientes, marcándose en cada una de dichas partes el espesor de los dientes y la anchura del hueco, que forman el paso de las dos ruedas (fig. 223); sobre los radios $o\,a$, $o\,c$, $o\,e$, etc., (alternados a partir de $o\,a$) se dibujan con una plantilla los perfiles de la *cara* y *flancos* de los dientes conductores (rueda M), con la convexidad en el sentido del movimiento y sobre los $o'\,a'$, $o'\,c'$, $o'\,e'$, etc , los perfiles de los dientes conducidos (rueda N), con la convexidad en sentido contrario.

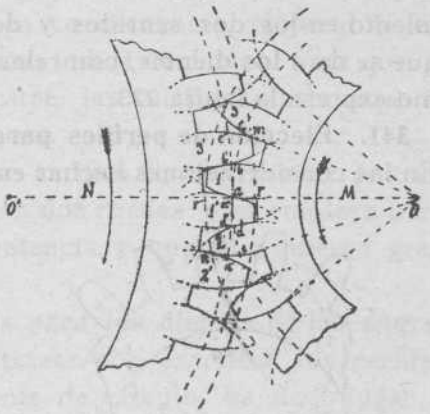


Fig. 223

En la posición que ha servido de base para el trazado de la figura 223, los dientes 1 y 1' están en su contacto medio y en este instante debe cesar el contacto de 2 y 2' y

empezar el de 3 y 3'; el punto *n* señalará el límite de la longitud de los dientes de la rueda conductora y el *m* lo mismo para la conducida; haciendo centro en *o*, con el radio *o n*, y en *o'*, con radio *o' m*, se trazarán las circunferencias que señalan las cabezas de todos los dientes.

La profundidad de los huecos viene impuesta por la necesidad de que no tropiecen en el fondo de los mismos las cabezas de los dientes; si las circunferencias anteriores han cortado en *r* y *r'* a la línea *o o'*, se hará centro en *o* con radio *o r*, y en *o'* con radio *o' r'*, y se tendrán las circunferencias que señalan el fondo de los citados huecos cumpliendo la condición expuesta.

Si la marcha del engranaje se verificara siempre en el mismo sentido, se podría dar una forma cualquiera al revés de los dientes; pero es conveniente, y muchas veces indispensable, que las ruedas puedan transmitirse el movimiento en los dos sentidos y de aquí la forma simétrica que se da a los dientes, con relación a su radio medio, como expresa la figura 223.

341. Elección de perfiles para las ruedas dentadas.— En las consideraciones hechas en el número anterior, se ha supuesto que la cara y flancos de los dientes eran perfiles conjugados cualesquiera; en la práctica suelen emplearse los más fáciles de trazar que son los *epicicloidales* y de *evolvente de círculo*, particularmente los primeros cuando la rodadura interior se verifica con roldanas de radio mitad que la base; así resultan los engranajes de *flancos rectilíneos*, como el representado en la figura 224. Los dientes de evolvente de círculo proporcionan más anchura

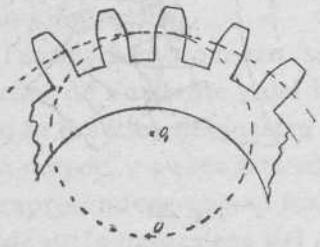


Fig. 224

en la raíz que los epicicloidales y están indicados para transmitir grandes esfuerzos.

Cuando la roldana generatriz de los perfiles epicicloidales se hace igual a una de las dos circunferencias primitivas, se originan los llamados engranajes *de linterna*, en ellos el perfil de los dientes en una de las ruedas se reduce a un punto (figura 225) y limitando los dientes de la rueda *o'* en la forma que indica la línea *a n n' b*, se ve que colocando en la rueda *o"* varillas geométricas perpendiculares a su plano en *a*, *n'*, *n"*, etc., estas varillas resbalarán sobre la cara *n' b* y sus análogas de los demás dientes, verificando la conducción de la rueda *o'*.

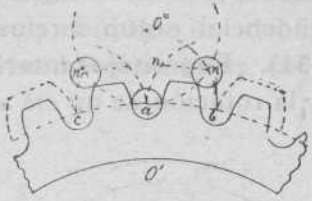


Fig. 225

En la práctica es necesario dar un cierto diámetro a dichas varillas y recortar, en consecuencia, el perfil de los dientes de la segunda, como indica la figura, para que la transmisión pueda verificarse; las varillas transmisoras se llaman *bolillos* de la linterna.

En estos engranajes se verifica la conducción por un solo diente y bolillo de las dos ruedas y se emplean para trasmisiones de escasa potencia y que no requieran gran exactitud.

342. Perfiles prácticos para los dientes de los engranajes.—La dificultad de trazar con exactitud los perfiles epicicloidales y de evolvente de círculo, ha dado lugar a un gran número de construcciones, que tienden a sustituir dichos perfiles por otros formados por arcos de varios centros, que se le adaptan con más o menos exactitud, constituyendo perfiles *prácticos*, que no realizan con precisión matemática la constancia en la relación de velocidades angulares, pero que bastan en la mayor parte de los casos.

De estos trazados, el más sencillo consiste en sustituir

cada perfil por un solo arco de círculo que tenga el centro en la circunferencia primitiva y radio igual a la cuerda del paso; si se quiere reforzar algo más la raiz del diente puede llevarse el centro de dicho arco sobre el radio de la circunferencia primitiva hacia el eje de la rueda, en una extensión prudencial, según el refuerzo que se desee conseguir.

343. Engranajes interiores. – Cuando se quiere transmitir la rotación de un eje a otro paralelo, en el mismo senti

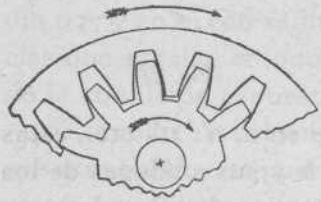


Fig. 226

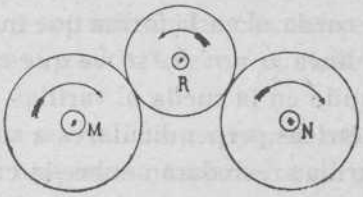


Fig. 227

do, se emplean los *engranajes interiores* (fig. 226), nombre recibido de la disposición que tienen los dientes en la mayor de las dos ruedas; el trazado de estos engranajes se realiza por los mismos métodos que el de los exteriores; pero tienen escasa aplicación por la dificultad de su construcción y por el inconveniente de tener que montar el piñón en el extremo del eje correspondiente.

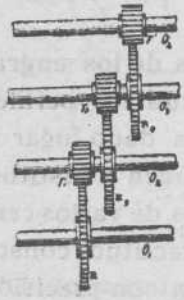


Fig. 228

El empleo de engranajes interiores se evita en la práctica con la colocación de una *rueda parásita R* (fig. 227), que recibe el movimiento del árbol conductor *M* y lo transmite al conducido *N* girando éste en el mismo sentido que el primero.

344. Trenes de engranajes cilíndricos. – Cuando la multiplicación de velocidad angular, entre los dos ejes paralelos, pasa de ciertos límites, no conviene emplear un solo engranaje para verifi-

car la transmisión y se recurre a los *trenes de engranajes*, o sea una combinación de varios ejes, de modo que la rueda dentada montada en el primero o_1 (fig. 228), engrane en el piñón de o_2; otra rueda de éste, en un piñón montado sobre o_3 y así sucesivamente hasta llegar al último; la relación de velocidades entre el primero y el último se calcula, por el procedimiento de los mecanismos compuestos, en la forma siguiente:

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{r_1}{R}\,,\quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{R_1}\,,\quad \frac{\omega_2}{\omega'} = \frac{r'}{R_2}\quad \text{y}\quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r'}{R \cdot R_1 \cdot R_2}\,,$$

fórmula que se traduce al lenguaje ordinario diciendo que *la relación de velocidades angulares, entre los ejes extremos, es igual al producto de los radios de los piñones dividido por el de los radios de las ruedas montadas en los ejes.*

Si en el primer eje se monta un piñón que engrane con la rueda del segundo eje y así sucesivamente, el efecto del engranaje sería de *reducción* de velocidad, y $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R \cdot R_1 \cdot R_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot r'}$.

345. Trenes epicicloidales.— Cuando en un tren de engranajes hay algún eje móvil alrededor de otro, el tren se llama *epicicloidal*; en estos mecanismos se determina la relación de velocidades, suponiendo dotado al conjunto de una rotación contraria a la del eje móvil, para que éste resulte fijo y como dicho movimiento general no alterará la relación de velocidades de cada par de ejes, se deducirá la que corresponde al caso de no existir el movimiento ficticio supuesto.

346. Otros mecanismos compuestos de engranajes cilíndricos.—La solidez que pueden tener y el poco espacio que ocupan los engranajes, hacen que estos mecanismos se empleen en multitud de casos, para conseguir cómoda-

mente grandes multiplicaciones o reducciones de velocidad; como ejemplo de mecanismos, en cuya composición entran los engranajes cilíndricos, citaremos el *torno con engranajes* (fig. 229) en el cual, si llamamos v la velocidad lineal del manubrio (de radio p), r, R' y R los radios del piñón, rueda dentada y cilindro del torno y v' la velocidad lineal de la pieza conducida será

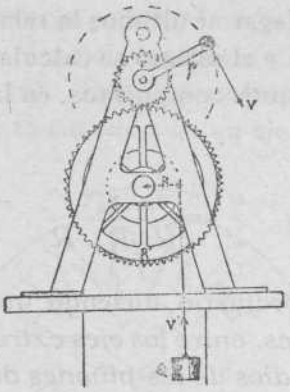


Fig. 229

$$v = \omega \cdot p, \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{r}, \quad v' = \omega' R,$$

de donde resulta $v = v' \dfrac{R' p}{R r}$, siendo el factor que multiplica a v', *el producto de los radios mayores dividido por el de los menores,* como en los trenes ordinarios de engranajes.

346'.—En ciertos contadores de revoluciones, se emplea la combinación de engranajes cilíndricos consistente en dos ruedas dentadas A y B (fig. 230), que engranan en el mismo piñón P, teniendo la primera, acuñada al eje o, *100* dientes y la segunda, loca sobre el mismo eje, *101*; el perímetro de las ruedas A y B, por sus caras exteriores, está dividido en *100* partes iguales, que dos índices, i e i', montados en el eje o y en el soporte a del mismo, respectivamente, pueden recorrer cuando funciona el aparato; el eje del piñón P sale al exterior, terminando en punta piramidal, para que con una ligera presión sobre el eje rotatorio O se comunique al contador su rotación.

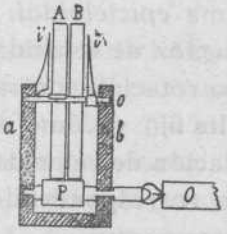


Fig. 230

El diente de exceso que tiene B sobre A, da lugar a que,

a cada revolución del eje o, la rueda B quede retrasada respecto al índice i una división y como una revolución de o exige *10* del eje O, por tener el piñón *10* dientes, la división que el índice i marque en el perímetro de B, representará *decenas* de vueltas del eje O; el índice fijo i' señalará en las divisiones de la rueda A las unidades y décimas de vuelta efectuadas por el mismo eje.

347. Mecanismos de contacto plano de 3.ª especie.— Corresponde este caso a la teoría establecida en el número **312'** (fig. 151); la relación de velocidades lineal y angular de las dos piezas móviles es $v = \omega' \cdot OC$ y el resbalamiento en el punto de contacto $v_r = \omega' \cdot AC$.

Cuando se quiere hacer $\frac{v}{\omega'} = constante$ las superficies primitivas S y S' serán un plano y un cilindro de revolución respectivamente, desapareciendo el resbalamiento v_r cuando estas mismas superficies constituyan las piezas conductora y conducida; el mecanismo así constituido (figura 231) se llama *de rodillo y plano tangente,* cuya potencia de transmisión es escasa por las razones dichas en los cilindros de fricción.

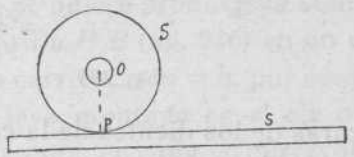


Fig. 231

348. Cremalleras.—Para conseguir la transmisión de grandes esfuerzos, con relación constante de velocidades, en estos mecanismos de 3.ª especie, se emplean los engranajes de cremallera

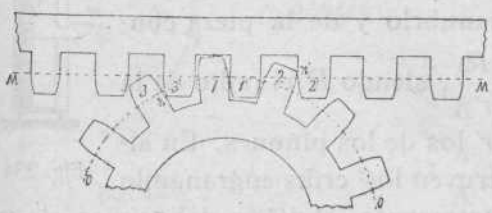


Fig. 232

(fig. 232), cuyo trazado se sujeta a los mismos principios que los cilíndricos estudiados en los números anteriores; las líneas primitivas son ahora la circunferencia $O\ O$ y la recta $M\ M$; el espesor de los dientes y el paso del engranaje se determinan como allí vimos; los perfiles de las caras y flancos de los dientes se eligen y trazan del mismo modo; su limitación se efectúa colocando los dientes *1* y *1'* en la posición media y señalando el punto n en que la cara izquierda de *3'* toca el flanco derecho de *3*, y el n' en que la cara derecha de *2* toca al flanco izquierdo de *2'*.

Cuando se empleen perfiles epicicloidales se podrán hacer rectilíneos los flancos de los dientes de la rueda y si se emplean perfiles de evolvente de círculo, resultarán rectilíneos (303') los flancos y caras de los dientes de la cremallera (figura 233).

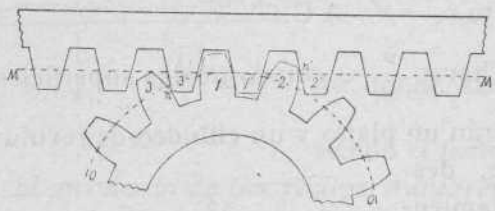


Fig. 233

349. Ejemplo de mecanismos con cremalleras.—Uno de los más usados es el *crik* o *gato* representado en la figura 234; el eje o_1 se hace girar por medio de un manubrio de radio p, el piñón de este eje engrana en la rueda del eje o_2, cuyo piñón transmite el movimiento a la cremallera que recibe en R o R' la carga que se quiere elevar; la relación de velocidades del manubrio y de la pieza conducida es $v = v' \dfrac{p \,.\, R}{r \,.\, r'}$, siendo R el radio de la rueda dentada y r y r' los de los piñones. En algunos casos se construyen los criks engranando en la cremallera, directamente, el piñón del primer eje o_1.

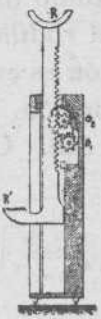


Fig. 234

350. Cremalleras dobles.—En las cremalleras ordinarias

es preciso invertir la rotación del eje del piñón, para producir el movimiento en sentido contrario de la pieza conducida y, para evitarlo, se puede emplear el mecanismo de *cremallera doble*, representado en la figura 235, con el que se consigue que la varilla *A* esté dotada de movimiento rectilíneo alternativo, producido por el engrane sucesivo del piñón en los dientes de una y otra cremallera. Este mecanismo no puede emplearse para grandes velocidades, por el choque que se origina al empezar la acción del piñón sobre cada una de las cremalleras.

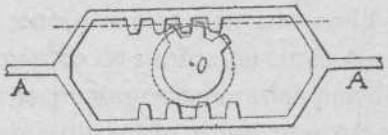


Fig. 235

351. Levas.—Para indicar la manera de hacer el trazado de una leva, supongamos que se quiere producir la subida de la varilla *B B* (fig. 236) en un espacio o carrera, $m\,n = h$, por medio de una leva montada en el eje *o* y precisamente en una semirrevolución de dicho eje; haciendo centro en *o* tracemos la circunferencia *m q s t m*, tangente a la varilla conducida, y dividamos el *arco de conducción m q s*, en *K* partes iguales (4 en la figura); trazando las tangentes

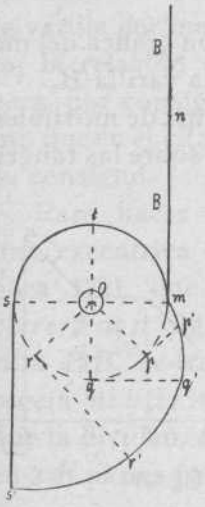


Fig. 236

$$p\,p' = \frac{h}{K}, \quad q\,q' = 2\,\frac{h}{K},$$

$$r\,r' = 3\,\frac{h}{K}, \quad s\,s' = 4\,\frac{h}{K}$$

y uniendo por un trazo continuo los puntos m, p', q', r' y s' se tiene el perfil de la leva conductora, que producirá en

la varilla $m\,n$ el movimiento rectilíneo y uniforme de amplitud $m\,n = s\,s'$.

La relación de velocidades es $\omega = \nu' \frac{\pi}{h}$, o en general $\omega = \nu' \frac{\alpha}{h}$, siendo α el ángulo de conducción.

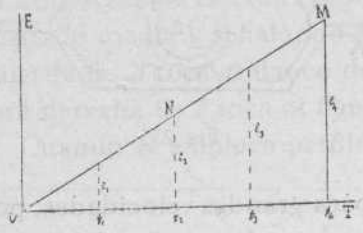


Fig. 237

Si tomamos sobre un eje de tiempos $o\,T$ (fig. 237) los segmentos t_1, t_2, t_3 y t_4 correspondientes a los giros del eje

$$\frac{\alpha}{K},\ 2\frac{\alpha}{K},\ 3\frac{\alpha}{K} \text{ y } 4\frac{\alpha}{K}$$

y levantamos las ordenadas

$$e_1 = \frac{h}{K},\ e_2 = 2\frac{h}{K},\ e_3 = 3\frac{h}{K} \text{ y } e_4 = 4\frac{h}{K} = m\,n,$$

resultará la recta $o\,M$, como representación gráfica del movimiento uniforme que la leva imprime a la varilla B.

Inversamente, puede trazarse un diagrama de movimiento cualquiera y construir la leva tomando sobre las tangen-

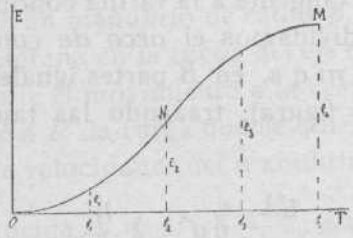


Fig. 238

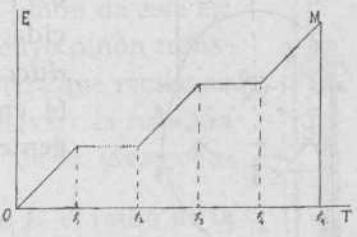


Fig. 239

tes del trazado las ordenadas del diagrama especial que se haya señalado; así, si queremos que el movimiento sea uniformemente acelerado en la primera mitad del recorrido

y uniformemente retardado en la segunda, se trazará la leva con arreglo al diagrama representado en la figura 238, que se compone de dos arcos de parábola $O\,N$ y $N\,M$, unidos tangencialmente en el punto N.

Si se desea producir la subida con intermitencias, se tomará por base un diagrama, como el representado en la figura 239, que divide el movimiento de subida en cinco tiempos, correspondientes a tres ascensiones separadas por dos estacionamientos, de la misma duración unos que otros.

352. Excéntricas.—Las excéntricas de collar (fig. 171) producen en la varilla una carrera igual al doble de la distancia del eje del movimiento al centro del disco que forma la excéntrica, e independiente del diámetro de ésta; el efecto producido en la varilla es el mismo que si se montara en el eje o una manivela de longitud igual a la distancia de dicho centro y se uniera a ella la varilla por medio de una biela: la relación de velocidades será, por consiguiente, la misma que en el citado mecanismo se consignó.

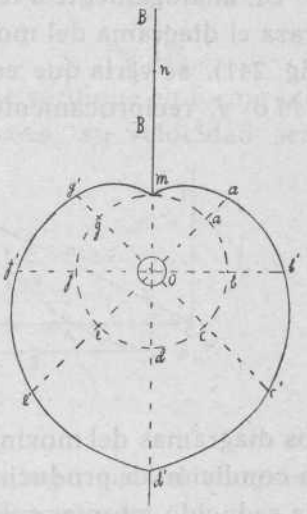


Fig. 240

Para hacer el trazado de una excéntrica de corazón (figura 172), que produzca una carrera $m\,n$ (fig. 240) en la varilla $B\,B$, se traza la circunferencia $m\,b\,d\,f\,m$ y los radios que la dividan, a partir de $o\,m$, en 2 K partes iguales; en el radio $o\,a$ se toma el segmento $a\,a' = \dfrac{m\,n = h}{K}$, en el $o\,b$ el $b\,b' = 2\,\dfrac{h}{K}$ y así sucesivamente hasta llegar al $o\,d$, donde

se tomará $d\,d' = K\,\frac{h}{K} = h$; uniendo los puntos m, a', b', c' y d' por un trazo continuo y construyendo el perfil $m\,g'\,f'\,e'\,d'$, simétrico del anterior, se tiene trazada la excéntrica que producirá la subida y bajada uniforme de la varilla conducida, con la amplitud de carrera $m\,n = h$ que se ha señalado.

Como la varilla se apoya en la excéntrica por intermedio de dos rodillos, que disminuyen los efectos perjudiciales del rozamiento, es preciso redondear el ángulo entrante m y el saliente a', para que los rodillos se apoyen sobre todos los puntos de la llanta de la excéntrica, sin producir el *atrancamiento* que se originaría de no tomar dicha precaución.

Si, análogamente a lo que hemos hecho en las levas, se traza el diagrama del movimiento producido en la varilla (fig. 241), se vería que está formado por la línea quebrada $o\,M\,o'$ y, recíprocamente, pueden señalarse de antemano

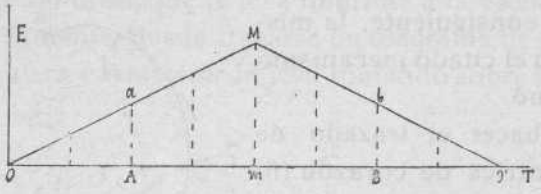


Fig. 241

los diagramas del movimiento y construir la excéntrica con la condición de producir el movimiento deseado; todo queda reducido a tomar sobre los radios del trazado los segmentos señalados sobre las ordenadas del diagrama que se haya dibujado.

Al trazar estos diagramas es necesario tener la precaución de que la suma de las ordenadas equidistantes de las posiciones medias $A\,a$ y $B\,b$, correspondientes a cada se-

mirrevolución, sea constantemente igual a $Mm = h$, por la necesidad de que todos los diámetros de la excéntrica sean precisamente iguales a dicha longitud h.

Las excéntricas con diagrama rectilíneo tienen el inconveniente del cambio brusco de velocidad que hacen experimentar a la varilla, al llegar a los extremos de su recorrido, produciendo choques que siempre son perjudiciales; para evitarlos, se puede emplear la excéntrica *de Morin* (fig. 242), cuyo diagrama está formado por los cuatro arcos de parábola que indica la figura 243 y con cuya disposición se consigue que el movimiento de la varilla, conservando la misma velocidad media, se verifique en forma tal que, al llegar a los puntos de retroceso, su velocidad sea

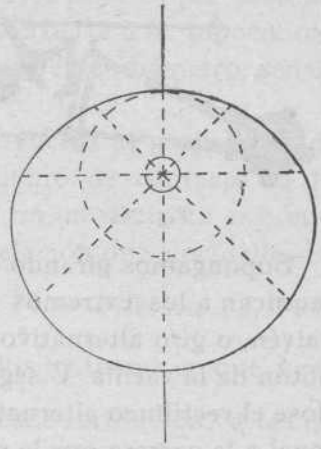


Fig. 242

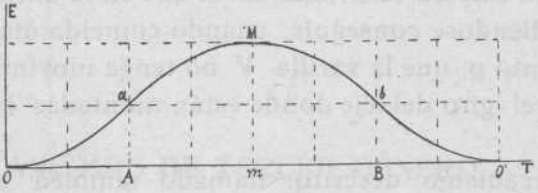


Fig. 243

nula, y el cambio de dirección tenga lugar sin los choques que en las excéntricas de corazón se producen.

353. Corredera de Stephenson.—Es un mecanismo compuesto (fig. 244) de dos excéntricas de collar acuñadas a 180^o, sobre el mismo eje, y cuyas varillas se unen a los extremos del arco $m\,n$, quedando éste suspendido a más o menos altura, según la posición que quiera dársele al

punto p, por la maniobra de la varilla A; el objeto del mecanismo es producir, a voluntad, en otra varilla V un movimiento rectilíneo alternativo de amplitud variable; esta varilla termina en un botón que ajusta, a rozamiento suave, en la ranura del arco $m\,n$ y tiene sus guias de movimiento rectilíneo, que no le permiten más que el alternativo que se ha dicho.

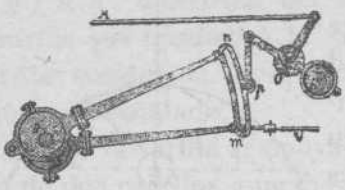


Fig. 244

Supongamos girando el eje de las excéntricas; éstas comunican a los extremos del arco $m\,n$ un movimiento de vaivén, o giro alternativo, alrededor de p y es claro que el botón de la varilla V seguirá este movimiento, produciéndose el rectilíneo alternativo de dicha varilla y de amplitud igual a la carrera que le resulte al punto m, en su giro alrededor de p; esto nos dice que si se tira hacia la izquierda de la palanca de maniobra A, el punto p descenderá y el botón de la varilla V quedará más cerca de p que lo estaba antes y su carrera será más corta que en la anterior posición, pudiéndose conseguir, cuando coincida dicho botón con el punto p, que la varilla V no tenga movimiento, no obstante el giro del eje donde están montadas las excéntricas.

El mecanismo descrito, llamado también *sector de Stephenson*, ha sido muy empleado para producir el movimiento del *distribuidor* en las máquinas de vapor; hoy se emplean otros mecanismos más cómodos y eficaces para regular la entrada del vapor en los cilindros, pero el papel que aquél ha desempeñado en el progreso de dichas máquinas justifica que no se le pase en silencio en el estudio elemental de los mecanismos que estamos efectuando.

354. Engranaje de Lahire.—Este mecanismo, representado en la figura 191, es un verdadero *tren epicicloidal*;

pero como su objeto es transformar el movimiento circular continuo de un eje en el rectilíneo alternativo de la varilla m, lo consideramos en este lugar. Ya hemos dicho que la rodadura de la rueda A en el interior de la C, por estar sus radios en la relación de $1 : 2$, convierte a la hipocicloide que describiría la cabeza de la biela en el diámetro señalado de puntos en la figura.

El movimiento de la pieza conducida es proyección del circular uniforme que tiene el punto de contacto de las ruedas A y C y, por tanto, será un movimiento armónico de la forma $x = 2\,R \cos \omega\, t$; la relación de velocidades entre la pieza conducida y el eje es $\frac{v'}{\omega} = 2\,R \operatorname{sen} \omega\, t$, reduciéndose a cero el valor de v' en los instantes en que $t = o$ y $t = \frac{\pi}{\omega}$, correspondientes, en cada revolución, a las posiciones extremas de la cabeza de la biela, verificándose la inversión del movimiento sin cambios bruscos de velocidad.

V

MECANISMOS DE TERCER GÉNERO.—CASOS DE CONTACTO NO PLANO

355. Observación.—Los principios en que se funda la teoría de los mecanismos de contacto no plano son los mismos que se consignaron en el número **336** para los de contacto plano, y en este caso no hay para qué considerar los de primera especie, pues cualquiera que sea la dirección de los movimientos rectilíneos de las piezas conductora y conducida, existirá un plano al cual serán paralelos

los citados movimientos, entrando en la categoría de mecanismos de contacto plano.

356. Mecanismos de contacto no plano de segunda especie.—Los ejes entre los cuales hay que verificar la transmisión, pueden cortarse o cruzarse y para mayor claridad consideraremos separadamente estos dos casos:

1.° *Transmisión entre ejes que se cortan.*—El movimiento relativo de las piezas conductora y conducida puede reproducirse, según sabemos, por la rodadura del cono S' sobre el S (fig. 148), siendo $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \theta}$.

La transmisión podrá efectuarse sin resbalamiento y con relación constante de velocidades angulares, sustituyendo los cuerpos en contacto por los conos de revolución S y S'; el mecanismo constituido se llama *de conos de fricción* y no puede transmitir grandes esfuerzos.

Para transmitir esfuerzos de consideración, con relación constante de velocidades angulares, se emplean los *engranajes cónicos*, cuyo trazado se realiza por procedimientos análogos a los empleados en los engranajes cilíndricos, sustituyendo los perfiles conjugados planos, allí considerados, por los esféricos [**305**] situados sobre dos esferas concéntricas en o y cuya diferencia de radios fuera la altura que deban tener las dos ruedas dentadas; estos perfiles esféricos servirían de plantilla en las dos bases de las ruedas para hacer el *vaciado* de los dientes. Después indicaremos un procedimiento aproximado, pero más práctico, para hacer el trazado de estos engranajes.

2.° *Transmisión entre ejes que se cruzan.*—El resbalamiento mixto de las superficies regladas engendradas por el eje del torsor equivalente a la rotación y traslación relativa de los cuerpos en contacto (fig. 149), reproduce las posiciones relativas de las piezas conductora y conducida, verificándose las relaciones

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}, \quad [V_r] = [\omega_r] \cdot Pc + [v_r] \quad (*)$$

y pudiéndose conseguir la transmisión con relación constante de velocidades angulares, haciendo que dichas superficies regladas sean hiperboloides de revolución, cuyos ejes sean los de las rotaciones de las piezas conductora y conducida. Si el contacto tiene lugar en la generatriz común de dichos hiperboloides es $P\,c = o$ y el resbalamiento mutuo se reduce al mínimo $V_r = v_r$, que es imposible evitar; el mecanismo constituido se llama *de hiperboloides tangentes* y con él, como con todas las transmisiones *de fricción*, no pueden comunicarse esfuerzos de consideración.

La potencia de transmisión puede aumentarse, transigiendo con resbalamientos mayores que v_r, contruyendo los *engranajes hiperboloides*, como el representado en la figura 245, cuyos dientes afectan forma helicoidal y cuyo trazado aproximado, por lo que se refiere a las plantillas de sus bases, se efectúa por el mismo procedimiento que se indicará para los engranajes cónicos.

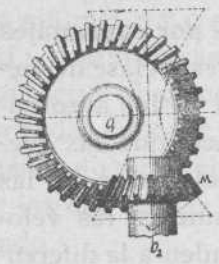


Fig. 245

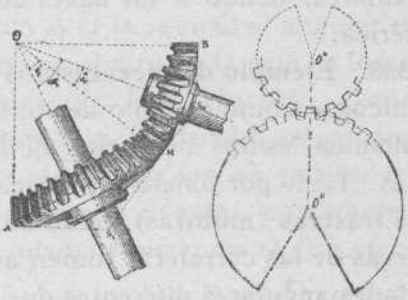


Fig. 246

357. Método de Tredgold para trazar engranajes cónicos.—Después de trazar los ejes $o\,S_1$, $o\,S_2$ (fig. 246) y la

(*) Llamamos $P\,c$ a la distancia de un punto cualquiera del contacto al eje instantáneo de rotación y resbalamiento.

recta $o\,M$, formando los ángulos que correspondan para la relación de velocidades que se desea obtener, se trazan en M las perpendiculares $M\,A$, $M\,B$ y $S_1\,S_2$ a los citados ejes y recta o M y se forman en S_1 y S_2 dos conos, suplementarios de los primitivos $A\,o\,M$ y $B\,o\,M$, que se desarrollarán sobre el plano del dibujo, abriéndolos por las generatrices $S_1\,A$ y $S_2\,B$, siendo $o'\,o''$ en el desarrollo la posición de la generatriz común $S_1\,S_2$ de los dos conos.

En el desarrollo obtenido se hacen las construcciones que se han estudiado en los engranajes cilíndricos, tomando los arcos bases de dichos desarrollos, como si fueran las circunferencias primitivas que allí se consideraron. Las construcciones se repiten sobre otros dos conos suplementarios, trazados a una distancia de los anteriores, que dependerá de la altura que se le haya de dar a las ruedas del engranaje.

Las cuatro plantillas obtenidas se arrollan sobre los cuatro conos, para señalar las líneas directoras del vaciado de los dientes; después se hacen desaparecer los conos auxiliares, dando a las bases de las ruedas forma plana o esférica.

358. Ejemplo de mecanismos formados por engranajes cónicos.—Como ejemplo de aplicación de esta clase de mecanismos, vamos a describir *el diferencial* de los automóviles. Tiene por objeto este mecanismo hacer que las ruedas traseras (motoras) de un automóvil, al entrar en las curvas de las carreteras tomen automáticamente las velocidades angulares diferentes que corresponden a la diferencia de recorrido que ejecutan.

Si es ω la velocidad angular que el motor comunica al eje trasero y éste fuera rígido, esa sería constantemente la que tendrían las ruedas, produciéndose en las curvas resbalamientos sumamente perjudiciales para la seguridad y economía de este medio de locomoción; los caminos que

recorren las ruedas de cada costado, en las curvas, tienen por media aritmética el recorrido por el centro del carruaje y de aquí que el mecanismo de unión de las dos ruedas motoras debe ser tal que produzca en ellas la misma velocidad ω cuando el coche avance en tramos rectos del camino, y al tomar las curvas se originen velocidades ω' y ω'', cuya media sea $\frac{\omega' + \omega''}{2} = \omega$.

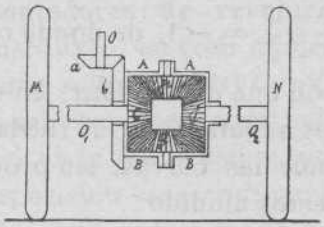


Fig. 247

Esto se consigue interrumpiendo al eje trasero (fig. 247), e intercalando en él la *caja del diferencial A B*, en cuyo interior se encuentran los piñones terminales *c* y *d* de los ejes O_1 y O_2 de las ruedas y una corona de cuatro o seis piñones, de eje perpendicular al del carruaje, que engranan con los anteriores, teniendo todos el mismo número de dientes.

Imaginemos las ruedas *M* y *N* levantadas del suelo (para que el carruaje no avance) y supongamos que el motor, por intermedio del engranaje *a b*, o por otra transmisión cualquiera, comunica a la caja *A B* la velocidad angular ω; los piñones *p* y *q* arrastrarán, en el giro de la caja, a los *c* y *d* y comunicarán a las ruedas *M* y *N* la velocidad ω, que produciría el avance del carruaje, si las ruedas estuvieran apoyadas sobre el suelo. Los piñones *p* y *q* en este movimiento no giran alrededor de sus ejes propios, por presentar las dos ruedas *M* y *N* la misma resistencia al giro efectuado.

Pero si por una causa cualquiera la rueda *M*, por ejemplo, opone mayor resistencia al giro que la *N*, la velocidad angular ω' de O_1 disminuirá, produciéndose el giro de los piñones *p* y *q* alrededor de sus ejes propios y dando lugar a la velocidad ω'' en la rueda *N*.

Para encontrar la relación que liga a ω' y ω'', suponga-

mos que a todo el mecanismo se le imprime la rotación $-\omega$ alrededor del eje $O_1 O_2$, la caja $A B$ permanecerá inmóvil y las ruedas girarán con las velocidades $\omega' - \omega$ y $\omega'' - \omega$; pero en las condiciones de inmovilidad de la caja, los piñones p y q no hacen más que invertir el sentido de la rotación de las dos ruedas M y N y por consiguiente $\frac{\omega' - \omega}{\omega'' - \omega} = -1$, de donde resulta $\omega = \frac{\omega' + \omega''}{2}$, que es la relación que debe existir, en cada instante, entre las velocidades angulares de las ruedas M y N, para que el carruaje tome las curvas, sin producir los perjuicios a que antes hemos aludido.

359. Tornillo sin fin.—Cuando la relación de velocidades angulares $\frac{\omega}{\omega'}$ es muy grande en los engranajes hiperboloides puede hacerse que el arco de conducción del piñón comprenda la circunferencia completa, dando lugar a que los dientes del mismo formen una espira alrededor de su eje, afectando la forma de tornillo, que da nombre al mecanismo, y cuya disposición se representa en la figura 248.

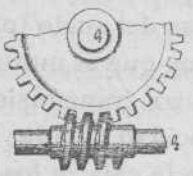


Fig. 248

Teóricamente bastaría que el filete del tornillo comprendiera una sola espira; pero para asegurar en mejores condiciones la conducción, suelen construirse con dos o tres espiras.

Llamando N al número de dientes de la rueda conducída y α el ángulo correspondiente a cada uno, es

$$\omega' = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{Nt}, \quad \omega = \frac{2\pi}{t} \text{ y } \frac{\omega}{\omega'} = N.$$

Cuando se quiere aumentar la superficie de contacto del tornillo y de la rueda, se da a la llanta de ésta la forma

cóncava que indica la figura 249; el mecanismo se llama entonces de *tornillo tangente*, siendo la relación de velocidades la misma que la del caso anterior.

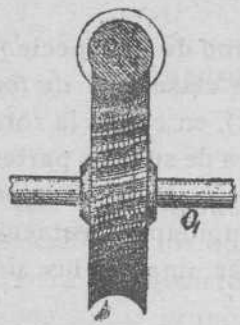


Fig. 249

Los mecanismos de tornillo sin fin y tornillo tangente no son, prácticamente, reversibles.

360. Contadores de revoluciones.—Constituyen, en gran número de tipos, una aplicación del tornillo sin fin, combinado con engranajes cilíndricos; en la figura 250 se indica una disposición que consiste en un tornillo sin fin, terminado por uno de sus extremos en pirámide puntiaguda, para que con una ligera presión se pueda adherir al eje *o*, cuyas revoluciones queremos contar; el tornillo engrana en la rueda *M*; en el eje de ésta hay un piñón cilíndrico *P* que engrana a su vez con otra rueda *N*; el piñón tiene *10* dientes y las dos ruedas *M* y *N* tienen *100*.

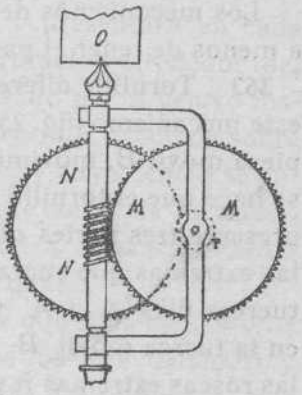


Fig. 250

Resulta de esto que cada revolución del eje *o* hace avanzar un diente a la rueda *M*, cuyas diez cifras (*) indicarán *decenas* de vueltas; cada revolución de *M* (*100* vueltas del eje) hace avanzar $\frac{1}{10}$ de vuelta a la *N*, de modo que las cifras marcadas en esta última señalarán centenas de vueltas del eje, pudiéndose contar por este procedimiento, hasta *1.000* revoluciones.

(*) La numeración de las divisiones de las ruedas *M* y *N* está en la cara opuesta a la que se ve en la figura.

En otros aparatos se suprime la segunda rueda dentada, sustituyéndola por un tope, que hace funcionar un pequeño timbre, dando una campanada por cada *100* revoluciones del eje.

361. Mecanismos de contacto no plano de 3.ª especie.— El más usual de los mecanismos de esta clase es el *de tornillo* y *tuerca* (fig. 251), en el que la rotación de una cualquiera de sus dos partes, produce la traslación de la otra, suponiéndole guias que impidan la rotación del conjunto, al girar una de las dos piezas.

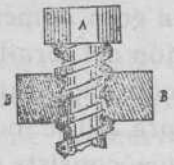


Fig. 251

Si el tornillo A es la pieza conductora y B la conducida, se ve que por cada revolución del primero avanzará la segunda una distancia igual al paso h del tornillo; la relación de velocidades es $\frac{\omega}{\nu'} = \frac{2\pi}{h}$.

Los mecanismos de tornillo y tuerca no son reversibles, a menos de tener el paso excesivamente grande.

362. Tornillo diferencial de Prony.—Tiene por objeto este mecanismo (fig. 252) producir y poder apreciar, en una pieza móvil B, movimientos sumamente lentos; para esto se hace que el tornillo conductor presente tres partes *aterrajadas*, las extremas que engranan en las tuercas fijas A y A' y la central en la tuerca móvil B; el paso de las roscas extremas h y el h' de la central se diferencian en una cantidad que puede hacerse tan pequeña como se desee, y así, al hacer girar el manubrio de la derecha del tornillo, por cada vuelta de éste, la pieza B habrá avanzado o retrocedido la cantidad $h - h'$ y a una fracción cualquiera de vuelta de dicho manubrio corresponderá en la pieza B la misma fracción del recorrido $h - h'$.

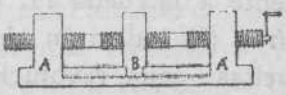


Fig. 252

VI

MECANISMO DE DIRECCIÓN DE LOS AUTOMÓVILES

363. Condiciones que debe satisfacer el mecanismo de dirección de los automóviles.—Por la importancia que tiene para el Ingeniero militar y por no tener colocación adecuada en los grupos generales, que hemos establecido en esta teoría, vamos a estudiar separadamente, como complemento o apéndice a la misma, la disposición usual del *mecanismo de dirección* de los automóviles.

El movimiento de los carruajes, cualquiera que sea su naturaleza, es un ejemplo de *movimiento paralelo a un plano* (el de asiento de las ruedas) y presentará en cada instante las circunstancias de una rotación alrededor del eje perpendicular a dicho plano, trazado por el centro instantáneo que, a cada posición de la figura proyectada sobre el mismo plano, debe corresponderle, y cuyo centro se encuentra coincidiendo aproximadamente con el de curvatura del eje del camino y, por consiguiente, a distancia infinita en los tramos rectilíneos de las carreteras.

De aquí se deduce la necesidad de que el mecanismo de dirección permita conservar paralelos los ejes delantero y trasero del carruaje en las partes rectas del camino y, por el contrario, les haga concurrir rápidamente en el centro de rotación, al entrar en las curvas (*).

(*) En cuanto a la diferencia de los espacios que tienen que recorrer la rueda interior y la exterior del juego delantero, no es necesario recurrir a ningún mecanismo especial, como en el juego trasero, por estar montadas dichas ruedas locas sobre su eje y cada una toma, independientemente de la otra, la velocidad angular correspondiente a la rodadura que tiene que efectuar.

Si el eje delantero se montara sobre un *pivote central*, como en los carruajes ordinarios, no habría gran dificultad en conseguir la rotación de dicho eje en la cantidad necesaria para el paso por diversas curvas; pero el procedimiento de pivote central ha tenido que desecharse en los automóviles, por el gran brazo de palanca que da a los esfuerzos que ejercen sobre las ruedas las irregularidades del piso de los caminos, cuyos esfuerzos tienden a producir inclinaciones variables del eje alrededor del pivote central y estas inclinaciones, con las grandes velocidades de los automóviles, constituirían un peligro constante de accidentes.

La solución de este inconveniente se ha encontrado en el montaje independiente de las ruedas delanteras *sobre dos pivotes*, en la forma que vamos a explicar.

364. Montaje del juego delantero sobre dos pivotes.— Si en lugar de hacer girar el eje delantero alrededor de su

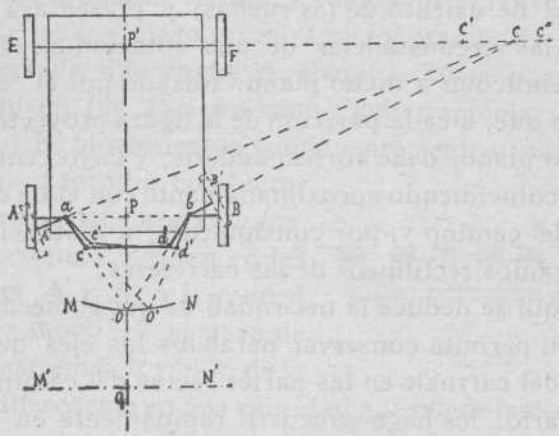


Fig. 253

punto medio P (fig. 253), para tomar las curvas, se montan separadamente las ruedas A y B sobre dos ejes, cuyo giro se produzca alrededor de los puntos a y b, próximos a los largueros de la caja del carruaje, se habrán atenuado con-

siderablemente los efectos perjudiciales a que nos hemos referido en el párrafo anterior; pero en cambio hemos creado la necesidad de adoptar un mecanismo especial, para hacer que los dos ejes $A\,a$ y $B\,b$ queden en prolongación, en los tramos rectilíneos de los caminos, y les haga girar, al llegar a las curvas, alrededor de sus respectivos pivotes los ángulos distintos $A\,a\,A'$ y $B\,b\,B'$, para conseguir su concurrencia en el punto C del eje posterior, donde se suponga colocado el centro instantáneo de la rotación que, a cada desplazamiento elemental del carruaje, corresponde en los citados tramos curvilíneos.

Supongamos que los ejes $A\,a$ y $B\,b$ se *acodan*, cortándose sus prolongaciones $a\,c$ y $b\,d$ en un punto o del eje longitudinal del carruaje $P\,P'$; si ahora se hace que los ejes $A\,a$ y $B\,b$ se muèvan, girando alrededor de sus pivotes, de modo que su punto de intersección esté constantemente sobre el eje trasero (posiciones c, c', c'', etc.) el punto o describe la curva $M\,N$ (de segundo grado) y bastará que el volante de maniobra obligue a seguir al punto o la *guia curvilínea* $M\,N$ (*) para que el movimiento del conjunto se verifique alrededor del eje instantáneo proyectado en el punto C; pero la complicación de estas guias ha hecho desistir de su aplicación y se ha tratado de ver si, por medio de una combinación de bielas, podría conseguirse que el punto o describiera su trayectoria curvilínea $M\,N$. La solución exacta del problema requiere, según *Kœnigs*, un mínimo de dieciocho bielas y ya se comprende que tal complicación es inaceptable, para un mecanismo que debe obrar con rapidez y en el que debe procurarse toda la reducción posible de peso.

(*) Si el punto o se toma en o_1 de modo que sea simétrico de P' respecto al eje $a\,b$, la curva $M\,N$ se convierte en la recta $M'\,N'$; pero esta ventaja técnica no puede utilizarse prácticamente, por la dificultad de instalar a dicha distancia el mecanismo de dirección.

365. Cuadrilátero de Jeantaud.—En la práctica se ha prescindido de solucionar con exactitud el problema expuesto y atendiendo a que los ángulos de giro de los pivotes suelen ser pequeños, se enlazan los codos *a c* y *b d* por medio de una sola biela *c d*, constituyendo el cuadrilátero *a b c d*, llamado *de Jeantaud*, con cuyo enlace, corriendo a derecha e izquierda a la biela *c d*, se pueden producir giros (hasta 36° ó 40° de amplitud) en los pivotes, sin ocasionar divergencias perjudiciales en los tres ejes *E F*, *A a* y *B b*, respecto al centro de rotación, en el paso por las curvas de los caminos.

El acodamiento de los ejes *A a c* y *B b d*, puede hacerse hacia el interior, como representa la figura 254: en esta disposición la biela y *la transmisión de la dirección* quedan más protegidos contra accidentes de choque; pero en cambio las irregularidades del piso producen en dicha pieza efectos de *compresión*, en tanto que con la disposición de la figura 253 estos efectos son de *extensión* y no perjudican tanto a la solidez del mecanismo.

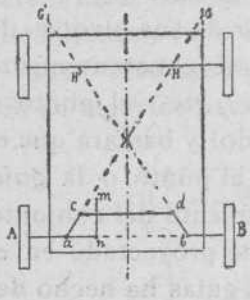


Fig. 254

366. Trazado del cuadrilátero de Jeantaud.—Se han hecho diversos ensayos para determinar el ángulo más conveniente de los ejes de las ruedas delanteras y se ha llegado al siguiente trazado empírico.

Puesto el carruaje en posición normal y trazadas sus líneas generales (ejes y contorno), como expresan las figuras 254 y 255, se prolongan los codos *a c* y *b d* y, lo mismo en el caso de cuadrilátero exterior

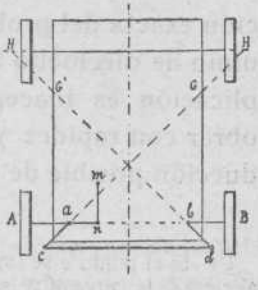


Fig. 255

que interior se adopta para los brazos $a\,c$ y $b\,d$ la dirección que satisfaga las condiciones

$$G\,H = 2\,.\,a\,c \quad \text{y} \quad G'\,H' = 2\,.\,b\,d\,.$$

367. Transmisión de la dirección al cuadrilátero de Jeantaud.—Para transmitir al cuadrilátero $a\,b\,c\,d$ la acción del conductor del carruaje, se emplea el volante de dirección V (fig. 256) cuyo giro, por medio del tornillo sin fin T, produce el del sector dentado S y éste hace, con la palanca P, que la varilla $m\,n$, adquiera el movimiento de avance indicado por la flecha f, o el de retroceso en sentido contrario; la varilla $m\,n$, que esquemáticamente se indica en las figuras 254 y 255, se articula a la palanca $a\,n$ sólidamente unida, en el pivote a, al eje $A\,a$ y brazo $a\,c$ del cuadrilátero; el avance o retroceso de la varilla $m\,n$ produce necesariamente el giro del eje $A\,a$ y por la acción de la biela $c\,d$, se transmite al eje de la segunda rueda B.

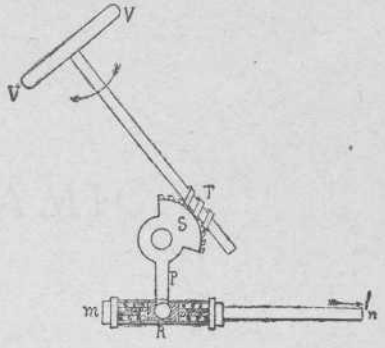


Fig. 256

Inútil parece advertir que el enlace del volante V con la varilla $m\,n$, debe hacerse por intermedio de un mecanismo *no reversible*, para que el volante pueda accionar sobre las ruedas, pero no las ruedas sobre el volante.

En vez del tornillo sin fin, de la figura 256, se emplea en algunos tipos de automóviles la transmisión de tornillo y tuerca: el desplazamiento de esta última, por el giro del volante, se aprovecha para producir el avance o retroceso de la varilla $m\,n$.

La unión de la palanca P con la misma varilla $m\,n$ se

hace por medio de dos resortes que comprimen la *rótula R* y cuya acción elástica amortigua los choques que las desigualdades del piso producen en el mecanismo de dirección y cuyos choques ocasionarían el rápido deterioro del engranaje, si no existiera el mencionado intermedio amortiguador.

TERCERA PARTE

DINÁMICA

DINÁMICA

PRELIMINARES

368. Objeto de la Dinámica.—Ya se dijo, al empezar la Mecánica general, que la Dinámica era la parte de esta ciencia que estudia las propiedades del movimiento de los cuerpos, teniendo en cuenta la naturaleza física de la materia de que están formados y las causas o *fuerzas* que real o aparentemente producen o modifican el indicado estado de movimiento.

369. División de la Dinámica.—Para facilitar la exposición de esta parte de la Mecánica, empezaremos por establecer sus principios fundamentales y ciertas propiedades de las fuerzas, que se pueden considerar independientes de los cuerpos a que están aplicadas; después pasaremos a estudiar los problemas generales del movimiento y equilibrio de los *puntos* y *sistemas materiales*, observando que en la Dinámica del punto material se consideran, en general, como elementos móviles las porciones más pequeñas de materia que puedan concebirse con la condición de conservar en todos los casos las propiedades físicas del cuerpo de que proceden.

La naturaleza especial de este móvil elemental que, no obstante su pequeñez, de orden infinitesimal, encierra infi-

nidad de puntos geométricos, exige, para precisar el concepto de su trayectoria, que ésta se refiera a algunos de los puntos geométricos contenidos en el punto material; de éstos, el único definido es el centro de gravedad y éste es el que se elige para referir a él las diversas circunstancias (fuerzas, velocidades, aceleraciones, etc.) que acompañan al elemento material en su movimiento.

Respecto a los cuerpos o sistemas materiales los consideraremos formados por la aglomeración de puntos materiales, pudiendo ser *discontinuos* o *continuos*, según que presenten o no soluciones finitas de continuidad entre sus elementos o grupos de elementos componentes. En realidad todos los cuerpos son discontinuos, por la separación que entre sus moléculas establece la atmósfera etérea que las rodea; pero desde el punto de vista mecánico, se prescinde de dichos espacios intermoleculares y únicamente se aplica el calificativo de discontinuos a los sistemas que presentan entre sus elementos separaciones de dimensiones finitas.

370. Puntos materiales finitos.—La hipótesis hecha al suponer que todas las circunstancias del movimiento de un punto material se referían a su centro de gravedad, equivale a reducir estos móviles elementales a puntos geométricos, sin perder de vista su naturaleza material, representada en las fórmulas por la expresión de su masa; pero a su debido tiempo veremos que en los cálculos y ecuaciones que la Mecánica establece, al estudiar el movimiento de dichos móviles, se prescinde en general de sus dimensiones, suponiéndolas infinitesimales, para justificar la *concurrencia* de los vectores de toda clase que se les suponga aplicados.

Esto nos dice que cuando esta concurrencia tenga lugar, por sí, en el centro de gravedad de un cuerpo y éste presente las condiciones de rigidez o indeformabilidad que en los puntos materiales se suponen, le serán aplicables las

propiedades del movimiento de los móviles elementales, en cuanto se refieran a su centro de gravedad. Los móviles que reunan las circunstancias expresadas se siguen llamando *puntos materiales,* y a ellos nos referiremos siempre que en lo sucesivo se aluda a datos experimentales del movimiento de tales puntos, pues ya se comprende la dificultad que existirá de operar prácticamente con móviles infinitesimales.

371. Subdivisiones.—Atendiendo a la distinta naturaleza que pueden presentar los sistemas materiales, estableceremos en la Dinámica de los mismos, varias subdivisiones cuyo alcance precisaremos en lugar oportuno, limitándonos ahora a exponer el siguiente índice de los capítulos y apéndice que contendrá esta tercera parte de la Mecánica general:

Cap.º 1.º—Generalidades sobre las fuerzas.
» *2.º*—Teoría de los campos de fuerza.
» *3.º*—Dinámica del punto material.
» *4.º*—Dinámica general de los sistemas materiales.
» *5.º*—Dinámica especial de los sistemas indeformables.
» *6.º*—Dinámica especial de los sistemas articulados.
» *7.º*—Dinámica especial de los sólidos naturales.
» *8.º*—Dinámica especial de los sistemas flúidos.
» *9.º*—Dinámica especial de las fuerzas instantáneas.
Apéndice.—Nociones de Balística.

CAPITULO PRIMERO

Generalidades sobre las fuerzas

I

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES Y PRIMERAS NOCIONES SOBRE LAS FUERZAS

372. Postulados fundamentales.—En el estado actual de la Dinámica es indispensable, para desarrollar sus teorías, establecer, como punto de partida, un cierto número de principios fundamentales que se admiten como ciertos, por la exactitud de sus consecuencias, pero sin demostración *a priori*; estos son:

1.° *Postulado llamado ley de inercia de la materia.*—Se enuncia diciendo que *un punto material es incapaz de cambiar por sí, sin la intervención de acciones exteriores, la magnitud y dirección de su velocidad.*—Admitido este postulado se deduce que un punto material que esté en reposo, continuará indefinidamente en la misma situación, en tanto no se presente alguna acción exterior que le obligue a salir de ella, y si un punto material se encuentra en movimiento y ninguna acción exterior se ejerce sobre el mismo, su movimiento será precisamente rectilíneo y uniforme.

Las acciones exteriores que reciba un punto material produciendo *aceleraciones lineales* en su movimiento, cualquiera que sea el origen físico de las mismas y la ma-

nera de actuar sobre el punto móvil, se llaman *fuerzas*, resultando de estas definiciones que todo punto cuyo movimiento no sea rectilíneo y uniforme se encuentra bajo la acción de una fuerza, que será el agente productor de la aceleración correspondiente al indicado movimiento.

2.° *Postulado llamado ley de la independencia de los efectos de las fuerzas.*—Se expresa diciendo que *el efecto aceleratriz de una fuerza sobre un punto material es independiente del estado de movimiento en que dicho punto se encuentre.*—Este postulado es susceptible de varias objeciones, que le hacen caer en defecto cuando se trata de las grandes velocidades que llegan a adquirir las masas imponderables, y, aun en el caso de tratarse de la materia ponderable, obliga a recurrir, en algunos casos que ya veremos, a ciertas fuerzas ficticias que complementando el efecto, también ficticio, que de la admisión del postulado se deduzca, permiten obtener los efectos verdaderos de las fuerzas aplicadas a los puntos móviles.

3.° *Postulado llamado ley de la conjugación de las fuerzas.*—Su enunciado es: *si un punto material ejerce sobre otro una acción cualquiera, el segundo devuelve al primero una reacción igual, pero de sentido contrario.*—Implícitamente se supone en este enunciado que, tanto la acción como la reacción que entre los dos puntos materiales se ejerce, tienen por línea de posición común la recta que une a los dos puntos considerados.

373. Medida de las fuerzas.—Siendo el efecto que una fuerza produce, sobre un punto material cualquiera, una aceleración lineal y en la imposibilidad de medirlas directamente, se recurre al procedimiento indirecto de admitir el principio de *proporcionalidad entre el efecto y la causa*, suponiendo que toda fuerza F que actúa sobre un punto material, produciendo en el mismo una aceleración G, es de la forma $F = k\,G$.

Como consecuencia de este convenio se puede establecer la igualdad y la suma de fuerzas, diciendo que dos de ellas, F y F', son iguales cuando, actuando sobre el mismo punto material, producen aceleraciones iguales, y una fuerza F será la suma de otras dos, F' y F'', cuando las aceleraciones G, G' y G'' cumplan la condición de ser $G = G' + G''$, y, de una manera general, se verificará, para todas las fuerzas que puedan obrar sobre un punto, la relación

$$\frac{F}{G} = \frac{F'}{G'} = \frac{F''}{G''} = \ldots = k .$$

La experiencia prueba que si las fuerzas F, F', F'', ... producen en un punto las aceleraciones G, G', G'', ... , que cumplen la condición $\frac{F}{G} = k = \textit{constante}$, las mismas fuerzas aplicadas a otro punto, distinto del primero, producen aceleraciones G_1, G'_1, G''_1, ... , que verifican también la relación $\frac{F}{G_1} = k_1 = \textit{constante}$, pero el valor k_1 de esta constante es, en general, distinto del anterior.

Los valores k y k_1 de las relaciones $\frac{F}{G}$ y $\frac{F}{G_1}$ constituyen una circunstancia inherente a cada uno de los puntos móviles y por ser proporcionales a las fuerzas necesarias para producir en los dos puntos una misma aceleración, miden, en cierto modo, la resistencia que cada uno presenta a salir del reposo, o a cambiar su estado de movimiento, y los designaremos con el nombre de *coeficientes de inercia* de los expresados móviles; disponiendo de una tabla de coeficientes de inercia de diversos puntos, bastaría medir la aceleración producida en uno de ellos por una fuerza, para obtener la magnitud de ésta por el producto $F = k.\ G$.

Para formar la tabla de coeficientes de inercia de dis-

tintos puntos materiales, supongamos que se atribuye a uno, tomado como tipo, el valor arbitrario k y sean G, G_1, G_2 .... las aceleraciones que una misma fuerza produce en el móvil tipo M y en los M_1, M_2 .....; según los convenios establecidos, se verificará

$$\frac{F}{G} = k\,, \quad \frac{F}{G_1} = k_1\,, \quad \frac{F}{G_2} = k_2\,, \ \ldots.$$

de donde

$$k\,.\,G = k_1\,.\,G_1 = k_2\,.\,G_2 = \ldots.$$

y

$$k_1 = k\,\frac{G}{G_1}\,, \quad k_2 = k\,\frac{G}{G_2}\,, \ \ldots..$$

Si ahora suponemos que al coeficiente arbitrario k del móvil tipo, se le da el valor numérico que expresa la *masa o cantidad de materia* m contenida en el mismo, es fácil ver, teniendo en cuenta el principio experimental de que las aceleraciones que produce una misma fuerza, en distintos puntos materiales, *son inversamente proporcionales a sus masas respectivas,* que los coeficientes de inercia de todos los puntos materiales se pueden expresar por las citadas masas; en efecto, del principio citado resulta

$$m\,G = m_1\,G_1 = m_2\,G_2 = \ldots. \quad \text{o} \quad \frac{G}{G_1} = \frac{m_1}{m}\,, \quad \frac{G}{G_2} = \frac{m_2}{m}\,, \ \ldots$$

y sustituyendo estas relaciones en las fórmulas de los coeficientes de inercia k_1, k_2, ... , se obtiene

$$k_1 = k\,\frac{G}{G_1} = m\,\frac{m_1}{m} = m_1\,, \quad k_2 = k\,\frac{G}{G_2} = m\,\frac{m_2}{m} = m_2\,, \ \ldots..$$

Resulta de lo expuesto que el valor de una fuerza, que produzca en un punto cualquiera de masa m la aceleración G, estará expresado por el producto $F = m\,.\,G$ y que la tabla de coeficientes de inercia, a que antes nos referimos,

se puede sustituir por la expresión de las masas que a los citados móviles corresponda.

374. Unidades de fuerza.—Para relacionar entre sí estas magnitudes mecánicas, se toma por unidad de fuerza la necesaria para producir en la unidad de masa la unidad de aceleración.

En el sistema *cegesimal* la unidad de fuerza se llama *dina*; su símbolo representativo o fórmula de sus dimensiones es 1 *dina* = LMT^{-2} y se puede definir diciendo que es *la fuerza necesaria para comunicar al gramo-masa la unidad de aceleración* LT^{-2}.

La dina es una unidad muy pequeña y se sustituye en la práctica por el *gramo-peso*, que es la fuerza capaz de producir al gramo-masa la aceleración de la pesantez (en Madrid $g = 9{,}80016$ *metros por segundo por segundo*); si expresamos el valor de g en centímetros resulta que el *gramo-peso* es igual, en Madrid, a *980,016 dinas* y 1 *kg* = *980016 dinas*; pero siendo esta equivalencia variable para las localidades situadas en distintos paralelos de la tierra, se ha convenido en tomar, como valor constante del gramo-peso, el número de dinas que le corresponden en la latitud de París, que son *981*, y por tanto, *el kilogramo tipo* se considera equivalente a *981000 dinas* y con este valor suele figurar en textos y manuales.

375. Representación vectorial de las fuerzas.—Las fuerzas son, por su naturaleza, magnitudes de carácter vectorial, con el punto de aplicación en el móvil y su línea de acción y sentido perfectamente definidos por los de la aceleración producida; pero la representación vectorial, que de estas convenciones resulta, carecería de finalidad práctica si no se verificara, como se verifica, que a los vectores así obtenidos se les puede aplicar los principios de la composición y descomposición vectorial estudiados en el Algoritmo mecánico.

Para justificar dicha aplicación demostraremos, que *si dos fuerzas obran simultáneamente sobre un punto material, el efecto producido es el mismo que si se aplicara al móvil una fuerza representada por la diagonal del paralelogramo construido sobre las dos primeras.* Sean F' y F'' las dos fuerzas que actúan en un instante determinado sobre el móvil M (figura 257), produciendo las aceleraciones $G' = \frac{F'}{m}$ y $G'' = \frac{F''}{m}$; representemos por $[G] \equiv [G'] + [G'']$ el efecto producido por la acción simultánea de dichas dos fuerzas y sea $[F] = m\,[G]$ la fuerza que suponemos capaz de producir la aceleración $[G]$ al punto M; de la equipolencia $[G] \equiv [G'] + [G'']$, se deduce **(19-5.ª)** $m\,[G] \equiv m\,[G'] + m\,[G'']$, o $[F] \equiv [F'] + [F'']$, como queríamos demostrar (*).

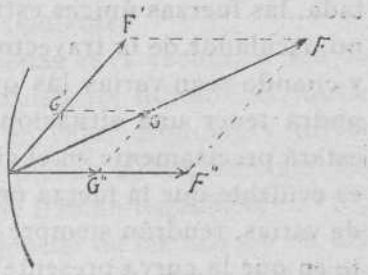


Fig. 257

Según esto, cualquiera que sea el número de fuerzas que actúen sobre un punto material, se puede suponer a éste bajo la acción de una sola *resultante* de todas ellas, que se obtendrá por los procedimientos gráficos o analíticos que en la primera parte se estudiaron, y recíprocamente, cuando convenga, para simplificar la resolución de los problemas mecánicos, o con cualquier objeto especial, se puede sustituir una fuerza por dos o más *componentes* que mecánicamente le equivalgan. Las descomposiciones

(*) La demostración efectuada supone cierta la ley de la independencia de los efectos de las fuerzas: cuando deje de verificarse se calcula la aceleración $[G_o]$ necesaria para establecer la equipolencia $[G] \equiv [G'] + [G''] + [G_o]$ y se hace intervenir en los problemas correspondientes la fuerza complementaria, $[F_o] = m\,[G_o]$, capaz de producir la aceleración $[G_o]$.

más frecuentes de una fuerza son las que se obtienen descomponiéndola en la dirección de tres ejes rectangulares y en la dirección de la tangente y normal principal a la trayectoria, en una posición determinada del punto móvil.

Como consecuencia de la representación vectorial adoptada, las fuerzas únicas estarán siempre situadas en el plano osculador de la trayectoria, en cada posición del móvil, y cuando sean varias las que obren sobre éste, cada una podrá tener una situación cualquiera, pero la resultante estará precisamente en el citado plano osculador. También es evidente que la fuerza única, o la resultante en el caso de varias, tendrán siempre su sentido dirigido hacia la parte en que la curva presente su concavidad, en las trayectorias curvilíneas, y en las rectilíneas será de necesidad que la fuerza tenga la dirección del movimiento.

376. Sistemas de fuerzas nulos o en equilibrio.—Cuando las fuerzas aplicadas a un punto material cumplen la condición gráfica de cerrar su polígono vectorial, o la analítica expresada por las ecuaciones

$$\Sigma X = o\,, \quad \Sigma Y = o\,, \quad \Sigma Z = o\,,$$

se dice que constituyen un sistema *nulo* o *en equilibrio*, por ser nula la aceleración que tales sistemas producen en el móvil.

Cuando un punto material está bajo la acción de un sistema de fuerzas nulo, se refiere el estado del sistema al del punto y se dice que el punto *está en equilibrio*, siendo evidente que el móvil, en tales casos, se encontrará en reposo o se moverá con movimiento rectilíneo y uniforme.

Estas dos formas del equilibrio de un punto se distinguen con los nombres de equilibrio *estático* y equilibrio *dinámico*; pero, en general, cuando tratemos del equilibrio de un punto, se entenderá que nos referimos al estático. Por lo demás, el estado de equilibrio de un punto material,

sea estático o dinámico, tiene el mismo carácter relativo que en la Cinemática se ha expresado para el reposo y movimiento de un móvil cualquiera (*).

377. Clasificación de las fuerzas.—Se clasifican las fuerzas de muy diferentes maneras por su naturaleza, origen y modo de obrar hipotéticos; la nomenclatura que se refiere a las fuerzas más usuales es la siguiente:

Fuerzas *constantes* son aquellas cuya acción, o sea la aceleración que producen, es constante durante el movimiento; pueden ser constantes en valor modular y dirección, o solamente en una de dichas circunstancias; las fuerzas que no son constantes se llaman *variables.*

Cuando la componente tangencial de las fuerzas es del mismo sentido que el movimiento, se llaman *motoras* o *motrices* y *resistentes* en caso contrario.

Cuando un punto se mueve sobre una línea o superficie determinada, mediante *guias* que le obliguen a seguir una trayectoria fijada de antemano, el punto recibe de dichas guias ciertas acciones que se llaman *fuerzas de enlace.* En estos casos las demás fuerzas que obran sobre el móvil se dice que son *directamente aplicadas.*

Se llaman *centrales* las fuerzas cuya línea de acción pasa constantemente por un punto fijo o *centro* y se supone, además, que su valor modular sea función de la distancia del móvil a dicho centro.

Y sin perjuicio de las clasificaciones anteriores, hay fuerzas *gravitatorias, eléctricas, magnéticas, de cohesión, afinidad* y otras que iremos dando a conocer, según vayan interviniendo en nuestro estudio.

(*) Las circunstancias de relación que existen entre las fuerzas de un sistema en equilibrio, constituyen una parte especial de la Mecánica general llamada *Estática,* cuyo estudio puede hacerse independientemente del de la Dinámica; pero en el estado actual de esta ciencia y para las aplicaciones del Ingeniero, resulta más breve considerar el reposo como una modalidad del movimiento y reducir los problemas estáticos a simples casos particulares de las ecuaciones dinámicas.

378. Medida experimental de las fuerzas.—En la práctica se obtiene la medida indirecta de las fuerzas con el empleo de los aparatos llamados *dinamómetros*, que presentan variadas formas, conocidas por el curso de Física; por este motivo nos limitaremos a indicar que, más adelante, al estudiar las condiciones de equilibrio de las máquinas en general, nos referiremos, entre otros ejemplos, al grupo de dinamómetros llamados *balanzas* y *básculas*, para dar a conocer algunos detalles interesantes de estos aparatos, deducidos de la teoría mecánica de los mismos.

II

TRABAJO Y POTENCIA DE LAS FUERZAS

379. Definiciones.—Cuando un móvil M recorre su trayectoria (fig. 258), bajo la acción de la fuerza F y en el tiempo $t' - t = dt$ pasa de la posición M a la M', se dice que la fuerza F ha desarrollado, en dicho intervalo de tiempo, el *trabajo elemental* expresado por el producto vectorial de F y $\overline{MM'} = [de]$; los trabajos elementales de las fuerzas los representaremos por el símbolo dTF y según la definición anterior será

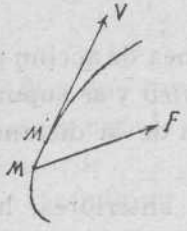


Fig. 258

$$dTF = F \,.\, de \,.\, \cos \overline{Fde} = F \,.\, de \,.\, \cos \overline{Fv} \,.$$

Como el producto $F \cos \overline{Fv}$ es igual a la componente tangencial F_t de la fuerza, puede decirse que *el trabajo elemental de una fuerza está expresado por el producto de su componente tangencial y el camino recorrido por su punto de aplicación en el tiempo dt*, y del mismo modo,

que *es igual al producto de la fuerza por la proyección del camino recorrido, en el tiempo d t, sobre la dirección de la misma.*

Cuando la fuerza tenga la dirección del camino recorrido el producto geométrico de F y $\overline{MM'}$ se convierte en el producto ordinario $dTF = F \,.\, de$.

La integral definida entre las posiciones A y B, correspondientes a los tiempos t_1 y t_2, de la expresión del trabajo elemental de una fuerza, se llama *trabajo total* de la misma en el intervalo finito de tiempo $t_2 - t_1 = \Delta t$ y estará dado por la expresión $TF = \int_D^{\cdot} F \,.\, de \,.\, \cos F_v$ o por $TF = \int_D^{\cdot} F \,.\, de$ cuando la fuerza tenga durante todo el recorrido la dirección del movimiento.

El trabajo desarrollado por las fuerzas motoras que intervengan en un problema mecánico cualquiera, se llama *trabajo motor*, y, por el contrario, se llama *resistente* el que corresponde a las fuerzas del mismo nombre.

El cociente $P = \dfrac{\int_D F \,.\, de \,.\, \cos \overline{Fv}}{t_2 - t_1}$ entre el trabajo total desarrollado por una fuerza y el tiempo correspondiente que ha tardado en desarrollarlo, se llama *potencia media* de la fuerza en el indicado intervalo de tiempo, y cuando dicho cociente se refiere a un tiempo infinitesimal $d t$, se obtiene la *potencia correspondiente al instante t* inicial de dicho intervalo $d t$, siendo su expresión $P = \dfrac{dTF}{dt}$.

380. Unidades de trabajo y de potencia.—Para medir el trabajo de las fuerzas, se toma por unidad el trabajo desarrollado por la unidad de fuerza cuando su punto de aplicación recorre, en la dirección de la misma, la unidad de longitud.

En el sistema *cegesimal* dicha unidad se llama *ergio* y se representa por el símbolo 1 *ergio* = L^2MT^{-2}; dentro del mismo sistema se emplea el múltiplo del ergio llamado *julio*, que equivale a 10^7 ergios.

Tomando por unidad de fuerza el kilogramo y por unidad de longitud el metro, se obtiene la unidad práctica llamada *kilográmetro* que equivale a

$$1\ kgm = 981000 \times 100 = 98100000\ ergios = 9{,}81\ julios.$$

También se emplea el *tonelámetro* o sea el trabajo desarrollado por una fuerza igual a una tonelada recorriendo en su dirección un metro; el tonelámetro equivaldrá a 1000 kilográmetros (*).

En la medida de la potencia se emplea como unidad la de una fuerza que desarrolle la unidad de trabajo en la unidad de tiempo.

En el sistema *cegesimal* no tiene nombre especial esta unidad, por su poco uso, (su símbolo representativo es L^2MT^{-3}); en cambio se emplean

el *vatio* o *julio por segundo*, que equivale a 10^7 L^2MT^{-3},
el *kilovatio* = 10^{10} L^2MT^{-3}.

En la práctica son más usadas

el *caballo de vapor ordinario* = *75 kgm. por segundo*,
el *caballo de vapor inglés (HP, de horse-power)* = *550 pies-libras por segundo* = *76 kgm. por segundo*,
el *poncelet* = *100 kgm. por segundo;*

las equivalencias de estas unidades con las del sistema cegesimal se establecen fácilmente y son:

1 C_v = 736 vatios, 1 HP = 746 vatios, 1 poncelet = 981 vatios.

(*) La equivalencia entre el trabajo mecánico y el calor, fundamental en la Termodinámica, permite evaluar el trabajo en *calorías*; las modernas experiencias fijan dicha equivalencia en *1 caloría-gramo = 0,425 kilogrametros = = 4,18 julios*, o bien *1 julio = 0,102 kilográmetros = 0,24 calorías-gramo.*

Para el caballo de vapor ordinario suele emplearse, en vez de la notación C_v, las iniciales *PS* del nombre alemán *pferde-stark*.

381. Propiedades del trabajo de las fuerzas.—1.ª *El trabajo desarrollado por una fuerza, resultante de otras varias en un intervalo cualquiera de tiempo, es igual a la suma algébrica de los trabajos efectuados por cada una de ellas en el mismo tiempo.* En efecto, considerando el trabajo elemental de $[R] \equiv [F] + [F'] + \ldots$, se tiene

$$dTR = R \,.\, de \,.\, \cos \overline{R\, de} = de\,(F \cos \overline{F\, de} +$$

$$+ F' \cos \overline{F'\, de} + \ldots) = dTF + dTF' + \ldots = \Sigma\, dTF\,;$$

y si de los trabajos elementales pasamos a los totales, resulta

$$TR = \int_D \Sigma\, dTF = \Sigma \int_D dTF = \Sigma TF\,.$$

2.ª *Si el desplazamiento elemental*, de, *es resultante de otros desplazamientos componentes, el trabajo elemental de la fuerza, en el recorrido* de, *es la suma algébrica de los trabajos desarrollados por la misma fuerza en los desplazamientos sucesivos componentes del* de. En efecto, de la equipolencia $[de] \equiv [de'] + [de''] + \ldots$ se deduce que

$$de \,.\, \cos \overline{F\, de} = de' \,.\, \cos \overline{F\, de'} + de'' \cos \overline{F\, de''} + \ldots$$

y $dTF = F\, de \cos \overline{F\, de} = F\, de' \cos \overline{F\, de'} + F\, de'' \, \overline{F\, de''} + \ldots$.

3.ª *Cuando el móvil está dotado de movimiento de rotación alrededor de un eje* Δ, *el trabajo elemental de la fuerza es igual al momento de la misma, respecto a dicho eje, multiplicado por el desplazamiento angular*

del móvil. En efecto, poniendo el trabajo en función de la componente tangencial de la fuerza, resulta

$$dTF = F_t \,.\, de = F_t \,.\, \rho \,.\, d\varphi = M_\Delta\,[F] \times d\varphi\,.$$

382. Expresión del trabajo en función de las componentes coordenadas de la fuerza.—La aplicación simultánea de las propiedades 1.ª y 2.ª a la expresión del trabajo elemental de una fuerza $[F] \equiv [X] + [Y] + [Z]$, cuyo punto de aplicación recorre el espacio $[de] \equiv [dx] + [dy] + [dz]$, conduce a las fórmulas

$$d\,TF = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \text{ y } TF = \int_D^{\cdot} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

que expresan el trabajo elemental y el total de la fuerza F en función de sus componentes coordenadas y son de gran aplicación en todo el curso de Mecánica.

383. Cálculo del trabajo desarrollado por una fuerza.—Consideraremos sucesivamente los casos siguientes:

1.° *Fuerza constante en magnitud y dirección.*—La expresión del trabajo es

$$TF = \int_D^{\cdot} F \,.\, de \,.\, \cos \overline{F\,de} = F \int_D^{\cdot} de \,.\, \cos \overline{F\,de}\,;$$

es decir, que el trabajo desarrollado se obtiene multiplicando el valor constante de la fuerza por la proyección del camino recorrido sobre su misma dirección.

2.° *Fuerza tangencial constante.*—Resulta $TF = F_t \int_D^{\cdot} de = F_t\,(e - e_o)$ o sea el producto de la componente tangencial constante multiplicada por el camino recorrido. Como caso particular de éste, se presenta el trabajo desarrollado por una fuerza constante en recorrido rectilíneo, que es también $TF = F\,(e - e_o)$.

3.° *Fuerza de momento constante con relación al eje, en los movimientos de rotación.*—Se obtiene

$$TF = M_\Delta\,[F] \int_D d\,\varphi = M_\Delta\,[F] \times (\varphi - \varphi_o)\,,$$

o sea el momento constante multiplicado por el desplazamiento angular finito del móvil en el intervalo de tiempo $\Delta\,t = t - t_o$.

4.° *Fuerza función de las coordenadas del móvil en un instante cualquiera.*—Suponiendo conocidas las ecuaciones de la trayectoria, se podrán expresar las componentes coordenadas de la fuerza en función de una de las coordenadas del móvil, reduciéndose la expresión del trabajo a la forma $TF = \int_D \Psi\,(x)\,dx$, que se integrará entre los límites x_o y x, correspondientes a las posiciones inicial y final del móvil en el tiempo considerado.

5.° *Fuerza función de las coordenadas del móvil, velocidad del mismo y del tiempo.*—Es el caso más complicado que puede ocurrir y para el cálculo del trabajo son necesarias las ecuaciones de los movimientos coordenados del móvil **(196)**

$$x = f_1\,(t)\,,\quad y = f_2\,(t)\,,\quad z = f_3\,(t)\,;$$

con estas ecuaciones se pueden eliminar, de la expresión del trabajo, las coordenadas y velocidad del móvil, reduciéndola a la forma $TF = \int_D \Psi\,(t)\,.\,d\,t$ que se integrará entre los límites t_o y t, correspondientes al principio y al final del recorrido efectuado.

384. Cálculo de la potencia media de una fuerza.—Si en cada uno de los casos anteriores se divide el trabajo desarrollado por el tiempo $t - t_o$, se obtendrá la expresión de la potencia media de la fuerza considerada.

Cuando el trabajo se expresa en función del tiempo, como ocurre en el caso 5.° del número anterior, se obtiene la potencia en un instante cualquiera por la fórmula $P = \frac{dTF}{dt} = \Psi'(t)$, sustituyendo en vez de t el valor que se desee.

Si la función $\Psi'(t)$ fuera constante, lo será la potencia de la fuerza y se obtiene esta potencia constante dividiendo el trabajo desarrollado, en un trozo cualquiera del recorrido, por el tiempo empleado en recorrerlo. Inversamente, cuando la potencia sea constante y fuera conocida, basta multiplicarla por el tiempo que dure la acción de la fuerza, para obtener el trabajo desarrollado.

También pueden utilizarse para el cálculo de la potencia las fórmulas

$$P = \frac{dTF}{dt} = F_t \cdot \frac{de}{dt} = F_t \cdot v ,$$

$$P = \frac{dTF}{dt} = M_\Delta [F] \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega \cdot M_\Delta [F] ,$$

que tienen particular aplicación cuando la fuerza es tangencial la primera y en los movimientos de rotación la segunda.

385. Diagramas indicadores del trabajo y potencia de las fuerzas.—Imaginemos que, por un procedimiento cualquiera, podamos dotar al mecanismo que pone en acción una fuerza, de un órgano especial que señale con la punta de un lápiz o estilete una ordenada proporcional al valor de la fuerza (*) en un instante cualquiera del funcionamiento y que por otro órgano se le comunique al papel, donde

(*) Cuando la fuerza no tenga la dirección del camino recorrido será preciso que las ordenadas sean proporcionales a la componente tangencial de la fuerza.

está apoyado el estilete, un movimiento de traslación, en el sentido de las abscisas, proporcional al camino que recorre el punto de aplicación de la fuerza.

Supongamos ahora que sean m y m' (fig. 259) las dos posiciones del estilete en los intantes t y $t' = t + dt$; el trabajo elemental $dTF = F_t \,.\, de$ será proporcional al área $M\, m\, m'\, M$ y la cuadratura de la comprendida entre la curva señalada por el lápiz, el eje OX y las dos ordenadas extremas, nos dará el valor del trabajo total desarrollado por la fuerza durante el funcionamiento del mecanismo. El examen de la curva trazada resulta interesante para estudiar las oscilaciones que experimenta la fuerza; trazando la ordenada media $M_1\, m_1$ del diagrama se obtiene la *fuerza media* F_m, o sea *la fuerza constante que podría desarrollar el mismo trabajo en el mismo recorrido.*

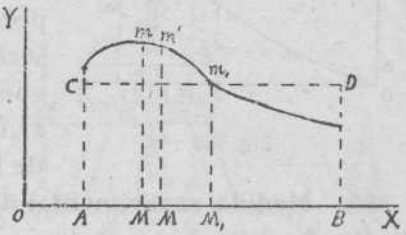


Fig. 259

Para el cálculo de la potencia pueden utilizarse los diagramas del trabajo dividiendo los resultados obtenidos por el tiempo que haya durado el funcionamiento; pero pueden obtenerse otros diagramas de potencias, deduciéndolos del de trabajos ya construidos, tomando las abscisas proporcionales a los tiempos y las ordenadas proporcionales a las áreas indicadoras del trabajo desarrollado; de este modo se obtiene una curva $o\, a$ (fig. 260) tal que la tangente trigonométrica del ángulo α, correspondiente a un instante t, será

$$t_g\, \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dTF}{dt} = P,$$

de modo que pasando de la curva $o\, a$ a su derivada $o'\, a'$,

por los procedimientos estudiados en la derivación gráfica, tendremos, en las ordenadas de esta última, la potencia correspondiente a un instante cualquiera. La ordenada media de $o'a'$ expresará el valor de la potencia media de la fuerza en el recorrido total.

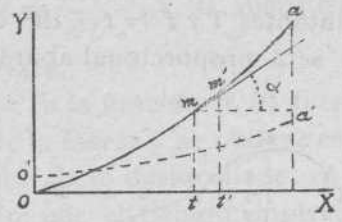


Fig. 260

Cuando el trabajo sea proporcional al tiempo la línea oa será una recta y su derivada se convierte en una paralela al eje OX, que indica la constancia de la potencia.

386. Medida experimental del trabajo y de la potencia de una fuerza.—Los aparatos que se emplean en la práctica para la evaluación de trabajos y potencias de las fuerzas, reciben impropiamente el mismo nombre de *dinamómetros,* que hemos visto se aplica a los aparatos destinados a medir las fuerzas.

Hay una gran variedad de modelos de aparatos destinados a medir el trabajo y la potencia de las fuerzas: en unos se intercalan o enlazan los órganos del aparato de medida con los del mecanismo principal movido por la fuerza, cuyo trabajo se quiere evaluar, sin interrumpir el funcionamiento de dicho mecanismo; en otros se dispone el aparato de medida de manera que absorba el trabajo desarrollado por la fuerza, interrumpiendo por consiguiente el efecto útil que aquella proporciona.

Como ejemplo de la segunda especie describiremos el freno dinamométrico *de Soames,* perfeccionamiento del de Prony, y como ejemplo de la primera clase el pandinamómetro *de Hirn.*

Para justificar el funcionamiento de estos aparatos tendremos que referirnos a ciertas propiedades que más adelante se demuestran o dan a conocer; pero la conveniencia

de dejar terminado este asunto, en este lugar, para evitar digresiones posteriores, nos hace prescindir de rigorismos metódicos en bien de la claridad en la exposición del curso.

387. Freno dinamométrico de Prony, tipo Soames.— Consta el aparato que nos ocupa de una plataforma metálica *A* (fig. 261), sostenida por cuatro pies de madera, que se enlazan por pequeñas cadenas para limitar su inclinación; en el centro de la plataforma *A* se eleva un cilindro *H*, que sirve de guía vertical a un tornillo *B* cuya tuerca está en el centro de un volante de maniobra *C*. Termina el tornillo por su parte inferior en una pieza *D*, en forma de U invertida

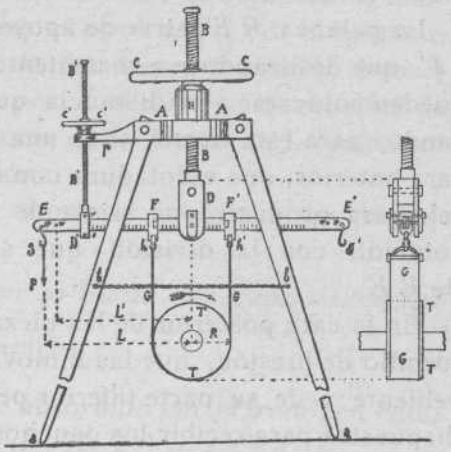


Fig. 261

cuyas ramas sostienen al eje de una palanca *E E'*, alrededor del cual puede ésta girar en la misma forma que lo hacen los brazos de una balanza ordinaria.

La plataforma *A* presenta en uno de sus lados el apéndice *p*, en cuyo extremo hay un taladro que sirve de paso y guía a otro tornillo *B'*, análogo al *B*, pero de menor diámetro, manejado por el volante *C'* y cuya misión es sostener en su parte inferior una pieza *D'*, a través de la cual pasa con alguna holgura el brazo *E* de la palanca *E E'*; la abertura de *D'*, por donde pasa *E*, tiene dos topes *r* y *s*, que limitan las oscilaciones de la referida palanca.

Cerca de los extremos de la misma hay dos taladros, que se utilizan para suspender de ellos los dos ganchos *g*

y g', idénticos en su forma y en su peso; en la figura se han supuesto colocados los ganchos g y g' en los taladros extremos marcados con la indicación *H-P* (caballos de vapor); pero pueden suspenderse también de los taladros inmediatos, señalados con la indicación *W* (vatios), según que nos propongamos determinar la potencia del motor en una u otra de las unidades indicadas.

La palanca $E\,E'$ sirve de apoyo a dos piezas móviles F y F', que deslizándose a rozamiento suave sobre la misma, pueden colocarse a la distancia que convenga del eje, llevando, para este efecto, cada una de dichas piezas en su cara anterior, una escotadura con el borde cortado en bisel, para producir una arista de referencia, que se hará coincidir con la división que se desee en los brazos de $E\,E'$.

En la cara posterior de las piezas F y F' llevan éstas un tornillo de presión, que las inmoviliza en la posición conveniente y de su parte inferior penden las anillas h y h', dispuestas para recibir los ganchos terminales de la faja-freno $G\,G$, formada por una banda de cáñamo de 10 centímetros de anchura y 1,20 metros de longitud; la flexibilidad de esta faja permite su adaptación fácil sobre la llanta de volantes, poleas y ejes de muy variados diámetros.

Conseguida la velocidad normal de la polea T, bajo la acción del freno, se supenden pesos crecientes del gancho g, hasta conseguir la horizontalidad de la palanca $E\,E'$ y su paso libre por la abrazadera D', sin tocar a ninguno de los topes r y s. Cuando el contador de revoluciones acuse mayor velocidad angular que la normal, se aumenta discrecionalmente el peso P, suspendido del gancho g, y con el manejo de los volantes se restablecen la horizontalidad y equilibrio de la palanca $E\,E'$; lo contrario se hará cuando el contador de revoluciones indique menores velocidades que las normales, hasta conseguir las repetidas circunstan-

cias de la palanca $E\,E'$ con la velocidad de marcha normal en la polea sometida al ensayo.

Supongamos sea P el peso, en kilogramos, suspendido de g; N el número de revoluciones por minuto de la polea en el momento de la experiencia; L la distancia, en metros, del centro de la palanca $E\,E'$ al taladro H-P donde actúa el peso P; R el radio de la polea T; ΣF la suma de las fuerzas resistentes, tangenciales a la polea, que por el contacto y presión entre la llanta y la faja-freno desarrolla el rozamiento, y representemos por X el número de caballos de vapor que desarrolla el motor en la llanta de la polea sometida a la experimentación.

Entre estas cantidades se pueden establecer las dos relaciones siguientes:

T_m = *trabajo motor en la llanta, en cada vuelta del eje* $= \dfrac{X \,.\, 75 \,.\, 60}{N}$ *kilográmetros.*

T_r = *trabajo resistente absorbido por el freno, en cada vuelta del mismo eje* $= \Sigma\,(F \,.\, R \,.\, 2\,\pi) = 2\,\pi\,\Sigma\,F \,.\, R$.

Pero en el movimiento periódicamente uniforme de una máquina, los valores de T_m y T_r, correspondientes al intervalo de tiempo en que tienen lugar los periodos, o sea en cada vuelta del eje, son siempre iguales,

$$\frac{X \,.\, 75 \,.\, 60}{N} = 2\,\pi\,\Sigma\,F \,.\, R \quad \text{o} \quad X = \frac{2\,\pi\,N\,\Sigma\,F \,.\, R}{75 \times 60},$$

y como el equilibrio estático de la palanca $E\,E'$ nos dice que $\Sigma\,F\,R = P \,.\, L$, resulta en definitiva

$$X = \frac{2\,\pi\,L}{75 \,.\, 60} \times (P \,.\, N) = K \times (P \,.\, N),$$

representando por K el coeficiente $\dfrac{2\,\pi\,L}{75 \,.\, 60}$. (*)

(*) La longitud de L se elige de modo que resulte para k un valor fácilmente manejable en los cálculos.

388. Pandinamómetro de Hirn.—Supongamos un árbol de rotación con una polea fija en cada extremo (fig. 262), destinadas a recibir una de ellas el esfuerzo motor y la otra a transmitirlo, y se desea averiguar, sin interrumpir el funcionamiento del mecanismo, el trabajo desarrollado en cada vuelta del eje.

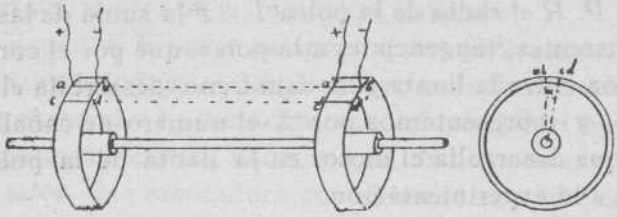


Fig. 262

El fundamento del aparato consiste en determinar el ángulo de torsión del eje bajo la acción de las fuerzas opuestas que obran en las dos poleas; la experiencia demuestra que dicho ángulo de torsión es proporcional al momento, respecto al eje, de las fuerzas que lo producen, y por observaciones preliminares puede suponerse formada una tabla de momentos de fuerzas, aplicadas al eje, capaces de producir ángulos de torsión que varíen por equidiferencias tan pequeñas como se quiera, hasta el límite que se crea oportuno; con esto, dada la torsión que el funcionamiento del mecanismo produce en el eje, sabremos inmediatamente el momento de la fuerza tangencial que obra sobre las poleas, y, por tanto, el trabajo $T = F \,.\, R \times 2\,\pi$ (**383-3.º**) que transmite el árbol en cada vuelta.

Para medir el ángulo de torsión durante el funcionamiento, el procedimiento más cómodo es hacer pasar una corriente eléctrica por dos circuitos que se cierran al pasar por una cierta posición las generatrices $a\,b$ y $a'\,b'$ de las poleas, que en reposo están en prolongación y en marcha desplazadas una cantidad proporcional al ángulo α de tor-

sión del eje; resulta de esto, que si el paso de la corriente por el primer circuito, traza un punto sobre un papel que esté dotado de movimiento uniforme, y lo mismo hace el cierre del segundo circuito, se podrá medir por el retraso de la segunda señal sobre la primera, el ángulo de torsión, y de éste, por la tabla formada, el valor de $F \,.\, R$, o bien el de $T = F \,.\, R \,.\, 2\pi$.

Llamemos $\frac{1}{\epsilon}$ la relación existente entre un valor cualquiera del ángulo de torsión del eje y el momento $F \,.\, R$ que lo produce, $\frac{1}{\epsilon} = \frac{\alpha}{F\,R}$ o $F\,R = \alpha \,.\, \epsilon$, el valor del trabajo en cada vuelta del eje será $T = \alpha \,.\, 2\pi\epsilon$ y llamando X los caballos de vapor que corresponden al trabajo expresado, y N el número de revoluciones por minuto del árbol, se verificará

$$\frac{X \,.\, 75 \,.\, 60}{N} = \alpha\, 2\pi\epsilon \quad \text{y} \quad X = \frac{2\pi\epsilon}{75 \,.\, 60} \,.\, \alpha N = k \,.\, \alpha N.$$

Conocido en un eje el coeficiente k (como término medio de una serie de experiencias para mayor exactitud), basta observar en un instante cualquiera el valor del ángulo de torsión α y el número de revoluciones N, para conocer la potencia de la máquina en la llanta de las poleas sometidas al ensayo.

389. Otros aparatos dinamométricos. — Aunque no nos detengamos a hacer la descripción de otros aparatos dinamométricos, sí debemos indicar que el procedimiento más cómodo en la actualidad para determinar la potencia de una máquina consiste en el empleo de los frenos eléctricos, cuyo estudio se hace en el curso de Electrotecnia; pero el excesivo coste que tienen estos aparatos hace que no siempre se pueda recurrir a ellos, y no excluyen, por consiguiente, el frecuente uso de los demás sistemas. También

merecen especial mención los aparatos *indicadores* que en el curso de Motores tienen lugar más apropiado para su estudio.

III

FUERZAS POTENCIALES

390. Definiciones. — Cuando la ley generadora de la fuerza que obra sobre un punto móvil es tal que las componentes coordenadas de la fuerza se obtienen, en cada posición del móvil, derivando respecto a x, y y z, una función determinada y uniforme, $U = \varphi(x\ y\ z)$, de las coordenadas del móvil, se dice que dicha fuerza es *potencial* y la función $U = \varphi(x\ y\ z)$, de donde *derivan* las componentes

$$X = \frac{d\,U}{d\,x},\quad Y = \frac{d\,U}{d\,y},\quad Z = \frac{d\,U}{d\,z},$$

se llama *función de fuerzas* correspondiente al caso que se considere.

Como los valores de una fuerza potencial, que deriva de una cierta función U, no se alteran por la variación del término independiente que ésta contenga, puede suponerse siempre que toda función de fuerzas vaya acompañada de una constante indeterminada C, dando a dichas funciones la forma $U = \varphi(x\ y\ z) + C$.

La función $V = -U = -\varphi(x\ y\ z) + C'$, que se obtiene cambiando el signo de la función de fuerzas, se llama *función potencial* de la expresada fuerza y cuando se disponga de esta última función, se obtendrán las componentes coordenadas de la fuerza por derivación y cambio de signo, como expresan las fórmulas

$$X = -\frac{dV}{dx}, \quad Y = -\frac{dV}{dy}, \quad Z = -\frac{dV}{dz}.$$

El valor que toma la función V en una posición cualquiera del móvil, se llama *potencial* de la fuerza en dicho punto y la diferencia de los valores V_1 y V_2, que corresponden al potencial en dos posiciones M_1 y M_2 del móvil, se llama *diferencia de potencial* entre dichos dos puntos.

Debe observarse que el potencial de una fuerza en un punto es un elemento indeterminado, por la presencia de la constante C', que acompaña a la función potencial, y que no ocurre lo mismo respecto a la diferencia de potencial $V_1 - V_2$, por desaparecer en esta última expresión dicha constante indeterminada.

También se ve que si por algún convenio establecido, o por cualquier otra circunstancia, se le asigna valor determinado al potencial de la fuerza en un punto, quedará conocido el valor de la constante C' y se harán determinados los valores de dicha función en todas las posiciones del móvil.

391. Reconocimiento de la potencialidad de una fuerza.—Para reconocer fácilmente si una fuerza es potencial, demostraremos el siguiente teorema: *la condición necesaria y suficiente para que una fuerza sea potencial, es que la expresión del trabajo elemental de dicha fuerza, sea una diferencial exacta* (*). En efecto, si la fuerza es potencial, se tiene **(382)**

$$dTF = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz =$$

$$= \frac{dU}{dx}\,dx + \frac{dU}{dy}\,dy + \frac{dU}{dz}\,dz = dU$$

y la condición expresada se ve que es necesaria.

(*) Se supone implícitamente que dicha diferencial exacta lo es de una función determinada y uniforme de las coordenadas del móvil.

Recíprocamente, si $d\,TF = d\,U$, siendo $U = \varphi(x\,y\,z) + C$, se podrá establecer

$$d\,TF = X\,d\,x + Y\,d\,y + Z\,d\,z\,,$$

$$d\,U = \frac{d\,U}{d\,x}\,d\,x + \frac{d\,U}{d\,y}\,d\,y + \frac{d\,U}{d\,z}\,d\,z\,,$$

que en virtud de la hipótesis nos dan

$$X = \frac{d\,U}{d\,x}\,,\quad Y = \frac{d\,U}{d\,y}\,,\quad Z = \frac{d\,U}{d\,z}\,,$$

como queríamos demostrar.

De este teorema se deduce que la condición de potencialidad, por referirse a la expresión del trabajo $d\,TF = F\,.\,de\,.\cos\overline{F\,de}$, es independiente del sistema de ejes coordenados que se elija.

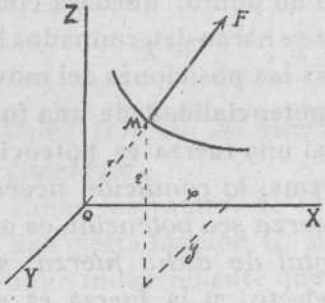


Fig. 263

392. Potencialidad de las fuerzas centrales.—Las *fuerzas centrales*, tal como las hemos definido, *son todas potenciales*. En efecto, sea la fuerza $F = \varphi'(r)$, representada en la figura 263, y supongamos el origen de coordenadas en el *centro* a donde se dirige la línea de acción de F en todas las posiciones del móvil; la expresión del trabajo elemental de F es

$$d\,TF = X\,d\,x + Y\,d\,y + Z\,d\,z =$$

$$= F\cos\overline{F\,X}\,d\,x + F\cos\overline{F\,Y}\,d\,y + F\cos\overline{F\,Z}\,d\,z =$$

$$= \varphi'(r)\left(\frac{x}{r}\,d\,x + \frac{y}{r}\,d\,y + \frac{z}{r}\,d\,z\right);$$

pero de la ecuación

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ se deduce $r\,dr = x\,dx + y\,dy + z\,dz$

y sustituyendo resulta

$$dTF = \varphi'(r)\,dr = dU \quad \text{y} \quad U = \int \varphi'(r)\,dr = \varphi(r) + C.$$

393. Potencialidad de la fuerza resultante de otras varias potenciales.—Cuando una fuerza R es resultante de otras y las componentes son potenciales, se verifica la misma condición en R, *siendo la función de fuerzas de esta última, la suma algébrica de las funciones de fuerzas de las componentes.*

En efecto, si $[R] \equiv [F_1] + [F_2] + \ldots.$ se verificará

$$X = \Sigma X_n = \frac{dU_1}{dx} + \frac{dU_2}{dx} + \ldots. = \frac{d(U_1 + U_2 + \ldots.)}{dx} = \frac{dU}{dx}$$

y lo mismo $Y = \dfrac{dU}{dy}$ y $Z = \dfrac{dU}{dz}$, siendo

$$U = U_1 + U_2 + \ldots. + C.$$

La función potencial de la resultante R será

$$V = -U = -U_1 - U_2 \ldots. + C' = V_1 + V_2 + \ldots. + C';$$

es decir, *la suma de las funciones potenciales de las fuerzas componentes.*

Conviene tener presente que en realidad, tanto la función U como la V, pueden diferir de las sumas ΣU_n y ΣV_n en una cantidad constante cualquiera, y que únicamente cuando se haga la hipótesis de ser nulas las constantes que acompañan dichas funciones, se verificarán exactamente las igualdades

$$U = \Sigma U_n \quad \text{y} \quad V = \Sigma V_n.$$

394. Cálculo del trabajo desarrollado por las fuerzas potenciales.—El trabajo desarrollado por una fuerza po-

tencial, cuando su punto de aplicación se traslada de M_1 a M_2, está expresado por la fórmula

$$\left[TF\right]_{M_1}^{M_2} = \int_{M_1}^{M_2} d\,U = U_2 - U_1 = \varphi\,(x_2\,y_2\,z_2) - \varphi\,(x_1\,y_1\,z_1)$$

de la que se deducen las consecuencias siguientes:

1.ª El trabajo desarrollado por una fuerza potencial, para llevar su punto de aplicación de una posición M_1 a otra M_2, *es independiente del camino seguido por el móvil para ir del primero al segundo de dichos puntos.*

2.ª *El trabajo desarrollado por una fuerza potencial en una trayectoria cerrada es nulo.*

3.ª Cuando la función U tenga el mismo valor en los puntos M_1 y M_2, también *es nulo el trabajo desarrollado por la fuerza al pasar de* M_1 *a* M_2.

El trabajo desarrollado por las fuerzas potenciales se puede expresar en función del potencial, partiendo de la expresión $dTF = -\,dV$, en la forma

$$\left[TF\right]_{M_1}^{M_2} = \int_{M_1}^{M_2} -\,dV = -\,(V_2 - V_1) = V_1 - V_2$$

que nos dice que *la diferencia de potencial entre dos puntos* M_1 *y* M_2 *equivale al trabajo que tiene que desarrollar la fuerza para pasar su punto de aplicación del primero al segundo de dichos puntos.* Si suponemos que en un punto de la trayectoria del móvil, el M_2 por ejemplo, el potencial V_2 es nulo, resulta $V_1 = (TF)_{M_1}^{M_2}$ y puede decirse que *el potencial de la fuerza en un punto está expresado por el trabajo que es preciso desarrollar para llevar al móvil, desde el punto considerado, hasta la posición en que se verifique que el potencial es nulo.*

395. Medida del potencial.—La equivalencia mecánica

que acabamos de establecer, entre los trabajos desarrollados por las fuerzas y los valores de su potencial, nos indica que no es necesario adoptar ninguna unidad especial, para medir los potenciales, por poderse utilizar las mismas establecidas para el trabajo.

No obstante esto, en Electrotecnia se emplea el *voltio* que es la diferencia de potencial entre dos puntos tales que el trabajo necesario para llevar a la unidad práctica de masa eléctrica *(culombio)*, de uno a otro de dichos puntos, resulte igual a *un julio.*

CAPITULO SEGUNDO

Teoría de los campos de fuerzas

I

ELEMENTOS QUE CONSTITUYEN LAS PRINCIPALES CIRCUNSTANCIAS DE UN CAMPO DE FUERZAS

396. Definiciones.—Toda región del espacio, limitada o indefinida, que tenga la propiedad de que al colocar en una posición cualquiera de la misma un punto material, se encuentre éste solicitado por una fuerza de valor modular, dirección y sentido determinados, constituye un *campo de fuerzas*. Implícitamente se supone que los elementos determinativos de la fuerza que actúa sobre el móvil, en una posición cualquiera del campo, son funciones uniformes de las coordenadas de dicha posición.

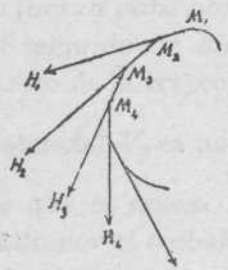


Fig. 264

Se llama *intensidad* del campo en cada punto la acción que ejerce sobre la unidad de masa colocada en dicho punto; representaremos este elemento por $[H]$ y por X, Y y Z, sus proyecciones sobre los ejes coordenados.

Si se traza el vector $[H_1]$ que corresponde a un punto M_1 del campo (fig. 264), el $[H_2]$ correspondiente a la posición M_2, infinitamente próxi-

ma a M_1 en la dirección de $[H_1]$, y se repite la operación en la misma forma, para trazar los $[H_3]$, $[H_4]$, etc., se formará una curva $M_1 M_2 M_3 \ldots$, envolvente de los vectores trazados, que se llama *línea de fuerza* correspondiente a uno cualquiera de los puntos que contiene.

Las líneas de fuerza de un campo no pueden cortarse, pues lo contrario indicaría dos direcciones distintas para la intensidad en el punto de intersección, de modo que por cada punto del campo pasará una sola línea de fuerza; a pesar de esto veremos que, por excepción, pueden existir en los campos de fuerzas ciertos puntos singulares donde concurran infinidad de líneas de fuerza.

Las ecuaciones diferenciales de las líneas de fuerza son

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

deducidas de las relaciones

$$dx = de \cdot \cos\alpha = de\,\frac{X}{H},\ dy = de\,\frac{Y}{H},\ dz = de\,\frac{Z}{H},$$

que en todos los puntos se verifican.

La tangente a una línea de fuerza en un punto cualquiera, o sea la línea de acción de la intensidad, constituye la *dirección del campo* en el indicado punto.

La función analítica $E = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}$, recibe el nombre de *divergencia* del campo, y el valor que toma cuando se sustituyen en ella las coordenadas de un punto dado, es la divergencia en el punto considerado. Cuando se verifica, en una cierta región del campo, que es nulo el valor de E en todos sus puntos, se dice que dicha región es *solenoidal*.

Si suponemos una superficie S situada en un campo

(figura 265), y se trazan las diversas líneas de fuerza que corresponden a los puntos de su perímetro, se forma una superficie, de forma acanalada, que recibe el nombre de *tubo de fuerza*; la superficie S es la directriz del tubo y cuando es infinitamente pequeña, el tubo correspondiente se dice que es un *tubo elemental* de fuerzas.

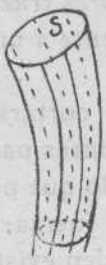


Fig. 265

397. Clasificación de los campos de fuerzas.—Los campos de fuerzas se clasifican de diversas maneras por la naturaleza de las acciones que en ellos se desarrollan. Son campos *potenciales* aquellos en que la intensidad es una fuerza potencial, cuyas componentes derivan de una función de fuerzas $U = \varphi(x\ y\ z) + c$; campos *centrales* aquellos en que la intensidad está dirigida constantemente hacia un *centro*, siendo su valor modular $H = f(r)$; estos campos se subdividen en *atractivos* o *repulsivos*, según que el sentido de H sea hacia el centro o al contrario, y tanto en un caso como en otro es indudable que los campos centrales serán todos potenciales **(392)**.

Cuando la intensidad tenga la misma dirección en todos los puntos del campo, se dice que éste es *paralelo* y si además el valor de H es constante, el campo se llama *uniforme*. Los campos en que las líneas de fuerza sean circunferencias reciben el nombre de *rotatorios*.

Por el origen que se atribuye a las fuerzas que se desarrollan en un campo, se da a éstos los nombres de *gravitatorios, eléctricos* y *magnéticos*, según que dichas acciones sean debidas a la presencia de masas ponderables atrayéndose por la ley de la gravitación universal, o a la presencia de las masas imponderables que constituyen los flúidos eléctrico y magnético.

De un modo general se da el nombre de *newtonianos* a todos los campos cuya ley de fuerza está expresada por la

fórmula $F = k \frac{m\,m'}{r^2}$, expresión de la ley de la gravitación universal establecida por *Newton*.

398. Flujos de fuerza en los campos de fuerzas.—Si suponemos en un punto A de un campo de fuerzas un elemento superficial $d\sigma$ (fig. 266) y la intensidad H del campo en dicho punto, se llama *flujo elemental de fuerza a través del elemento de superficie* $d\sigma$, la expresión $d^2 f = H \,.\, d\sigma \,.\, \cos \overline{H\,N}$, siendo N la normal trazada en el punto A al elemento $d\sigma$.

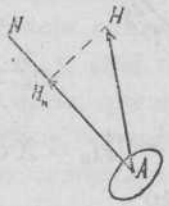


Fig. 266

Los flujos elementales son cantidades algebraicas, cuyo signo se determina por el del coseno del ángulo $\overline{H\,N}$ y para que no exista indeterminación en la afección cualitativa de dichos flujos, se supone siempre que la normal se traza hacia la parte convexa de las superficies, cuando éstas sean abiertas, y hacia el exterior en todos los puntos de las superficies cerradas. Por la posición especial que tiene la intensidad en cada caso, se llaman *salientes* los flujos positivos y *entrantes* los negativos.

La integral definida $f = \int\int_D H \,.\, d\sigma \,.\, \cos \overline{H\,N}$ extendida a todos los puntos de una superficie finita S, trazada en un campo de fuerzas, se llama *flujo total de fuerza a través de dicha superficie.*

Los flujos elementales se anulan cuando se reduce a cero la intensidad, o bien cuando sean perpendiculares H y N. En una superficie finita puede verificarse la anulación del flujo total por la destrucción de los flujos entrantes con los salientes, o por ser nulos los elementales que correspondan a cada punto de la superficie dada: así ocurre en las superficies laterales de los tubos de fuerza, cuyos

flujos elementales y totales serán evidentemente nulos.

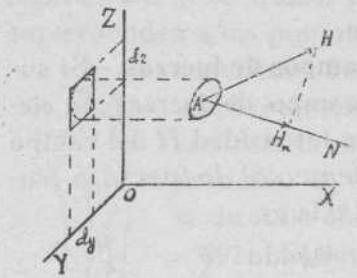


Fig. 267

399. Expresión de los flujos en función de la divergencia del campo. – Consideremos el elemento $d\sigma$ de una superficie cualquiera S situada en un campo de fuerzas; el flujo elemental a través de $d\sigma$ es $d^2f = H d\sigma \cos \overline{HN} = H_n\, d\sigma$; pero (figura 267)

$$H_n = X \cos \overline{XN} + Y \cos \overline{YN} + Z \cos \overline{ZN}$$

luego

$$d^2f = X\,d\sigma \cos \overline{XN} + Y\,d\sigma \cos \overline{YN} + Z\,d\sigma \cos \overline{ZN} =$$

$$= X\,dy\,dz + Y\,dx\,dz + Z\,dx\,dy =$$

$$= \int_D \frac{dX}{dx} dx\,dy\,dz + \int_D \frac{dY}{dy} dx\,dy\,dz + \int_D \frac{dZ}{dz} dx\,dy\,dz,$$

habiendo sustituido en vez de X, Y y Z las expresiones

$$\int_D \frac{dX}{dx}\,dx, \quad \int_D \frac{dY}{dy}\,dy, \quad \int_D \frac{dZ}{dz}\,dz,$$

que si bien de un modo general no puede asegurarse sean iguales, lo son cuando las integraciones se efectúan en concepto definido, como se ha indicado.

Integrando la última ecuación resulta

$$f = \int\int\int_D \frac{dX}{dx} dx\,dy\,dz + \int\int\int_D \frac{dY}{dy} dx\,dy\,dz +$$

$$+ \int\int\int_D \frac{dZ}{dz} dx\,dy\,dz = \int\int\int_D E\,dx\,dy\,dz,$$

que es la fórmula que nos proponíamos encontrar.

Cuando se trate de superficies cerradas, el producto $dx\,dy\,dz$ representa el elemento $d\,Q$ del volumen encerrado dentro de la superficie dada y la fórmula se convierte en

$$f = \int\int_{D}\int E\,d\,Q\,.$$

Cuando la divergencia E sea constante en todos los puntos del interior de S, se expresará el flujo total por la fórmula $f = E\,.\,Q$, producto de la divergencia constante por el volumen encerrado en el interior de S, y si el valor constante de E fuera *cero*, sería $f = o$, es decir, que *si en todos los puntos del interior de una superficie cerrada S la divergencia es nula, el flujo total de fuerza emitido por el campo a través de dicha superficie es nulo,* o de otro modo: *el flujo de fuerza a través de la superficie que limita una región solenoidal de un campo de fuerzas es nulo.*

400. Conservación del flujo en los tubos de fuerza, en los campos de divergencia nula.—En los campos de divergencia nula se verifica la notable propiedad de ser iguales los flujos de fuerza correspondientes a todas las secciones transversales de los tubos de fuerza, cuya propiedad se expresa diciendo que *el flujo se conserva a lo largo de los tubos de fuerza.*

Fig. 268

Supongamos el tubo de fuerza de la figura 268 y consideremos la superficie cerrada formada por las paredes del mismo y las dos secciones S y S' trazadas en dirección cualquiera por los puntos A y B del campo; por ser la divergencia nula será nulo el flujo total emitido a través de dicha superficie cerrada y como el correspondiente a las paredes laterales también es *cero,*

tiene que serlo la suma $f + f' = o$ a través de las secciones S y S', y siendo f y f' iguales y de signo contrario, se verifica lo que nos proponíamos demostrar, puesto que la variación de signo sólo indica que el flujo de S es saliente y el de S' entrante, respecto a la superficie cerrada que hemos considerado.

401. Otros elementos de los campos potenciales.—En los campos potenciales intervienen, además de los elementos y propiedades anteriores, comunes a todos los campos, los siguientes:

Potencial del campo en un punto es el valor de la función potencial $V = -\varphi(x\,y\,z) + c'$, que a su intensidad corresponde, y *diferencia de potencial* entre dos puntos M_1 y M_2 la diferencia, $V_1 - V_2$, de los potenciales en el primero y en el segundo de dichos puntos, verificándose que

$$V_1 - V_2 = [T H]_{M_1}^{M_2},$$

o sea que *la diferencia de potencial entre dos puntos es equivalente al trabajo que tienen que desarrollar las fuerzas del campo para transportar la unidad de masa desde* M_1 *a* M_2, y si el punto M_2 fuera de potencial nulo, queda definido el potencial V_1 en un punto, como el *trabajo que tienen que desarrollar las fuerzas del campo para transportar la unidad de masa desde* M_1 *hasta el punto en que el potencial sea nulo.*

Conviene fijarse en que si en vez de ser la unidad de masa la que se supone desplazándose en el campo potencial, es una masa cualquiera m, la fuerza correspondiente será también potencial y su función de fuerzas y función potencial se obtendrán multiplicando a U y a V por el factor constante m.

Las superficies equipotenciales de un campo potencial

están constituidas por el lugar geométrico de los puntos en que el potencial tiene un valor determinado. La ecuación general de estas superficies será $V = constante$, o $\varphi(x\,y\,z) = c$, y para obtener la que pasa por un punto determinado del campo, bastará sustituir la indeterminada c por el valor $c = \varphi(x_1\,y_1\,z_1)$, resultando $\varphi(x\,y\,z) = \varphi(x_1\,y_1\,z_1)$ para la ecuación de la superficie equipotencial que pasa por el punto $M_1\,(x_1\,y_1\,z_1)$.

La forma de las superficies equipotenciales de un campo es independiente de que se considere el potencial de su intensidad, o el de la fuerza que obra sobre la masa m, pues de la ecuación $m \,.\, V = constante$, se deducirá $V = constante$, que es la del caso $m = 1$.

Pendiente potencial entre dos puntos es la relación $\frac{\Delta V}{\Delta S}$ que existe entre su diferencia de potencial $\Delta V = V_1 - V_2$ y la distancia ΔS que los separa. Cuando los puntos están infinitamente próximos y situados sobre la normal a la superficie equipotencial correspondiente al primero, la pendiente $\frac{\Delta V}{\Delta S}$ se convierte en $\frac{d V}{d n}$ y se llama *graduante* (*) del potencial en dicho primer punto.

402. Propiedades especiales de los campos potenciales.

1.ª *La intensidad en un punto cualquiera es normal a la superficie equipotencial que pasa por dicho punto.*—Los cosenos directores de la normal a la superficie $\varphi(x\,y\,z) = c$, son

$$\cos\alpha = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}} = \frac{X}{H},$$

(*) Hay quien le llama *gradiente*.

$$\cos \beta = \frac{Y}{H} \quad \text{y} \quad \cos \gamma = \frac{Z}{H},$$

o sea los mismos que los de la intensidad H.

2.ª *La proyección de la intensidad en un punto, sobre una recta que pase por dicho punto y otro cualquiera del campo, es igual y de signo contrario al límite de la pendiente potencial entre los dos puntos, cuando el segundo se aproxima indefinidamente al primero.*—Tomando la recta dada por eje OX y el primer punto por origen de coordenadas tenemos

$$\lim \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dV}{dx} = -X = -H \cos \overline{HX}.$$

De un modo general se verificará (fig. 269)

$$MP = H \cos \overline{HS} = -\frac{dV}{dS},$$

siendo dV la diferencia de potencial existente entre la superficie equipotencial que pasa por M y la del punto M', infinitamente próximo al anterior, y dS el segmento de la recta MS comprendido entre dichas superficies.

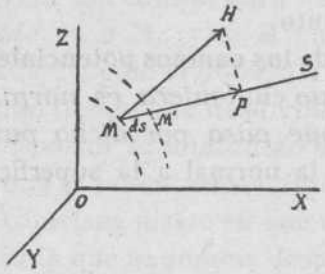


Fig. 269

3.ª *El graduante en un punto expresa, con signo contrario, el valor de la intensidad en el mismo punto.*—Es una consecuencia de la propiedad anterior que se obtiene suponiendo MS normal a la superficie equipotencial del punto M; ella nos dice que $H = -\frac{dV}{dn}$ y expresa, además, que la intensidad está siempre dirigida hacia el lado en que el potencial es decreciente.

4.ª *Las intensidades en los distintos puntos de una superficie equipotencial son inversamente proporcionales a la separación normal que en cada punto existe entre dicha superficie y la infinitamente próxima.*—Puesto que siendo $d\,V = constante$ entre dos puntos cualesquiera de dichas superficies, se verificará $H\,d\,n = H'\,d\,n' = constante$, para todos los puntos de una de ellas.

403. Función laplaciana de un campo potencial.—La expresión de la divergencia toma en el caso de campos potenciales la forma

$$E = \frac{d^2\,U}{d\,x^2} + \frac{d^2\,U}{d\,y^2} + \frac{d^2\,U}{d\,z^2},$$

que se representa por el símbolo $\Delta\,U$ y recibe el nombre de *función laplaciana*, verificándose, por lo ya demostrado **(399** y **400)**, que los flujos totales a través de cualquier superficie cerrada, en cuyo interior se cumpla la condición $\Delta\,U = o$, llamada *ecuación de Laplace*, son nulos, y tendrá lugar la conservación de los flujos en los tubos de fuerza del campo dado.

404. Composición de campos de fuerzas.—Cuando en una misma región del espacio concurren los efectos de dos o más campos de fuerzas, se obtiene un *campo compuesto* cuyos elementos guardarán, indudablemente, estrecha relación con los de los campos *componentes*; las principales de estas relaciones son las siguientes:

1.ª *La intensidad de un campo compuesto es, en cada punto, la suma gráfica de las intensidades en el mismo punto de los campos componentes.*

2.ª *La divergencia de un campo compuesto es la suma algébrica de las divergencias de los campos componentes.*

3.ª *El flujo de fuerza a través de una superficie cualquiera, en un campo compuesto, es igual a la suma al-*

gébrica de los flujos correspondientes a los campos componentes.

4.ª *El campo compuesto, resultante de varios potenciales, es también potencial, verificándose que el potencial del primero es la suma algébrica de los potenciales de los segundos.* La función laplaciana ΔU del campo compuesto será la suma $\Sigma \Delta U_n$ de las laplacianas de los componentes, y si éstos verifican la ecuación de Laplace, el campo compuesto también la verificará.

405. Representaciones gráficas de campos de fuerzas.— Tienen por objeto estas representaciones dibujar, en un plano, ciertas líneas cuyo examen pueda dar indicaciones sobre algunos de los principales elementos del campo que se quiere representar.

No todos los campos se prestan del mismo modo a ser representados gráficamente; cuando las líneas de fuerza son planas, se pueden señalar un cierto número de ellas en un plano, como indica la figura 270 y de este modo se conoce la dirección de la intensidad, en un punto cualquiera del plano, por la tangente trazada en dicho punto a la línea de fuerza que pasa por él; en cuanto al sentido puede expresarse por una flecha colocada en una de las líneas, o en cuantas sea preciso para que no haya dudas sobre esta indicación. La mayor o menor separación de las líneas dibujadas puede utilizarse, según reglas especiales de cada caso, para conocer el valor modular de H.

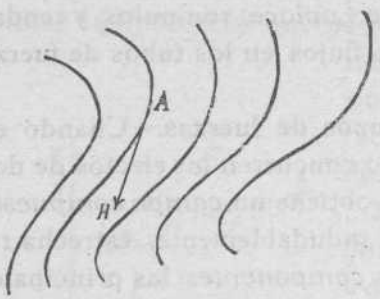


Fig. 270

En los campos potenciales se trazan en el dibujo las intersecciones del plano de la figura con un cierto número

de superficies equipotenciales, dando lugar a *líneas equipotenciales* que formarán un sistema ortogonal con las líneas de fuerza; dichas líneas equipotenciales, convenientemente acotadas, expresarán los datos relativos al potencial, dirección y sentido de la intensidad y, como en las líneas de fuerza, su mayor o menor separación se utiliza para conocer el valor de H en cada punto.

No detallamos más este asunto por tener que volver sobre él cuando lo concretemos en algunos de los ejemplos que después vamos a estudiar.

406. Medida de los campos de fuerzas.—Los campos de fuerzas son magnitudes mecánicas, más o menos complejas, según su naturaleza, que se miden y comparan entre sí, tomando como término de comparación un campo tipo que se llama *campo unidad*; éste suele ser el campo *uniforme* cuya intensidad es igual a *una dina*; con él se comparan directamente los campos paralelos, siendo necesario proceder a la descomposición en campos que cumplan con esta última condición, para establecer la comparación con el campo unidad, de los que no sean paralelos.

II

CAMPOS NEWTONIANOS DE UNO Y DE VARIOS CENTROS AISLADOS

407. Definición.—Si suponemos concentrada en un punto o (fig. 271) una masa activa m, capaz de producir atracciones o repulsiones sobre un punto material, de masa adecuada m', colocado en cualquier punto A de las inmediaciones de o y el valor de la atracción o repulsión que m' experimenta es directamente proporcional a las masas m y m' e inversamente proporcional al cuadrado de la dis-

tancia o $A = r$, se habrá constituido un *campo newtoniano de un centro*, que, como todos los centrales, será potencial.

408. Elementos de estos campos.—La acción atractiva o repulsiva que se ejerce entre las masas m y m' está expresada por la fórmula $F = K\frac{m\,m'}{r^2}$, siendo K la fuerza que produce la unidad de masa, sobre otra unidad de masa, a la unidad de distancia, y si se supone $m' = 1$ resultará la intensidad del campo $H = \frac{K\,m}{r^2}$, de cuya fórmula se deduce que en las superficies esféricas, concéntricas con o, la intensidad tiene el mismo valor en todos sus puntos.

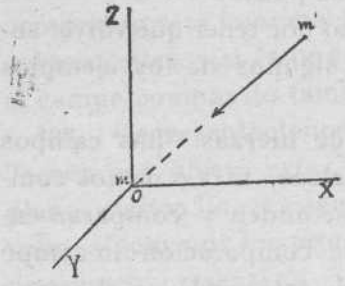


Fig. 271

Las líneas de fuerza son evidentemente rectas concurrentes en el centro del campo, que resulta ser un punto singular donde se hace infinito el valor de H. Los tubos de fuerza, tanto elementales como finitos, son superficies cónicas con el vértice en el centro.

Para determinar la función potencial de estos campos haremos

$$dV = -dTH = -Hdr = -Km\frac{dr}{r^2} \text{ y } V = \frac{Km}{r} + C',$$

y si suponemos que en el infinito, al reducirse a cero la acción mutua de m y m', el potencial es también cero, se deduce que la constante C' de la función potencial es nula y resulta $V = \frac{Km}{r}$, o en función de la intensidad $V = Hr$.

Las superficies equipotenciales, $V = constante$, exigen que r sea constante y son superficies esféricas concéntricas

con el centro del campo. Cuando m' no sea la unidad, el potencial de F es $V m' = K \frac{m\,m'}{r}$; pero debe cuidarse no confundir este potencial con el del campo.

Los campos newtonianos verifican la ecuación de Laplace $\Delta U = o$, como demuestra el siguiente cálculo:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{dX}{dx} = \frac{d\,\frac{Km}{r^2}\cdot\frac{x}{r}}{dx} = K\,m\,\frac{r^2 - 3x^2}{r^5},$$

$$\frac{d^2U}{dy^2} = \frac{dY}{dy} = K\,m\,\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \quad \frac{d^2U}{dz^2} = \frac{dZ}{dz} = K\,m\,\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}.$$

$$\Delta U = \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2} = K\,m\,\frac{3r^2 - 3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = o.$$

Consecuencia de esta propiedad es **(403)** *la conservación de los flujos a lo largo de los tubos de fuerza y la nulidad de los mismos a través de cualquier superficie cerrada que no contenga en su interior al centro,* y se excluye este punto porque, en él, la función laplaciana pierde su continuidad, convirtiéndose en $\Delta U = \frac{o}{o}$.

409. Flujos a través de superficies que contengan al centro.—Supongamos primeramente una superficie equipotencial r = *constante*: tendremos

$$f = \int_D \int H\,d\sigma = H \,.\, S = 4\pi r^2 \,.\, \frac{Km}{r^2} = 4\pi K m,$$

que es independiente del radio y nos dice que *el flujo total a través de una superficie equipotencial cualquiera es constante e igual a* $4\pi k m$.

El flujo por unidad de superficie equipotencial es

$$f_u = \frac{4\pi K m}{4\pi r^2} = \frac{Km}{r^2} = H,$$

es decir, está representado por la intensidad en los puntos de dicha superficie y, de otra manera, también puede decirse que *el graduante del potencial en un punto cualquiera representa, con signo contrario, el flujo por unidad de superficie equipotencial en el indicado punto.*

Supongamos ahora una superficie S cualquiera (figura 272), envolviendo al centro o del campo, y tracemos una superficie equipotencial (circunferencia de la figura) que no toque a la superficie dada; imaginemos una radiación de líneas de fuerza que formen los tubos convenientes para ocupar, sin superposición, toda la superficie dada; de estos tubos habrá unos que cortarán una sola vez a la superficie S y otros que la cortarán un número impar cualquiera de veces; el flujo emitido a través de la superficie $A\,B$ interceptada por los primeros en S, es el mismo que el emitido a través del trozo $a\,b$ de superficie equipotencial y, del mismo modo, el flujo correspondiente a las áreas $C\,D$, $C'\,D'$, $C''\,D''$, interceptadas en S por uno de los segundos tubos, se reduce al emitido a través de $C\,D$, por ser iguales y de sentido contrario los de $C'\,D'$ y $C''\,D''$, y, por tanto, es el mismo que el emitido a través del trozo $c\,d$ de superficie equipotencial; resulta, en definitiva, que *el flujo total a través de* S *es el mismo,* $f = 4\,\pi\,k\,m$, *que corresponde a las superficies equipotenciales.*

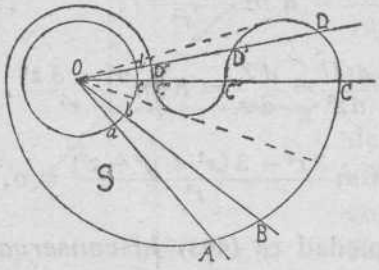


Fig. 272

410. Significación mecánica del potencial en los campos newtonianos. – La hipótesis que hemos hecho de suponer, en estos campos, que el potencial es nulo en el infinito y la equivalencia demostrada entre el potencial y el trabajo que desarrollan las fuerzas de un campo, nos dicen que

en los campos newtonianos centrales, el potencial en un punto cualquiera representa el trabajo que tiene que desarrollar la intensidad del campo para transportar, a la unidad de masa, desde el punto considerado hasta el infinito.

411. Tubos de fuerza unidad.—Si en una superficie equipotencial se traza una figura, cuya área S cumpla la condición de hacer que el flujo a través de ella sea igual a la unidad, el tubo de fuerza que, tomándola por directriz, se puede trazar, se llama *tubo unidad* y la línea de fuerza que pase por el centro de dicha área S, se llama *eje* del mismo tubo.

El número de tubos unidad, que corresponden a un campo newtoniano, estará expresado por el cociente

$$N = \frac{4\pi r^2}{S} = \frac{4\pi r^2}{\frac{r^2}{Km}} = 4\pi Km ,$$

como debía suceder.

El procedimiento más sencillo para trazarlos es descomponer, exacta o aproximadamente, el producto $4\pi Km$ en dos factores enteros $p \times q$, trazar en una esfera equipotencial p planos meridianos, correspondientes a un diámetro cualquiera tomado como eje y regularmente espaciados, y dividiendo después a dicho diámetro en q partes iguales (conviene que q sea impar), trazar los paralelos correspondientes a los puntos de división: de este modo resultará en la superficie esférica un cuadriculado, en el que cada cuadrícula tendrá por área

$$S = \frac{4\pi r^2}{p \cdot q} = \frac{4\pi r^2}{4\pi Km} = \frac{r^2}{Km} ,$$

que es la condición de las directrices de los tubos unidad.

412. Representación gráfica de los campos newtonianos de un centro.—Tomando por plano del dibujo el ecuatorial de las construcciones anteriores y suponiendo que q fuera impar, resultarán contenidos en dicho plano los ejes de los p tubos unidad que se forman en la zona central, y como estas líneas de fuerza están regularmente espaciadas, será fácil formar la radiación representativa de dichos ejes; así, si $p = 8$ resultarán formando entre sí ángulos de $\frac{360}{8} = 45^o$ y se obtendrá la radiación de líneas de fuerza que representa la figura 273.

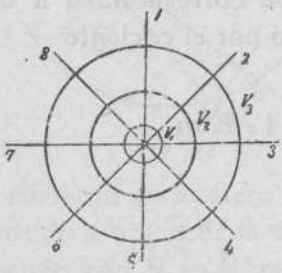


Fig. 273

La representación se completará trazando las circunferencias concéntricas de potencial $V_1 = \frac{Km}{r_1}$, $V_2 = \frac{Km}{r_2}$, etc., debiendo hacerse que los valores V_1, V_2, V_3 .... de las circunferencias trazadas formen progresión aritmética. Como en estos campos las superficies equipotenciales son de igual intensidad podrían acotarse las circunferencias con los valores de H_1, H_2, H_3, ... convenientemente anotados, para no confundir estas cotas con las del potencial.

413. Campos newtonianos con varios centros aislados.—Cuando son varios los centros newtonianos, atractivos o repulsivos que existen en una región del espacio, se forma un campo compuesto, cuyos elementos se determinarán en la forma que se dijo en la composición de campos en general, siendo su función potencial $V = \Sigma \frac{Km}{r}$ y verificándose la ecuación de Laplace $\Delta U = o$, con las consecuencias que de la misma se deducen **(408)**.

414. Teorema de Gauss.—Si en un campo de esta natu-

raleza se traza una superficie cerrada S (figura 274) que envuelva un cierto número de centros, se verifica que *el flujo total de fuerza, a través de dicha superficie, está expresado por el producto* $4\pi k \Sigma m_i$; o sea $4\pi k$ multiplicado por la suma de las masas activas de los centros interiores a dicha superficie. Esta propiedad, llamada teorema de *Gauss*, es una consecuencia de lo dicho sobre los flujos en los campos compuestos y lo que hemos demostrado en el número **409** para los newtonianos de un solo centro, pues resultará, en el caso de la figura 274,

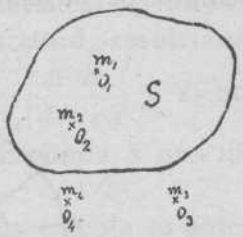


Fig. 274

$$f = \Sigma f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

y como

$$f_1 = 4\pi k m_1, \quad f_2 = 4\pi k m_2, \quad f_3 = f_4 = o,$$

se tiene

$$f = 4\pi k (m_1 + m_2) = 4\pi k \Sigma m_i.$$

415. Representación gráfica de campos newtonianos con dos centros de la misma naturaleza.—Se debe tomar por plano del dibujo uno cualquiera de los que pasan por la recta o eje que une los dos centros o_1 y o_2 (fig. 275), puesto que, evidentemente, el campo es de revolución alrededor de dicho eje y todos los planos meridianos lo serán de simetría.

La forma de la función potencial $V = \frac{K m_1}{r_1} + \frac{K m_2}{r_2}$ demuestra que las superficies equipotenciales son de 4.° grado y sus intersecciones con el plano de la figura ($z = o$)

serán líneas del mismo orden, que se trazarán por puntos del modo siguiente: tracemos una serie de circunferencias equipotenciales del centro o_1 y lo mismo en el centro o_2, y si queremos formar la línea *A B C D* de potencial *12*, por ejemplo, se buscarán los puntos donde se cortan las cir-

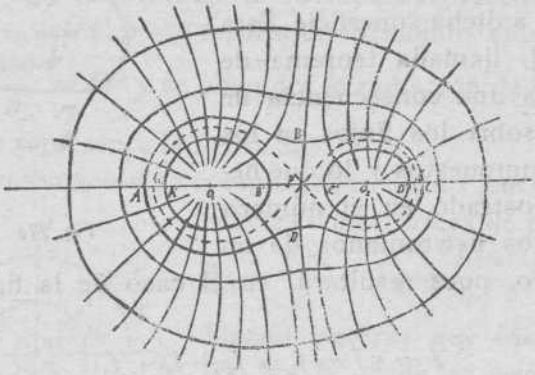


Fig. 275

cunferencias de o_1 y o_2, cuya suma de potenciales sea *12* y se tendrán cuantos puntos se deseen para que, unidos por un trazo continuo, proporcionen dicha curva, y lo mismo para las demás líneas equipotenciales que deban figurar en el dibujo.

Al repetir la operación para distintos potenciales, crecientes y decrecientes, se nota el paso de líneas equipotenciales formadas por un trazo continuo, como la *A B C D*, a otras formadas por dos hojas *A' B'* y *C' D'* separadas y envolviendo cada una a uno de los centros; construyendo algunas intermedias se observa la existencia de una línea equipotencial, en forma de lazo, con un punto cónico *P* en la unión de las dos ramas, y cuya línea, o superficie correspondiente, forma la separación de las equipotenciales de una y de dos hojas.

El punto cónico P parece dar a entender que en él queda indeterminada la línea de acción de la intensidad, pero esto no puede ocurrir y sólo expresa que dicho punto no puede ser otro que el de intensidad nula, que *a priori* puede verse existe entre o_1 y o_2; esta circunstancia permite determinarlo analíticamente con gran exactitud, resolviendo la ecuación de segundo grado $\frac{K m_1}{r_1^2} = \frac{K m_2}{(d - r_1)^2}$, siendo $d = o_1 o_2$, y tomando la raíz que corresponda a una distancia $r_1 < o_1 o_2$.

Conocida la posición del punto P se calcula su potencial $V = \frac{K m_1}{r_1} + \frac{K m_2}{r_2}$ y después, por las construcciones geométricas anteriores, se determinan cuantos puntos se deseen, para señalar en el dibujo la referida línea $a\ P\ b$ (esta línea se señala de puntos por no ser, generalmente, su potencial el que corresponde a los términos de la progresión aritmética V_1, V_2, V_3, ... que se quieren señalar).

Las intersecciones de las circunferencias auxiliares de las construcciones indicadas, en las inmediaciones del eje del campo, se verifican bajo ángulos muy agudos y conviene, para mayor exactitud del trazado, determinar analíticamente los puntos de intersección de las líneas equipotenciales con dicho eje; para esto supongamos se trata de determinar el punto A de la línea $V = 12$; se resolverá la ecuación $\frac{K m_1}{r_1} + \frac{K m_2}{d + r_1} = 12$ y la raíz positiva de la misma nos dará la distancia $r_1 = o_1 A$; lo mismo se procederá, punto por punto, para todas las demás intersecciones.

Respecto a las líneas de fuerza, como su número es convencional, se trazan dos radiaciones, en o_1 y o_2, que en su origen partan formando entre sí ángulos iguales, al llegar a la mitad de la distancia que separa al centro de la primera línea equipotencial, contada en la dirección de ca-

da una, se quiebran para darles dirección normal a dichas líneas, prolongando esta dirección hasta la mitad de la separación de la primera y segunda línea equipotencial; se vuelven a quebrar para darles dirección normal a la segunda línea y así sucesivamente se continúa hasta los límites del dibujo; para terminar se redondean los ángulos de las líneas poligonales trazadas y quedan en la forma que la figura indica.

También en las líneas de fuerza hay una especial, que pasa por P, y sirve de separación a las que concurren en cada uno de los centros o_1 y o_2; esta línea, que siempre deberá trazarse, se construye a partir de P como las anteriores. En todas ellas debe comprobarse en algunos de sus puntos la tangencia con la intensidad construyendo el vector $[H] \equiv [H_1] + [H_2]$ por los procedimientos del Algoritmo mecánico y previo el cálculo de los valores

$$H_1 = \frac{K m_1}{r_1^2} \quad \text{y} \quad H_2 = \frac{K m_2}{r_2^2}.$$

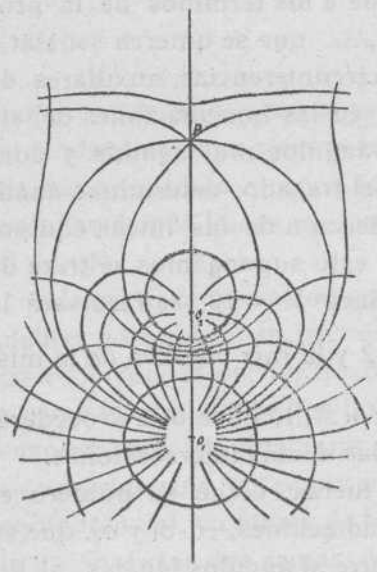


Fig. 276

416. Representación en el caso de dos centros de distinta naturaleza.—Cuando los dos centros o_1 y o_2 son uno atractivo y otro repulsivo, se siguen procedimientos análogos para hacer la representación; pero la situación del punto cónico P, fuera del segmento $o_1\, o_2$, da un aspecto completamente diferente al anterior a la representación gráfica de estos campos.

En la figura 276 se indica su forma y no creemos nece-

sario agregar nuevos detalles para que se comprenda sin dificultad la manera de construirla.

417. Energía potencial de n centros newtonianos.—De un modo general, reciben en Mecánica el nombre de *energías,* las circunstancias mecánicas de una fuerza susceptibles de transformarse o equivaler a un cierto trabajo desarrollado o por desarrollar, y en este concepto, el potencial de una fuerza es una forma de la energía de ésta, puesto que representa el trabajo que tiene que desarrollar, para trasladar su punto de aplicación a la posición de potencial nulo (el infinito en las fuerzas newtonianas).

Supongamos ahora un campo con n centros newtonianos de masas m_1, m_2, m_3, ... m_n, y no consideremos más que las acciones mutuas de estas masas entre sí, siendo V_1 el potencial del campo que las masas m_2, m_3, ... m_n producen en el punto o_1, V_2 el mismo dato referente a o_2, y así sucesivamente hasta V_n en o_n; los potenciales que las mismas masas producen sobre las masas m_1, m_2, ... m_n, que suponemos en los puntos citados, serán $m_1 V_1$, $m_2 V_2$, ... $m_n V_n$ y *la semisuma de estos potenciales,* $W = \frac{1}{2} \Sigma m_n V_n$, *representa el trabajo que las fuerzas del campo tienen que desarrollar para trasladar al infinito las n masas que lo forman* y, por esta circunstancia, se da a dicha expresión el nombre de *energía potencial* o *potencial* simplemente *de las n masas* constitutivas del campo. Para demostrar la proposición enunciada, supongamos primeramente dos masas m_1 y m_2 colocadas en A y B (fig. 277); el trabajo elemental de las fuerzas f_1 y f_2 para pasar de A-B a A'-B', es

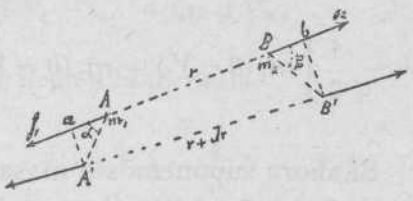


Fig. 277

$$d\,T(f_1 f_2) = f_1 \,.\, A\,a + f_2\,B\,b = \frac{K m_1 m_2}{r^2}\,(A\,a + B\,b) =$$

$$= \frac{K m_1 m_2}{r^2}\,(A'\,B' - A\,B) = \frac{K m_1 m_2\,d\,r}{r^2} =$$

$$= - m_1\,d\,\frac{K m_2}{r} = - m_1\,d\,V_1,\ (*)$$

y también $d\,T\,(f_1 f_2) = - m_2\,d\,V_2$.

Como este trabajo elemental representa el incremento de la energía potencial del sistema $m_1\,m_2$, será

$$d\,W = - \frac{1}{2}\,(m_1\,d\,V_1 + m_2\,d\,V_2)$$

y tendremos el valor de W integrando entre la posición actual de las masas C y la del infinito; así resulta

$$W = \int_C^{\infty} d\,W = - \frac{1}{2}\left[\, m_1 \int_C^{\infty} d\,V_1 + m_2 \int_C^{\infty} d\,V_2 \,\right] =$$

$$= - \frac{1}{2}\left[\, m_1\,(0 - V_1) + m_2\,(0 - V_2)\,\right] = \frac{1}{2}\,(m_1\,V_1 + m_2\,V_2)\,.$$

Si ahora suponemos n masas, podremos establecer, para un desplazamiento elemental de todas ellas, las siguientes igualdades:

(*) Prescindiendo del valor especial de las fuerzas conjugadas f_1 y f_2, se ve que el trabajo efectuado por éstas, en el desplazamiento elemental supuesto, es $d\,T\,(f_1 f_2) = f\,d\,r$.

$$d\,T\,(f_1\,f_2) = -\,m_1\,d\,V_1'' = -\,m_2\,d\,V_2'\,,$$

$$d\,T\,(f_1\,f_3) = -\,m_1\,d\,V_1''' = -\,m_3\,d\,V_3'\,,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$d\,T\,(f_1\,f_n) = -\,m_1\,d\,V_1^{(n)} = -\,m_n\,d\,V'_n\,,$$

$$d\,T\,(f_2\,f_3) = -\,m_2\,d\,V_2''' = -\,m_3\,d\,V_3''\,,$$

$$d\,T\,(f_2\,f_4) = -\,m_2\,d\,V_2'''' = -\,m_4\,d\,V_4''\,,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$d\,T\,(f_2\,f_n) = -\,m_2\,d\,V_2^{(n)} = -\,m_n\,d\,V''_n\,,$$

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Sumando dos veces los primeros miembros y tomando una vez los primeros valores y en la otra los segundos de las fórmulas anteriores, resulta

$$2\,d\,W = 2\,\Sigma\,d\,T\,(f_p\,f_k) =$$

$$= -\,m_1\,d\,V_1 - m_2\,d\,V_2 - \ldots - m_n\,d\,V_n\,,$$

e integrando, como antes, se llega a la fórmula

$$W = \frac{1}{2}\,(m_1\,V_1 + m_2\,V_2 + \ldots + m_n\,V_n) = \frac{1}{2}\,\Sigma\,m_n\,V_n\,,$$

como queríamos demostrar.

III

CAMPOS NEWTONIANOS COMPUESTOS DE INFINITOS CENTRALES

418. Definiciones.—Si suponemos una extensión geométrica cualquiera, sin solución de continuidad, sobre la cual se encuentre repartida una masa activa m, originadora de fuerzas newtonianas, se puede suponer que en cada uno de los elementos de dicha extensión hay un centro newtoniano, de masa $d\,m$, y el conjunto de todos ellos forma lo que se llama un *campo newtoniano compuesto de infinitos centrales.*

Según la disposición que tengan los elementos componentes de la masa m, se dividen estos campos en *lineales, superficiales* y *de volumen*, siendo de particular interés para nuestro estudio los superficiales y de volumen.

La masa activa m puede estar repartida de cualquier manera sobre la extensión geométrica que le sirva de soporte o vehículo; pero generalmente dicha repartición es uniforme, siendo, por tanto, constante la cantidad de masa por unidad lineal, superficial o de volumen, o sea la densidad δ; así lo supondremos en los ejemplos que vamos a estudiar.

419. Elementos de estos campos.—Siendo estos campos compuestos de varios centrales newtonianos, es indudable que todas las propiedades demostradas para éstos, cuando el número de centros era finito, y cuya demostración sea independiente del número de centros componentes, serán aplicables al caso actual, pudiendo afirmarse que los campos newtonianos compuestos de infinitos centrales serán potenciales y verificarán la ecuación de Laplace $\Delta\, U = o$ con las consecuencias que de ella se deducen.

El potencial que un elemento $d\,m$ produce en un punto cualquiera x_1, y_1, z_1 (*punto potenciado*) es

$$d\,V = \frac{K\,d\,m}{r} = K\,\frac{dm}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}},$$

siendo $d\,m = \delta\,d\,l$, $d\,m = \delta\,d\,\sigma$ o $d\,m = \delta\,d\,Q$, según que se trate de un campo lineal, superficial o de volumen; el potencial total estará expresado por la fórmula

$$V = \Sigma\,\frac{K\,d\,m}{r} = K\,\delta \int_D \frac{d\,l \text{ o } d\,\sigma \text{ o } d\,Q}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}.$$

La intensidad H, en un punto, se determinará por sus componentes

$$X = -\frac{d\,V}{d\,x},\quad Y = -\frac{d\,V}{d\,y},\quad Z = -\frac{d\,V}{d\,z},$$

cuando se haya determinado la función potencial V; la elemental que produce en el punto potenciado la masa $d\,m$ de un elemental espacial, se determina como en el caso de un solo centro y es

$$d\,H = \frac{K\,d\,m}{r^2} = d\,V \times \frac{1}{r}.$$

420. Campo de una capa plana de espesor infinitamente pequeño.—Tomemos el plano de la capa por coordenado XY y sea S (fig. 278) la extensión ocupada por la masa m repartida uniformemente sobre la misma; nos limitaremos a calcular la componente normal a la placa S de la acción que ésta ejerce sobre la unidad de masa colocada en el punto potenciado P.

La acción elemental del punto A sobre P es $d\,H = \frac{K\,d\,m}{r^2} = K\,\delta\,\frac{d\,\sigma}{r^2}$ y su componente normal $d\,H_n = K\,\delta\,\frac{d\,\sigma}{r^2} \times$ $\times \cos \overline{Zr}$; trazando dos superficies esféricas con el centro

en P y de radios r y 1, respectivamente, el cono $\overline{P, d\sigma}$ intercepta en ellas las áreas $d\sigma \cos \overline{Zr} = d\sigma_n$ y $d\psi =$ ángulo sólido bajo el cual se ve, desde P, el elemento $d\sigma$; entre $d\sigma_n$ y $d\psi$ existe la relación $\frac{d\psi}{d\sigma_n} = \frac{1}{r^2}$, de donde

$$d\sigma \cos \overline{Zr} = r^2 \, d\psi \quad \text{y} \quad dH_n = K\delta \, d\psi .$$

La última expresión puede integrarse y dará

$$H_n = K\delta \int_D d\psi = K\delta\psi ,$$

siendo ψ el ángulo sólido bajo el cual se ve toda la placa desde el punto P.

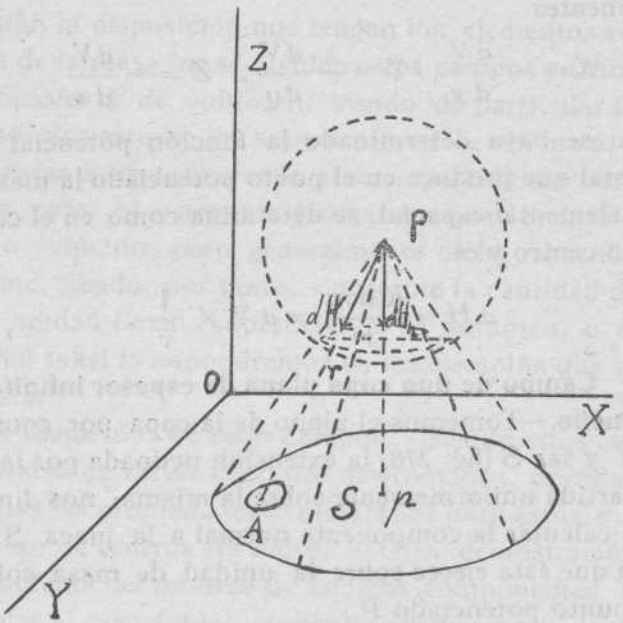


Fig. 278

Si el punto P se aproxima a la plaza, bajando por la perpendicular Pp, que cae en el interior de ella, el ángulo ψ crece hasta tomar el valor $\psi = 2\pi$, cuando el punto po-

tenciado está infinitamente próximo a S; la componente normal H es, en esta situación, $H_n = 2\pi K\delta$, independiente de la extensión de la placa y de la situación en ella del punto potenciado.

Si el punto P se aproxima al plano de la placa, pero cayendo fuera de S, el ángulo sólido se anula y resulta $H_n = 0$. Cuando el punto se acerca a los bordes de la placa, el ángulo sólido queda indeterminado y lo mismo le ocurre al valor de H_n.

421. Campo de un disco circular.—Un caso de frecuente aplicación, del estudio que estamos haciendo, es el de un disco circular cargado de una masa activa m, accionando un punto P colocado en la perpendicular trazada a su plano en el centro del disco (fig 279); la componente normal H_n es, por la simetría de este caso, la acción total H que se ejerce sobre P; será, por consiguiente, $H = K\delta\psi$, o bien, poniendo en vez de ψ su valor en función de $a = p\ P$, R = radio del disco y α = ángulo plano bajo el cual se ve el radio R desde el punto P, se obtiene

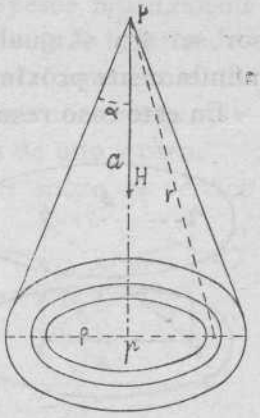


Fig. 279

$$H = 2\pi K\delta(1 - \cos\alpha).$$

Cuando el punto P está infinitamente próximo al disco, será $\alpha = \frac{\pi}{2}$; y se reduce H a $2\pi K\delta$, como en el caso de una placa cualquiera.

La integración de la función potencial se efectúa con facilidad, descomponiendo al disco en elementos circulares, cuya masa será $dm = 2\pi\rho\, d\rho\,\delta$; así resulta

$$V = \int_D \frac{K dm}{r} = \pi K \delta \int_0^R \frac{2 \rho d \rho}{\sqrt{a^2 + \rho^2}} = 2 \pi K \delta \left(\sqrt{a^2 + R^2} - a \right).$$

La derivación, respecto a a, de esta última fórmula, nos conduciría, por la relación $H = -\frac{dV}{dn} = -\frac{dV}{da}$ a la misma expresión encontrada antes para H.

422. Campo de dos capas planas idénticas colocadas una en frente de otra e infinitamente próximas.—La componente normal de la acción que las dos placas S y S' (figura 280) ejercen sobre un punto exterior a las placas, es

$$H_n = K \delta (\psi + \psi') = 2 K \delta \psi$$

por ser ψ y ψ' iguales, y si el punto está sobre las placas, infinitamente próximo, es $H_n = 4 \pi K \delta$.

En este caso resulta interesante averiguar la acción mutua de las dos placas, que será, indudablemente, una fuerza normal, que tratará de comprimir una sobre otra, puesto que si se descompone la acción de A sobre B en la dirección normal y paralela, que expresa la figura, existirán otros dos puntos A' y B', cuya acción, idéntica a la de A y B, dará una componente paralela igual y de sentido contrario a la anterior, destruyéndose así todas las acciones paralelas elementales y quedando sólamente las normales.

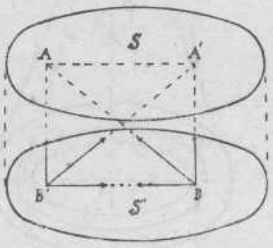


Fig. 280

La acción normal que cada punto A ejerce sobre el que tiene enfrente, es

$$d P = 2 \pi K \delta \times d \sigma \delta = 2 \pi K \delta^2 d \sigma,$$

la resultante de todas estas acciones elementales, o sea la

presión entre las placas, $P = 2\pi K\delta^2 . S$, y la que corresponde a cada unidad superficial $p = \frac{P}{S} = 2\pi K\delta^2$.

El potencial de la acción normal H_n, que las dos placas ejercen sobre la unidad de masa, colocada en un punto infinitamente próximo a cualquiera de ellas, se deduce de la relación general $V = H r$, representando por r la distancia entre las placas (que tendrá que ser muy pequeña para que se puedan aplicar las fórmulas anteriores) y sustituyendo en vez de H el valor $H_n = 4\pi K\delta$; así se obtiene $V = 4\pi K\delta r$, y en función de la presión entre las placas $V = \sqrt{\frac{8\pi K P r^2}{S}}$.

423. Campo de una capa esférica de espesor infinitamente pequeño.—La acción de estas capas esféricas da lugar a dos campos distintos que estudiaremos separadamente: el interior y el exterior; pero antes demostraremos una propiedad fundamental que sirve de base a las de uno y otro.

TEOREMA.—*Las acciones que ejercen sobre el vértice de un cono las dos masas interceptadas por la superficie cónica correspondiente, en la capa esférica, tienen el mismo valor modular.* Consideremos en la figura 281 el punto potenciado P, que lo mismo puede estar en el interior que en el exterior de la capa; tracemos el cono elemental $\overline{P, A\ C}$ que intercepta en la superficie esféricas las áreas $A\ C = d\sigma$ y $B\ D = d\sigma'$; las esferas de radio $r = P\ A$ y $r' = P\ B$ determinan, en dicho cono elemental, las áreas

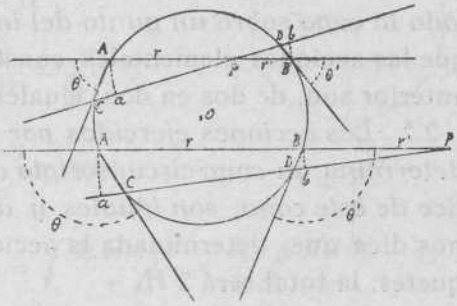


Fig. 281

$$A\,a = d\sigma_n = d\sigma \operatorname{sen} \theta \quad \text{y} \quad B\,b = d\sigma'_n = d\sigma' \operatorname{sen} \theta' ;$$

que por ser $\theta = \theta'$ verifican la condición

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = \frac{d\sigma_n}{d\sigma'_n} = \frac{r^2}{r'^2} .$$

Las acciones ejercidas en P por la masa activa contenida en $d\sigma$ y $d\sigma'$ son

$$dH = \frac{K\,dm}{r^2} = K\delta\frac{d\sigma}{r^2} \text{ y } dH' = \frac{K\,dm'}{r'^2} = K\delta\frac{d\sigma'}{r'^2} ,$$

o sea, en virtud de la proporción antes establecida, $dH = dH'$. Si ahora se supone que los conos sean de abertura finita, se descompondrán en conos infinitesimales que producirán acciones elementales, iguales de dos en dos, y las intensidades resultantes H y H' serán iguales, como queríamos demostrar.

423'.—*Consecuencias:* 1.ª *La acción total que ejerce toda la capa sobre un punto del interior es nula.* Puesto que las acciones elementales consideradas en el teorema anterior son, de dos en dos, iguales y de sentido contrario.

2.ª *Las acciones ejercidas por los dos casquetes que determina un cono circunscripto a la esfera, sobre el vértice de este cono, son iguales y del mismo signo.*—Esto nos dice que, determinada la acción H de uno de los casquetes, la total será $2\,H$.

3.ª Si el punto exterior se acerca a la capa esférica, uno de los casquetes aumenta de área y el otro disminuye; cuando el punto P está infinitamente próximo, se reduce el cono a un plano y uno de los casquetes se convierte en el elemento plano $d\sigma$ de la capa, verificándose que *la acción sobre P, de este elemento, es igual a la que ejerce sobre el mismo punto el resto de la capa esférica.*

424. Potencial del campo interior de la capa esférica.— Siendo el valor de $H = o$ en todos los puntos del interior, se deduce de la fórmula general, $\frac{dV}{dh} = -H$, que V es constante en dichos puntos, formándose una *esfera equipotencial* limitada por la capa dada.

El valor constante del potencial interior es, refiriéndonos al centro,

$$V = \int_D \frac{K dm}{R} = \frac{K}{R} \int_D dm = \frac{Km}{R} = 4\pi KR\delta .$$

425. Elementos del campo exterior de la capa esférica.— Sea P el punto potenciado (fig. 282) y A un elemento $dm = d\sigma . \delta$ de la capa; señalemos el punto P' conjugado armónico de P, respecto a $B\,C$, que cumple la condición

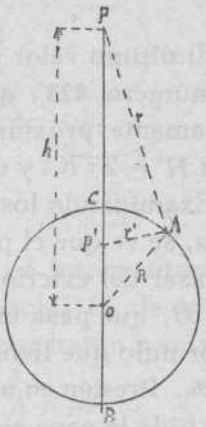


Fig. 282

$$oP' \times oP = R^2,$$

o bien $\frac{oP}{R} = \frac{R}{oP'} = \frac{r}{r'}$

de donde $r = \frac{r'h}{R}$; pero

$$V = \int_D \frac{K dm}{R} = \int_D \frac{KR\,dm}{r'h} = \frac{R}{h} \int_D \frac{K dm}{r'} =$$

$$= \frac{R}{h} \cdot \frac{Km}{R} = \frac{Km}{h},$$

y como la intensidad es $H = -\frac{dV}{dh} = \frac{Km}{h^2}$, resulta que *el campo exterior de la capa es idéntico al que produciría*

la masa activa m concentrada en el punto o, centro de la superficie esférica dada; todas las propiedades de los campos newtonianos de un solo centro le serán, por lo tanto, aplicables.

El valor del potencial y de la intensidad en función del radio de la esfera son

$$V = \frac{Km}{h} = \frac{4\pi K R^2 \delta}{h} \quad \text{y} \quad H = \frac{4\pi K R^2 \delta}{h^2};$$

para $h = R$ se convierte en

$$V = 4\pi K R \delta \quad \text{y} \quad H = 4\pi K \delta .$$

El último valor nos dice, en virtud de la propiedad 3.ª del número **423'**, que el elemento situado enfrente e inmediatamente próximo al punto potenciado ejerce una acción $H' = 2\pi K \delta$ y el resto de la capa la acción $H'' = 2\pi K \delta$.

Examinando los valores de V y H, dentro y fuera de la capa, se ve que el primero no experimenta discontinuidad al pasar del exterior al interior; pero no ocurre lo mismo con H, que pasa bruscamente del máximo, $H = 4\pi K \delta$, al valor nulo que tiene en el interior.

426. Presión en un punto de la capa esférica.—La acción que toda la capa ejerce sobre la masa contenida en un elemento $d\sigma$, dividida por el área de este elemento, recibe el nombre de *presión por unidad superficial* en el punto considerado, teniendo evidentemente esta presión el mismo valor en todos los puntos de la capa esférica.

La acción de toda la capa sobre la unidad de masa concentrada en el elemento $d\sigma$ sería $H'' = 2\pi K \delta$, pero como la masa contenida en $d\sigma$ es $d\sigma \cdot \delta$, la presión p por unidad superficial será

$$p = \frac{2\pi K \delta \times d\sigma \cdot \delta}{d\sigma} = 2\pi K \delta^2 .$$

427. Energía potencial de la capa esférica de espesor infinitamente pequeño.—Aplicando la fórmula del número **417**, y teniendo en cuenta que el potencial que toda la capa produce, en cada uno de los elementos de la misma, es $V\,dm$, resulta

$$W = \frac{1}{2}\Sigma\, V\,dm = \frac{1}{2}\,V\Sigma\,dm = \frac{1}{2}\,V\,m = \frac{K\,m^2}{2\,R}\,.$$

428. Campo de una capa esférica de espesor finito.—Supongamos ahora una esfera hueca de radio exterior R e interior R' (fig. 283), siendo δ la densidad de volumen y m la masa total de la capa, $m = \frac{4}{3}\,\pi\,(R^3 - R'^3)\,\delta$, y consideremos primero el campo del hueco interior. Es evidente que si descomponemos la capa esférica en elementos formados por capas de espesor infinitamente pequeño $(\rho + d\rho) - \rho = d\rho$, la acción de cada una de estas capas sobre el hueco interior es nula y nula será, por tanto, la acción total H, de toda la capa; siendo $H = o$, el potencial será constante y su valor se determina por la fórmula $V = \int_{R'}^{R} \frac{K\,dm}{\rho}$, siendo

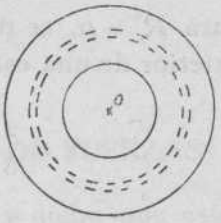


Fig. 283

$$dm = \frac{4}{3}\,\pi\left[(\rho + d\rho)^3 - \rho^3\right]\delta = 4\,\pi\,\delta\,\rho^2\,d\rho\,,$$

de donde

$$V = \int_{R'}^{R} 4\,\pi\,K\,\delta\,\rho\,d\rho = 2\,\pi\,K\,\delta\,(R^2 - R'^2)\,.$$

Los elementos del campo exterior son:

$$V = \int_{R'}^{R} \frac{K\,dm}{h} = \frac{K}{h}\int_{R'}^{R} dm = \frac{K\,m}{h} \quad \text{y} \quad H = -\frac{dV}{dh} = \frac{K\,m}{h^2}\,;$$

es decir que, lo mismo que cuando se trata de una capa de espesor infinitamente pequeño, se verifica que *el campo exterior es idéntico al que produciría la masa de toda la capa concentrada en el punto O* y le serán aplicables las propiedades de los campos newtonianos de un solo centro.

Los valores del potencial e intensidad, en función R y R', son

$$V = \frac{4}{3}\pi K\delta\frac{R^3 - R'^3}{h} \quad \text{y} \quad H = \frac{4}{3}\pi K\delta\frac{R^3 - R'^3}{h^2};$$

para $R' = o$, se tiene el potencial e intensidad del campo exterior de una esfera maciza que son

$$V = \frac{4}{3}\pi K\delta\frac{R^3}{h} \quad \text{y} \quad H = \frac{4}{3}\pi K\delta\frac{R^3}{h^2}.$$

428'.--En el espesor de la capa se forma un campo especial, cuya acción sobre un punto cualquiera del mismo, situado a la distancia ρ del centro, se obtiene considerando las capas esféricas comprendidas entre las superficies de radios R' y ρ, puesto que la acción de la parte comprendida entre los radios ρ y R es evidentemente nula; dicha acción será

$$H = \frac{4}{3}\pi K\delta\frac{\rho^3 - R'^3}{\rho^2},$$

y si la esfera es maciza $H = \frac{4}{3}\pi K\delta\rho$.

El potencial en el mismo punto será la suma de los que producen las capas comprendidas entre R' y ρ,

$$V' = \frac{4}{3}\pi K\delta\frac{\rho^3 - R'^3}{\rho},$$

más el correspondiente a las capas comprendidas entre ρ y R,

$$V'' = 2\pi K\delta\,(R^2 - \rho^2),$$

o sea $$V = 2\pi K\delta\left(\frac{2}{3}\times\frac{\rho^3 - R'^3}{\rho} + (R^2 - \rho^2)\right)$$

y para el caso de esfera maciza

$$V = 2\pi K\delta\left(\frac{2}{3}\rho^2 + R^2 - \rho^2\right) = 2\pi K\delta\left(R^2 - \frac{1}{3}\rho^2\right).$$

IV

OTROS EJEMPLOS DE CAMPOS DE FUERZAS

429. Campos uniformes.—Ya hemos dicho que estos campos están caracterizados por tener en todos sus puntos la misma dirección y la misma intensidad, y como ejemplo de ellos puede considerarse el formado por la atracción de la tierra (pesantez) sobre los cuerpos situados en su superficie, siempre que se limite a una pequeña región, para que puedan considerarse paralelas las verticales de sus distintos puntos y no influya sensiblemente en el valor de H la mayor o menor distancia al centro de la tierra. Concretándonos al caso de la pesantez, será en todos los puntos $H = 981\ \mathrm{L\,M\,T^{-2}}$, o bien, si se toma por unidad de longitud el metro, $H = 9{,}81 = g$.

Los campos paralelos, como caso particular de los centrales, son potenciales y para determinar la función potencial correspondiente al de la pesantez, tomemos por eje coordenado $o\,Z$ la vertical ascendente de un punto del campo y por plano $X\,Y$ uno horizontal, trazado al nivel del suelo; se verificará

$$dU = dTH = -g\,dz,\ U = -gz + C$$

y, por último, $V = g\,z + C'$; el valor de C' se señala con la condición de suponer que el potencial es nulo cuando el punto móvil llega a la posición más baja que pueda tener en el campo, o sea para $z = o$, así resulta $C' = o$ y $V = g\,z$.

Las superficies equipotenciales son, en estos campos, planos horizontales ($z = constante$), las líneas de fuerza rectas paralelas verticales y los tubos de fuerza afectarán forma cilíndrica.

El campo de la pesantez, como todos los uniformes, verifica la ecuación de Laplace

$$\Delta\, U = o \quad o \quad \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = o$$

como consecuencia de ser X, Y y Z constantes, y tendrán lugar las consecuencias que en los demás campos se verificaban cuando $\Delta\, U = o$.

La diferencia de potencial entre dos puntos es

$$V_1 - V_2 = g\,(z_1 - z_2)$$

y representa el trabajo que tiene que desarrollar la pesantez para trasladar la unidad de masa de M_1 a M_2; el segundo miembro prueba que *este trabajo no depende más que de la diferencia de nivel de las dos posiciones extremas.*

Cuando la masa móvil en el campo de la pesantez sea m, en vez de la unidad, la función de fuerzas correspondiente será $U = -m\,g\,z + C$ y la potencial $V = m\,g\,z + C'$.

De las fórmulas anteriores se deduce que midiendo el trabajo de la pesantez para pasar una masa cualquiera de un punto a otro de este campo de fuerzas, se puede obtener la diferencia de nivel, $z_1 - z_2$, entre dichos puntos y la altura de uno cualquiera sobre el plano de comparación.

Las cotas obtenidas por este procedimiento entre puntos no muy alejados, en la superficie terrestre, difieren po-

co de las obtenidas directamente con el nivel, pero tratándose de puntos lejanos resultan diferencias apreciables debidas a que, en dichas condiciones de extensión, no puede considerarse el campo de la pesantez, ni uniforme, ni paralelo: las verdaderas superficies equipotenciales afectan forma elipsoidal; estos elipsoides no cumplen la condición de equidistancia normal entre sus diversos puntos, produciéndose diferencias apreciables en la posición altimétrica de los mismos; esto ha dado lugar a la consideración de las *cotas dinámicas* (trabajo desarrollado por la pesantez para trasladar la unidad de masa desde la superficie de comparación al punto señalado), que se emplean en Geodesia y que traducen, con más exactitud que las cotas *orthométricas*, las condiciones prácticas de la nivelación.

430. Campos rotatorios.—Se llaman así los campos en que las líneas de fuerza son circunferencias y, como ejemplo de ellos, estudiaremos el formado por una corriente eléctrica que circula por un conductor rectilíneo (eje *o Z*, figura 284) de longitud indefinida; siendo I la intensidad en amperios de dicha corriente eléctrica, la experiencia demuestra que una masa magnética m, colocada en un punto A, de las inmediaciones del conductor, experimenta de parte de éste una acción $F = \frac{2\,m\,I}{r}$, de dirección perpendicular al plano de A y $o\,Z$ y en un sentido o en otro según sea el de circulación de la corriente.

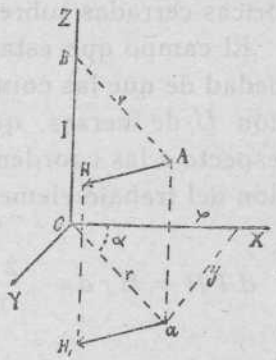


Fig. 284

La intensidad de este campo se encuentra haciendo $m = 1$ y es $H = \frac{2\,I}{r}$.

Las ecuaciones de las líneas de fuerzas son $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=$ $=\frac{dz}{Z}$ y como $Z=o$, será también $dz=o$ y $z=$ *constante*, es decir, que serán curvas planas y situadas en planos perpendiculares al hilo conductor; de la proyección sobre el plano $X\,Y$, $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}$, resulta

$$\frac{-dx}{H\frac{y}{r}}=\frac{dy}{H\frac{x}{r}} \quad \text{o} \quad x\,dx+y\,dy=o,$$

e integrando $x^2+y^2=r^2$, que nos demuestra la propiedad rotatoria del campo formado.

Los tubos de fuerza afectarán la forma de superficies tóricas cerradas sobre sí mismas.

El campo que estamos considerando presenta la propiedad de que las componentes de H derivan de una función U de fuerzas, que es de determinaciones múltiples respecto a las coordenadas del móvil; en efecto, la expresión del trabajo elemental de H es (**381**—3.ª)

$$dTH=Hr\,d\alpha=\frac{2I}{r}r\,d\alpha=2I\,d\alpha=dU \text{ y } U=2I\alpha+C$$

de modo que puede ocurrir que el móvil, desplazándose a partir de un punto A, vuelva al punto de partida y el valor de U_2, en la posición final, no sea el mismo U_1 que en la inicial; para reconocer si U_1 y U_2 son iguales o diferentes, basta observar el camino recorrido y si este camino no envuelve al eje $o\,Z$ será

$$\alpha_2=\alpha_1+o \quad \text{y} \quad U_2=U_1;$$

pero si el camino recorrido da n vueltas alrededor de dicho eje, será

$$\alpha_2 = \alpha_1 + n \cdot 2\pi \quad \text{y} \quad U_2 = U_1 + 4n\pi I.$$

La divergencia de estos campos es nula, para todo punto en que r no sea cero, como demuestra el siguiente cálculo:

$$E = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = \frac{-d\frac{2Iy}{r^2}}{dx} + \frac{d\frac{2Ix}{r^2}}{dy} =$$

$$= 2I\left[\frac{2r\frac{dr}{dx}y}{r^4} - \frac{2r\frac{dr}{dy}x}{r^4}\right] = 4I\frac{xy - yx}{r^4} = o.$$

CAPITULO TERCERO

Dinámica del punto material

I

ECUACIONES GENERALES DEL MOVIMIENTO Y EQUILIBRIO DE UN PUNTO MATERIAL

431. Problemas generales.—Las dos cuestiones generales, que en este capítulo nos proponemos resolver, son las siguientes:

1.ª *Conocidas las fuerzas que en un instante determinado obran sobre un punto material, deducir las ecuaciones del movimiento que de dicha acción le resulta al móvil.*

2.ª *Conociendo las ecuaciones del movimiento de un punto material, deducir las fuerzas capaces de producir dicho movimiento.*

Y tanto en la cuestión directa como en la inversa, se considerarán, en general, como casos particulares, las condiciones que deben reunir las fuerzas aplicadas al móvil para que éste resulte en equilibrio.

432. Ecuaciones del movimiento de un punto.—Si suponemos un punto de masa m accionado por la fuerza $[F]$, siendo $[G]$ la aceleración producida, se verifica, según lo convenido, que $[F] = m\,[G]$ y proyectando esta equipolencia fundamental sobre tres ejes coordenados fijos, se obtienen las ecuaciones

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2},$$

llamadas *de Mac-Laurin*, que resuelven en principio los problemas generales enunciados, puesto que en ellas se relaciona la fuerza con las coordenadas del móvil y con el tiempo.

La fuerza F, que suponemos actuando sobre el móvil, puede ser única o resultante de otras; en estos últimos casos los primeros miembros de las ecuaciones anteriores serán de la forma ΣX, ΣY y ΣZ.

Si los ejes coordenados se suponen determinados por la tangente a la trayectoria, la normal principal y la perpendicular al plano osculador, en todas las posiciones del móvil, se convierten las ecuaciones anteriores en las llamadas *de Euler*

$$F_t = m\frac{dv}{dt}, \quad F_n = \frac{mv^2}{\rho}$$

que, no obstante la movilidad de los ejes de referencia, se utilizan con ventaja en algunos problemas especiales.

Las ecuaciones de Euler tienen particular aplicación para apreciar separadamente los dos efectos modificativos del estado de movimiento de un punto que, en un instante determinado, produce una fuerza; estos efectos son la *variabilidad de la velocidad en su valor algébrico* y la *variabilidad de la misma en su dirección*; la primera está relacionada con la componente tangencial $F_t = m\frac{dv}{dt}$ de modo que la condición necesaria y suficiente para que no exista es que $F_t = o$, y lo mismo ocurre a la segunda respecto a la componente normal $F_n = \frac{mv^2}{\rho}$.

433. Primeras integrales del movimiento de un punto.—La integración de las ecuaciones diferenciales del movimiento, introduce en los problemas seis constantes arbitrarias, que en cada caso se determinan por las circunstancias iniciales del movimiento.

Despejando dichas constantes del sistema integral y primeras derivadas, se obtienen seis relaciones fijas entre las fuerzas, coordenadas del móvil, su velocidad y el tiempo, que se llaman *primeras integrales* del movimiento, y cuya determinación, cuando pueda hacerse, permite llegar al sistema primitivo sin nuevas integraciones, en la forma que enseña el Cálculo integral.

434. Posiciones de equilibrio del punto material.—Cuando la acción de la fuerza, o sistema de fuerzas, sobre el móvil es nula, el punto se halla en equilibrio estático o dinámico, según ya se ha dicho; las condiciones que deben satisfacer las fuerzas, para que el equilibrio exista, son

$$\Sigma X = o\,, \quad \Sigma Y = o\,, \quad \Sigma Z = o\,,$$

luego las coordenadas del móvil correspondientes a las posiciones en que el equilibrio tiene lugar, estarán determinadas por el sistema

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = o\,, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = o\,, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = o\,,$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2z}{dt^2} = o\,.$$

Estas ecuaciones expresan que si el móvil llega a una posición de equilibrio con la velocidad v, continúa con la misma al salir de dicha posición; pero si el móvil llega, o se pone en dichas posiciones, con velocidad nula, permanecerá en las mismas en equilibrio estático, en tanto que

no se modifique el estado del sistema de fuerzas que le está aplicado.

Si en vez de hacer uso de las ecuaciones de Mac-Laurin, se emplean las de Euler, las posiciones de equilibrio estarán caracterizadas por las ecuaciones

$$F_t = o, \quad F_n = o, \quad o \quad \frac{dv}{dt} = o, \quad \frac{v^2}{\rho} = o.$$

435. Equilibrio estable, inestable e indiferente. — Si suponemos un punto colocado en reposo en una posición de equilibrio y se separa de dicha posición, dándole sobre su trayectoria un desplazamiento infinitamente pequeño, la fuerza F, que actúa sobre el móvil, tomará en general un cierto valor diferente de cero: si la fuerza que se pone de manifiesto es *resistente* y se opone a la salida del móvil de su posición de equilibrio, tendiendo a llevarle otra vez a ella, el equilibrio se dice que es *estable*; por el contrario, cuando la fuerza sea *motora* y ayude al desplazamiento efectuado, tendiendo a separar al móvil de la repetida posición de equilibrio, éste se llama *inestable*.

Cuando la fuerza sigue siendo nula en la nueva posición del móvil y, por consiguiente, no manifiesta tendencia a separarle más de la posición de equilibrio, ni de acercarle a ella, el equilibrio es *indiferente*.

La estabilidad o inestabilidad de una posición de equilibrio, se reconoce determinando la expresión del trabajo desarrollado en el desplazamiento efectuado, pues si $T F < o$ la fuerza es resistente y el equilibrio es estable, y si $T F > o$ la fuerza es motora y el equilibrio es inestable, siendo evidente que en los casos de equilibrio indiferente será $T F = o$.

436. Movimiento y equilibrio en el caso de fuerzas potenciales. — Si la fuerza F es potencial sus proyecciones de-

rivarán de la función $U = \varphi(x\ y\ z) + C$ y las ecuaciones del movimiento se convierten en

$$\frac{dU}{dx} = m\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{dU}{dy} = m\frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{dU}{dz} = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

y si se supone que U sea la función correspondiente a la unidad de masa, la de la fuerza F será $m\ U$ y se podrá suprimir el factor m de las ecuaciones anteriores, convirtiéndose en

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{dU}{dy} = \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{dU}{dz} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

En el caso que estamos considerando se corresponden los máximos y mínimos de la función de fuerzas con las posiciones de equilibrio del móvil, puesto que los valores de x, y y z que verifiquen la condición

$$dU = \frac{dU}{dx}dx + \frac{dU}{dy}dy + \frac{dU}{dz}dz = o$$

hacen que sea $X = Y = Z = o$ y recíprocamente. Además es fácil de reconocer que los máximos corresponden a posiciones de equilibrio estable y los mínimos a equilibrios inestables, pues si $U_o = \varphi(x_o\ y_o\ z_o) + C$ es un máximo de U, se verificará **(394)**

$$TF = \int_{M_o}^{M} dU = U - U_o < o$$

y si es un mínimo $TF = U - U_o > o$.

437. Ecuaciones del movimiento angular y areolar de un punto material.—Las ecuaciones de Mac-Laurin, y lo mismo las de Euler, relacionan directamente las fuerzas con los desplazamientos y velocidades lineales del móvil

y cuando convenga, o sea necesario, considerar el movimiento angular o el areolar del mismo, se imaginará trazada la función gráfica del movimiento del punto, que en Cinemática estudiamos, y por las relaciones que allí establecimos entre los desplazamientos lineal, angular y areolar del móvil, se podrá pasar de una a otra forma de considerar el movimiento.

II

TEOREMAS GENERALES DE LA DINÁMICA DEL PUNTO MATERIAL

438. Definiciones.—Para facilitar la integración de las ecuaciones diferenciales del movimiento, se utilizan un cierto número de propiedades, llamadas *teoremas generales*, a cuya demostración vamos a proceder, sentando antes las siguientes definiciones:

Desplazamiento virtual de un punto es todo desplazamiento arbitrario que se atribuya a un móvil, a partir de una posición cualquiera; se representan estos desplazamientos con la notación de las diferenciales indefinidas, empleando la característica δ en vez de la *d*.

Velocidad virtual, trabajo virtual y *potencia virtual* son la velocidad, trabajo y potencia que corresponden a un desplazamiento virtual del móvil; su expresión simbólica será

$$v = \frac{\delta e}{dt}, \quad \delta TF = F \cdot \delta e \cdot \cos \overline{F \delta e}, \quad P = \frac{\delta TF}{dt}.$$

Cantidad de movimiento de un punto material es el producto de su masa por la velocidad lineal de que está

animado; se representa gráficamente por un vector aplicado al móvil, con la misma línea de acción y sentido que la velocidad y valor modular $m\,v$ (*); cuando nos refiramos al vector representativo de la cantidad de movimiento de un punto, lo representaremos por $m\,[v]$, para distinguirle de su valor algébrico $m\,v$, de acuerdo con las notaciones establecidas en el Algoritmo mecánico.

Es evidente, que si el movimiento del punto es resultante de otros componentes, la cantidad de movimiento del móvil, será la suma gráfica de las cantidades de movimiento que le corresponda en los movimientos componentes, pues basta imaginar la equipolencia que forman las velocidades $[v] \equiv [v_1] + [v_2] + \ldots$ y multiplicando por m, se obtiene la

$$m\,[v] \equiv m\,[v_1] + m\,[v_2] + \ldots,$$

que demuestra la expresada propiedad.

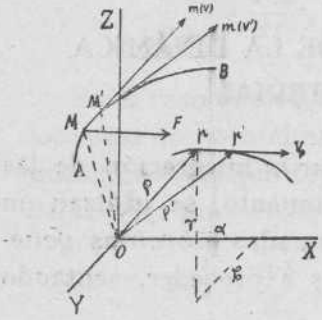


Fig. 285

Si se imaginan multiplicados por m los vectores que forman la función gráfica de las velocidades lineales de un punto (fig. 285), se forma otra función, $[\rho] = F'(t)$, con la misma superficie de situación e indicatriz homotética, que se llama *función gráfica de las cantidades de movimiento* del punto, siendo sus ecuaciones de proyección **(211)**

$$\alpha = m\,v_x = m\,\frac{dx}{dt}\,,\quad \beta = m\,v_y = m\,\frac{dy}{dt}\,,\quad \gamma = m\,v_z = m\,\frac{dz}{dt}\,.$$

(*) La unidad cegesimal de cantidad de movimiento es $M\,L\,T^{-1}$: podría llamársele *cine-gramo*.

Si del mismo modo se imaginan multiplicados por $2\,m$ los diversos vectores que forman la función gráfica de las velocidades areolares del punto (fig. 286) (*), se forma otra función $[\sigma] = F'_1(t)$, con la misma superficie de situación e indicatriz homotética, cuyos vectores representan en cada instante el momento de m $[v]$ respecto al punto o y por cuyo motivo se llama *función gráfica de los momentos de la cantidad de movimiento* del punto considerado; sus ecuaciones de proyección son

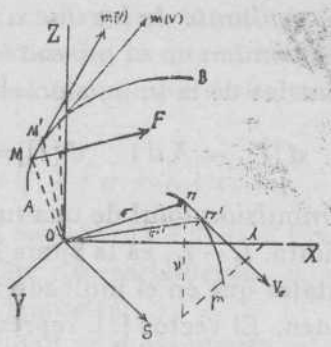


Fig. 286

$$\lambda = y\,m\,\frac{dz}{dt} - z\,m\,\frac{dy}{dt},$$

$$\mu = z\,m\,\frac{dx}{dt} - x\,m\,\frac{dz}{dt},$$

$$\nu = x\,m\,\frac{dy}{dt} - y\,m\,\frac{dx}{dt}.$$

Impulsión elemental de una fuerza, en un instante determinado, es el producto de la fuerza por el tiempo dt que a dicho instante corresponde; las impulsiones elementales, $F\,dt$, se representan vectorialmente con la misma

(*) Recordemos (209) que $a = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\,v\,\rho\,\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\,M_o(v)$ y $a_x = \frac{1}{2}\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$, $a_y = \frac{1}{2}\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)$, $a_z = \frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$.

línea de acción, sentido y punto de aplicación que la fuerza $[F]$, verificándose que *si* $[F]$ *es resultante de otras fuerzas* $[F_1]$, $[F_2]$, ... $[F_n]$, *su impulsión elemental es también resultante de las que a dichas fuerzas componentes corresponden en el mismo instante.* Las proyecciones coordenadas de la impulsión elemental de una fuerza son

$$d\,[I]_x = X\,d\,t\,, \quad d\,[I]_y = Y\,d\,t\,, \quad d\,[I]_z = Z\,d\,t\,.$$

Impulsión total de una fuerza, en un intervalo de tiempo finito, $t_2 - t_1$, es la suma gráfica de las impulsiones elementales que en el indicado intervalo de tiempo le corresponden. El vector $[I]$, representativo de la impulsión total de una fuerza, tiene por proyecciones sobre los ejes coordenados los valores

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} X\,d\,t\,, \quad I_y = \int_{t_1}^{t_2} Y\,d\,t\,, \quad I_z = \int_{t_1}^{t_2} Z\,d\,t\,.$$

Fuerza viva del movimiento de un punto es el producto, $\frac{m\,v^2}{2}$, de la masa por el cuadrado de la velocidad dividido por dos. La fuerza viva es una cantidad, esencialmente positiva, que no tiene representación vectorial. Indicaremos que hay muchos autores que llaman fuerza viva al producto $m\,v^2$; pero con esta definición se dificultan los enunciados de ciertas propiedades, que después veremos, y por este motivo adoptamos la primera definición.

Fuerza de inercia, o simplemente *inercia* de un móvil, en un instante determinado, es el vector $-\,m\,[G]$, igual y de sentido contrario a la fuerza $[F]$ aplicada al móvil.

La fuerza de inercia no es, como pudiera creerse, una simple ficción convencional, sino que representa en cada instante la *reacción* real que el móvil ejerce sobre el órgano que le hace estar sometido a la fuerza $[F]$.

Pasemos ya a la demostración de los teoremas generales a que antes nos hemos referido.

439. Teorema de los trabajos virtuales.—*La condición necesaria y suficiente para que un punto esté en equilibrio, en una posición determinada, es que el trabajo virtual de la fuerza aplicada al móvil, en dicha posición, sea nulo.*—La expresión

$$\delta\, T\, F = X\, \delta\, x + Y\, \delta\, y + Z\, \delta\, z$$

demuestra que si $X = Y = Z = o$, será $\delta\, T\, F = o$, y recíprocamente, si $\delta\, T\, F = o$, serán necesariamente $X = Y = Z = o$, como queríamos demostrar.

440. Teorema de la cantidad de movimiento.—LEMA.—*La derivada gráfica de la función de las cantidades de movimiento de un punto material es equipolente, en cada instante, a la fuerza que actúa sobre dicho móvil.*—En efecto, el vector $[V_\rho]$, de la figura 285, tiene por proyecciones sobre los ejes coordenados las cantidades **(160)**

$$(V_\rho)_x = \frac{d\,\alpha}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\, m\, \frac{d\,x}{d\,t} = m\frac{d^2\,x}{d\,t^2} = X$$

$$(V_\rho)_y = \frac{d\,\beta}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\, m\, \frac{d\,y}{d\,t} = m\frac{d^2\,y}{d\,t^2} = Y$$

$$(V_\rho)_z = \frac{d\,\gamma}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\, m\, \frac{d\,z}{d\,t} = m\frac{d^2\,z}{d\,t^2} = Z$$

y estas relaciones demuestran la equipolencia a que se refiere el enunciado

$$[V_\rho] = \frac{d}{d\,t}\, m\, [v] \equiv [F]\,.$$

TEOREMA.—Proyectando sobre un eje cualquiera la equipolencia anterior se deduce que *la derivada respecto al*

tiempo de la cantidad de movimiento de un punto, proyectada sobre un eje, es igual a la proyección sobre el mismo de la fuerza aplicada al móvil. Las ecuaciones

$$\frac{d\alpha}{dt} = X, \quad \frac{d\beta}{dt} = Y, \quad \frac{d\gamma}{dt} = Z$$

constituyen la expresión de esta propiedad aplicada a los ejes coordenados.

Otro enunciado del teorema.—Multiplicando por dt la equipolencia $\frac{d}{dt} m\,[v] \equiv [F]$, resulta

$$d\,m\,[v] \equiv [F]\,dt \quad \text{y} \quad \Delta\, m\,[v] \equiv \int_{t_1}^{t_2} [F]\,dt$$

y éstas, proyectadas sobre un eje cualquiera, nos dicen que *los incrementos elementales y finitos de la cantidad de movimiento de un punto, proyectados sobre un eje, son iguales a la proyección sobre el mismo de las impulsiones correspondientes de la fuerza que actúa sobre el expresado móvil.*

La expresión simbólica de esta propiedad, aplicada a los ejes coordenados, es

$$d\alpha = d\,m\,v_x = X\,dt, \quad \Delta\, m\,v_x = m\,v_{2x} - m\,v_{1x} = \int_{t_1}^{t_2} X\,dt$$

$$d\beta = d\,m\,v_y = Y\,dt, \quad \Delta\, m\,v_y = m\,v_{2y} - m\,v_{1y} = \int_{t_1}^{t_2} Y\,dt$$

$$d\gamma = d\,m\,v_z = Z\,dt, \quad \Delta\, m\,v_z = m\,v_{2z} - m\,v_{1z} = \int_{t_1}^{t_2} Z\,dt\,.$$

440'.—*Corolarios: 1.º Cuando la proyección de la*

fuerza sobre un eje es nula, el movimiento proyectado sobre este eje es uniforme.

Puesto que de la condición $X = o$ se deduce

$$\alpha = m \frac{dx}{dt} = constante \quad y \quad x = \frac{\alpha}{m} t + x_o ,$$

que es la ecuación de un movimiento de la indicada naturaleza.

2.° *Cuando la fuerza es constantemente paralela a un plano, al cual haya sido también paralela la velocidad inicial, la trayectoria del móvil es plana y su plano paralelo al director de la fuerza.*—En efecto, el movimiento proyectado sobre un eje perpendicular a dicho plano es de la forma $x = \frac{\alpha}{m} t + x_o$, pero ahora es $\alpha = m v_x = o$, por ser $v_{ox} = o$, y la trayectoria estará situada en el plano $x = x_o$, paralelo al YZ, que se ha supuesto ser el director de la fuerza.

El plano de la trayectoria está determinado por la dirección de la fuerza y la de la velocidad en una posición cualquiera, que generalmente suele ser la inicial.

3.° *Cuando la fuerza es constantemente paralela a un eje, la trayectoria es plana y su plano paralelo a dicho eje.*—En efecto, las proyecciones del movimiento sobre dos ejes perpendiculares al director de la fuerza serán de la forma

$$x = \frac{\alpha}{m} t + x_o , \quad y = \frac{6}{m} t + y_o ,$$

de donde, eliminando a t, resulta $\frac{x - x_o}{\alpha} = \frac{y - y_o}{6}$, que es la ecuación de un plano paralelo al eje $o Z$, que se ha supuesto ser el director de la fuerza.

El plano de la trayectoria estará determinado en este

caso, como en el anterior, por la dirección de la fuerza y la de la velocidad en una posición cualquiera del móvil.

Si la velocidad inicial es cero, o tiene la misma dirección que la fuerza, la trayectoria es rectilínea, con la dirección del eje director de la fuerza, como dada por las ecuaciones $x = x_0$, $y = y_0$.

4.° *Cuando la fuerza sea constantemente nula, el movimiento proyectado sobre cualquier eje es uniforme y el del espacio rectilíneo y uniforme.* — La trayectoria estará determinada por la línea de acción de la velocidad en una posición cualquiera del móvil.

441. Teorema del momento de la cantidad de movimiento. — LEMA. — *La derivada gráfica de la función de los momentos de la cantidad de movimiento de un punto material es, en cada instante, equipolente al momento, respecto al polo de dicha función, de la fuerza que actúa sobre el expresado móvil.* En efecto, el vector $[V_\sigma]$, de la figura 286, tiene por proyecciones **(160)** sobre los ejes coordenados las cantidades

$$(V_\sigma)_x = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{dy}{dt} m \frac{dz}{dt} + y m \frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} m \frac{dy}{dt} - z m \frac{d^2 y}{dt^2} =$$

$$= y Z - z Y = M_x [F]$$

$$(V_\sigma)_y = \frac{d\mu}{dt} = \frac{dz}{dt} m \frac{dx}{dt} + z m \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} m \frac{dz}{dt} - x m \frac{d^2 z}{dt^2} =$$

$$= z X - x Z = M_y [F]$$

$$(V_\sigma)_z = \frac{d\nu}{dt} = \frac{dx}{dt} m \frac{dy}{dt} + x m \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} m \frac{dx}{dt} - y m \frac{d^2 x}{dt^2} =$$

$$= x Y - y X = M_z [F]$$

y estas relaciones demuestran la equipolencia a que se refiere el enunciado

$$[V_\sigma] = \frac{d[\sigma]}{dt} \equiv M_o [F] = [S] .$$

TEOREMA.—Proyectando sobre un eje cualquiera la equipolencia anterior se deduce que *la derivada respecto al tiempo del momento de la cantidad de movimiento con relación a un eje es igual al momento de la fuerza aplicada al móvil respecto al mismo eje.* Las ecuaciones

$$\frac{d\lambda}{dt} = y\,Z - z\,Y = L,$$

$$\frac{d\mu}{dt} = z\,X - x\,Z = M,$$

$$\frac{d\nu}{dt} = x\,Y - y\,X = N$$

expresan la propiedad anterior aplicada a los tres ejes coordenados.

Otro enunciado de este teorema.—Multiplicando por $d\,t$ la equipolencia $\frac{d\,[\sigma]}{d\,t} \equiv M_o\,[F]$, resulta $d\,[\sigma] \equiv M_o\,[F]\,d\,t$, y esta última, proyectada sobre un eje cualquiera, nos dice que *los incrementos elementales del momento de la cantidad de movimiento de un punto con relación a un eje son iguales a los momentos, respecto al mismo eje, de las impulsiones correspondientes de la fuerza aplicada al punto móvil.* (*)

La expresión simbólica de esta propiedad, aplicada a los ejes coordenados, es

$$d\,\lambda = d\,M_x\,m\,[v] = M_x\,[F]\,dt = y\,.\,Z\,dt - z\,.\,Y\,dt,$$

$$d\,\mu = d\,M_y\,m\,[v] = M_y\,[F]\,dt = z\,.\,X\,dt - x\,.\,Z\,dt,$$

$$d\,\nu = d\,M_z\,m\,[v] = M_z\,[F]\,dt = x\,.\,Y\,dt - y\,.\,X\,dt.$$

(*) Fácil es ver que esta propiedad no puede generalizarse al caso de incrementos finitos, como se hizo en el teorema de la cantidad de movimiento.

442. Teorema de las áreas.—*Cuando el momento de la fuerza aplicada a un punto es nulo, respecto a un eje, el movimiento areolar del móvil proyectado sobre un plano perpendicular a dicho eje, es uniforme.*—En efecto, siendo por ejemplo $N = o$, se verificará

$$\gamma = x\, m \frac{dy}{dt} - y\, m \frac{dx}{dt} = constante$$

y como la velocidad areolar del movimiento proyectado sobre $X\ Y$ es **(211)**

$$n = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = \frac{\gamma}{2\, m},$$

resulta $A = \frac{\gamma}{2\, m}\, t + A_o$, que es la ecuación de un movimiento de la naturaleza expresada.

Cuando un movimiento satisface las condiciones de este teorema, se dice que *cumple la ley de las áreas* en el plano correspondiente.

442'.—*Corolarios: 1.º Cuando el momento de la fuerza es nulo con relación a un punto, se verifica la ley de las áreas en todos los planos que pasan por dicho punto.*—Puesto que trazando un eje cualquiera Δ por dicho punto, será $M_\Delta\,[F] = o$ y estaremos en el caso del teorema para el plano perpendicular a Δ.

2.º Cuando el momento de la fuerza es nulo con relación a un punto, la trayectoria del móvil es plana y su plano contiene a dicho punto.—En efecto, siendo $M_o\,[F] = o$, la derivada lineal de la función de los momentos de $m\,[v]$ se anula, el vector $[\gamma]$ permanece constante en magnitud y dirección, la función gráfica del movimiento será plana y su indicatriz o trayectoria del móvil cumplirá las condiciones del enunciado.

La ecuación analítica del plano de la trayectoria, siendo $\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\gamma}$ las del vector $[\sigma]$, será evidentemente $\lambda x + \mu y + \gamma z = o$.

La velocidad areolar del movimiento proyectado sobre un plano, donde se verifique la ley de las áreas, se obtiene según hemos visto, proyectando el vector $\frac{\sigma}{2m}$ sobre el eje perpendicular a dicho plano y de aquí se deduce que, cuando se verifique dicha ley en todos los planos que pasan por un punto, el plano de mayor velocidad areolar *(máximun de las áreas)* es el perpendicular al vector $[\tau]$, o sea el plano de la trayectoria.

443. Observación.—Por la importancia que tiene en las aplicaciones, observaremos especialmente que las fuerzas centrales cumplen las condiciones del corolario anterior y producirán necesariamente trayectorias planas verificando la ley de las áreas.

El plano de la trayectoria estará determinado por el centro del movimiento y la velocidad del móvil en una posición cualquiera, y es evidente que si la velocidad inicial es nula, o tiene la dirección de la fuerza, la trayectoria será rectilinea y estará determinada por el centro y la posición inicial del móvil.

444. Teorema de D'Alembert. — *En el movimiento de un punto material están siempre en equilibrio las fuerzas aplicadas a dicho punto y la de inercia desarrollada por el móvil.*—Esta propiedad es una consecuencia inmediata de la definición de fuerza de inercia y hubo una época en que tuvo gran importancia, por haber permitido el planteo y resolución de un gran número de cuestiones dinámicas, refiriéndolas a problemas de estática; en el estado actual de la Mecánica sólamente ofrece este teorema cierto interés histórico.

445. Teorema de la fuerza viva.—*El incremento de fuerza viva que experimenta en su movimiento un punto material, en un tiempo cualquiera, es igual al trabajo desarrollado por la fuerza en el mismo intervalo de tiempo.*—De la expresión **(379)**

$$d\,TF = F_t \,.\, d\,e = m\,\frac{d\,v}{d\,t}\,d\,e = m\,v\,d\,v = d\,\frac{m\,v^2}{2}$$

se deduce que el enunciado es cierto en un intervalo de tiempo infinitesimal $d\,t$; e integrando entre t_o y t resulta

$$\frac{m\,v^2}{2} - \frac{m\,v_o^{\,2}}{2} = \Big(TF\Big)_{t_o}^{t} = \int_{t_o}^{t} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\,,$$

que indica, como queríamos demostrar, que la propiedad enunciada es también cierta para intervalos cualesquiera de tiempo.

Cuando se verifica que para $t = t_o$ es $v_o = o$, se obtiene

$$\frac{m\,v^2}{2} = \int_{t_o}^{t} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\,;$$

es decir, que *a partir del instante en que la velocidad del móvil es nula, la fuerza viva adquirida es igual al trabajo desarrollado.*

446. Energía del punto material en movimiento.—De conformidad con la definición general de *energía*, que en el número **417** establecimos, la fuerza viva del movimiento de un punto es una forma de su energía, puesto que equivale a un cierto trabajo desarrollado; esta energía recibe el nombre de *cinética*, para distinguirla de la potencial, que ya hemos dado a conocer. Según esto, la expresión de la energía cinética de un punto material, se encontrará sumando al trabajo desarrollado por la fuerza, desde que se aplicó al móvil, la fuerza viva inicial de éste

$$E_c = \frac{m v^2}{2} = \int_{t_o}^{t} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \frac{m v_o^2}{2}$$

y de aquí que el cálculo de dicha energía quede reducido a la determinación de la integral del trabajo, en los diversos casos que pueden ocurrir y que ya hemos estudiado en el capítulo primero.

Cuando la fuerza sea potencial, se relacionan las dos energías por la ecuación siguiente

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m v_o^2}{2} = \int_{t_o}^{t} - dV = V_o - V,$$

de donde resulta

$$V + \frac{m v^2}{2} = V_o + \frac{m v_o^2}{2} = constante;$$

es decir, que en el movimiento de un punto material bajo la acción de fuerzas potenciales, se verifica la notable propiedad de *ser constante la suma de las energías cinética del móvil y potencial de la fuerza.*

Esta suma constante se llama energía *total* del movimiento del punto, deduciéndose de dicha expresión las consecuencias siguientes:

1.ª *Cuando un punto material se mueve en un campo potencial sobre una superficie equipotencial, su velocidad es constante.*

2.ª *Cuando la trayectoria corta varias veces a una superficie equipotencial, cada vez que pasa el móvil por dichos puntos de intersección, lo hace con la misma velocidad.*

3.ª *Los máximos de la velocidad se corresponden con los mínimos del potencial y recíprocamente.*

4.ª *Si en la trayectoria hay un puuto de velocidad nula y otro de potencial cero, la energía total del movimiento representa el trabajo que tiene que desarrollar la fuerza para pasar al móvil desde el primero al segundo de dichos puntos.*

Conviene fijarse en que, para una posición cualquiera, la energía cinética representa *trabajo desarrollado* y la potencial *trabajo a desarrollar.*

III

EJEMPLOS ESPECIALES DEL MOVIMIENTO DE UN PUNTO MATERIAL

447. Movimientos planos y movimientos rectilíneos.— Cuando el movimiento de un punto es plano, se simplifica notablemente el estudio de sus propiedades tomando el plano de la trayectoria por uno de los coordenados, con lo que las ecuaciones de Mac-Laurin se reducen a las dos de proyección sobre los ejes contenidos en dicho plano, y cuando se trata de movimientos rectilíneos la simplificación será mayor, haciendo que la trayectoria se confunda con uno de los ejes coordenados; de aquí la conveniencia de recordar las siguientes reglas, ya deducidas, para conocer de antemano, en algunos casos, si la trayectoria del móvil ha de ser plana o rectilínea.

La trayectoria de un punto material será plana en los casos siguientes:

1.° *Cuando la fuerza sea constantemente paralela a un plano al cual haya sido también paralela la velocidad inicial.*

2.° *Cuando la fuerza sea constantemente paralela a una dirección determinada y la velocidad inicial sea de distinta dirección que la fuerza.*

3.° *Cuando la fuerza es central y la velocidad inicial no pasa por el centro.*

El movimiento de un punto material será rectilíneo en los casos siguientes:

1.° *Cuando la fuerza sea constantemente paralela a una*

dirección determinada y la velocidad inicial sea nula o de la misma dirección que la fuerza.

2.° *Cuando la fuerza sea central y la velocidad inicial sea nula o dirigida al centro.*

448. Observación.—Cuando la fuerza que obra sobre el móvil sea resultante de otras fuerzas, tales que cada una hubiera de producir trayectoria plana, y el plano de situación de todas ellas sea el mismo, la resultante de dichas fuerzas producirá también en el móvil un movimiento plano, y del mismo modo, cuando las fuerzas componentes produjeran separadamente trayectorias rectilíneas, con la misma recta de situación, el movimiento resultante será también rectilíneo.

Pasemos ya a examinar los siguientes ejemplos de movimiento de un punto material bajo la acción de varias leyes de fuerza que conviene estudiar.

449. Fuerza constante en magnitud y dirección obrando sobre un punto material dotado de velocidad inicial de la misma dirección que la fuerza.—Tomemos por eje coordenado $o\,X$ la recta de situación de la trayectoria y sean x_o y v_o las circunstancias iniciales de posición y velocidad y G la aceleración constante que la fuerza F produce en el móvil.

La ecuación diferencial $m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = m\,G$ se reduce a $\dfrac{d^2x}{dt^2} = G$, e integrada dos veces conduce a las ecuaciones

$$v = \frac{dx}{dt} = G\,.\,t + v_o,\; x = \frac{1}{2}\,G\,t^2 + v_o\,t + x_o\,,$$

que expresan que el movimiento es, como no podía menos de suceder, uniformemente variado.

Cuando F y v_o son del mismo sentido, la velocidad $v = G\,.\,t + v_o$ es constantemente creciente en valor modu-

lar y el movimiento es *uniformemente acelerado*; si F y v_o son de sentido contrario, la velocidad $v = -G \cdot t + v_o$ es primero decreciente en valor modular, hasta reducirse a cero en el instante $t = \frac{v_o}{G}$; el movimiento es en este intervalo de tiempo *uniformemente retardado*; a partir de dicho instante el valor modular de v crece indefinidamente, con signo contrario a v_o, y el movimiento vuelve a ser acelerado.

A esta clase de movimientos rectilíneos le son aplicables las propiedades generales, independientes de la forma de la trayectoria, establecidas en Cinemática, para los movimientos uniformemente variados **(215** y **230)**.

450. Caída de un punto material abandonado a su propio peso, sin velocidad inicial.—Este movimiento es un caso particular del anterior que, por su importancia, estudiamos separadamente.

El peso de los cuerpos es una fuerza compuesta de otras dos en la forma que más adelante detallaremos; por ahora basta a nuestro objeto que concibamos a dicha fuerza como constante en magnitud y dirección, cuya hipótesis es admisible siempre que los movimientos que se consideren no tengan un gran desarrollo en altura y latitud. El valor de la aceleración producida por la pesantez ya hemos dicho que es $g = 9{,}81\ m \times 1^s \times 1^s$ o $g = 981\ \mathrm{L\,T^{-2}}$ en unidades cegesimales.

Tomando por eje $o\,Z$ la vertical de la posición inicial del móvil y el origen en el mismo punto, resultan las ecuaciones de movimiento y velocidad $z = \frac{1}{2} g t^2$ y $v = g \cdot t$, como casos particulares de las establecidas en el número anterior.

La velocidad adquirida por el móvil, que cae de una altura $z = h$, es

$$v = g\,t = g\sqrt{\frac{2\,h}{g}} = \sqrt{2\,g\,h}$$

y el tiempo que tarda en adquirir dicha velocidad, o sea en caer

$$t = \frac{\sqrt{2\,g\,h}}{g} = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}\,.$$

La energía potencial del móvil, en el instante inicial, es **(429)** $E_p = V = m\,g\,h$ y nula la cinética; al llegar al suelo será $V = o$ y

$$E_c = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2}\,.\,2\,g\,h = m\,g\,h\,.$$

En una posición intermedia cualquiera, $z = h - z'$, serán

$$E_p = V = m\,g\,(h - z')\,, \quad E_c = \frac{m v^2}{2} = m\,g\,z'\,,$$

de donde

$$E = E_c + E_p = m\,g\,(h - z') + m\,g\,z' = m\,g\,h\,,$$

como debía suceder.

451. Subida de un punto material lanzado con velocidad inicial en sentido vertical ascendente.—Es también un caso particular del ejemplo del número **449**; las ecuaciones del movimiento y velocidad son ahora

$$z = -\frac{1}{2}\,g\,t^2 + v_o\,t\,, \quad v = -\,g\,t + v_o\,,$$

suponiendo el eje $o\,Z$ coincidiendo con la vertical ascendente de la posición inicial del móvil.

El punto más alto de la trayectoria corresponde al instante $t = \dfrac{v_o}{g}$ que anula a v y su altura es

$$h = -\frac{1}{2}\,g\,.\,\frac{v_o^2}{g^2} + v_o\,\frac{v_o}{g} = \frac{v_o^2}{2\,g}\,;$$

a partir de esta posición el movimiento se hace descendente, pasando la velocidad por los mismos valores que a la subida en todas las posiciones del móvil (**446-2.ª**).

452. Fuerza central de atracción, proporcional a la distancia, obrando sobre un punto material con velocidad inicial dirigida hacia el mismo centro.—Este caso se presenta en la acción de las fuerzas elásticas y el movimiento que resulta es el llamado *armónico simple* o *vibración rectilínea*.

Tomemos la trayectoria por eje $o\,X$ y sean x_o y v_o las circunstancias iniciales de posición y velocidad del móvil; la ecuación diferencial del movimiento es $m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = K\,x$, siendo K el coeficiente de proporcionalidad de F y x; este coeficiente será necesariamente negativo y se podrá representar por $K = -\,\omega^2\,m$, convirtiéndose la expresada ecuación en

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\omega^2 x \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = o\,.$$

que es una lineal, sin segundo miembro, cuya primitiva será de la forma

$$x = c'\,e^{\omega t\sqrt{-1}} + c''\,e^{-\omega t\sqrt{-1}}\,,$$

determinándose las constantes c' y c'' por las condiciones $x = x_o$ y $v = v_o$, correspondientes a $t = o$, siendo

$$c' = \frac{1}{2}\left(x_o + \frac{v_o}{\omega\sqrt{-1}}\right) \quad \text{y} \quad c'' = \frac{1}{2}\left(x_o - \frac{v_o}{\omega\sqrt{-1}}\right).$$

La ecuación del movimiento se convierte con estos valores en

$$x = x_o \cdot \frac{e^{\omega t\sqrt{-1}} + e^{-\omega t\sqrt{-1}}}{2} + \frac{v_o}{\omega} \cdot \frac{e^{\omega t\sqrt{-1}} - e^{-\omega t\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\,,$$

que, mediante las conocidas fórmulas de Euler

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos\alpha = \frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\alpha\sqrt{-1}}}{2},$$

se reduce a

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t .$$

Tomando ahora sobre los lados de un ángulo recto (fig. 287) las longitudes $o\,A = x_0$ y $A\,B = \frac{v_0}{\omega}$, podremos hacer intervenir en el problema las dos cantidades auxiliares

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \text{áng}\left(t_g = \frac{v_0}{\omega x_0}\right),$$

sustituyendo en la ecuación del movimiento los valores

$$x_0 = a \cos \varepsilon, \quad \frac{v_0}{\omega} = a \operatorname{sen} \varepsilon,$$

que la convierten en

$$x = a \cos (\omega t - \varepsilon)$$

y demuestran que el movimiento originado es, como habíamos anunciado, un movimiento armónico de amplitud a y época ε.

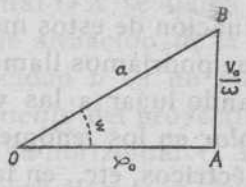


Fig. 287

La velocidad del móvil en un instante cualquiera es

$$v = -a\,\omega \operatorname{sen} (\omega t - \varepsilon)$$

y la aceleración

$$G = -a\,\omega^2 \cos (\omega t - \varepsilon) = -\omega^2 x$$

proporcional a la distancia al centro, como debía suceder.

Los elementos, propiedades y representaciones gráficas de estos movimientos se han estudiado en Cinemática, por

cuyo motivo no nos detendremos ahora en examinarlos **(231** a **235, 251** y **252)**.

Sólamente agregaremos que la *intensidad* del fenómeno físico externo a que dé lugar el movimiento vibratorio, se mide por la energía cinética del elemento móvil al pasar por la posición de equilibrio, admitiendo que dicha intensidad es proporcional a la citada energía.

Representando por h la relación de proporcionalidad y suponiendo igual a la unidad la masa del móvil, resulta

$$I = \frac{h v^2}{2} = h \int_a^0 - \omega^2 x \, dx = \frac{h \omega^2 a^2}{2}$$

o sea que *la intensidad del fenómeno físico producido por un movimiento vibratorio, es proporcional al cuadrado de la amplitud de las vibraciones.*

En cuanto al segundo parámetro ω que figura en la ecuación de estos movimientos, ejerce su influencia en lo que podríamos llamar *calidad* de los fenómenos aludidos, dando lugar a las variaciones de *tono* en el sonido, del *color* en los fenómenos luminosos, de la *tensión* en los eléctricos, etc., en la forma que se estudia en el curso de Física.

453. Fuerza constante en magnitud y dirección obrando sobre un punto material con velocidad inicial de distinta dirección que la fuerza.—Este problema se acostumbra a llamar del *movimiento de proyectiles en el vacío,* porque es el que adquirirían aproximadamente los proyectiles de las armas de fuego, si se pudiera prescindir de la resistencia del aire; en la práctica sólo pueden aplicarse las consecuencias que de este estudio se deduzcan a los movimientos poco extensos y de pequeñas velocidades; pero no obstante esto, conviene examinar con detalle esta clase de movimientos, por servir sus fórmulas como una primera

aproximación del movimiento verdadero de los proyectiles de las armas de fuego.

Si suponemos un arma de esta naturaleza situada en la posición O (fig. 288), lanzando un proyectil en la dirección de su eje y siendo $O\,B\,A$ la trayectoria del mismo, conviene establecer las siguientes definiciones: el ángulo θ_0, que

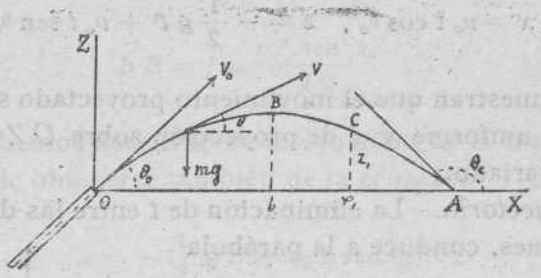


Fig. 288

forma el eje del cañón con la horizontal $O\,X$ se llama *ángulo de proyección*; el plano $X\,Z$ de situación de la trayectoria es el *plano de tiro*, la velocidad v en un punto cualquiera se llama *velocidad remanente* del proyectil, el punto A donde la trayectoria corta a la horizontal $O\,X$ es el *punto de caída* o *impacto* del disparo efectuado, la distancia $O\,A$ se llama *alcance* del arma, y la ordenada máxima $b\,B$ *altura* o *flecha* de la trayectoria; el ángulo θ_c de la tangente a la trayectoria con el eje $O\,X$, en el punto A, es el *ángulo de caída*, la velocidad con que llega el proyectil al mismo punto se llama *velocidad final*; el ángulo θ de la tangente a la trayectoria con la horizontal, en una posición cualquiera, es la *inclinación* de la trayectoria en la posición considerada.

Las ecuaciones diferenciales del movimiento son

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg,$$

o $$\frac{d^2 x}{dt^2} = o\,, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g\,;$$

integradas dan

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_o \cos \theta_o\,, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = -g\,t + v_o \operatorname{sen} \theta_o\,,$$

$$x = v_o\,t \cos \theta_o\,, \quad z = -\frac{1}{2} g\,t^2 + v_o\,t \operatorname{sen} \theta_o\,,$$

que demuestran que el movimiento proyectado sobre el eje OX es uniforme y el de proyección sobre OZ uniformemente variado.

Trayectoria.—La eliminación de t entre las dos últimas ecuaciones, conduce a la parábola

$$z = x \operatorname{tg} \theta_o - \frac{g\,x^2}{2\,v_o^2}(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_o)\,,$$

cuyo eje vertical tiene por ecuación $x' = \dfrac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\,\theta_o}{2\,g}$ y cuyo vértice está situado a la altura $z' = \dfrac{v_o^2 \operatorname{sen}^2 \theta_o}{2\,g}$.

Determinación del alcance.—Si en la ecuación de la trayectoria se hace $z = o$ y se despeja x, será

$$x = A = \frac{2\,v_o^2 \operatorname{tg} \theta_o}{g\,(1 + \operatorname{tg}^2 \theta_o)} = \frac{v_o^2}{g} \operatorname{sen} 2\,\theta_o\,;$$

esta fórmula nos dice que el máximo de A corresponde a $2\,\theta_o = 90°$ o sea $\theta_o = 45°$; el valor de este máximo es $A_m = \dfrac{v_o^2}{g}$.

Duración del trayecto.—Es el tiempo que tarda el proyectil en llegar al punto de caída y se calcula por la fórmula

$$x = v_o\,t \cos \theta_o\,,$$

poniendo en vez de x el valor $A = \frac{v_o^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_o$; así resulta

$$t = \frac{v_o^2 \operatorname{sen} 2\theta_o}{g v_o \cos \theta_o} = \frac{2 v_o \operatorname{sen} \theta_o}{g}.$$

Altura o flecha de la trayectoria.—Es la ordenada máxima

$$b B = f = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2 \theta_o}{2 g}$$

que antes hemos deducido de la ecuación de la trayectoria y que puede obtenerse también de la ecuación

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_o t \operatorname{sen} \theta_o$$

poniendo en vez de t el valor $t = \frac{v_o \operatorname{sen} \theta_o}{g}$.

Angulo de proyección para un alcance determinado.—De la fórmula del alcance se obtiene

$$2\theta_o = \text{áng}\left(\operatorname{sen} = \frac{A g}{v_o^2}\right),$$

que da dos soluciones $2\theta_1$ y $2\theta_2$, que corresponden a ángulos θ_1 y θ_2 complementarios, por ser $2\theta_1 + 2\theta_2 = 180°$.

Las líneas de proyección correspondientes a θ_1 y θ_2 forman ángulos iguales con la del alcance máximo.

Angulo de proyección para que la trayectoria pase por un punto determinado.—Sea el punto $c\,(x_1\ z_1)$ de la figura 288 por donde queremos hacer pasar a la trayectoria; se verificará

$$z_1 = x_1 \operatorname{tg} \theta_o - \frac{g x_1^2}{2 v_o^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_o),$$

$$\frac{g\,x_1^2}{2\,v_o^2}\,\mathrm{tg}^2\,\theta_o - x_1\,\mathrm{tg}\,\theta + \left(z_1 + \frac{g\,x_1^2}{2\,v_o^2}\right) = o,$$

que es una ecuación de segundo grado en $\mathrm{tg}\,\theta_o$ y dará, en general, dos soluciones admisibles, θ_1 y θ_2, con cuyos ángulos de proyección se conseguirá que las trayectorias pasen por c.

Velocidad remanente.—Su valor es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{v_o^2 + g^2\,t^2 - 2\,v_o\,g\,t\,\mathrm{sen}\,\theta_o}\,.$$

Haciendo $t = \dfrac{2\,v_o\,\mathrm{sen}\,\theta_o}{g}$, se obtiene la *velocidad de caída*,

$$v = \sqrt{v_o^2 + 4\,v_o^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta_o - 4\,v_o^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta_o} = v_o\,,$$

igual a la inicial, como debía suceder por la potencialidad de la fuerza productora del movimiento.

Inclinación de la trayectoria.—Su valor se encuentra por la ecuación

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{dz}{dx} = \mathrm{tg}\,\theta_o - \frac{g\,x}{v_o^2}\,(1 + \mathrm{tg}^2\,\theta_o)\,,$$

o en función de t

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{v_z}{v_x} = \frac{-\,g\,t + v_o\,\mathrm{sen}\,\theta_o}{v_o\cos\theta_o} = \mathrm{tg}\,\theta_o - \frac{g\,t}{v_o\cos\theta_o}\,.$$

Para el valor de $t = \dfrac{2\,v_o\,\mathrm{sen}\,\theta_o}{g}$, correspondiente al alcance, resulta

$$\mathrm{tg}\,\theta_c = \mathrm{tg}\,\theta_o - 2\,\mathrm{tg}\,\theta_o = -\,\mathrm{tg}\,\theta_o\,,$$

que nos dice que θ_c y θ_o son suplementarios, o bien iguales si contamos el ángulo de caída hacia el interior de la trayectoria.

Parábola y paraboloide de seguridad.—Si suponemos que la boca de fuego situada en *o* (fig. 289) dispara, variando el ángulo de proyección de *o°* a *180°*, sin salirse del *plano de tiro X Z*, se formarán una serie de trayectorias, cuya envolvente constituye, en dicho plano, la línea de separación de los puntos que pueden ser o no alcanzados por los proyectiles que parten de *o*; dicha envolvente se determina eliminando el parámetro $\text{tg}\,\theta$ entre la ecuación de la trayectoria

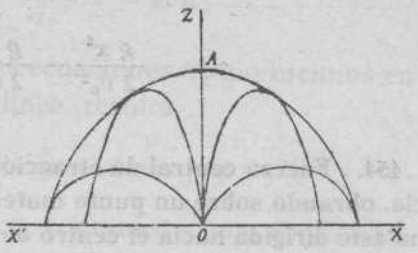


Fig. 289

$$\frac{g\,x^2}{2\,v_0^2}\,.\,\text{tg}^2\,\theta_0 - x\,.\,\text{tg}\,\theta_0 + \left(z + \frac{g\,x^2}{2\,v_0^2}\right) = o$$

y su derivada respecto a $\text{tg}\,\theta_0$, $\frac{g\,x^2}{v_0^2}\,\text{tg}\,\theta_0 - x = o$; así se obtiene la ecuación

$$z = -\frac{g}{2\,v_0^2}\,x^2 + \frac{v_0^2}{2\,g}\,,$$

que es la de una parábola cuyo eje coincide con el coordenado *o Z* y cuyo vértice *A* está a la altura $z = \frac{v_0^2}{2\,g}$, correspondiente a la trayectoria del disparo hecho verticalmente; esta parábola recibe el nombre de *parábola de seguridad* por el papel que desempeña.

Si se supone que el arma puede disparar en todas las direcciones y con ángulos de proyección arbitrarios, se obtendrá la superficie envolvente del haz de trayectorias,

haciendo girar la parábola de seguridad alrededor del eje $o\,Z$ y formando el *paraboloide de seguridad*, cuya ecuación es

$$z = -\frac{g\,x^2}{2\,v_0^2} - \frac{g\,y^2}{2\,v_0^2} + \frac{v_0^2}{2\,g}\,.$$

454. Fuerza central de atracción proporcional a la distancia, obrando sobre un punto material con velocidad inicial que no esté dirigida hacia el centro de atracción. — *Vibración elíptica.* — Supongamos el móvil de masa m, situado en una posición cualquiera M, sometido a la fuerza

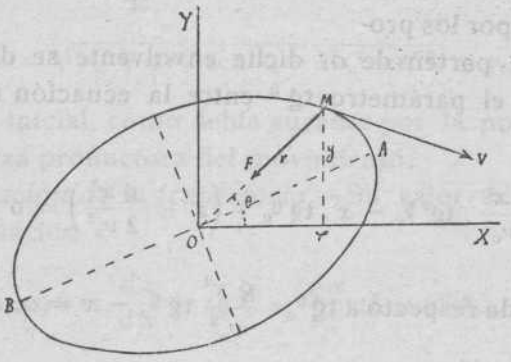


Fig. 290

$$F = K\,r = m\,\omega^2\,r$$

y con velocidad v de dirección cualquiera (fig. 290); las ecuaciones de Mac-Laurin son

$$m\,\frac{d^2\,x}{d\,t} = -\,F\cos\theta = -\,m\,\omega^2\,r\,\frac{x}{r} = -\,m\,\omega^2\,x\,,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -m\omega^2 y\,,$$

o $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y\,;$$

integrando cada una de estas ecuaciones, como hicimos en el caso de la vibración rectilínea, resulta

$$x = a\cos(\omega t - \varepsilon),\quad y = a'\cos(\omega t - \varepsilon')$$

y el movimiento es armónico compuesto con trayectoria elíptica y demás detalles que en Cinemática se han estudiado en esta clase de movimientos (**253** a **256**).

455. Fuerza central de atracción inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro, obrando sobre un punto material con velocidad inicial que no esté dirigida hacia el centro de atracción.—*Movimientos planetarios.*—Las observaciones experimentales de *Kepler* le condujeron a establecer las siguientes leyes a que obedecen los astros secundarios en sus revoluciones alrededor de los principales:

1.ª *Los planetas recorren órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el sol.*

2.ª *La velocidad areolar de los movimientos planetarios alrededor del centro de atracción es constante.*

3.ª *Los cuadrados de los tiempos empleados por los diversos planetas en verificar sus revoluciones son proporcionales a los cubos de los ejes mayores de sus órbitas respectivas.*

Del estudio de estas leyes dedujo *Newton* su famosa *ley de la gravitación universal,* que se expresa diciendo que *todos los cuerpos materiales se atraen en razón directa de sus masas y en razón inversa del cuadrado de su distancia,* es decir, que si dos puntos materiales de masas M y m están a la distancia r, existe entre ellos una fuerza atractiva cuyo valor es $F = \frac{fMm}{r^2}$, siendo f la atrac-

ción de la unidad de masa sobre la unidad de masa a la unidad de distancia, o sea la *constante de la gravitación universal,* que observaciones cuidadosas han permitido valuar en $f = \frac{1}{3862^2} = 67 \times 10^{-9}$ *dinas.*

Aunque el método seguido por Newton para llegar a la fórmula $F = f\frac{Mm}{r^2}$, como expresión de la fuerza productora de los movimientos gravitatorios, fué analítico, nosotros demostraremos sintéticamente que todo punto que se mueva alrededor de un centro, con la ley de fuerza expresada por la fórmula de Newton, verifica las leyes de Kepler. De la segunda no tenemos que ocuparnos, pues el hecho de ser central la fuerza lleva consigo necesariamente la uniformidad del movimiento areolar alrededor del centro de atracción (**443**).

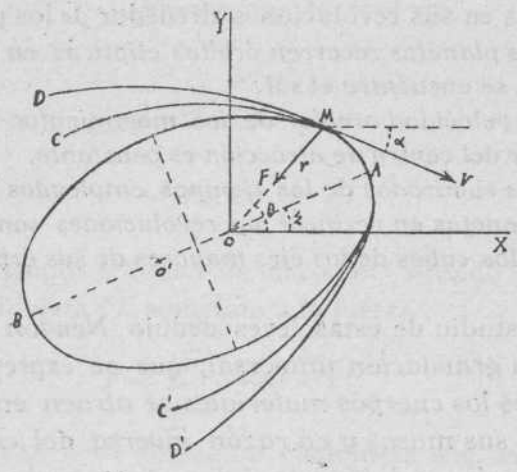


Fig. 291

Las ecuaciones de Mac-Laurin son, representando por K la constante $fM = K$, (fig. 291)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Km}{r^2}\cos\theta\,, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Km}{r^2}\operatorname{sen}\theta\,,$$

o

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K\cos\theta}{r^2}\,, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{K\operatorname{sen}\theta}{r^2}\,;$$

pero la relación cinemática (**209**)

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}c$$

nos dice que $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{c}\cdot\frac{d\theta}{dt}$ y sustituido este valor en las anteriores ecuaciones, las convierte en

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{c}\cdot\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\,, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{K}{c}\cdot\operatorname{sen}\theta\frac{d\theta}{dt}\,,$$

que integradas dan

$$v_x - v_{ox} = -\frac{K}{c}(\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta_o)\,,$$

$$v_y - v_{oy} = \frac{K}{c}(\cos\theta - \cos\theta_o)\,,$$

o

$$\frac{c}{K}\cdot\frac{dx}{dt} = -\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta_o + \frac{c}{K}v_o\cos\alpha = -\operatorname{sen}\theta - e\operatorname{sen}\varepsilon\,,$$

$$\frac{c}{K}\cdot\frac{dy}{dt} = \cos\theta - \cos\theta_o + \frac{c}{K}v_o\operatorname{sen}\alpha = \cos\theta + e\cos\varepsilon\,,$$

representando por $e\operatorname{sen}\varepsilon$ y $e\cos\varepsilon$ los términos que en estas ecuaciones siguen al primero, en los segundos miembros.

Puestas en la forma anterior, multipliquemos la primera por $y = r\operatorname{sen}\theta$ y la segunda por $x = r\cos\theta$; restándolas después se obtiene

$$\frac{c}{K}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = r\left(1 + e\cos(\theta - \varepsilon)\right);$$

pero el paréntesis del primer miembro es

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 2\frac{dA}{dt} = c,$$

de donde resulta, para ecuación polar de la trayectoria, la expresión

$$r = \frac{\frac{c^2}{K}}{1 + e\cos(\theta - \varepsilon)} = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \varepsilon)},$$

que es la ecuación de una cónica de parámetro $2p$ y excentricidad e, referida a un foco como polo y a un eje polar que forma el ángulo ε con el mayor de la elipse, cuando sea elipse, con el transversal de la hipérbola, si es hiperbólica la trayectoria, o con el único de la parábola cuando sea parabólica.

Para averiguar si la trayectoria seguida por un astro es una de las tres clases de curvas cónicas, representadas por la ecuación anterior, se determina el valor de la excentricidad, deducido de las ecuaciones de condición antes establecidas

$$-e\,\mathrm{sen}\,\varepsilon = \mathrm{sen}\,\theta_0 + \frac{c}{K}v_0\cos\alpha,$$

$$e\cos\varepsilon = -\cos\theta_0 + \frac{c}{K}v_0\,\mathrm{sen}\,\alpha,$$

que dan

$$e^2 = 1 + \frac{c^2 v_0^2}{K^2} + \frac{2cv_0}{K}\,\mathrm{sen}\,(\theta_0 - \alpha);$$

cuando sea $e < 1$ será elipse, si es $e > 1$ hipérbola y si fuera $e = 1$ parábola.

La ecuación de la trayectoria y el cálculo de e se simplifican suponiendo al eje polar confundido con los que antes citamos de las tres cónicas, para que sea $\varepsilon = o$, $\theta_o = o$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$; así resulta

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

$$e^2 = 1 + \frac{c^2 v_o^2}{K^2} - 2 \frac{c v_o}{K} = \left(\frac{c v_o}{K} - 1\right)^2,$$

y

$$e = \frac{c v_o - K}{K}.$$

La experiencia prueba que en los planetas y satélites del sistema solar es $\frac{c v_o - K}{K} < 1$ y de aquí que todos estos astros describan órbitas elípticas, de conformidad con la primera ley de Kepler; el resultado de estos cálculos demuestra, además, la posibilidad de órbitas hiperbólicas y parabólicas en los movimientos astrales y justifican, sin necesidad de nuevas hipótesis, los movimientos de los cometas, en los cuales resulta el valor de e tan próximo a la unidad, que en la mayoría se admite que la diferencia es debida a errores de experimentación y se suponen parabólicas sus trayectorias; sólamente existe un corto número en los que dicha diferencia es sensible y les resultan órbitas elípticas muy alargadas (cometas periódicos) o hiperbólicas, según que e sea menor o mayor que la unidad.

Para demostrar la tercera ley de Kepler representemos por

$$a \text{ y } b = \sqrt{a\,p} = \sqrt{\frac{a\,c^2}{K}} \quad (*),$$

los semiejes de la elipse descrita por un planeta y T el tiempo de su revolución; la ley de las áreas expresa que

$$T = \frac{\pi\,a\,b}{\frac{1}{2}\,c} = \frac{2\,\pi\,a}{c} \cdot \sqrt{\frac{a\,c^2}{K}} = 2\,\pi \cdot \sqrt{\frac{a^3}{K}},$$

de donde $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\,\pi^2}{K} = H$, que es constante e independiente de la masa y circunstancias del planeta considerado, luego para todos ellos se podrá formar la relación

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{T_3^2}{a_3^3} = \ldots\ldots H.$$

Las observaciones astronómicas han permitido determinar, con bastante aproximación, la longitud del semieje a de la órbita terrestre y con este dato y los tiempos empleados por los planetas en verificar sus revoluciones, se deduce inmediatamente el semieje mayor de las demás órbitas planetarias.

Para determinar el semieje menor se emplea la fórmula

$$b = \sqrt{a\,p} = \sqrt{\frac{a\,c^2}{K}}$$

que exige el cálculo previo de $c = r^2 \frac{d\,\theta}{d\,t}$.

(*) La fórmula $b = \sqrt{a\,p}$ se obtiene de las relaciones $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ y $a = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e}\right) = \frac{p}{1-e^2}$.

El factor $K = fM$, producto de la constante $f = 67.10^{-9}$ por la masa del sol, se determina por la fórmula

$$fM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = 134 . 10^{24},$$

de la que se deduce el valor de dicha masa

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{f T^2} = 2 \times 10^{33} \text{ gramos},$$

habiendo tomado para a el valor $a = 15288 \times 10^9$ cm y para $T = 365,25 \times 86400 = 315576 . 10^2$ segundos.

Conocida la masa del sol, se encuentran con facilidad las masas de los planetas que tengan satélites, observando los semiejes a' de las órbitas de estos últimos y el tiempo que tardan en verificar sus revoluciones; así, si el semieje de la orbita de la luna es a' y tarda T' en verificar su revolución alrededor de la tierra, tendremos, para el movimiento de la tierra alrededor del sol $fM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ y para el de la luna alrededor de la tiera $fm = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2}$; de estas dos ecuaciones resulta $\frac{M}{m} = \frac{a^3}{a'^3} \times \frac{T'^2}{T^2}$ y la masa de la tierra será

$$m = M \times \frac{a'^3 T^2}{a^3 T'^2} = 6 \times 10^{27} \text{ gramos}.$$

En los planetas que no tienen satélites se sigue, para determinar su masa, otro procedimiento más complicado, fundado en las perturbaciones que experimentan en su movimiento al pasar por las proximidades de los planetas más cercanos.

La masa de la tierra puede determinarse directamente, por la acción que ejerce sobre un punto material cualquiera m': aplicando la fórmula de la gravitación a la caída de dicho punto sobre la superficie de la tierra, resulta $\frac{f m m'}{r^2} = m' g$, o bien

$$m = \frac{g r^2}{f} = \frac{981 \,.\, 637^2 \,.\, 10^{12}}{67 \,.\, 10^{-9}} = 59 \times 10^{26} \text{ gramos},$$

que es, con bastante aproximación, el mismo valor obtenido anteriormente.

Conocida la masa de la tierra, se determina su densidad media por el cociente

$$\delta = \frac{m}{V} = \frac{600 \times 10^{25}}{108 \times 10^{25}} = 5,6$$

que es mayor que la que corresponde a las capas superficiales e indica la existencia de un núcleo o capas interiores formados por materiales más densos que los de la corteza exterior.

456. Determinación de la posición de un planeta por medio de las anomalías.—Para evitar las dificultades de integración de las ecuaciones del movimiento planetario, se emplea, en la determinación de la posición de estos astros, el procedimiento indirecto que vamos a indicar.

Sea $A\,B\,C\,D$ la órbita elíptica de un planeta P (fig. 292) y S la posición del sol en uno de sus focos; tracemos la circunferencia de diámetro $A\,C = 2\,a$ e imaginemos un planeta ficticio P' que recorra esta circunferencia con la condición de estar siempre situado sobre la perpendicular $p\,P$ al eje polar $S\,A$; los ángulos que en una posición cualquiera determinan las rectas $S\,P$ y $o\,P'$, con $S\,A$, se llaman *anomalías* del planeta P, distinguiéndose con el

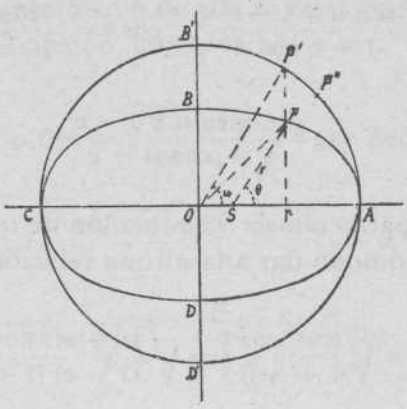


Fig. 292

calificativo de *verdadera* la correspondiente al ángulo $\theta = P\,S\,A$ y *excéntrica* la del planeta ficticio, $u = P'\,o\,A$; entre r, θ y u existen las relaciones siguientes:

$$\frac{p\,P = r \operatorname{sen} \theta}{p\,P' = a \operatorname{sen} u} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2},$$

de donde

$$r \operatorname{sen} \theta = a \operatorname{sen} u \sqrt{1 - e^2},$$

y como

$$r \cos \theta = S\,p = o\,p - o\,S = a \cos u - a \,.\, e = a\,(\cos u - e)$$

resulta, elevando al cuadrado y sumando

$$r^2 = a^2\,(1 - e \cos u)^2 \quad \text{o} \quad r = a\,(1 - e \cos u),$$

que restituído en las anteriores nos da

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\operatorname{sen} u \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos u}, \quad \cos \theta = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u},$$

y

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} u \sqrt{1 - e^2}}{\cos u - e},$$

que servirán para conocer θ en función de u; en la práctica resulta más cómodo dar a la última relación la forma

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta}} = \sqrt{\frac{(1 + e)(1 - \cos u)}{(1 - e)(1 + \cos u)}} =$$

$$= \left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)^{1/2} \times \operatorname{tg} \frac{1}{2} u;$$

esta ecuación, unida a la $r = a(1 - e \cos u)$, proporciona el medio de conocer las coordenadas polares r y θ del planeta, en función del tiempo, cuando sepamos encontrar la relación que liga a la anomalía excéntrica u con la variable t.

Para resolver esta parte de la cuestión que estamos estudiando, se hace intervenir un nuevo planeta ficticio P'', que recorra el círculo $A\,B'\,C\,D'$ (fig. 292) con movimiento uniforme de velocidad angular

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi a b}{\frac{1}{2} c}} = \frac{c}{ab} = \frac{c}{a^2 \sqrt{1 - e^2}},$$

de modo que si se suponen P, P' y P'' juntos en el perihelio A, volverán a reunirse los tres móviles en el mismo punto, al verificar sus revoluciones respectivas alrededor del sol.

El ángulo $\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T}$. se llama *anomalía media* del planeta P y por intermedio de ella se relaciona la anomalía excéntrica con el tiempo, como vamos a ver.

De la ecuación $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\operatorname{sen} u}{\cos u - e}$, se deduce

$$\frac{1}{\cos^2 \theta}\, d\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}\,(1 - e\cos u)}{(\cos u - e)^2}\, du$$

y sustituyendo $\cos \theta = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u}$, resulta

$$d\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos u}\, du;$$

pero sabemos que $r^2\, d\theta = c\, dt$, luego

$$a^2 (1 - e\cos u)^2 \cdot \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e\cos u}\, du = c\, dt,$$

$$a^2 \sqrt{1-e^2}\, du - a^2 e \sqrt{1-e^2} \cos u\, du = c\, dt,$$

de donde

$$a^2 \sqrt{1-e^2}\,(u - u_o) - a^2 e \sqrt{1-e^2}\,(\operatorname{sen} u - \operatorname{sen} u_o) = c\,(t - t_o)$$

y suponiendo $t_o = o$, para $u_o = o$, se obtiene

$$a^2 \sqrt{1-e^2}\,(u - e\operatorname{sen} u) = c\,t = a^2 \sqrt{1-e^2} \cdot \omega \cdot t$$

y, por último, $u - e\operatorname{sen} u = \omega \cdot t$.

Esta ecuación permite determinar, con cuanta aproxi-

mación se quiera, el valor de u correspondiente a uno cualquiera de t, y del valor de u se deducirán, por las fórmulas antes establecidas, los valores de r y θ.

IV

MOVIMIENTO DE UN PUNTO MATERIAL SOMETIDO A FUERZAS DE ENLACE

457. Fuerzas de enlace.—Cuando la fuerza aplicada a un punto material produce en éste una trayectoria distinta de la que nos convendría que siguiera el móvil, para los fines de utilización práctica de dicha fuerza, se comprende la posibilidad de llevarle por la trayectoria conveniente, combinando la fuerza dada con otra u otras en forma tal, que la resultante de todas produzca, por sí sola, la referida trayectoria.

Las fuerzas auxiliares que se emplean con el indicado objeto se llaman *fuerzas de enlace*, y para distinguirlas de las demás que intervengan en los problemas, se da a éstas el nombre de *fuerzas directamente aplicadas*. En cada caso podrá conseguirse el objeto deseado de diversas maneras; pero se entenderá siempre que las fuerzas de enlace toman el valor estrictamente preciso, para producir el cambio de dirección que la fuerza directamente aplicada imprimiría al móvil y llevarle por el camino que desea.

En la práctica se consigue el objeto indicado por medio de las *guías de movimiento* que en Cinemática se han estudiado, y para darnos cuenta de la existencia de las fuerzas de enlace consideremos el siguiente ejemplo: un punto material abandonado a su propio peso, en la posición A, recorrería la vertical $A\,B$ (fig. 293), hasta llegar al plano

horizontal del suelo, que está en la línea $B\,C$; supongamos que, por medio de una guía de movimiento rectilíneo, queremos que el móvil descienda, por su propio peso, por la recta $A\,C$.

En cada instante el móvil M tendiendo a bajar verticalmente, ejercerá una cierta presión sobre la guía $A\,C$ y en virtud de la ley de la conjugación de las fuerzas, la guía devolverá al punto M una reacción igual y de sentido contrario a la acción recibida de M; esta reacción de la guía o *reacción del enlace,* como se acostumbra a llamar, es la fuerza que, juntamente con el peso $m\,g$ del móvil, produce la trayectoria $A\,C$ deseada y dicha reacción será, por consiguiente, la fuerza de enlace que la guía desarrolla.

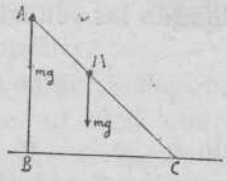


Fig. 293

458. Faltas de libertad que se le pueden imponer al movimiento de un punto.—Las condiciones especiales que en cada caso se impongan a las coordenadas del punto móvil, cuando su movimiento no se verifica libremente bajo la acción de las fuerzas directamente aplicadas, se llaman *faltas de libertad* del móvil y pueden ser de dos clases: faltas de libertad expresadas por ecuaciones determinadas entre las coordenadas del citado móvil y faltas de libertad expresadas por ecuaciones que contengan parámetros variables o dependientes de las circunstancias del movimiento; en todo caso dichas ecuaciones se llaman *ecuaciones de enlace* del móvil.

Si las faltas de libertad son de la forma $\varphi\,(x\,y\,z) = o$, no pueden imponerse más de dos, pues tres faltas de libertad de la expresada forma, inmovilizarían al móvil; la falta de libertad expresada por la ecuación $\varphi\,(x\,y\,z) = o$,

equivale a suponer que se obliga al punto a moverse sobre una superficie fija, representada analíticamente por la indicada ecuación, y las dos faltas de libertad expresadas por las ecuaciones $\varphi(x\,y\,z) = o$ y $\psi(x\,y\,z) = o$, equivalen a suponer que se obliga al móvil a moverse sobre la curva determinada por dichas dos ecuaciones.

Cuando las ecuaciones de enlace sean de la forma

$$\varphi(x\,y\,z\,q_1\,q_2\,\ldots\ldots\,q_n) = o\,,$$

siendo q_1, q_2 ..... q_n parámetros indeterminados, pueden suponérsele al móvil $n + 2$ faltas de libertad como máximun, pues la eliminación de los n parámetros indeterminados entre las $n + 2$ ecuaciones de enlace, conducen a dos ecuaciones determinadas entre las coordenadas x, y, z, y si el número de ecuaciones de enlace fuera $n + 3$, se obtendrían tres relaciones entre dichas coordenadas, produciéndose la inmovilización del móvil.

El parámetro indeterminado que suelen contener las ecuaciones de enlace es el tiempo t, cuando se estudia el movimiento de un punto sobre superficies o curvas móviles, cuyas ecuaciones son de la forma

$$\varphi(x\,y\,z\,t) = o \quad \text{o} \quad \varphi(x\,y\,z\,t) = o \quad \text{y} \quad \psi(x\,y\,z\,t) = o$$

y en estos casos son tres el número máximo de faltas de libertad que se podrán imponer.

459. Fuerza de rozamiento. — Cuando se obliga a moverse un punto material sobre una superficie o trayectoria determinada, además de las fuerzas directamente aplicadas y las de enlace, de que hemos hablado, se desarrollan en la práctica otras fuerzas, llamadas de rozamiento, que en mayor o menor grado se ponen de manifiesto en el contacto de todos los cuerpos materiales.

Esta fuerza, cuya naturaleza y modo de acción estudia-

remos más adelante, interviene en los problemas de movimiento con enlaces, produciendo su consideración complicaciones, que nos conviene eliminar por ahora, suponiendo en esta teoría que no existe dicha fuerza, es decir, que el movimiento se verificará exclusivamente bajo la acción de las fuerzas directamente aplicadas y las de enlace necesarias para obligar al móvil a cumplir las condiciones que a su trayectoria se le quieran imponer.

460. Dirección de las fuerzas de enlace.—Supongamos el caso más sencillo de movimiento no libre que puede ocurrir, o sea aquel en que se le impone al móvil la falta de libertad expresada por la ecuación $\varphi(x\,y\,z) = o$, que equivale a obligar al punto a moverse sobre una superficie determinada.

La experiencia demuestra que la fuerza de enlace necesaria para que, combinada con las directamente aplicadas y la de rozamiento, obligue al punto a permanecer sobre dicha superficie es indeterminada en dirección, pudiendo formar ángulos más o menos grandes con la normal a la superficie, dentro de cierto límite máximo, que en cada caso depende de la naturaleza de los cuerpos en contacto; pero la misma experiencia demuestra que cuando las superficies de los cuerpos en contacto se preparan convenientemente, para disminuir los efectos del rozamiento, el límite máximo de separación de la fuerza de enlace respecto a la normal a la superficie disminuye rápidamente y si bien no es posible en la práctica anular por completo el rozamiento de los cuerpos en contacto, es lógico suponer que, si dicho efecto se consiguiera, la fuerza de enlace quedaría determinada en dirección, en cada posición del móvil, por la normal a la superficie sobre la cual se verifica el movimiento.

Admitiremos en virtud de lo dicho, que la fuerza de enlace necesaria para mantener a un punto móvil sobre

una superficie determinada sin rozamiento, es en cada instante normal a la expresada superficie, y que la fuerza de enlace necesaria para obligar a un punto material a seguir una trayectoria determinada sin rozamiento, será normal a la expresada trayectoria, como resultante de las dos fuerzas de enlace necesarias para mantener al punto, al mismo tiempo, sobre las dos superficies

$$\varphi(x\,y\,z) = o \quad \text{y} \quad \psi(x\,y\,z) = o$$

cuya intersección forma la trayectoria dada.

Si las ecuaciones de enlace dependen del tiempo, se supone también que la fuerza de enlace correspondiente a cada una de ellas, es normal a la superficie móvil que representan.

461. Trabajo de las fuerzas de enlace.—La dirección que se ha señalado a las fuerzas de enlace demuestra que el trabajo de las mismas, en los desplazamientos reales del móvil sobre su trayectoria, será siempre nulo, y si en los desplazamientos virtuales se admite que éstos tengan lugar sobre las superficies o curvas que cumplen las condiciones de enlace, también serán nulos los trabajos virtuales correspondientes de las citadas fuerzas. Los desplazamientos virtuales que cumplan la expresada condición se llaman *desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces.*

462. Ecuaciones diferenciales del movimiento de un punto material con enlaces sin rozamiento.—Sea $[F]$ la fuerza directamente aplicada al punto, $[N]$ la de enlace y $[R]$ su resultante, que por sí sola hace cumplir al movimiento del punto las condiciones que las ecuaciones de enlace le imponen. Esta consideración nos dice que el movimiento del punto con enlaces puede estudiarse como un movimiento libre, siempre que se sustituya la fuerza directamente aplicada por la expresada resultante $[R] \equiv [F] + [N]$;

según esto las ecuaciones de Mac-Laurin correspondientes al movimiento de un punto con enlaces serán

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu,$$

siendo X, Y y Z las proyecciones de la fuerza directamente aplicada y $\cos\lambda$, $\cos\mu$ y $\cos\nu$ los cosenos directores de la fuerza de enlace.

Las ecuaciones anteriores no bastan en este caso para determinar las ecuaciones finitas del movimiento, por la presencia en los segundos miembros de las cuatro incógnitas N, $\cos\lambda$, $\cos\mu$ y $\cos\nu$; pero este inconveniente se subsana agregando a las ecuaciones de Mac-Laurin las complementarias que de las condiciones de los enlaces se deducen, en número suficiente para hacer el problema determinado y posible, en la forma que vamos a ver.

463. Ecuación complementaria de las de Mac-Laurin en el movimiento de un punto sobre una superficie.—En este caso los cosenos directores de la fuerza de enlace son funciones determinadas de las coordenadas del móvil y bastará agregar a las ecuaciones de Mac-Laurin la ecuación de enlace, representativa de la superficie en que se desarrolla el movimiento del punto material considerado.

Si dicha ecuación es $\varphi(x\ y\ z) = o$ serán

$$\cos\lambda = \frac{\dfrac{d\varphi}{dx}}{\sqrt{\left(\dfrac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{d\varphi}{dz}\right)^2}} = \Delta\frac{d\varphi}{dx},$$

$$\cos\mu = \Delta\frac{d\varphi}{dy} \quad \text{y} \quad \cos\nu = \Delta\frac{d\varphi}{dz},$$

con cuyas notaciones, las ecuaciones del movimiento, formando sistema determinado, son

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\Delta\frac{d\varphi}{dx}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\Delta\frac{d\varphi}{dy},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\Delta\frac{d\varphi}{dz}, \quad \varphi(x\,y\,z) = o.$$

464. Ecuaciones complementarias en el movimiento de un punto sobre una curva.—En este caso los cosenos directores de la fuerza de enlace son incógnitas que exigen, juntamente con N, cuatro ecuaciones complementarias para que el problema del movimiento quede determinado; dos de éstas estarán dadas por las ecuaciones de la trayectoria, o sean las dos ecuaciones de enlace dadas, otra será la conocida relación

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

que liga los cosenos directores de una recta cualquiera referida a ejes rectangulares y la última se establecerá expresando la condición de perpendicularidad de la fuerza de enlace respecto a la tangente a la trayectoria, cuyos cosenos directores son

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

de este modo se forma, para estudiar el movimiento de un punto sobre una trayectoria determinada, con fuerzas de enlace, el sistema de ecuaciones siguiente:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + N\cos\lambda,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + N\cos\mu,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + N\cos\nu,$$

$$\varphi(x\,y\,z) = o, \quad \psi(x\,y\,z) = o,$$

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

$$\frac{dx}{ds}\cos\lambda + \frac{dy}{ds}\cos\mu + \frac{dz}{ds}\cos\nu = o,$$

cuya integración dará las ecuaciones finitas del movimiento.

465. Cálculo de la fuerza de enlace en el movimiento de un punto sobre una superficie.—Las ecuaciones generales establecidas en el número **463** no se prestan al cálculo directo de la fuerza de enlace con la comodidad que las ecuaciones de Euler.

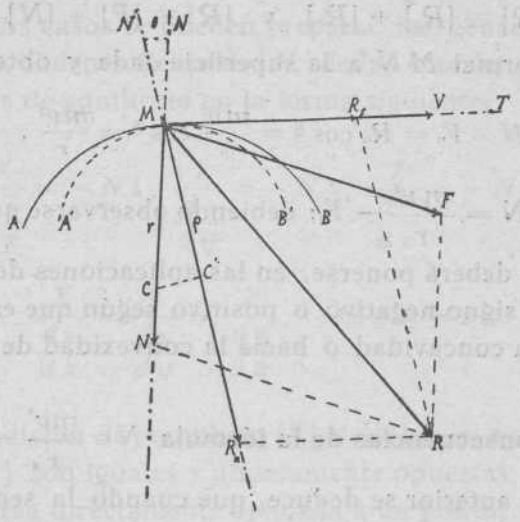


Fig. 294

Consideremos, en la figura 294, la trayectoria $A\,B$ del móvil, formada por una curva cualquiera situada sobre la superficie $\varphi(x\,y\,z) = o$; sea $[F]$ la fuerza directamente

aplicada en dirección arbitraria, $[N]$ la de enlace situada sobre la normal MN a la superficie dada, $[R]$ la resultante de $[F]$ y $[N]$, situada en el plano osculador de la trayectoria, determinado por la tangente MT y la normal principal MN'. Tracemos la sección normal de la superficie, $A'B'$, tangente a la trayectoria y siendo C el centro de curvatura de esta sección en M, sabemos que el C' de la trayectoria, en el mismo punto, será, por el *teorema de Meusnier*, la proyección ortogonal del C sobre la normal principal de la trayectoria en el punto M; llamando θ el ángulo del plano de la sección $A'B'$ con el osculador AB, ángulo cuyo rectilíneo correspondiente es el formado por MN y MN', tendremos $\rho = r \cos \theta$, representando por r y ρ los respectivos radios de curvatura de las dos curvas $A'B'$ y AB.

Con estos datos proyectemos las equipolencias

$$[R] \equiv [R_n] + [R_t] \quad \text{y} \quad [R] \equiv [F] + [N],$$

sobre la normal MN a la superficie dada y obtendremos

$$N + F_n = R_n \cos \theta = \frac{mv^2}{\rho} \cos \theta = \frac{mv^2}{r},$$

de donde $N = \dfrac{mv^2}{r} - F_n$; debiendo observarse que la proyección F_n deberá ponerse, en las aplicaciones de esta fórmula, con signo negativo o positivo según que esté dirigida sobre la concavidad o hacia la convexidad de la superficie dada.

466. Consecuencias de la fórmula $N = \dfrac{mv^2}{r} - F_n$.—De la fórmula anterior se deduce, que cuando la sección normal tangente a la trayectoria sea rectilínea, caso que puede ocurrir en las superficies regladas y ocurre siempre en un plano, el radio r es infinito y la fuerza de enlace estará determinada por la componente normal F_n de la fuerza directamente aplicada con signo contrario.

Del mismo modo se ve que la acción $[-N]$ que el punto en movimiento ejerce sobre la superficie que le sustenta, se compone de dos sumandos, uno dependiente de la fuerza directamente aplicada, y otro directamente proporcional al cuadrado de la velocidad, o sea a la fuerza viva del móvil, e inversamente proporcional al radio de curvatura r de la referida sección normal de la superficie.

467. Posiciones de equilibrio en el movimiento de un punto sobre una superficie.—Estarán determinadas dichas posiciones por la ecuación $\varphi(x\,y\,z) = o$ y las

$$X + N\Delta\frac{d\varphi}{dx} = o\,,\quad Y + N\Delta\frac{d\varphi}{dy} = o\,,\quad Z + N\Delta\frac{d\varphi}{dz} = o\,,$$

que forman un sistema determinado para el cálculo de x, y, z y N en función de los datos del problema.

En estos casos se pueden preparar las ecuaciones para el cálculo, independiente de N, de las coordenadas de las posiciones de equilibrio en la forma siguiente:

$$\frac{X}{\frac{d\varphi}{dx}} = -N\Delta\,,\quad \frac{Y}{\frac{d\varphi}{dy}} = -N\Delta\,,\quad \frac{Z}{\frac{d\varphi}{dz}} = -N\Delta\,,$$

$$\frac{X}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{Y}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{Z}{\frac{d\varphi}{dz}}\,,\quad \varphi(x\,y\,z) = o\,.$$

La condición de equilibrio $[F] + [N] = o$, nos dice que $[F]$ y $[N]$ son iguales y directamente opuestas, es decir, que la fuerza directamente aplicada a un punto, en equilibrio sobre una superficie, ha de ser normal a la superficie, y la fuerza de enlace en dichas posiciones es $N = -F$; siendo fácil ver que esta fórmula es un caso particular de la obtenida para N en el caso de movimiento, por ser $v = o$ y reducirse F a su componente normal F_n.

468. Cálculo directo de la fuerza de enlace en el movimiento de un punto sobre una curva.—Sea la curva $A\,B$ (figura 295) la trayectoria obligada del móvil, $M\,N'$ la normal principal del punto M y $M\,N$ la normal donde está situada la línea de acción de la fuerza de enlace $[N]$; proyectando las equipolencias

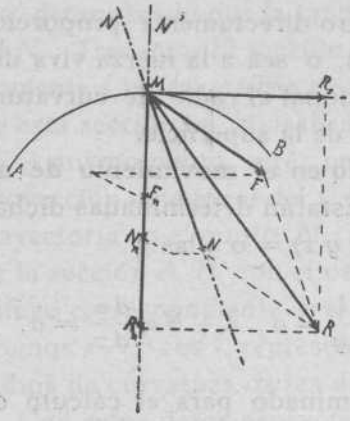


Fig. 295

$$[R] \equiv [F] + [N]$$

y $$[R] \equiv [R_n] + [R_t]$$

sobre los ejes $M\,N'$, $M\,T$ y el perpendicular a su plano, $M\,S$, tendremos las ecuaciones siguientes

$$\frac{m v^2}{\rho} = F_n + N_n\,,\; m\frac{d\,v}{d\,t} = F_t\,,\; o = F_s + N_s\,;$$

la primera y última de las tres ecuaciones obtenidas nos dan las componentes

$$N_n = \frac{m v^2}{\rho} - F_n\,,\; N_s = -\,F_s$$

de la fuerza de enlace, que permitirán calcular el valor de $N = \sqrt{N_n^2 + N_s^2}$ en función de las demás variables que figuran en las fórmulas.

Cuando la fuerza F esté situada en el plano osculador de la trayectoria, la fuerza de enlace N lo estará también, por ser $N_s = o$; en estos casos N se reduce a su componente sobre la normal principal y estará determinada por

la fórmula $N = \frac{mv^2}{\rho} - F_n$, teniendo en cuenta, para las aplicaciones, que el sumando F_n será negativo o positivo según que esté dirigido hacia la concavidad o hacia la convexidad de la trayectoria.

469. Consecuencias de la fórmula $N = \frac{mv^2}{\rho} - F_n$.—De la fórmula obtenida para determinar la fuerza de enlace, en el caso de estar F situada en el plano osculador de la trayectoria, se deduce que cuando dicha trayectoria sea rectilínea se reduce N a la componente normal de F, con signo contrario, y que la acción $[-N]$ que el punto móvil ejerce sobre las guías de su movimiento curvilíneo se compone de dos sumandos, uno dependiente de la fuerza directamente aplicada y otro directamente proporcional a la fuerza viva del móvil e inversamente proporcional al radio de curvatura de la trayectoria.

470. Posiciones de equilibrio en el movimiento de un punto sobre una curva.—Igualando a cero los segundos miembros de las ecuaciones de Mac-Laurin se forma el sistema

$$X + N\cos\lambda = o, \quad Y + N\cos\mu = o, \quad Z + N\cos\nu = o,$$

que juntamente con las complementarias establecidas en el número **464**, resuelven de un modo general el problema de determinar las posiciones de equilibrio del móvil sobre su trayectoria obligada.

El cálculo de las coordenadas de las posiciones de equilibrio puede hacerse, con independencia del de N, observando que las ecuaciones

$$\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{ds} = o,$$

$$\frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{d\psi}{dy}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{d\psi}{dz}\cdot\frac{dz}{ds} = o,$$

$$\cos\lambda \cdot \frac{dx}{ds} + \cos\mu \cdot \frac{dy}{ds} + \cos\gamma \cdot \frac{dz}{ds} = o\,,$$

que expresan la perpendicularidad de la tangente a la trayectoria respecto a las normales trazadas, en la posición del móvil, a las superficies $\varphi(x\,y\,z) = o$ y $\psi(x\,y\,z) = o$ y a la fuerza de enlace, forman un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, lineal y homogéneo respecto a las variables $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, y su existencia conduce a la condición

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d\varphi}{dy} & \frac{d\varphi}{dz} \\ \frac{d\psi}{dx} & \frac{d\psi}{dy} & \frac{d\psi}{dz} \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\gamma \end{vmatrix} = o \quad o \quad \begin{vmatrix} \frac{d\varphi}{dx} & \frac{d\varphi}{dy} & \frac{d\varphi}{dz} \\ \frac{d\psi}{dx} & \frac{d\psi}{dy} & \frac{d\psi}{dz} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = o\,,$$

que unida a las ecuaciones de la trayectoria, forman un sistema determinado de tres ecuaciones, independientes de N y de sus cosenos directores, que servirán para determinar las posiciones de equilibrio del móvil considerado.

En cuanto a la fuerza de enlace se determina directamente, en las posiciones de equilibrio, por las fórmulas del número **468**, que se reducen a $N_n = -F_n$ y $N_s = -F_s$, o bien $N = -F$, es decir, que lo mismo que en el equilibrio sobre una superficie, en el equilibrio sobre una curva, la fuerza de enlace es igual y opuesta a la fuerza directamente aplicada al punto material.

471. Observación.— Cuando la trayectoria obligada del móvil es rectilínea, la fuerza de enlace en el movimiento del punto y, por tanto, la acción del móvil sobre el enlace, se reduce, como en el caso de equilibrio, a la fuerza directamente aplicada, por ser $\rho = \infty$; esto parece indicar que

en el movimiento de un tren sobre un puente, por ejemplo, no ejercerá influencia en dicha acción la velocidad del móvil; pero tal aserto, que sería cierto si las vigas del puente fueran perfectamente rígidas, deja de serlo, teórica y prácticamente, por efecto de la flecha que el peso del tren produce en las vigas, debiendo observarse que cuanto mayor sea la deformación sufrida, mayores serán los efectos perjudiciales producidos sobre el puente por el sumando $\frac{mv^2}{\rho}$, a igualdad de velocidad en el paso del móvil.

472. Teorema de los trabajos virtuales en el movimiento de un punto sobre una superficie y sobre una curva.—Siendo el trabajo de $[R] \equiv [F] + [N]$ la suma de los trabajos correspondientes a las dos componentes $[F]$ y $[N]$, en cualquier desplazamiento del móvil, si se supone que los que experimenta éste son compatibles con los enlaces, se verificará que el trabajo virtual de $[N]$ será nulo y la condición para que $\delta T R = o$, es que sea $\delta T F = o$, y podremos decir que *la condición necesaria y suficiente para que un punto material sometido a fuerzas de enlace esté en equilibrio, en una posición determinada, es que el trabajo virtual de la fuerza directamente aplicada sea nulo, en los desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces que se haga experimentar al móvil.*

V

EJEMPLOS DE MOVIMIENTOS DE UN PUNTO SOMETIDO A FUERZAS DE ENLACE

473. Punto sometido a la acción de su peso, con velocidad inicial, sobre un plano inclinado.—Tomemos por ejes coordenados $o X$ y $o Y$, la horizontal del plano de la trayectoria y la línea de máxima pendiente del mismo, trazadas por la

posición inicial o (fig. 296); las ecuaciones del movimiento en el plano $X\,Y$, de pendiente i, son

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = o\,, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -\,m\,g\,\text{sen}\,i\,,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = N - m\,g\cos i\,;$$

pero en virtud de la ecuación de enlace $z = o$, se deduce que $\frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = o$ y la fuerza de enlace y la acción que el punto móvil ejerce sobre el plano $X\,Y$, están expresadas por la fórmula $N = m\,g\,.\cos i$, independiente de la velocidad, como se deduce para estos casos de lo dicho en el número **466**.

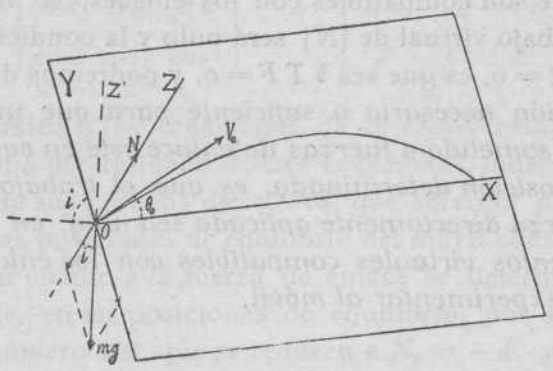


Fig. 296

La integración de las dos primeras ecuaciones conduce a las siguientes

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0\cos\theta_0\,, \quad v_y = -\,g\,t\,\text{sen}\,i + v_0\,\text{sen}\,\theta_0\,,$$

$$x = v_0\,t\cos\theta_0\,, \quad y = -\frac{1}{2}\,g\,t^2\,\text{sen}\,i + v_0\,t\,\text{sen}\,\theta_0\,,$$

que permitirían deducir consecuencias análogas a las expresadas en el número **453**, cuyo caso no es más que uno particular de éste, pues suponiendo $i = 90°$, desaparece la fuerza de enlace y las ecuaciones actuales se reducen a las que allí vimos.

Si se supone en las ecuaciones anteriores $i = o$, se obtendrá el movimiento sobre un plano horizontal; la fuerza de enlace es $N = m\,g$, igual al peso; el movimiento proyectado sobre el eje $o\,Y$ se convierte en uniforme, como el del eje $o\,X$; la trayectoria del móvil, obtenida por la eliminación de t entre

$$x = v_o\,t\cos\theta_o \quad \text{e} \quad y = v_o\,t\,\text{sen}\,\theta_o\,,$$

resulta ser $y = \text{tg}\,\theta_o\,.\,x$, que es la ecuación analítica de la recta de posición de la velocidad inicial v_o; la velocidad en un instante cualquiera es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_o = \textit{constante}$$

y si bien en la práctica no puede conseguirse dicha constancia, se debe a la presencia del *rozamiento* que actúa como fuerza retardatriz y da lugar a que el punto se detenga al cabo de un cierto tiempo de marcha.

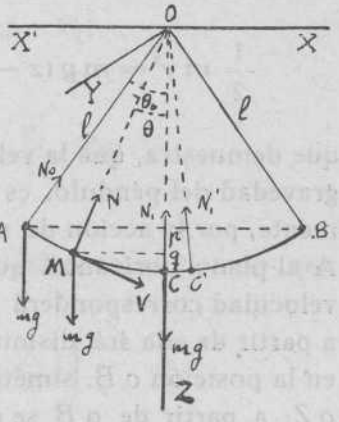


Fig. 297

474. Movimiento del péndulo simple.—Un cuerpo pesado (esférico en general) suspendido de un punto fijo o por medio de un hilo o varilla, supuestos sin peso e inextensibles (fig. 297), constituye el aparato llamado *péndulo simple*, que se utiliza en la práctica para

medir el tiempo por el *isocronismo* de sus oscilaciones, al separarle de su posición de equilibrio.

Para demostrar dicho isocronismo veamos primero que la posición $o\,c$ (vertical del centro de suspensión o) es posición de equilibrio del péndulo **(439)**, puesto que para el desplazamiento virtual $c\,c'$, compatible con el enlace, es

$$\delta\, T\, F = F\,.\,c\,c'\,.\,\cos \overline{F\,.\,c\,c'} = o\,.$$

Separemos ahora al péndulo de la posición de equilibrio, llevándole a la $o\,A$, para abandonarle a la acción de su peso y de la fuerza de enlace N; el movimiento resultante será debido a la acción de dos fuerzas centrales obrando sobre un punto sin velocidad inicial, será plano por tanto y el plano de la trayectoria es el determinado por los dos centros (el de suspensión y el centro de la tierra) y la posición inicial A, o lo que es lo mismo, el vertical $X\,Z$ señalado por o y por A.

Sea θ el ángulo $M\,o\,C$ que forma el hilo con la vertical $o\,Z$ en una posición cualquiera del péndulo; el teorema de la fuerza viva **(445)** nos proporciona la relación

$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 = m\, g\, (z - z_o) \quad \text{o} \quad v^2 = 2\, g\, (z - z_o)\,,$$

que demuestra, que la velocidad adquirida por el centro de gravedad del péndulo, es la misma que si cayera verticalmente, por la acción de su peso, desde la posición inicial A al plano horizontal que pasa por M **(450)**; la máxima velocidad corresponderá a la posición de equilibrio $o\,c$ y a partir de ella irá disminuyendo, hasta reducirse a *cero* en la posición $o\,B$, simétrica de $o\,A$ respecto a la vertical $o\,Z$; a partir de $o\,B$ se reproducen en sentido inverso las circunstancias del movimiento.

Los recorridos del péndulo de A a B o de B a A, se

llaman *oscilaciones*; el ángulo θ_0 que forma el hilo con la vertical, en las posiciones extremas de cada oscilación, es la *amplitud* de las mismas.

En la práctica, por efectos de la resistencia del aire, no llega a alcanzar el péndulo, al final de sus oscilaciones, la misma altura que tenía al empezarlas, resultando de esto que las oscilaciones de un péndulo libre van disminuyendo paulatinamente de amplitud, hasta que se detiene en su posición de equilibrio; pero vamos a demostrar que, tratándose de oscilaciones pequeñas, la duración de las mismas es constante e independiente de dicha amplitud; esta propiedad se expresa diciendo que las repetidas oscilaciones son *isocrónicas* y constituyen la base de las aplicaciones prácticas del péndulo.

Sustituyamos en la ecuación $v^2 = 2\,g\,(z - z_0)$, en vez de v su valor, $v = \dfrac{d\theta}{dt} \cdot l$, y en vez de z y z_0 los suyos $z = l \cos \theta$ y $z_0 = l \cos \theta_0$; desarrollando en series estos cosenos y prescindiendo de los términos de grado superior al segundo, se obtiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l} \cdot (\theta_0^2 - \theta^2)},$$

y

$$\frac{d\,\frac{\theta}{\theta_0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot dt;$$

integrando entre $-\theta_0$ y $+\theta_0$, resulta para el tiempo que dura una oscilación

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\left(\text{áng sen} = \frac{\theta}{\theta_0} \right) \right]_{-\theta_0}^{+\theta_0} =$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \times \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

No debe olvidarse que la fórmula anterior sólo puede admitirse para las pequeñas oscilaciones, compatibles con la supresión que se ha hecho en los desarrollos en serie de cos θ y cos θ_0; si en éstos llegáramos a los términos de 4.° grado, se obtendría para duración de las oscilaciones

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta^2}{16}\right),$$

que demuestra la disminución de dicha duración cuando las oscilaciones disminuyan de amplitud.

475. Tensión del hilo del péndulo.—Estará expresada por la fórmula **(468)** $N = \frac{m v^2}{\rho} + F_n$ que da

$$\frac{m\,2\,g\,(z - z_0)}{l} + m\,g\,\frac{z}{l} = \frac{m\,g}{l}(3\,z - 2\,z_0);$$

el máximun de N corresponde a la posición de equilibrio $z = l$ y es $N = \frac{m\,g}{l}(3\,l - 2\,z_0)$ o $N = 3\,m\,g$ para $z_0 = o$.

476. Péndulo cicloidal.—Queriendo *Huygens* remediar la falta de isocronismo de las grandes oscilaciones del péndulo simple, inventó el llamado *péndulo cicloidal* que se forma del modo siguiente: tomemos dos arcos de cicloide iguales, colocándolos como indica la figura 298 en oA y oB, unidos por el punto de retroceso o y sus vértices A y B en la misma horizontal AB; si ahora se suspende un hilo de o y se arrolla sobre OA, este hilo al des-

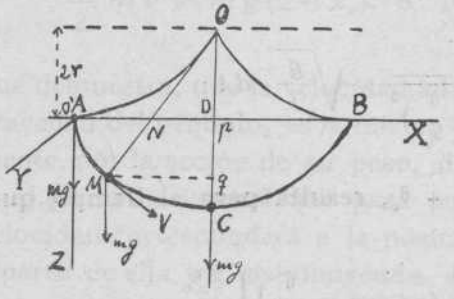


Fig. 298

arrollarse de $o\,A$ y al arrollarse sobre $o\,B$, hará que su extremo libre describa la cicloide $A\,C\,B$ de la misma base y la misma altura que la correspondiente a los arcos $o\,A$ y $o\,B$. El peso unido al hilo en el punto A describirá la trayectoria $A\,C\,B$ y sus oscilaciones vamos a demostrar que son rigurosamente isocrónicas.

Tomemos por ejes coordenados $o'\,X$ y $o'\,Z$ la horizontal $A\,B$ y la vertical descendente de la posición inicial; el teorema de la fuerza viva nos da, para una posición cualquiera del móvil M, la relación $v^2 = 2\,g\,z$; pero

$$v = \frac{d\,s}{d\,t} = \frac{d\,z\sqrt{1 + \left(\frac{d\,x}{d\,z}\right)^2}}{d\,t}$$

y de la ecuación de la cicloide

$$x = r\ \text{áng}\left(\text{sen . ver} = \frac{z}{r}\right) - \sqrt{2\,r\,z - z^2},$$

se deduce $\frac{d\,x}{d\,z} = \frac{z}{\sqrt{2\,r\,z - z^2}}$, de donde

$$v = \frac{d\,z}{d\,t}\sqrt{1 + \frac{z^2}{2\,r\,z - z^2}} = \frac{\sqrt{2\,r}}{\sqrt{2\,r - z}} \cdot \frac{d\,z}{d\,t}$$

y sustituyendo en $v = \sqrt{2\,g\,z}$ resulta

$$d\,t = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{d\,z}{\sqrt{2\,r\,z - z^2}} = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{d\,\frac{z}{r}}{\sqrt{2\,\frac{z}{r} - \left(\frac{z}{r}\right)^2}},$$

que integrada entre $z = o$ y $z = 2\,r$ (recorrido de una

semioscilación), nos proporciona, para la oscilación completa, el tiempo

$$t = \pi \sqrt{\frac{4r}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

que es la misma fórmula del péndulo simple, pero sin la causa de error que allí obligaba a considerar pequeñas amplitudes de oscilación.

477. Problemas elementales sobre el péndulo.—La relación

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

que expresa la duración de las oscilaciones de un péndulo, permite resolver los siguientes problemas de interés práctico.

1.° *Determinar la aceleración de la pesantez en un punto de la tierra.*—Supongamos un péndulo de longitud l que verifica, en el tiempo T segundos, n oscilaciones; se tendrá

$$t = \frac{T}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{y} \quad g = \frac{\pi^2 n^2}{T^2} \times l.$$

Este procedimiento lleva consigo el error de la medida de l, que puede eliminarse llevando el mismo péndulo a un lugar en que se conozca con gran precisión el valor de g y si en este lugar verifica dicho péndulo n' oscilaciones, en el tiempo T', será

$$g' = \frac{\pi^2 n'^2}{T'^2} l \quad \text{y} \quad g = g' \frac{T'^2}{T^2} \cdot \frac{n^2}{n'^2},$$

o bien, si es $n = n'$, $g = g' \dfrac{T'^2}{T^2}$.

2.° *Longitud del péndulo que verifique n oscilaciones en T segundo.*—Suponiendo conocido g se tiene

$$l = g \frac{T^2}{\pi^2 n^2} ;$$

pero si g no fuera conocido, se podría hacer oscilar un péndulo de longitud l', que tardaria el tiempo T' en verificar las n oscilaciones pedidas; para este péndulo sería

$$l' = g \frac{T'^2}{\pi^2 n^2} \quad \text{y} \quad l = l' \frac{T^2}{T'^2} .$$

3.° *Longitud del péndulo de segundos en un lugar cualquiera de la tierra.*—Este problema es un caso particular del anterior en que $T = n$; así, si se conoce g, será $l = \frac{g}{\pi^2}$, y si no se conoce, se hace uso de otro péndulo auxiliar y se obtiene $l = l' \frac{n^2}{T'^2}$. En Madrid es

$$l = \frac{g}{\pi^2} = 0{,}992963 \text{ m} .$$

4.° *Péndulos sincrónicos en distintos lugares de la tierra.*—Los movimientos periódicos de dos móviles se llaman *sincrónicos* cuando tienen el mismo *periodo*; para obtener péndulos sincrónicos en distintos lugares de la tierra, bastará hacer que

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l'}{g'}} \quad \text{o} \quad \frac{l}{g} = \frac{l'}{g'} .$$

En un paralelo cualquiera son sincrónicos los péndu-

los de la misma longitud y la relación existente entre las de los péndulos sincrónicos en los polos y el ecuador es

$$\frac{l}{l'} = \frac{g}{g'} = \frac{9{,}815}{9{,}781} = 1{,}003476\,.$$

VI

MOVIMIENTO RELATIVO DEL PUNTO MATERIAL

478. Definiciones.—Cuando los ejes a que se refiere el movimiento de un punto material están dotados de movimiento, se verifica, según el teorema de *Coriolis* estudiado en Cinemática **(243)**, que la aceleración del movimiento absoluto es la suma gráfica o resultante de la aceleración del movimiento relativo, de la del arrastre y de la que hemos llamado *complementaria*, que se origina en todo arrastre del sistema coordenado que no sea una sencilla traslación.

Si multiplicamos cada una de dichas aceleraciones por la masa del móvil, se obtendrán las fuerzas que se supone originan a cada uno de dichos movimientos, recibiendo dichas fuerzas el mismo calificativo que la aceleración correspondiente y acostumbrándose a dar el nombre de *reales* a las productoras del movimiento absoluto, para distinguirlas de las *aparentes* que son las del movimiento relativo y de las *ficticias*, como la complementaria y otras que figuran en esta teoría.

Si en la equipolencia expresiva del teorema de Coriolis,

después de multiplicar por la masa del móvil, despejamos la fuerza del movimiento relativo, se obtiene

$$[F_r] \equiv [F] + [-F_a] + [-F_c],$$

lo que nos dice, que la fuerza del movimiento relativo es la resultante de las fuerzas reales aplicadas al móvil, de una igual y contraria a la productora del movimiento de arrastre y de otra igual y contraria a la complementaria que produzca el arrastre de los ejes; la fuerza $[-F_a]$ recibe el nombre de *fuerza de inercia del arrastre* (*) y la representaremos por $[F_{ia}]$, y a la $[-F_c]$ se llama *centrífuga compuesta*, representándose por el símbolo $[F_{cc}]$.

Puesta la equipolencia anterior en la forma

$$[F_r] \equiv [F] + [F_{ia}] + [F_{cc}],$$

se traduce al lenguaje ordinario diciendo que *en cada instante la fuerza productora del movimiento relativo es la resultante de las fuerzas reales aplicadas al móvil, de la de inercia del arrastre y de la centrífuga compuesta a que dicho arrastre dé lugar.*

Inútil parece advertir que cuando los arrastres del sistema coordenado sean más de uno, tendrán que figurar, en el segundo miembro de la equipolencia expresada, las fuerzas de inercia y las centrífugas compuestas que a cada uno de ellos corresponda, siendo la forma general de la misma

$$[F_r] \equiv [F] + \Sigma [F_{ia}] + \Sigma [F_{cc}].$$

479. Ecuaciones diferenciales del movimiento relativo de un punto.—Llamando x, y y z las coordenadas del mo-

(*) También se le llama *centrífuga ordinaria;* pero nos parece más propio reservar este nombre para la componente normal de la misma que luego veremos.

vimiento relativo; X, Y y Z las proyecciones sobre los ejes de las fuerzas reales, w la velocidad que el arrastre comunica al móvil, ω la velocidad angular del mismo, cuando el arrastre no sea de traslación, p, q y r las proyecciones de $[\omega]$ sobre los ejes coordenados, ρ el radio de curvatura de la trayectoria de arrastre y suponiendo descompuesta a la fuerza $[F_{ia}]$ en sus dos componentes tangencial y normal, podremos formar las siguientes ecuaciones de proyección sobre los ejes móviles **(246)**

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \Sigma\left(-m\frac{dw}{dt}\right)_x + \Sigma\left(-m\frac{w^2}{\rho}\right)_x + \\ + 2m\Sigma\left(r\frac{dy}{dt} - q\frac{dz}{dt}\right),$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \Sigma\left(-m\frac{dw}{dt}\right)_y + \Sigma\left(-m\frac{w^2}{\rho}\right)_y + \\ + 2m\Sigma\left(p\frac{dz}{dt} - r\frac{dx}{dt}\right),$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \Sigma\left(-m\frac{dw}{dt}\right)_z + \Sigma\left(-m\frac{w^2}{\rho}\right)_z + \\ + 2m\Sigma\left(q\frac{dx}{dt} - p\frac{dy}{dt}\right),$$

que resuelven de un modo general el problema del movimiento relativo y permiten estudiarlo como si fuera absoluto, mediante la combinación, en los segundos miembros, de las fuerzas reales con las ficticias originadas por los arrastres del sistema coordenado.

480. Observación.—Siendo $[F_{ia}]$ igual y directamente opuesta a la fuerza productora del movimiento de arrastre

estará contenida en el plano osculador de la trayectoria de arrastre del móvil y dirigida hacia la convexidad de dicha trayectoria; la componente tangencial de $[F_{ia}]$ se llama tangencial de inercia del arrastre, tiene por valor modular $m\frac{dw}{dt}$ y estará dirigida en sentido contrario al movimiento de arrastre; la componente normal de $[F_{ia}]$, cuyo valor modular es $m\frac{w^2}{\rho}$, se llama *centrífuga ordinaria* y está dirigida siempre hacia el lado opuesto del centro de curvatura de la trayectoria de arrastre.

481. Simplificación de las ecuaciones del movimiento relativo en algunos casos especiales.—Las ecuaciones generales, que hemos establecido en el número **479**, se simplifican en gran número de casos, por las particularidades de los movimientos de arrastre del sistema coordenado; así, cuando los arrastres sean traslaciones, tanto ω como p, q y r son nulos y desaparecen los términos dependientes de las centrífugas compuestas; si los arrastres son uniformes, desaparecerán los términos correspondientes a las tangenciales de inercia; en los arrastres rectilíneos se anularán las centrífugas ordinarias, etc.

482. Equilibrio relativo de un punto material.—Las ecuaciones del equilibrio relativo se obtendrán igualando a *cero* los segundos miembros de las ecuaciones del número **479**, pero observando que la centrífuga compuesta (**247-2.ª**), se anula cuando $v_r = o$, se suprimirán de dichas ecuaciones los términos dependientes de F_{cc}, quedando reducidas a

$$X + \Sigma\left(-m\frac{dw}{dt}\right)_x + \Sigma\left(-m\frac{w^2}{\rho}\right)_x = o\,,$$

$$Y + \Sigma\left(-m\frac{dw}{dt}\right)_y + \Sigma\left(-m\frac{w^2}{\rho}\right)_y = o\,,$$

$$Z + \Sigma\left(-m\frac{dw}{dt}\right)_z + \Sigma\left(-m\frac{w^2}{\rho}\right)_z = o\,.$$

483. Movimiento y equilibrio relativos cuando existen fuerzas de enlace.—Cuando las fuerzas reales, y las ficticias que originan los arrastres, no bastan para hacer que la trayectoria del móvil cumpla con determinadas condiciones, se le obliga prácticamente a cumplirlas empleando guias especiales de movimiento, y teóricamente se considera al móvil sometido a la fuerza de enlace necesaria para producir el efecto deseado, lo mismo que hemos visto en el movimiento absoluto. Las ecuaciones del movimiento relativo serán las del número **479**, adicionando, en los segundos miembros, las proyecciones de $[N]$ y agregando al sistema las ecuaciones complementarias que la presencia de los enlaces obliga a tener en cuenta.

484. Movimientos relativos en la superficie de la tierra.—Supongamos ahora que se trate de un sistema de ejes que no tenga más movimientos que los arrastres inevitables debidos a la movilidad de nuestro planeta; estos arrastres son tres: el de rotación de la tierra alrededor de su eje con la velocidad angular constante

$$\omega = \frac{2\pi}{86.164} = 0{,}000073;$$

el de traslación de la tierra alrededor del sol, con velocidad aproximada a *30 km. por segundo* y sobre una órbita de *148 millones de kilómetros* de radio, aproximadamente, y el producido por la traslación del sistema solar, hacia la constelación de Hércules o de la Lira, con velocidad incalculable, pero rectilíneo y uniforme, como exige la carencia de acciones exteriores sobre el mismo.

Por las condiciones en que estos arrastres tienen lugar, se ve que el tercero no ejerce influencia alguna sobre los movimientos relativos en la superficie terrestre; el segundo, siendo una traslación, no tiene centrífuga compuesta, pero sí producirá tangencial de inercia, $-m\frac{dw}{dt}$, y centrífuga ordinaria, $-m\frac{w^2}{\rho}$; ahora bien, a pesar de la enorme velocidad de dicho arrastre, la gran longitud de ρ, así como los pequeños valores de la aceleración $\frac{dw}{dt}$, permiten despreciar, sin error sensible, los efectos de dicho arrastre en los movimientos relativos que estamos estudiando.

En cuanto a la rotación de la tierra alrededor de su eje, por ser uniforme, no produce tangencial de inercia; pero sí obliga a considerar la centrífuga ordinaria, $-m\frac{w^2}{\rho}$, dirigida según el radio ρ del paralelo y la centrífuga compuesta

$$F_{cc} = -2\,m\,\omega\,v_r \operatorname{sen} A\,,$$

siendo A, como sabemos, el ángulo de la velocidad relativa v_r con el eje de rotación ω.

485. Fuerzas que intervienen en el movimiento relativo de los puntos materiales en la superficie terrestre.—Como resumen de lo dicho en el número anterior, vemos que al estudiar el movimiento de un punto material respecto a tres ejes fijos con relación a la tierra, será preciso tener en cuenta las fuerzas que directamente apliquemos al móvil, la *gravedad* expresada por la fórmula

$$F_g = \frac{K\,M\,m}{R^2} = m\,g'$$

y dirigida hacia el centro de la tierra, la *centrífuga ordinaria* que, expresada en función del radio de la tierra y de la latitud, es

$$\frac{m w^2}{\rho} = m R \omega^2 \cos \lambda ,$$

la *centrífuga compuesta* y la *fuerza de enlace* cuando se trate de movimientos no libres.

486. Pesantez.—La fuerza de la gravedad y la centrífuga ordinaria, que la rotación de la tierra produce, son dos fuerzas que, independientemente de nuestra voluntad, obran sobre los puntos materiales situados en la superficie terrestre, ya estén en movimiento o en reposo relativo; su acción combinada, que apreciamos por la caída de los cuerpos sobre la tierra, produce una resultante llamada *pesantez*, representada por el *peso* de los cuerpos materiales y cuya dirección, marcada por la *plomada* en cada localidad de la tierra, constituye la *vertical* del lugar, que según esto no está dirigida hacia el centro de la tierra, pero sí contenida en el plano del meridiano correspondiente, por estar situadas en dicho plano la gravedad y la centrífuga ordinaria.

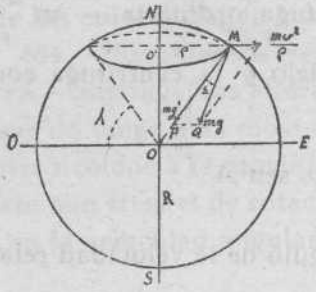


Fig. 299

487. Angulo que forma la vertical de un lugar con el radio de la tierra correspondiente al mismo punto.—Sea M el punto de la tierra que se considera, de latud λ (figura 299) y ε el ángulo de la vértical mg con el radio Mo donde está situada la gravedad mg', habiéndose obtenido la di-

rección $M\,Q$ por la composición de m [g'] con la centrífuga $\frac{m\,w^2}{\rho}$.

Del triángulo $M\,P\,Q$ se deduce que

$$\operatorname{sen}\varepsilon = \operatorname{sen}\lambda\,\frac{\frac{m\,w^2}{\rho}}{m\,g} = \operatorname{sen}\lambda\,\frac{\omega^2\,\rho^2}{\rho\,g} = \frac{R\,\omega^2\operatorname{sen}2\lambda}{2\,g}$$

En los polos y en el ecuador es $\varepsilon = o$ y la desviación máxima de la vertical, respecto al radio de la tierra, corresponde a los puntos situados en los paralelos de 45^o, en cuyas localidades es de $10'$ aproximadamente.

488. Relación que existe entre la aceleración de la gravedad y la de la pesantez en un lugar cualquiera de la tierra.—En el triángulo $M\,P\,Q$ de la figura 299 se tiene

$$(m\,g)^2 = (m\,g')^2 + \left(m\,\frac{w^2}{\rho}\right)^2 - 2\,m\,g'\,.\,m\,\frac{w^2}{\rho}\cos\lambda\,,$$

cuya relación, suprimido el factor m y efectuando sencillas transformaciones, se convierte en

$$g^2 = g'^2 + R\,\omega^2\cos^2\lambda\,(R\,\omega^2 - 2\,g')\,.$$

Esta relación demuestra que en los polos es $g = g'$, y en el ecuador $g^2 = (g' - R\,\omega^2)^2$ o $g = g' - R\,\omega^2$.

La aceleración g', que en la hipótesis de ser la tierra esférica es constante, tiene aproximadamente el valor

$$g' = 981{,}501\ \mathrm{L\,T^{-2}}\ (*)$$

(*) El valor de g' se deduce de la ecuación

$$g'^2 - 2\,.\,R\,\omega^2\cos^2\lambda\,.\,g' + R^2\,\omega^4\cos^2\lambda - g^2 = o\,,$$

sustituyendo en ella los valores λ y g correspondientes a un lugar de la tierra en que la aceleración g se haya determinado con exactitud, por observaciones directas; así para $\lambda = 40^o\ 25'$ (latitud de Madrid) es $g = 980{,}0156$ y haciendo operaciones se obtiene el número apuntado $g' = 981{,}501\ \mathrm{L\,T^{-2}}$.

y de las ecuaciones anteriores se deduce que en el ecuador es

$$g = 981{,}501 - 3{,}398 = 978{,}103 \text{ L T}^{-2},$$

siendo la pérdida de peso que un cuerpo experimenta, por su transporte del polo al ecuador, igual a *3,398* dinas por cada gramo-masa que contenga; así, un metro cúbico de agua a la temperatura de 4^o centígrados señalaría en las divisiones de un pesón de resorte, graduado en Madrid, el peso de *1000 kgs.*; llevado a los polos de la tierra acusaría *1001,515 kgs.* y en el ecuador este peso se reduciría a *998,048 kgs.* (*)

489. Ecuaciones del movimiento relativo de un punto en la superficie de la tierra.—La comodidad con que los aparatos de pesar proporcionan en la práctica el peso de los cuerpos materiales, ha hecho que en lugar de hacer figurar en las ecuaciones del movimiento relativo que estamos estudiando, la fuerza de la gravedad y la centrífuga ordinaria, se sustituyan éstas por su resultante, o peso del móvil considerado, debiendo figurar por consiguiente en los segundos miembros de las ecuaciones de Mac-Laurin, las proyecciones de las fuerzas directamente aplicadas, las del peso del móvil, las de la centrífuga compuesta debida a la rotación de la tierra y las de los enlaces cuando se trate de movimientos no libres.

A fin de simplificar el planteo de los problemas tomaremos como ejes coordenados los siguientes: la tangente al meridiano del lugar de *Norte* a *Sur*, por eje *o X*; la tangente al paralelo de *Oeste* a *Este*, por eje *o Y*, y el radio de la tierra prolongado hacia el exterior, o hacia el inte-

(*) Desde luego se comprende la necesidad de valerse para estas experiencias de pesones de resorte, pues en las balanzas ordinarias, siendo iguales las variaciones de peso del cuerpo y de las pesas, no se pondrían de manifiesto las circunstancias indicadas.

rior, por eje $o\,Z$; además supondremos que las verticales están dirigidas hacia el centro de la tierra, lo que equivale a suponer nulo el ángulo ε y la pesantez paralela al eje $o\,Z$, en el sentido negativo o positivo, según la dirección de este eje.

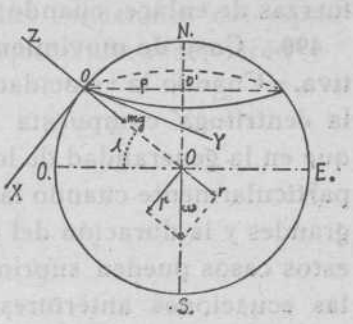


Fig. 300

Con la elección del sistema coordenado que acabamos de hacer (fig. 300), serán nulas las proyecciones del peso sobre los ejes $o\,X$ y $o\,Y$ y en cambio se proyectará sobre el eje $o\,Z$ en su verdadera magnitud. En cuanto a la centrífuga compuesta se pondrán sus proyecciones en función de ω y de la latitud del lugar, observando que

$$p = \omega \cos \lambda,\ q = o,\ r = \mp\, \omega \operatorname{sen} \lambda\ (*),$$

con estos datos las ecuaciones del número **479** se convierten en

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = X \mp 2 m \omega \operatorname{sen} \lambda \frac{d y}{d t},$$

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = Y + 2 m \omega \left(\cos \lambda \frac{d z}{d t} \pm \operatorname{sen} \lambda \frac{d x}{d t} \right),$$

$$m \frac{d^2 z}{d t^2} = Z \mp m g - 2 m \omega \cos \lambda \frac{d y}{d t},$$

que sirven para estudiar el movimiento relativo de un

(*) La rotación [ω] está tomada sobre el eje de la tierra en sentido de Norte a Sur por verificarse dicho giro, visto desde el polo Norte, en sentido contrario al de las agujas de un reloj, o sea de occidente a oriente. La componente r llevará signo — o + según que el eje Z sea la vertical ascendente o la descendente y en el mismo caso se encuentra el peso $m\,g$ del móvil.

punto matêrial en la superficie terrestre y en cuyos segundos miembros deberán ponerse las proyecciones de las fuerzas de enlace, cuando el movimiento no sea libre.

490. Caso de movimientos de pequeña velocidad relativa. — Cuando la velocidad relativa del móvil sea pequeña, la centrífuga compuesta adquiere valores tan pequeños, que en la generalidad de los casos se hace imperceptible, particularmente cuando las masas en movimiento no son grandes y la duración del mismo no sea considerable. En estos casos pueden suprimirse, del segundo miembro de las ecuaciones anteriores, los términos dependientes de dicha fuerza y las ecuaciones del movimiento se convierten en

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z \mp mg,$$

es decir, que dichos movimientos se estudiarán, como si fueran absolutos, bajo la acción de las fuerzas directamente aplicadas y del peso mg del punto material, sin intervención de las fuerzas ficticias que los arrastres originan

491. Equilibrio relativo en la superficie de la tierra. — Si se igualan a cero los segundos miembros de las ecuaciones del número **489**, suprimiendo los sumandos dependientes de la centrífuga compuesta, se obtendrán las ecuaciones

$$X = o, \quad Y = o, \quad Z \mp mg = o,$$

que sirven para determinar las posiciones de equilibrio de un punto material con relación a ejes coordenados unidos invariablemente a la tierra en la forma explicada en el mismo número.

Las condiciones $X = Y = o$, $Z = mg$ indican que la

fuerza directamente aplicada a un punto material en equilibrio, tiene que ser igual y opuesta al peso del punto.

En el caso de existir enlaces las ecuaciones del equilibrio relativo, con relación a los ejes expresados, serán

$$X + N_x = o, \quad Y + N_y = o, \quad Z \mp m g + N_z = o .$$

VII

EJEMPLOS DE MOVIMIENTO Y EQUILIBRIO RELATIVOS DE UN PUNTO MATERIAL

492. Caída de un punto material abandonado a su propio peso sin velocidad inicial. — Las ecuaciones de este movimiento relativo son (eje $o\,Z$ descendente)

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = + 2 m \omega \operatorname{sen} \lambda \frac{d y}{d t} ,$$

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = 2 m \omega \left(\cos \lambda \frac{d z}{d t} - \operatorname{sen} \lambda \frac{d x}{d t} \right) ,$$

$$m \frac{d^2 z}{d t^2} = + m g - 2 m \omega \cos \lambda \frac{d y}{d t} ;$$

supongamos como primera aproximación $\frac{d x}{d t} = \frac{d y}{d t} = o$ y la tercera ecuación nos dará

$$\frac{d z}{d t} = + g t \quad \text{y} \quad z = + \frac{1}{2} g t^2 ,$$

suponiendo el origen de coordenadas en la posición inicial.

Sustituido este valor de $\frac{dz}{dt}$ en la segunda ecuación, resulta

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\,\omega\cos\lambda\,g\,t\,,\quad \frac{dy}{dt} = \omega\cos\lambda\,g\,t^2\,,$$

$$y = \frac{1}{3}\,\omega\cos\lambda\,g\,t^3 = 0{,}000069\,.\,\cos\lambda\,\frac{z^{\frac{3}{2}}}{g^{\frac{1}{2}}}\,,$$

y sustituyendo el valor de $\frac{dy}{dt}$ en la primera, se obtiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,\omega^2\,\mathrm{sen}\,\lambda\cos\lambda\,g\,t^2 = \omega^2\,\mathrm{sen}\,2\lambda\,g\,t^2\,,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}\,\omega^2\,\mathrm{sen}\,2\lambda\,g\,t^3\,,$$

$$x = \frac{1}{12}\,\omega^3\,\mathrm{sen}\,2\lambda\,g\,t^4 = 0{,}000000001776\,\mathrm{sen}\,2\lambda\,\frac{z^2}{g}$$

Los resultados obtenidos nos dicen que por efecto de la rotación de la tierra, todo móvil que se abandona a su propio peso, no cae siguiendo exactamente la vertical, pues las coordenadas x e y dejan de ser nulas en cuanto el punto abandona su posición inicial; pero la misma estructura de las fórmulas indica que son necesarias alturas considerables de caída, para que las desviaciones correspondientes sean apreciables, y particularmente la que se verifica en el meridiano, de N. a S., por entrar en ella la constante ω elevada al cuadrado.

En cuanto a la desviación en el paralelo, de O. a E., se ha comprobado prácticamente por *M. Reich*, en un pozo de mina de Freyberg, dejando caer repetidas veces una pequeña esfera metálica desde una altura de *158,50 metros*; la desviación media observada en estas experiencias fué $y = 0^m{,}0283$ y para la latitud del lugar, $\lambda = 51^o$, la fórmula

teórica da el valor $y = 0^m,0276$. Las experiencias de M. Reich no acusaron desviación sensible en el sentido del meridiano y esto, que parece un desacuerdo con la teoría, sirve de confirmación a la misma, pues un cálculo sencillo demuestra que en la expresada latitud, y para $z = 158,50\ m$, es $x = 0,0000044$ y, por su pequeñez, no podía ponerse de manifiesto.

493. Movimiento relativo del péndulo simple. — Al estudiar el movimiento del péndulo simple, se ha supuesto a éste **(474)** sometido a la acción de la pesantez y de la fuerza de enlace, sin tener para nada en cuenta los efectos de la centrífuga compuesta que la rotación de la tierra produce, y si bien la experiencia prueba que dicha fuerza no influye en el isocronismo de las oscilaciones, es de gran interés examinar el efecto que pueda producir, para obtener una prueba tangible, fácil de repetir, de la rotación de la tierra sobre su eje.

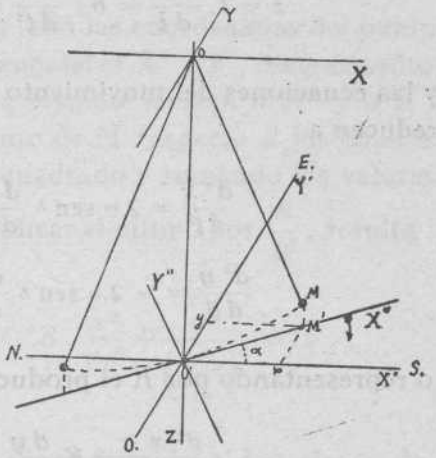


Fig. 301

Sea el péndulo de la figura 301, de longitud l, suspendido de o; las ecuaciones de su movimiento relativo son (eje Z descendente)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 2\,m\,\omega\,\text{sen}\,\lambda\frac{dy}{dt} - N\frac{x}{l},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = 2\,m\,\omega\left(\cos\lambda\frac{dz}{dt} - \text{sen}\,\lambda\frac{dx}{dt}\right) - N\frac{y}{l},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mg - 2m\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt} - N\frac{z}{l},$$

que se simplifican suponiendo que la longitud l es suficientemente grande y las oscilaciones lo suficientemente pequeñas, para admitir que el centro de gravedad del péndulo se mueve en el plano horizontal $X'\,Y'$, distante $z = l$ del coordenado $X\,Y$; con esta hipótesis serán

$$z = l,\ \frac{dz}{dt} = o,\ \frac{d^2z}{dt^2} = o,\ N = mg,$$

y las ecuaciones del movimiento en dicho plano $X'\,Y'$ se reducen a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\,\text{sen}\,\lambda\frac{dy}{dt} - g\frac{x}{l},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\,\text{sen}\,\lambda\frac{dx}{dt} - g\frac{y}{l},$$

o representando por K el producto constante ω sen λ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2K\frac{dy}{dt} - g\frac{x}{l},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2K\frac{dx}{dt} - g\frac{y}{l},$$

cuyas ecuaciones, integradas, conducen a las primitivas

$$x = a_o\cos ht\cos(\psi_o - Kt) - \frac{a_o}{h}K\,\text{sen}\,ht\,\text{sen}\,(\psi_o - Kt),$$

$$y = a_o\cos ht\,\text{sen}\,(\psi_o - Kt) + \frac{a_o}{h}K\,\text{sen}\,ht\cos(\psi_o - Kt),$$

en las que a_o y ψ_o son constantes que se determinarán en

cada caso por las circunstancias iniciales del movimiento y h otra constante dada por la fórmula $h = \sqrt{\frac{g}{l} + K^2}$.

Si representamos por α el ángulo $\alpha = \psi_0 - Kt$ y por x' e y' los productos $x' = a_0 \cos ht$ e $y' = \frac{a_0}{h} K \operatorname{sen} ht$, resultan las ecuaciones

$$x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha, \quad y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha,$$

que demuestran que x' e y' son las coordenadas del punto M' respecto a los ejes rectangulares X'' e Y'', determinados por el ángulo α que en cada instante forman $o'X''$ y $o'X'$. Veamos ahora el movimiento de M' respecto a los citados ejes X'' e Y''; elevando al cuadrado y sumando los valores de x' e y', después de multiplicar el último por $\frac{h}{K}$, resulta

$$x'^2 + y'^2 \frac{h^2}{K^2} = a_0^2 \quad \text{o} \quad \frac{x'^2}{a_0^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{Ka_0}{h}\right)^2} = 1,$$

que es la ecuación de una elipse referida a sus ejes y demuestra que, en cada oscilación, el punto M' se separa a uno y otro lado del plano ZX'' en la cantidad máxima $\frac{Ka_0}{h}$, pero vuelve al mismo cada vez que pasa por los dos vértices de su trayectoria relativa situados sobre $o'X''$. Si el ángulo α, que forman $o'X''$ y $o'X'$, fuera constante, sería el efecto que acabamos de señalar el único producido por la rotación de la tierra sobre el péndulo; pero la expresión

$$\alpha = \psi_0 - Kt = \psi_0 - \omega \operatorname{sen} \lambda \, . \, t$$

demuestra que el plano de oscilación ZX'' está dotado de

un movimiento angular uniforme en el sentido de las agujas de un reloj *(E. S. O. N.)* con la velocidad angular $\frac{d\alpha}{dt} = -\omega \operatorname{sen} \lambda$.

La primera experiencia de este género fué efectuada por *Foucault*, en París, con un péndulo de *67 metros* de longitud y corroboró plenamente los resultados de la teoría; la velocidad angular del plano de oscilación correspondiente a esta experiencia fué

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0{,}000073 \times \operatorname{sen} 48^\circ 50' = 0{,}000055\ T^{-1}$$

y debería verificar una revolución completa en el tiempo $T = \frac{2\pi}{0{,}000055} = 31^h 47'$ como, en efecto, se verificó.

494. Pruebas mecánicas de la rotación de la tierra.—La confirmación práctica de la existencia de los efectos de la fuerza centrífuga compuesta, en cuantos movimientos susceptibles de calcularse se han observado sobre la superficie de la tierra, demuestra la realidad de la causa originaria de dicha fuerza, y constituye la prueba más asequible de la rotación de nuestro planeta alrededor de su eje; si esta rotación no existiese, el plano de oscilación del péndulo (refiriéndonos a este ejemplo) permanecería fijo con relación a la tierra y no se producirían la elipticidad de la proyección horizontal de la trayectoria del móvil, ni el continuo desplazamiento giratorio de dicho plano alrededor de la vertical de cada lugar, y precisamente con la velocidad angular $-\omega \operatorname{sen} \lambda$, observada en cuantos puntos se ha repetido la famosa experiencia de Foucault.

495. Equilibrio relativo de un punto material sobre una curva giratoria alrededor de un eje vertical.—Sea la curva $A\,B$ (fig. 302), que gira alrededor del eje $o\,Z$ y M el punto sujeto

a moverse sobre la misma bajo la acción de su peso $m\,g$, de la centrífuga ordinaria $\frac{m\,v^2}{\rho}$ y de la fuerza de enlace N normal a la curva propuesta.

Las ecuaciones del equilibrio, con relación a los ejes que acompañan a la curva en su movimiento, son, suponiendo el movimiento angular uniforme

$$\frac{m\,v^2}{\rho} - N \operatorname{sen} \alpha = o,\quad o = o,\quad -m\,g + N \cos \alpha = o\,,$$

o $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega^2 \rho}{g}$, y por ser $h = p\,q = \frac{\rho}{\operatorname{tg} \alpha}$, resulta $h = \frac{g}{\omega^2} =$ $= \textit{constante}$; es decir, que serán posiciones de equilibrio todas aquellas en que se verifique que la subnormal de la curva adquiera el valor $\frac{g}{\omega^2}$, correspondiente a la velocidad del giro.

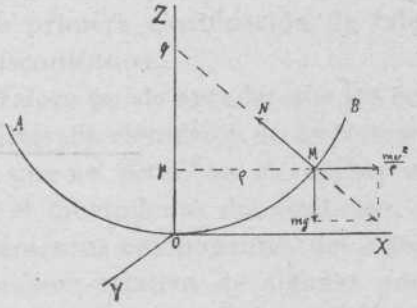


Fig. 302

Cuando la curvatura que sirve de guía al punto móvil es una parábola, se presenta la particularidad de ser, para una velocidad dada, todos sus puntos posiciones de equilibrio, pues en estas curvas la subnormal es constante, y si por el contrario, la velocidad de giro no está adaptada a la curva parabólica, el punto no tiene sobre la misma ninguna posición de equilibrio.

Si la curva es una circunferencia, resulta sumamente fácil determinar la posición de equilibrio, para una velocidad angular determinada, tomando a partir del centro el

segmento $p\,q = \frac{g}{\omega^2}$ y trazando la perpendicular $p\,M$ al eje. En este caso se ve que, por grande que sea ω, no podrá llegar nunca el móvil a la altura del centro, pues esto exigiría que fuera $\omega = \infty$.

Si en lugar de una guia curvilínea circular, para dirigir el movimiento de M, se supone éste enlazado al eje por una varilla, se forma el mecanismo llamado *péndulo cónico*, cuyas posiciones de equilibrio se determinan por la misma fórmula $h = \frac{g}{\omega^2}$ y de cuyas aplicaciones prácticas, en la regulación de la marcha de las máquinas, nos ocuparemos más adelante.

CAPITULO CUARTO

Dinámica general de los sistemas materiales

I

PRELIMINARES

496. Clasificación de los sistemas materiales.—Ya dijimos al empezar el estudio de la Dinámica, que los sistemas materiales que en esta ciencia se consideran, se suponen formados por la aglomeración de puntos materiales simplemente yuxtapuestos o separados por distancias finitas, dando lugar con esto a la primera clasificación de tales sistemas en *continuos* y *discontinuos*.

Sea cualquiera su naturaleza puede suceder que los *enlaces* existentes entre los diversos elementos de un sistema material sean de tal forma que no permitan el cambio de posición relativa, durante el movimiento del conjunto, a ninguno de los citados elementos componentes del sistema, que permitan el movimiento relativo de algunas porciones finitas del mismo, permaneciendo invariables de forma cada una de estas porciones, o bien que la movilidad de dichos elementos sea tal que de un instante al siguiente pueda cambiar la posición relativa de todos ellos: esto da lugar a la clasificación de los sistemas materiales en *indeformables, articulados* y *flúidos*, de cuyas circunstancias especiales de movimiento nos ocuparemos en los capítulos siguientes, empezando por establecer en éste un cierto nú-

mero de propiedades generales aplicables a todos los sistemas materiales.

497. Fuerzas interiores y exteriores en los sistemas materiales.—Las fuerzas que intervienen en el movimiento de los sistemas materiales se agrupan, cualquiera que sea su naturaleza, en dos categorías perfectamente definidas, que ejercen influencia muy distinta en las circunstancias de dicho movimiento: las acciones mutuas que entre los diversos elementos del sistema se ejercen, se llaman fuerzas *interiores* y las representaremos por F_i, para distinguirlas de las acciones o fuerzas *exteriores* que el sistema reciba, representadas por F_e.

Las proyecciones y momentos coordenados de las fuerzas que obran sobre cada punto del sistema se representan por

$$X = X_e + X_i, \quad Y = Y_e + Y_i, \quad Z = Z_e + Z_i,$$

$$L = L_e + L_i, \quad M = M_e + M_i, \quad N = N_e + N_i,$$

anteponiendo a cada una de estas expresiones la inicial Σ, cuando queramos expresar las proyecciones y momentos coordenados del conjunto de dichas fuerzas.

498. Proyecciones y momentos con relación a un eje de las fuerzas interiores.—Siendo las fuerzas interiores conjugadas de dos en dos, iguales y directamente opuestas, es evidente que la suma de sus proyecciones y momentos con relación a cualquier eje serán nulas, pudiéndose suprimir las expresiones de la forma

$$\Sigma X_i, \ \Sigma Y_i, \ \Sigma Z_i, \ \Sigma L_i, \ \Sigma M_i, \ \Sigma N_i$$

en toda fórmula en que estas sumas de proyecciones y momentos intervengan como sumando.

Debe tenerse en cuenta que si bien la suma de proyec-

ciones y momentos de las fuerzas interiores de un sistema material, tomadas en conjunto son nulas, no quiere esto decir que se anulen del mismo modo las proyecciones y momentos de las que actúan sobre un punto determinado del sistema, pues éstas solo en casos especiales verificarán dicha condición.

499. Trabajo de las fuerzas interiores.—El trabajo desarrollado por dos fuerzas conjugadas $[f_1 f_2]$, en un desplazamiento elemental del sistema material, tiene por expresión $d\,T\,[f_1 f_2] = f\,d\,r$ **(417)** y la suma de los trabajos desarrollados en el mismo desplazamiento, por todas las fuerzas interiores del sistema, será de la forma $\Sigma\, d\,TF_i = \Sigma f\,d\,r$, en general distinta de cero.

El trabajo desarrollado por estas fuerzas se ve, por la fórmula encontrada, que no depende del recorrido efectuado por el móvil, pues sólamente intervienen en su expresión los cambios de posición relativa de los diversos elementos del sistema; de aquí que al hablar del trabajo desarrollado por fuerzas interiores, al pasar el sistema de una a otra posición, se le llame *trabajo desarrollado por dichas fuerzas al pasar el sistema de tal a cual configuración;* así, representando por los símbolos C_0 y C las configuraciones especiales del sistema al principio y al final del desplazamiento general efectuado, la expresión total del trabajo de las fuerzas interiores, en dicho recorrido, se expresará por la fórmula $\Sigma\, T\,F_i = \Sigma \int_{C_0}^{C} f\,d\,r.$

Considerando en particular las acciones interiores que recibe un punto determinado será

$$d\,T\,F_i = X_i\,d\,x + Y_i\,d\,y + Z_i\,d\,z$$

y para todos los del sistema, en el paso de la configuración C_0 a la C

$$\Sigma\, T F_i = \Sigma \int_{c_0}^{c} X_i\, d x + Y_i\, d y + Z_i\, d z\,,$$

resultando equivalentes los símbolos

$$\Sigma \int_{c_0}^{c} f\, d r \quad \text{y} \quad \Sigma \int_{c_0}^{c} X_i\, d x + Y_i\, d y + Z_i\, d z\,.$$

500. Potencial interno de un sistema material.—Las fuerzas de enlace que en los sistemas materiales se establecen entre sus diversos elementos, pueden ser de muy diferente naturaleza (gravitatorias, eléctricas, magnéticas, elásticas, de cohesión, afinidad, etc.) pero en todas ellas, o por lo menos en su inmensa mayoría, se observa que el valor modular de dichas fuerzas es función de la distancia r que separa los puntos entre los cuales se ejercen dichas acciones; esto nos dice que el trabajo elemental de las fuerzas interiores, que intervienen en el movimiento de un sistema material, será de la forma

$$\Sigma\, d\, T F_i = \Sigma\, \psi\,(r)\, d\, r = d\, U\,;$$

estas fuerzas, si la hipótesis hecha $f = \psi\,(r)$ se cumple, serán siempre potenciales, y cuando pueda determinarse la forma de la función de fuerzas, $U = \varphi\,(x\, y\, z) + C$, se podrá calcular el trabajo desarrollado por las fuerzas interiores, en el paso de la configuración C_0 a la C, por la diferencia de los valores de dicha función en una y otra configuración

$$\Sigma\, T F_i = \int_{c_0}^{c} d\, U = U - U_0\,.$$

La función de fuerzas U, con signo contrario,

$$V = -U = -\varphi(x\,y\,z) + C'$$

constituye la función potencial de las fuerzas interiores, y el valor que toma dicha expresión, en una configuración especial del sistema, se llama *potencial interno* del mismo correspondiente a la configuración aludida.

El potencial interno de un sistema presenta, como todas las funciones potenciales, la indeterminación consiguiente a la presencia de la constante C'; esta indeterminación desaparece en las diferencias de potencial, $V_1 - V_2$, entre dos configuraciones cualesquiera del sistema, e igualmente cuando se fija, como resultado de algún convenio que se establezca, el potencial interno en alguna configuración especial.

La diferencia del potencial interno entre dos configuraciones del sistema, por ser

$$dV = -\Sigma\, dTF_i \quad \text{y} \quad V_1 - V_2 = \int_{c_2}^{c_1} dV = \Sigma \left(TF_i \right)_{c_1}^{c_2}$$

representa *el trabajo que desarrollan las fuerzas interiores del sistema cuando éste pasa de la primera configuración C_1 a la segunda C_2.*

501. Energía potencial de los sistemas materiales.—De acuerdo con la definición general de energía establecida en el número **417**, llamaremos *energía potencial* de un sistema material al valor que, en cada configuración del mismo, corresponde a su potencial interno y de la ecuación

$$V_1 - V_2 = \Sigma \left(TF_i \right)_{c_1}^{c_2}$$

se deduce que si en la configuración especial C_o es $V_o = o$, será

$$V = \Sigma \left(TF_i \right)_c^{c_o},$$

es decir, que *la energía potencial de un sistema material, en una configuración cualquiera C, representa el trabajo que tienen que desarrollar las fuerzas interiores del sistema para dar a éste la configuración* C_o *en que el potencial interno se reduce a cero.*

502. Cantidad de movimiento, fuerza viva, energía cinética y fuerza de inercia de un sistema material.—Antes de pasar a la demostración de los teoremas generales de Dinámica de los sistemas materiales, conviene dejar establecidas las siguientes definiciones.

Cantidad de movimiento de un sistema material es la resultante de las cantidades de movimiento de cada uno de los puntos que lo componen; sus proyecciones sobre los ejes, llamándolas α, β y γ, serán

$$\alpha = \Sigma\, m\, v_x = \Sigma\, m \frac{dx}{dt},$$

$$\beta = \Sigma\, m\, v_y = \Sigma\, m \frac{dy}{dt},$$

$$\gamma = \Sigma\, m\, v_z = \Sigma\, m \frac{dz}{dt}.$$

Para que el vector representativo de dicha cantidad de movimiento, $[\rho]$, quede determinado, es preciso conocer su momento respecto a un punto, y si suponemos que este momento está representado por el subvector $[\sigma]$ en el origen de coordenadas, sus proyecciones sobre los ejes, que llamaremos λ, μ y ν, serán **(438)**

$$\lambda = \Sigma\left(y m \frac{dz}{dt} - z m \frac{dy}{dt}\right) = \Sigma\, m\left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right),$$

$$\mu = \Sigma\left(z m \frac{dx}{dt} - x m \frac{dz}{dt}\right) = \Sigma\, m\left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}\right),$$

$$\nu = \Sigma\left(x m \frac{dy}{dt} - y m \frac{dx}{dt}\right) = \Sigma\, m\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right).$$

El lugar geométrico de las posiciones de los vectores $[\rho] = \Sigma\, m\,[v]$ y $[\sigma] = M_o\,[\rho]$, aplicados al origen de coordenadas en cada instante del movimiento, forma *las funciones gráficas de la cantidad de movimiento* y *del momento de la cantidad de movimiento del sistema móvil*, análogas a las que para un punto representan las figuras 285 y 286.

La expresión $\frac{\Sigma\, m\, v^2}{2}$, suma de la fuerza viva de todos los puntos de un sistema material, constituye la *fuerza viva* del mismo, que análogamente a lo dicho para un punto, se llama también *energía cinética* del sistema a que nos refiramos.

La resultante de las fuerzas de inercia de todos los puntos de un sistema material, se llama *fuerza de inercia* de dicho sistema: sus coordenadas de proyección son

$$-\Sigma\, m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad -\Sigma\, m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad -\Sigma\, m \frac{d^2z}{dt^2},$$

y las de momentos estarán dadas por las expresiones

$$-\Sigma\left(y\, m \frac{d^2z}{dt^2} - z\, m \frac{d^2y}{dt^2}\right) = -\Sigma\, m\left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

$$-\Sigma\left(z\, m \frac{d^2x}{dt^2} - x\, m \frac{d^2z}{dt^2}\right) = -\Sigma\, m\left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

$$-\Sigma\left(x\, m \frac{d^2y}{dt^2} - y\, m \frac{d^2x}{dt^2}\right) = -\Sigma\, m\left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

503. Problemas generales de la Dinámica de los sistemas materiales.—Los problemas generales que la Dinámica de los sistemas materiales trata de resolver, consisten en determinar las ecuaciones del movimiento de cada uno de los puntos del sistema, suponiendo conocidas las fuerzas que le están directamente aplicadas, y el recíproco del anterior, o sea la determinación de las fuerzas capaces de producir un movimiento determinado en los elementos o en el conjunto de un sistema material.

Suponiendo el sistema formado por n puntos, será preciso establecer $3\,n$ condiciones para determinar las $3\,n$ ecuaciones del movimiento de dichos n puntos; las ecuaciones de Mac-Laurin, correspondientes a cada uno de ellos, resuelven en teoría el problema propuesto, por relacionarse en ellas las fuerzas con las coordenadas de los puntos del sistema móvil y el tiempo; pero tienen el inconveniente, de gran importancia en muchos casos, de no conocerse las fuerzas interiores que necesariamente tienen que figurar en las mismas.

504. Ecuación general del movimiento de un sistema material.—Si suponemos formadas las $3\,n$ ecuaciones de Mac-Laurin, correspondientes a los n puntos de un sistema y se multiplican respectivamente por desplazamientos virtuales de la forma δx, δy, δz, sumándolas todas ellas, se llega a la ecuación

$$\Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + m\frac{d^2y}{dt^2}\delta y + m\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = \\ = \Sigma\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z),$$

que se llama *ecuación general* del movimiento de un sistema material, por estar contenidas y poderse deducir de ella, en virtud de la arbitrariedad de los desplazamientos δx, δy, δz, las $3\,n$ ecuaciones del movimiento de los puntos del sistema.

505. Caso de existir fuerzas de enlace. — Cuando alguno o varios de los puntos de un sistema material, estén enlazados entre sí o con otros puntos del exterior por guias, que analíticamente se representan por ecuaciones que tienen que satisfacer las coordenadas de dichos puntos, es preciso que los desplazamientos virtuales que se impongan para pasar de la ecuación general, antes establecida, a las del movimiento de dichos puntos, satisfagan a las expresadas ecuaciones de los enlaces, sin lo cual los movimientos obtenidos no serían, en general, *compatibles* con dichos enlaces.

En estos casos el problema sigue siendo determinado teóricamente, pues si son K las ecuaciones de enlace que se establecen entre las coordenadas de los puntos del sistema, se podrán deducir de ellas los valores de K desplazamientos, por ejemplo $\delta x_1, \delta x_2 \ldots . \delta x_k$, que sustituidos en la ecuación general, permitirán formar $3n - K$ ecuaciones de movimiento, y uniendo a éstas las K ecuaciones de los enlaces, resultarían $3n$ entre las coordenadas, las fuerzas y el tiempo, que resolverían el problema propuesto.

506. Equilibrio de un sistema material. — Cuando todos los puntos de un sistema se encuentran en equilibrio estático o dinámico, se dice que el sistema se halla en el mismo estado de equilibrio, cesando éste cuando en alguno de los puntos del sistema dejen de verificarse las condiciones $X = o$, $Y = o$, $Z = o$, que tienen que satisfacer las fuerzas de toda clase aplicadas a dicho punto para que se encuentre en equilibrio. Lo mismo que en la Dinámica del punto, nos referiremos, siempre que se trate del equilibrio de los sistemas, al equilibrio estático o reposo de los mismos, a menos que se advierta lo contrario.

Si en la ecuación general del movimiento se suponen nulas las aceleraciones de todos los puntos, se convierte en

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = o,$$

que recibe el nombre de *ecuación general del equilibrio* de los sistemas materiales, porque de ella pueden deducirse, teóricamente al menos, las $3n$ ecuaciones del equilibrio de los n puntos del sistema.

507. Observaciones.—El procedimiento de resolución de los problemas de la Dinámica, basado en la integración de las ecuaciones diferenciales a que dan lugar las ecuaciones generales del movimiento y equilibrio de los sistemas, antes establecidas, presenta en la práctica las dificultades de cálculo a que ya aludimos en la Dinámica del punto y además la inherente a estar compuestos de infinitos elementos, dando lugar a que únicamente en los casos en que el sistema esté formado por puntos materiales finitos, de las condiciones expuestas en el número **3**, podrá suponerse que n es un número finito y tendrán aplicación los razonamientos hechos sobre las ecuaciones generales del movimiento y equilibrio de los sistemas.

En los demás casos, y aún en los mismos en que n sea finito, para salvar las dificultades de integración, se recurre a las propiedades que a continuación vamos a exponer.

II

TEOREMAS GENERALES DE LA DINÁMICA DE LOS SISTEMAS MATERIALES

508. Teorema de los trabajos virtuales.—*La condición necesaria y suficiente para que un sistema material esté en equilibrio, en una posición determinada, es que la suma de los trabajos virtuales de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema sea nula.*—En efecto, la condición

es necesaria, pues si $X = Y = Z = o$, será $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = o$, y es suficiente por la arbitrariedad de los desplazamientos δx, δy, δz, que exige sean $X = Y = Z = o$ cuando $\Sigma\delta TF = o$. (*)

En algunos casos conviene separar los trabajos virtuales correspondientes a las fuerzas exteriores e interiores y la ecuación de equilibrio toma la forma

$$\Sigma(X_e\delta x + Y_e\delta y + Z_e\delta z) + \Sigma(X_i\delta x + Y_i\delta y + Z_i\delta z) = o.$$

Cuando existan enlaces y los desplazamientos virtuales que se impongan sean compatibles con ellos, se prescindirá, en la ecuación general del equilibrio, del trabajo correspondiente a las fuerzas de enlace, sean éstas exteriores o interiores, por suponerse nulos dichos trabajos **(461)**, y el teorema de los trabajos virtuales se sigue verificando con el siguiente enunciado: *la condición necesaria y suficiente para que un sistema material, con enlaces, se encuentre en equilibrio en una posición determinada, es que la suma de los trabajos virtuales de todas las fuerzas que actúan sobre el sistema, excluyendo a las de enlace, sea nula en los desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces que a dicho sistema se impongan.* (**)

509. Teorema del movimiento del centro de gravedad de un sistema material.—*El centro de gravedad de un sistema material se mueve como un punto material, de*

(*) El enunciado de este teorema no es más que la traducción al lenguaje ordinario de la propiedad contenida en la ecuación general del equilibrio establecida en el número **506.**

(**) Se supone en todas las consideraciones que hagamos sobre los sistemas con enlaces, que las ecuaciones que establecen estos enlaces son en número tal que las coordenadas de cada punto no tengan que satisfacer a más de una o dos ecuaciones de condición, para que los desplazamientos virtuales a que nos referimos tengan lugar sobre la superficie o línea que dichas ecuaciones representan y pueda admitirse como evidente la anulación de los trabajos virtuales de las fuerzas de enlace, que se suponen por ahora normales a las expresadas superficies y líneas.

masa igual a la del sistema, bajo la acción de las fuerzas exteriores aplicadas al mismo.—En efecto, llamando a, b y c las coordenadas del centro de gravedad, el momento estático del sistema respecto al plano YZ es **(125-4.ª)** $\Sigma\, m\, x = M\, .\, a$ y diferenciando dos veces esta ecuación resulta

$$\Sigma\, m \frac{d^2 x}{d t^2} = M \frac{d^2 a}{d t^2};$$

por otra parte se verifica que

$$\Sigma\, m \frac{d^2 x}{d t^2} = \Sigma\, X_e + \Sigma\, X_i = \Sigma\, X_e$$

y aplicando el mismo cálculo a las proyecciones del movimiento sobre los tres ejes coordenados

$$M \frac{d^2 a}{d t^2} = \Sigma\, X_e, \quad M \frac{d^2 b}{d t^2} = \Sigma\, Y_e, \quad M \frac{d^2 c}{d t^2} = \Sigma\, Z_e,$$

que son las ecuaciones del movimiento de un punto de masa $M = \Sigma\, m$ **(432)**, bajo la acción de las fuerzas exteriores que obran sobre el sistema.

De este teorema se deduce que *las fuerzas interiores que actúan o se produzcan en un sistema material, no influyen para nada en el movimiento de su centro de gravedad* y que este movimiento *es independiente de los puntos de aplicación sobre el sistema de las fuerzas exteriores,* pues sólo intervienen en las ecuaciones establecidas las proyecciones $\Sigma\, X_e$, $\Sigma\, Y_e$ y $\Sigma\, Z_e$ de las citadas fuerzas exteriores. (*)

(*) Estos razonamientos justifican la elección que se hizo, al principio de la Dinámica, del centro de gravedad de los puntos materiales, para suponer aplicadas a él las fuerzas, velocidades y demás vectores representativos de magnitudes mecánicas afectas a dichos móviles.

La frecuente aplicación de este teorema en la resolución de los problemas mecánicos, le da una importancia grandísima, que se justifica observando que, gracias a él, se puede reducir el estudio del movimiento de un sistema material, al de las posiciones de sus diferentes puntos alrededor de su centro de gravedad, toda vez que la que corresponde a este punto se puede calcular en cada caso por las ecuaciones halladas, como si se tratara de un punto material finito.

509'.—*Corolarios: 1.° Cuando la suma gráfica de las fuerzas exteriores es nula, el centro de gravedad del sistema está en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme.*—Basta observar que dicha condición expresa el equilibrio estático o dinámico del centro de gravedad y estos equilibrios indican el estado de reposo o de movimiento uniforme y rectilíneo que dice el enunciado.

La gran distancia a que se encuentran las estrellas de los astros que forman nuestro sistema solar, permite suponer nulas las acciones que estos últimos reciben de aquellos otros cuerpos celestes; según esto, en los movimientos del sol, planetas, satélites, cometas y demás cuerpos que integran el sistema solar, no intervienen más que fuerzas interiores, y el centro de gravedad del mismo deberá estar en reposo o moverse con movimiento rectilíneo y uniforme: las observaciones astronómicas efectuadas, para dilucidar dicho asunto, han demostrado que tiene lugar la segunda circunstancia (*).

Un segundo ejemplo de esta naturaleza lo proporciona el sistema material formado por un arma de fuego, un cañón por ejemplo, que antes de producirse la explosión de

(*) El aumento sistemático de la distancia angular entre las estrellas situadas en los confines de las constelaciones de Hércules y la Lira y la disminución de la misma distancia en las que se encuentran en la parte opuesta de la bóveda celeste, constituyen dos hechos que prueban hasta la evidencia el movimiento del conjunto de nuestro sistema solar.

la carga se encuentra en reposo bajo la acción de fuerzas exteriores (peso y reacciones en los apoyos) cuya suma gráfica será indudablemente nula, como consecuencia de la inmovilidad del sistema; al tener lugar la explosión de la carga, la fuerza expansiva de los gases desarrollados produce el avance del proyectil en el ánima del cañón, y como el centro de gravedad del conjunto no puede variar, será necesario que el cañón, si tiene libertad para ello, retroceda para que, retrasándose su centro de gravedad, se compense el avance del centro del proyectil y pueda quedar en la misma posición el sistema.

2.° *Si la proyección de las fuerzas exteriores sobre un eje es nula, el movimiento del centro de gravedad proyectado sobre dicho eje es uniforme.*—En efecto, la ecuación de dicho movimiento, suponiendo sea el eje $o\,X$ el de la hipótesis, es $M\dfrac{d^2\,a}{d\,t^2} = o$, de donde se obtiene $a = a_0 + V\,t$, que es la ecuación de un movimiento de la naturaleza expresada. Como caso particular de este corolario puede ocurrir que sea $V = o$; entonces es $a = a_0$ y la proyección del centro de gravedad sobre $o\,X$ permanece estacionada en su posición inicial.

3.° *La cantidad de movimiento del centro de gravedad de un sistema material es equipolente a la cantidad de movimiento del sistema.*—En efecto, el vector $[\rho]$ representativo de la cantidad de movimiento del sistema tiene por proyecciones

$$\alpha = \Sigma\, m\frac{d\,x}{d\,t},\quad \beta = \Sigma\, m\frac{d\,y}{d\,t},\quad \gamma = \Sigma\, m\frac{d\,z}{d\,t}$$

y de las ecuaciones

$$\Sigma\, m\,x = M\,a,\quad \Sigma\, m\,y = M\,b,\quad \Sigma\, m\,z = M\,c,$$

se deduce que

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = M \frac{da}{dt} = M V_x ,$$

$$\Sigma m \frac{dy}{dt} = M \frac{db}{dt} = M V_y ,$$

$$\Sigma m \frac{dz}{dt} = M \frac{dc}{dt} = M V_z ,$$

y de aquí las relaciones

$$\alpha = M V_x , \quad \beta = M V_y , \quad \gamma = M V_z ,$$

que demuestran la equipolencia enunciada.

510. Observación.—El fenómeno que representa la marcha en terreno horizontal o ascendente de los seres animados y máquinas locomóviles, por la acción de las fuerzas interiores que dichos organismos desarrollan, parece a primera vista que está en contradicción con el teorema demostrado; pero es fácil probar que dicha contradicción no existe, observando que las citadas fuerzas interiores no hacen más que producir acciones sobre el exterior en los puntos de apoyo y las reacciones, que el exterior devuelve, son las que realmente originan el avance de dichos móviles.

511. Teorema de la cantidad de movimiento.—LEMA.—*La derivada gráfica de la función de las cantidades de movimiento de un sistema material es equipolente, en cada instante, a la resultante de las fuerzas exteriores que obran sobre el sistema.* En efecto, construyendo dicha función gráfica, $[\rho] = \Sigma m (v)$, se vería que el vector $[v_\rho] = \frac{d(\rho)}{dt} = \frac{d}{dt} \Sigma m (v)$, tiene por proyecciones coordenadas

$$(v_\rho)_x = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dx}{dt} = \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X_e\,,$$

$$(v_\rho)_y = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dy}{dt} = \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y_e\,,$$

$$(v_\rho)_z = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dz}{dt} = \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z_e\,,$$

y estas relaciones demuestran la equipolencia a que se refiere el enunciado

$$[v_\rho] = \frac{d}{dt}\Sigma m\,(v) \equiv \Sigma\,[F_e]\,.$$

Teorema.—Proyectando la equipolencia anterior sobre un eje cualquiera, se deduce *que la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de un sistema material, proyectada sobre un eje, es igual a la suma de las proyecciones sobre el mismo de las fuerzas exteriores aplicadas al sistema móvil.* Las ecuaciones

$$\frac{d\alpha}{dt} = \Sigma X_e\,,\quad \frac{d\beta}{dt} = \Sigma Y_e\,,\quad \frac{d\gamma}{dt} = \Sigma Z_e\,,$$

representan esta propiedad aplicada a los tres ejes coordenados.

Otro enunciado de este teorema.—Multiplicando por dt la equipolencia $\frac{d}{dt}\Sigma m\,(v) \equiv \Sigma\,[F_e]$, resulta

$$d\,\Sigma m\,(v) \equiv \Sigma\,[F_e]\,dt \quad \text{y} \quad \Delta\,\Sigma m\,(v) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\,[F_e]\,dt$$

y éstas, proyectadas sobre un eje cualquiera, nos dicen que *los incrementos elementales y finitos de la cantidad de movimiento de un sistema material, proyectados sobre*

un eje, son iguales a la suma de las proyecciones sobre el mismo de las impulsiones correspondientes a las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema móvil.

La expresión simbólica de esta propiedad, aplicada a los tres ejes coordenados, es

$$d\,\alpha = d\,\Sigma\, m\, v_x = \Sigma\, X_e\, d\,t,$$

$$\Delta\,\Sigma\, m\, v_x = \Sigma\, m\, v_{2x} - \Sigma\, m\, v_{1x} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\, X_e\, d\,t;$$

$$d\,\beta = d\,\Sigma\, m\, v_y = \Sigma\, Y_e\, d\,t,$$

$$\Delta\,\Sigma\, m\, v_y = \Sigma\, m\, v_{2y} - \Sigma\, m\, v_{1y} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\, Y_e\, d\,t;$$

$$d\,\gamma = d\,\Sigma\, m\, v_z = \Sigma\, Z_e\, d\,t,$$

$$\Delta\,\Sigma\, m\, v_z = \Sigma\, m\, v_{2z} - \Sigma\, m\, v_{1z} = \int_{t_1}^{t_2} \Sigma\, Z_e\, d\,t.$$

511'.—*Corolarios:* 1.° *Cuando la suma gráfica de las fuerzas exteriores es nula, la cantidad de movimiento del sistema es constante.*—Puesto que reduciéndose a *cero* la suma gráfica de las fuerzas exteriores, el vector $[\rho] = \Sigma\, m\, [v]$ es un vector fijo. Como caso particular de este corolario puede ocurrir que el valor constante de $\Sigma\, m\, [v]$ sea *cero*, deduciéndose en estos casos que si por efecto de fuerzas interiores se producen movimientos de alguna parte del sistema, en un sentido determinado, tienen que producirse necesariamente movimientos de otras partes, en sentido contrario, para anular la cantidad de movimiento desarrollada por la primera.

El ejemplo antes expuesto, del retroceso de las armas de fuego, sirve también para demostrar prácticamente esta consecuencia, que puede utilizarse, además, para relacionar las masas, M y m, y las velocidades, v y V, de las dos

partes, pieza y proyectil, que componen el sistema (*); pues teniendo que ser nula la suma

$$\Sigma\, m\,[v] = M\,v + m\,V = o\,,$$

la pieza retrocederá en el primer instante con la velocidad

$$v = -\frac{m\,V}{M}\,.$$

En los fusiles se observa que, en igualdad de condiciones respecto a peso y velocidad inicial del proyectil, los efectos del culatazo son más sensibles en un arma ligera que en una pesada, y este hecho es consecuencia de la fórmula $v = -\frac{m\,V}{M}$, que nos dice, que para un valor determinado de $m\,V$, la velocidad de retroceso v es tanto más grande cuanto más pequeña sea la masa del arma.

2.° *Cuando la proyección sobre un eje de las fuerzas exteriores es nula, la cantidad de movimiento del sistema, proyectada sobre dicho eje, es constante.*—Como caso particular de este enunciado puede suceder que dicha proyección constante del vector $[\rho]$ sea nula, indicando esta circunstancia la perpendicularidad de $[\rho]$ respecto al eje de referencia.

512. Teorema del momento de la cantidad de movimiento.—LEMA.—*La derivada gráfica de la función de los momentos de la cantidad de movimiento de un sistema material es, en cada instante, equipolente al momento respecto al polo de dicha función de la resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema móvil.* En efecto, construyendo la función gráfica $[\sigma] = \Sigma\, M_o\, m\,(v)$,

(*) Se supone que la cantidad de movimiento de los gases, originados por la explosión de la carga, es despreciable al lado de la que corresponde al proyectil y a la pieza.

se vería que el vector $[v_\sigma] = \frac{d(\sigma)}{dt} = \frac{d}{dt} \Sigma M_o\ m\ (v)$, tiene por proyecciones coordenadas las cantidades

$$(v_\sigma)_x = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt} \Sigma \left(y\ m \frac{dz}{dt} - z\ m \frac{dy}{dt} \right) =$$
$$= \Sigma\ (y\ Z_e - z\ Y_e) = M_x \Sigma\ (F_e)\ ,$$

$$(v_\sigma)_y = \frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt} \Sigma \left(z\ m \frac{dx}{dt} - x\ m \frac{dz}{dt} \right) =$$
$$= \Sigma\ (z\ X_e - x\ Z_e) = M_y \Sigma\ (F_e)\ ,$$

$$(v_\sigma)_z = \frac{d\nu}{dt} = \frac{d}{dt} \Sigma \left(x\ m \frac{dy}{dt} - y\ m \frac{dx}{dt} \right) =$$
$$= \Sigma\ (x\ Y_e - y\ X_e) = M_z \Sigma\ (F_e)\ ,$$

y estas relaciones demuestran la equipolencia a que se refiere el enunciado

$$[v_\sigma] = \frac{d(\sigma)}{dt} = \frac{d}{dt} \Sigma M_o\ m\ (v) \equiv \Sigma M_o\ (F_e)\ .$$

TEOREMA.—Proyectando la equipolencia anterior sobre un eje cualquiera, se deduce que *la derivada con relación al tiempo del momento de la cantidad de movimiento de un sistema material, respecto a un eje, es igual al momento de las fuerzas exteriores que obran sobre el sistema, con relación a dicho eje*. Las ecuaciones

$$\frac{d\lambda}{dt} = \Sigma\ (y\ Z_e - z\ Y_e) = \Sigma\ L_e\ ,$$

$$\frac{d\mu}{dt} = \Sigma\ (z\ X_e - x\ Z_e) = \Sigma\ M_e\ ,$$

$$\frac{d\nu}{dt} = \Sigma\ (x\ Y_e - y\ X_e) = \Sigma\ N_e\ ,$$

expresan la propiedad anterior aplicada a los tres ejes coordenados.

Otro enunciado de este teorema.—Multiplicando por $d\,t$ la equipolencia $\frac{d\,(\sigma)}{d\,t} \equiv \Sigma\, M_o\,(F_e)$, resulta $d\,(\sigma) \equiv \Sigma\, M_o\,(F_e)\,d\,t$, y esta última proyectada sobre un eje cualquiera nos dice que *los incrementos elementales del momento de la cantidad de movimiento de un sistema material, con relación a un eje, son iguales a la suma de los momentos respecto al mismo eje de las impulsiones de las fuerzas exteriores aplicadas al sistema.*

La expresión simbólica de esta propiedad, aplicada a los ejes coordenados, es

$$d\,\lambda = d\,\Sigma\, M_x\, m\,(v) = \Sigma\, M_x\,(F_e)\,d\,t = \Sigma\,(y\,.\,Z_e\,d\,t - z\,.\,Y_e\,d\,t),$$

$$d\,\mu = d\,\Sigma\, M_y\, m\,(v) = \Sigma\, M_y\,(F_e)\,d\,t = \Sigma\,(z\,.\,X_e\,d\,t - x\,.\,Z_e\,d\,t),$$

$$d\,\nu = d\,\Sigma\, M_z\, m\,(v) = \Sigma\, M_z\,(F_e)\,d\,t = \Sigma\,(x\,.\,Y_e\,d\,t - y\,.\,X_e\,d\,t).$$

513. Teorema de las áreas.—Se dice que el movimiento de un sistema material *cumple o satisface la ley de las áreas* en un cierto plano, cuando los productos de las masas de cada elemento componente del sistema por las áreas descritas por las proyecciones de los mismos sobre dicho plano con relación a un punto tomado como centro del movimiento areolar, son proporcionales a los tiempos empleados en describir las citadas áreas.

La expresión analítica del cumplimiento de dicha ley, en un plano cualquiera, es

$$\frac{\Sigma\, m\,A - \Sigma\, m\,A_o}{t - t_o} = constante.$$

Hecha la observación anterior pasemos al enunciado y demostración del teorema de las áreas: *cuando el momento de las fuerzas exteriores aplicadas a un sistema material es nulo, con relación a un eje, el movimiento*

del sistema satisface la ley de las áreas sobre todo plano perpendicular al expresado eje. En efecto, si se verifica que $\Sigma N_o = \Sigma (x Y_o - y X_o) = o$, será $\frac{d \nu}{d t} = o$ y

$$\nu = \Sigma m \left(x \frac{d y}{d t} - y \frac{d x}{d t} \right) = \Sigma m 2 \frac{d A}{d t} = constante,$$

$$\Sigma m d A = \frac{\nu}{2} d t, \; \Sigma m A - \Sigma m A_o = \frac{\nu}{2} (t - t_o),$$

$$\frac{\Sigma m A - \Sigma m A_o}{t - t_o} = \frac{\nu}{2} = constante.$$

La velocidad de este movimiento areolar especial se obtiene proyectando sobre el eje correspondiente la mitad del vector $[\sigma]$, representativo del momento de $\Sigma m [v]$ en el origen de coordenadas.

Puede ocurrir, como caso particular del teorema de las áreas, que el valor constante de ν sea *cero*; entonces se verificará que $\Sigma m A = \Sigma m A_o = constante$ y, por consiguiente, si una parte cualquiera del sistema gira en un cierto sentido alrededor del eje $o Z$, describiendo áreas positivas, por ejemplo, tiene que haber otras partes del sistema que giren en sentido inverso, para describir áreas negativas y pueda ser $\Sigma m A = constante$. En la práctica ocurren gran número de hechos que confirman la certeza de estas consecuencias.

514. Otro corolario del teorema del momento de la cantidad de movimiento.—*Cuando el momento de las fuerzas exteriores aplicadas a un sistema material es nulo, con relación a un punto, el movimiento del sistema satisface la ley de las áreas en todo plano que pase por dicho punto.*—Puesto que al ser nulo el momento de las fuerzas exteriores respecto al punto o, serán también nulos los mo-

mentos con relación a todos los ejes que por o puedan trazarse.

Las velocidades areolares correspondientes a cada plano se obtendrán proyectando el vector $\frac{1}{2}[\sigma]$ (ahora fijo durante todo el movimiento), sobre la dirección del eje perpendicular al plano de que se trate, siendo evidente que el plano del *máximun de las áreas*, o sea aquel en que la expresión $\Sigma m A - \Sigma m A_o$ tiene el mayor valor, es el plano $\lambda x + \mu y + \nu z = o$ perpendicular al vector $[\sigma]$, en el que se verifica

$$\Sigma m A - \Sigma m A_o = \frac{1}{2} \sigma (t - t_o) .$$

515. Observaciones sobre los teoremas de las áreas y del momento de la cantidad de movimiento.—1.ª Hemos dicho al final del teorema de las áreas que cuando $N_e = o$ y $\nu = o$, se verifica en el plano $X Y$ la condición $\Sigma m A = \Sigma m A_o = constante$ y esto exige, indudablemente, que si una parte del sistema gira alrededor del eje $o Z$ en un sentido, tiene que haber otras partes del mismo que giren en sentido contrario, produciéndose, como es consiguiente, la deformación del sistema móvil; pero ocurre preguntar si será posible que haciendo experimentar al sistema, por la acción de sus fuerzas interiores, diversas deformaciones sucesivas, que le lleven a recuperar su primitiva forma, se pueda conseguir el giro del conjunto alrededor del eje respecto al cual se supone nulo el momento de las fuerzas exteriores.

Para darnos cuenta de la posibilidad de este giro, supongamos un sistema formado por varios elementos sometidos a la acción única de su peso y enlazados, en forma tal, que puedan todos girar con completa libertad alrededor de un eje vertical, el $o Z$ por ejemplo; en estas condi-

ciones el valor de N_e es cero y si suponemos al sistema en reposo inicial, será también $\nu = o$.

El valor de $\nu = \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = o$ se puede expresar en función de la velocidad angular que, al producirse las deformaciones interiores, adquieren los diversos elementos del sistema, pues por la posición del eje elegido y enlaces existentes será

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = v r = \omega r^2$$

y de aquí resulta $\nu = \Sigma m \omega r^2$.

Como, en esta suma, m y r^2 son esencialmente positivos, se confirma la necesidad de existir velocidades angulares positivas y negativas para que sea $\nu = \Sigma m \omega r^2 = o$; pero también nos dice la misma fórmula que, si las deformaciones sucesivas que conducen a la primitiva forma, se verifican con distintos valores en los momentos de inercia $m r^2$ de los elementos del sistema, las velocidades angulares que adquieren estos elementos, serán distintas en las diversas fases de los cambios de forma y podrá volver el sistema a la inicial, encontrándose en distinta posición, respecto al eje, que la que tenía al empezar su movimiento.

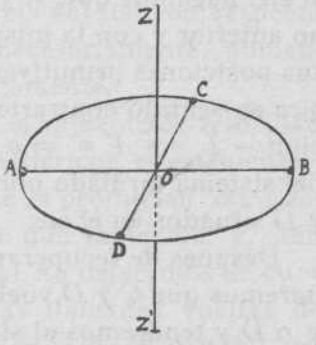


Fig. 303

Concretemos el caso al sistema representado en la figura 303, que consta de una plataforma circular giratoria alrededor del eje vertical $o Z$ y los cuatro elementos A, B, C y D colocados en los extremos de dos diámetros perpendiculares, suponiendo que estos cuatro elementos tienen

libertad para moverse sobre la plataforma, en la forma que se desee, por la acción de fuerzas interiores al sistema (*).

Supuesto lo anterior y estando en reposo el sistema, imaginemos que los elementos A y B marchan con velocidad lineal igual y constante en sentido positivo sobre la periferia de la plataforma, para reunirse A con C y B con D; en esta marcha la plataforma gira en sentido negativo verificándose la condición $\nu = \Sigma\, m\, \omega\, r^2 = o$, que en este caso es $I \,.\, \omega - I' \,.\, \omega' = o$, representando por I el momento de inercia constante respecto a $o\,Z$ de los elementos A y B y por I' el de la plataforma con los dos elementos C y D.

Llegados los elementos A y B a C y D y parados en esa posición, se detiene el giro de la plataforma; ahora hagamos que C y D marchen por los radios $o\,C$ y $o\,D$ para llegar al eje: en este movimiento teórica y prácticamente se ve que la plataforma no gira; pero cuando C y D lleguen al eje, hagamos que A y B retrocedan por el mismo camino anterior y con la misma velocidad lineal, hasta llegar a sus posiciones primitivas; en este retroceso la plataforma gira en sentido contrario al anterior, verificando la ecuación $-\, I \,.\, \omega + I'' \,\omega'' = o$, siendo I'' el momento de inercia del sistema formado por la plataforma y los elementos C y D situados en el eje.

Después de recuperar A y B sus primitivas posiciones, haremos que C y D vuelvan a las suyas por los radios $o\,C$ y $o\,D$ y tendremos al sistema con la configuración inicial, pero *en distinta posición respecto al eje o Z.*

En efecto, en el tiempo t de la primera marcha de A y B, la plataforma experimentó el desplazamiento angular $\psi_1 = \omega' \,.\, t$; en el mismo tiempo t que duró el retroceso de

(*) Los cuatro elementos *A, B, C* y *D*, pueden perfectamente ser cuatro individuos colocados de pie sobre la plataforma, para efectuar los movimientos que se indican.

A y B, el desplazamiento fué $\psi_2 = \omega'' \cdot t$; pero $\omega'' = \omega' \dfrac{I'}{I''}$, luego la plataforma ha girado en conjunto un ángulo positivo

$$\psi = \psi_2 - \psi_1 = (\omega'' - \omega')\, t = \omega' \frac{I' - I''}{I''} \times t .$$

Repitiendo estos movimientos, u otros análogos, un cierto número de veces, se conseguirá que el sistema verifique las revoluciones completas que se deseen.

2.ª Cuando un sistema está dotado en conjunto de un movimiento de giro alrededor de un eje, con una velocidad angular ω, ocurre algunas veces que sin intervención de fuerzas exteriores, aumenta o disminuye la expresada velocidad angular. Para darnos cuenta de las circunstancias en que este hecho tiene lugar, observemos que, no existiendo fuerzas exteriores en el indicado giro, se tiene que verificar la condición $\Sigma\, m\, \omega\, r^2 = constante$ y toda deformación que disminuya el momento de inercia del sistema, respecto al eje de giro, tiene que producir, necesariamente, aumentos de velocidad angular y recíprocamente.

Estas consideraciones justifican el aumento de velocidad angular y los desprendimientos periféricos consiguientes, en la nebulosa solar, a medida que se producían las condensaciones de la materia cósmica que la forma, y, aun cuando se trate de un ejemplo trivial, no dejaremos de citar la práctica de los acróbatas, en las llamadas vueltas de campana, que empezando con una pequeña velocidad angular, se aumenta rápidamente, y producen la vuelta completa, con el simple encogimiento del artista.

516. Teoremas de D'Alembert.—*En el movimiento de un sistema material se encuentran en equilibrio, en cada instante, las fuerzas exteriores aplicadas al sistema y las de inercia desarrolladas por todos los puntos del mismo.*—Como ya dijimos en la Dinámica del punto material,

únicamente por el interés histórico de este teorema se citaba; su empleo se reemplaza cómodamente por el de los teoremas de la cantidad de movimiento y momento de la misma, de los que es un corolario inmediato.

517. Teorema de la fuerza viva.—*El incremento de fuerza viva que experimenta en su movimiento un sistema material, en un tiempo cualquiera, es igual al trabajo desarrollado por todas las fuerzas aplicadas al sistema, en el mismo intervalo de tiempo.*—En efecto, para cada punto se verifica **(445)** $d\,\frac{m\,v^2}{2} = d\,T\,F$ y sumando las igualdades análogas de todos ellos, resulta

$$\Sigma\, d\frac{m v^2}{2} = \Sigma\, d\, T F,$$

que demuestra el teorema para un intervalo infinitesimal de tiempo.

Integrando entre t_o y t se tiene del mismo modo

$$\frac{\Sigma\, m\, v^2}{2} - \frac{\Sigma\, m\, v_o^2}{2} = \Sigma\, T F,$$

o bien, separando los trabajos de las fuerzas exteriores e interiores y expresando la fórmula en función de las componentes coordenadas de las mismas, se tiene la ecuación

$$\Sigma\,\frac{m\,v^2}{2} - \Sigma\,\frac{m\,v_o^2}{2} = \Sigma\, T F_e + \Sigma\, T F_i =$$

$$= \int_{t_o}^{t} X_e\, d\,x + Y_e\, d\,y + Z_e\, d\,z +$$

$$+ \int_{t_o}^{t} X_i\, d\,x + Y_i\, d\,y + Z_i\, d\,z.$$

Como el trabajo de las fuerzas interiores solo depende

de los cambio de forma del sistema, siempre que el móvil tenga la misma configuración en los instantes t_o y t, será $\Sigma T F_i = o$ y la ecuación de la fuerza viva es

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m v_o^2}{2} = \Sigma T F_e .$$

Este caso ocurre con frecuencia en los cuerpos elásticos, que recuperan su primitiva forma cuando cesan las causas exteriores que motivaron la deformación.

Cuando el sistema parte del reposo, se verifica $\Sigma \frac{m v_o^2}{2} = o$ y la fuerza viva es, en un instante cualquiera, igual al trabajo desarrollado por las fuerzas desde el principio del movimiento hasta el instante considerado.

518. Energía de un sistema material.—Ya hemos dicho que la fuerza viva de un sistema material constituye su *energía cinética* y el potencial interno de sus fuerzas interiores es su *energía potencial*; ahora llamaremos *energía total* del sistema la suma de las expresiones

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} \quad \text{y} \quad V = - \varphi (x\, y\, z) + C .$$

Entre estas cantidades existen las relaciones siguientes:

1.ª *Los incrementos de energía total que experimenta un sistema material, son equivalentes al trabajo desarrollado por las fuerzas exteriores aplicadas al sistema, en el mismo tiempo.*—De la ecuación $E = \Sigma \frac{m v^2}{2} + V$ se dedece **(500)**

$$d E = \Sigma d T F_e + \Sigma d T F_i - \Sigma d T F_i = \Sigma d T F_e$$

y lo mismo $E - E_o = \Sigma T F_e$, como se quería demostrar.

2.ª *En todo sistema en que el trabajo de las fuerzas*

exteriores es nulo, durante un cierto tiempo, se verifica que su energía total es constante durante el mismo tiempo.—Esta consecuencia constituye el principio de la *conservación de la energía*, de tanta importancia en las ciencias físicas y químicas, y nos dice que, cuando tenga lugar, los aumentos o pérdidas de energía cinética se traducirán en pérdidas o aumentos de energía potencial (*).

3.ª *En un sistema material, dotado de cierta energía, cuando el trabajo de las fuerzas exteriores sea resistente, la expresada energía disminuye constantemente hasta reducirse a cero.*—Basta observar que siendo $E = E_o - \Sigma T F_e$, el valor de E se reducirá a cero cuando $\Sigma T F_e = E_o$.

Un ejemplo de este caso es el movimiento producido en una lámina o resorte de acero que, fijándola por uno de sus extremos, se haga oscilar por sí sola en sentido horizontal, separándola con la mano de su posición de equilibrio; el sistema está sometido a la acción de la pesantez, cuyo trabajo es nulo, y a la resistencia del aire cuya acción es siempre opuesta al movimiento.

Si en el ejemplo anterior no existiese dicha resistencia y la lámina fuera perfectamente elástica, el movimiento sería indefinido, correspondiendo, en cada oscilación, el máximo de energía potencial a las posiciones extremas de la lámina, en que la cinética se reduce a cero y, por el con-

---

(*) Debe tenerse presente que en algunos casos parece desaparecer la energía cinética de un sistema, sin producir aumentos de energía potencial; pero esto es debido a que, dentro de la misma forma de la energía cinética, se pueden establecer distinciones entre la energía cinética *externa* o *visible*, y la que pueden adquirir, a expensas de la anterior, los últimos elementos del cuerpo material en sus movimientos vibratorios o perturbaciones productoras de ciertos fenómenos físicos como el calor, la luz, la electricidad, etc.

El principio de la *conservación de la energía*, admitido como *hecho experimental*, constituye la base de los modernos *métodos energéticos* que permiten exponer las teorías mecánicas prescindiendo de los postulados fundamentales que establecimos al empezar la Dinámica: el estado de evolución y controversia en que dichos métodos se encuentran, justifican, por ahora, su proscripción de obras didácticas del carácter de la presente.

trario, los mínimos de dicha energía corresponderán al paso por la posición de equilibrio, en la que tiene lugar el máximo de la cinética.

4.ª *La energía total de un sistema material, en una posición cualquiera representa el trabajo que han desarrollado las fuerzas exteriores, desde el estado de reposo del sistema, aumentado en el que tendrían que desarrollar las fuerzas interiores para llevar al mismo a la configuración en que se anula su potencial interno.*—Basta observar la equivalencia mecánica de las energías cinética y potencial, ya expresadas, para darse cuenta de la significación que el enunciado atribuye a la energía total.

III

MOVIMIENTO RELATIVO DE LOS SISTEMAS MATERIALES

519. Método general de resolución de los problemas de movimiento relativo en los sistemas materiales.—Al estudiar el movimiento de un punto material se vió que, en el caso de referirse a ejes móviles, era preciso tener en cuenta, y agregar a las ecuaciones correspondientes, las proyecciones de las fuerzas ficticias (centrífuga compuesta, tangencial de inercia y centrífuga ordinaria), que los arrastres de los ejes de referencia producen en general, y que con estas modificaciones se podía estudiar el movimiento relativo de los puntos móviles como si fuera absoluto o referido a ejes fijos; y estando formados los sistemas materiales por la reunión de mayor o menor número de móviles elementales de los allí considerados, se deduce que las ecuaciones generales del movimiento y equilibrio de los sistemas, establecidas en los números **504** y **506**, serán aplicables al mo-

vimiento relativo, con tal de hacer intervenir en ellas las proyecciones de las citadas fuerzas ficticias que los arrastres desarrollan (*).

520. Movimientos relativos en la superficie de la tierra.—Por las mismas razones apuntadas en el número anterior, se hacen extensivos a los sistemas materiales, los razonamientos hechos al estudiar los movimientos de un punto en la superficie de la tierra, para considerar a éstos como absolutos, mediante la intervención de la centrífuga compuesta y la sustitución, por la pesantez, de la gravedad y centrífuga ordinaria producida por la rotación diurna de la tierra.

521. Teoremas generales en el movimiento relativo.—A pesar de la posibilidad de estudiar los movimientos relativos como si fueran absolutos, en las condiciones expresadas, suele convenir en algunas ocasiones referir el movimiento de un sistema a ejes que le acompañen en su movimiento, y vamos a exponer algunas particularidades que, en las aplicaciones de los teoremas generales demostrados, suelen presentarse, suponiendo siempre que los ejes móviles que acompañan al sistema en su movimiento tengan dirección fija y su origen en el centro de gravedad del mismo.

1.ª *La cantidad de movimiento de un sistema material, con relación a ejes móviles que pasan por su centro de gravedad, es siempre nula.*—Puesto que este centro permanece inmóvil con relación a los citados ejes, la expresión $\Sigma m [v'] = M [V']$ será constantemente nula.

2.ª *El momento de la cantidad de movimiento, con relación a un punto fijo, es igual a la suma gráfica del momento de la cantidad de movimiento del centro de gravedad, con relación al mismo punto, y el momento*

(*) Se tendrán presente las observaciones hechas en la Dinámica del punto material sobre los casos de arrastres que reducen a *cero* alguna de las fuerzas ficticias expresadas.

de la cantidad de movimiento del sistema con relación a su centro de gravedad.—Trazando tres ejes $o\,X$, $o\,Y$, $o\,Z$ por el punto fijo y otros tres paralelos $o'\,X'$, $o'\,Y'$, $o'\,Z'$ por el centro de gravedad del sistema, se podrán establecer las igualdades siguientes:

$$\gamma = \Sigma\, m\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right) =$$

$$= \Sigma\, m\left((a+x')\,\frac{d\,(b+y')}{dt} - (b+y')\,\frac{d\,(a+x')}{dt}\right) =$$

$$= M\left(a\,\frac{db}{dt} - b\,\frac{da}{dt}\right) + \Sigma\, m\left(x'\,\frac{dy'}{dt} - y'\,\frac{dx'}{dt}\right),$$

por ser **(125-5.ª)** $\Sigma\, m\,x' = \Sigma\, m\,y' = o$ y $\Sigma\, m\,\dfrac{dx'}{dt} = \Sigma\, m\,\dfrac{dy'}{dt} = o$.

El sumando $M\left(a\,\dfrac{db}{dt} - b\,\dfrac{da}{dt}\right)$ es el momento de la cantidad de movimiento del centro de gravedad del sistema, con relación al eje $o\,Z$ y el $\Sigma\, m\left(x'\,\dfrac{dy'}{dt} - y'\,\dfrac{dx'}{dt}\right)$ representa el momento de la cantidad de movimiento del sistema, con relación al eje $o'\,Z'$, que pasa por su centro de gravedad, y como la misma ecuación podría establecerse con relación a los otros ejes trazados por o y o', queda demostrada la equipolencia del vector $[\sigma]$ con el $M_o\,M\,[V]$ más el $[\sigma']$ relativo al centro de gravedad del sistema.

3.ª *La derivada con relación al tiempo del momento de la cantidad de movimiento, respecto a un eje móvil que pase por el centro de gravedad de un sistema material, es igual al momento de las fuerzas exteriores con relación al mismo eje.*—En efecto **(512)**

$$\frac{d\,\gamma}{dt} = \Sigma\,(x\,Y_e - y\,X_e) = \Sigma\left((a+x')\,Y_e - (b+y')\,X_e\right) =$$

$$= \Sigma\,(x'\,Y_e - y'\,X_e) + \Sigma\left(a\,Y_e - b\,X_e\right);$$

por otra parte

$$\frac{d\,v}{d\,t} = M\left(a\,\frac{d^2\,b}{d\,t^2} - b\,\frac{d^2\,a}{d\,t^2}\right) + \Sigma\,m\left(x'\,\frac{d^2y'}{d\,t^2} - y'\,\frac{d^2x'}{d\,t^2}\right),$$

luego se obtiene

$$a\left(M\frac{d^2\,b}{d\,t^2} - \Sigma\,Y_e\right) - b\left(M\frac{d^2\,a}{d\,t^2} - \Sigma\,X_e\right) +$$

$$+\,\Sigma\,m\left(x'\,\frac{d^2y'}{d\,t^2} - y'\,\frac{d^2x'}{d\,t^2}\right) = \Sigma\,(x'\,Y_e - y'\,X_e)$$

y como los paréntesis de los dos primeros sumandos son nulos **(509)**, resulta

$$\frac{d}{d\,t}\,\Sigma\,m\left(x'\,\frac{d\,y'}{d\,t} - y'\,\frac{d\,x'}{d\,t}\right) = \Sigma\,(x'\,Y_e - y'\,X_e),$$

como queríamos demostrar.

Si se supone trazada, tomando el centro de gravedad del sistema como polo, la función gráfica [σ'] de los momentos de la cantidad de movimiento, con relación a dicho punto, se verifica en todos los instantes la equipolencia de su derivada lineal con el momento de las fuerzas exteriores respecto a dicho punto.

Los corolarios del teorema del momento de la cantidad de movimiento, demostrados en el caso de ejes fijos, se verifican igualmente con relación a los ejes móviles que estamos ahora considerando; así, si el momento de las fuerzas exteriores es nulo, con relación a un eje que pase por el centro de gravedad del sistema, el movimiento relativo satisface a la ley de las áreas sobre un plano perpendicular a dicho eje, y si el momento de las expresadas fuerzas con relación al centro de gravedad del sistema se reduce a *cero*, tendrá lugar la ley de las áreas en todo plano que pase por dicho punto. En este último caso el vector [σ'] tiene su dirección fija en el espacio, independiente de la de los ejes

coordenados y el plano perpendicular a este vector en su punto de aplicación, es *el plano del máximun de las áreas.*

Como el sistema solar está en el caso del segundo corolario citado, se deduce, de las consideraciones anteriores, la posibilidad de señalar en el mismo una dirección fija, representada por el vector [s'] aplicado al centro de gravedad de dicho sistema; el plano perpendicular a este vector trazado por el citado punto, o sea el del máximun de las áreas del sistema solar, se llama *plano invariable* de *Laplace*, en recuerdo de este astrónomo que fijó el primero su situación aproximada.

4.ª *La fuerza viva de un sistema material, es igual a la fuerza viva de su centro de gravedad* (*) *aumentada en la fuerza viva relativa a los ejes de dirección fija que pasan por dicho centro.*—En efecto, para cada punto se verifica

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{d(a+x')}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(b+y')}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(c+z')}{dt}\right)^2 =$$

$$= V^2 + v'^2 + 2\frac{da}{dt}\cdot\frac{dx'}{dt} + 2\frac{db}{dt}\cdot\frac{dy'}{dt} + 2\frac{dc}{dt}\cdot\frac{dz'}{dt};$$

si multiplicamos por la masa y sumamos, dividiendo por 2, resulta

$$\Sigma\frac{mv^2}{2} = \frac{M\,V^2}{2} + \Sigma\frac{m\,v'^2}{2}.$$

Esta propiedad se conoce con el nombre de *teorema de Kœnig.*

(*) Llamamos fuerza viva del centro de gravedad de un sistema material a la expresión $\frac{M\,V^2}{2}$.

5.ª *Los incrementos de fuerza viva relativa son iguales a los trabajos desarrollados por todas las fuerzas aplicadas al sistema, en los desplazamientos relativos del mismo.* — Considerando primero el incremento diferencial, $d\,\Sigma\,\frac{m\,v'^2}{2}$, se obtiene

$$d\,\Sigma\frac{m\,v'^2}{2} = d\,\Sigma\frac{m v^2}{2} - d\frac{M\,V^2}{2} = \Sigma\,d\,T'\,F_e + \Sigma\,d\,T'\,F_i +$$

$$+\left(d\,a\,\Sigma\,X_e + d\,b\,\Sigma\,Y_e + d\,c\,\Sigma\,Z_e - d\frac{M\,V^2}{2}\right) +$$

$$+\,(d\,a\,\Sigma\,X_i + d\,b\,\Sigma\,Y_i + d\,c\,\Sigma\,Z_i)\,;$$

pero siendo nulos los dos últimos paréntesis, se verificará

$$d\,\Sigma\frac{m\,v'^2}{2} = \Sigma\,d\,T'\,F_e + \Sigma\,d\,T'\,F_i$$

y

$$\Sigma\frac{m\,v'^2}{2} - \Sigma\frac{m\,v_o'^2}{2} = \Sigma\,T'\,F_e + \Sigma\,T'\,F_i\,.$$

522. Observación. — Los resultados obtenidos, que demuestran la aplicación de los teoremas del momento de la cantidad de movimiento, con sus corolarios, y el de la fuerza viva, a los movimientos relativos estudiados, en la misma forma que si fueran absolutos, se podían haber previsto, observando que el arrastre, que la movilidad de los ejes comunica al sistema, es una traslación que no produce centrífuga compuesta, ni centrífuga ordinaria, y en cuanto a la tangencial de inercia, por ser igual la aceleración correspondiente en todos los puntos, su resultante estará aplicada al centro de gravedad y no influye en el movimiento de los demás puntos respecto al expresado centro; en resumen, no teniendo que introducir fuerzas ficticias en esta clase de movimientos relativos, su estudio se realizará con los mismos caracteres que si fueran absolutos.

CAPITULO QUINTO

Dinámica especial de los sistemas indeformables

I

MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO LIBRE

523. Condiciones generales del movimiento de los sistemas indeformables.—Los sistemas indeformables están caracterizados por la invariabilidad de las distancias relativas de todos sus puntos, que permite formar $3n - 6$ ecuaciones de enlace entre las coordenadas de los mismos y nos indica que bastará encontrar 6 ecuaciones que liguen a dichas coordenadas con las fuerzas y el tiempo, para considerar resuelto, de un modo general, el problema dinámico de tales sistemas.

Cuando los elementos del sistema sean puntos materiales finitos y el número de ellos, n, sea determinado, basta aplicar la ecuación general del movimiento de un sistema cualquiera **(504)**, para deducir, en combinación con las $3n - 6$ ecuaciones de enlace, las $3n$ ecuaciones del movimiento de los referidos n puntos. Pero en los demás casos, y aun con frecuencia en el que acabamos de citar, es más sencillo obtener directamente las 6 ecuaciones necesarias, por la aplicación de los teoremas de la cantidad de movimiento y momento de la misma, en los que no intervienen para nada las fuerzas de enlace propias del sistema móvil.

524. Ecuaciones del movimiento del sólido.—Las seis ecuaciones a que dan lugar los teoremas citados son

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dx}{dt}=\Sigma X_e\,,\quad \frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\Sigma L_e\,,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dy}{dt}=\Sigma Y_e\,,\quad \frac{d}{dt}\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\Sigma M_e\,,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dz}{dt}=\Sigma Z_e\,,\quad \frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma N_e\,,$$

Cuando se quiera prescindir del movimiento de los diversos puntos del sólido alrededor de su centro de gravedad y calcular sólamente las posiciones de este último punto, considerando al sólido como un punto material finito, bastará establecer las ecuaciones del movimiento de dicho centro **(509)**

$$M\frac{d^2a}{dt^2}=\Sigma X_e\,,\quad M\frac{d^2b}{dt^2}=\Sigma Y_e\,,\quad M\frac{d^2c}{dt^2}=\Sigma Z_e\,.$$

El empleo de estas últimas ecuaciones, permite reducir el movimiento de un sólido libre en el espacio, al de un cuerpo que tenga un punto fijo, pues basta trazar por el centro de gravedad tres ejes paralelos a los supuestos fijos y estudiar el movimiento del sistema relativo a estos ejes, respecto a los cuales el centro de gravedad permanece inmóvil.

525. Equilibrio de los sistemas indeformables.—Las ecuaciones del equilibrio de un sólido se deducirían de la ecuación general establecida en el número **506**, en combinación con las $3n-6$ de los enlaces interiores del sistema, como se dijo para el movimiento; pero también será siempre más sencillo obtenerlas por la anulación de los

segundos miembros de las seis ecuaciones del movimiento, o sea

$$\Sigma X_e = \Sigma Y_e = \Sigma Z_e = o, \quad \Sigma L_e = \Sigma M_e = \Sigma N_e = o,$$

debiendo observarse que estas ecuaciones son suficientes para el equilibrio de los sólidos perfectos o rigurosamente indeformables, que estamos considerando; pero dejan de serlo cuando se trata de sólidos naturales, cuyas deformaciones, por la acción de las fuerzas exteriores, alteran el equilibrio interior que existe en los sólidos indeformables y la ruptura de este equilibrio interior puede producir la del exterior, no obstante las seis ecuaciones de condición establecidas; por ahora seguiremos suponiendo que tiene lugar la indeformabilidad perfecta de dichos móviles.

526. Potencial interno de los sistemas indeformables.— No modificándose la configuración de los sistemas indeformables durante el movimiento, el trabajo elemental y total de las fuerzas interiores será cero, $\Sigma\, d\, T\, F_i = \Sigma\, \psi(r)\, dr = o$, y su potencial interno es constante: generalmente se supone que este potencial es nulo, por la imposibilidad de producir trabajo alguno, en tanto que el sistema conserve el carácter de indeformabilidad supuesto.

Siendo nula la energía potencial de los sólidos indeformables, la total de los mismos no podrá afectar más que la forma cinética expresada por su fuerza viva.

527. Teorema de la fuerza viva en los sistemas indeformables.—La anulación de los trabajos de las fuerzas interiores simplifica la ecuación de la fuerza viva en los sistemas indeformables, reduciéndola a

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m v_o^2}{2} = \Sigma\, T\, F_e\,,$$

o bien, cuando el móvil parta del reposo, a $\Sigma \dfrac{m v^2}{2} = \Sigma\, T\, F_e$,

que nos dice que *la fuerza viva de que está animado un sólido, en un instante cualquiera, es igual al trabajo desarrollado por las fuerzas exteriores que le están aplicadas, desde que empezó el movimiento del cuerpo hasta el instante considerado.*

Cuando las fuerzas exteriores son potenciales, la ecuación de la fuerza viva toma la forma

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m v_o^2}{2} = U - U_o = V_o - V,$$

verificándose la relación

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} + V = \Sigma \frac{m v_o^2}{2} + V_o = h = constante,$$

con las consecuencias que en el número **446** se establecieron para un punto material (*).

Como caso particular consideremos un cuerpo sólido sometido a la acción de su peso, con movimiento de traslación; la fuerza viva del sólido viene dada por la ecuación

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = \Sigma \frac{m v_o^2}{2} + P (z_o - z),$$

o

$$\frac{M v^2}{2} = \frac{M v_o^2}{2} + P (z_o - z),$$

por ser la misma la velocidad de todos los puntos.

Cuando el movimiento del sólido no sea de traslación, se descompondrá en un movimiento de esta naturaleza y una rotación alrededor de un eje que pase por el centro de gravedad, y calculada la fuerza viva del móvil en este últi-

---

(*) Conviene fijarse, para no confundir ideas, en la diferencia que existe entre la energía potencial de las fuerzas aplicadas a un sistema y la energía potencial del mismo que en los sistemas indeformables se supone siempre nula.

mo movimiento, por las fórmulas que más adelante estudiaremos, se determinará la fuerza viva total del sistema por el teorema de Kœnig ya demostrado (**521**—4.°).

II

SÓLIDO CON TRES O MÁS PUNTOS FIJOS

528. Problemas estáticos que se presentan en este caso.—Cuando un sistema indeformable tiene tres o más puntos fijos, no estando todos en línea recta, el cuerpo queda inmovilizado y, teóricamente, cualquiera que sea el sistema de fuerzas que se le aplique, continuará en la misma inmovilidad. Pero si se supone que los enlaces establecidos en los puntos fijos, permiten al cuerpo desligarse de sus apoyos en determinadas direcciones, se comprende que no todos los sistemas de fuerzas aplicadas al cuerpo conservarán la inmovilidad del mismo.

Cualquiera que sea la forma de establecer los referidos enlaces, el cuerpo, al recibir la acción de un sistema de fuerzas que no sea nulo, producirá ciertas acciones sobre sus puntos de apoyo, que devueltas por éstos en forma de reacción, igual y de sentido contrario, darán lugar a un sistema forzosamente nulo, cuando el reposo del cuerpo subsista, cosa que ocurrirá siempre que los enlaces estén en el primero de los dos casos citados y que podrá dejar de ocurrir cuando los enlaces sean *condicionales*, siendo evidente que, en este último caso, si no se cumplen las condiciones de nulidad de fuerzas aplicadas y reacciones, el cuerpo se pondrá en movimiento bajo la acción de la resultante de unas y otras.

De las consideraciones anteriores se deduce que los pro-

blemas de *Estática*, que en estos casos interesa resolver, son los siguientes:

1.° *Dado un sistema de fuerzas aplicado a un sólido indeformable, con varios puntos fijos en absoluto, determinar las acciones o reacciones que en dichos puntos se desarrollan.*

2.° *Dado un sistema de fuerzas aplicado a un sólido indeformable, con varios puntos fijos condicionalmente, determinar las condiciones que debe satisfacer el sistema de fuerzas aplicado al cuerpo, para que éste continúe en reposo, y calcular, cuando el equilibrio exista, las acciones o reacciones que en los puntos de apoyo se desarrollan.*

Concretando más el alcance de estos problemas, y reduciéndolos a términos más sencillos, supondremos que los enlaces se establecen por el contacto del cuerpo dado con superficies planas de otros cuerpos, siendo normales las acciones mutuas que los dos se ejercen y distinguiendo los enlaces absolutos, de los condicionales de que hemos hablado, por la circunstancia de que los cuerpos no se puedan separar, o tengan libertad para hacerlo cuando, estando unidos, se invierta el sentido de dichas acciones. En todos los casos llamaremos *polígono de sustentación* al polígono convexo que, teniendo por vértices punto de apoyo, los encierra a todos ellos.

529. Sólido con tres puntos fijos.—Supondremos que el plano de los puntos de enlace sea el coordenado $X\,Y$, con lo que las tres reacciones Q_1, Q_2, Q_3 serán paralelas al eje $o\,Z$.

Las ecuaciones del equilibrio son

$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma Z + \Sigma Q = o,$$

$$\Sigma L + \Sigma Q\,y = o, \quad \Sigma M + \Sigma Q\,x = o, \quad \Sigma N = o,$$

y se ve que, por las limitaciones impuestas al problema, las fuerzas aplicadas al cuerpo tienen que cumplir, por sí, las condiciones

$$\Sigma X = o, \quad \Sigma Y = o, \quad \Sigma N = o,$$

que revelan la necesidad de que dichas fuerzas tengan resultante única perpendicular al plano de los puntos fijos.

Para el cálculo de las reacciones se utilizan las tres restantes ecuaciones, que forman un sistema determinado con las tres incógnitas Q_1, Q_2, Q_3; si alguna de estas reacciones resultara negativa, es indudable que la acción de las fuerzas aplicadas al cuerpo tendería a separar a éste del plano de los puntos de apoyo y, por el contrario, cuando dichas reacciones sean positivas, las fuerzas aplicadas tienden a comprimir al cuerpo contra dicho plano.

Cuando los enlaces sean absolutos, el equilibrio subsistirá en los dos casos; pero si se supone que son condicionales de la forma dicha, es necesario que las tres reacciones sean positivas y esto implica, en el sistema de fuerzas aplicadas al cuerpo, las dos nuevas condiciones siguientes: 1.ª *la resultante única del sistema de fuerzas aplicado al sólido tiene que cortar el plano de los puntos de apoyo dentro del triángulo de sustentación;* 2.ª *la expresada resultante tiene que estar dirigida en el sentido conveniente para comprimir al cuerpo contra el referido plano.*

530. Sólido apoyado en tres puntos sometido a la acción de su peso.—Las condiciones expuestas en el número anterior exigen, para este caso, que el plano de los puntos de apoyo sea horizontal, inferior al cuerpo, y que la vertical del centro de gravedad pase por dentro del triángulo de sustentación.

El sistema de ecuaciones que hay que resolver, para calcular las reacciones, llamando x_n y_n las coordenadas de los tres puntos de apoyo y a, b las de la traza horizontal de la vertical que pasa por el centro de gravedad del cuerpo, es el siguiente:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 - P = o,$$

$$Q_1 y_1 + Q_2 y_2 + Q_3 y_3 - P b = o,$$

$$Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_3 x_3 - P a = o.$$

Gráficamente se resolvería el problema anterior, aplicando las construcciones indicadas en el Algoritmo mecánico para componer sistemas paralelos **(102)**; así se ha hecho en la figura 304, en la que P es el peso del cuerpo, G la proyección horizontal de su centro de gravedad y A, B y C los tres puntos de apoyo: las construcciones gráficas de la figura conducen inmediatamente a los vectores Q_1, Q_2 y Q_3, que representan las presiones que el cuerpo ejerce sobre sus apoyos; cambiadas de signo son las reacciones que se buscan.

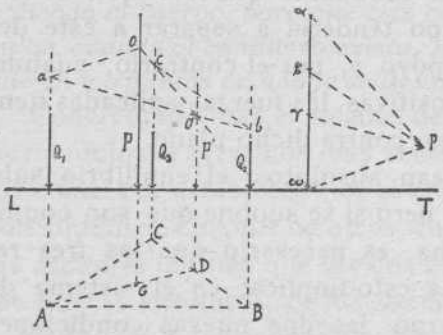


Fig. 304

531. Sólido apoyado en cuatro puntos sometido a la acción de su peso.—Por las mismas razones del caso anterior es preciso que el plano de apoyo sea horizontal, inferior al cuerpo y que la vertical del centro de gravedad pase por dentro del polígono de sustentación; suponiendo verificadas las condiciones anteriores, resulta indeterminado el problema teórico actual, por no contar más que con tres ecuaciones para calcular las cuatro reacciones; pero si suponemos que conservando el cuerpo su indeformabilidad, la materia de que está formada la superficie de apoyo experimenta *las deformaciones naturales dentro del pe-*

ríodo elástico (*), se puede encontrar la cuarta ecuación necesaria para determinar las cuatro reacciones.

Supongamos, para concretar las ideas, que se trata de una mesa rectangular, con un peso P situado sobre ella y prescindamos del peso propio de la mesa; sean ρ_1, ρ_2, ρ_3 y ρ_4 las penetraciones producidas en el plano de apoyo por los cuatro pies de la mesa y Q_1, Q_2, Q_3 y Q_4 las presiones o reacciones correspondientes; se verificará

$$\frac{\rho_1}{Q_1} = \frac{\rho_2}{Q_2} = \frac{\rho_3}{Q_3} = \frac{\rho_4}{Q_4} = K;$$

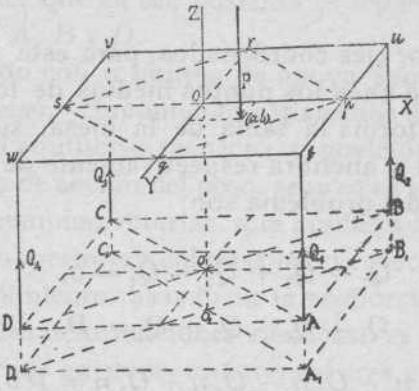


Fig. 305

pero al penetrar los pies opuestos A y C, B y D (fig. 305)

(*) Cuando un sólido natural se somete a una fuerza exterior, que obra en un punto de su superficie, experimenta el sólido una deformación que puede ser *elástica* o *permanente*, según que al desaparecer la fuerza desaparezca o no la referida deformación. Todos los sólidos son elásticos en mayor o menor grado, teniendo un *límite de elasticidad* a partir del cual se producen las deformaciones permanentes; cuando las fuerzas aplicadas no rebasan dicho límite, se dice que las deformaciones están dentro del período elástico y son proporcionales a las fuerzas que las producen, llamándose *coeficiente de elasticidad* la relación $E = \frac{P}{h}$ entre las fuerzas y la deformación producida dentro de dicho período, referidas a la unidad de sección y de longitud.

en el plano de apoyo, se forman dos trapecios, $A\,C\,A_1\,C_1$ y $B\,D\,B_1\,D_1$, en los que se tiene

$$O'\,O_1 = \frac{\rho_1 + \rho_3}{2} \quad \text{y} \quad O'\,O_1 = \frac{\rho_2 + \rho_4}{2},$$

cuyas igualdades conducen a

$$\rho_1 - \rho_2 + \rho_3 - \rho_4 = o \quad \text{o} \quad Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4 = o,$$

que es la ecuación complementaria que se unirá a las tres del equilibrio teórico, para calcular las cuatro reacciones de los apoyos.

Tomemos por ejes coordenados, para este cálculo, los $O\,X$ y $O\,Y$ que unen los puntos medios de los lados del rectángulo que forma la tabla de la mesa, siendo $2\,m$ y $2\,n$ la longitud y anchura respectivamente de dicha tabla; las ecuaciones del problema son

$$Q_1 - Q_2 + Q_3 - Q_4 = o,$$

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = P,$$

$$Q_1\,n - Q_2\,n - Q_3\,n + Q_4\,n = P\,b,$$

$$-\,Q_1\,m - Q_2\,m + Q_3\,m + Q_4\,m = -\,P\,a,$$

y resueltas conducen a las fórmulas

$$Q_1 = \frac{P}{4}\left(1 + \frac{a}{m} + \frac{b}{n}\right), \quad Q_2 = \frac{P}{4}\left(1 + \frac{a}{m} - \frac{b}{n}\right),$$

$$Q_3 = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{a}{m} - \frac{b}{n}\right), \quad Q_4 = \frac{P}{4}\left(1 - \frac{a}{m} + \frac{b}{n}\right).$$

Examinemos ahora si puede reducirse a cero alguna de las reacciones, la Q_3 por ejemplo, para ello es preciso que

sea $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}=1$ y como $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ es la ecuación analítica de la recta $p\,q$, que une los puntos medios de los dos lados correspondientes a los pies A, B y D, se deduce que colocando el peso P sobre uno cualquiera de los lados del rombo $p\,q\,r\,s$, el pie opuesto de la mesa deja de ejercer su acción sobre el apoyo.

Del mismo modo se ve que si se coloca el peso en la parte $p\,q\,t$ de la mesa será $\frac{a}{m}+\frac{b}{n}>1$ y se hace Q_3 negativa; como el enlace no consiente estas reacciones negativas, se deduce que en esa posición se reparte el peso entre los tres pies A, B y D.

532. Sólido con n puntos de apoyo sometido a la acción de su peso. — Suponiendo satisfechas las condiciones generales del equilibrio respecto a posición del plano de apoyo y línea de acción del peso, se precisa establecer $n-3$ ecuaciones complementarias, que unidas a las tres del equilibrio teórico, permitan calcular las n reacciones.

El procedimiento, basado en la proporcionalidad de las fuerzas con las deformaciones elásticas; es análogo al seguido en el caso anterior: tomaremos tres puntos de apoyo y expresando la condición de que cada uno de los $n-3$ restantes permanezca en el plano de aquellos, después de producirse las deformaciones de los apoyos, se establecerán las $n-3$ ecuaciones complementarias que se buscan.

III

SÓLIDO CON DOS PUNTOS FIJOS

533. Naturaleza de este movimiento.—Un sólido con dos puntos fijos no puede tener más movimiento que el de

rotación alrededor de la recta que une dichos puntos y este movimiento quedará determinado cuando se establezca la ecuación del movimiento angular correspondiente a dicha rotación permanente. Por otra parte, el sólido, al girar por la acción de las fuerzas que sobre él actúan, ejercerá ciertas acciones sobre los puntos de apoyo, que éstos devuelven en forma de reacciones y cuyo valor será de interés conocer en la mayor parte de los casos.

Los problemas que convendrá resolver en esta teoría son los siguientes:

1.° *Dadas las fuerzas que obran sobre un sólido que tiene dos puntos fijos, determinar la ecuación del movimiento angular de la rotación resultante alrededor del eje que une a dichos puntos.*

2.° *Dadas las fuerzas que obran sobre un sólido que tiene dos puntos fijos, calcular las acciones o reacciones que en dichos puntos se ejercen, durante el movimiento del mismo.*

Pero antes de plantear estos problemas vamos a deducir algunas fórmulas que se utilizan en su resolución.

534. Expresión de la cantidad de movimiento, momento de la misma y fuerza viva del sólido en función de la velocidad angular.—Sea $[\omega] \equiv [p] + [q] + [r]$ la velocidad angular de la rotacion; la lineal de un punto cualquiera está determinada por las fórmulas cinemáticas **(212)**

$$v_x = q\,z - r\,y, \quad v_y = r\,x - p\,z, \quad v_z = p\,y - q\,x;$$

representemos, como se ha hecho en el Algoritmo mecánico, por A, B, C, F, E y D los momentos de inercia y los rectangulares del sólido respecto a los ejes y planos coordenados, siendo I el de inercia con relación al eje de la rotación. Con estos datos obtendremos

$$\alpha = \Sigma\, m\, v_x = \Sigma\, m\,(q\,z - r\,y) = q\,\Sigma\, m\,z - r\,\Sigma\, m\,y,$$
$$\beta = \Sigma\, m\, v_y = \Sigma\, m\,(r\,x - p\,z) = r\,\Sigma\, m\,x - p\,\Sigma\, m\,z,$$
$$\gamma = \Sigma\, m\, v_z = \Sigma\, m\,(p\,y - q\,x) = p\,\Sigma\, m\,y - q\,\Sigma\, m\,x,$$

$$\lambda = \Sigma m (y v_z - z v_y) = A p - F q - E r,$$

$$\mu = \Sigma m (z v_x - x v_z) = B q - F p - D r,$$

$$\nu = \Sigma m (x v_y - y v_x) = C r - E p - D q,$$

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = \frac{1}{2} \Sigma m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) =$$

$$= \frac{1}{2} (A p^2 + B q^2 + C r^2 - 2 F p q - 2 E p r - 2 D q r).$$

Si el eje de la rotación se confunde con alguno de los coordenados, el $O Z$ por ejemplo, se simplifican las fórmulas obtenidas, reduciéndose a

$$p = o, \quad q = o, \quad r = \omega,$$

$$v_x = - \omega y, \quad v_y = \omega x, \quad v_z = o,$$

$$\alpha = - \omega \Sigma m y, \quad \beta = \omega \Sigma m x, \quad \gamma = \Sigma m v_z = o,$$

$$\lambda = - \omega E, \quad \mu = - \omega D, \quad \nu = \omega C = \omega I, \quad \Sigma \frac{m v^2}{2} = \frac{I}{2} \omega^2.$$

Como la última fórmula expresa que la fuerza viva, en un instante determinado, es igual al cuadrado de la velocidad angular por la mitad del momento de inercia, respecto al eje de rotación, y esta propiedad es independiente del sistema coordenado, se podrá aplicar en todos los casos, cualquiera que sea la dirección del eje de la rotación.

535. Trabajo de las fuerzas aplicadas al sólido en función de la velocidad angular.— Siendo **(527)**

$$\Sigma T F_e = \Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m v_o^2}{2}$$

en cualquier movimiento del sólido, se verificará igualmente esta ecuación en el caso actual, sin intervención de las

fuerzas de enlace, por tratarse de movimientos compatibles con los mismos; expresando ahora la fuerza viva en función de ω, resulta

$$\Sigma T F_e = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_o^2 = \frac{1}{2} I (\omega^2 - \omega_o^2),$$

que nos dice que *la condición necesaria y suficiente para que la rotación sea uniforme* ($\omega = \omega_o$), *es que el trabajo de las fuerzas exteriores aplicadas al sólido sea constantemente nulo.*

Cuando el movimiento del sólido, por efecto de las fuerzas que le estén aplicadas, se produce con irregularidades que le hagan marchar con velocidades angulares unas veces mayores y otras menores que la inicial, o *la de régimen* ω_o, se verifica que cada vez que ω pasa por el valor ω_o, la suma de los trabajos de las fuerzas motoras aplicadas al sólido es igual a la suma de los trabajos debidos a las fuerzas resistentes. En el movimiento de los órganos giratorios de las máquinas, donde tienen aplicación estas consideraciones, se suele verificar la indicada equivalencia a cada vuelta del eje, llamándose estos movimientos *periódicamente uniformes.* De esta propiedad hemos hecho uso en el número **387** al hablar del funcionamiento de los frenos dinamométricos.

536. Ecuación del movimiento angular del sólido.—Pasemos ya a resolver el primero de los problemas citados, en la hipótesis de ser el eje *o Z* el eje de la rotación; el teorema del momento de la cantidad de movimiento **(512)** nos da

$$\frac{d\gamma}{dt} = \Sigma (x Y_e - y X_e) = N \text{ (*)}$$

(*) En esta ecuación no intervienen las reacciones por ser su momento nulo respecto al eje de giro.

y siendo $\nu = I\,\omega$, se deduce

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{N}{I}\,,\quad \omega = \frac{1}{I}\int N\,dt + \omega_o\,,$$

$$\psi = \frac{1}{I}\int dt \int N\,dt + \omega_o\,t + \psi_o\,.$$

Cuando el momento de las fuerzas aplicadas al sólido sea constante respecto al eje de giro, serán

$$\psi = \frac{N}{2\,I}\,t^2 + \omega_o\,t + \psi_o\,,\quad \omega = \frac{N}{I}\,t + \omega_o$$

y el movimiento es uniformemente variado, con las propiedades cinemáticas que ya conocemos (**230**).

Si el momento de las expresadas fuerzas es constantemente nulo, respecto al eje de giro (fuerzas nulas, paralelas o que corten al eje), el movimiento $\psi = \omega_o\,t + \psi_o$, $\omega = \omega_o$ es uniforme y, como caso particular, si $\omega_o = o$, el sólido permanecerá en reposo; es decir, que si un sólido tiene libertad para moverse alrededor de un eje, y está en reposo, es preciso aplicarle fuerzas que no tengan el momento nulo respecto a dicho eje, para que el giro pueda iniciarse; si después de adquirida una cierta velocidad angular, cesa la acción de la fuerza, la rotación continuará con la velocidad angular adquirida.

Es digno de notarse que en las circunstancias del movimiento que estamos estudiando, no influye la suma gráfica de las fuerzas aplicadas al sólido y sí solo su momento respecto al eje de giro; este momento puede sustituirse por el de un par de fuerzas situado en un plano perpendicular al eje y, recíprocamente, el efecto de un par de esta naturaleza, podrá sustituirse por el de un sistema de fuerzas cualquiera, que produzca el mismo momento con relación a dicho eje.

537. Cálculo de las reacciones en los puntos de apoyo.—Sean o y o' los dos puntos de apoyo del sólido (figura 306) y Q, Q' las reacciones desarrolladas en dichos puntos; el teorema de la cantidad de movimiento **(511)**, aplicado a los tres ejes coordenados, nos da

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma m v_x = -\frac{d\omega}{dt}\Sigma m y - \omega^2 \Sigma m x = X' + X'' + X,$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma m v_y = \frac{d\omega}{dt}\Sigma m x - \omega^2 \Sigma m y = Y' + Y'' + Y,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma m v_z = o = Z' + Z'' + Z.$$

La última ecuación nos dice que las sumas de las proyecciones de las dos reacciones sobre el eje de giro es igual y de signo contrario a la misma proyección de las fuerzas aplicadas, $Z' + Z'' = -Z$, y esto con independencia de las circunstancias del movimiento. Como Z' y Z'' tienen la misma línea de acción, sus efectos se suman, y tomando como incógnita a esta suma $Z_1 = Z' + Z''$, el problema tiene cinco incógnitas X', X'', Y', Y'' y Z_1, o mejor dicho cuatro, puesto que Z_1 ya es conocida.

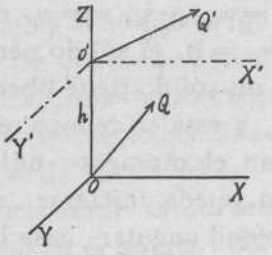


Fig. 306

Para establecer las dos ecuaciones que faltan, aplicaremos el teorema del momento de la cantidad de movimiento a los ejes $o\,X$ y $o\,Y$ y tendremos

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{d\omega}{dt}\Sigma m x z + \omega^2 \Sigma m y z = L - h Y'',$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{d\omega}{dt}\Sigma m y z - \omega^2 \Sigma m x z = M + h X''.$$

De estas dos ecuaciones se deducirán las componentes transversales X'' e Y'' de la reacción Q' y llevados sus valores a las dos primeras ecuaciones del sistema anterior, se determinarán las componentes X' e Y' de la otra reacción Q.

538. Reacciones cuando la rotación es uniforme.—En estos casos será $\frac{d\omega}{dt} = o$ y las ecuaciones que proporcionan las cinco incógnitas son

$$-\omega^2 \Sigma m x = X' + X'' + X,$$
$$-\omega^2 \Sigma m y = Y' + Y'' + Y,$$
$$o = Z_1 + Z,$$
$$\omega^2 \Sigma m y z = L - h Y'',$$
$$-\omega^2 \Sigma m x z = M + h X''.$$

De estas ecuaciones se deduce que en las rotaciones uniformes, alrededor de ejes que pasen por el centro de gravedad, serán

$$X' + X'' = -X \quad \text{e} \quad Y' + Y'' = -Y$$

y cuando el eje de giro cumpla la condición de ser principal de inercia en el punto o

$$h Y'' = L \quad \text{y} \quad h X'' = -M,$$

verificándose las cuatro condiciones cuando el eje de giro pase por el centro de gravedad y sea principal de inercia en el punto o (*).

Si el sólido está sometido sólamente a la acción de su

(*) Debe recordarse que las rectas que pasan por el centro de gravedad de un cuerpo son ejes principales de inercia en todos sus puntos o no lo son en ninguno (143).

peso, la rotación, si existe, es uniforme y las reacciones estarán dadas por las ecuaciones

$$-\omega^2 \Sigma m x = X' + X'', \quad -\omega^2 \Sigma m y = Y' + Y'', \quad o = Z_1 - P,$$
$$\omega^2 \Sigma m y z = L - h Y'', \quad -\omega^2 \Sigma m x z = M + h X'',$$

que se reducen, cuando el eje pasa por el centro de gravedad, a

$$X' + X'' = o, \quad Y' + Y'' = o, \quad Z_1 = P,$$
$$h Y'' = -\omega^2 \Sigma m y z, \quad h X'' = -\omega^2 \Sigma m x z,$$

y finalmente a

$$X' = X'' = Y' = Y'' = o, \quad Z_1 = P$$

cuando, además de pasar por el centro de gravedad del sólido, sea eje principal de inercia.

Si en el caso de estar sometido el sólido a la sola acción de su peso, suponemos que el eje de giro es horizontal, el *o X* por ejemplo, es indispensable, para que la rotación sea uniforme, que sea $L = o$ y esto exige que el centro de gravedad esté sobre el eje de giro; cumpliéndose esta condición, las reacciones estarán dadas por las fórmulas siguientes:

$$X' + X'' = X_1 = o, \quad Y' + Y'' = o, \quad Z' + Z'' = P,$$
$$-\omega^2 \Sigma m x z = P \cdot a - h Z', \quad -\omega^2 \Sigma m x y = h Y'',$$

y suponiendo que el eje sea principal de inercia

$$X_1 = o, \quad Y' + Y'' = o, \quad Z' + Z'' = P,$$
$$h Z'' = a \cdot P, \quad h Y'' = o,$$

o

$$X_1 = o, \quad Y' = Y'' = o,$$
$$Z' = P - \frac{a P}{h} = P \frac{h - a}{h}, \quad Z'' = P \frac{a}{h}.$$

De los resultados obtenidos, tanto en el caso de ejes verticales como en el de horizontales, se deduce la conveniencia de colocar los órganos giratorios de las máquinas perfectamente *centrados* y la de darles la forma de cuerpos de revolución que suelen afectar, para conseguir que los ejes de giro sean principales de inercia, pues, según veremos, las reacciones en los apoyos son, en tales casos, las mismas que si el órgano permaneciera en reposo.

539. Ejes permanentes de rotación.—Volviendo otra vez al caso de fuerzas cualesquiera y eje oZ de rotación, vamos a ver si es posible suprimir uno de los apoyos del cuerpo giratorio y que éste continúe girando alrededor del mismo eje, fijo por un solo punto: los ejes que cumplan esta condición se llaman *ejes permanentes* de rotación.

Es indudable que para poder suprimir el apoyo o', por ejemplo, será condición necesaria y suficiente que el movimiento se verifique en forma tal que la acción y reacción que el enlace desarrolla en dicho punto sean nulas, puesto que no desempeñando papel alguno en el movimiento el referido enlace, podrá éste suprimirse. En realidad basta que no existan las componentes transversales de Q' (las X' e Y'), siempre que supongamos el enlace del punto o con resistencia suficiente para soportar, por sí solo, la suma, $Z_1 = Z' + Z''$, de las acciones longitudinales que sobre el mismo se ejercerán al suprimir el apoyo o'.

Por otra parte, cualquiera que sea la resultante de las fuerzas aplicadas al sólido, si esta resultante corta al eje de rotación y no pasa por o, se podrá descomponer en dos paralelas que pasen por o y o' y la componente aplicada en o' exige, para su anulación, la presencia de la guia o cojinete que sostenga al eje en dicho punto. Si la resultante de las fuerzas aplicadas no corta al eje, se podrá llevar al punto o, introduciendo un par, pero fácil es ver que este par ejerce en todos los casos acciones transversales sobre el

punto o'. Estas consideraciones demuestran que, aparte de las condiciones del eje, es necesario que la resultante de las fuerzas aplicadas sea nula o pase por el punto o, para que el eje de la rotación sea permanente.

Suponiendo satisfecha esta condición, veamos las que tiene que cumplir el eje para que sean $X' = Y' = o$; las ecuaciones establecidas como consecuencia del teorema de los momentos de la cantidad de movimiento en el número **537**, teniendo en cuenta que la condición $N = o$ equivale a $\omega = constante$, se reducen a

$$\Sigma m y z = o, \quad \Sigma m x z = o,$$

y expresan la condición de ser el eje oZ uno de los principales de inercia del punto o.

En resumen, *cuando un sólido gira alrededor de uno de los ejes principales de inercia que le corresponden en un punto o y la resultante de las fuerzas aplicadas es nula o pasa por dicho punto, la rotación del cuerpo es uniforme y se verifica constantemente alrededor del mismo eje, sin dar a éste más apoyos que el correspondiente al punto o.*

540. Ejes naturales de rotación. — Si se trata de un cuerpo sometido a la sola acción de su peso, se verifican las condiciones anteriores cuando el punto de apoyo o de suspensión sea el centro de gravedad y el eje de giro uno de los del elipsoide central de inercia; pero en estos casos, no sólamente desaparecen las reacciones transversales del punto o' sino que también se anulan las del punto o, quedando como única fuerza de enlace la componente vertical $Z_1 = P$, que por estar aplicada al punto de apoyo o y ser éste el centro de gravedad, se equilibrará con el peso, independientemente de la dirección del eje y de la velocidad de la rotación uniforme producida. Por esta circunstancia se suelen llamar *ejes naturales* de rotación los principales del elipsoide central de inercia, que verifican las condiciones anteriores.

Si en el caso de estar suspendido el cuerpo giratorio por su centro de gravedad, girando alrededor de uno de los ejes principales de inercia de dicho punto, se suprimiera el apoyo, el sólido adquiriría un movimiento de traslación descendente, que no influye en el movimiento relativo del cuerpo con relación a los ejes móviles que por dicho centro podrían trazarse, verificándose, por consiguiente, la continuación de la rotación alrededor del eje inicial y con la misma velocidad angular que ya tuviera.

Estas consecuencias son igualmente ciertas para otras fuerzas constantes o variables que pasen por el referido centro; es decir, que verificándose la rotación permanente del sólido y en un instante cualquiera se suprime el enlace o apoyo del centro de gravedad, adquiere el cuerpo un movimiento de traslación, determinado por las fuerzas aplicadas a dicho punto y continuará indefinidamente su rotación uniforme alrededor del eje inicial.

El movimiento de los planetas y satélites se verifica, prescindiendo de ligeras perturbaciones, en las condiciones apuntadas. Refiriéndonos a la tierra se comprende que, como consecuencia de su falta de homogeneidad, la recta que une los polos no coincida exactamente con el eje correspondiente al elipsoide central de inercia y esto produce la *instantaneidad* del eje de las rotaciones diurnas, siendo causa de los movimientos de precesión y nutación terrestre que se estudian en Astronomía (*).

541. Equilibrio de un sólido apoyado en dos puntos.— Para que un sólido apoyado en dos puntos pueda estar en reposo es necesario que las fuerzas y reacciones cumplan las condiciones

(*) La comprobación experimental de la mayoría de las deducciones expuestas en esta teoría, se realiza con suma sencillez con los aparatos giroscópicos que suelen figurar en los Gabinetes de Mecánica general.

$$X' + X'' + X = o,\ Y' + Y'' + Y = o,\ Z' + Z'' + Z = o,$$

$$L - h\,Y'' = o,\ M + h\,X'' = o,\ N = o;$$

la última expresa la necesidad de que la resultante de las fuerzas aplicadas sea nula, corte a la recta de los apoyos $o\,o'$, o le sea paralela. Considerando, como antes se ha hecho, que $Z' + Z'' = Z_1$ es una sola incógnita, las cinco primeras ecuaciones servirán para calcular las demás componentes de las reacciones.

Suponiendo el eje $o\,o'$ horizontal y el cuerpo sometido a la acción de su peso, será $L = o$, y se tendrán para el cálculo de las reacciones las ecuaciones siguientes:

$$X' + X'' = X_1 = o,\ Y' + Y'' = o,\ Z' + Z'' = P,$$

$$o = o,\ h\,Z'' = a\,.\,P,\ h\,Y'' = o,$$

o $$X_1 = o,\ Y' = Y'' = o,\ Z' = P\frac{h-a}{h},\ Z'' = P\frac{a}{h},$$

esto justifica lo que antes se dijo sobre la conveniencia de centrar bien los órganos giratorios de las máquinas y de darles la forma de sólidos de la revolución; con estas condiciones las acciones y reacciones que en los apoyos se desarrollan, durante el movimiento, son las debidas al efecto estático del peso, pues están expresadas por las mismas fórmulas.

La condición $L = o$ exige que la vertical del centro de gravedad del cuerpo corte al eje $o\,o'$; pero el expresado centro podrá estar más bajo o más alto que la línea de los dos apoyos y de esta situación depende que el equilibrio sea estable o inestable, pues en el primer caso el trabajo de la pesantez, para un pequeño desplazamiento alrededor del eje $o\,o'$, es positivo y en el segundo negativo. Si el centro de gravedad está en la recta $o\,o'$, el equilibrio es indiferente.

542. Ejemplo del movimiento de un sólido alrededor de un eje.—*Péndulo compuesto.*—Si suponemos un sólido apoyado en dos puntos situados sobre un eje horizontal (el coordenado *o Y*) y su centro de gravedad *G* en el plano vertical que pasa por dicho eje e inferior a él, podrá permanecer indefinidamente en reposo, en la posición de equilibrio que le hemos supuesto; pero imaginemos que se separa de dicha posición, llevándole hacia la izquierda (figura 307) a la posición *o G'*, y que en esta posición se abandona a la acción de su peso; la ecuación diferencial del movimiento angular que se produce es (**536**)

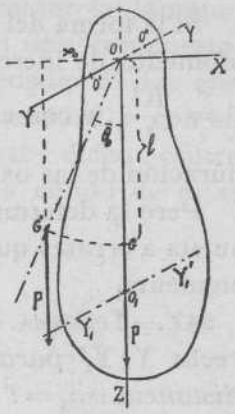


Fig. 307

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{N}{I} = \frac{P x}{M K^2} = \frac{g x}{K^2} = \frac{g l \operatorname{sen} \theta}{K^2}$$

siendo *l* la distancia del centro de gravedad del sólido al eje de giro y θ el ángulo que forman en cada instante *o G'* y *o G*.

El movimiento oscilatorio del *péndulo compuesto* así formado, se verifica en condiciones análogas de regularidad e isocronismo al del péndulo simple; para encontrar la duración de sus oscilaciones, evitando la integración de la ecuación diferencial establecida, supongamos sea *l'* la longitud de un péndulo simple sincrónico con el compuesto dado; la ecuación diferencial del movimiento de aquél será

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{g l' \operatorname{sen} \theta}{l'^2} = \frac{g \operatorname{sen} \theta}{l'}$$

e igualando los dos valores obtenidos para $\frac{d\omega}{dt}$ resulta

$$\frac{g\, l \operatorname{sen} \theta}{K^2} = \frac{g \operatorname{sen} \theta}{l'} \quad \text{o} \quad K^2 = l\, .\, l' .$$

Si la forma del cuerpo permite calcular con exactitud el momento de inercia $I = M K^2$ y la longitud l, se deducirá $l' = \frac{K^2}{l}$, y con esta longitud se obtiene $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ para duración de las oscilaciones del péndulo compuesto.

Pero la determinación de l' por este procedimiento está sujeta a errores que se evitan con la aplicación del teorema siguiente.

542'. — TEOREMA. — *Si en el plano de o' o" G se traza una recta $Y_1\, Y_1'$ paralela al eje de suspensión $Y\, Y'$, a una distancia $o\, o_1 = l'$, las oscilaciones del péndulo alrededor de estos dos ejes son sincrónicas.*

En efecto, si se invierte el sólido para hacerle oscilar alrededor del eje $Y_1\, Y_1'$ y llamamos l'' la longitud del péndulo simple sincrónico con el nuevo péndulo compuesto, se verificará $K_1^2 = (l' - l)\, l''$; pero entre K^2 y K_1^2 existen las relaciones siguientes, siendo $M R^2$ el momento de inercia del sólido respecto al eje, paralelo a los anteriores, que pasa por el centro de gravedad

$$K^2 = R^2 + l^2,\ K_1^2 = R^2 + (l' - l)^2,\ K^2 - l^2 = K_1^2 - (l' - l)^2,$$

y sustituyendo los valores de K^2 y K_1^2

$$l\, l' - l^2 = (l' - l)\, l'' - (l' - l)^2 \text{ y } l' = l'',$$

de modo que teniendo la misma longitud los dos péndulos simples sincrónicos con los dos compuestos, la duración de las oscilaciones de estos últimos será igual en uno y otro (*).

La recta $Y_1\, Y_1'$ se llama *eje de oscilación* del péndulo,

(*) Esta propiedad constituye el llamado *teorema de Huygens* en la teoría del péndulo compuesto.

correspondiente al eje de suspensión $Y\,Y'$, y en virtud de lo demostrado se ve que *estos dos ejes son recíprocos.*

Esta propiedad se aplica para determinar la longitud exacta del péndulo simple sincrónico con uno compuesto, preparado para poder hacerle oscilar alrededor de dos ejes paralelos que comprendan al centro de gravedad y con alguna disposición que permita desplazar dicho centro aproximándole a uno u otro eje. Con un sólido de estas condiciones se podrá conseguir, después de algunos tanteos, que las oscilaciones alrededor de los dos ejes sean sincrónicas y entonces la distancia entre los mismos será la longitud del péndulo simple buscada.

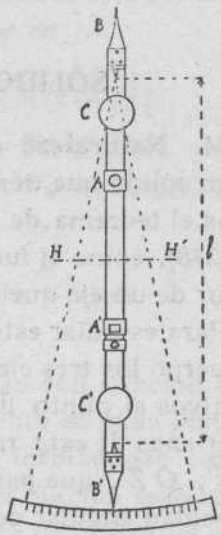


Fig. 308

543. Péndulo reversible de Kater.—Para realizar con rapidez y exactitud las operaciones expresadas al final del número anterior, se emplea en Geodesia el péndulo reversible ideado por *Kater*, cuya disposición indica la figura 308; los dos cilindros C y C' están uno lleno de plomo y el otro hueco, para que el centro de gravedad esté más cerca de uno de los dos *cuchillos* de apoyo; las piezas móviles A y A' se corren a lo largo de la varilla, hasta conseguir que las oscilaciones del péndulo, en las dos posiciones que puede tomar, sean sincrónicas.

La distancia l entre los ejes de suspensión y oscilación se mide con cuanta exactitud se desee, por estar señalados dichos ejes por las dos aristas vivas de los cuchillos de apoyo.

La forma simétrica que tiene el péndulo, respecto al eje

$H H'$, tiene por objeto hacer que las masas de aire puestas en movimiento por el aparato, en sus dos posiciones de funcionamiento, sean iguales, y los apéndices de madera B y B', que se colocan en la parte alta y baja del mismo, sirven para apreciar, sobre un círculo graduado, la fracción de oscilación que corresponde a una duración determinada.

IV

SÓLIDO CON UN PUNTO FIJO

544. Naturaleza de este movimiento.—El movimiento de un sólido que tiene un punto fijo se verifica, según expresa el teorema de D'Alembert demostrado en Cinemática (**278**), como si fuera en cada instante una rotación alrededor de un eje que pasa por dicho punto.

Para estudiar este movimiento se suponen trazados en el cuerpo los tres ejes principales de inercia $O X$, $O Y$, $O Z$, relativos al punto fijo o y relacionando las coordenadas eulerianas de este triedro, respecto a tres ejes fijos $O X'$, $O Y'$, $O Z'$, que pasen por o, con las componentes de la velocidad angular de la rotación, se obtienen las fórmulas ya estudiadas en Cinemática (**280** y **281**), que sirven para expresar a p, q, r, p', q' y r' en función del tiempo, cuando se conozcan las ecuaciones que ligan con dicha variable las coordenadas φ, ψ y θ.

El problema dinámico que en este caso se presenta, consiste en lo siguiente: *dado un sistema de fuerzas aplicado a un sólido que tiene un punto fijo, determinar las proyecciones de la rotación instantánea sobre tres ejes fijos trazados por dicho punto y las coordenadas eulerianas que fijan la posición del sólido en un instante cualquiera.*

Como complemento del problema anterior, convendrá determinar las proyecciones de la acción y reacción que en el punto fijo se desarrollan durante el movimiento.

545. Expresión de la cantidad de movimiento, momento de la misma y fuerza viva en función de las componentes de ω.— Las fórmulas generales establecidas en el número **534**, para expresar dichas cantidades en función de las componentes de ω, en las rotaciones permanentes, se simplifican, por ser ahora $D = E = F = o$ y las coordenadas a, b, c del centro de gravedad constantes, convirtiéndose en

$$\alpha = \Sigma m v_x = q \Sigma m z - r \Sigma m y = M(q c - r b),$$
$$\beta = \Sigma m v_y = r \Sigma m x - p \Sigma m z = M(r a - p c),$$
$$\gamma = \Sigma m v_z = p \Sigma m y - q \Sigma m x = M(p b - q a),$$
$$\lambda = A p, \quad \mu = B q, \quad \nu = C r,$$
$$\Sigma \frac{m v^2}{2} = \frac{I}{2} \omega^2 = \frac{1}{2}(A p^2 + B q^2 + C r^2).$$

Las proyecciones α, β y γ determinan con relación a los ejes móviles al vector $[\rho]$, que representa en cada instante la cantidad de movimiento del sólido, formándose con relación a los ejes OX, OY, OZ una función gráfica que participará del movimiento de arrastre de que están dotados los referidos ejes móviles.

Resulta de esto que el movimiento del índice del vector $[\rho]$ puede considerarse compuesto de otros dos: uno relativo a los ejes móviles con la velocidad

$$[v_r] \equiv \left[\frac{d\alpha}{dt}\right] + \left[\frac{d\beta}{dt}\right] + \left[\frac{d\gamma}{dt}\right]$$

y otro de arrastre alrededor del eje instantáneo, cuya velocidad es

$$[v_a] \equiv [q\gamma - r\beta] + [r\alpha - p\gamma] + [p\beta - q\alpha]$$

y de aquí que la velocidad absoluta del expresado índice tenga por proyecciones sobre los citados ejes

$$v_x = \frac{d\alpha}{dt} + (q\gamma - r\beta),$$

$$v_y = \frac{d\beta}{dt} + (r\alpha - p\gamma),$$

$$v_z = \frac{d\gamma}{dt} + (p\beta - q\alpha).$$

Del mismo modo se formará la función gráfica de los momentos de la cantidad de movimiento con los vectores $[\sigma]$, determinados por sus proyecciones λ, μ y ν, con relación a los ejes móviles; la velocidad relativa del índice de $[\sigma]$ es

$$[v'_r] \equiv \left[\frac{d\lambda}{dt}\right] + \left[\frac{d\mu}{dt}\right] + \left[\frac{d\nu}{dt}\right],$$

la de arrastre

$$[v'_a] \equiv [q\nu - r\mu] + [r\lambda - p\nu] + [p\mu - q\lambda]$$

y las proyecciones de la absoluta del mismo índice

$$v'_x = \frac{d\lambda}{dt} + (q\nu - r\mu),$$

$$v'_y = \frac{d\mu}{dt} + (r\lambda - p\nu),$$

$$v'_z = \frac{d\nu}{dt} + (p\mu - q\lambda).$$

546. Ecuaciones del movimiento.—La equipolencia que en cada instante existe entre la derivada lineal de la función gráfica de los momentos de la cantidad de movimiento (velocidad del índice de $[\sigma]$) y el momento de las fuerzas exte-

riores, respecto al polo de dicha función **(512)**, nos permite escribir las tres ecuaciones diferenciales del movimiento

$$\frac{d\lambda}{dt} + (q\nu - r\mu) = L,$$

$$\frac{d\mu}{dt} + (r\lambda - p\nu) = M,$$

$$\frac{d\nu}{dt} + (p\mu - q\lambda) = N,$$

en las que no intervienen las proyecciones de la reacción, por ser nulos sus momentos respecto a todos los ejes que pasan por el punto fijo.

Sustituyendo en lugar de λ, μ y ν sus valores, se convierten las ecuaciones anteriores en

$$A\frac{dp}{dt} + qr(C - B) = L,$$

$$B\frac{dq}{dt} + pr(A - C) = M,$$

$$C\frac{dr}{dt} + pq(B - A) = N; \text{ (*)}$$

la integración de estas ecuaciones, cuando pueda efectuarse, nos daria los valores de p, q, r en función de las fuerzas aplicadas y del tiempo y con estos valores deduciríamos, por las fórmulas cinemáticas a que antes hemos aludido, las coordenadas eulerianas del sólido móvil.

547. Reacción en el punto fijo. — Aplicando la propiedad que se deduce de la equipolencia de la derivada lineal de la función gráfica de la cantidad de movimiento (velocidad del índice de $[\rho]$) con la resultante de las fuerzas exteriores **(511)**, se obtienen las tres ecuaciones siguientes:

(*) Estas fórmulas se llaman *ecuaciones de Euler.*

$$\frac{d\alpha}{dt} + (q\gamma - r\beta) = X + X',$$

$$\frac{d\beta}{dt} + (r\alpha - p\gamma) = Y + Y',$$

$$\frac{d\gamma}{dt} + (p\beta - q\alpha) = Z + Z',$$

que sustituyendo valores se convierten en

$$M\left[c\left(pr + \frac{dq}{dt}\right) + b\left(pq - \frac{dr}{dt}\right) - a(q^2 + r^2)\right] = X + X',$$

$$M\left[a\left(pq + \frac{dr}{dt}\right) + c\left(qr - \frac{dp}{dt}\right) - b(p^2 + r^2)\right] = Y + Y',$$

$$M\left[b\left(qr + \frac{dp}{dt}\right) + a\left(pr - \frac{dq}{dt}\right) - c(p^2 + q^2)\right] = Z + Z',$$

La forma de las ecuaciones encontradas nos dice que si el sólido está fijo por su centro de gravedad, serán

$$X' = -X, \quad Y' = -Y, \quad Z' = -Z,$$

y la reacción es igual y de sentido contrario a la resultante de las fuerzas aplicadas.

548. Caso de pasar por el punto de apoyo la resultante de las fuerzas aplicadas al sólido.—La integración de las ecuaciones de Euler suele presentar dificultades, que se atenúan en algunos casos particulares, especialmente cuando el sólido está sometido a fuerzas cuya resultante pasa por el punto fijo. Este caso se presenta siempre que se suspenda al sólido por su centro de gravedad y no esté sometido más que a la acción de su propio peso.

Las ecuaciones diferenciales del movimiento son, en el caso de resultante única pasando por *o*, las siguientes:

$$A\frac{dp}{dt} + qr(C - B) = o,$$

$$B\,\frac{dq}{dt} + p\,r\,(A - C) = o\,,$$

$$C\,\frac{dr}{dt} + p\,q\,(B - A) = o\,;$$

multiplicándolas por p, q y r respectivamente y sumando se obtiene

$$A\,p\,\frac{dp}{dt} + B\,q\,\frac{dq}{dt} + C\,r\,\frac{dr}{dt} = o\,,$$

cuya integral es

$$\frac{1}{2}\,(A\,p^2 + B\,q^2 + C\,r^2) = \textit{constante} = h.$$

Esta constante h se relaciona con la fuerza viva del sólido, en virtud de las fórmulas antes establecidas, siendo $\frac{\Sigma\, m\, v^2}{2} = h$ y también $\frac{1}{2}\, I\, \omega^2 = h$, lo que nos dice que cada vez que el eje instantáneo de la rotación se aproxime al eje mayor del elipsoide de inercia, su velocidad angular aumentará y al contrario cuando se aproxime al eje menor, correspondiendo los mínimos y máximos que dicha velocidad puede adquirir a las posiciones más próximas a dichos ejes que tenga el instantáneo de la rotación.

Si multiplicamos por $A\,p$, $B\,q$ y $C\,r$, respectivamente, las ecuaciones diferenciales del movimiento y las sumamos, resulta

$$A^2\,p\,\frac{dp}{dt} + B^2\,q\,\frac{dq}{dt} + C^2\,r\,\frac{dr}{dt} = o\,,$$

cuya integral es

$$\frac{1}{2}\,(A^2\,p^2 + B^2\,q^2 + C^2\,r^2) = \textit{constante} = 2\,l^2\,;$$

pero siendo $\lambda = A\,p$, $\mu = B\,q$, $\nu = C\,r$, esta constante se relaciona con el valor modular del vector $[\sigma]$ (que ahora permanece fijo en el espacio), por la fórmula $\sigma = 2\,l$.

En el caso que estamos considerando se verifica la ley de las áreas en todos los planos que pasan por *o*; la velocidad areolar en el plano del máximum **(514)** es $\frac{1}{2}\omega_\sigma = l$ y por esto se acostumbra a llamar a esta cantidad *l la constante de las áreas,* así como se da el nombre de *constante de la fuerza viva* a la cantidad *h* que antes vimos.

549. Propiedades especiales del movimiento cuando la resultante de las fuerzas aplicadas pasa por o.—Las integrales que hemos encontrado para este caso, en el número anterior, se utilizan para demostrar las propiedades siguientes:

1.ª *La proyección de la velocidad angular instantánea* [ω] *sobre el vector* [σ] *es constante durante todo el movimiento.*—En efecto, esta proyección es

$$\omega_1 = \omega \cdot \cos \overline{\omega\sigma} = \omega\left(\frac{p\lambda}{\omega\sigma} + \frac{q\mu}{\omega\sigma} + \frac{r\nu}{\omega\sigma}\right) = \frac{h}{l} = \textit{constante.}$$

Si por el extremo de ω_1 trazamos un plano perpendicular al vector [σ], sobre este plano estarán los índices de todas las rotaciones instantáneas que experimenta el sólido; este plano es paralelo al del máximun de las áreas.

2.ª Si suponemos que el elipsoide de inercia del sólido, relativo al punto *o*, acompaña al cuerpo en su movimiento y llamamos *polo* del mismo al punto en que el eje de las rotaciones instantáneas corta a dicho elipsoide, se verifica que *la distancia del centro o del movimiento al polo m, situado sobre el elipsoide de inercia, guarda con la velocidad angular una relación constante.*—Basta observar que

$$o\,m = \frac{1}{\sqrt{\Sigma\, m\, r^2}} = \frac{1}{\sqrt{I}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2h}{\omega^2}}}\,\frac{\omega}{\sqrt{2h}},$$

y

$$\frac{o\,m}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2h}} = \textit{constante.}$$

3.° *El plano tangente al elipsoide de inercia en el polo, en un instante cualquiera, es perpendicular al vector* [σ]. — La ecuación del elipsoide, referida a los ejes móviles, es

$$A\,x^2 + B\,y^2 + C\,z^2 = 1;$$

la del plano tangente en $x' = o\,m\,\frac{p}{\omega}$, $y' = o\,m\,\frac{q}{\omega}$, $z' = o\,m\,\frac{r}{\omega}$

será $$A\,x\,x' + B\,y\,y' + C\,z\,z' = 1,$$

o $$A\,p\,x + B\,q\,y + C\,r\,z = \frac{\omega}{o\,m} = \sqrt{2\,h}\,;$$

pero este plano es paralelo al del máximum de las áreas **(514)**, luego será perpendicular al vector [σ].

4.° *Los planos tangentes al elipsoide de inercia en los distintos polos que se originan durante el movimiento, se confunden en uno solo.* — Los referidos planos tangentes tienen dirección constante, según prueba la propiedad anterior, y si demostramos que su distancia al centro del movimiento es también constante, quedará demostrado el enunciado.

La distancia del origen de coordenadas al plano $\lambda\,x + \mu\,y + \nu\,z = \sqrt{2\,h}$ es

$$\delta = \frac{\sqrt{2\,h}}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}} = \frac{\sqrt{2\,h}}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{\sqrt{2\,h}}{\sigma} = \textit{constante.}$$

550. Representación geométrica del movimiento. — Resulta de las últimas propiedades que si suponemos trazado el plano perpendicular a [σ], a la distancia $\delta = \frac{\sqrt{2\,h}}{\sigma}$, el elipsoide de inercia, que acompaña al cuerpo, experimentará una rodadura sobre dicho plano, describiendo los puntos de contacto sucesivos, en el elipsoide y en el plano,

dos curvas (figura 309) que reciben los nombres de *poloide* y *herpoloide* respectivamente, y se comprende que una vez trazadas estas curvas, se pueden volver a reproducir las distintas fases del movimiento, haciendo que el elipsoide se apoye libremente sobre el plano director y que, rodando, se establezca sucesivamente el contacto de los distintos puntos de las dos citadas curvas.

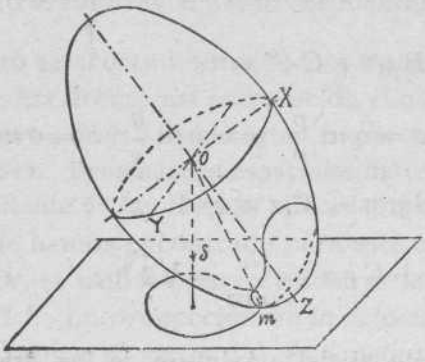


Fig. 309

551. Condición para que la rotación sea permanente.—Para que la rotación sea permanente, alrededor de un cierto eje que pase por o, es preciso que ω sea constante, puesto que ahora lo es I, y como los ángulos que los ejes principales de inercia forman con ω no varían durante el movimiento, serán p, q y r también constantes y las ecuaciones de Euler **(546)** se convierten en

$$q\,r\,(C-B)=o,\quad p\,r\,(A-C)=o,\quad p\,q\,(B-A)=o,$$

e indican la necesidad de que sean al mismo tiempo nulas dos de las proyecciones de ω y, por lo tanto, el eje de la rotación permanente tiene que ser uno de los tres principales de inercia del punto o.

Si el elipsoide de inercia es de revolución, $A=B$ por ejemplo, bastará que sea $r=o$ para que se cumplan las condiciones anteriores; pero en este caso el eje de la rotación está en el plano ecuatorial de dicho elipsoide y ya sabemos que en este plano todas las rectas que pasan por o son ejes principales de inercia.

Demostrada la permanencia de las rotaciones que se verifican alrededor de los ejes principales de inercia del sólido con relación al punto fijo, convendría examinar las *condiciones de estabilidad* de dicha permanencia, estudiando la resistencia que el sólido opone a cambiar la dirección de su eje de rotación, cuando se le imprimen esfuerzos que tiendan a producir el indicado desplazamiento: el análisis de este asunto, de cuyo cálculo prescindiremos, demuestra y la experiencia lo comprueba, que los ejes mayor y menor del elipsoide de inercia son ejes *estables* de las rotaciones permanentes y, al contrario, el eje intermedio es *inestable*, puesto que desaparece la permanencia de la rotación al menor impulso transversal que reciba el eje, y lo mismo se ve que la estabilidad de los primeros es tanto mayor cuanto mayor sea la velocidad angular del sólido.

552. Equilibrio de un sólido con un punto fijo.—Las condiciones que tienen que satisfacer las fuerzas aplicadas al sólido con un punto fijo, para estar en equilibrio, son

$$X+X'=o,\ Y+Y'=o,\ Z+Z'=o,\ L=M=N=o.$$

Las tres últimas, independientes de la reacción, expresan la necesidad de que las fuerzas aplicadas tengan resultante nula o que pase por el punto *o*, y las tres primeras indican que la reacción del punto fijo es igual y directamente opuesto a la citada resultante (*).

Cuando el sólido está sometido sólamente a la acción de su peso, es preciso que la vertical del centro de gravedad pase por el punto fijo y la reacción será, en valor modular, igual al peso del cuerpo.

553. Aparatos giroscópicos.—Reciben este nombre to-

(*) Recordemos que cuando el punto de apoyo es el centro de gravedad del sólido, la reacción, durante el movimiento, está en las mismas condiciones que en el caso de equilibrio.

dos los aparatos cuyo funcionamiento depende o se relaciona con el movimiento de un sólido sometido a una rotación rápida alrededor de uno de los ejes principales de inercia correspondientes al centro de gravedad del mismo; generalmente el sólido giratorio es un cuerpo homogéneo de revolución (en la mayoría de los casos un toro) y el eje de giro es el de figura del cuerpo móvil, que cumple, desde luego, con las condiciones necesarias para la permanencia y estabilidad de la rotación.

Las aplicaciones que estos aparatos reciben están basadas en la indicada permanencia y estabilidad, que en los *giróscopos* de gran masa y con gran velocidad angular llegan a adquirir valores considerables y permiten obtener ciertos efectos que, sin la presencia del aparato giroscópico, sería difícil o imposible conseguir. Para dar una idea de dichos efectos vamos a indicar algunas experiencias de gabinete que con los giróscopos pueden efectuarse.

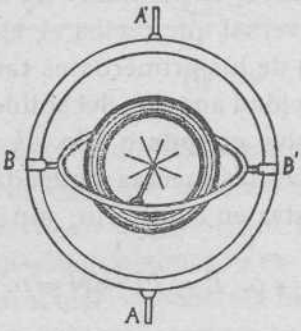


Fig. 310

El giróscopo ordinario de *Foucault* consiste en un toro cuyo eje está montado sobre dos círculos (figura 310) formando suspensión *Cardan*, en virtud de cuyos enlaces tiene libertad para tomar una orientación cualquiera; dándole al toro un movimiento de rotación enérgico, por medio de una cuerda, y abandonándole a la acción de su movimiento giratorio, permanece el eje en la dirección que se le abandona, cualesquiera que sean los movimientos de rotación o traslación (no bruscos) que a la armadura exterior se le impriman.

Si colocamos el eje del toro vertical (línea $A\,A'$), apoyando el punto A en un plano horizontal, después de acu-

ñar las articulaciones B y B', el conjunto sigue la rotación del toro, y se conserva en la posición vertical. En esta experiencia no se puede colocar el eje del toro horizontal porque al iniciarse la caída en sentido perpendicular, como no se modifica la dirección del eje, el giróscopo no reacciona para elevarse y se produce la caída.

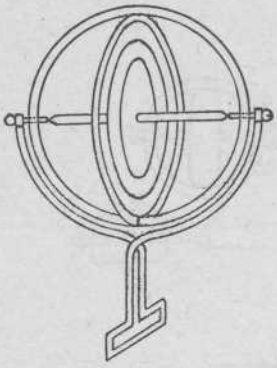


Fig. 311

Si disponemos la montura del toro en la forma que expresa la figura 311 (giróscopo de *Gervat*), no puede producirse la caída, a pesar de estar el eje horizontal, por quedar impedido el abatimiento, en la dirección única en que puede efectuarse, por la forma longitudinal del apoyo.

En las dos últimas experiencias se ha supuesto que el aparato se coloca directamente en la posición de funcionamiento (vertical del centro del toro pasando por el apoyo) y se observa, que si en la primera se coloca inclinado el eje del toro, adquiere el conjunto un movimiento de precesión alrededor de la vertical que pasa por *o*, suponiendo fijo este punto; este movimiento es producido por la composición de la rotación propia con la producida por la pesantez, cuyo eje es perpendicular al plano vertical que contiene al eje del toro y se desplaza con el giro de éste, dando lugar a la indicada precesión. El cálculo de este movimiento indica que no es una precesión simple, sino que se debe verificar formando la traza del eje sobre una superficie es-

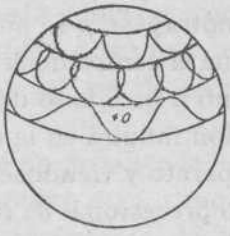


Fig. 312

férica, con el centro en *o*, una serie de ondas, como expresa la figura 312, comprendidas entre dos círculos paralelos; la experiencia comprueba este resultado al principio del movimiento; pero por efecto de los rozamientos en el punto de apoyo y resistencia del aire, se disminuye la amplitud de las ondas y se convierte el movimiento, al parecer, en una simple precesión.

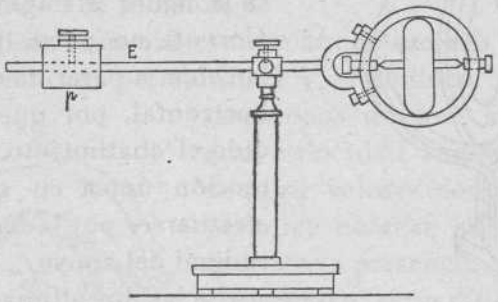


Fig. 313

La balanza giroscópica, cuya disposición indica la figura 313, permite realizar fácilmente los efectos relatados; el contrapeso *p* se puede correr sobre la varilla *E*, para hacer que el centro de gravedad esté en el punto de apoyo, o a uno u otro lado del mismo, siendo evidente que esta situación influirá en la dirección de la rotación resultante del aparato y viéndose, en efecto, que el sentido del movimiento precesional de la balanza, depende, de la situación de dicho centro de gravedad.

Con el aparato de *Gruey* puede efectuarse, entre otras experiencias, la siguiente: se dispone vertical el eje *A A'* (figura 314) que en el punto *B* está atravesado perpendicularmente por otro *C C'*; éste lleva en uno de sus extremos el aro *D D'*, donde está montado el toro *H H'* con su eje

perpendicular al anterior; el eje $C\,C'$ se equilibra aproximadamente con el contrapeso p.

El manguito m, que se hace solidario del eje $C\,C'$ por medio de un tornillo, lleva una polea n donde se arrolla

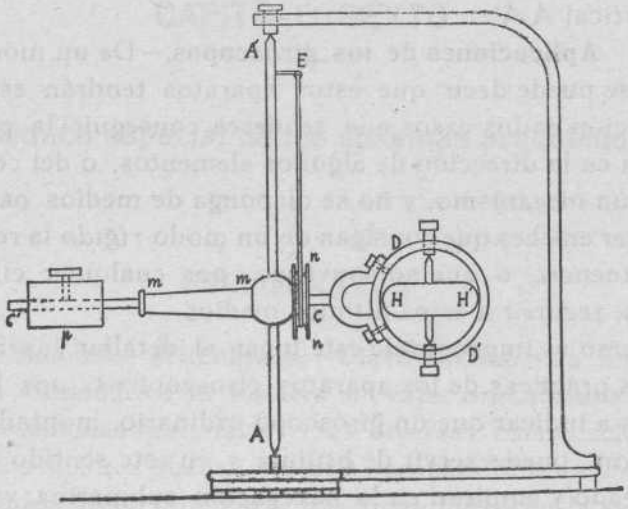


Fig. 314

una goma elástica que por su otro extremo se fija en el apéndice E del eje vertical; la acción de esta goma hace que la varilla $C\,C'$ y todas las piezas a ella unidas, giren con una velocidad angular determinada alrededor del eje de dicha varilla.

Si el giróscopo $H\,H'$ está en reposo no produce la accion de la goma más que la rotación citada; pero supongamos al toro dotado de una cierta rotación propia, la acción de la goma tiende a cambiar la dirección del eje del giróscopo y el resultado de estas dos rotaciones es un movimiento del conjunto alrededor del eje vertical $A\,A'$, que es el único que permiten los enlaces establecidos, y se da la circunstancia curiosa de que, continuando la acción de

la goma, llega a invertirse la dirección del eje del giróscopo con relación a la vertical y, en el momento en que esto ocurre, la rotación resultante tiene sentido contrario, viéndose al aparato cambiar automáticamente, unas cuantas veces, el sentido de la rotación del conjunto alrededor del eje vertical $A\,A'$.

554. Aplicaciones de los giróscopos.—De un modo general se puede decir que estos aparatos tendrán especial aplicación en los casos que se desee conseguir la permanencia en la dirección de algunos elementos, o del conjunto de un mecanismo, y no se disponga de medios para establecer enlaces que consigan de un modo *rígido* la referida permanencia, o que no convenga, por cualquier circunstancia, recurrir a estos últimos medios.

Como es impropio de este lugar el detallar las aplicaciones prácticas de los aparatos giroscópicos, nos limitaremos a indicar que un giróscopo ordinario, montado *a la Cardan*, puede servir de brújula y en este sentido se han empleado y emplean en la navegación submarina y se ha propuesto aplicarlos a la navegación aérea.

La tracción en vías férreas, con un solo carril, es otra aplicación sobre la que se han hecho experiencias recientes, y parece ser que el resultado ha sido satisfactorio.

La eficacia de los torpedos automóviles, que se lanzan contra los acorazados, exige que el torpedo no se desvíe en su camino de la dirección que se le imprime al dispararlo y en la mayor parte de los sistemas se consigue dicho objeto con los giróscopos de que están dotados.

CAPITULO SEXTO

Dinámica especial de los sistemas articulados

I

PRELIMINARES

555. Sistemas articulados.—Clasificación.—Ya hemos visto en Cinemática la manera de estar organizados esta clase de sistemas materiales y las diversas clasificaciones que en los mismos pueden hacerse, agrupándolos en *planos* y *alabeados, deformables* e *indeformables,* con la subdivisión de estos últimos en *estrictamente indeformables* y de *líneas sobrantes.*

Del mismo modo se indicó que, aparte de estas clasificaciones, se podían constituir otros grupos, en atención al papel especial que tales sistemas desempeñaban en sus aplicaciones prácticas, dando lugar al grupo de los sistemas de enlace de las máquinas o *mecanismos,* al formado por los sistemas articulados empleados en las construcciones (puentes, armaduras, etc.), que reciben el nombre de *reticulares* y, por último, al grupo de los sistemas articulados, cuyos lados no pueden soportar más que esfuerzos longitudinales en un sentido determinado, llamados *sistemas funiculares.*

A estos tres grupos especiales de sistemas articulados nos vamos a referir en este capítulo, exponiendo algunas

cuestiones prácticas que se relacionan con el movimiento y equilibrio de los primeros y otras referentes al equilibrio de los del segundo y tercer grupo, si bien, para proceder metódicamente, dejaremos para el último lugar lo relativo al movimiento y equilibrio de las máquinas.

556. Procedimiento general para plantear los problemas de movimiento o equilibrio de los sistemas articulados.—Aun cuando no nos vamos a ocupar de resolver este problema en toda su generalidad, debemos indicar que el método que se suele emplear, para estudiar el movimiento de un sistema articulado, consiste en suponer independientes cada uno de sus lados, haciendo intervenir las acciones que reciben de las piezas inmediatas por los enlaces establecidos en las articulaciones, y, generalmente, las condiciones de compatibilidad de los movimientos de los diversos lados, bastan para eliminar o calcular dichas fuerzas de enlace, obteniéndose las circunstancias del movimiento del conjunto en función de las fuerzas directamente aplicadas y demás datos iniciales del problema.

Otro procedimiento que puede emplearse, y que tiene particular aplicación en los casos de equilibrio, consiste en suponer aplicadas todas las fuerzas que obran sobre el sistema, con sujeción a las reglas de descomposición que después diremos, en los vértices del sistema dado, y estudiar el movimiento o equilibrio de cada uno de dichos vértices, bajo la acción de las fuerzas aplicadas y las de enlace que le correspondan, y de las propiedades de estos movimientos parciales deducir las del conjunto del sistema. Lo mismo que en el caso anterior, las condiciones de compatibilidad suelen bastar para la eliminación o el cálculo de las fuerzas de enlace que intervienen en el problema.

557. Naturaleza de los esfuerzos interiores que se desarrollan en los sistemas articulados.—Supongamos un lado de un sistema articulado, fijo por sus extremos o articulaciones

A y B (figura 315) y sometido a una fuerza exterior F, aplicada en un punto cualquiera C del mismo; esta fuerza origina sobre la pieza correspondiente las siguientes acciones, que la resistencia del material de que esté construida tiene que contrarrestar o equilibrar:

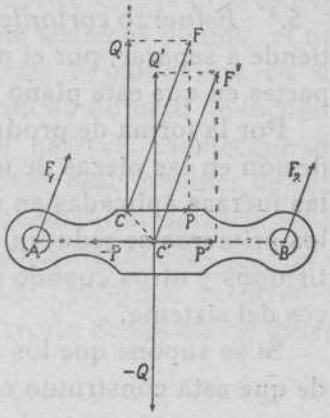


Fig. 315

1.° *Acción de giro alrededor del eje A B*, llamada esfuerzo de *torsión*, que se mide por el momento de la fuerza F con relación a dicho eje. Descomponiendo a F en las direcciones de $A\,B$ y su perpendicular $C\,Q$, y trasladando al eje (**58**), por la perpendicular $C\,C'$. el paralelogramo $[F] \equiv [P] + [Q]$, se ve que el esfuerzo de torsión está representado por el par $[Q, -Q]$, cuyo momento es igual al de F con relación al eje $A\,B$; por esta razón se llama, a dicho par, *par de torsión* producido por la fuerza F.

2.° *Acción de giro alrededor de un eje perpendicular a A B*, representada por el par $[P, -P]$; esta torsión especial suele tener valores despreciables en la mayoría de los casos.

3.° *Acción de giro alrededor de los puntos A y B* llamada esfuerzo de *flexión*, que se mide por la expresión $Q' \dfrac{C'A \times C'B}{A\,B}$, que constituye el *momento de flexión* producido por la fuerza en el punto C'.

4.° *Acción de tracción longitudinal* representada por la fuerza P', componente de F' en el sentido de $A\,B$ y cuya acción recibe el nombre de *compresión* cuando tiende a aproximar el punto de aplicación C' al punto de apoyo de

la pieza articulada y *extensión*, o simplemente *tensión*, cuando tiende a alejarlo; así, en el caso de la figura, se dirá que la parte $C'B$ está *comprimida* y la parte $C'A$ *extendida*.

5.° *Esfuerzo cortante* representado por la fuerza Q' que tiende a separar, por el plano normal al eje en C', las dos partes en que este plano divide al lado AB.

Por la forma de producirse los esfuerzos de torsión y flexión en las piezas de un sistema articulado, se ve que si las fuerzas aplicadas en un lado cortan al eje del mismo, los primeros se reducen a cero, e igualmente dejan de existir unos y otros cuando las fuerzas se aplican en los vértices del sistema.

Si se supone que los enlaces y calidad de los materiales de que está construido el sistema articulado, son suficientes para contrarrestar los esfuerzos de torsión, cortantes y de flexión, la acción de F, para los efectos de las tensiones o compresiones y para el movimiento o equilibrio del sistema, es idéntica a la que producen las dos componentes

$$F_1 = F' \cdot \frac{C'B}{AB} \quad \text{y} \quad F_2 = F' \cdot \frac{C'A}{AB},$$

que se obtienen descomponiendo a F' en dos paralelas (**71**) con sus puntos de aplicación en los nudos o vértices A y B (*)

Por estas razones supondremos en lo que sigue que las fuerzas aplicadas a los sistemas articulados lo están siempre en los nudos, sustituyendo a cada fuerza, cuando esto no ocurra, por sus componentes paralelas trazadas por los vértices correspondientes al lado donde dicha fuerza actúe.

(*) Se supone en esta sustitución que las diversas piezas del sistema articulado tienen aptitud para resistir los esfuerzos longitudinales de tensión o compresión independientemente del punto del eje en que se apliquen.

En cuanto a las tensiones o compresiones de los lados, se determinarán descomponiendo la resultante de las fuerzas aplicadas en cada vértice en las direcciones de los lados que en él concurran, y teóricamente se podrá resolver el problema cuando, tratándose de sistemas planos, el número de tensiones o compresiones desconocidas en un vértice sean una o dos. Cuando dicho número de incógnitas sea superior a dos, resulta, al parecer, indeterminado el problema, pues un vector se puede descomponer de infinitas maneras en tres o más direcciones que formen sistema plano; pero las ecuaciones complementarias que proporciona la teoría de la elasticidad, permiten resolver el problema, reduciéndolo, en la mayoría de las aplicaciones, a formas determinadas.

II

EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS RETICULARES

558. Problemas que se presentan en esta teoría.—El equilibrio de un sistema material cualquiera exige, como condición necesaria, la anulación de proyecciones y momentos de las fuerzas aplicadas al mismo; pero ya se indicó, al tratar de la equivalencia de los sistemas vectoriales, que había casos en que dicha condición podría no ser suficiente, si entre los puntos de aplicación de los vectores correspondientes no existían los enlaces necesarios para transmitir a cada uno de dichos puntos la acción combinada de los vectores que pudieran obrar sobre los demás del sistema.

Cuando se trata de cuerpos indeformables, sean sólidos o articulados, la referida transmisión se verifica a través de la materia que forma el sólido, o a lo largo de las piezas que componen el sistema articulado; pero si estos últimos

son deformables, es preciso que la posición de sus diversas piezas esté convenientemente elegida, para que el equilibrio del sistema tenga lugar, no obstante cumplirse la anulación teórica del sistema de fuerzas aplicadas.

Y, tanto en un caso como en otro, es preciso que las tensiones y compresiones, a que resulten sometidas cada una de las piezas del sistema, no excedan del límite de resistencia que pueden soportar, y de aquí la necesidad de estudiar la forma de determinar los valores que en cada caso puedan adquirir dichas tensiones y compresiones.

En resumen, suponiendo que las fuerzas exteriores, aplicadas al sistema reticular dado, cumplan las condiciones

$$\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = o \quad \text{y} \quad \Sigma L = \Sigma M = \Sigma N = o,$$

resulta de interés la resolución de los problemas siguientes:

1.° *Dado un sistema reticular estrictamente indeformable en equilibrio, calcular las tensiones o compresiones de sus diversos lados*

2.° *Dado un sistema reticular deformable, sometido a un sistema de fuerzas nulo, determinar la figura de equilibrio del mismo y las tensiones o compresiones de sus lados.*

En lo que sigue nos referiremos a sistemas reticulares planos y supondremos siempre, como ya se ha dicho, que las fuerzas están aplicadas en los vértices del sistema dado. Recordaremos también que la forma más sencilla para reconocer la nulidad del sistema de fuerzas plano, que en cada caso se considere aplicado en los vértices, es la formación de los polígonos vectorial y funicular, cuyo cierre (92—4.ª) lleva consigo la verificación de las ecuaciones $\Sigma X = \Sigma Y = o$ y $\Sigma N = o$.

559. Cálculo analítico de las tensiones y compresiones de un sistema reticular estrictamente indeformable.—Demostrare-

mos, en primer lugar, que el problema enunciado es determinado: sean m los lados del sistema y n sus vértices; en cada vértice se encuentran en equilibrio las fuerzas exteriores y las tensiones y compresiones que en él concurren, de modo que si prescindimos de un lado y de los dos vértices que enlaza, se podrán establecer, en los $n-2$ restantes, $2(n-2) = 2n-4$ ecuaciones de proyección en las que figurarán, además de las fuerzas exteriores, las $m-1$ interiores que corresponden a los lados del sistema, con excepción del que se ha prescindido; pero en los sistemas estrictamente indeformables se verifica la igualdad $m = 2n-3$ o $m-1 = 2n-4$, que expresa la determinación, en general, del sistema de ecuaciones formado, y en cuanto a la tensión o compresión del lado exceptuado, está determinada por la condición de ser igual y directamente opuesta a la resultante de las fuerzas aplicadas y de enlace que obren en uno cualquiera de los dos vértices que forman los extremos de dicho lado.

Como el cálculo analítico de las tensiones y compresiones, que de las ecuaciones aludidas se desprende, no se suele emplear en la práctica, prescindimos de desarrollarlo, y pasamos a exponer el método gráfico, que es el más empleado para resolver el problema que nos ocupa.

560. Cálculo gráfico de las tensiones y compresiones de un sistema estrictamente indeformable:

1.° *Método elemental.*—Daremos este nombre al procedimiento consistente en ir calculando las tensiones y compresiones de los lados concurrentes en cada vértice por medio de construcciones independientes unas de otras; así, si se trata del sistema reticular $A\,B\,C\,D\,E$, representado en la figura 316, sometido a las fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4, que cumplen la condición de cerrar el polígono vectorial $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\omega$ y el funicular $a\,b\,c\,d$, podremos construir el triángulo (a), correspondiente a las fuerzas concurrentes en A, que es

determinado por ser conocida F_1 y las líneas de acción de los enlaces $A\,B$ y $A\,E$; el expresado triángulo indica claramente, por su sentido cíclico, que los esfuerzos de dichos enlaces son de extensión.

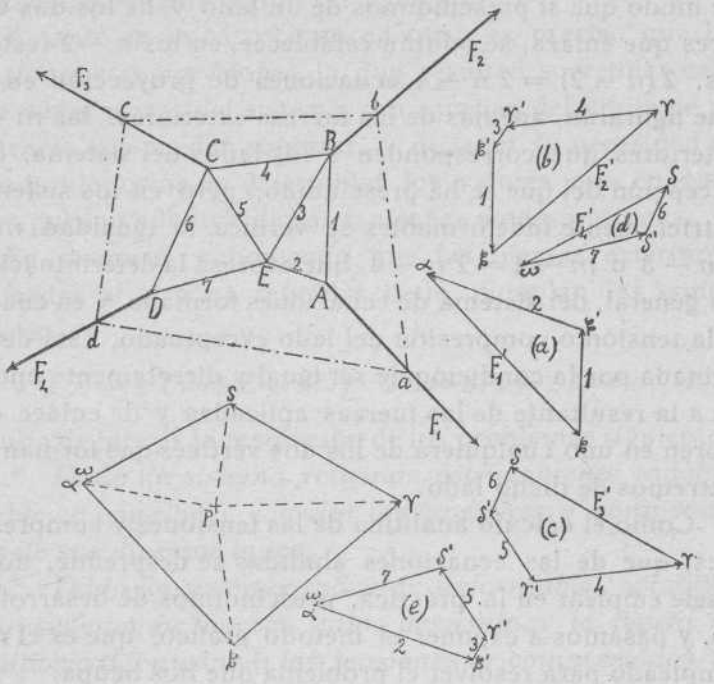


Fig. 316

Análogamente se construirán los polígonos (*b*), (*c*), (*d*) y (*e*), que sirven para determinar las demás fuerzas de enlace, teniendo la precaución de empezar las construcciones por un vértice donde sólo haya dos fuerzas desconocidas y continuarlas por aquellos en que se cumpla la misma circunstancia. Puede ocurrir que en la sucesión de las operaciones se llegue a algún vértice en que no haya más que una sola fuerza desconocida; en estos casos será esta última igual y directamente opuesta a la resultante de las demás que concurren en el vértice correspondiente; así se ha

procedido en el vértice D, en que la única fuerza desconocida, al llegar a él, ha sido la del lado $D\,E$ y la línea de cierre $\omega\,\delta'$, del polígono vectorial (d), proporciona el valor del esfuerzo de extensión a que está sometido dicho lado (*).

2.° *Método de Cremona.—Diagramas de las tensiones y compresiones.*—La construcción metódica de los polígonos vectoriales a que ha dado lugar el método elemental anterior, enlazándolos por las líneas que tienen equipolentes y tomando por base el polígono vectorial de las fuerzas aplicadas, constituye el llamado método de *Cremona* para calcular las tensiones y compresiones de los lados de los sistemas reticulares.

La figura 317 representa el conjunto de las construcciones, relativas al mismo ejemplo, que recibe el nombre de *diagrama* de los esfuerzos interiores del sistema dado, y en él cada línea representa, en la escala adoptada para el dibujo, la tensión o compresión a que está sometido el lado correlativo del reticular propuesto.

La figura de estos diagramas está formada por la yuxtaposición de los triángulos, cuadriláteros, etc., que provienen de los polígonos vectoriales correspondientes a las fuerzas que obran en cada vértice y la indeterminación, que parece tener su trazado, desaparece observando que, para enlazar las construcciones del método elemental, dando lugar a los diagramas aludidos, deberá sujetarse el trazado a la condición de que las líneas del diagrama paralelas a los diversos lados de cada cara del reticular propuesto, resulten concurrentes en el diagrama; así, al trazar por los

(*) Aun cuando no es necesaria la construcción del polígono vectorial (e) de las fuerzas concurrentes en el vértice E, para el cálculo de las tensiones y compresiones, por ser ya todas conocidas, deberá efectuarse, como comprobación del equilibrio del sistema. Las dos condiciones necesarias para el cierre de este último polígono, juntamente con la exigida para el cierre del anterior (d), constituyen las tres condiciones que, en general, tiene que satisfacer un sistema plano para estar en equilibrio.

extremos de F'_1 (fig. 317) las paralelas a los lados AB y AE del reticular, pueden construirse los triángulos $\alpha\,6\,6'$ y $\alpha\,6\,6''$, que proporcionarían las tensiones t_1 y t_2, o las iguales $\alpha 6''$ y $6''6$; para decir cuál de estos dos triángulos debe construirse, bastará observar, al empezar la construcción, que la tensión t_1 corresponde al lado AB, que une los

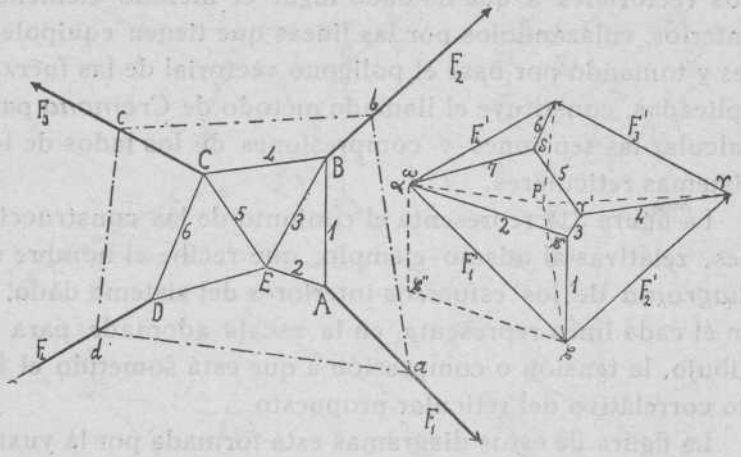


Fig. 317

puntos de aplicación de F_1 y F_2 y será una línea que ha de formar parte del triángulo vectorial del vértice A y del cuadrilátero del B y deberá trazarse por el punto 6, donde se unen en el polígono vectorial las fuerzas F_1 y F_2; así resultarán concurrentes en dicho punto 6 las fuerzas paralelas a las de la cara F_1 y F_2 del sistema reticular; análogamente se procederá en el resto del diagrama.

561. Observación.—El examen de la figura 317 nos hace ver que, entre el sistema reticular dado y el diagrama de sus esfuerzos, suponiendo trazados el polígono de Varignon y funicular correspondiente, existe la *reciprocidad* siguiente: las dos figuras tienen los mismos lados paralelos dos a dos, y el número de vértices de cada una es igual al de ca-

ras que tiene la otra, correspondiéndose de modo que los diversos lados que forman una cara, en una de las dos figuras, son paralelos a los que concurren en un vértice de la otra. Esta propiedad hace que al método de Cremona, para el cálculo de tensiones y compresiones, se le de el nombre de método de *las figuras recíprocas.*

562. Caso de fuerzas paralelas. — El caso más frecuente en la práctica, en el equilibrio de los sistemas reticulares, es que las fuerzas que obran en los nudos sean verticales (pesos y reacciones de los apoyos) y este paralelismo, juntamente con la condición de equilibrio teórico, satisfecha *a priori* por la intervención de las reacciones en los apoyos, simplifica notablemente la construcción de los diagramas.

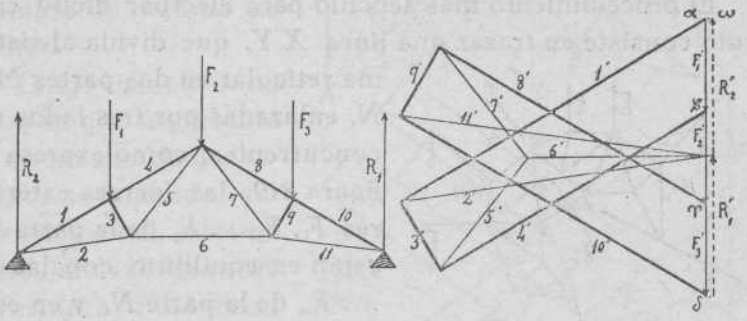


Fig. 318

Como ejemplo de este caso presentamos el sistema reticular de la figura 318 (armadura *Polonceau sencilla*), sometido a las fuerzas iguales $F_1 F_2 F_3$ y reacciones R_1 y R_2; la simetría del sistema dado y la igualdad de las fuerzas aplicadas, producen la regularidad y simetría del diagrama, cuya construcción completa no es necesaria en la práctica, por deducirse los valores de los esfuerzos de todas las

piezas con el trazado de las líneas correspondientes a la mitad de la figura (*)

563. Caso de presentarse en un vértice tres fuerzas desconocidas.—El procedimiento expuesto, para construir los diagramas de los sistemas reticulares, supone que puede partirse de un vértice donde no haya más de dos fuerzas desconocidas y continuarse metódicamente por otros donde se vaya cumpliendo la expresada condición; pero puede presentarse el caso de llegar a una parte del trazado donde sea imposible continuarlo en dicha forma, por no encontrarse vértices que cumplan tal condición, y en estos casos se procede a determinar, en cálculo aparte, las tensiones o compresiones intermedias que sean necesarias para continuar la construcción metódica del diagrama.

El procedimiento más sencillo para efectuar dicho cálculo consiste en trazar una línea $X\,Y$, que divida al sistema reticular en dos partes M y N, enlazadas por tres lados no concurrentes, como expresa la figura 319; las fuerzas exteriores F_1, F_2 .... F_5 de la parte M, están en equilibrio con las F_6 .... F_9, de la parte N, y en este equilibrio, la acción de las primeras se transmite a la parte N de la figura por medio de las tensiones o compresiones de los lados $a\,b$, $a\,c$ y $d\,e$; según esto, la resultante de cualquiera de los dos grupos M o N, descompuesta en las direcciones señaladas por dichos lados **(69)**, nos dará el valor de las tres

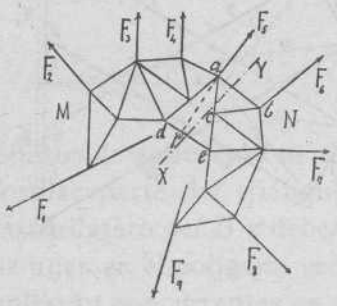


Fig. 319

(*) Adoptamos, en la construcción de los diagramas, el convenio de representar por trazos finos los esfuerzos de extensión, y por trazos gruesos los de compresión.

tensiones o compresiones que a los mismos corresponden.

Cuando baste con determinar el esfuerzo correspondiente a un lado, el $d\,e$ por ejemplo, para efectuar la construcción del diagrama, se puede calcular el momento de la resultante de F_6, F_7, F_8, F_9, con relación al punto a, y este momento será el mismo que el de la tensión del lado $d\,e$; dividiéndolo por la distancia $a\,p$ tendremos la tensión o compresión del referido lado.

El procedimiento de descomposición de la resultante de F_6, F_7, F_8, F_9, en las direcciones $a\,b$, $a\,c$ y $d\,e$, suele llamarse *método de Culmann*, y la determinación de una sola tensión o compresión por medio de su momento, en la forma dicha, se conoce con el nombre de *método de Ritter*.

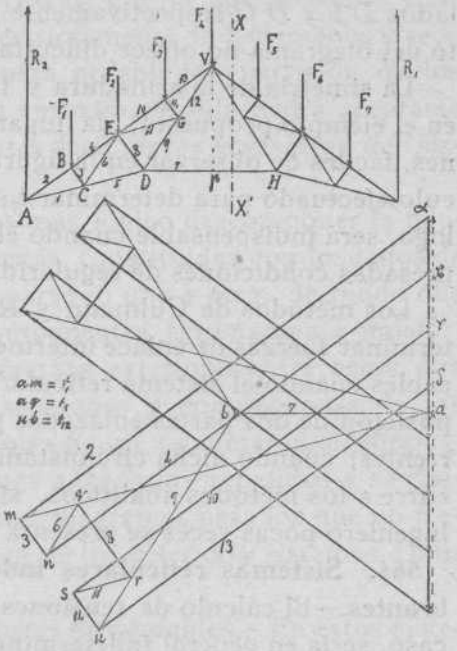


Fig. 320

Como ejemplo de un caso en que se presenta la circunstancia que estamos estudiando, supongamos el sistema reticular de la figura 320 (armadura *Polonceau reforzada*) sometido a las fuerzas iguales y paralelas F_1, F_2 .... F_7 y las reacciones R_1 y R_2. En este ejemplo se ve que partiendo del vértice A y continuando por el B y C, puede construirse la parte de diagrama correspondiente a los esfuerzos t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 y t_6; pero no se puede continuar el trazado por el mismo procedimiento, por encon-

trarnos en los vértices que siguen, D y E, con más de dos fuerzas desconocidas.

Tracemos la línea $X X'$ y, aplicando el método de Ritter, calcularemos el momento de las fuerzas F_5, F_6, F_7 y R_1 respecto al punto V; este momento, suponiendo las longitudes en escala de *1 : 200* y las fuerzas en la de *200 kg. por milímetro*, es de *15.000 kilográmetros*, cuyo número dividido por $V p = 2{,}85\ m$ nos da para tensión del lado $D H$, $t_7 = 5.200$ *kilogramos*; si trazamos en el diagrama el lado $a b = 26$ *milímetros*, podremos ya construir el polígono vectorial $a b r q a$ de las fuerzas concurrentes en D, obteniéndose las t_8 y t_9 para la compresión y extensión de los lados $D E$ y $D G$ respectivamente. La construcción del resto del diagrama no ofrece dificultad.

La simetría de la armadura y la igualdad de las fuerzas en el ejemplo propuesto, da lugar a varias comprobaciones, fáciles de observar en la figura, que dispensan del cálculo efectuado para determinar t_7: este cálculo, u otro análogo, será indispensable cuando el caso no presente las expresadas condiciones de regularidad.

Los métodos de Culmann y Ritter, indicados para determinar fuerzas de enlace intermedias, sólamente son aplicables cuando el sistema reticular dado admite la descomposición de dos partes enlazadas por tres lados no concurrentes; cuando dicha circunstancia no tenga lugar, se recurre a los métodos analíticos, si bien en la práctica del Ingeniero pocas veces se presenta este caso.

564. Sistemas reticulares indeformables de líneas sobrantes.—El cálculo de tensiones y compresiones, en este caso, sería en general indeterminado, si no se contara con más ecuaciones que las suministradas por el Algoritmo mecánico, pues el sistema que podría establecerse tendría $2\ (n - 2)$ ecuaciones y $m - 1$ incógnitas, existiendo entre $m - 1$ y $2\ (n - 2)$ el exceso

$$K = (m - 1) - (2n - 4) = m - (2n - 3),$$

que representa el número de líneas sobrantes del reticular supuesto.

La teoría de la elasticidad proporciona las ecuaciones complementarias necesarias y suficientes para la determinación del problema; pero, sin recurrir a dicha teoría, podría emplearse la solución aproximada de prescindir de las líneas sobrantes y considerar las tensiones y compresiones encontradas como límites de los esfuerzos verdaderos, cuando se coloquen en el sistema las líneas sobrantes; sin embargo, debe tenerse presente que la agregación de nuevos lados a un sistema estrictamente indeformable, puede hacer variar de una manera notable la repartición de los esfuerzos y esta solución aproximada sólo podrá aceptarse cuando las líneas sobrantes sean piezas accesorias del sistema reticular.

En los demás casos es más lógico descomponer la figura en otras dos yuxtapuestas, constituidas con los lados de la primera, repetidos en parte en una y otra, de modo que formen dos sistemas componentes estrictamente indeformables, y distribuir las fuerzas exteriores entre estos dos últimos: calculadas las tensiones y compresiones de los diversos lados en una y otra figura, se sumarán algebraicamente las correspondientes a los lados repetidos y se conservará el deducido de los diagramas para los que no formen parte más que de uno de los referidos sistemas componentes.

565. Sistemas reticulares deformables.—En estos sistemas no bastan las condiciones teóricas del equilibrio de las fuerzas aplicadas, ni la resistencia material de los lados que formen el sistema, para evitar el movimiento de éste, si la configuración del mismo no cumple un determinado número de condiciones, que *está expresado por las de defor-*

mabilidad que tenga. En efecto, el sistema de ecuaciones a que da lugar el equilibrio de $n - 2$ vértices del reticular, tiene, según ya hemos visto, $2n - 4$ ecuaciones y $m - 1$ incógnitas; pero ahora es $2n - 4$ mayor que $m - 1$ y las condiciones de compatibilidad serán

$$K = (2n - 4) - (m - 1) = (2n - 3) - m,$$

o sean las de deformabilidad del sistema reticular dado.

Si eliminamos las m fuerzas interiores en el sistema de ecuaciones formado, resultarán K ecuaciones entre las fuerzas exteriores y los ángulos que los lados forman con un eje fijo, y si estos ángulos no son exactamente los que corresponden a las K condiciones de compatibilidad, el equilibrio no puede realizarse.

566. Caso de un polígono articulado.—El sistema deformable más sencillo que puede presentarse es el de un polígono articulado sometido a un cierto número de fuerzas aplicadas en todos sus vértices (figura 321). Suponiendo cumplidas las condiciones teóricas del equilibrio de las fuerzas aplicadas (cierre de los polígonos vectorial y funicular), se precisa la condición de que el polígono articulado sea, él mismo, *un polígono funicular de las fuerzas dadas*; en efecto, el equilibrio de cada lado exige que al descomponer las fuerzas que actúan en sus extremos, en las direcciones de dichos lados, las componentes que resulten en cada uno de ellos sean iguales y de sentido contrario, y esta es precisamente la condición que nos ha ser-

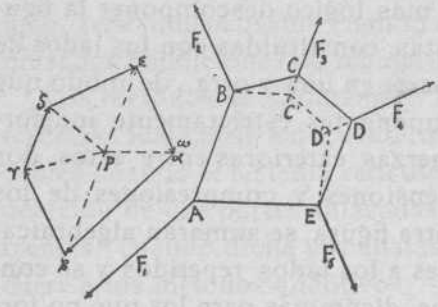


Fig. 321

vido para definir los polígonos funiculares de los sistemas vectoriales [89].

Para ver que el número de condiciones de forma, necesarias para el equilibrio del sistema, coincide con el de condiciones de deformabilidad del mismo, tracemos en el polígono vectorial dos radios αP y δP, paralelos a dos lados consecutivos $E A$ y $A B$ del polígono dado y el punto P será el polo del funicular $A B C D E$; esto exige que las rectas $B C'$, $C' D'$ y $D' E$, paralelas a $P\gamma$, $P\delta$ y $P\varepsilon$, respectivamente, coincidan con los lados $B C$, $C D$ y $D E$ de dicho polígono, y esto, que parecen ser tres condiciones, son realmente dos, puesto que al coincidir $B C'$ con $B C$ y $C' D'$ con $C D$, forzosamente coincidirá $D' E$ con $D E$. Las condiciones de deformabilidad, tratándose de un pentágono, son $K = (2 . 5 - 3) - 5 = 2$ en el mismo número que las condiciones de forma del polígono articulado propuesto.

567. Tensiones y compresiones en los lados de un sistema reticular deformable.—El procedimiento de Cremona es aplicable al caso de figuras deformables, y como ejemplo presentamos en la figura 322 la armadura llamada *mansarda*, sometida a las fuerzas F_1 F_2 F_3 y las reacciones R_1 y R_2. Si los puntos m y n del diagrama estuvieran unidos, la extensión del lado $B D$ sería nula y podría suprimirse dicho lado, sin perjuicio del equilibrio del sistema; si el punto m estuviera más separado que el n de la recta $\alpha\delta$, la expresada pieza estaría comprimida en vez de extendida.

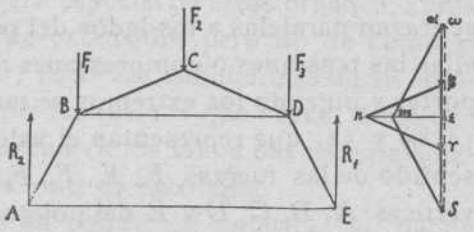


Fig. 322

La construcción de los diagramas se utiliza en las figu-

ras deformables, para poner de manifiesto las faltas de conformación que tengan para hacer posible el equilibrio; así, al hacer el diagrama de la figura 322, por ejemplo, podrían determinarse las tensiones de $A\,B$ y $A\,E$, que nos dan el punto m del diagrama, e independientemente de las anteriores, las de los lados $B\,C$ y $C\,D$ que señalan el punto n, y el equilibrio del vértice B exige que el lado $B\,D$ sea paralelo a la recta $m\,n$; sin esta condición el equilibrio no podría verificarse.

Cuando el sistema articulado sea un polígono cualquiera, como el de la figura 321, la radiación del polígono de Varignon representa las tensiones y compresiones de los lados del polígono, constituyendo el diagrama de dichos esfuerzos, y esta propiedad permite resolver con suma sencillez el siguiente problema.

568. Problema.—*Dado un polígono articulado calcular el valor modular, dirección y sentido de las fuerzas que hay que aplicar en sus vértices, para que produzcan tensiones o compresiones determinadas en los lados del polígono propuesto.*—Por un punto cualquiera P (fig. 321), se trazan paralelas a los lados del polígono, se señalan en ellas las tensiones o compresiones que cada lado deba soportar y uniendo los extremos se tendrán las rectas $\alpha\,\beta$, $\beta\,\gamma$, $\gamma\,\delta$, $\delta\,\varepsilon$ y $\varepsilon\,\alpha$, que representan el valor modular, dirección y sentido de las fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4 y F_5 aplicadas en los vértices A, B, C, D y E del polígono dado, con la condición de producir los esfuerzos interiores que se hayan señalado.

De esta construcción se deduce que si las tensiones o compresiones se cambian, conservando una relación cualquiera, la dirección de las fuerzas aplicadas en los vértices no cambia, pero su valor modular se modifica en la misma relación.

569. Sistemas reticulares alabeados.—En todo lo que

acabamos de exponer, sobre el equilibrio de los sistemas reticulares, se ha supuesto que éstos eran planos, por ser el caso que con más frecuencia se presenta al Ingeniero y porque en la mayoría de los sistemas no planos, pueden éstos descomponerse en sistemas parciales que cumplan la citada condición.

Cuando dicha descomposición no pueda efectuarse, se recurrirá a los métodos analíticos, para hacer el cálculo de tensiones y compresiones, por resultar más cómodos que los procedimientos gráficos en los expresados sistemas.

III

EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS FUNICULARES

570. Nueva condición para el equilibrio de estos sistemas.—Los sistemas articulados cuyos lados están constituídos por órganos flexibles e inextensibles, como las cuerdas, correas, cables, cadenas, etc., reciben el nombre de *funiculares* y la naturaleza especial de estos órganos, aptos para resistir esfuerzos de extensión, pero no de compresión, obliga a introducir, entre las condiciones de su equilibrio, la necesidad de que las fuerzas que obren sobre sus vértices o nudos, produzcan en los lados del sistema sólamente los indicados esfuerzos de extensión.

Teniendo en cuenta la condición anterior, se puede aplicar a los sistemas funiculares los procedimientos de cálculo gráfico o analítico de tensiones, que para los reticulares se han establecido; pero la importancia de esta teoría nos obliga a insistir sobre algunas propiedades que conviene detallar.

571. Equilibrio de un cordón, sujeto por uno de sus extremos, bajo la acción de una fuerza aplicada al otro extremo.—La flexibilidad del cordón hace que éste tome, en

cuanto la fuerza se pone de manifiesto, la dirección de la tracción que sobre él se ejerce y el equilibrio exige que la acción molecular de la materia de que esté constituído, en el punto en que dicha tracción se ejerce, sea igual a la fuerza aplicada.

Esta reacción constituye la *tensión* de la cuerda en el expresado punto, que se transmite con valor constante, a lo largo de la misma, hasta el amarre del cordón; en este punto se ejerce una tracción, igual a la tensión; que se contrarresta por la reacción del citado amarre: la práctica confirma las deducciones anteriores, probando que si el enlace del amarre se sustituye por una fuerza igual a la aplicada en el extremo opuesto del cordón, el equilibrio se verifica como antes.

572. Cordón sujeto por sus extremos y sometido a una fuerza en un punto fijo de su longitud.—Sea el cordón AMB (fig. 323), sometido a la fuerza F; descomponiéndola en la dirección de MA y MB, se obtienen las tensiones t_1 y t_2 que la fuerza produce en las dos ramas del cordón; estas tensiones representan las acciones que se ejercen sobre los puntos de amarre A y B y miden también la reacciones R_1 y R_2, que en dichos puntos se desarrollan. La presencia de las fuerzas R_1 y R_2, en los puntos A y B, produce el mismo efecto que los amarres y permiten considerar al cordón como libre bajo la acción de F y las expresadas reacciones.

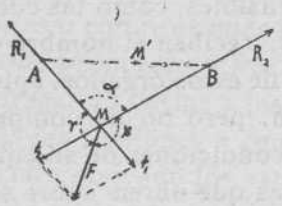


Fig. 323

Analíticamente se calculan las tensiones y reacciones por las conocidas fórmulas (**66**-4.°)

$$R_1 = t_1 = F\frac{\operatorname{sen}\delta}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad R_2 = t_2 = F\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha},$$

que demuestran la imposibilidad de mantener en línea rec-

ta las dos ramas $M'A$ y $M'B$ de un cordón, por pequeña que sea la fuerza que se aplique en un punto intermedio del mismo.

También se deduce de las expresadas fórmulas que cuando F sea bisectriz del ángulo que forman MA y MB, las tensiones t_1 y t_2 son iguales y recíprocamente.

573. Cordón sujeto por sus extremos y sometido a una fuerza que se aplica por intermedio de una anilla.—Cuando el punto de aplicación de la fuerza F tiene libertad para moverse a lo largo del cordón, como sucede si la fuerza obra por intermedio de una anilla o gancho que pueda correrse sobre él, interesa conocer la posición de equilibrio de la anilla y las tensiones que se ejercen en las dos ramas de la cuerda.

Respecto a la primera cuestión observaremos que la trayectoria descrita por el punto de aplicación de la fuerza es una elipse, y como las posiciones de equilibrio de un punto, obligado a moverse sobre una curva fija, corresponden a los puntos en que la fuerza aplicada al móvil es normal a la trayectoria, se deduce que la anilla resbalará sobre el cordón, hasta que la fuerza F sea una bisectriz del ángulo AMB que forman los radios vectores de la citada elipse. Las tensiones de las ramas MA y MB son iguales, como consecuencia de la igualdad de los ángulos δ y γ que a la posición de equilibrio corresponde.

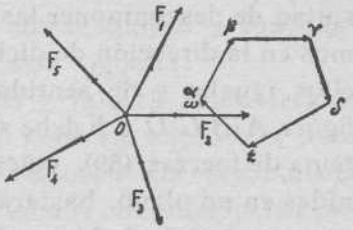


Fig. 324

574. Nudo que reune varios cordones.—En este caso (fig. 324), por tratarse de fuerzas concurrentes, basta para el equilibrio que sea cerrado el polígono vectorial. Las tensiones de los ramales son iguales a las fuerzas aplicadas a los mismos.

575. Cordón sujeto por sus extremos y sometido a varias fuerzas en distintos puntos fijos de su longitud.—Sea el cordón $A\,B\,....\,F$ de la figura 325, que se encuentra sometido a las fuerzas F_1, F_2, F_3, F_4, conocidas en magnitud y posición, y tratemos de encontrar la figura de equilibrio del cordón: el de cada lado exige que las tensiones que re-

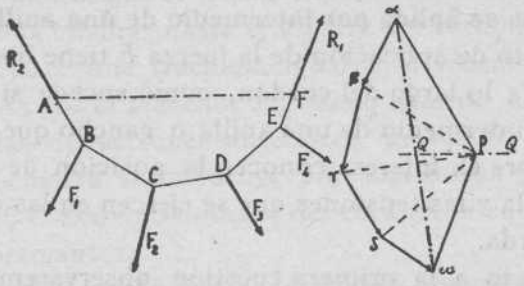


Fig. 325

sultan de descomponer las fuerzas aplicadas en sus extremos en la dirección de dichos lados sean, en cada uno de ellos, iguales y de sentido contrario, lo que indica que la figura $A\,B\,C\,D\,E\,F$ debe ser un polígono funicular del sistema de fuerzas **(89)**: ciñéndonos al caso de fuerzas contenidas en un plano, bastará para trazarlo construir el polígono vectorial $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\omega$ y aplicar los procedimientos estudiados en el Algoritmo mecánico, para hacer cumplir a dicho trazado las condiciones que le hacen determinado.

El equilibrio de cada vértice exige que las dos tensiones que en él concurren produzcan una resultante igual y directamente opuesta a la fuerza aplicada al mismo; estas tensiones estarán, por consiguiente, representadas por los radios $P\alpha$, $P\beta$, $P\gamma$, $P\delta$ y $P\omega$ del polígono de Varignon, que constituirá el diagrama de las tensiones del sistema funicular propuesto.

Del examen del diagrama se deduce que la tensión de cada lado del cordón es igual y opuesta a la resultante de

cualquiera de los dos grupos de fuerzas exteriores que se forman a uno y otro costado del ramal considerado, incluyendo entre estas fuerzas las reacciones extremas R_1 y R_2.

Cuando las fuerzas sean paralelas (fig. 326), tiene lugar la propiedad de que *todas las tensiones producen la misma proyección sobre un eje perpendicular a la dirección de las fuerzas;* esta componente común a todas las tensiones está representada en el diagrama por el segmento $P\,Q$.

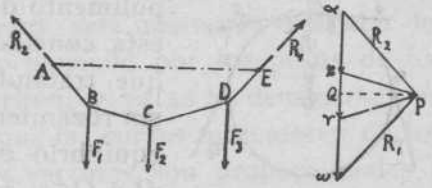


Fig. 326

576. Cordón sujeto por sus extremos y fuerzas aplicadas por medio de anillas. — En este caso tiene que cumplirse la condición de ser cada fuerza bisectriz del ángulo formado por los dos lados que en ella se apoyan y todas las tensiones, incluso las extremas, serán iguales.

Cuando se fijen las posiciones y valores modulares de las fuerzas, el problema será, en general, imposible; pues es necesario que el polígono vectorial correspondiente $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\omega$ (fig. 325), sea inscriptible en una circunferencia cuyo centro sea el polo del funicular que señalaría la figura de equilibrio del cordón, necesitándose, además, cuando se fijen los extremos del mismo, que las paralelas a $P\alpha$ y $P\omega$, trazadas por A y F, se corten sobre la resultante de las fuerzas dadas. Claro es que dejando indeterminados algunos de dichos datos, se podrá calcular un sistema de fuerzas que aplicado a las anillas del cordón, en puntos determinados, produzcan su equilibrio.

577. Cordón apoyado sobre una superficie sin rozamiento. — Sea el cordón $P\,A\,Q$ (fig. 327) que entre los puntos α y β se encuentra apoyado sobre una superficie convexa cualquiera y sometido a las fuerzas P y Q en sus ex-

tremos. La experiencia demuestra que para producir el movimiento del cordón, en el sentido de β para α, es preciso que la fuerza P sea mayor que Q; pero la diferencia $P - Q$ disminuye a medida que aumenta el pulimento de la superficie de apoyo, y esta consideración da lugar a admitir que, tratándose de superficies teóricas sin rozamiento, sea necesario para el equilibrio del cordón la igualdad de P y Q, y como consecuencia de esto, que la tensión en todos los puntos de la cuerda sea constante, desde el punto de aplicación de P, hasta llegar al de Q, en el otro extremo.

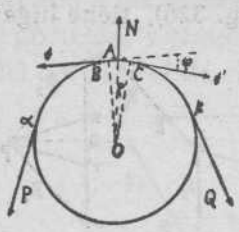


Fig. 327

En estos casos es interesante averiguar la figura de equilibrio del cordón y la presión que se ejerce sobre la superficie en sus diversos puntos. Consideremos los dos elementos $A\,B$ y $A\,C$ que se reunen en A; las tensiones t y t' que les corresponde, están en equilibrio por la intervención de la reacción N normal a la superficie, y como estas tres fuerzas tienen que estar en un plano, los osculadores de la línea determinada por el cordón, en su posición de equilibrio, son normales a la superficie, y el cordón adoptará la forma de una *geodésica* de la expresada superficie de apoyo.

En cuanto a la presión que el cordón ejerce en el punto A, será igual y contraria a N, y su valor está determinado por la fórmula $N = 2\,t \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2}$, siendo φ el ángulo de contingencia del cordón en el referido punto. La fórmula anterior se puede poner en función del radio de curvatura de la geodésica correspondiente: observando que $\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{1}{2} A\,B}{\rho}$, resulta

$$N = t \,.\, \overline{A\,B} \,.\, \frac{1}{\rho} = \frac{K}{\rho}$$

y nos dice que las referidas presiones *varían en razón inversa del radio de curvatura, en cada punto de la línea formada por el cordón sobre la superficie.*

578. Cordón sujeto por sus extremos y sometido sólamente a la acción de su peso.—La figura de equilibrio del cordón, en estas condiciones, será una curva funicular del sistema vectorial continuo formado por los pesos de los infinitos elementos del cordón, y ya se ha demostrado en el Algoritmo mecánico, que las curvas funiculares de los sistemas continuos, cuyos vectores son proporcionales a los elementos de una directriz curvilínea cualquiera, afectan la forma de catenarias (**107-2.°**), y en este caso se encuentra la disposición del cordón sometido a la acción de su propio peso.

La tensión de un punto cualquiera se determina gráficamente por las siguientes construcciones, que suponen conocida la catenaria formada por el cordón. Sea ésta la $A\ D\ B$ (figura 328); tracemos la recta $\alpha\ \omega$, representativa del peso del cordón, y las paralelas αP y ωP a las tangentes extremas en A y B a la catenaria; los radios ωP y $P\alpha$ representarán las acciones sobre los puntos de amarre A y B, y un radio cualquiera del polígono de Varignon, expresará la tensión del elemento del cordón que le sea paralelo; así, si queremos averiguar la tensión en el punto C, se trazará en él la tangente a la catenaria y el radio paralelo $P\,6$ representará la tensión pedida.

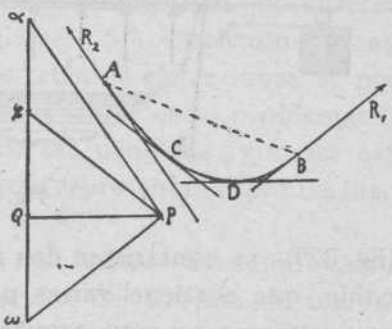


Fig. 328

Como este caso está comprendido en el de la figura 326, se verificará que la componente horizontal de la tensión,

en cada punto, tiene el valor constante representado por $P\,Q$, igual a la del punto más bajo de la catenaria. La componente vertical de cada tensión es igual al peso del trozo de cordón comprendido entre el punto más bajo de la catenaria y el correspondiente a la tensión considerada; así, en la del punto C, dicha componente es $Q\,6 = a\,Q - a\,6 =$ *peso del trozo C D*.

579. Ejemplo de aplicación.—Puentes colgantes.—La organización general de un puente colgante es la siguiente: en las orillas del río u obstáculo que se trata de salvar

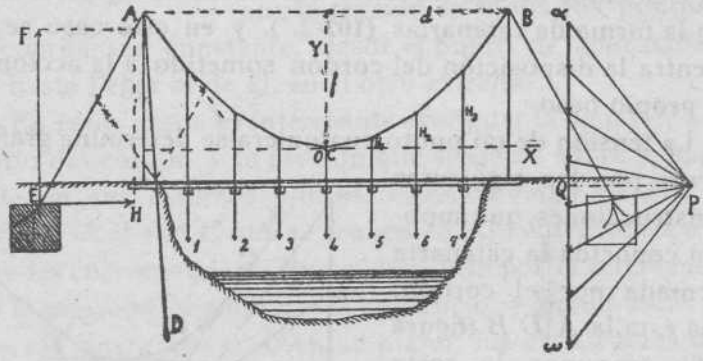


Fig. 329

(fig. 329), se construyen dos *pilares* sobre los que pasa un *cable*, que sostiene varias *péndolas* o varillas verticales equidistantes, en cuyo extremo inferior se amarran los *traveseros* del puente que, a su vez, sirven de apoyo a los *largueros*, sobre los que descansa el *tablero* o piso del puente. El cable pasa, en lo alto de los pilares, sobre cilindros de fundición y se sujeta por sus extremos en tierra, empotrándolos en macizos de mampostería llamados *macizos de amarre*. La parte del cable comprendida entre los pilares se llama *de suspensión*, y la que queda entre el amarre y los pilares, *de retenida*.

Inútil parece decir que el sostenimiento del puente exige

uno de estos cables a cada lado del mismo, y, por consiguiente, los esfuerzos que cada cable tiene que soportar, se calcularán repartiendo entre los dos la carga total del puente.

Prescindiendo de la forma de determinar las cargas máximas que obrarán sobre cada péndola así como del estudio preliminar que hará el Ingeniero, para señalar la altura de los pilares y el número de *tramos* del puente, supondremos conocidos estos datos y representaremos por P_1, P_2, P_3 .... P_7, las fuerzas máximas que actuarán sobre las péndolas al funcionar el puente.

Los problemas de aplicación de la teoría estudiada, a que da lugar el cálculo del puente, son los siguientes: 1.° Determinar la figura de equilibrio del cable de suspensión. 2.° Calcular las tensiones de sus diversos tramos. 3.° Calcular la tensión del cable de retenida. 4.° Determinar la presión sobre los pilares. 5.° Determinar el esfuerzo vertical que el cable de retenida ejerce sobre el macizo de amarre. Y no incluímos entre estos problemas la determinación de la tensión de las péndolas, por ser evidente que dichas tensiones están representadas por las fuerzas calculadas $P_1 = P_2 = ... = P_7$.

1.° *Figura de equilibrio del cable.*—Será indudablemente la de un polígono funicular del sistema de fuerzas exteriores y se trazará imponiéndole la condición de pasar por A y B, y además por el punto más bajo C, que generalmente se señala a la altura de la barandilla, o del tablero, en el centro del puente. Las tres condiciones señaladas hacen el problema determinado, resolviéndose por los procedimientos que se han estudiado en el Algoritmo mecánico (**95**-2.°).

2.° *Cálculo de las tensiones en el cable.*—Si el polo de la radiación necesaria para construir la figura de equilibrio del cable es el punto P, cada uno de los radios $P\alpha$, $P\beta$ ...

... $P\,\omega$, representarán las tensiones que se desea conocer. Esto nos dice que los trozos que están en peores condiciones de resistencia son los extremos, y los centrales los que tienen que soportar menores esfuerzos. La propiedad expresada al final del número **575** se verifica en este caso, por ser las fuerzas exteriores paralelas: *todas las tensiones tendrán por componente horizontal el segmento P Q.*

3.° *Tensión del cable de retenida.*—El paso del cable por el cilindro situado en lo alto del pilar, no modifica la tensión de los tramos extremos y esta tensión es la que corresponde al cable de retenida. En realidad es algo menor, por la acción que produce el rozamiento sobre el cilindro; pero en los cálculos de resistencia del cable se prescinde de dicha acción y se supone igual a la del tramo más elevado del de suspensión.

4.° *Presión sobre los pilares.*—Está representada por la resultante de las tensiones iguales del último tramo del cable de suspensión y la del cable de retenida; si la inclinación de estas dos tensiones fuera la misma, la citada resultante tomaría la dirección del eje del pilar; pero generalmente el cable de retenida suele tener menor inclinación, y esto hace que la presión $A\,D$ no se ejerza en el sentido del eje del pilar, siendo necesario, en cada caso, un estudio especial de estos datos, para hacer que la línea de acción de la resultante corte a la base del pilar en su tercio central, en beneficio de su estabilidad.

5.° *Esfuerzo vertical sobre el macizo de amarre.*—Este esfuerzo es el que se utiliza para determinar el volumen de dicho macizo, con la condición de que su peso lo equilibre; proyectando la tensión del cable de retenida sobre la vertical, se conocerá el valor del mismo, $E\,F$, y en cuanto a la componente horizontal, $E\,H$, quedará destruida por la resistencia del terreno y se prescinde de ella en el cálculo del macizo de amarre.

580. Longitud del cable de suspensión de un puente colgante.—Al hacer un proyecto de puente colgante, se pueden medir con toda exactitud en los planos las longitudes de los diversos tramos del cable y sumándolas se tendrá la total del mismo; pero hay casos en que convendrá conocer, antes de hacer dicho cálculo exacto, la longitud aproximada del cable en función de alguno de los elementos que se pueden fijar desde el primer momento, como la *semi-luz* del puente $d = \frac{l}{2}$ y la *flecha* f del cable.

Para encontrar una fórmula aproximada que exprese, en función de estos datos, la longitud del cable de suspensión, recordemos que si se considera el puente dividido en infinitos tramos, el polígono funicular que señala la posición del cable (**107-*primer caso***) sería una parábola funicular del sistema vectorial continuo así formado; esta parábola referida a los ejes oX y oY, indicados en la figura 329, sería de la forma $x^2 = 2py$ y su parámetro $2p$ queda determinado por la condición de verificarse la ecuación para $x = d$ e $y = f$; haciendo la sustitución resulta $2p = \frac{d^2}{f}$ y la ecuación de la parábola será $y = \frac{f}{d^2} x^2$.

Sin gran error puede tomarse, para longitud del cable, la que resulte de rectificar a la expresada parábola, que es

$$L = 2\int_o^d dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 2\int_o^d dx\sqrt{1+2\frac{2f^2x^2}{d^4}}.$$

La integración anterior se facilita sumando al binomio subradical la cantidad $\frac{4f^4x^4}{d^8} = \left(\frac{2f^2x^2}{d^4}\right)^2$, que para el máximo de x, que es d, toma el valor $\left(\frac{\sqrt{2}f}{d}\right)^4$, insignificante al

lado de los otros dos sumandos que hay bajo el radical, y con dicha transformación, admisible por la naturaleza del cálculo que estamos efectuando, se obtiene

$$L = 2\int_0^d dx\left(1+2\frac{f^2x^2}{d^4}\right) = 2d\left(1+\frac{2}{3}\left(\frac{f}{d}\right)^2\right),$$

que es la fórmula aproximada que deseábamos encontrar.

581. Suma de longitudes de las péndolas. — Con el mismo fin que la fórmula anterior, se puede determinar *a priori*, con alguna aproximación, la suma de las longitudes de las péndolas comprendidas entre el cable de suspensión y la horizontal del punto más bajo del mismo (eje $o\,X$), en función de la flecha del cable y del número de péndolas.

Representemos por $H_1, H_2 \ldots H_n$ las longitudes de las péndolas que hay en una cualquiera de las dos mitades del cable; estas longitudes serán las ordenadas de la parábola $y = \frac{f}{d^2}x^2$, correspondientes a las abscisas $x_1 = \lambda$, $x_2 = 2\lambda$ $\ldots$ $x_n = n\lambda$, siendo λ la longitud de cada uno de los tramos del puente; la suma de las expresadas longitudes en todo el cable será

$$S = 2\Sigma H_n = 2\left(\frac{f\lambda^2}{d^2}+\frac{f(2\lambda)^2}{d^2}+\ldots.\frac{f(n\lambda)^2}{d^2}\right) =$$

$$= 2\frac{f\lambda^2}{d^2}(1+2^2+3^2+\ldots+n^2) = \frac{2f\lambda^2}{d^2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

pero $d = (n+1)\lambda$, luego

$$S = 2f\frac{n(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2 6} = \frac{2fn(2n+1)}{3(2n+2)}.$$

La relación $\frac{2n+1}{2n+2}$ es tan próxima a la unidad, que, sin error sensible para nuestro objeto, se puede suponer igual y la fórmula encontrada se convierte en $S = \frac{2}{3}fn$.

582. Observaciones.—1.ª En los cálculos anteriores se ha supuesto dividido el puente en un número par de tramos, por cuya razón presenta el cable su punto más bajo en el centro del puente, coincidiendo con el vértice de la parábola $y = \frac{f}{d^2} x^2$; cuando el número de tramos sea impar, hay un tramo del cable (el central) que es horizontal y el vértice de la parábola no está sobre el cable; esta circunstancia no modifica en nada la marcha indicada para calcular gráficamente los elementos del puente y las fórmulas aproximadas encontradas, para expresar las longitudes del cable y péndolas, subsisten del mismo modo.

2.ª Aun cuando no hemos empleado más que el método gráfico, para calcular los diversos elementos del puente colgante, se comprende que, para obtener mayor exactitud en los resultados, se puede recurrir a los métodos analíticos estudiados en la composición vectorial.

IV

MOVIMIENTO DE LOS SISTEMAS DE ENLACE CONSTITUIDOS POR LAS MÁQUINAS

583. Rendimiento de una máquina.—Ya hemos visto en Cinemática cómo se determinaba la relación de velocidades entre las piezas *conductoras* y *conducidas* de los mecanismos más usuales; ahora nos interesa conocer la relación entre el trabajo útil desarrollado por una máquina y el trabajo motor que se necesita para producir su funcionamiento.

Esta relación, que recibe el nombre de *rendimiento*, sirve para establecer, desde el punto de vista económico, las ventajas o inconvenientes de unos mecanismos sobre otros y constituye un elemento interesantísimo en el estudio de las máquinas.

En el funcionamiento de éstas intervienen, además de la fuerza motora y la resistencia útil, las resistencias llamadas *pasivas* (rozamientos, vibraciones, resistencia del medio, etc.), cuyo trabajo, por ser opuesto al de las fuerzas motoras y sin aplicación útil en la mayoría de los casos, se llama *trabajo perjudicial.*

Hemos visto que en el movimiento periódicamente uniforme de los sólidos, en cada período, se verifica la equivalencia del trabajo motor con el desarrollado por las fuerzas resistentes **(535)**, y aplicando este principio al período total de marcha de una máquina, siendo T_r dicho trabajo resistente, con sus dos sumandos T_u (útil) y T_f (perjudicial), será $T_m = T_r$, y la expresión del rendimiento afectará la forma

$$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{T_r - T_f}{T_m} = 1 - \frac{T_f}{T_m},$$

indicando que *el límite superior del rendimiento de una máquina es la unidad,* y que para llegar a él *es necesario hacer desaparecer toda clase de resistencias pasivas,* cosa imposible de realizar en la práctica.

El rendimiento se suele expresar en *tantos por ciento* del trabajo motor recibido.

584. Relación entre el esfuerzo motor y el resistente en la marcha uniforme de las máquinas. — Sea P el esfuerzo motor que obra sobre una máquina, esfuerzo que impropiamente se acostumbra a llamar *potencia,* y representemos por Q el esfuerzo resistente (*resistencia*), que supondremos reducido al solo efecto útil desarrollado por la máquina; llamemos δx y δy los caminos recorridos en su dirección, en el tiempo dt, por los respectivos puntos de aplicación de dichas fuerzas; se verificará en este intervalo de tiempo, $dT_m = P\,\delta x$, $dT_r = Q\,\delta y$; pero si se supone que la máquina marcha con movimiento uniforme, tiene

lugar en cada instante la equivalencia $d\,T_m = d\,T_r$, de la que se deduce

$$\frac{P}{Q} = \frac{\delta\, y}{\delta\, x} \quad \text{o bien} \quad \frac{P}{Q} = \frac{v'}{v},$$

siendo v y v' las velocidades respectivas de los puntos de aplicación de P y Q.

La ecuación a que hemos llegado nos dice, que *la relación de la potencia y la resistencia, en la marcha uniforme de las máquinas, es inversa a la de las velocidades de los puntos de aplicación de las expresadas fuerzas*; esta propiedad se suele expresar diciendo que *en toda máquina se gana en fuerza lo que se pierde en velocidad y recíprocamente*; pero no debemos olvidar que, para establecer el principio anterior se ha prescindido de las resistencias perjudiciales del mecanismo y, por consiguiente, cualquiera que sea la naturaleza de éste, siempre *se gana menos en fuerza que lo que se pierde en velocidad*, y *se ganará menos en velocidad que lo que se pierda en fuerza.*

Cuando se conoce el rendimiento de una máquina, es fácil deducir la pérdida de fuerza, que ocasionan las resistencias pasivas, teniendo en cuenta la relación

$$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{Q\,\delta\, y}{P\,\delta\, x} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{v'}{v},$$

de donde $\frac{P}{Q} = \frac{v'}{v} \cdot \frac{1}{R}$; esta última ecuación nos dice que en la práctica la relación de potencia a resistencia es siempre mayor que la inversa de las velocidades, con la consiguiente pérdida de esfuerzo motor o disminución del resistente útil representado por Q, y también se deduce que si es P la fuerza teórica necesaria para mover un mecanismo y P' la práctica expresada por la ecuación

$P' = Q \frac{v'}{v} \cdot \frac{1}{R}$, se pasará de una a otra por las relaciones

$$P' = P \times \frac{1}{R} \quad \text{y} \quad P = P' \times R.$$

585. Aplicación del teorema de la fuerza viva en las máquinas.—Acabamos de ver que en el período total de marcha de una máquina, siempre es menor el trabajo útil desarrollado que el motor necesario para hacerla funcionar; pero esto no quiere decir que durante el funcionamiento no haya intervalos de tiempo en que no tenga lugar dicha circunstancia: para establecer la relación existente entre dichos trabajos, en un instante cualquiera, se utiliza la ecuación de la fuerza viva **(517)**

$$\Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m v_o^2}{2} = T_m - T_r ,$$

de la que se deducen varias consecuencias de interés práctico, relativas a las distintas fases del movimiento de las máquinas, en la forma que a continuación expresamos:

1.° *Puesta en marcha de la máquina.*—Llamando v_r a la velocidad de régimen de los diversos elementos de la máquina, se verificará, en el instante de adquirirla

$$T_m = T_r + \Sigma \frac{m v_r^2}{2} ,$$

es decir, que, en este período de la marcha, el trabajo motor consumido, excede al trabajo resistente desarrollado, en el valor de la fuerza viva correspondiente a la marcha normal de la máquina.

Para que la máquina adquiera pronto la velocidad de régimen, sin excesos de trabajo motor, convendrá disminuir en esta fase el valor de T_r, reduciéndolo al sumando

inevitable T_f, e intercalando paulatinamente la resistencia útil cuando la máquina está próxima, o haya llegado, a dicha velocidad de régimen.

2.° *Marcha normal de la máquina.*—En esta fase se verifica

$$T_m = T_r + \Sigma \frac{m v^2}{2} - \Sigma \frac{m v_r^2}{2}$$

y en ella tiene lugar la equivalencia de T_m con T_r, cada vez que la máquina adquiere la fuerza viva normal $\Sigma \frac{m v_r^2}{2}$. Los aumentos y disminuciones de T_m, cuando T_r es constante, se traducen en aumentos y disminuciones de fuerza viva de la máquina y para mantener a ésta en su marcha normal, es preciso que en cada instante se le proporcione el trabajo motor correspondiente al resistente que tiene que desarrollar.

En la práctica es imposible conseguir dicha correspondencia en cada instante y se emplean diversos medios para hacer que la diferencia $\frac{\Sigma m v^2}{2} - \frac{\Sigma m v_r^2}{2}$ no pase de ciertos límites, dependientes del *coeficiente de regularización*, que la naturaleza del trabajo de la máquina determina en cada caso.

Los procedimientos de regularización aludidos se fundan en la adopción de ciertos órganos llamados *volantes, reguladores* y *contrapesos*, que después estudiaremos.

3.° *Parada de la máquina.*—Al interrumpir la acción del motor sobre la máquina se verifica la ecuación

$$\frac{\Sigma m v^2}{2} = \frac{\Sigma m v_r^2}{2} - T_r,$$

que prueba la posibilidad de que el mecanismo siga funcionando hasta que el trabajo resistente desarrollado, a partir

de aquel instante, sea igual a la fuerza viva normal, en cuyo momento, por ser $\frac{\Sigma m v^2}{2} = 0$, se producirá la detención de la máquina.

En esta fase se dice que el mecanismo marcha *por la velocidad adquirida,* y durante ella devuelve la máquina, en trabajo resistente, el exceso de trabajo motor que consumió para adquirir la velocidad de régimen.

586. Regularización de la marcha de las máquinas. — Las irregularidades de marcha que en el funcionamiento de las máquinas se presentan, son motivadas por las variaciones inevitables que los términos T_m y T_r de la ecuación de la fuerza viva experimentan; en la mayoría de los mecanismos que la industria emplea, el esfuerzo motor obra sobre la máquina con intermitencias que dan lugar a que, durante ciertos intervalos de tiempo, el valor de T_m exceda considerablemente a T_r y en cambio, en otros, disminuya hasta reducirse a *cero.*

Estas variaciones se convierten en cambios de fuerza viva de la parte móvil del mecanismo y si se desea que estos cambios de fuerza viva no produzcan grandes variaciones de velocidad en las piezas móviles, debe dársele a éstas una masa adecuada, en relación con los máximos y mínimos que se fijen a dicha velocidad.

Las ruedas que se montan sobre los ejes giratorios de las máquinas, para aumentar la masa de las piezas móviles y contribuir a la regularización de la marcha, se llaman *volantes,* estando caracterizados estos órganos por el radio relativamente grande que tienen, a fin de conseguir su objeto sin darles un peso exagerado, como veremos al hacer su estudio.

Cuando las diferencias de T_m y T_r son debidas a las variaciones de T_r, no suele bastar el empleo de los volantes para asegurar la marcha periódicamente uniforme de la

máquina, y se emplean otros órganos, llamados *reguladores*, que obran automáticamente sobre el esfuerzo motor, proporcionando, dentro de ciertos límites, la fuerza motriz necesaria para el trabajo resistente que en cada instante deba desarrollar la máquina.

Al establecer la ecuación

$$\frac{\Sigma m v^2}{2} - \frac{\Sigma m v_o^2}{2} = T_m - T_r,$$

se ha supuesto incluído en T_m o T_r el trabajo debido a la pesantez de las piezas móviles, que será $\pm P(H - H_0)$, sumándose a T_m cuando tenga lugar el descenso del centro de gravedad de dichas piezas y a T_r durante la subida del mismo centro. La colocación arbitraria de las piezas móviles de una máquina puede producir, por este motivo, grandes irregularidades de marcha, y de aquí la conveniencia de estudiar detenidamente las disposiciones cinemáticas de los mecanismos para conseguir, en lo posible, la fijeza de dicho centro, o por lo menos hacer que se mueva en un plano horizontal.

También se comprende la posibilidad de utilizar órganos especiales dispuestos de modo que los descensos de dicho centro coincidan con las disminuciones del esfuerzo motor y las subidas con los instantes de mayor acción motriz, estableciéndose la compensación correspondiente entre el trabajo desarrollado por dichas fuerzas motoras y el de la pesantez, hasta conseguir que se reduzcan en cierto grado las diferencias de T_m y T_r; los órganos de las máquinas que se emplean con alguno de los dos objetos indicados, se llaman *contrapesos*.

587. Cálculo de los volantes.—Fórmula general de su peso.—Supongamos un árbol giratorio cuya velocidad angular se quiere mantener entre los límites $\omega' = \omega_0 + K$, y

$\omega'' = \omega_0 - K$, siendo $\omega_0 = \frac{\omega' + \omega''}{2}$ la velocidad normal que, para el mejor funcionamiento, debería tener constantemente el árbol a que nos referimos.

La relación $n = \frac{\omega_0}{\omega' - \omega''} = \frac{\omega_0}{2\,K}$ se llama *coeficiente de regularidad* de la marcha de la máquina, y nos proponemos estudiar las condiciones de radio y peso del volante que se desea montar sobre dicho árbol, para que el coeficiente n tenga el valor que, por la índole de la máquina, se señale de antemano.

Llamemos I al momento de inercia de las masas giratorias alrededor del eje; aplicando el teorema de la fuerza viva, en la forma explicada en la rotación de los sólidos alrededor de un eje **(535)**, se tiene durante la fase de marcha normal de la máquina

$$\frac{1}{2} I (\omega^2 - \omega_0^2) = T_m - T_r = T.$$

Sean T' y T'' los máximos y mínimos de T, correspondientes a los instantes en que la velocidad angular adquiere los valores ω' y ω''; la diferencia entre T' y T'' es

$$T' - T'' = \frac{1}{2} I (\omega'^2 - \omega''^2) = \frac{1}{2} I (\omega' + \omega'') (\omega' - \omega'') =$$

$$= I \,.\, \omega_0 \,.\, \frac{\omega_0}{n} = \frac{I}{n} \omega_0^2 ,$$

de donde $$I = \frac{n}{\omega_0^2} (T' - T'').$$

La última ecuación nos dice que, calculados los máximos y mínimos porque pasa la expresión del trabajo total $T = T_m - T_r$ en un mecanismo giratorio, se determina exactamente el momento de inercia I que deben tener las masas montadas sobre el mismo, para obtener una velocidad de

régimen dada, con un coeficiente de regularidad que también se señale.

En la práctica se supone concentrado en el volante el efecto regularizador y se calcula su peso con la condición de producir, por sí solo, el momento de inercia I determinado por la ecuación anterior.

Como el momento de inercia de un volante, calculado en el Algoritmo mecánico **(151)**, es $I = MR^2$, siendo M su masa y R el radio medio de la llanta, se deduce que uno de estos dos factores puede elegirse arbitrariamente y la fórmula determinará el segundo; generalmente se señala el radio R, tan grande como las circunstancias prácticas del montaje de la máquina permitan, y se toma como incógnita el peso G del volante, que vendrá expresado, en función de los datos, por la fórmula general

$$G = \frac{n\,g}{R^2\,\omega_0^2}\,(T' - T'').$$

El denominador $R^2\,\omega_0^2$ representa el cuadrado de la velocidad lineal de la circunferencia media de la llanta, y la ecuación $V^2 = R^2\,\omega_0^2$ se utiliza para fijar el valor de R, en correlación con los máximos que la práctica aconseja admitir para los valores de V.

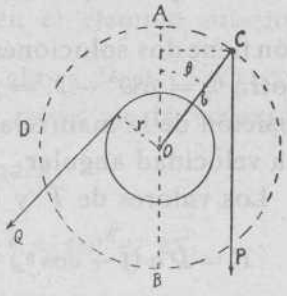


Fig. 330

588. Peso del volante en los mecanismos de manivela.—Como aplicación de la fórmula encontrada, para calcular el peso de los volantes, resolveremos los siguientes ejemplos:

1.° *Manivela simple a simple efecto.*—Sea $o\,C$ la manivela (fig. 330) en cuyo botón C actúa el esfuerzo motor P, que se ejerce con dirección y valor modular constante du-

rante el recorrido $A\,C\,B$ y cuya acción cesa en la media vuelta $B\,D\,A$.

La resistencia está representada por la fuerza Q, tangencial a la polea o tambor de radio r, y se desea averiguar el peso del volante que hay que montar sobre el mismo eje, para obtener un coeficiente dado de regularidad.

Considerando la posición $o\,A$ como punto de partida, el trabajo total desarrollado por P y Q, cuando la manivela haya girado un ángulo cualquiera θ, es

$$T = T_m - T_r = P\,(b - b\cos\theta) - Q\,r\,\theta = P\,b\,(1 - \cos\theta) - Q\,r\,\theta$$

y los máximos y mínimos de T corresponderán a los valores de θ que hagan

$$\frac{d\,T}{d\,\theta} = P\,b\,\operatorname{sen}\theta - Q\,r = o\,,$$

o sea $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{Q\,r}{P\,b}$, pero la condición de periodicidad del movimiento exige, que al pasar la manivela por $o\,A$, en cada vuelta, sea $T = T_m - T_r = o$, o lo que es lo mismo, $P\,.\,2\,b = Q\,r\,.\,2\,\pi$, de donde $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{\pi} = 0{,}318$; esta ecuación tiene dos soluciones menores que 180^o, una $\theta_1 = 18^o33'6''$ y otra $\theta_2 = 180^o - \theta_1 = 161^o26'54''$, cuyos ángulos señalan la posición de la manivela en los instantes de mínima y máxima velocidad angular.

Los valores de T' y T'' son

$$T' = P\,b\,(1 - \cos\theta_2) - Q\,r\,\theta_2 = Q\,r\,\pi\left(1 - \cos\theta_2 - \frac{\theta_2}{\pi}\right),$$

$$T'' = Q\,r\,\pi\left(1 - \cos\theta_1 - \frac{\theta_1}{\pi}\right)$$

y el de su diferencia

$$T' - T'' = Q\,r\,\pi\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{\pi}\right) =$$

$$= Q\,r\,\pi\left(2\cos\theta_1 + \frac{2\theta_1 - \pi}{\pi}\right) = 0{,}5517 \times Q\,r\,2\pi\,;$$

sustituyéndolo en la fórmula del peso de volante, se obtiene

$$G = \frac{n\,g}{R^2\,\omega_0^2} \times 0{,}5517 \times Q\,r\,2\pi\,.$$

El factor $Q\,r\,.\,2\pi$ representa el trabajo resistente, igual al motor, desarrollado en cada vuelta de la manivela, y este trabajo, en función de la potencia de la máquina en caballos de vapor C_v y del número de revoluciones por minuto N, es $Q\,r\,.\,2\pi = \frac{75\,.\,60\,.\,C_v}{N}$, de donde resulta finalmente

$$G = 0{,}5517\,.\,\frac{75\,.\,60\,.\,C_v\,n\,g}{N\,R^2\,\omega_0^2} = 24300\,\frac{n\,C_v}{N\,R^2\,\omega_0^2}\,.$$

2.° *Manivela simple a doble efecto.*—La expresión

$$T = P\,b\,(1 - \cos\theta) - Q\,r\,\theta$$

y la condición de máximo y mínimo de T, expresada por $\operatorname{sen}\theta = \frac{Q\,r}{P\,b}$, se establecen como en el ejemplo anterior; pero la ecuación de periodicidad es ahora $P\,.\,4\,b = Q\,r\,2\pi$, y los valores de θ_1 y θ_2 serán las raices de la ecuación $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\pi} = 0{,}637$, que se verifica para

$$\theta_1 = 39^\circ\,32'\,35'' \quad \text{y} \quad \theta_2 = 180^\circ - \theta_1 = 140^\circ\,27'\,25''.$$

Los valores T' y T'' son, en este caso,

$$T' = P\,b\,(1 - \cos\theta_2) - Q\,r\,\theta_2 = \frac{Q\,r\,.\,\pi}{2}\left(1 - \cos\theta_2 - \frac{2\,\theta_2}{\pi}\right),$$

$$T'' = \frac{Q\,r\,\pi}{2}\left(1 - \cos\theta_1 - \frac{2\,\theta_1}{\pi}\right).$$

y $$T' - T'' = \frac{Q r \pi}{2}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2 + \frac{2}{\pi}(\theta_1 - \theta_2)\right) =$$

$$= Q r 2\pi \times \left(\frac{1}{2}\cos\theta_1 + \frac{\theta_1}{2\pi} - \frac{1}{2}\right) = 0{,}1052 \times Q r 2\pi.$$

El valor de $Q r 2\pi$ es, como antes, $Q r 2\pi = \frac{75 \cdot 60 \cdot C_v}{N}$ y el peso del volante, correspondiente a la manivela simple a doble efecto, será

$$G = 0{,}1052 \cdot \frac{75.60.\ C_v\ n\ g}{N R^2 \omega_0^2} = 4646\ \frac{n\ C_v}{N R^2 \omega_0^2}.$$

589. Reguladores que actúan sobre el esfuerzo motor de las máquinas.—Ya hemos dicho el objeto de estos órganos, de los que existen una gran variedad de tipos, que se aplican con ventaja en determinadas circunstancias. El más interesante, por las variedades a que ha dado lugar, es el llamado *regulador de Watt* o *péndulo cónico*, que ha recibido multitud de aplicaciones en las máquinas de vapor.

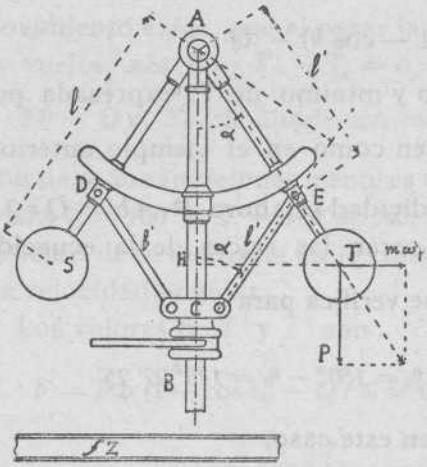


Fig. 331

La figura 331 representa la disposición general del péndulo cónico; las varillas $A\,S$ y $A\,T$, de longitud l, que sostienen a las bolas S y T, de peso P, se articulan en D y E con otras que se reunen en la pieza C, llamada *collar* del regulador, formando el rombo $A\,D\,C\,E$; la unión A es solidaria con el eje vertical $A\,B$, pero el collar C se

puede deslizar a lo largo del eje con mayor o menor esfuerzo, según sea la presión que se establezca entre la superficie interior del collar y el mismo eje; dicho esfuerzo, debido al rozamiento de las superficies que se ponen en contacto, lo representaremos por $2R$, siendo necesario que en cada una de las varillas CD y CE, de longitud l', obre una tensión o compresión superior a $\frac{R}{\cos\alpha}$, para que el collar se ponga en movimiento hacia arriba o hacia abajo.

El regulador se enlaza cinemáticamente con el árbol principal de la máquina, y supongamos que sea ω_0 la velocidad angular de régimen que, como consecuencia de la de dicho árbol, le corresponde al eje del regulador; si se supone que el collar no opone ninguna resistencia a subir y bajar, la posición de equilibrio relativo de las bolas estará dada por la condición [**495**] $h = AH = \frac{g}{\omega_0^2}$.

El collar C del regulador se une por medio de una varilla a una palanca que acciona sobre la válvula Z, y, según su posición, obtura más o menos parte de la sección del tubo de paso del vapor a los cilindros del motor; este enlace se debe establecer de modo que cuando el péndulo esté en la posición de equilibrio, señalada por la ecuación $h = \frac{g}{\omega_0^2}$, la válvula deje pasar precisamente la cantidad de vapor necesaria para producir la velocidad de régimen con el valor normal de T_r.

El funcionamiento del regulador, suprimida la resistencia del collar, se produciría del modo siguiente: toda disminución de T_r se traducirá en aumento de velocidad angular del árbol principal de la máquina, y por consiguiente del eje AB; aumentando ω, las bolas subirán hasta su nueva posición de equilibrio, arrastrando al collar que, al subir, actuará sobre la válvula Z, disminuyendo la sección de

paso del vapor y, por tanto, el trabajo motor; lo contrario ocurrirá con los aumentos accidentales de T_r.

Pero es fácil ver que el aparato dispuesto en esta forma tiene un grave inconveniente, que se ocasiona con la vuelta del collar a su primera posición, en cuanto se ha restablecido la velocidad angular ω_0, puesto que al volver el collar a dicha primera posición, la válvula Z dejará pasar la cantidad de vapor que originó el exceso o defecto de T_m sobre T_r, dando esto lugar a una serie de oscilaciones del péndulo, que lejos de regularizar, serían perjudiciales para la marcha de la máquina.

Este inconveniente se atenúa, en parte, haciendo intervenir la resistencia $2R$ del collar; con ella se consigue que, colocado el péndulo en una posición de equilibrio, permanezca inmóvil aunque la velocidad angular baje o exceda del valor teórico $\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$, dentro de ciertos límites, que determinan el grado de *sensibilidad* que se desee tenga el regulador.

Esta sensibilidad se mide por el coeficiente K de la fórmula $\omega' = \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{K}$, que relaciona la velocidad de régimen ω_0 con la máxima o mínima ω' que se quiera que produzca el movimiento del collar. Fijado el coeficiente de sensibilidad y la resistencia del collar, el peso P de las bolas debe tener un valor determinado que vamos a calcular.

Supongamos que una disminución de T_r produce el aumento de velocidad necesario para que el eje AB gire con la angular

$$\omega' = \omega_0 + \frac{\omega_0}{K} = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{K}\right);$$

en el instante anterior al de iniciarse la subida del collar, se encuentran las varillas AS y AT en equilibrio relativo bajo la acción de las fuerzas

$$P,\quad m\,\omega'^2\,\rho = \frac{P}{g}\,\omega'^2\,l\,\operatorname{sen}\alpha,\quad \frac{R}{\cos\alpha}$$

y siendo nulo el momento de estas fuerzas respecto al punto A, se verificará

$$P\,l\,\operatorname{sen}\alpha + \frac{R}{\cos\alpha}\,l'\,\operatorname{sen} 2\alpha - \frac{P}{g}\,\omega'^2\,l\,\operatorname{sen}\alpha\,h = o,$$

$$P\,l + 2\,R\,l' - \frac{P}{g}\,l\,h\,\omega_0^2\left(1+\frac{1}{K}\right)^2 = o;$$

el cuadrado $\left(1+\frac{1}{K}\right)^2 = 1 + \frac{2}{K} + \frac{1}{K^2}$ se puede suponer, sin gran error, igual a $1 + \frac{2}{K}$, y el cociente $\frac{h\,\omega_0^2}{g}$ es igual a la unidad; sustituyendo estos valores en la última ecuación, resulta

$$P\,l\left(1 - 1 - \frac{2}{K}\right) + 2\,R\,l' = o,$$

de donde se obtiene $P = K\,R\,\frac{l'}{l}$, para fórmula del peso de las bolas, correspondiente a un coeficiente de sensibilidad señalado. La relación $\frac{l'}{l}$ suele ser, en la mayoría de los reguladores, aproximadamente igual a $^2/_3$; en estos casos, la fórmula del peso de las bolas es $P = \frac{2}{3}\,K\,R$.

590. Reguladores astáticos.—Se llaman así los reguladores que al producir la velocidad del régimen ω_0, en una posición cualquiera, permanecen estacionados en ella, evitando las continuas oscilaciones de la válvula de que hemos hecho mención en el regulador de Watt; también suelen llamarse reguladores *isocrónicos*.

Teóricamente basta con hacer que la trayectoria del centro de las bolas sea una parábola, cuyo parámetro esté

en relación con la velocidad angular de régimen, para conseguir el equilibrio relativo del regulador en cualquiera posición de las bolas **(495)**.

En algunos tipos de reguladores, se ha tratado de conseguir dicho efecto, haciendo que las bolas se deslicen a rozamiento suave sobre guias parabólicas y por otros métodos análogos; pero la práctica no ha sancionado el procedimiento y los reguladores astáticos con guias parabólicas han sido desechados.

591. Regulador seudo-astático de varillas cruzadas.—El regulador de varillas cruzadas de *Farcot*, está organizado como indica la figura 332; las varillas que sostienen a las bolas se articulan en A y A' y se cruzan sobre el eje en el punto o; si se supone que la posición de equilibrio, correspondiente a ω_0, es la de la figura y se construye el aparato de modo que A y A', sean los centros de curvatura en S y T de la parábola $a\ b\ c$, correlativa con ω_0, los desplazamientos pequeños que experimentan las bolas, al girar alrededor de A y A', se pueden suponer que se verifican sobre dicha parábola y el regulador funcionará, dentro de ciertos límites, como si fuera astático.

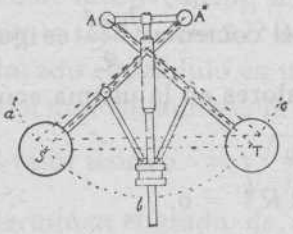


Fig. 332

El regulador de Farcot, como todos los que cumplen la condición astática, en la forma que para éste acabamos de ver, se llaman reguladores *seudo-astáticos*.

592. Observación.—La dificultad de graduar bien la resistencia del collar, cuando es debida simplemente al rozamiento con el eje y el inconveniente de exigir el péndulo cónico disposiciones especiales para adaptarse a distintas velocidades de régimen, igualmente que la conveniencia de poder colocar los reguladores con su eje en una posición

cualquiera, distinta de la vertical, han motivado la creación de un gran número de tipos, fundados en diversas teorías, que remedian en mayor o menor grado los citados inconvenientes; el estudio detallado de este asunto pertenece al curso de *Motores*.

593. Los contrapesos como órganos de regularización.—Supongamos una manivela simple a simple efecto y vamos a ver cómo, la colocación conveniente de un contrapeso, permite dar al mecanismo la regularidad de marcha que le correspondería si fuera de doble efecto, sin órganos regularizadores.

Coloquemos en la prolongación de la manivela y a distinto lado del centro (fig. 333), el peso p, que describirá una circunferencia de radio R en el giro de la manivela; es evidente que al llegar el botón de ésta a una posición como la N, en que el esfuerzo motor no ejerce acción alguna, el contrapeso p estará en n y, por la acción de la pesantez, podrá producirse la fuerza motora necesaria, para que el mecanismo funcione como si el esfuerzo motor P actuara en N en sentido ascendente.

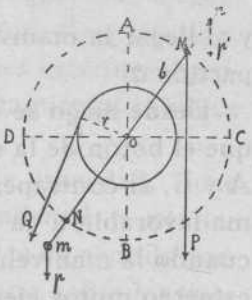


Fig. 333

Todo queda reducido al cálculo conveniente del peso p, en relación con P, b y R; este cálculo se hace con la condición de que el momento de las fuerzas que actúan sobre el mecanismo, en una posición M de la manivela, sea el mismo que el que se produce al pasar a la posición simétrica N, obteniéndose la ecuación

$$P\,b \operatorname{sen} \theta - Q\,r - p\,R \operatorname{sen} \theta = p\,R \operatorname{sen} \theta - Q\,r\,,$$

de donde se deduce $p = \dfrac{Pb}{2\,R}$.

Del mismo modo puede aumentarse la regularidad de

marcha en una manivela de doble efecto, montando en un segundo eje o', paralelo al primero o (fig. 334), una rueda de radio R con un contrapeso p y enlazando los dos ejes por un engranaje (R_1, R_2) que duplique la velocidad angular de o' sobre la de o. Así, si se monta el mecanismo de modo que cuando el botón de la manivela esté en A, el contrapeso esté en a, se verificará que en el cuarto de revolución correspondiente al paso de A a B, el contrapeso habrá pasado de a a b, y al llegar la manivela a C, se encontrará en la posición de partida a.

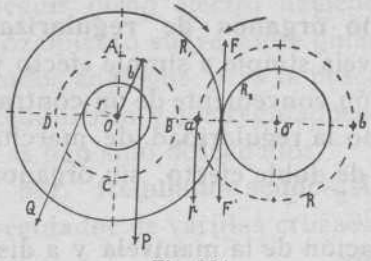


Fig. 334

Desde luego se ve que con esta combinación, cada vez que el botón de la manivela pasa por los puntos muertos, A y C, el contrapeso, situado en a, ejerce su acción máxima favorable a la marcha del mecanismo, y en cambio, cuando la manivela ocupa las posiciones B y D, en que el esfuerzo motor ejerce su mayor acción, el contrapeso se encuentra en el punto b, produciendo una acción, máxima también, pero de sentido contrario al del movimiento.

El efecto regularizador se consigue calculando el contrapeso de modo que el momento de las fuerzas que obran sobre el eje principal o, sea el mismo cuando la manivela se encuentra en A y B, determinando las reacciones F y F' entre las ruedas del engranaje por la acción estática que el contrapeso produce en las posiciones a y b sobre los dientes del mismo; el valor modular común de F y F', es $F = F' = \frac{p \cdot R}{R_2}$ y estableciendo la igualdad de momentos antes dicha, se tiene

$$F' R_1 - Q r = P . b - F R_1 - Q r ,$$

o bien, simplificando y sustituyendo los valores de F y F', $2 \frac{p R}{R_2} R_1 = P b$; pero siendo $R_1 = 2 R_2$, resulta en definitiva $p = \frac{P b}{4 R}$.

594. Los contrapesos como órganos estabilizadores. — Si se disponen las diversas piezas de un mecanismo en forma tal, que durante su funcionamiento permanezca fijo el centro de gravedad del conjunto del aparato, éste no ejerce sobre sus apoyos más acción que la estática correspondiente a su peso; pero si dicho centro de gravedad se desplaza en algún sentido, este desplazamiento lleva consigo, inevitablemente, la presencia de reacciones exteriores provocadas por las acciones que el funcionamiento produce sobre los apoyos.

Así, la elevación vertical del centro de gravedad, tiene que ser producida por una reacción ascendente, y esto indica que, durante dicha elevación, se ejerce en sentido vertical descendente una presión suplementaria sobre los apoyos; en el descenso, por el contrario, se atenúan las referidas presiones.

De todos modos, esta variabilidad de las acciones de una máquina sobre sus apoyos, tiende siempre a desorganizar el montaje de la misma, y aun cuando el constructor dispone de medios para contrarrestar prácticamente los indicados efectos, se comprende la conveniencia de reducirlos a su grado mínimo, y esto se puede conseguir distribuyendo con cuidado las piezas móviles de los mecanismos y dotando a éstos de ciertos contrapesos, cuyo centro de gravedad se mueva en sentido contrario al de las demás piezas móviles, para producir, como se desea, la fijeza relativa del centro del conjunto.

V

EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS DE ENLACE CONSTITUÍDOS POR LAS MÁQUINAS

595. Objeto de este estudio. — Las máquinas, en general, están destinadas para prestar sus servicios en movimiento y parece que carece de finalidad práctica el estudiar las condiciones de su equilibrio; pero aparte de que hay muchas que, precisamente por el equilibrio de las fuerzas que se le aplican, cumplen su cometido, en todas se verifica que la relación existente entre la potencia y la resistencia útil es independiente, dentro de ciertos límites, de la velocidad media de marcha, por tener lugar, en virtud de los enlaces cinemáticos, la constancia de la relación de velocidades $\frac{v'}{v}$ del órgano operador y del receptor, y ser **(584)**

$$\frac{P}{Q} = \frac{v'}{v} \cdot \frac{1}{R} = \frac{K}{R} = \textit{constante.}$$

En este sentido resulta de interés la determinación de la relación $\frac{P}{Q}$ necesaria para el equilibrio de una máquina cualquiera, pues el valor que se obtenga para esta relación en el equilibrio *es el que le corresponde durante la marcha normal de la misma.*

Por el contrario, cuando se conoce en una máquina la relación de velocidades lineales, que las disposiciones cinemáticas establecen entre el órgano receptor y el operador, se encuentra fácilmente la relación de potencia a resistencia, en la marcha normal, por la fórmula anterior, $\frac{P}{Q} = \frac{K}{R}$, y el valor obtenido representa, del mismo modo, la relación entre dichas fuerzas en los casos de equilibrio.

Para indicar la forma de establecer la relación de potencia a resistencia en las máquinas, exponemos a continuación varios ejemplos de mecanismos en equilibrio, o marcha normal, suponiendo por ahora que no existan resistencias pasivas, o, lo que es lo mismo, que el rendimiento sea igual a la unidad.

596. Equilibrio de la palanca.—Las tres fuerzas que intervienen en este mecanismo son P, Q y la reacción R del

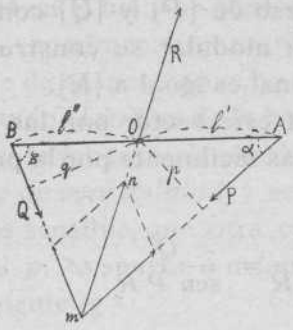


Fig. 335

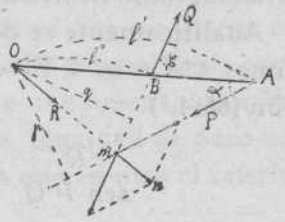


Fig. 336

punto de apoyo (figs. 335, 336 y 337), siendo necesario para el equilibrio que las tres fuerzas estén en un plano y verifiquen las ecuaciones $\Sigma X = o$, $\Sigma Y = o$, $\Sigma N = o$.

Refiriendo la ecuación de los momentos al punto de apoyo, se obtiene

$$P \cdot p - Q \cdot q = o$$

o $$P = Q\frac{q}{p} = Q\frac{l'' \operatorname{sen} \beta}{l' \operatorname{sen} \alpha};$$

generalmente α y β son iguales a 90° y resulta $P = Q\dfrac{l''}{l'}$.

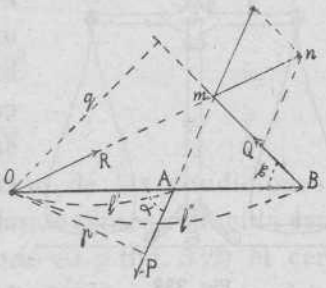


Fig. 337

Cuando la palanca es de *primer género* (figura 335),

l' y l'' pueden estar en una relación cualquiera; en las de *segundo género* (fig. 336) es siempre $l' > l''$, resultando favorecida la potencia, y para las de *tercero* (fig. 337) es, al contrario $l'' > l'$, y siempre se necesita un esfuerzo motor mayor que el resistente para obtener el equilibrio del mecanismo.

597. Cálculo de la reacción en el punto de apoyo de la palanca.—Gráficamente se determina la línea de acción de $[R]$ uniendo el punto de concurso de $[P]$ y $[Q]$ con el de apoyo, y para conocer su valor modular se construirá el paralelogramo $m\ n$, cuya diagonal es igual a $[R]$.

Analíticamente se determina este vector por las ecuaciones $\Sigma X = o$, $\Sigma Y = o$, o más fácilmente por la proporción **(66-4.ª)**

$$\frac{R}{\text{sen } P\,Q} = \frac{P}{\text{sen } Q\,R} = \frac{Q}{\text{sen } P\,R};$$

cuando $[P]$ y $[Q]$ sean paralelas, $[R]$ tendrá la misma dirección y su valor modular es $R = P \pm Q$.

598. Balanza ordinaria.—La figura 338 representa la disposición general de estos aparatos, empleados para medir el peso P de los cuerpos, colocados en uno de los *platillos*, por el equilibrio y horizontalidad de la palanca de primer género que forma sus *brazos*, mediante la colocación de otro peso conocido Q en el segundo platillo.

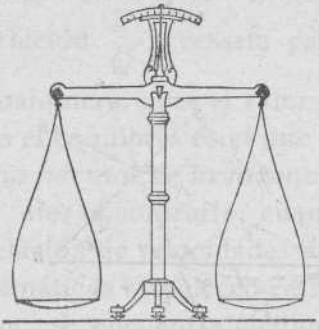


Fig. 338

Siendo iguales los brazos de la balanza, es indudable que el peso Q, cuando la balanza esté en el *fiel*, será el del cuerpo P, y esto cualquiera que sea el platillo en que se coloquen el cuerpo y las *pesas*.

Cuando los brazos son desiguales la balanza es *falsa* y acusa mayor o menor peso para los cuerpos, según se coloquen en uno u otro platillo; puede, sin embargo, obtenerse el peso exacto de un objeto, con una balanza falsa, haciendo *doble pesada,* cambiando de platillo, y tomando la medida proporcional de los pesos acusados en cada una de dichas operaciones.

599. Sensibilidad de las balanzas.—Cuando una balanza está en el fiel y se adiciona un peso p a uno de los platillos, experimenta un movimiento de oscilación alrededor del eje de suspensión, y queda, al cesar dicho movimiento, formando el *índice* de la balanza con el fiel un cierto ángulo α; la tangente de este ángulo recibe el nombre de *coeficiente de sensibilidad* y se dice que una balanza es más o menos sensible que otra cuando, a igualdad de peso adicional p, es mayor o menor en una que en otra el referido coeficiente tg α.

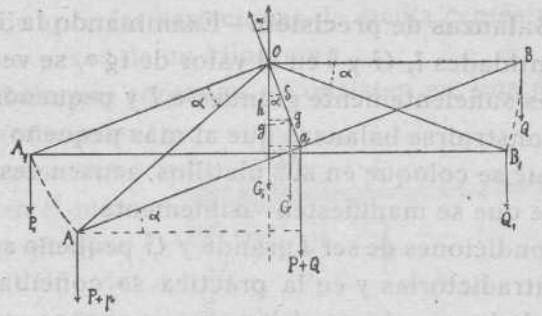


Fig. 339

Para calcular tg α, en función de las condiciones de construcción de una balanza, supongamos reducida ésta a los ejes de sus elementos, estando en g (fig. 339) el centro de gravedad de la parte indeformable A_1 o B_1 y siendo

$$\frac{1}{2} A B = l, \quad o\,a = h \quad \text{y} \quad o\,g = \delta.$$

En la posición de equilibrio obtenida después de adicio-

nar el peso p al platillo de la izquierda, se verifica, tomando momentos respecto al eje o y suponiendo, para más facilidad, que los pesos iguales P y Q se han sustituído por su resultante $P + Q = 2P$ aplicada en a,

$$2P h \operatorname{sen} \alpha + G \delta \operatorname{sen} \alpha - p (l \cos \alpha - h \operatorname{sen} \alpha) = o,$$

de donde

$$\operatorname{tg} \alpha [(2P + p) h + G \delta] = p l \quad \text{o} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{p l}{(2P + p) h + G \delta}.$$

La fórmula obtenida para tg α nos dice que la sensibilidad es dependiente del peso P, que preliminarmente se haya colocado en los platillos; pero puede hacerse que tg α sea independiente de P, haciendo que la recta que une los puntos de suspensión de los platillos pase por el punto de apoyo de los brazos, pues entonces será $h = o$ y el coeficiente de sensibilidad se convierte en $\operatorname{tg} \alpha = \frac{p l}{G \delta}$.

600. Balanzas de precisión.—Examinando la influencia de las cantidades l, G y δ en el valor de tg α, se ve que dando valores suficientemente grandes a l y pequeños a G y δ, pueden construirse balanzas que al más pequeño peso adicional, que se coloque en sus platillos, acusen desviaciones del índice que se manifiesten visiblemente.

Las condiciones de ser l grande y G pequeño son en realidad contradictorias y en la práctica se concilian, en las llamadas *balanzas de precisión* para pequeños pesos, construyendo los brazos de metales ligeros y vaciándolos con molduras en hueco que disminuyen su peso.

Por lo que se refiere al factor δ puede hacerse tan pequeño como se desee, y aún reducirlo a *cero*; pero esto último no es conveniente, porque entonces el valor de tg α sería infinito, para cualquier valor de p, y los brazos girarían un ángulo recto al menor peso adicional que se agregara en uno de los platillos.

Las balanzas de brazos largos tienen el inconveniente de la facilidad con que se producen deformaciones elásticas, que influyen en la exactitud de las pesadas; por este motivo, en las modernas balanzas de precisión, se procura asegurar la indeformabilidad de la cruz dando a los brazos pequeñas longitudes y supliendo la disminución de sensibilidad con la adopción de órganos auxiliares dotados de microscopios y escalas graduadas, que permiten apreciar, con relativa facilidad, las más pequeñas desviaciones del fiel de la balanza. Otra segunda ventaja que se consigue con la disposición de brazos cortos, es la disminución del tiempo que duran las oscilaciones y, como consecuencia, el aumento de rapidez en el manejo de estos aparatos.

Teniendo en cuenta las diversas circunstancias que se han indicado, se construyen balanzas de precisión corrientes, que pueden apreciar media décima de miligramo, y para usos especiales se han llegado a construir aparatos capaces de apreciar variaciones de media centésima de miligramo en pesos de un kilogramo.

601. Balanzas romanas.—Consisten en una palanca de primer género con dos brazos desiguales; en el más corto hay un gancho (fig. 340) de donde se suspende el objeto que se quiere pesar; el equilibrio horizontal se consigue corriendo a lo largo de las divisiones del brazo mayor una pequeña pesa *p*, llamada *pilón*, y por la posición de éste, cuando el índice está en el *fiel*, se deduce el peso del cuerpo suspendido del gancho.

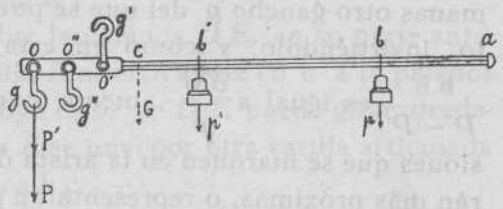


Fig. 340

El brazo *o' a* está dividido en un gran número de partes

iguales, señaladas con una pequeña muesca en la arista superior de la barra $o' a$, para facilitar la colocación del pilón en cualquiera de ellas; cada división representa una fracción determinada de libras o kilogramos, y para hacer la graduación se suspenden sucesivamente del gancho g dos pesos conocidos P y P'; si la romana queda en el fiel en las posiciones b y b' del pilón, se verificará

$$P \,.\, o\, o' = G \,.\, o'\, c + p \,.\, o'\, b, \quad P' \,.\, o\, o' = G \,.\, o'\, c + p \,.\, o'\, b',$$

de donde, restando, se obtiene

$$o\, o'\,(P - P') = p \,.\, b\, b' \quad \text{o} \quad \frac{b\, b'}{P - P'} = \frac{o\, o'}{p} = \textit{constante;}$$

es decir, que los desplazamientos del pilón son proporcionales a los incrementos de los pesos, y, por consiguiente, si $P - P' = 25$ *kilogramos* y dividiéramos el intervalo $b\, b'$ en *100* partes iguales, continuando las divisiones hasta los extremos o' y a de la barra, cada división representaría *un cuarto de kilogramo.*

Para aumentar el alcance de las pesadas, llevan las romanas otro gancho g'' del que se puede suspender el aparato, invirtiéndolo, y como en esta posición la relación $\frac{b\, b'}{P - P'}$ es igual a $\frac{o\, o''}{p}$, menor que la anterior, las divisiones que se marquen en la arista de apoyo del pilón estarán más próximas, o representarán pesos mayores si están, como se hace en la práctica, igualmente espaciadas que las de la arista anterior.

602. Básculas.—Para facilitar la operación de pesar, tan frecuente en diversas manifestaciones de la vida práctica, se emplean las *básculas*, que consisten, de un modo general, en un tablero horizontal, donde se coloca el cuerpo que se quiere pesar; debajo del tablero hay una combinación de palancas que transmiten la acción del peso a un

punto de otra palanca de primer género, cuyo equilibrio horizontal se restablece por medio de pesas colocadas en un platillo, como en las balanzas ordinarias, o por medio de un pilón móvil como en las romanas.

El juego de palancas que se coloca debajo del tablero debe organizarse de modo que cumpla dos condiciones esenciales; la primera es que al descender el tablero permanezca horizontal y no se produzca la rodadura de los objetos que sobre él se coloquen, y la segunda consiste en hacer que la acción del peso colocado en el tablero, sobre la palanca de primer género antes citada, sea independiente de la posición que el cuerpo tenga sobre el mismo.

Existen gran número de combinaciones, más o menos ingeniosas, para conseguir los extremos indicados; la más generalizada, en las básculas corrientes, es la disposición de *Quintenz*, que consiste en lo siguiente:

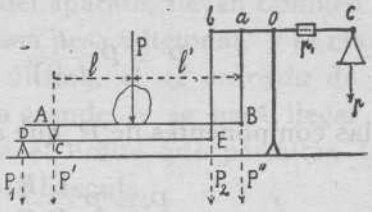


Fig. 341

El tablero $A\,B$ (figura 341) se apoya en C sobre la palanca $D\,E$, en su parte anterior lo sostiene la varilla $B\,a$, articulada en a a la palanca $b\,c$, cuyo punto de apoyo es o; la $D\,E$ puede girar alrededor de D y su extremo E se une, por otra varilla articulada $E\,b$, a la misma palanca $b\,c$.

Al colocar un peso P sobre el tablero, desciende éste por el giro de las palancas $b\,c$ y $D\,E$ hasta que el peso p, colocado en el platillo c, restablece el equilibrio horizontal de la palanca $b\,c$; para conseguir que los puntos A y B desciendan igualmente en este movimiento, basta que las longitudes $o\,a$, $o\,b$, $D\,C$ y $D\,E$, de las palancas $b\,c$ y $D\,E$, cumplan la condición $\frac{o\,a}{o\,b} = \frac{D\,C}{D\,E}$, pues los descensos δ y

δ', de a y b, están en relación $\frac{\delta}{\delta'} = \frac{o\,a}{o\,b}$; los δ' y δ'', de E y C, en la $\frac{\delta''}{\delta'} = \frac{D\,C}{D\,E}$, de modo que si $\frac{o\,a}{o\,b} = \frac{D\,C}{D\,E}$ se verificará $\frac{\delta}{\delta'} = \frac{\delta''}{\delta'}$, o sea $\delta = \delta''$, como queríamos demostrar.

La misma combinación realiza la segunda condición que se dijo debían cumplir las básculas; vamos a ver que, en efecto, la acción que P ejerce sobre la palanca $b\,c$ no depende de la posición del peso sobre el tablero; llamemos l y l' las distancias de P a los puntos de apoyo del tablero en A y B; las componentes P' y P'' de dicho peso, que obran en estos puntos, son **(71)**

$$P' = P\,\frac{l'}{l+l'} \quad \text{y} \quad P'' = P\,\frac{l}{l'+l};$$

las componentes de P' que actúan en D y E son

$$P_1 = P'\,\frac{C\,E}{D\,E} \quad \text{y} \quad P_2 = P'\,\frac{D\,C}{D\,E};$$

la P_1 queda destruída por la reacción del apoyo y la P_2 se transmite a la palanca $b\,c$ por intermedio de la varilla $E\,b$, como la componente P'' se ejerce en a por medio de la varilla $B\,a$.

El equilibrio de la palanca $b\,c$ tiene lugar por la acción de las fuerzas P'', P_2 y p, verificando la ecuación

$$P''\,.\,o\,a + P_2\,.\,o\,b = p\,.\,o\,c,$$

de la que se deduce

$$P\,\frac{l}{l'+l}\,.\,o\,a + P\,\frac{l'}{l'+l}\,.\,\frac{D\,C}{D\,E}\,.\,o\,b = p\,.\,o\,c;$$

pero $\frac{D\,C}{D\,E}\,.\,o\,b = o\,a$, luego $P\,.\,o\,a\left(\frac{l+l'}{l+l'}\right) = p\,.\,o\,c$, o lo

que es lo mismo $P \,.\, o\,a = p \,.\, o\,c$, es decir, que *el peso colocado de cualquier modo en el tablero, actúa sobre la palanca b c lo mismo que si se suspendiera del punto a.*

La evaluación del peso P queda reducida a saber la relación de $o\,c$ y $o\,a$; si, por ejemplo, $\frac{o\,a}{o\,c} = \frac{1}{10}$ cada pesa colocada en el platillo representará un peso diez veces mayor colocado en el tablero.

Las básculas modernas tienen graduada la palanca $o\,c$ y llevan un pilón p_1, que se corre a derecha e izquierda, para conseguir la horizontalidad de $b\,c$, y por la graduación que señala su índice, se deduce el valor del peso P.

Para no aumentar excesivamente la longitud de dicha palanca y ampliar el alcance del aparato, llevan también el platillo c, para colocar en él una pesa adicional, y es claro que según sea el peso de esta última, el de *entrada* de la graduación será más o menos grande, y se hará llegar el alcance de las pesadas hasta el límite que permitan las condiciones de resistencia de la báscula.

603. Puentes básculas.—Cuando se trata de grandes pesos, como es frecuente en fábricas y estaciones importantes de ferrocarriles, se suele dar a las básculas otra disposición, cuyo esquema representa la figura 342; consta de las cuatro palancas AE, BE, CF y DF, que se apoyan por uno de sus extremos en los puntos fijos A, B, C y D, y reunidas de dos en dos descansan el otro extremo sobre la barra EF, que a su vez se apoya sobre la palanca $o\,M$, giratoria alrededor de o y articulada en M a la varilla vertical que, directamente o por intermedio de otro juego de palancas, transmite la acción de las anterio-

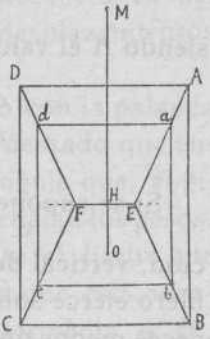


Fig. 342

res a la romana o cuadrante indicador del valor de las pesadas.

El tablero se apoya sobre las cuatro primeras palancas en los puntos a, b, c y d, y fácil es ver que al colocar un peso sobre él, por la simetría del sistema constituído, los cuatro puntos a, b, c y d, descienden por igual y el tablero se mantiene horizontal; vamos a demostrar ahora que la acción vertical en el punto M de la palanca oM, es independiente de la colocación del peso sobre el tablero.

En efecto, sean P_1, P_2, P_3 y P_4 las acciones que en los puntos de apoyo a, b, c y d produce el peso P, en una situación cualquiera; la parte de P_1 que se transmite a E es $p_1 = \frac{a\,A}{a\,E}$, la de P_2 es $p_2 = P_2 \frac{b\,B}{B\,E}$, lo mismo actuarán sobre F

$$p_3 = P_3 \frac{c\,C}{C\,F} \quad \text{y} \quad p_4 = P_4 \frac{d\,D}{D\,F};$$

las cuatro componentes p_1, p_2, p_3 y p_4 son verticales y sumadas en H dan, para la presión en este punto,

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = K\,P,$$

siendo K el valor común de las relaciones

$$\frac{a\,A}{A\,E} = \frac{b\,B}{B\,E} = \frac{c\,C}{C\,F} = \frac{d\,D}{D\,F}.$$

Si se supone $K = \frac{1}{10}$ y $\frac{o\,H}{o\,M} = \frac{1}{5}$ se deduce que la tracción, vertical descendente, que el peso colocado en el tablero ejerce sobre la varilla que se articula en M, será *50* veces menor que dicho peso; esta proporción puede aumentarse cuanto se quiera por medio de palancas intermedias.

La evaluación de los pesos en estos aparatos llamados *puentes básculas*, puede hacerse, como en las básculas ordinarias, por medio de la romana y platillo de pesas auxi-

liares; pero es más cómoda la disposición consistente en enlazar la varilla articulada en el punto M con una palanca especial que, actuando sobre una aguja giratoria alrededor de un eje, hace señalar a ésta, en las divisiones de un círculo graduado, el valor del peso colocado sobre el tablero.

La figura 343 representa una de las disposiciones empleadas con el indicado objeto; la palanca $A\,B$ recibe en su extremo A, por medio de una cinta metálica, la acción p, que el peso colocado en el tablero ejercía en el punto M de la figura 342; el extremo B de la palanca anterior (fig. 343) está recurvado, a partir de C, calculándose el perfil de este brazo con la condición de que la distancia del punto o a la línea de acción del contrapeso Q, suspendido por otra cinta metálica del brazo $o\,B$, varíe proporcionalmente a los desplazamientos angulares de la palanca $A\,B$ (*).

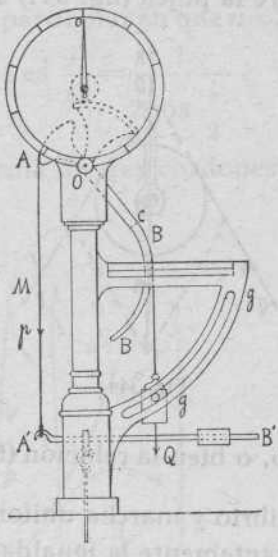


Fig. 343

En el punto o y formando ángulo recto con la palanca $A\,B$, lleva ésta un apéndice con un sector dentado que engrana en una rueda, cuyo eje sostiene una aguja que, al girar, recorre un círculo graduado, donde se señalan los pesos.

El alcance del aparato se aumenta, hasta el límite que permita la resistencia de los materiales de que está construído, con la colocación de la palanca intermedia $A'\,B'$, cuyo pilón, corriéndose a uno u otro lado, hace variar el

(*) Para esto basta dar a la parte curva del brazo B la forma de una evolvente del círculo de radio $o\,C$.

peso de entrada, y, por consiguiente, el máximo que puede obtenerse con el puente-báscula.

604. Equilibrio de la polea.—Las fuerzas que obran sobre la polea (fig. 344) son la potencia P, la resistencia Q y la reacción R en el eje, siendo preciso para el equilibrio que estén en un plano y que R pase por el punto de concurso de las otras dos (**66-3.ª**). Esto último nos dice que la armadura de la polea, si no tiene enlace que se lo impida, tomará siempre la dirección de la bisectriz del ángulo que forman la potencia y la resistencia.

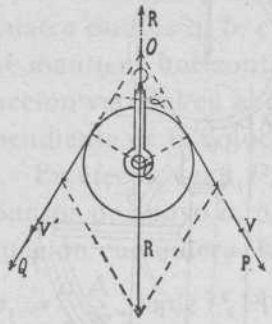


Fig. 344

Los momentos respecto al punto o, o bien la relación (**584**) $\frac{P}{Q}=\frac{v'}{v}$, indican que, en el equilibrio y marcha uniforme de una polea, se verifica constantemente la igualdad $P=Q$, y en cuanto a la acción sobre el eje de apoyo y punto de suspensión, estará dada por la fórmula $R=2\,P\cos\frac{\alpha}{2}$, que se reduce a $R=2\,P$ cuando los cordones de la polea sean paralelos.

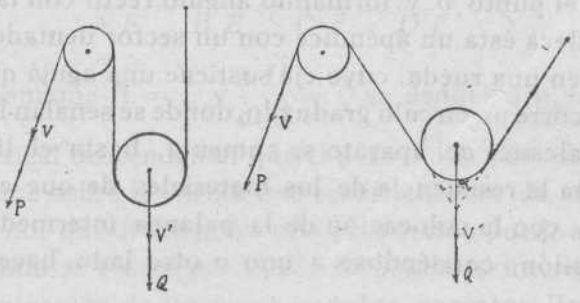


Fig. 345

605. Tróculas y motones.—Suponiendo que en estos

mecanismos se disponen los cordones sensiblemente paralelos, se verifica la conocida relación cinemática **(330)** $v = v' \cdot n$, de donde se deduce $\frac{P}{Q} = \frac{1}{n}$.

La polea móvil (fig. 345) es un caso particular en que $n = 2$; cuando los cordones no son paralelos es $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

En el caso de la figura 346 (trócula de tres cordones), es $n = 3$ y $\frac{P}{Q} = \frac{1}{3}$.

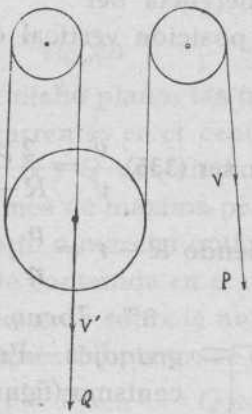


Fig. 346

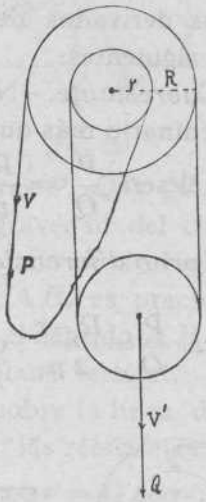


Fig. 347

606. Polea diferencial.—La relación de velocidades en este mecanismo (fig. 347) es **(331)** $\frac{v}{v'} = \frac{2R}{R-r}$, y $\frac{P}{Q} = \frac{R-r}{2R}$.

Si $R - r$ es una fracción determinada de R, $R - r = \frac{R}{n}$, la ecuación de equilibrio se convierte en $\frac{P}{Q} = \frac{1}{2n}$.

607. Equilibrio del torno.—La relación de velocidades

es en este mecanismo (fig. 348) (**334**) $\frac{v}{v'}=\frac{p}{R}$, y la de potencia a resistencia será $\frac{P}{Q}=\frac{R}{p}$, que se podría obtener directamente igualando los momentos de P y Q respecto al punto O. Las presiones del torno sobre sus dos puntos de apoyo se calcularán como se dijo al tratar del movimiento de un sólido con dos puntos fijos (**538** y **541**).

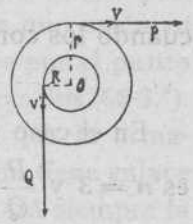


Fig. 348

608. Variedades del torno.—Como mecanismos derivados del torno examinaremos los siguientes:

1.° *Cabrestante.*—No se diferencia del torno ordinario más que en la posición vertical del cilindro; en él será $\frac{P}{Q}=\frac{R}{p}$.

2.° *Torno diferencial.*—Por ser (**335**) $\frac{v}{v'}=\frac{2p}{R-r}$ (figura 349) será $\frac{P}{Q}=\frac{R-r}{2p}$, o bien siendo $R-r=\frac{p}{n}$, $\frac{P}{Q}=\frac{1}{2n}$.

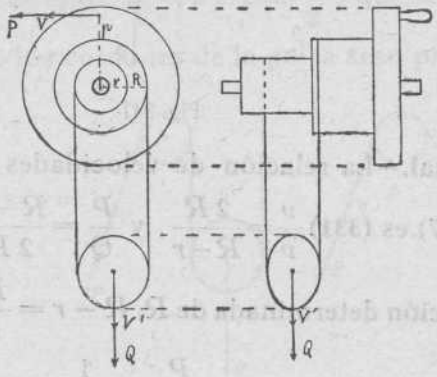


Fig. 349

3.° *Torno con engranajes.*—En este mecanismo (figura 350) es (**346**) $\frac{v}{v'}=\frac{pR'}{Rr}$, y, por consiguiente, $\frac{P}{Q}=\frac{Rr}{pR'}$.

609. Plano inclinado.—El plano inclinado desempeña el papel de una máquina cuando se emplea en auxiliar la subida o descenso de un cuerpo entre

dos puntos que tengan una diferencia de nivel determinada. Supongamos unidos estos puntos por el plano $A\,B$ (figura 351) y consideremos una posición cualquiera del peso Q, que se quiere elevar siguiendo la línea de máxima pen-

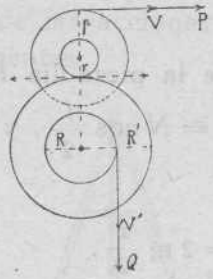


Fig. 350

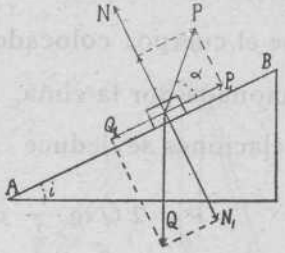


Fig. 351

diente de dicho plano; las tres fuerzas P, Q y N se suponen concurrentes en el centro de gravedad del cuerpo, y por estar N y Q contenidas en el plano vertical que determina la línea de máxima pendiente $A\,B$, es preciso, para el equilibrio o marcha uniforme en el sentido $A\,B$ o $B\,A$, que P esté contenida en el mismo plano vertical.

Proyectando sobre la normal y sobre la línea de máxima pendiente del plano, se obtienen las relaciones

$$N + P \operatorname{sen} \alpha = Q \cos i,\ P \cos \alpha = Q \operatorname{sen} i;$$

de la segunda se deduce la conveniencia de disminuir el ángulo α para el mejor aprovechamiento de la potencia; reduciéndolo a cero se verifica $\frac{P}{Q} = \operatorname{sen} i$ y la reacción del plano se hace independiente de P, puesto que se convierte en $N = Q \cos i$.

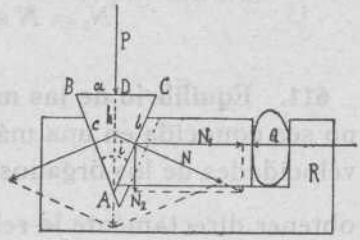


Fig. 352

610. Prensa de cuña.—Como mecanismo derivado del plano inclinado estudiaremos la prensa de cuña, representada en la figura 352; el esfuerzo motor P obra en la *cabeza* $B\,C$ de la cuña, la acción normal N que se ejerce sobre las caras $A\,B$ y $A\,C$ es $N = \dfrac{P}{2 \operatorname{sen} \dfrac{i}{2}}$, la presión $N_1 = Q$, que recibe el cuerpo, colocado entre la pieza fija R y la móvil accionada por la cuña, es $N_1 = N \cos \dfrac{i}{2}$, y de estas dos relaciones se deduce

$$P = 2\,Q \operatorname{tg} \frac{i}{2} \quad \text{o} \quad \frac{P}{Q} = 2 \operatorname{tg} \frac{i}{2}.$$

Llamando h la altura $A\,D$ de la cuña y $a = B\,C$ la anchura de la cabeza, se puede poner la relación obtenida en la forma $\dfrac{P}{Q} = 2\,\dfrac{\dfrac{a}{2}}{h} = \dfrac{a}{h}$.

Lo mismo en una que en otra forma, se ve la conveniencia de disminuir a y aumentar h para favorecer la acción de la potencia.

La pieza móvil ejerce, sobre su asiento, una presión normal representada por la componente vertical de N

$$N_2 = N \operatorname{sen} \frac{i}{2} = \frac{P}{2}.$$

611. Equilibrio de las máquinas compuestas.—Cuando no sea conocida en una máquina compuesta la relación de velocidades de los órganos receptor y operador y se quiera obtener directamente la relación $\dfrac{P}{Q}$, se descompone el mecanismo total en una serie de otros mecanismos sencillos en los que será fácil, en general, determinar la relación de

los esfuerzos que en el equilibrio y marcha normal se ejercen en las piezas conductora y conducida, y como estos esfuerzos son, a excepción de la potencia inicial y de la resistencia final, iguales de dos en dos, se obtendrá, por una sencilla multiplicación, una relación entre P y Q, independiente de las acciones y reacciones de los mecanismos componentes.

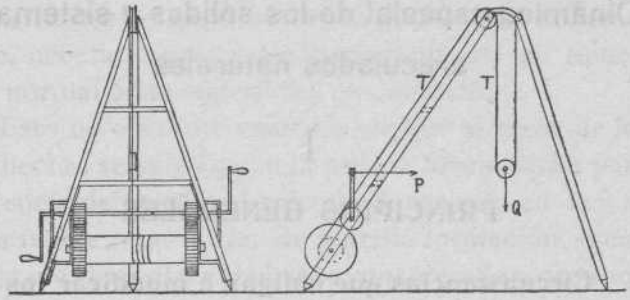


Fig. 353

Como ejemplo de este modo de proceder, consideraremos la *cabria* representada por la figura 353; está compuesta, como máquina, de un torno con engranaje y de una polea móvil, de cuya armadura se supende el peso Q que se quiere elevar; el equilibrio del torno nos da la relación $\frac{P}{T} = \frac{Rr}{pR'}$, el de la polea $\frac{T}{Q} = \frac{1}{2}$, y, por último, $\frac{P}{Q} = \frac{Rr}{2pR'}$.

CAPITULO SEPTIMO

Dinámica especial de los sólidos y sistemas articulados naturales

I

PRINCIPIOS GENERALES

612. Circunstancias que obligan a modificar los resultados teóricos anteriores, en el movimiento y equilibrio de los sólidos naturales. – En los dos últimos capítulos, al estudiar el movimiento y equilibrio de los sólidos y sistemas articulados, se ha prescindido de la *resistencia del medio* en que dichos movimientos tienen lugar, y se ha supuesto invariablemente que las fuerzas de enlace, que intervenían en los movimientos de esta naturaleza, eran siempre normales a las líneas o superficies sobre las que se obligaba a permanecer a los puntos móviles.

En realidad, la primera circunstancia se puede suponer incluída en las ecuaciones generales establecidas, pues la acción que la resistencia del medio opone a la marcha de un cuerpo cualquiera, es una fuerza retardatriz que, salvo la expresión más o menos complicada de su valor, puede hacerse intervenir en los cálculos, sin modificar la estructura de las ecuaciones fundamentales, puesto que nada impide que los símbolos X, Y, Z, representativos de las fuerzas aplicadas al cuerpo en movimiento, comprendan,

como sumando especial, las proyecciones de dicha resistencia.

Pero no ocurre lo mismo con la hipótesis hecha sobre la dirección de las fuerzas de enlace, puesto que *admitiendo la ausencia de rozamientos,* se convino en atribuirles la dirección normal ya expresada, y sucediendo en la práctica que siempre que se establece el contacto de dos cuerpos cualesquiera, se ponen de manifiesto los efectos del rozamiento entre los mismos, se deduce que la fuerza de enlace, necesaria para mantenerlos unidos, no tiene por qué ser normal a las superficies en contacto.

Esto no obstante vamos a ver que el error de la hipótesis hecha, se subsana en la misma forma dicha para la resistencia del medio, haciendo intervenir en las fórmulas otra fuerza retardatriz, de sencilla formación, que combinada con los enlaces teóricos considerados, produce y hace intervenir en los problemas mecánicos la verdadera fuerza de enlace, justificándose con esto la adopción de la hipótesis hecha, que, aunque errónea, ha producido la ventaja de estudiar con más facilidad las teorías anteriores, permitiendo prescindir de las complicaciones, inútiles en muchos casos, que traería consigo la intervención de los rozamientos en todas las cuestiones resueltas.

Del mismo modo se ha supuesto en los mecanismos en que intervenían órganos flexibles como cuerdas, correas, etc., que la flexibilidad de éstos era perfecta, y que, sin esfuerzo alguno, se adaptaban a la llanta de las poleas o cilindros donde se arrollaban; pero en la práctica no es esto cierto; y la falta de flexibilidad de tales órganos constituye otra resistencia pasiva, cuya intervención en los problemas mecánicos puede ser de consideración y se precisa estudiarla para ver la forma de expresar analíticamente su influencia en dichos problemas.

Otro detalle que es necesario tener en cuenta en el mo-

vimiento y equilibrio de los sólidos naturales, es el referente a las deformaciones que experimentan bajo la acción de las fuerzas que se le aplican; pero este asunto, relacionado con la teoría de la resistencia de materiales, se estudia, en lo que al Ingeniero puede interesar, en la Mecánica aplicada a las construcciones.

613. Rozamiento resbalando.—Supongamos un cuerpo $A\,B$ de forma rectangular y peso Q apoyado sobre otro $S\,S'$ de superficie horizontal (fig. 354); no actuando sobre $A\,B$ más que su peso y la reacción N del apoyo, es eviden-

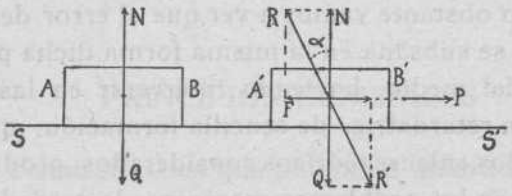


Fig. 354

te que esta última será igual y directamente opuesta al peso Q, cumpliéndose teórica y prácticamente la normalidad de la fuerza de enlace respecto a las superficies en contacto; pero imaginemos al mismo cuerpo (posición $A'\,B'$), sometido a la acción de su peso y a la de una pequeña fuerza P, que supondremos horizontal; teóricamente el cuerpo tendría que ponerse en movimiento bajo la acción de P, pero la experiencia demuestra que es necesario dar a esta fuerza un valor determinado para que el movimiento tenga lugar, y este hecho pone de manifiesto la oblicuidad de la reacción $[R]$ respecto a las superficies en contacto, puesto que ha de ser, en cada instante, igual y directamente opuesta a la resultante de $[P]$ y $[Q]$.

Descomponiendo a $[R]$ en la dirección normal y tangencial a las superficies en contacto, se ve que la componente normal $[N]$ es constantemente igual a la presión nor-

mal [Q], que entre dichas superficies se ejerce, y que este valor de [N] es el mismo que se ha considerado como fuerza de enlace, cuando no se tenía en cuenta el rozamiento, luego el conocimiento de [R], tal como se presenta en la práctica, se conseguirá con la determinación de la componente tangencial [F], que constituye la llamada *fuerza de rozamiento resbalando*. La combinación de esta fuerza con la de los enlaces teóricos, que hasta ahora hemos considerado en los resbalamientos sobre líneas y superficies, restablecerá el carácter práctico de las fórmulas encontradas, produciendo resultados de aplicación, que estarán en consonancia con los hechos experimentales a que dichas fórmulas se refieran.

Físicamente se explica la presencia de esta fuerza en el contacto con dos cuerpos cualesquiera, por el engranaje que se establece entre los entrantes y salientes que los poros y asperezas de los cuerpos forman en su superficie, y de aquí que, entre dos cuerpos cualesquiera, la expresada fuerza tenga valores decrecientes, cuanto mayor sea el estado de pulimento que presenten las superficies en contacto, y se explica la acción de las substancias *lubricantes* por el relleno que forman de dichas sinuosidades, disminuyendo los efectos del referido engranaje.

614. Angulo y coeficiente de rozamiento resbalando.— Volviendo a la figura 354, se ve que la fuerza de enlace [R] forma con la normal a las superficies en contacto un ángulo α, que depende del valor de la fuerza P, que se emplee para provocar el movimiento del cuerpo $A'B'$ y de la presión normal que entre el mismo y la superficie de apoyo se establezca; aumentando progresivamente la fuerza P, en un caso cualquiera, el ángulo α va aumentando hasta adquirir un cierto valor cuando se inicia el movimiento.

Las experiencias, fáciles de repetir, realizadas por *Coulomb* y *Morin*, pusieron de manifiesto que para dos cuer-

pos en contacto, de naturaleza determinada, el valor adquirido por el ángulo α, en el instante de iniciarse el movimiento, era siempre el mismo, cualesquiera que fueran la extensión de las superficies en contacto y la presión normal entre dichas superficies.

El valor límite que para cada dos cuerpos dados, tiene el ángulo α, se llama *ángulo de rozamiento* correspondiente a dichos cuerpos, y a la tangente de este ángulo, $f = \text{tg}\,\alpha$, se da el nombre de *coeficiente de rozamiento* de los mismos, sobreentendiéndose, cuando a este coeficiente no se le de ningún calificativo, que se refiere al rozamiento resbalando, de que ahora nos estamos ocupando.

En algunas aplicaciones suele figurar el ángulo de rozamiento por su *seno*, y, para distinguirle del verdadero coeficiente de rozamiento, le llamaremos coeficiente *modificado*, representándolo por $f_1 = \text{sen}\,\alpha$.

615. Tablas de coeficientes de rozamiento.—Repitiendo las experiencias de Coulomb y Morin, se pueden formar las *tablas* de coeficientes de rozamiento, donde se consignan los valores de α, f y f_1, correspondientes a los cuerpos cuyo contacto tiene lugar en los movimientos de aplicación práctica.

En estas tablas se suelen establecer varias divisiones o columnas, que expresan los valores de dichos datos, según el estado especial de las superficies en contacto, dentro de cada par de cuerpos considerados (*). En lo sucesivo supondremos conocidos los valores de α, f y f_1 que intervengan en nuestros cálculos, mediante el empleo de las re-

(*) El valor de α, y por consiguiente los de f y f_1 varían, dentro de cada par de cuerpos, con el estado de pulimento, lubricación, humedad y tiempo de permanencia en el contacto antes de producir el movimiento. Este último dato ejerce una influencia sumamente variable en el valor de α, y por este motivo los resultados de las experiencias se refieren a contactos de pequeña duración entre los cuerpos y para estos casos sólamente serán aceptables con garantías de exactitud.

feridas tablas, que figuran en los manuales del Ingeniero.

616. Expresión analítica del rozamiento resbalando.— La componente tangencial $[F]$ de la fuerza de enlace en el equilibrio de un cuerpo apoyado sobre una superficie, constituye, como hemos dicho, la fuerza de rozamiento que impide el movimiento del cuerpo, en tanto que la componente tangencial de las fuerzas aplicadas no adquiera valores que hagan llegar al ángulo α a su valor límite.

En una posición cualquiera de equilibrio está expresado el valor de $[F]$ (fig. 354) por la fórmula $F = N \operatorname{tg} \alpha$, siendo N la componente normal de las fuerzas aplicadas y α el ángulo variable que la reacción del apoyo forma con la normal. En cada caso el equilibrio subsistirá hasta que α llegue a su valor máximo, o sea hasta que la componente tangencial P de las fuerzas aplicadas llegue a tomar el valor $P = fN$, igual a la máxima resistencia que el rozamiento puede oponer al movimiento.

Algunas veces conviene expresar el valor máximo del rozamiento en función de la reacción total $[R]$ y en estos casos interviene el coeficiente modificado $f_1 = \operatorname{sen} \alpha$, siendo $F = f_1 R$, y cuando, como en el caso de la figura 354, las dos fuerzas aplicadas son rectangulares, será $F = f_1 \sqrt{P^2 + Q^2}$.

617. Observación.—En los razonamientos y experiencias a que nos hemos referido en los párrafos anteriores, se ha supuesto que las fuerzas aplicadas daban lugar a reacciones que cortaran a la superficie de apoyo dentro de la base de sustentación, pues de no ocurrir así, se produciría la rotación del cuerpo alrededor de alguna de las aristas de apoyo y no tendrían lugar los resbalamientos supuestos.

618. Rozamiento resbalando sobre la marcha.—Cuando el movimiento de traslación de un cuerpo es rectilíneo y uniforme, las fuerzas aplicadas al mismo están en equilibrio, y si de estas fuerzas permanecen constantes en mag-

nitud y dirección todas, menos una, puede asegurarse que esta última también satisfará la misma condición, pues de lo contrario el equilibrio no se realizaría; esta consideración permite demostrar experimentalmente, como lo hicieron Coulomb y Morin, que el ángulo de rozamiento, en el resbalamiento de un cuerpo sobre otro, permanece invariable durante el movimiento, siendo el valor que adquiere en cada caso independiente de la velocidad (*) y siempre algo menor que el ángulo de rozamiento de partida.

Esta última circunstancia obliga a consignar, en las tablas completas de coeficientes de rozamiento, los valores de α, f y f_1 que corresponden durante la marcha, con separación de los que corresponden en la partida, que se utilizarán para los problemas de equilibrio.

619. Resumen sobre las leyes del rozamiento resbalando.—Resumiendo las condiciones principales que fijan el valor del rozamiento resbalando, estableceremos los siguientes enunciados:

1.° *El rozamiento resbalando entre dos cuerpos cualesquiera es doblemente específico;* es decir, depende de la naturaleza y condiciones físicas de los dos cuerpos en contacto.

2.° *Es proporcional a la presión normal entre las superficies en contacto,* puesto que su expresión es $F = f N$.

3.° *Es independiente de la extensión de las superficies en contacto,* siempre que la presión no llegue a límites que produzcan la penetración del móvil en la superficie de apoyo.

4.° *Durante la marcha permanece constante, con un valor algo menor que el que corresponde a la partida e independiente de la velocidad.*

(*) Esta condición es sólo exacta para velocidades cuyo valor no pase de ciertos límites; en las grandes velocidades disminuye algo el ángulo α, y se explica que así suceda por la falta de tiempo, que la rapidez del móvil ocasiona, para establecer el engranaje productor de la fuerza de rozamiento.

620. Rozamiento rodando.—Si se supone un cilindro $A\,B$, de radio r, apoyado por su arista inferior sobre un plano horizontal $S\,S'$ (fig. 355) y no sometido a más fuerzas que su peso Q y la reacción del apoyo N, se verificará teórica y prácticamente el equilibrio de dichas fuerzas cuando la vertical del centro de gravedad corte a la arista de apoyo, y la fuerza de enlace N será normal a la superficie $S\,S'$; si en estas condiciones aplicamos al cilindro (posición $A'\,B'$) una pequeña fuerza tangencial P (vertical para más facilidad), se observa que hasta que esta fuerza no adquiere un valor determinado, no se inicia la rodadura del cilindro, presentando ésta cierta resistencia al movimiento, que teóricamente debiera producirse, por pequeño que fuera el valor de P.

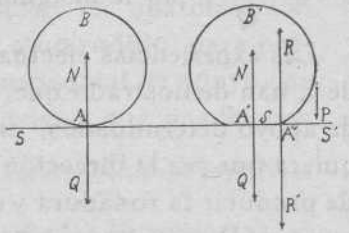


Fig. 355

Esta resistencia se explica observando que la presión de los cuerpos en contacto produce una ligera deformación que ensancha la extensión del apoyo, sustituyendo la arista teórica, considerada antes, por una zona de más o menos anchura, y esto da lugar a que el movimiento no se inicie hasta que la resultante de P y Q llegue al borde A'' de dicha zona de apoyo (*).

621. Coeficiente de rozamiento rodando.—La distancia $\delta = A'\,A''$ que existe entre la arista teórica de apoyo y la que forma el límite del contacto mecánico, por donde pasa la reacción al iniciarse la rodadura, se llama *coeficiente de rozamiento rodando;* su valor se podrá deducir de la ecuación de momentos, respecto al punto A', de las fuerzas R,

(*) En realidad la rodadura tiene lugar antes de llegar R al borde de la zona de apoyo; esto no obstante consideraremos a A'' como límite del *contacto mecánico,* aun cuando el *contacto físico* tenga lugar en mayor extensión.

Q y P (que se suponen en equilibrio en el instante anterior al movimiento) y es $Pr - R\delta = 0$, de donde $\delta = \frac{Pr}{Q+P}$ o $\delta = \frac{Pr}{Q}$, por la insignificancia de P comparado con Q.

Las experiencias efectuadas, para determinar los valores de δ, han demostrado que, para un rodillo y una superficie de apoyo determinados, el valor de δ es constante cualquiera que sea la dirección de la fuerza tangencial P, capaz de producir la rodadura y conserva también el mismo valor aunque P se aplique horizontalmente a cualquier punto del rodillo.

Cambiando el radio del rodillo, sin variar las demás circunstancias, se observa que δ crece proporcionalmente a la raiz cúbica de dicho radio (*) y para tener en cuenta la anchura b de la llanta, se hace uso de la *fórmula de Gertsner* $\delta = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\frac{3Qr}{\mu b}}$, siendo μ un coeficiente práctico, dependiente de la naturaleza de las superficies en contacto.

622. Tablas de coeficientes de rozamiento rodando.— Del mismo modo que para los coeficientes de rozamiento resbalando, se construyen tablas de coeficientes de rozamiento rodando, correspondientes a ruedas de distintos materiales sobre apoyos de variada naturaleza, debiendo tenerse en cuenta para las aplicaciones, la anchura de llanta y radio de los rodillos a que se refieran las tablas, para introducir en cada caso las correcciones explicadas.

623. Rozamiento rodando durante la marcha.—La experiencia demuestra que, durante la marcha, permanece

(*) Coulomb y Morin creyeron que δ era independiente del radio de los rodillos; Dupuit fué el primero que observó la contradicción a que daba lugar el principio de los anteriores experimentadores, comprobando la proporcionalidad aproximada con la raiz cuadrada de dicho radio y estableció una tabla de valores de c correspondientes a la fórmula $\delta = c\sqrt{r}$. Es más exacto suponer, con Gertsner, la proporcionalidad con la raiz cúbica de r.

constante el coeficiente δ, con un valor ligeramente inferior al de partida, e independiente de la velocidad, como se expresó para el rozamiento resbalando.

624. Expresión analítica de la resistencia a la rodadura.—La fuerza que es necesario aplicar, en una dirección cualquiera dentro del plano normal a un rodillo, para producir su rodadura sobre el plano horizontal de apoyo, se determina, en el caso de las experiencias a que nos hemos referido, por la fórmula $P = N\frac{\delta}{r}$, representando por N la presión normal $P + Q$ que en las citadas experiencias se ejercía sobre la arista de apoyo.

Esta fórmula es general si se tiene en cuenta que r interviene en ella como brazo del momento de P respecto a la arista de giro; en efecto, aplicando los razonamientos anteriores al caso de la figura 356, en la que se supone a la fuerza P obrando en sentido horizontal y a una altura h del suelo, tendremos que, en el instante de iniciarse el movimiento, pasa por A' la resultante de P y Q, el apoyo devuelve la reacción $[R]$ y el equilibrio exige, formando la ecuación de momentos respecto al punto A, que sea $Ph - N\delta = 0$, de donde $P = N\frac{\delta}{h}$. En este caso es $N = Q$, y si la fuerza P pasara por el centro de la rueda, sería $h = r$.

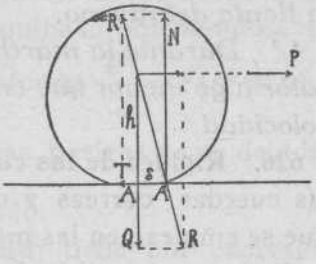


Fig. 356

De las fórmulas establecidas se deduce que la fuerza P no influye, en el movimiento de rodadura que produce, por su valor modular, sino por su momento Ph respecto a la arista de giro, y de aquí que este momento, $Ph = N\delta$, se utilice para expresar la *resistencia a la rodadura* de un ci-

lindro, constituyendo un sumando opuesto al movimiento, que deberá figurar en las ecuaciones de equilibrio y movimiento del cilindro considerado.

625. Resumen sobre las leyes del rozamiento rodando.—Resumiendo los principios establecidos sobre las condiciones en que se presenta la *resistencia a la rodadura* de un cilindro sobre un plano, consignaremos los siguientes enunciados:

1.° *La resistencia a la rodadura de un cilindro sobre un plano es doblemente específica.*

2.° *Es proporcional a la presión normal en la arista de apoyo.*

3.° *Es proporcional a la raiz cúbica del radio del cilindro e inversamente proporcional a la de la anchura de la llanta del mismo.*

4.° *Durante la marcha permanece constante, con un valor algo menor que en la partida e independiente de la velocidad.*

626. Rigidez de las cuerdas.—La falta de flexibilidad de las cuerdas, correas y demás órganos de esta naturaleza que se emplean en las máquinas, para transmitir esfuerzos en la forma ya estudiada, da lugar a que haya que emplear, en dichas transmisiones, un esfuerzo suplementario llamado *resistencia debida a la rigidez* de las cuerdas.

Esta resistencia es función de la tensión de la cuerda y del radio del cilindro, expresándose por la fórmula empírica $p = \frac{m + n\,Q}{r}$, en la que Q es la tensión de la cuerda en el ramal resistente, r el radio del cilindro y m y n dos coeficientes experimentales, cuyos valores se consignan en las tablas de los manuales del Ingeniero.

II

APLICACIONES

627. Expresión del rendimiento de una máquina en función de los coeficientes de rozamiento.—Teniendo en cuenta las fuerzas resistentes que los rozamientos producen en el movimiento de una máquina y conociendo la expresión analítica de estas fuerzas, por las fórmulas expuestas, se podrá establecer en un mecanismo cualquiera, la relación entre el esfuerzo motor P y la resistencia útil Q, en la forma que se indicó al tratar del equilibrio de los sistemas articulados constituídos por las máquinas, obteniéndose en todos los casos una relación de la forma $\frac{P}{Q} = F(f^{\delta}\, m\, n)$, o $\frac{P}{Q} = F(f)$ cuando las resistencias pasivas sean debidas sólamente a rozamientos resbalando.

Por otra parte, el rendimiento tiene por expresión $R = \frac{Q}{P} \cdot \frac{v'}{v}$ **(584)** y, si no existieran rozamientos, sería

$$R = 1 \quad \text{y} \quad \frac{v'}{v} = \frac{P}{Q} = F(o);$$

pero la relación $\frac{v'}{v}$ es independiente de las resistencias pasivas, por no depender más que de la organización cinemática del mecanismo, luego será $\frac{v'}{v} = F(o)$ aun cuando se admita la existencia de los rozamientos; esta consideración conduce a las fórmulas del rendimiento

$$R = \frac{Q}{P} \cdot \frac{v'}{v} = \frac{F(o)}{F(f\,\delta\,m\,n)}, \quad \text{o} \quad R = \frac{F(o)}{F(f)},$$

fáciles de traducir en regla práctica.

628. Equilibrio de un cuerpo sobre un plano inclinado.—Sea el sólido $A\,B$ colocado sobre el plano inclinado $C\,D$ (fig. 357); si no existiera el rozamiento, el cuerpo resbalaría, siguiendo la línea de máxima pendiente, por la acción de su peso y de la reacción normal N; pero la fuerza $F = \text{tg}\,\alpha\,N$ hace posible el reposo del cuerpo, en la posición supuesta, siempre que la resultante de $[Q]$ y $[N]$ no exceda del valor máximo de F que es $f\,N$.

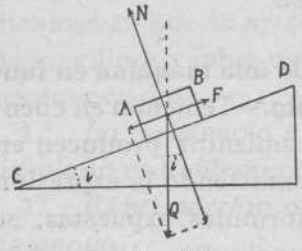


Fig. 357

Las ecuaciones de proyección sobre N y $C\,D$ indican que $N = Q \cos i$ y $F = Q \text{ sen } i$, luego la condición impuesta para el equilibrio equivale a suponer que sea

$$Q \text{ sen } i \leqq f\,N = f\,Q \cos i$$

o bien $\text{tg}\,i \leqq f = \text{tg}\,\alpha$, es decir, que *un cuerpo apoyado sobre un plano inclinado, sometido a la acción de su peso, permanece en reposo cuando el ángulo de pendiente del plano no excede al de rozamiento de las dos superficies en contacto* (*).

Como en el instante de exceder el ángulo i al de rozamiento, se inicia el movimiento, puede utilizarse esta propiedad para determinar muy fácilmente ángulos y coeficientes de rozamiento entre diversos cuerpos.

Si la pendiente del plano es mayor que la correspon-

(*) Se supone que el cuerpo tiene suficiente base para que la vertical del centro de gravedad pase por dentro de ella y no se produzca la rodadura del mismo.

diente al ángulo α, es preciso aplicar una fuerza tangencial P que, sumada con el rozamiento, contrarreste el efecto de la componente del peso, Q sen i; el valor de P será

$$P = Q \text{ sen } i - f N = Q \text{ (sen } i - f \cos i).$$

Si la fuerza aplicada, en el sentido expresado, se aumenta para iniciar la subida del cuerpo, la de rozamiento se invierte y exige que dicha fuerza tenga el valor

$$P' = Q \text{ sen } i + f N = Q \text{ (sen } i + f \cos i),$$

siendo la diferencia que existe entre la fuerza necesaria para iniciar la subida y la estrictamente precisa para contener la bajada

$$P' - P = 2 f N = 2 f Q \cos i.$$

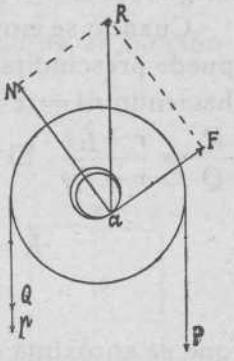


Fig. 358

629. Equilibrio de una polea.—Las fuerzas que obran sobre la polea (figura 358) son la potencia P, la resistencia útil Q, la debida a la rigidez $p = \dfrac{m + n\,Q}{r}$ y la reacción $[R] \equiv [P] + [Q]$ aplicada en el punto a, donde se apoya el eje de la polea sobre el cojinete de su armadura; esta última fuerza puede sustituirse por sus dos componentes N y $F = f_1 R$.

La ecuación de momentos con relación al punto o, nos da la relación

$$P r = Q r + p r + F \rho,$$

siendo ρ el radio del eje de la polea; substituyendo valores se obtiene

$$P r = Q r + \frac{m + n\,Q}{r} r + f_1 (P + Q) \rho,$$

o $$\frac{P}{Q} = \frac{r + f_1 \rho + n + \frac{m}{Q}}{r - f_1 \rho},$$

que nos dice que la relación entre la potencia y la resistencia es mayor que la unidad, pero se aproxima a este valor cuando aumenta Q o disminuyen los coeficientes de rozamiento y rigidez.

También se ve la conveniencia de dar al radio ρ el valor estrictamente preciso para resistir las cargas que la polea debe sostener, así como la conveniencia de emplear poleas de gran radio.

Cuando se emplean cuerdas secas de pequeño diámetro, puede prescindirse de la resistencia debida a la rigidez, y haciendo $m = n = o$ en la ecuación encontrada, se obtiene $\frac{P}{Q} = \frac{r + f_1 \rho}{r - f_1 \rho}$. El rendimiento de la polea es en estos casos

$$R = \frac{F(o)}{F(f_1)} = \frac{1}{\frac{r + f_1 \rho}{r - f_1 \rho}} = \frac{r - f_1 \rho}{r + f_1 \rho},$$

que se aproxima a la unidad, creciendo, cuando decrecen f_1 y ρ o aumentando r.

630. Trabajo absorbido por el rozamiento del eje de una polea.—Para calcular el trabajo que absorbe el rozamiento del eje de la polea, en cada vuelta, basta recordar que, siendo esta fuerza tangencial a dicho eje y constante durante el movimiento, será **(383-3.ª)**

$$T_f = F \rho 2\pi = 2\pi \rho f_1 R,$$

y cuando los ramales sean paralelos,

$$T_f = 2\pi \rho f_1 (P + Q) = 4\pi f_1 \rho Q,$$

suponiendo, como puede hacerse para este cálculo, que $P + Q = 2Q$.

En los casos de no ser los ramales paralelos, se tendrá en cuenta que R es la diagonal del paralelogramo construído sobre P y Q.

631. Trabajo absorbido por el rozamiento de los muñones de un árbol o eje cualquiera en sus cojinetes. — Consideraremos separadamente los casos de ejes horizontales y ejes verticales.

1.° *Ejes horizontales.* — Están en el mismo caso que una polea y el trabajo absorbido por el rozamiento, en cada vuelta, será $T_f = F\,\rho\,2\,\pi$. El valor de F se calculará por las fórmulas $F = fN$ o $F = f_1 R$, previo el conocimiento de N o R, siendo $T_f = 2\,\pi\,f\,N\,\rho$ o $T_f = 2\,\pi\,f_1\,R\,\rho$.

La potencia que absorben estos rozamientos, en función del número n de vueltas por minuto, es

$$p = \frac{T_f\,n}{60} = \frac{2\,\pi\,\rho\,f\,N\,n}{60},$$

o, en caballos de vapor,

$$C_v = \frac{2\,\pi\,\rho\,f\,N\,n}{75.60} = 0{,}0014\,f\,\rho\,N\,n,$$

suponiendo expresadas en metros las medidas longitudinales y en kilogramos las de fuerza.

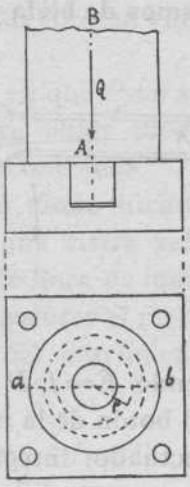


Fig. 359

2.° *Ejes verticales.* — Supongamos el eje $A\,B$ de la figura 359, apoyado en su rangua por la corona circular $a\,b$, cuyos radios, exterior e interior, son r y r'; la presión normal por unidad superficial en la base es $N = \dfrac{Q}{\pi(r^2 - r'^2)}$, y el rozamiento en cada corona infinitesimal, de anchura $(\rho + d\,\rho - \rho) = d\,\rho$, será **(616)**

$$dF = f\frac{Q}{\pi(r^2 - r'^2)}\,2\pi\rho\,d\rho = \frac{2fQ}{r^2 - r'^2}\,\rho\,d\rho\,,$$

y
$$dT_f = dF\,.\,\rho\,2\pi = \frac{4\pi fQ}{r^2 - r'^2}\,\rho^2\,d\rho$$

el trabajo desarrollado en cada vuelta por el rozamiento ejercido en una de las citadas coronas infinitesimales. El trabajo total será

$$T_f = \int_{r'}^{r} dT_f = \frac{4\pi fQ}{r^2 - r'^2}\cdot\left(\frac{\rho^3}{3}\right)_{r'}^{r} = \frac{4}{3}\pi fQ\frac{r^2 + r\,r' + r'^2}{r + r'}\,.$$

Cuando el apoyo sea circular es $r' = o$ y la fórmula anterior se reduce a $T_f = \frac{4}{3}\pi f Q r$.

632. Trabajo absorbido por el rozamiento en los mecanismos de biela y manivela.—Supondremos que el esfuerzo motor P (fig. 360) es constante en magnitud y dirección; el trabajo absorbido por el rozamiento en la articulación de la biela y la manivela, en un avance elemental del mecanismo, es $dT_f = F\,.\,\rho\,.\,d\theta$, siendo $F = f_1 P$ la fuerza de dicho rozamiento, ρ el radio del botón de la manivela y $d\theta$ el desplazamiento angular efectuado; integrando entre o y 2π, tendremos el trabajo absorbido en cada vuelta, que es $T_f = \int_o^{2\pi} F\rho\,d\theta = 2\pi f_1 P\rho$.

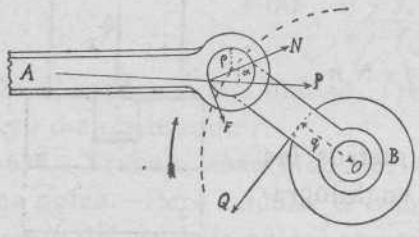


Fig. 360

La fórmula obtenida es la misma que corresponde al caso de rozamiento de un eje horizontal sobre sus cojine-

tes (631-1.°), y este resultado se podía prever observando que el trabajo calculado es el mismo que desarrollaría el rozamiento, suponiendo fija la cabeza de la biela y haciendo girar la manivela alrededor de su botón, con la presión oblicua P entre las superficies en contacto.

El trabajo del rozamiento en la articulación del pie de la biela con la varilla del cilindro, en los mecanismos de cilindro, biela y manivela, suele ser despreciable, particularmente en las bielas largas, por la pequeña amplitud de los ángulos que describe la biela en las sucesivas carreras del émbolo; cuando no se verifique dicha circunstancia y siempre que se desee tener en cuenta el trabajo absorbido en la referida articulación, se calculará por la fórmula $T_f = 2\int_o^{\theta} F\rho' \, d\theta = 2 f_1 P \rho' . \theta$, que corresponde a cada vuelta de la manivela y en la que ρ representa el radio del pasador de la articulación y θ el ángulo que forman entre sí las posiciones extremas de la biela.

En los mecanismos de biela y manivela en que P no sea constante, se sustituirá esta variable por su *valor medio* en cada revolución, en las dos fórmulas encontradas.

633. Movimiento de un cuerpo sobre un plano inclinado.—Supondremos al cuerpo lanzado con una cierta velocidad inicial, en el sentido ascendente de la línea de máxima pendiente y con base suficiente para asegurar el resbalamiento sobre dicho plano; la ecuación del movimiento será

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -fQ\cos i - Q\operatorname{sen} i = -Q(\operatorname{sen} i + f\cos i),$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g(\operatorname{sen} i + f\cos i), \quad \frac{dx}{dt} = -gt(\operatorname{sen} i + f\cos i) + v_o$$

$$x = -\frac{1}{2}gt^2(\operatorname{sen} i + f\cos i) + v_o t + x_o .$$

El movimiento es uniformemente retardado; su velocidad se anulará al cabo del tiempo $t = \frac{v_o}{g\,(\operatorname{sen} i + f \cos i)}$ y el espacio que recorrerá el cuerpo, subiendo, es

$$x - x_o = \frac{v_o^2}{2\,g\,(\operatorname{sen} i + f \cos i)}.$$

Al llegar a la posición más elevada se invierte el sentido del movimiento; pero por el cambio de dirección que experimenta la fuerza de rozamiento, podrá suceder que el móvil quede estacionado en dicha posición: esto ocurrirá cuando i sea menor que α.

Si la pendiente es mayor que la correspondiente al ángulo α, se produce el descenso con la ecuación de movimiento expresada por

$$m \frac{d^2 x}{d t^2} = Q \operatorname{sen} i - f\,Q \cos i = Q\,(\operatorname{sen} i - f \cos i),$$

$$\frac{d x}{d t} = g\,t\,(\operatorname{sen} i - f \cos i) \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{2}\,g\,t^2\,(\operatorname{sen} i - f \cos i).$$

Como caso particular se puede suponer que el plano es horizontal y entonces las ecuaciones del movimiento son

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -f g, \quad \frac{d x}{d t} = -f g\,t + v_o, \quad x = -\frac{1}{2} f g\,t^2 + v_o\,t + x_o;$$

el tiempo que tarda en detenerse el móvil es $t = \frac{v_o}{f g}$ y el espacio recorrido estará expresado por $x - x_o = \frac{v_o^2}{2 f g}$, que sería infinito si no existiera el rozamiento.

El trabajo absorbido por el rozamiento, en el arrastre de un cuerpo sobre un plano inclinado, es

$$d\,T_f = F\,.\,d\,l = f\,Q\cos i\,d\,l \quad \text{y} \quad T_f = f\,l\,Q\cos i\,;$$

en el caso de plano horizontal será $T_f = f\,l\,Q$.

Siendo el trabajo útil, en la subida por un plano inclinado, $T_u = Q\,H = l\,Q$ sen i, se deduce que el rendimiento de este mecanismo es

$$R = \frac{T_u}{T_m} = \frac{l\,Q\,\text{sen}\,i}{l\,Q\,\text{sen}\,i + f\,l\,Q\cos i} = \frac{\text{sen}\,i}{\text{sen}\,i + f\cos i} = \frac{\text{tg}\,i}{\text{tg}\,i + \text{tg}\,\alpha}\,.$$

634. Rozamiento de las cuerdas sobre los cilindros a que se arrollan.—El rozamiento de una cuerda sobre un cilindro fijo es un caso particular de rozamiento resbalando, que tiene frecuentes aplicaciones, por lo que vamos a detallar las condiciones en que se realiza.

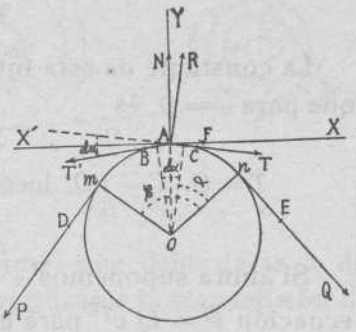


Fig. 361

Supongamos una cuerda $D\,B\,A\,C\,E$ (fig. 361), arrollada sobre un cilindro circular, abrazando el ángulo $\theta = m\,o\,n$ y sometida a las fuerzas P y Q, en equilibrio, pero alcanzando P el límite a partir del cual se produciría el resbalamiento en el sentido de esta fuerza. Si no existiera el rozamiento sería $P = Q$; pero, por la acción de dicha fuerza retardatriz, la tensión P tiene que ser mayor que Q, creciendo en los distintos elementos de la cuerda desde n hasta el punto m.

Sea T la tensión de la cuerda en el elemento $A\,C$, $T' = T + d\,T$ la del elemento siguiente $A\,B$ y R la reacción oblicua de la superficie de apoyo, cuyas componentes normal y tangencial son N y $F = f\,N$; proyectando sobre los ejes $A\,X$ y $A\,Y$, tendremos

$$T\cos\frac{d\alpha}{2} - (T + dT)\cos\frac{d\alpha}{2} + fN = 0,$$

$$-T\operatorname{sen}\frac{d\alpha}{2} - (T + dT)\operatorname{sen}\frac{d\alpha}{2} + N = 0,$$

o bien, suponiendo $\cos\frac{d\alpha}{2} = 1$, $\operatorname{sen}\frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$, y prescindiendo de diferenciales de segundo orden

$$dT = fN \quad \text{y} \quad T\,d\alpha = N,$$

de donde resulta

$$\frac{dT}{T} = f\,d\alpha \quad \text{y} \quad lT = f\alpha + C.$$

La constante de esta integración se determina sabiendo que para $\alpha = 0$, es

$$T = Q,\ C = lQ,\ \text{luego}\ l\frac{T}{Q} = f\alpha \quad \text{y} \quad \frac{T}{Q} = e^{f\alpha}.$$

Si ahora suponemos $\alpha = \theta$, será $T = P$ y se obtiene la ecuación $P = Q\,e^{f\theta}$ para expresar la relación entre las fuerzas P y Q. Fácilmente se ve que si el movimiento tendiera a producirse en el sentido de Q, sería $Q = P\,e^{f\theta}$.

Si en estas fórmulas se hace $\theta = 2n\pi$, se obtendrá la relación de las fuerzas que deben actuar en los extremos de una cuerda, que da n vueltas al cilindro, para que tienda a iniciarse el movimiento en el sentido de la que figure aislada en el primer miembro.

La manera de influir el ángulo θ, en el valor de P, indica que la relación $\frac{P}{Q} = e^{f\theta}$ crecerá en progresión geométrica cuando θ crece en progresión aritmética, y se com-

prende la posibilidad de equilibrar fácilmente, por este medio, esfuerzos considerables con una pequeña tracción ejercida en el extremo Q de la cuerda.

La fuerza del rozamiento desarrollado en estos casos, o sea el suplemento que hay que dar a P, para producir el resbalamiento de la cuerda sobre el cilindro, es

$$F = P - Q = Q\, e^{f\theta} - Q = Q\,(e^{f\theta} - 1).$$

635. Transmisión por correas sin fin.—Cuando dos poleas se enlazan por una correa (fig. 362), la transmisión de la pieza conductora a la conducida tiene lugar por el rozamiento que se desarrolla en el contacto de la correa con la llanta de las poleas y como este rozamiento es función de la tensión de los ramales de la correa, se comprende la conveniencia de ver la tensión mínima, que debe darse a dichos ramales, para que pueda verificarse la transmisión de un esfuerzo dado.

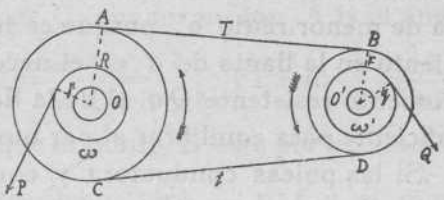


Fig. 362

Consideremos la polea de menor radio, que en la figura es la conducida o' y sean T y t las tensiones, que queremos calcular, en los ramales $A\,B$ y $C\,D$ respectivamente; el rozamiento necesario en la polea o', para equilibrar al momento resistente $Q\,q$, es $F = T - t = \dfrac{Q\,q}{r}$ y como por otra parte es $T = t\,.\,e^{f\theta}$ o $\dfrac{T}{t} = e^{\theta f} = \mu$, se obtiene

$$T = \frac{Q\,q}{r}\,.\,\frac{\mu}{\mu - 1} \quad \text{y} \quad t = \frac{Q\,q}{r}\,.\,\frac{1}{\mu - 1}\,.$$

El valor de $\mu = e^{f\theta}$ depende del coeficiente de rozamiento entre la correa y la llanta y del arco abrazado por la primera en la segunda; en las correas de cuero y poleas de fundición es $f = 0{,}28$ y suponiendo $\theta = 0{,}4 \times 2\pi$, resulta $\mu = e^{0{,}71} = 2{,}02$; puede admitirse, como término medio, que la tensión del ramal conducido es igual a la mitad de la del conductor y una y otra vendrán expresadas por las fórmulas

$$T = 2\frac{Q\,q}{r} \quad \text{y} \quad t = \frac{Q\,q}{r}.$$

Las consideraciones anteriores se han referido a la polea de menor radio o', porque es indudable que si el rozamiento en la llanta de o' es el necesario para equilibrar al momento resistente $Q\,q$, el de la llanta de o será más que suficiente para equilibrar al par motor $P\,p$.

Si las poleas conductora y conducida fuesen iguales, sería

$$\theta = 0{,}5 \times 2\pi, \quad \mu = 2{,}41, \quad T = 1{,}71\frac{Q\,q}{r} \quad \text{y} \quad t = 0{,}415\ T.$$

El cálculo de las tensiones de los ramales de las correas tiene interés para dar a éstas la sección resistente necesaria para la transmisión; pero una vez montadas, se gradúan por medio de los *tensores*, hasta que prácticamente se vea que la transmisión se verifica de un modo normal.

636. Problema.—*Se tiene un cilindro tendido sobre un plano horizontal y se le aplica, perpendicularmente a sus generatrices, y a la altura h del suelo, una fuerza horizontal progresiva: determinar si el movimiento que se produce en el cilindro será de resbalamiento o de rodadura.*—La resistencia del cilindro a la rodadura está expresada por $\delta\ Q$ (fig. 363) y este movimiento se iniciará,

al crecer P, cuando sea $Ph = \delta Q$ (**624**); pero la resistencia al resbalamiento, expresada por fQ, nos dice que si en el crecimiento de P llega esta fuerza a tomar el valor $P = fQ$ antes de verificarse la condición $Ph = \delta Q$, el movimiento que se producirá será de resbalamiento; como vemos depende, el que se presente uno u otro movimiento, de que sea $\frac{\delta Q}{h} \lessgtr fQ$, o bien $\frac{\delta}{h} \lessgtr f = \text{tg}\,\alpha$.

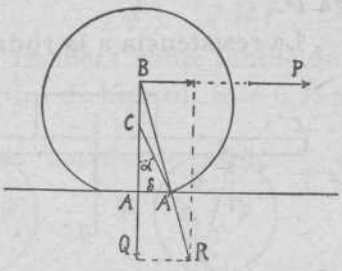


Fig. 363

Tracemos en la figura 363 por el punto A' la recta $A'C$, que forme con AB el ángulo α, y se tendrá $f = \text{tg}\,\alpha = \frac{AA'}{AC} = \frac{\delta}{AC}$, y como $\frac{\delta}{h} = \frac{\delta}{AB}$, se deduce que siempre que el punto B esté por encima del C, obtenido como hemos dicho, será $\frac{\delta}{h} < f$ y el movimiento producido por la fuerza progresiva P será de rodadura; por el contrario si el punto B está más bajo que el C es $\frac{\delta}{h} > f$ y el movimiento que se iniciará será el de resbalamiento del cilindro sobre el plano.

La construcción gráfica efectuada indica que el punto C estará siempre muy cerca del A, de modo que si la fuerza P se aplica en las proximidades del eje de la rueda o cilindro, se cumplirá la condición $\frac{\delta}{h} < f$ y el movimiento que se obtiene será de rodadura; en este caso se encuentran las ruedas de los carruajes.

637. Transporte de pesos sobre rodillos.—Supongamos un peso Q apoyado, por intermedio de una plataforma CD (fig. 364), sobre los rodillos transversales A y B, y se

desea calcular el esfuerzo necesario para trasladarlo, con movimiento uniforme y sobre un suelo horizontal, haciendo rodar los cilindros de apoyo por la acción de la fuerza P.

La resistencia a la rodadura del rodillo A está representada por el par Q'_1 Q'_2 y la de B por el par Q''_1 Q''_2; para iniciar la rodadura y continuarla después con movimiento uniforme, es preciso que la fuerza P, aplicada horizontalmente a la plataforma, sea $P \times 2R = Q'(\delta + \delta') + Q''(\delta + \delta')$ o $P = Q\dfrac{\delta + \delta'}{2R}$, siendo δ y δ' los coeficientes de rozamiento rodando correspondientes a la plataforma sobre los rodillos y de éstos sobre el suelo o carriles por donde rueden.

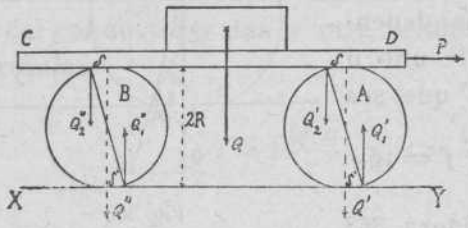


Fig. 364

La fórmula obtenida nos dice que no influye en el valor de P la variación que, el avance de la plataforma, produce en la repartición del peso Q sobre los rodillos; en cambio, es preciso tener un cuidado especial en que éstos se desplacen paralelamente, pues la oblicuidad de sus ejes, respecto al camino que tienen que recorrer, aumenta notablemente el esfuerzo necesario para el transporte.

638. Trabajo desarrollado.—Si comparamos el trabajo desarrollado para transportar el peso Q a la distancia L, por medio de los rodillos, con el necesario para hacer el transporte del mismo arrastrándolo sobre el plano $X\,Y$, se observan las ventajas que el primer procedimiento tiene sobre el segundo, desde el punto de vista de la economía del esfuerzo.

En efecto, el trabajo desarrollado en el trasporte so-

bre rodillos es $T = Q \frac{\delta + \delta'}{2R} . L$ y en el arrastre directo $T' = f Q . L$; la relación entre ambos es $\frac{T}{T'} = \frac{\delta + \delta'}{2Rf}$, que para el caso de ser $\delta = 0{,}0102$ (madera sobre fundición), $\delta' = 0{,}0012$ (fundición sobre carriles de hierro), $R = 0{,}25\,m$ y $f = 0{,}40$ (madera sobre los carriles), resulta $\frac{T}{T'} = \frac{0{,}0114}{0{,}20} = 0{,}057$.

639. Rodadura sobre bolas.—La ventaja obtenida por la sustitución del rozamiento rodando al rozamiento resbalando, constituye el fundamento de los cojinetes con *rodadura sobre bolas*, que tanta aplicación tienen actualmente en las bicicletas, automóviles, aeroplanos, etc.; la circunstancia de ser curvas las superficies en que se apoyan las bolas de estos cojinetes, si bien introduce complicaciones en el cálculo del trabajo absorbido, apenas modifica las consecuencias prácticas que se deducen del caso de rodadura de superficies planas sobre rodillos cilíndricos.

640. Tracción de carruajes.—El esfuerzo necesario para trasladar un carruaje sobre un plano horizontal, está expresado por la resistencia a la rodadura que presentan las ruedas y por los rozamientos resbalando de los ejes en sus cojinetes; en la subida por un plano inclinado hay que agregar la componente tangencial del peso, Q sen i, que obra como fuerza resistente.

Consideraremos sucesivamente los siguientes casos:

1.° *Carruajes de dos ruedas.*—Sea r (fig. 365) el radio de las ruedas, ρ el de los muñones del eje y Q la carga sobre cada rueda. Las fuerzas P y Q tienen una resultante R que se aplica a la rueda en a y se transmite al terreno en A', devolviendo éste la reacción R' igual y directamente

opuesta; esta reacción que obra sobre la rueda tiene sus dos componentes T y N que tienden a hacerla girar alrededor de o, en sentido positivo la primera y negativo la segunda, y si suponemos que el movimiento está iniciándose en el sentido positivo, provocado por P, se ejercerá en a el rozamiento F, que se opone a dicho movimiento, verificándose la anulación de momentos, respecto al punto o, expresada por la ecuación

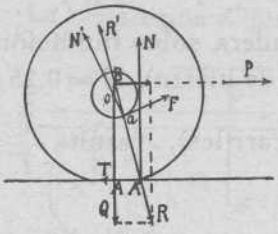


Fig. 365

$$T r - N \delta - F \rho = o .$$

Las ecuaciones de proyección sobre la horizontal y la vertical del punto o dan $T = P$ y $N = Q$, siendo además

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \text{y} \quad F = f_1 R = f_1 \sqrt{P^2 + Q^2} ,$$

con cuyos valores se obtiene

$$P = Q \frac{\delta}{r} + \sqrt{P^2 + Q^2} \cdot \frac{f_1 \rho}{r} .$$

Como en los carruajes suele ser P muy pequeño, comparado con Q, puede prescindirse, sin gran error, del sumando P^2 en el subradical y suponer $R = Q$; en este caso la fórmula de la tracción es $P = Q \frac{\delta}{r} + Q \frac{f_1 \rho}{r}$ correspondiendo el primer sumando a la resistencia a la rodadura y el segundo al resbalamiento del eje en el cubo de la rueda.

El cálculo hecho se refiere a una sola rueda; pero de

cualquier manera que esté la carga repartida, la fórmula anterior expresa la tracción total, siempre que se ponga en vez de Q la carga de todo el carruaje.

La expresión $P = Q\left(\frac{\delta}{r} + \frac{f_1 \rho}{r}\right)$ indica la conveniencia de emplear, desde el punto de vista mecánico, ruedas de gran radio, así como la de disminuir ρ cuanto permita la solidez del carruaje.

Si el carruaje sube por un plano inclinado, la fuerza Q se sustituirá por la componente normal $Q \cos i$; pero en cambio hay que agregar, como ya se indicó, el sumando $Q \operatorname{sen} i$; la fórmula de la tracción es

$$P = Q \cos i\left(\frac{\delta}{r} + \frac{f_1 \rho}{r}\right) + Q \operatorname{sen} i = Q\left(\operatorname{sen} i + \left(\frac{\delta}{r} + \frac{f_1 \rho}{r}\right)\cos i\right).$$

2.° *Carruajes ordinarios de cuatro ruedas.* — Sean r y r' los radios respectivos de las ruedas traseras y delanteras, ρ y ρ' los de sus ejes en los muñones y Q' y Q'' (figura 366) las cargas correspondientes: el arrastre del juego trasero exige la fuerza

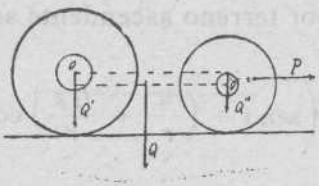


Fig. 366

$$P' = Q'\left(\frac{\delta}{r} + f_1 \frac{\rho}{r}\right),$$

el del juego delantero

$$P'' = Q'' \left(\frac{\delta}{r'} + f_1 \frac{\rho'}{r'} \right),$$

la tracción total en terreno horizontal será

$$P = P' + P'' = Q' \left(\frac{\delta}{r} + f_1 \frac{\rho}{r} \right) + Q'' \left(\frac{\delta}{r'} + f_1 \frac{\rho'}{r'} \right),$$

debiendo sustituirse, para subidas por terrenos inclinados, las fuerzas Q' y Q'' por sus componentes normales y agregar los sumandos correspondientes a las tangenciales.

3.° *Carruajes de ferrocarril.*—En estos carruajes son iguales los ejes y radios de todas las ruedas y la fórmula anterior se convierte en

$$P = \frac{\delta}{r} (Q' + Q'') + f_1 \frac{\rho}{r} (Q' + Q'') = Q \frac{\delta}{r} + Q \frac{f_1 \rho}{r},$$

que es igual a la del caso de dos ruedas e *independiente de la repartición de la carga dentro del carruaje.*

En la marcha por terreno ascendente será

$$P = Q \left(\operatorname{sen} i + \left(\frac{\delta}{r} + \frac{f_1 \rho}{r} \right) \cos i \right).$$

La pendiente que debe tener un tramo de vía, para que los vagones se deslicen por ella con movimiento uniforme, es $\operatorname{tg} i = \frac{\delta}{r} + \frac{f_1 \rho}{r}$, deducida de la condición $P = o$ y cambio de signo del seno de i.

641. Aplicaciones útiles de los rozamientos.—La circunstancia de constituir los rozamientos la fuerza retardatriz que mayor influencia perjudicial produce en la marcha de las máquinas, pudiera hacer creer, a primera vista,

que dichas fuerzas resultan perjudiciales en todos los casos; pero fácil es darse cuenta del efecto útil que su existencia nos proporciona, considerando que, sin los rozamientos, no sería posible el equilibrio de los cuerpos abandonados a su propio peso más que sobre planos horizontales y no se podría producir la marcha horizontal, y menos la subida por rampas, por la acción de fuerzas interiores, como indirectamente lo verifican los seres animados y máquinas locomóviles.

Las transmisiones por correas, conos y cilindros de fricción, la acción de los frenos ordinarios y dinamométricos derivados del de Prony, y otros muchos ejemplos que pudieran citarse, ponen claramente de manifiesto la utilidad que el hombre puede obtener, y obtiene, de la resistencia debida a los rozamientos.

CAPITULO OCTAVO

Dinámica de los sistemas flúidos

I

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES Y ECUACIONES GENERALES DEL MOVIMIENTO

642. Definición y división.—Cuando los enlaces interiores, existentes entre los diversos elementos de un sistema material, permiten a estos tomar, durante el movimiento, todas las posiciones relativas imaginables, sin alterar la naturaleza del cuerpo móvil, se dice que éste se encuentra en *estado flúido*, o bien que constituye un sistema material del mismo nombre.

Los flúidos se dividen en *líquidos* y *gases*, sin que sea necesario detenernos a exponer los caracteres distintivos de unos y otros, por haberlos estudiado en la Física general.

643. Flúidos naturales y flúidos perfectos.—La experiencia demuestra que los desplazamientos relativos, que experimentan en sus movimientos las moléculas de un flúido, tienen lugar sin manifestaciones sensibles de *rozamiento* entre unas y otras, y lo mismo sucede, aunque no con tanta exactitud, en el contacto de los flúidos con las superficies de otros cuerpos.

La fluidez *perfecta* que supone la falta de rozamiento de los flúidos entre sí y con los cuerpos que con ellos se

pongan en contacto, es realmente una cualidad teórica, que, en mayor o menor grado, deja de ser cierta en los flúidos *naturales;* esto obliga a introducir en las fórmulas, que de aquella hipótesis se deduzcan, ciertos coeficientes de corrección que, sin modificar su estructura, las acomodan a las realidades de la práctica.

644. Fuerza por unidad de masa en los flúidos.—La falta de enlace que existe entre los diversos elementos de una masa flúida, impide, en la mayor parte de los casos, el transporte vectorial de las fuerzas que le están aplicadas de uno a otros puntos, como se hace con frecuencia en los sólidos y sistemas articulados; por este motivo, se precisa en los flúidos considerar las fuerzas por la acción que ejercen en cada uno de sus elementos, y para determinar, en cada caso, la parte de las fuerzas exteriores que corresponde a una porción limitada de masa flúida, se introduce en los cálculos la *fuerza por unidad de masa* que actúa en un punto cualquiera, expresada por la relación $\frac{dF}{m}$, entre la fuerza exterior que obra sobre el elemento flúido, situado en el punto que se considere, y la masa m infinitamente pequeña del mismo.

Si en lugar de considerar un elemento infinitesimal de flúido, se determina la relación $\frac{\Delta F}{\Delta M}$, correspondiente a una porción finita de masa flúida, se obtiene la fuerza *media* por unidad de masa, que a dicha porción de flúido corresponde; en realidad, la fuerza por unidad de masa *en un punto,* es una fuerza media, que por referirse a una extensión infinitamente pequeña de flúido, se llama del modo dicho.

645. Notaciones.—Las proyecciones de la fuerza por unidad de masa, sobre los ejes coordenados, se representarán en esta teoría por las letras X, Y y Z, siendo, por consiguiente,

$$X = \frac{dF_x}{m}, \quad Y = \frac{dF_y}{m}, \quad Z = \frac{dF_z}{m}.$$

Del mismo modo expresaremos por los símbolos u, v y w las proyecciones, sobre los mismos ejes, del vector $[W]$ representativo de la velocidad lineal de una molécula flúida cualquiera.

646. Presiones en los sistemas flúidos.—La acción especial debida a su naturaleza que los elementos de un flúido ejercen sobre la superficie de los cuerpos sumergidos o en contacto con los mismos, y entre sí unos con otros se llaman *presiones*.

La acción dP ejercida sobre un elemento plano $d\sigma$ de una superficie cualquiera, se llama *presión elemental* en dicho punto y la resultante del sistema vectorial continuo, formado por las presiones que obran sobre todos los elementos de una superficie finita S, se llama *presión total* sobre la misma.

El cociente $\frac{P}{S}$ recibe el nombre de *presión media por unidad superficial*, correspondiente a la superficie S, y cuando ésta es elemental se obtiene la presión $p = \frac{dP}{d\sigma}$, que se llama *presión por unidad superficial* en el punto donde $d\sigma$ esté situado; para abreviar se suele llamar al cociente $\frac{dP}{d\sigma} = p$, *presión en el punto considerado*, conviniendo fijarse en la diferencia esencial que existe entre la presión p en un punto, tal como la acabamos de definir, y la presión elemental dP que al mismo le corresponde.

647. Dirección de las presiones.—La hipótesis hecha, sobre la carencia de rozamientos en los flúidos perfectos, equivale a suponer que las acciones mutuas entre los elementos de un flúido y la que ejercen sobre las superficies

que con ellos se ponen en contacto, son normales a las expresadas superficies.

Respecto a las presiones totales, siendo resultantes de sistemas vectoriales, que pueden tener variadas disposiciones, tendrán en cada caso, la dirección que por las fórmulas del Algoritmo mecánico podrá determinarse; hay, sin embargo, algunos en que sin necesidad de cálculos puede conocerse la dirección de la presión total: así ocurre, por ejemplo, con las ejercidas sobre las superficies planas que evidentemente serán normales a estas superficies.

648. Teorema.—*La presión en un punto de un flúido es independiente de la dirección de la superficie sobre la cual se ejerce.* Consideremos la masa elemental de flúido contenida en el tetraedro infinitesimal $o\,A\,B\,C$ (fig. 367), siendo cos λ, cos μ y cos ν, los cosenos directores de la cara $A\,B\,C$, que suponemos de dirección arbitraria. Las presiones en el punto o, ejercidas en la dirección de los ejes coordenados sobre las caras $B\,o\,C$, $A\,o\,C$ y $A\,o\,B$, serán

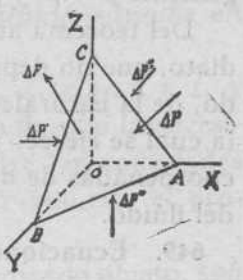


Fig. 367

$$p' = \frac{dP'}{dS'}, \quad p'' = \frac{dP''}{dS''}, \quad p''' = \frac{dP'''}{dS'''}$$

y la ejercida en la dirección arbitraria, señalada por los ángulos λ, μ y ν, es $p = \frac{dP}{dS}$: vamos a demostrar que las diferencias $p - p'$, $p - p''$ y $p - p'''$ son de orden infinitesimal, y, por tanto, podrá establecerse la igualdad $p = p' = p'' = p'''$, como expresa el enunciado del teorema.

Proyectando sobre el eje $o\,X$ las fuerzas que obran sobre el elemento flúido $o\,A\,B\,C$, siendo dF la parte de fuerza exterior r que corresponde al mismo, tendremos,

$$dF_x + dP' - dP\cos\lambda = m\frac{d^2x}{dt^2};$$

pero

$$m = \tfrac{1}{2}dy\,.\,dz \times \tfrac{1}{3}dx\,.\,\delta, \quad dS' = \tfrac{1}{2}dy\,dz = dS\cos\lambda,$$

de donde, sustituyendo y simplificando, resulta

$$p - p' = \tfrac{1}{3}\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta\,dx, \quad \text{o} \quad p = p'.$$

Proyectando sobre los ejes $o\,Y$ y $o\,Z$ resultaría análogamente $p = p''$ y $p = p'''$, como queríamos demostrar.

Del teorema anterior se deduce, como corolario inmediato, que no dependiendo la presión, en un punto del flúido, de la naturaleza ni de la dirección de la superficie sobre la cual se ejerce, será exclusivamente una función de las coordenadas de dicho punto, en relación con la naturaleza del flúido.

649. Ecuaciones del movimiento de un flúido.—Aplicando las ecuaciones generales de Mac-Laurin al elemento flúido contenido en el paralepípedo infinitesimal de la figura 368, se obtiene para la ecuación correspondiente al eje $o\,X$

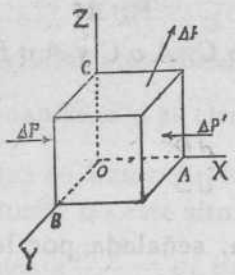


Fig. 368

$$dF_x + dP - dP' = m\frac{d^2x}{dt^2},$$

que, por transformaciones análogas a las empleadas en el número anterior, se convierten en

$$\delta X\,dx + p - \left(p + \frac{dp}{dx}\,dx\right) = \delta\frac{d^2x}{dt^2}\,dx.$$

Simplificando y suponiendo que se hace lo mismo sobre los ejes $o\,Y$ y $o\,Z$, se forma el sistema

$$X - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{dp}{dz} = \frac{d^2z}{dt^2},$$

que relaciona en cada instante, con las coordenadas del móvil, la fuerza por unidad de masa, la densidad y la presión existentes en cada punto de la masa flúida.

650. Ecuaciones complementarias.—Las tres ecuaciones anteriores no bastan para resolver *el problema general de la Hidrodinámica*, que puede enunciarse diciendo: *conocidas las fuerzas exteriores que obran sobre una masa flúida, determinar en un instante dado la presión, densidad y velocidad de la molécula flúida situada en un punto cualquiera del sistema móvil.*

Los datos de este problema son X, Y, Z, x, y, z y t, y las incógnitas p, δ, u, v y w, resultando de esto la necesidad de buscar otras dos relaciones entre las cantidades expresadas, para que podamos suponer resuelto el problema.

Las dos relaciones, que cumplen el indicado objeto, son las llamadas *ecuación de continuidad* y *ecuación característica*, de cuyo establecimiento nos vamos a ocupar.

651. Campo vectorial de las velocidades de un flúido.—La deducción de la ecuación de continuidad de los flúidos exige que hagamos una digresión del asunto que estamos estudiando, para establecer ciertas fórmulas, que nos han de ser útiles en otras cuestiones y de paso permiten obtener con sencillez la referida ecuación de continuidad. Esta digresión se refiere al estudio del campo vectorial formado por las velocidades de todos los puntos del flúido, cuyos elementos (los del campo de las velocidades) desempeñan un papel importante en la Hidrodinámica.

652. Líneas de corriente y divergencia del campo de las velocidades.—Si suponemos trazados en cada punto de una masa flúida los vectores representativos de las veloci-

dades respectivas y, a partir de un punto cualquiera A (figura 369), se pasa al infinitamente próximo B marchando en la dirección de W_1 y al llegar a B se hace lo mismo con relación a W_2 y así sucesivamente se engendrará una curva, envolvente de los vectores W_1 W_2.... etcétera, que recibe el nombre de *línea de corriente* del punto A en el instante t.

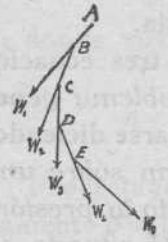


Fig. 369

Las ecuaciones diferenciales de una línea de corriente son: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$, que se deducen del mismo modo que las de las líneas de fuerza en los campos de fuerza **(396)**, pues ya se habrá notado la analogía que, desde el punto de vista geométrico y analítico, existen entre unas y otras.

Pudiera creerse, a primera vista, que las líneas de corriente representan las trayectorias que siguen en su movimiento las diversas moléculas del flúido; esto sería cierto si el campo de las velocidades no se modificara con el transcurso del tiempo; pero, en general, ocurrirá que la molécula que parte de A (fig. 369) en el instante t y llega a B en $t + dt$, tendrá, al llegar a este último punto, una velocidad distinta de la señalada por el vector W_2 y su trayectoria se separará en dicho punto de la línea de corriente $A\,B\,C\,D$....

Del mismo modo que en los campos de fuerza, se puede formar, en los de velocidades, la expresión analítica $E = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$, que se llama *divergencia* del campo correspondiente; si se imagina a cada vector W multiplicado por la densidad del flúido en el punto correspondiente, se forma otro campo especial cuya divergencia, $E' = \frac{d(u\delta)}{dx} + \frac{d(v\delta)}{dy} + \frac{d(w\delta)}{dz}$, interviene en algunas fór-

mulas que hemos de estudiar y la llamaremos divergencia *modificada*, para distinguirla de la anterior.

653. Flujos de flúido a través de superficies trazadas en el interior de la masa flúida.—La cantidad de flúido que en el tiempo $t - t_0 = \Delta t$ pasa a través de una superficie fija S (fig. 370), trazada en el interior de la masa flúida, se llama *flujo* de flúido correspondiente a la citada superficie y al expresado tiempo. Consideremos el elemento superficial de S, $d\sigma$; la molécula colocada en A estará dotada de la velocidad W y en el tiempo dt pasa a la posición B; pero por efecto de la *continuidad*, que se supone existe en el sistema flúido, pasarán por A otros elementos del mismo, hasta llenar el cilindro oblicuo, cuya base es $d\sigma$ y cuya altura es $W_n\, dt = W\, dt \cos \overline{WN}$, siendo N la normal trazada a la superficie S en el punto A.

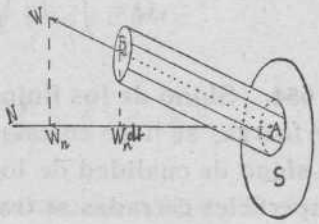


Fig. 370

Resulta de esto que el volumen de flúido que ha pasado, en el tiempo dt, por el elemento de superficie $d\sigma$ estará expresado por la fórmula $d^3 Q = W\, d\sigma \cos \overline{WN}\, .\, dt$; el correspondiente a toda la superficie S, en el mismo intervalo de tiempo, por $dQ = dt \iint_D W\, d\sigma \cos \overline{WN}$ y, por último, el flujo total, en un intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_0$, será

$$Q = \int_{t_0}^{t} dt \iint_D W\, d\sigma \cos \overline{WN}\, .$$

Como la integral doble que figura en las fórmulas anteriores, no es otra cosa que el flujo vectorial del campo de las velocidades, puede sustituirse en ellas la expresión de

dicho flujo vectorial por su valor en función de la divergencia E (*), obteniéndose de este modo las siguientes:

$$dQ = dt \iiint_D E\,dx\,dy\,dz$$

y

$$Q = \int_{t_0}^{t} dt \iiint_D E\,dx\,dy\,dz.$$

654. Signo de los flujos.—Lo mismo que en los campos de fuerza, se hace en esta teoría el convenio, para señalar el signo de cualidad de los flujos, de que las normales a superficies cerradas se tracen siempre hacia el exterior de las mismas y para las superficies abiertas hacia el lado donde presenten la convexidad.

Según esto, en el caso de superficies cerradas, los flujos positivos indicarán volúmenes de flúido que *salen* del interior de dichas superficies, así como los negativos representarán volúmenes de flúido que *entran* en la misma, y de aquí el nombre de *flujos salientes* que reciben los positivos en todos los casos y el de *flujos entrantes* que se da a los negativos.

655. Flujos expresados en cantidad de masa.—Las fórmulas encontradas, para expresión de los flujos, determinan *el volumen* de flúido que pasa a través de la superficie S; para expresar los mismos flujos en cantidad de *masa*, bastará introducir el factor δ en la fórmula de partida del número **653** obteniéndose

$$d^3M = d^3Q\,\delta = W\delta\,d\sigma\cos\overline{WN}\,.\,dt$$

y

$$dM = dt \int\int_D W\delta\,d\sigma\cos\overline{WN}\,.$$

(*) En la teoría de los campos de fuerza se ha visto (399) cómo se pasa de la fórmula $f = \int\int_D W\,d\sigma\cos\overline{WN}$ a la que expresa el valor de f en función de E.

Estas fórmulas se pueden expresar, en función de la divergencia modificada E', operando con los factores que están bajo el signo integral como en el caso anterior de los flujos en volumen; así resulta:

$$dM = dt \int\int\int_D E'\, dx\, dy\, dz$$

y

$$M = \int_{t_0}^{t} dt \int\int\int_D E'\, dx\, dy\, dz.$$

Lo mismo que los flujos en volumen se llaman, y realmente son, tratándose de superficies cerradas, *entrantes* a los negativos y *salientes* a los positivos.

656. Ecuación de continuidad de un flúido en movimiento.— Sea S una superficie cerrada cualquiera, que podemos imaginar fija en el interior del sistema flúido, y δ la densidad de éste en un punto cualquiera, que será función de t como todas las variables que figuran en el problema general que estamos considerando. La masa flúida contenida en S en el instante t es

$$M = \int\int\int_D \delta\, dx\, dy\, dz,$$

y en el $t + dt = t'$

$$M' = \int\int\int_D \left(\delta + \frac{d\delta}{dt} dt\right) dx\, dy\, dz;$$

el incremento de flúido que ha tenido lugar en el intervalo de tiempo dt, dentro de S, será por una parte

$$dM = M' - M = \int\int\int_D \frac{d\delta}{dt}\, dx\, dy\, dz\, dt$$

y por otra, igual al flujo entrante

$$dM = -dt \int_D \int \int E' \, dx \, dy \, dz =$$

$$= -\int_D \int \int E' \, dx \, dy \, dz \, dt,$$

deduciéndose, de la igualación de los segundos miembros de las fórmulas anteriores, que

$$\int_D \int \int \left(E' + \frac{d\delta}{dt}\right) dx \, dy \, dz \, dt = o$$

y esto exige que sea $E' + \frac{d\delta}{dt} = o$,

o $$\frac{d(u\delta)}{dx} + \frac{d(v\delta)}{dy} + \frac{d(w\delta)}{dz} + \frac{d\delta}{dt} = o,$$

que es la llamada *ecuación de continuidad* del flúido correspondiente.

657. Ecuación característica de los flúidos.—No bastando las cuatro ecuaciones que hasta ahora conocemos, para resolver el problema general de la Hidrodinámica [**645**], se ha tratado de completar el sistema con otra ecuación de carácter empírico, llamada *característica,* y cuyo establecimiento se funda en las conocidas leyes físicas de *Mariotte* y *Gay-Lussac,* por medio de las cuales se pueden relacionar la presión, volumen o densidad y la temperatura de un flúido, en un estado determinado, con las mismas circunstancias en otro estado cualquiera.

Para los líquidos, por la incompresibilidad de que gozan, la ecuación característica relaciona sólamente el volumen v con la temperatura τ, por la fórmula $v = v_0 (1 + \alpha\tau)$, siendo v_0 el volumen del líquido a *cero* grados y α el coeficiente de dilatación del mismo; en los líquidos a tempera-

tura constante, la ecuación característica se reduce a $v = constante$.

En los gases se verifica $p\,v = p_0\,v_0\,(1 + \alpha\,\tau)$, con la particularidad de ser α constante para todos los gases e igual a $\frac{1}{273}$; en los gases a temperatura constante, la ecuación característica se reduce a $p\,v = constante$.

Cuando un gas pasa de un estado a otro, sin variación sensible en la cantidad de calor que contiene, aun cuando haya variación de temperatura en sus diversos elementos, se dice que experimenta una transformación *adiabática*, o que el paso de uno a otro estado ha tenido lugar por un *movimiento adiabático*. En estos casos, si p_0 y v_0 son la presión y volumen en el estado inicial de la transformación y p y v los correspondientes a un instante cualquiera de la misma, se verifica $p\,v^{\gamma} = p_0\,v_0^{\gamma}$, siendo γ la relación de los calores específicos del gas a presión y volumen respectivamente constantes; este exponente, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, tiene para todos los gases el valor $\gamma = 1{,}41$, o más exactamente $\gamma = 1{,}408$.

658. Ecuación característica en función de la densidad del flúido.—Teniendo presente la relación evidente $\frac{v}{v_0} = \frac{\delta_0}{\delta}$; puede eliminarse el volumen del flúido de todas las fórmulas anteriores, poniendo a las ecuaciones características en función de la densidad del mismo; así resulta

para los líquidos $\delta = \frac{\delta_0}{1 + \alpha\,\tau}$,

para los gases en general $\delta = \frac{\delta_0}{p_0} \cdot \frac{p}{1 + \alpha\,\tau}$,

y para los gases en movimiento adiabático $\delta = \delta_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$.

Las dos primeras se convierten, cuando τ es constante

(equilibrio isotérmico), en $\delta = constante$ y $\delta = Kp$, siendo

$$K = \frac{\delta_0}{p_0 (1 + \alpha \tau)} = constante.$$

También conviene algunas veces hacer intervenir el peso específico del flúido y este dato se introduce en las ecuaciones anteriores por medio de la relación $\frac{\pi}{\pi_0} = \frac{\delta}{\delta_0}$, obteniéndose

para los líquidos $\pi = \frac{\pi_0}{1 + \alpha \tau}$ o $\pi = constante,$

para los gases en general $\pi = \frac{\pi_0}{p_0} \cdot \frac{p}{1 + \alpha \tau}$ o $\pi = K' p$

y para los movimientos adiabáticos $\pi = \pi_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$.

Cuando se quiere hacer referencia a la ecuación característica del flúido, sin que sea necesario detallar su forma, se acostumbra a representar por la notación $F(p\, v\, \tau) = o$ o $F(p\, \delta\, \tau) = o$.

659. Resumen de las ecuaciones del movimiento.—Reuniendo las cinco ecuaciones encontradas, para resolver el problema general propuesto, se forma el sistema siguiente:

$$X - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad Y - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad Z - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{dp}{dz} = \frac{d^2 z}{dt^2},$$

$$\frac{d(u\delta)}{dx} + \frac{d(v\delta)}{dy} + \frac{d(w\delta)}{dz} + \frac{d\delta}{dt} = o, \quad F(p\, \delta\, \tau) = o,$$

que en teoría resuelven dicho problema, si bien en la práctica se suelen presentar dificultades de cálculo que muchas veces resultan insuperables. Estas dificultades se atenúan en algunos casos particulares que, afortunadamente, suelen ser los de mayor interés práctico.

Para las aplicaciones conviene sustituir los segundos miembros de las tres primeras ecuaciones por sus valores en función de u, v y w, que son las siguientes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} + \frac{du}{dt} =$$

$$= u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} + \frac{du}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz} + \frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz} + \frac{dw}{dt}.$$

II

MOVIMIENTOS PERMANENTES

660. Definición.—Cuando la velocidad, presión y densidad de un flúido en movimiento son independientes del tiempo y sólo dependen de las coordenadas de dicho punto, se dice que el flúido se mueve con *régimen permanente*, y el mismo calificativo se aplica al movimiento de que está animado. El movimiento del agua en los ríos, canales y tuberías y el de los gases en estas últimas, son de ordinario sensiblemente permanentes y de aquí la importancia que este estudio tiene para nosotros.

661. Ecuaciones del movimiento permanente.—Las ecuaciones generales establecidas en el número **659**, se simplifican cuando se trata de movimientos permanentes, por la anulación de los coeficientes diferenciales, respecto a t, de las variables independientes del tiempo; así se reduce aquel sistema de ecuaciones al siguiente:

$$X - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2} = u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},$$

$$Y - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{d^2y}{dt^2} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz},$$

$$Z - \frac{1}{\delta} \cdot \frac{dp}{dz} = \frac{d^2z}{dt^2} = u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz},$$

$$\frac{d(u\delta)}{dx} + \frac{d(v\delta)}{dy} + \frac{d(w\delta)}{dz} = 0, \quad F(p\,\delta\tau) = 0.$$

La cuarta ecuación del sistema anterior es la divergencia modificada E' del campo de las velocidades y su anulación nos permitirá establecer dentro de poco, con gran facilidad, algunas propiedades interesantes de estos movimientos.

662. Filetes y venas flúidas.—Siendo, en los movimientos permanentes, las componentes de la velocidad independientes del tiempo, tendrá lugar la coincidencia de las líneas de corriente con las trayectorias seguidas por los diversos elementos de flúido, y serán, por consiguiente, las ecuaciones de estas últimas, las mismas $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$ que en el número **652** se establecieron para las líneas de corriente.

Si se supone en un punto del flúido un elemento superficial $d\sigma$ y el haz de líneas de corriente, infinitamente próximas, que pasan por los puntos del perímetro de $d\sigma$, se forma un tubo vectorial, que recibe el nombre de *filete flúido* y representa la trayectoria que describe el elemento material flúido colocado en $d\sigma$ y la de todos los demás que sucesivamente vayan encontrándose en la misma posición.

Si en lugar de un elemento superficial, se considera en el interior del flúido una superficie finita S y se trazan las líneas de corriente de su perímetro, se forma un tubo vec-

torial, de dimensiones finitas, que se llama *vena flúida*; las venas flúidas están formadas por el haz de filetes que describen los diversos elementos del flúido que pasan a través de la superficie S.

663. Circulación a lo largo de un filete y de una vena flúida.—En los movimientos permanentes se verifica que *el flujo de flúido en cantidad de masa a través de las diversas secciones transversales de los filetes y venas, en un intervalo de tiempo cualquiera, es una cantidad constante*, y el valor de este flujo constante, *en la unidad de tiempo*, se llama o constituye la *circulación* a lo largo del filete o vena correspondiente. Para demostrar la constancia de esta circulación estableceremos los teoremas siguientes:

1.° *El flujo de flúido, en cantidad de masa, a través de una superficie cerrada trazada en el interior de un flúido en régimen permanente, es nulo.*—La expresión del flujo correspondiente al tiempo $\Delta t = t - t_0$ a través de una superficie cerrada, puede ponerse, cuando la divergencia modificada E' es constante, en función del volumen V comprendido dentro de dicha superficie, por la fórmula **(656)**

$$M = \int_{t_0}^{t} dt \iiint_{U} E' \, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_{t_0}^{t} dt\, E' \iiint_{U} dx\, dy\, dz = V E' \Delta t$$

y si ahora se tiene en cuenta que para los movimientos permanentes es $E' = o$, en todos los puntos del flúido, resultará $M = o$.

Observemos que la condición $E' = o$ no significa que sea nula la divergencia ordinaria E del campo de las velocidades y, por tanto, no será cierta, en general, la propiedad demostrada, si se refiere a los flujos en volumen; pero

cuando se trate de flúidos homogéneos por ser $\delta = constante$, las condiciones $E' = o$ y $E = o$ son recíprocas y se verificará dicha propiedad para los flujos en volumen como para los flujos en masa.

2.° *El flujo de flúido, en cantidad de masa, a través de las secciones transversales de un filete o vena flúida en régimen permanente, es consonante.*—Tracemos, en la vena representada en la figura 371, las dos secciones transversales S y S' y consideremos la superficie cerrada formada por S, S' y la lateral del tubo formado por las líneas de corriente entre S y S'. El flujo M a través de esta superficie total es nulo, por el teorema anterior, y como el flujo a través de la superficie lateral del tubo también lo es, los flujos a través de S y S' serán iguales y de signo contrario; pero esta diferencia de signo indica, precisamente, que la circulación del flúido se verifica, como no podía menos de suceder, en el mismo sentido en las secciones S y S'.

Fig. 371

Cuando δ sea constante, se verificará igualmente la propiedad demostrada, para los flujos de flúido expresados en volumen.

Como el teorema anterior no exige ninguna dirección especial a las secciones S y S' se deduce que *el flujo en masa, a través de las secciones transversales de un filete o vena flúida en régimen permanente, es independiente de la dirección del plano que produce la sección.*

El valor de la circulación a lo largo de un filete flúido está determinado por la fórmula

$$d^2 M = \int_{t_o}^{t_o + 1} d t \, W_n \, \delta \, d \sigma = W_n \, \delta \, d \sigma$$

y para una vena $M = \iint_{\upsilon} W_n \, \delta \, d \sigma$.

Cuando la sección del filete y la de la vena sean normales a las líneas de corriente será cos $\overline{WN} = 1$ las fórmulas anteriores se convierten en

$$d^2 M = W \delta \, d\sigma \quad \text{y} \quad M = \int_D \int W \delta \, d\sigma .$$

664. Gasto de flúido en las venas flúidas.—Cuando la constancia en la circulación a lo largo de un filete o vena flúida tiene lugar en volumen, suele dársele a dicha circulación el nombre de *gasto* del filete o vena correspondiente.

El gasto de un filete será

$$d^2 Q = W_n \, d\sigma \quad \text{o} \quad d^2 Q = W \, d\sigma$$

y el de una vena

$$Q = \int_D \int W_n \, d\sigma \quad \text{o} \quad Q = \int_D \int W \, d\sigma,$$

según que se trate de una sección cualquiera o de una sección normal a las líneas de corriente.

Muchas veces ocurre que la velocidad W es constante en los diversos puntos de las secciones de la vena y el gasto entonces estará expresado por

$$Q = W \int_D \int d\sigma = W S.$$

Esta fórmula es de gran aplicación e indica que cuando la velocidad es la misma en los diversos puntos de la sección normal a una vena flúida, *el gasto se obtiene multiplicando el área de dicha sección por la velocidad común a todos los filetes en la sección trazada.*

665. Relación entre las secciones normales de una vena y las velocidades correspondientes.—Cuando la cir-

cunstancia expresada en el número anterior, sobre la constancia de W en los distintos puntos de la sección S, se verifique sensiblemente a lo largo de toda la vena, se podrá establecer, por la constancia del gasto, la relación $S\,W = S'\,W'$, es decir que en tales casos *las velocidades varían en relación inversa de las áreas de las secciones normales de la vena.* Esta propiedad se verifica siempre para un filete en régimen permanente.

666. Movimiento permanente bajo la acción de fuerzas potenciales.—Ecuación de Bernoulli.—Cuando las fuerzas exteriores que obran sobre un flúido en régimen permanente son potenciales, se simplifican las ecuaciones generales del movimiento y puede obtenerse una primera integral de la que se deducen consecuencias y aplicaciones de gran interés. Sea $U = \varphi(x\,y\,z) + c$ la función de donde derivan las componentes X, Y y Z de la fuerza por unidad de masa (en el caso de la pesantez será $U = -g\,z + c$); representando por R la expresión $U - \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\delta} = R$ se verificará

$$\frac{dU}{dx} - \frac{1}{\delta}\cdot\frac{dp}{dx} = \frac{dR}{dx},\quad \frac{dU}{dy} - \frac{1}{\delta}\cdot\frac{dp}{dy} = \frac{dR}{dy},\quad \frac{dU}{dz} - \frac{1}{\delta}\cdot\frac{dp}{dz} = \frac{dR}{dz};$$

con estas notaciones, las tres primeras ecuaciones del movimiento **(661)** son

$$\frac{dR}{dx} = u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},$$

$$\frac{dR}{dy} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz},$$

$$\frac{dR}{dz} = u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz};$$

y teniendo en cuenta que $u = W\frac{dx}{ds}$, $v = W\frac{dy}{ds}$, $w = W\frac{dz}{ds}$, se convierten en

$$\frac{dR}{dx} = W\left(\frac{du}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{ds}\right) = W\frac{du}{ds},$$

$$\frac{dR}{dy} = W\frac{dv}{ds} \quad \text{y} \quad \frac{dR}{dz} = W\frac{dw}{ds};$$

multiplicando respectivamente por $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ y sumando las ecuaciones obtenidas, resultará

$$\frac{dR}{ds} = u\frac{du}{ds} + v\frac{dv}{ds} + w\frac{dw}{ds} = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(u^2 + v^2 + w^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{dW^2}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{1}{2}W^2 \quad \text{o} \quad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}W^2 - R\right) = 0.$$

Integrando la ecuación anterior, se obtiene la primera integral a que antes aludimos, $\frac{1}{2}W^2 - R = C$, o bien, poniendo explícito el valor de R,

$$\frac{1}{2}W^2 - U + \int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\delta} = C,$$

que es la llamada *ecuación de Bernoulli* y expresa una relación finita que liga a la velocidad de los elementos flúidos con la presión y densidad a lo largo de un filete cualquiera.

667. Observación.—Cuando se trata de una vena, a cada uno de los filetes que la componen, corresponde, en general, un valor de la constante C; pero si se reconoce que las velocidades y presiones en los distintos puntos de la sección transversal de la vena, son sensiblemente iguales,

se puede aplicar la ecuación de Bernoulli a toda la vena, considerando como valor común de C, para todos los filetes, el que corresponde al eje de la vena.

668. Teorema de Bernoulli en los líquidos a temperatura constante bajo la acción de la pesantez.—Supongamos ahora que se trata de un líquido a temperatura constante y sin actuar más fuerzas exteriores que la pesantez; la función de fuerzas es en este caso **(429)** $U = -gz + c$ y la ecuación característica $\delta = constante$; con estos valores la ecuación de Bernoulli toma la forma

$$\frac{1}{2} W^2 + gz + \frac{1}{\delta}(p - p_o) = C + c = C'.$$

Si suponemos que para $z = z_0$ es $p = p_0$ y $W = W_0$, resulta $C' = \frac{1}{2} W_0^2 + g z_0$ y la ecuación se convierte en

$$\frac{W^2}{2g} + z + \frac{p}{\delta g} = \frac{W_0^2}{2g} + z_0 + \frac{p_0}{\delta g} = constante = H,$$

o

$$z + \frac{W^2}{2g} + \frac{p}{\pi} = z_0 + \frac{W_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\pi} = H,$$

representando por π el peso específico del líquido, $\pi = \delta g$.

Los tres sumandos de la ecuación anterior tienen una significación especial: z es la *altura* del elemento líquido sobre un plano horizontal de comparación cualquiera, $\frac{W^2}{2g} = h$ es la *altura* a que llegaría un punto lanzado verticalmente en el vacío con la velocidad W **(451)** y se llama *altura debida a la velocidad* W; en cuanto al término $\frac{p}{\pi}$, se llama *altura piezométrica* en el punto que se considere y representa la *altura de la columna de líquido cuyo peso equilibra, en un punto cualquiera, a la presión p existente en dicho punto.*

Para demostrar este último aserto supongamos la vena

líquida que circula por un tubo de una conducción ordinaria de agua (en cuyo caso puede aplicarse el teorema de Bernoulli) y hagamos en el punto B (fig. 372) un orificio, de sección ω, colocando en él un tubo vertical de la misma sección, soldado al tubo principal $A\,B\,C$; por efecto de la presión que el líquido ejerce sobre las paredes del tubo, penetra una porción de líquido en el vertical $B\,D$ y sube hasta una altura tal que el peso de la columna líquida sea igual a la presión ejercida sobre la base de dicha columna; de esta igualdad, $\pi\,\omega\,h = \omega\,p$, se deduce $h = \frac{\omega\,p}{\pi\,\omega} = \frac{p}{\pi}$, como queríamos demostrar.

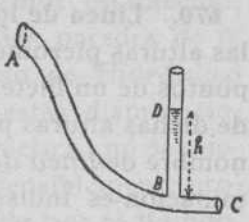


Fig. 372

669. Plano de carga.—El plano horizontal situado a la altura H sobre el de comparación, recibe el nombre de *plano de carga* del filete o vena flúida; su situación es independiente de la del plano de comparación, pues el cambio de éste sólo influye en el sumando z y es evidente que la distancia de cada punto del filete al plano de carga, representada por $\frac{W^2}{2\,g} + \frac{P}{\pi}$, no se modifica con dicho cambio.

El plano de carga representa, en el movimiento del líquido por tuberías, la altura máxima a que, en teoría, puede llevarse la vena líquida que circula por dichas tuberías. En efecto, el máximo de z corresponderá al caso de ser $p = o$ y $W = o$, y entonces resulta $z = H$; pero las condiciones $p = o$ y $W = o$ indican que los elementos líquidos llegan a dicho plano sin velocidad y suponiendo hecho el vacío en el extremo del tubo conductor. Si el tubo desemboca a la presión atmosférica, la máxima altura a que puede llegar será $z = H - \frac{p_a}{\pi}$ y el plano horizontal correspon-

diente a esta altura está *10,33 metros* más bajo que el de carga antes indicado.

670. Línea de los niveles piezométricos.—Si se trazan las alturas piezométricas que corresponden a los distintos puntos de un filete o vena líquida y se unen los extremos de dichas alturas por una línea continua, se da a ésta el nombre de *línea de los niveles piezométricos,* cuya determinación es indispensable en las conducciones de agua, para calcular la resistencia que hay que dar a los tubos de la canalización y como elemento que influye en la velocidad de circulación y en el gasto o rendimiento que puede obtenerse en cada punto de la distribución.

671. Piezómetros.—Se llaman así los aparatos que miden la presión, en un punto de la tubería, por la altura de la columna de agua necesaria para equilibrarla en el punto dado. En su esencia se componen de un trípode que sostiene un tubo de vidrio vertical, que por medio de una *llave* se pone en comunicación con la tubería, produciéndose el efecto que dijimos en el número 668 y figura 372; las divisiones del tubo de vidrio permiten leer directamente la presión, sin hacer el producto $p = \pi . h$.

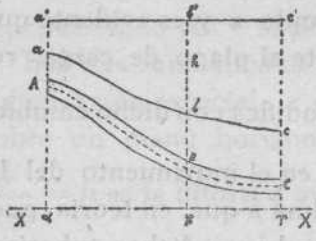


Fig. 373

672. Cálculo de la velocidad W en un punto del filete o vena flúida.—Supongamos trazado el desarrollo sobre un plano vertical de una tubería $A\ B\ C$ (fig. 373), que conduce un líquido, siendo la horizontal $a'\ b'\ c'$ la traza del plano de carga o *línea de carga,* y $a\ b\ c$ la línea de los niveles piezométricos: la velocidad W, en un punto cualquiera B del recorrido, se determina en función del segmento $b\ b' = h$, por la fórmula $W = \sqrt{2\,g\,h}$.

673. Trazado práctico del plano de carga.—Las veloci-

dades y presiones a lo largo de una vena flúida, conducida por una tubería, son, en la práctica, algo menores de lo que arrojan las fórmulas teóricas que hemos establecido, debido al rozamiento del líquido sobre las paredes de la tubería y a otras causas que en el curso de *Hidráulica aplicada* se estudiarán con más detalle; estas disminuciones hacen que la línea de carga, en la práctica, no sea horizontal, ni aun rectilínea, pero siendo sensiblemente proporcionales a la longitud de tubo recorrido por el líquido, puede, sin inconveniente, representarse por una recta que partiendo de la altura teórica, en el arranque de la tubería, se incline por debajo de la horizontal, formando un ángulo determinado por la naturaleza de la conducción en cada caso práctico.

Los segmentos comprendidos entre la línea teórica de carga y la práctica, constituyen las *pérdidas de carga* que los rozamientos, y demás causas aludidas, ocasionan hasta llegar al punto correspondiente.

674. **Observación.**—Rebajando, como se dijo antes, la situación del plano teórico de carga en la altura correspondiente a la presión atmosférica y suponiendo nula la velocidad de las moléculas líquidas en el interior del depósito que alimente una o varias tuberías, la línea de carga deberá arrancar en cada caso de la superficie libre del líquido en el depósito; pero, teniendo en cuenta que dicho nivel es variable, en la práctica se toma siempre, para hacer el trazado de la línea de carga, el caso más desfavorable, que es cuando el depósito queda vacío, debiendo servir de punto de partida *el nivel del fondo del depósito.*

675. **Teorema de Torricelli.**—*La velocidad de salida de un líquido por un orificio practicado en el fondo o pared lateral del vaso que lo contiene, es igual a la que adquiriría un punto material, cayendo en el vacío, desde la superficie libre del líquido hasta el centro del orificio.*—Su-

pongamos el orificio de sección $d\sigma$ y apliquemos al filete líquido que sale del vaso el teorema de Bernoulli

$$\frac{W^2}{2g} + z + \frac{p}{\pi} = H;$$

en el punto en que dicho filete, prolongado idealmente por el interior del vaso, llega a la superficie libre del líquido, se verificará $W_0 = o$, $z = z_0$ y $p = p_a$, luego $H = z_0 + \frac{p_a}{\pi}$, y como al salir el líquido por el orificio también es $p = p_a$, resultará

$$\frac{W^2}{2g} + z + \frac{p_a}{\pi} = z_0 + \frac{p_a}{\pi}, \text{ o } W^2 = 2g(z_0 - z) = 2gh,$$

siendo h la distancia del orificio a la superficie libre del líquido.

Si en lugar del orificio infinitesimal que hemos supuesto, se trata de un orificio de sección finita, no se puede aplicar el teorema de Bernoulli a la sección de la vena en el plano del orificio, por no cumplirse, en los diversos filetes que pasan por dicha sección, las condiciones de igualdad de presión y velocidad que son necesarias para esta aplicación; pero el examen de la salida manifiesta que la convergencia de los filetes (*contracción* de la vena líquida) cesa a corta distancia del orificio, presentando la vena después, en una pequeña parte de su longitud, la forma cilíndrica indicadora del paralelismo e igualdad de velocidad y presión en los puntos de la sección correspondiente, que se llama *sección contraída,* y no habrá inconveniente en aplicar el teorema a esta sección; la velocidad que da la fórmula $W = \sqrt{2gh}$ será, pues, la que corresponde a la sección contraída de la vena y no a la del orificio.

676. Coeficiente de contracción.—La relación entre la

sección contraída de la vena y la del orificio se llama *coeficiente de la contracción* y tratándose de orificios circulares de pequeñas dimensiones, practicados en paredes delgadas, tiene por término medio el valor *0,62*.

Cuando el orificio está practicado en paredes que pasen de un milímetro de espesor, o tengan dimensiones y formas variadas, el coeficiente de reducción se modifica y es necesario disponer de tablas, para elegir el que corresponda a los casos que más se asemejen al que se esté considerando.

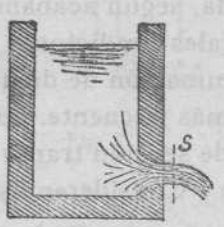


Fig. 374

En particular se verifica que cuando el orificio está practicado en pared de algún espesor y se le da la forma de la vena contraída (fig. 374), la velocidad $W = \sqrt{2gh}$ corresponde a los diversos puntos de la sección S de la cara exterior del orificio, por presentar la vena la forma cilíndrica inmediatamente que sale al exterior.

677. Gasto de líquido por un orificio.—La fórmula del gasto de una vena, cuando todos los puntos de su sección normal tienen la misma velocidad, es **(664)** $Q = S \times W$, y esta fórmula puede aplicarse a la vena que se forma a la salida del líquido por un orificio, con la condición de que S represente el área de la sección contraída, para poder poner en vez de W el valor deducido por el teorema de Torricelli; así, representando por μ el coeficiente de contracción correspondiente y por S la sección del orificio, será

$$Q = \mu S W = \mu S \sqrt{2gh}.$$

Conviene no olvidar que la fórmula anterior supone que el movimiento de salida es permanente y para que esto sea cierto, es preciso producir sobre la superficie libre del líquido una presión suplementaria que, en cada instante,

sustituya al descenso que en la línea de carga produce la salida del líquido por el orificio. Cuando esta presión suplementaria no se produce, la velocidad de salida es decreciente con h, y, siendo función del tiempo, el movimiento no es permanente.

678. Tiempo que tarda en vaciarse un depósito por un orificio practicado en el fondo.—Aunque el movimiento de salida, según acabamos de decir, no es permanente, presenta tales condiciones de regularidad, que resulta fácil la determinación de dicho tiempo. Supongamos, por ser el caso más frecuente, que el depósito sea cilíndrico o prismático de sección transversal Ω, siendo S la del orificio de salida.

Consideremos un instante en que la altura del líquido sobre el orificio sea z; la velocidad de salida es $W = \sqrt{2gz}$ y el flujo en volumen de líquido, en el tiempo dt, es [653]

$$dQ = dt \iint_D d\sigma\, W \cos \overline{WN} = dt\, W \iint_D d\sigma = \mu S \sqrt{2gz}\, dt;$$

pero en este tiempo habrá experimentado el nivel del depósito un descenso $-dz = \frac{dQ}{\Omega}$, de donde

$$-\Omega\, dz = \mu S \sqrt{2gz}\, dt \quad \text{y} \quad dt = \frac{\Omega}{\mu S \sqrt{2g}} \cdot \frac{-dz}{\sqrt{z}}.$$

Integrando entre o y t resulta

$$t = \frac{\Omega}{\mu S \sqrt{2g}} \int_h^o \frac{-dz}{\sqrt{z}} = \frac{\Omega}{\mu S \sqrt{2g}} \left(2\sqrt{z}\right)_o^h = \frac{2\Omega h}{\mu S \sqrt{2gh}}.$$

De esta fórmula se deduce que el tiempo t es doble del que tardaría en vaciarse el depósito conservando la velocidad de salida con el valor constante $W = \sqrt{2gh}$.

679. Problema.—*Determinar la potencia de un salto o*

caída de agua en régimen permanente.—Supongamos una masa de agua cayendo, en el lecho de un río, desde A a B (fig. 375) siendo h la altura de la caída; el volumen de esta masa de agua será $Q \,.\, t = S\, W \,.\, t$, representando S una sección cualquiera de la vena líquida, W la velocidad de la corriente en los diversos puntos de la sección y t el tiempo que tarda en pasar, por una sección cualquiera del cauce, la masa de agua que ocupa el salto entre A y B; si el centro de gravedad de esta masa se encuentra en g, en un instante determinado, y en el siguiente está en g', el peso del agua habrá desarrollado en el tiempo $d\,t$ el trabajo positivo $Q\,t \,.\, \pi \,.\, d\,z$, y durante toda la caída

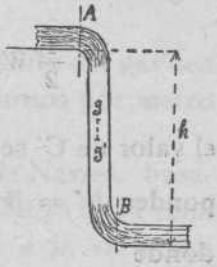


Fig. 375

$$T = Q\,t\,\pi \int_0^h d\,z = Q\,t\,\pi\,h;$$

la potencia del salto será, por consiguiente,

$$P = \frac{Q\,t\,\pi\,h}{t} = Q\,\pi\,h.$$

Si en esta fórmula se expresa Q en decímetros cúbicos, π en kilogramos y h en metros, será $\pi = 1$ y $P = Q\,h\,Kgm.$, deduciéndose que para obtener la potencia de un salto de agua en kilográmetros por segundo, basta multiplicar el gasto, en litros, de la corriente de agua, por la altura del salto en metros.

680. Aforos.—La determinación del gasto Q de una corriente de agua, se llama *aforo* de la misma; esta operación se lleva a cabo por diversos procedimientos, que se detallan en el curso de *Hidráulica aplicada*.

681. Teorema de Bernoulli en los gases a temperatura cons-

tante bajo la acción de la pesantez.—En los gases a temperatura constante la ecuación característica es $\delta = k\,p$ y el teorema de Bernoulli se convierte en

$$\frac{1}{2} W^2 + g\,z + \frac{1}{k}\,l\,\frac{p}{p_o} = C + c = C';$$

el valor de C' se obtiene suponiendo que a $z = z_0$ corresponden $W = W_0$ y $p = p_0$, y es $C' = \frac{1}{2} W_0^2 + g\,z_0$, de donde

$$z + \frac{W^2}{2\,g} + \frac{1}{kg}\,l\,p = z_o + \frac{W_0^2}{2\,g} + \frac{1}{kg}\,l\,p_o = H = \textit{constante}.$$

La constancia de la suma de las tres cantidades, que figuran en el primer miembro de la ecuación anterior, permitiría hacer una representación gráfica, análoga a la hecha con los líquidos, pero la escasa aplicación que dicha representación tiene, hace que prescindamos de ella.

El valor k, que figura en la ecuación anterior, es $k = \frac{\delta}{p} = \frac{\delta_0}{p_0}$; sustituído en ella la convierte en

$$\frac{W^2 - W_0^2}{2}\,\delta_0 + \pi_0\,(z - z_0) + p_0\,l\,\frac{p_0}{p} = o;$$

pero siendo el peso específico de los gases muy pequeño, no se cometerá un error considerable, suprimiendo, en los casos en que $z - z_0$ no sea muy grande, el término $\pi_0\,(z - z_0)$ y se reduce la ecuación a

$$\frac{1}{2}\,(W^2 - W_0^2) = \frac{p_0}{\delta_0}\,l\,\frac{p_0}{p}.$$

682. Velocidad de salida de un gas por un orificio practica-

do en la pared del depósito que lo contiene.—Suponiendo la velocidad en el interior $W_0 = o$, resulta la expresión

$$W^2 = 2\,\frac{p_0}{\delta_0}\,l\,\frac{p_0}{p}$$

llamada *fórmula de Navier*. Cuando la salida del gas sea a la atmósfera, será $p = p_a = 10.333$ *kilogramos* por metro cuadrado al nivel del mar.

683. Fórmula de Zeuner.—La fórmula de Navier, basada en la constancia de la temperatura a lo largo de la vena flúida, da resultados poco exactos, debido a la variación sensible de temperatura que la expansión del gas produce al salir por el orificio.

Suponiendo dicho movimiento adiabático, se obtiene la *fórmula de Zeuner*, que está más conforme con la realidad del fenómeno y da resultados más aceptables para las aplicaciones prácticas.

De la ecuación (657) $p\,v^\gamma = p_0\,v_0^\gamma$ o $p = p_0\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^\gamma$ se deduce

$$d\,p = \gamma\,p_0\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{\gamma-1} \cdot d\,\frac{\delta}{\delta_0}\,;$$

sustituyendo este valor en la integral $\int_{p_0}^{p} \frac{d\,p}{\delta}$ de la ecuación de Bernoulli, después de prescindir de la función de fuerzas de la pesantez, $U - U_0$, y suponer $W_0 = o$, resulta

$$W^2 = -\,2\int_{\delta_0}^{\delta} \frac{\gamma\,p_0\left(\frac{\delta}{\delta_0}\right)^{\gamma-1} \cdot d\,\frac{\delta}{\delta_0}}{\delta} = \frac{2\,\gamma\,p_0}{\delta_0\,\gamma}\int_{\delta_0}^{\delta} \delta^{\gamma-2} \cdot d\,\delta =$$

$$= 2\,\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_0}{\delta_0{}^\gamma}\left(\delta_0{}^{\gamma-1} - \delta^{\gamma-1}\right) = 2\,\frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{p_0}{\delta_0}\left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right).$$

684. Gasto de gas por orificios.—Si la vena gaseosa que

sale por el orificio practicado en la pared de la envuelta tuviera la misma velocidad en todos sus filetes, bastaría aplicar la fórmula $Q = S \times W$ para tener el gasto; pero en los gases se produce el fenómeno de la contracción de la vena, más acentuado que en los líquidos, y de aquí la necesidad de aplicar al factor S el coeficiente de contracción; también aconseja la práctica el empleo de otro coeficiente de reducción para el factor W, siendo en definitiva $Q = \mu S \times \varphi W$.

III

EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS FLÚIDOS

685. **Ecuaciones de equilibrio de un flúido.** — Siendo el equilibrio de un sistema material cualquiera, un caso particular del movimiento en que las aceleraciones se reducen a *cero*, bastará anular en las ecuaciones generales del movimiento de un flúido, antes encontradas, los términos dependientes de dichas aceleraciones, para obtener las ecuaciones de equilibrio del mismo; éstas serán

$$X - \frac{1}{\delta}\frac{dp}{dx} = o,\ Y - \frac{1}{\delta}\frac{dp}{dy} = o,\ Z - \frac{1}{\delta}\frac{dp}{dz} = o,\ F(p\,\delta\,\tau) = o,$$

prescindiéndose de la ecuación de continuidad, por reducirse a la identidad $o = o$.

686. **Ecuación general.** — Combinando convenientemente las tres primeras ecuaciones, se obtiene la ecuación

$$dp = \delta\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

que las comprende y recibe el nombre de *ecuación general* del equilibrio de un flúido, de la que se deducen las consecuencias siguientes:

1.ª *No todas las fuerzas aplicadas a un flúido pueden producir el equilibrio del sistema.*—En efecto, siendo el primer miembro de la ecuación una diferencial exacta, deberá serlo el segundo miembro, y para ello es preciso, que se cumpla la condición que el cálculo integral exige, para admitir la existencia del factor integrante δ; esta condición es

$$Z\left(\frac{dX}{dy}-\frac{dY}{dx}\right)+Y\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)+X\left(\frac{dY}{dz}-\frac{dZ}{dy}\right)=o$$

y si la ley de la fuerza que actúa sobre el flúido no la cumple, el equilibrio será imposible.

2.ª *Las fuerzas potenciales son aptas para mantener a un flúido en equilibrio,* por verificarse en ellas la condición $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=dU$. La ecuación general, en estos casos, se reduce a $dp=\delta\,dU$, siendo, como sabemos **(429)** $U=-gz+c$ cuando se trate de la pesantez.

687. Equilibrio en el caso de fuerzas potenciales.—Considerando únicamente el caso de fuerzas potenciales, contamos con las ecuaciones $dp=\delta\,dU$ y $F(p\,\delta\,\tau)=o$ para resolver el problema general de la *Hidrostática*, que tiene por objeto *determinar la presión y densidad en un punto de la masa flúida, cuando se conoce la función de fuerzas U y la temperatura del flúido en dicho punto.*

Puesta la primera ecuación en la forma $\int_{p_o}^{p}\frac{dp}{\delta}-U=C$, se ve que podría haberse obtenido directamente de la de Bernoulli **(666)** sin más que hacer en ella $W=o$.

688. Superficies isobaras en el interior de las masas flúidas en equilibrio.—Cuando una masa flúida está en equilibrio, bajo la acción de fuerzas potenciales, *las superficies equipotenciales tienen la misma presión en todos sus puntos;* pues siendo $dp=\delta\,dU$ se deduce que las condiciones $U=constante$ y $p=constante$ son recíprocas una

de otra. Esto justifica el nombre de *isobaras* que se aplica a dichas superficies.

Siendo $p = constante$ cuando U lo es, y variando en general p cuando U varía, será

$$p = \varphi(U) \quad \text{y} \quad \delta = \frac{dp}{dU} = \varphi'(U) = constante.$$

Del mismo modo, por medio de la ecuación característica, puede expresarse a τ en función de U y resultará $\tau = constante$ cuando U lo sea.

En resumen, cuando el equilibrio es debido a la acción de fuerzas potenciales, *las superficies equipotenciales son de presión, densidad y temperatura constantes.*

689. Superficies de separación de flúidos superpuestos.—Superficies libres.—Las moléculas de un flúido situadas en un punto de dicha superficie de separación, experimentarán de una y otra parte las presiones p_1 y p_2 evidentemente iguales; pero $dp_1 = \delta_1 dU$ y $dp_2 = \delta_2 dU$, y siendo $p_1 = p_2$ será $dp_1 = dp_2$, o

$$(\delta_1 - \delta_2)\, dU = o, \quad dU = o \quad \text{y} \quad U = constante;$$

es decir, que *la superficie de separación de dos flúidos superpuestos, en equilibrio, es una superficie equipotencial.*

Cuando el flúido está contenido en un vaso abierto, la superficie del mismo, que está en contacto con la atmósfera, se llama *superficie libre* del flúido y su ecuación, por tratarse de dos flúidos superpuestos en equilibrio, será también $U = constante$.

690. Casos de equilibrio isotérmico.—Cuando τ es constante en todos los puntos del flúido, se verifica $\delta = constante$ para los líquidos, y $\delta = Kp$ para los gases; la ecuación general de equilibrio toma la forma

$$\frac{dp}{\delta} = Xdx + Ydy + Zdz \quad \text{o} \quad \frac{1}{K} \cdot \frac{dp}{p} = Xdx + Ydy + Zdz,$$

expresando, en uno y otro caso, que las fuerzas productoras del equilibrio mecánico, cuando existe el isotérmico, han de ser potenciales necesariamente.

Siendo U la función de fuerzas, se podrán poner estas ecuaciones en la forma integral

$$p - p_0 = \delta (U - U_0) \quad \text{o} \quad l \frac{p}{p_0} = K (U - U_0),$$

según se trate de líquidos o gases.

691. Equilibrio mecánico e isotérmico bajo la acción de la pesantez.—Si suponemos ahora que la fuerza potencial, de que hemos hablado en los números anteriores, es la pesantez, su función de fuerzas, por unidad de masa, es $U = -g z + constante$, y $z = constante$ será la ecuación de las superficies de igual presión, de igual densidad, de igual temperatura y las libres y de separación de flúidos superpuestos.

Suponiendo que tenga lugar el equilibrio isotérmico de toda la masa flúida, se convierten las ecuaciones generales del equilibrio de líquidos y gases en

$$p - p_0 = \delta g (z_0 - z) = \pi (z_0 - z)$$

y $$l \frac{p}{p_0} = K g (z_0 - z) = \frac{\delta_0 g}{p_0} (z_0 - z) = \frac{\pi_0}{p_0} (z_0 - z),$$

siendo π el peso específico del flúido, constante para los líquidos y proporcional a la presión en los gases.

692. Principio de Pascal en los líquidos.—La ecuación

$$p - p_0 = \pi (z_0 - z)$$

expresa que si, en el punto de un líquido en que la presión es p_0, se produce por cualquier procedimiento, un incremento de presión Δp_0, *el incremento de presión, Δp, que sufre un punto cualquiera del líquido, es constante en to-*

da la masa del mismo, e igual a Δp_0. Esta propiedad se conoce con el nombre de *principio de Pascal* y constituye la base del funcionamiento de las prensas hidráulicas.

693. Plano de carga y presión en cada punto de los líquidos en equilibrio.—La ecuación $p - p_0 = \pi (z_0 - z)$ puede ponerse en la forma

$$z + \frac{p}{\pi} = z_0 + \frac{p_0}{\pi} = H$$

y admite una representación gráfica análoga a la estudiada en el teorema de Bernoulli: el plano de altura H sobre el de comparación que se elija, se llama también *plano de carga* y se obtiene tomando sobre la superficie libre del líquido la altura $\frac{p_a}{\pi}$, representativa de la presión atmosférica. Si el plano de comparación es el fondo horizontal del depósito, que contiene la altura h de líquido, será $H = h + \frac{p_a}{\pi}$.

Despejando el valor de p, para un punto cualquiera, resulta $p = p_0 + \pi (z_0 - z)$, o suponiendo $z_0 = h$ y $p_0 = p_a = \pi (H - h)$, $p = \pi (H - z)$, lo que nos dice que *la presión en un punto de un líquido esta representada por el peso de una columna del mismo, de base igual a la unidad y cuya altura es la distancia que exista desde dicho punto a la superficie del plano de carga.*

Cuando no se tenga en cuenta la presión atmosférica, por existir causas que la contrarresten, será dicha presión igual al peso de la columna de líquido que tenga por base la unidad y por altura *la distancia del punto a la superficie libre del líquido:* $p = \pi (H - z) - p_a = \pi (h - z)$.

694. Superficie libre de vasos comunicantes.—Siendo en todos los puntos de las superficies libres de varios vasos comunicantes $p = p_a$, *la altura* z *sobre el plano de comparación será la misma en todos ellos.*

Si uno de los vasos es cerrado y se hace el vacío sobre el líquido, subirá éste hasta el plano de carga, adquiriendo sobre la superficie del vaso abierto una elevación $H - z = \frac{p_a}{\pi}$.

Si el líquido es agua y la experiencia se hace al nivel del mar, es

$$H - z = \frac{10333}{1000} = 10{,}333 \text{ metros.}$$

Con mercurio se reduce el valor de dicha elevación a *760 milímetros,* llamándose *columna barométrica* la parte de mercurio elevada sobre el vaso donde se ha hecho el vacío.

695. Equilibrio relativo de un líquido contenido en un vaso cilíndrico y girando alrededor de su eje.—Tomemos por eje coordenado $o\,Z$ el de revolución y por ejes $o\,X$ y $o\,Y$ dos cualesquiera trazados rectangularmente en el fondo del vaso (fig. 376). Sea A un punto de la masa flúida sometido a la acción de la fuerza exterior (su peso), por unidad de masa, cuyas proyecciones son $X = o$, $Y = o$, $Z = -g$; el equilibrio relativo tiene que cumplir, como el absoluto, la condición $dp = \delta\, dU$, con tal de tener en cuenta, en el segundo miembro, los términos de dU que correspondan a la fuerza centrífuga por unidad de masa, $\frac{v^2}{\rho} = \omega^2 \rho$, cuyas proyecciones sobre los ejes coordenados son

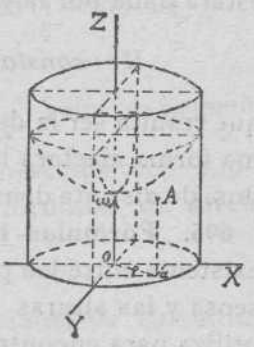


Fig. 376

$$F_{cx} = \omega^2 \rho \cos \alpha = \omega^2 x,\quad F_{cy} = \omega^2 \rho \operatorname{sen} \alpha = \omega^2 y,\quad F_{cz} = o$$

y lo primero que habrá que averiguar, por ser $\delta = constante$, si la resultante de las fuerzas F_e y F_c es potencial **(690).**

Las proyecciones de esta resultante son $X = \omega^2 x$, $Y = \omega^2 y$, $Z = -g$ y formando la expresión del trabajo elemental

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \omega^2 (x\,dx + y\,dy) - g\,dz,$$

se ve que es una diferencial exacta de la función

$$U = \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) - g\,z + constante.$$

Siendo potencial la resultante de las fuerzas que obran sobre cada molécula líquida, el equilibrio relativo será posible, y la forma de la superficie libre del líquido giratorio, estará dada por la ecuación

$$U = constante, \quad \text{u} \quad \omega^2 (x^2 + y^2) - 2\,g\,z = C,$$

que resulta ser la de un paraboloide de revolución. La misma forma afectará la superficie de separación de dos líquidos, de distinta densidad, superpuestos en el vaso giratorio.

696. Fórmulas barométricas de Halley.—La relación existente entre las presiones en el interior de una masa gaseosa y las alturas z sobre un plano de comparación, se utiliza para encontrar la diferencia de nivel entre dos puntos de la superficie terrestre (nivelación *barométrica*), y más frecuentemente para encontrar la altura sobre el nivel del mar, o de otro plano cualquiera de comparación, en los aerostatos y demás vehículos aéreos.

Partiendo de la ecuación [**691**] $l\frac{p}{p_0} = \frac{\pi_0}{p_0}(z_0 - z)$, se obtiene $z - z_0 = \frac{p_0}{\pi_0}\, l\frac{p_0}{p}$, y haciendo intervenir las alturas h y h_0 de la columna barométrica $z - z_0 = \frac{p_0}{\pi_0}\, l\frac{h_0}{h}$. En esta fórmula representa π_0 el peso específico del aire a la temperatura constante que se supone en los dos puntos de

estación, y a la presión p_0 del z_0; siendo la temperatura $\tau_0 = o$, la relación $\frac{p_0}{\pi_0}$ es $\frac{p_0}{\pi_0} = \frac{10333}{1{,}293} = 8000$; para otra temperatura cualquiera será

$$\pi_0 = \frac{1{,}293}{1 + \alpha\tau} \quad \text{y} \quad \frac{p_0}{\pi_0} = 8000\,(1 + \alpha\tau).$$

Sustituyendo estos datos en el valor de $z - z_0$, se convierte en $z - z_0 = 8000\,(1 + \alpha\tau)\,l\,\frac{h_0}{h}$, y pasando a logaritmos decimales,

$$z - z_0 = \frac{8000}{0{,}4343}\,(1 + \alpha\tau)\log\frac{h_0}{h} = 18400\,(1 + \alpha\tau)\log\frac{h_0}{h}.$$

El coeficiente de dilatación, $\alpha = \frac{1}{273}$, sufre un pequeño aumento cuando se trata del aire mezclado con vapor de agua, y por esto se supone en las fórmulas de nivelación $\alpha = \frac{1}{250} = 0{,}004$.

La *fórmula de Halley*, que acabamos de encontrar, tiene varias causas de inexactitud en sus aplicaciones prácticas: la primera es debida a la hipótesis del equilibrio mecánico que se supone en la masa gaseosa, que pocas veces tiene lugar y hace que sea inaplicable en tiempo de fuertes vientos; la segunda se debe a la hipótesis del equilibrio isotérmico, y ésta se atenúa considerablemente sustituyendo en ella, en vez de τ la media $\tau_m = \frac{\tau_0 + \tau}{2}$, de las temperaturas observadas en las dos estaciones; otra causa de error es la variación de la aceleración de la pesantez en los puntos de estación; para corregir este último defecto se emplean otras fórmulas más complicadas, que carecen de in-

terés para nosotros, pues, en general, basta en las aplicaciones aerostáticas con la aproximación que se obtiene con la fórmula de Halley.

Suponiendo $z_0 = 0$, $h_0 = 760$ y $\tau = 0$, se reduce aquella fórmula a $z = 18400 \log \frac{760}{h}$ y en esta forma expresa la altura, sobre el nivel del mar, de un punto de la atmósfera en que la presión esté representada por la altura barométrica h y la temperatura sea *cero* grados.

Para simplificar las fórmulas y razonamientos posteriores, supondremos que la temperatura es siempre igual a *cero* en todos los puntos a que nos refiramos, teniendo en cuenta que para las aplicaciones, donde quiera que figure el factor 18400, se multiplicará la expresión correspondiente por $1 + 0{,}004\,\tau_m$.

El problema inverso de encontrar la presión atmosférica a una altura cualquiera, se reduce a despejar h en la fórmula anterior, obteniéndose

$$h = 760 \times 10^{-\frac{z}{18400}} \quad \text{o} \quad p = 10333 \times 10^{-\frac{z}{18400}}.$$

696'.—Para algunas aplicaciones aerostáticas es conveniente conocer la ley de variación del peso específico del aire a diversas alturas, y para esto basta sustituir en la fórmula anterior en vez de p su valor $p = p_0 \frac{\pi}{\pi_0} = 10333 \cdot \frac{\pi}{1{,}293}$, resultando

$$\pi = 1{,}293 \times 10^{-\frac{z}{18400}};$$

esta fórmula se puede representar gráficamente tomando por ordenadas las alturas z y por abscisas los valores de π correspondientes; así, en la figura 377, se han señalado los valores de π correspondientes a las alturas comprendi-

das entre 0 y 10000 metros, por equidiferencias de 1000 metros.

Cuando se quiera calcular analíticamente la altura sobre el nivel del mar, que corresponde a un valor de π determinado, se despejará z de la última fórmula, obteniéndose

$$z = 18400 \log \frac{1{,}293}{\pi} .$$

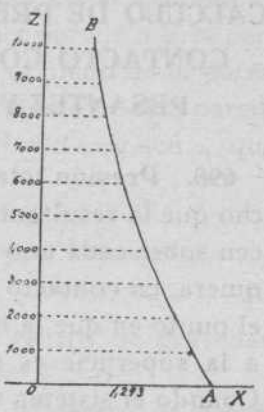


Fig. 377

697. Fórmula de Renard. — El empleo en las ascensiones aerostáticas de la fórmula

$$z = 18400 (1 + 0{,}004 \tau_m) \log \frac{760}{h}$$

exige la determinación de la temperatura del aire al nivel del mar, para conocer la media $\tau_m = \dfrac{\tau + \tau_0}{2}$, y como esto no es posible hacerlo directamente, se suele utilizar la llamada *fórmula de Renard*, que da el valor de τ_0 en función de τ y de la presión en el punto de estación; esta fórmula es

$$\tau_0 = \tau + 55 \frac{760 - h}{760} ;$$

sus resultados son suficientemente satisfactorios y están de acuerdo con las leyes del decrecimiento de temperatura, en las capas atmosféricas, que se establecen en Meteorología (0,53 *grados* por cada 100 *metros* de altura por término medio).

IV

CALCULO DE PRESIONES SOBRE SUPERFICIES EN CONTACTO CON UN FLÚIDO SOMETIDO A LA PESANTEZ Y EN EQUILIBRIO ISOTÉRMICO

698. Presión total y centro de presión.—Ya hemos dicho que la resultante de las presiones parciales que se ejercen sobre cada uno de los elementos de una superficie cualquiera, en contacto con un flúido, se llama *presión total* y el punto en que la línea de acción de esta resultante corta a la superficie es el *centro de presión* correspondiente. Cuando el sistema vectorial continuo, formado por las presiones elementales, no admita resultante única, se supone hecha la reducción a resultante y par mínimo y se considera como centro de presión el punto en que el eje central de tal sistema corta a la superficie dada.

En el caso de superficies planas siempre existirá resultante única, representativa de la presión total, por tratarse de un sistema vectorial paralelo con todos los vectores del mismo sentido; pero cuando se consideren superficies curvas, no ocurrirá, en general, lo mismo y será necesario calcular proyecciones y momentos de dicha acción total, para que ésta quede determinada.

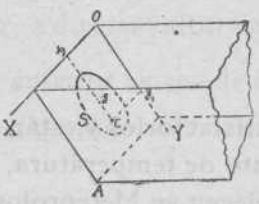


Fig. 378

699. Presión total de un líquido sobre una superficie plana.—Sea la superficie S trazada en la pared oA de una vasija (fig. 378), conteniendo un líquido de peso específico π; en cada elemento $d\sigma$ se ejerce la presión

$$dP = p\,d\sigma = \pi(h - z)\,d\sigma = \pi h_1\,d\sigma,$$

siendo h_1 la distancia del elemento $d\sigma$ al plano de carga, que por ejercerse la presión atmosférica en la cara opuesta de la pared de la vasija, supondremos situado en la superficie libre del líquido **(693)**; tomemos por eje $o\,X$ la intersección del plano de S con el de carga y por eje $o\,Y$ la perpendicular descendente al anterior, en el plano de la pared de la vasija; siendo α el ángulo de pendiente de esta pared, tendremos $h_1 = y \operatorname{sen} \alpha$ y de aquí $dP = d\sigma\, \pi y \operatorname{sen} \alpha$, que integrada nos da

$$P = \pi \operatorname{sen} \alpha \iint_D d\sigma\, y = \pi \operatorname{sen} \alpha\, \Sigma m y = S \pi \delta \operatorname{sen} \alpha,$$

representando por δ la ordenada del centro de gravedad del área S.

Como $\delta \operatorname{sen} \alpha = h_g$ es la distancia del centro de gravedad de S a la superficie libre y $\pi \delta \operatorname{sen} \alpha = \pi h_g$ es la presión por unidad superficial en dicho punto, resulta $P = S p_g$; es decir, que *la presión total que un líquido ejerce sobre una superficie plana, es igual al área de esta superficie multiplicada por la presión sobre el centro de gravedad de la misma.*

700. Centro de presión.—Estableciendo las ecuaciones de los momentos estáticos del sistema vectorial formado por las presiones elementales, respecto a los ejes $o\,X$ y $o\,Y$, se tiene

$$P x_1 = \iint_D d\,P\,x = \iint_D \pi \operatorname{sen} \alpha\, d\sigma\, y\, x = \pi \operatorname{sen} \alpha\, \Sigma m x y,$$

$$P y_1 = \iint_D d\,P\,y = \iint_D \pi \operatorname{sen} \alpha\, d\sigma\, y\, y = \pi \operatorname{sen} \alpha\, \Sigma m y^2,$$

de donde $$x_1 = \frac{\Sigma m x y}{\Sigma m y} \quad \text{e} \quad y_1 = \frac{\Sigma m y^2}{\Sigma m y},$$

que determinan el centro buscado.

Cuando la superficie S tenga un eje de simetría, paralelo al $o\,Y$, es evidente que en él estará el centro de presión y se puede prescindir de la fórmula que da el valor de x_1, bastando con la correspondiente a la ordenada.

Si suponemos que la superficie S comprende todo el rectángulo de la pared de la vasija, siendo a y b sus dimensiones, sabemos que $\Sigma m y^2 = \frac{a b^3}{3}$, $\Sigma m y = \frac{a b^2}{2}$ y por tanto

$$y_1 = \frac{\Sigma m y^2}{\Sigma m y} = \frac{a b^3}{3} : \frac{a b^2}{2} = \frac{2}{3} b;$$

es decir, que en estos casos, *el centro de presión se encuentra a los dos tercios de la longitud de la pared, desde el borde del líquido, o al tercio de dicha longitud contada desde la base.*

701. Determinación gráfica del centro de presión. — Según sabemos la presión en un punto cualquiera D (figura 379), está representada por el peso de la columna de líquido que, teniendo por base a la unidad, tenga por altura la distancia $D\,D'$, pero ejercida en sentido normal $D''\,D$. Si suponemos que todas las columnas análogas, correspondientes a los diversos puntos del rectángulo proyectado en $A\,B$, se hacen girar hasta colocarlas normales a dicho rectángulo, la presión total que éste recibe es el peso del prisma triangular proyectado en $A\,B\,A''$, pero ejerciéndose en la dirección normal a $A\,B$; este peso estará representado por un vector que pasa por el centro de gravedad del prisma, y como este punto se encuentra en la recta que une los centros de gravedad de las bases, estará proyectado en g, sobre la mediana de $B\,A''$; la línea de acción de la presión total será la señalada en la figura con el vector P, y el pun-

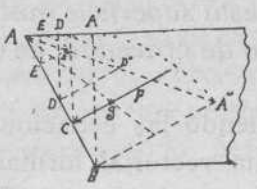


Fig. 379

to C en que éste corta a AB, es la proyección del centro de presión buscado.

Los razonamientos hechos son aplicables al caso de las presiones ejercidas sobre una superficie plana cualquiera S, sustituyendo el prisma triangular del caso anterior por el cilindro correspondiente. La normal bajada, desde el centro de gravedad de este cilindro, a la superficie S, determinará el centro de presión.

702. Paradoja hidrostática.—Si la superficie S, sobre la cual estamos operando, está constituída por el fondo horizontal de la vasija, resulta $P = S\,\pi\,H$, y la presión total es igual, con independencia de la forma de las paredes, al peso de la columna de agua que tiene por base el fondo S y por altura la distancia a la superficie libre del líquido.

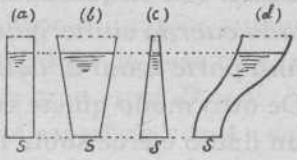


Fig. 380

Según esto, la misma presión hará sobre el fondo S, que se supone identico en las vasijas (*a*), (*b*), (*c*) y (*d*) de la figura 380, el líquido contenido en estos vasos, siempre que el nivel de la superficie libre esté a la misma altura en todos ellos.

Este fenómeno físico, fácil de comprobar experimentalmente, se conoce con el nombre de *paradoja hidrostática.*

En el caso que estamos considerando, de presiones sobre un plano horizontal, *el centro de presión se confunde con el centro de gravedad de la superficie* S, como consecuencia de ser las presiones elementales iguales en todos los puntos de S.

703. Presión total de un gas sobre una superficie plana.—De la fórmula $l\,\frac{p}{p_0} = \frac{\pi_0}{p_0}\,(z_0 - z)$, establecida para los gases en el número (691), se deduce que, tratándose de su-

perficies poco extensas y siendo $\frac{\pi_0}{p_0}$ un número, en general, muy pequeño, el segundo miembro puede suponerse nulo y admitirse la igualdad $p = p_0$ en todos los puntos de la superficie considerada.

Siendo $dP = d\sigma\, p$, será $P = \iint_D d\sigma\, p = S\, p$; es decir, que la presión total ejercida por un gas, sobre una superficie plana S, se obtiene *multiplicando su área por la presión constante por unidad superficial en cada punto.* En cuanto al centro de presión es, evidentemente, el centro de gravedad del área S.

704. Presiones sobre superficies curvas.—Principio fundamental o de Arquímedes.—El enunciado de este principio es: *todo cuerpo sumergido en un flúido pierde de su peso una parte igual al del volumen del flúido que desaloja.* De otro modo quiere esto decir, que la presión total que un flúido ejerce sobre la superficie de un cuerpo sumergido total o parcialmente en el mismo, está dirigida verticalmente de abajo hacia arriba y tiene por valor el peso del volumen del flúido desalojado.

Para darnos cuenta de esta propiedad, observemos que las presiones ejercidas sobre los elementos de la superficie de un cuerpo sumergido son idénticas a las que se ejercen, en los mismos puntos, sobre la superficie de la masa de flúido que ocupa el lugar del cuerpo cuando éste es retirado y se restablecen las condiciones del equilibrio anterior, y como las presiones ejercidas sobre dicha superficie flúida están en equilibrio con el peso de la masa contenida en la misma, tendrán, evidentemente, una resultante única igual y directamente opuesta al peso de dicho volumen de flúido.

Según el razonamiento anterior la línea de acción del empuje ascendente, que experimenta el cuerpo sumergido, pasa por el centro de gravedad del volumen de flúido des-

alojado; la parte de un cuerpo que se sumerge en un flúido, constituye la *carena* de dicha posición y el centro de gravedad del volumen de flúido desalojado es el *centro de carena* correspondiente a la misma; resulta de esto, que todo cuerpo sumergido en un flúido, aparte de otras fuerzas que sobre él puedan actuar, se encontrará siempre sometido a su peso, aplicado en el centro de gravedad, y al empuje del flúido *aplicado en el centro de carena correspondiente a la parte sumergida.*

La fórmula del valor modular del empuje será

$$P = V \delta g = V \pi,$$

siendo V el volumen de la carena y δ y π la densidad y el peso específico respectivamente del flúido donde se sumerge el cuerpo. Cuando se trata de sólidos o líquidos sumergidos en un gas, es tan pequeña la pérdida de peso que experimentan, que puede suponerse sin gran error $P = o$.

705. Presión de un líquido sobre una superficie curva cualquiera.—Si la superficie es cerrada, el principio de Arquímedes resuelve inmediatamente la cuestión; pero si se trata de una superficie abierta, como la S de la figura 381, se recurre al procedimiento siguiente para encontrar las proyecciones de P sobre los ejes $o\,X$, $o\,Y$ y $o\,Z$ (horizontales los primeros y vertical el tercero). Proyectemos ortogonalmente a S sobre el plano YZ y formaremos una superficie cerrada, que tendrá por bases el área dada S y la S', proyección de la anterior sobre YZ; la presión total sobre esta

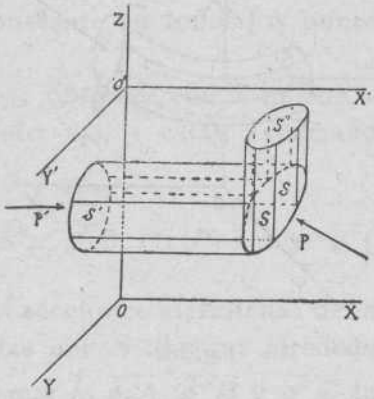


Fig. 381

superficie, por ser vertical, no dará proyección sobre el eje $o\,X$, y como todas las presiones elementales de la parte cilíndrica son normales a $o\,X$, tampoco producirán proyección sobre el mismo eje; resulta, en resumen, que la suma de las proyecciones, sobre $o\,X$, de la presión ejercida en S' y de la presión P que buscamos, ha de ser nula, y de aquí

$$P_x = P\cos\alpha = P' = S'\,p'_g \quad \text{o} \quad P_x = S'\,\pi\,h'_g\,.$$

Del mismo modo, si es S'' la proyección de S sobre el plano $X\,Z$, se obtendría

$$P_y = P\cos\beta = P'' = S''\,p''_g \quad \text{o} \quad P_y = S''\,\pi\,h''_g\,.$$

Para la proyección sobre el eje vertical $o\,Z$, proyectemos sobre el plano de carga $X'\,Y'$, formando la superficie cerrada $S\,S'''$, cuyo empuje se proyecta sobre $o\,Z$ en su verdadera magnitud; pero las presiones elementales de la parte cilíndrica no producen proyección sobre dicho eje y la presión sobre S''' es nula; luego la ecuación de proyección sobre el eje $o\,Z$ será

$$P_z = P\cos\gamma = V\,\pi\,,$$

siendo V el volumen comprendido entre S y S'''.

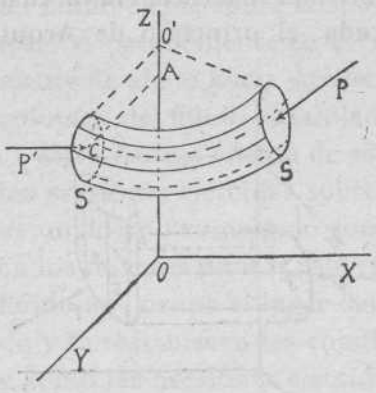


Fig. 382

En la determinación de los momentos respecto a los ejes coordenados, nos limitaremos a establecer el correspondiente al eje vertical $o\,Z$, por no existir fórmula alguna que, de un modo general, de el momento de la presión P, respecto a otros ejes. Imaginemos la superficie teórica de revolución que engendra S al girar alrededor de $o\,Z$ (fig. 382), y sea S' el área de la sección meridiana produci-

da por el plano YZ; el momento de la presión total sobre la superficie cerrada SS' con relación al eje oZ es nulo, por ser vertical el empuje que dicha superficie recibe; el de las presiones elementales sobre la superficie teórica también lo es, y así resulta que la suma de los momentos de P y P' será nula, y

$$M_z(P) = P' \cdot \overline{CA} = S' p_g \cdot \overline{CA},$$

siendo CA la distancia al eje oZ del centro de presión C de la superficie plana S'.

706. Presión de un gas sobre una superficie curva cualquiera.—Como el empuje que recibe una superficie cerrada, en el caso de un cuerpo sólido sumergido en un gas, se puede suponer nulo [**704**], se simplifica el procedimiento anterior para encontrar las proyecciones y momentos de la presión total sobre superficies curvas abiertas, obteniéndose las fórmulas

$$P_x = S' p, \quad P_y = S'' p, \quad P_z = S''' p,$$

por ser ahora la presión p constante en todos los puntos de la masa flúida.

Respecto a los momentos se obtienen con la misma facilidad, con relación a cualquier eje, y están expresados por las fórmulas

$$M_X(P) = S' p \cdot \overline{g'A}, \quad M_Y(P) = S'' p \cdot \overline{g''B}, \quad M_Z(P) = S''' p \cdot \overline{g'''C},$$

siendo ahora S', S'' y S''' las secciones meridianas de las superficies teóricas engendradas por S al girar alrededor de oZ, oY y oX respectivamente, y $\overline{g'A}$, $\overline{g''B}$ y $\overline{g'''C}$ las distancias al eje correspondiente del centro de gravedad de las indicadas secciones meridianas.

V

MOVIMIENTO Y EQUILIBRIO DE UN CUERPO EN EL INTERIOR DE UN LÍQUIDO

707. Resistencia del medio.—Cuando un sólido se desplaza en el interior de una masa líquida, experimenta de parte del *medio* una *resistencia* al movimiento, cuyo origen físico se encuentra en la necesidad de comunicar a las moléculas del flúido una parte de su energía, para abrirse paso a través de ellas. Si suponemos que un cuerpo, de sección transversal S y dotado de la velocidad W, ha pasado de la posición AA' a BB' en un tiempo t (fig. 383) comunicando su velocidad W a todas las moléculas flúidas contenidas en el cilindro $AA'BB'$, esta masa supuesta anteriormente en reposo, habrá adquirido una fuerza viva $\frac{\Sigma m W^2}{2}$ equivalente al trabajo desarrollado por la resistencia que el medio opone al desplazamiento del cuerpo; podríamos, pues, establecer, si los hechos pasaran como estamos suponiendo, la ecuación $\frac{\Sigma m W^2}{2} = Re$, o $\frac{S e \delta W^2}{2} = Re$, de donde $R = \frac{1}{2} S \delta W^2$.

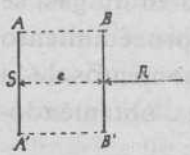


Fig. 383

La fórmula anterior es, desde luego, errónea por una serie de circunstancias que en la práctica se presentan, dando lugar a que no se realicen las hipótesis supuestas; pero de todos modos se considera como fundamental en la teoría del movimiento de los cuerpos a través de los flúidos, corrigiendo las inexactitudes que encierra por medio

de coeficientes empíricos, cuyo valor depende esencialmente de la forma de la parte anterior o *proa* del cuerpo y de la general del conjunto del móvil.

Según esto, podremos expresar la resistencia que opone un líquido al movimiento de un cuerpo sumergido, todo o en parte, por la fórmula $R = K \delta S W^2$, en la que K es el coeficiente de forma que al cuerpo considerado le corresponde. Cuando δ se pueda suponer constante, se suele incluir en el coeficiente de forma, siendo $R = K S W^2$.

708. Equilibrio de un cuerpo sumergido totalmente en un líquido.—Un sólido, sumergido totalmente en un líquido, se encuentra sometido a la pesantez

$$G = V' \delta' g = V' \pi'$$

aplicada al centro de gravedad g (fig. 384) y al empuje del líquido

$$P = V \delta g = V \pi$$

aplicado al centro de carena c; las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio son $P = G$ y $M_g [P] = o$; la primera exige que la densidad media del cuerpo sea igual a la del líquido, o bien $\pi = \pi'$, y la segunda que c y g estén en la misma vertical. El equilibrio será estable cuando g esté debajo de c, inestable en caso contrario, e indiferente cuando g y c coincidan.

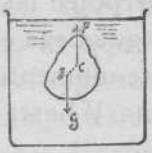


Fig. 384

709. Movimiento de un cuerpo sumergido totalmente en un líquido bajo la acción de la pesantez.—Si suponemos que el cuerpo sumergido tiene mayor o menor densidad que el líquido, se producirá una fuerza

$$F = P - G = Vg(\delta - \delta') = V(\pi - \pi')$$

de dirección vertical, que pondrá al cuerpo en movimiento

en sentido ascendente o descendente según sea $\delta > \delta'$ o $\delta < \delta'$. Además del movimiento de ascenso o descenso del centro de gravedad del cuerpo se originará una rotación alrededor de este punto, siempre que c y g no estén en la misma vertical.

Si se verifica que $\delta' > \delta$ la fuerza F es negativa y produce el descenso del sólido con movimiento acelerado; pero esta aceleración es decreciente, por la presencia de los valores crecientes de $R = K S W^2$; esta última fuerza llega a adquirir, si la duración del movimiento lo permite, un valor igual a F, y en este instante, produciéndose el equilibrio de las fuerzas F y R, el cuerpo continúa bajando con la velocidad W, que hasta aquel momento llegó a adquirir; la velocidad de régimen uniforme se puede calcular en función de cantidades conocidas, observando que corresponde a la igualdad

$$R + F = 0 \text{ o } K S W^2 = - V(\pi - \pi') \text{ y } W^2 = \frac{V(\pi' - \pi)}{K S}.$$

Cuando $\delta' < \delta$ se produce el movimiento de ascenso del cuerpo en las mismas condiciones que el de descenso, hasta que llega el cuerpo a la superficie libre del líquido; en este momento empieza a disminuir progresivamente la carena V hasta que la *fuerza de flotación*

$$F = V \delta g - V' \delta' g = V\pi - V'\pi'$$

se reduce a *cero*, en cuya posición, al cabo de algunas oscilaciones en sentido vertical, y suponiendo al centro de carena en la vertical del de gravedad, se establecerá el equilibrio y reposo del *cuerpo flotante*.

710. Equilibrio de cuerpos flotantes.—Definiciones.—La linea horizontal que la superficie libre del líquido señala en la de un flotante, en una posición de equilibrio cualquiera, se llama *línea de flotación*, su plano es el *plano de flota-*

ción correspondiente y el área comprendida dentro de la línea de flotación se llama *sección de flotación*; si separamos al flotante en un sentido cualquiera de la posición de equilibrio, cumpliendo siempre la condición de que el peso del líquido desalojado sea igual al peso del cuerpo, se formará una superficie $L\,L'$ (fig. 385), envolvente de los planos de flotación correspondientes, que se llama *superficie de flotación* y el lugar geométrico de los centros de las carenas señaladas constituye otra superficie $C\,C'$, llamada *de los centros de carena*. La intersección de los planos de flotación correspondientes a dos posiciones consecutivas del flotante se llama *eje de la inclinación* sufrida.

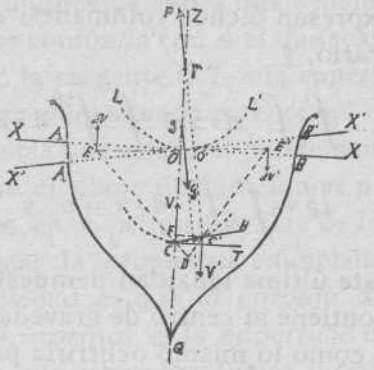


Fig. 385

De las definiciones anteriores se deduce que, en las oscilaciones de un flotante, la superficie de flotación permanece constantemente tangente a la superficie libre del líquido y los movimientos se verificarán como si aquella superficie rodara, apoyándose por un punto en el expresado plano horizontal. Inversamente los planos tangentes a la superficie $L\,L'$ determinan en el flotante secciones *isocarenas*, llamándose así las que sirven de límite a volúmenes iguales de carena.

711. Centro de gravedad de las secciones de flotación.—Hemos visto que en las sucesivas posiciones de un flotante, separado de la de equilibrio, la superficie $L\,L'$ permanece tangente al plano $X\,X$ (fig. 385) y vamos a demostrar que *el punto de tangencia, o, coincide con el centro de gravedad de la sección S de flotación.*

Hagamos sufrir al flotante una inclinación alrededor de

un eje, que supondremos proyectado en o, y tomemos por coordenados $o\,X$ y $o\,Z$ los que indica la figura, siendo el $o\,Y$ el de inclinación proyectado en o. La nueva posición del plano de flotación es $X'\,X'$ y evidentemente los volúmenes comprendidos entre $A\,o\,A'\,A$ y $B\,o\,B'\,B$ son iguales, por ser isocarenas las secciones $A\,B$ y $A'\,B'$, deduciéndose que las integrales $\int\int_A^o d\sigma\,.\,z$ o $\int\int_o^B d\sigma\,.\,z$, que expresan dichos volúmenes, serán iguales y de signo contrario, y

$$\int\int_A^o d\sigma z + \int\int_o^B d\sigma z = o \quad \text{o} \quad \int\int_A^B d\sigma z = o,$$

$$\text{tg}\,\alpha \int\int_A^B d\sigma x = o \quad \text{y} \quad \int\int_A^B d\sigma x = \Sigma m x = o\,;$$

esta última igualdad demuestra que el eje de inclinación contiene al centro de gravedad de la sección $A\,B$ (**125**-5.ª), y como lo mismo ocurriría para otra inclinación cualquiera, dicho centro tiene que ser el punto o de contacto de la superficie $L\,L'$ con la horizontal libre del líquido, donde se encuentran los ejes de inclinación correspondientes a los desplazamientos angulares de cualquier dirección que, a partir de la sección de flotación $A\,B$, puede dársele al cuerpo móvil.

712. Paralelismo del plano tangente a la superficie de los centros de carena con el de flotación correspondiente.—Vamos ahora a demostrar que *el plano tangente en C* (fig 385), *a la superficie de los centros de carena, es paralelo al de flotación A B.* Esto, que parece evidente en el caso de la figura 385, por la disposición simétrica del flotante, no lo es para los demás casos, y aun cuando, para abreviar, nos refiramos a dicha figura en la demostración, los razonamientos que vamos a hacer son completamente generales.

Démosle al flotante la inclinación α; sean C y C' los

centros de carena correspondientes a las dos posiciones del plano de flotación AB y $A'B'$; supongamos en D el centro de gravedad de la parte común a las dos carenas $A'oBQA'$, E y E' los correspondientes a los trozos $AoA'A$ y $BoB'B$; las rectas DE y DE' pasarán por C y C' respectivamente, verificando la relación $\frac{CD}{CE} = \frac{C'D}{C'E'}$ por la igualdad de los volúmenes $AoA'A$ y $BoB'B$, y esto prueba que la secante $CC'H$ es paralela a EE'. Si suponemos ahora que α disminuye, hasta hacer que $A'B'$ se confunda con AB, la secante CH se habrá convertido en la tangente CT a la superficie de carena y la recta EE' quedará situada en el plano de flotación AB, conservando estas dos rectas el paralelismo demostrado; esto nos dice que el plano de flotación es paralelo a las tangentes trazadas en C a la superficie de los centros de carena y tendrá lugar la propiedad enunciada.

Consecuencia de esta propiedad es que *el empuje del líquido es, en todos los casos, normal a la superficie de los centros de carena en el punto correspondiente*, puesto que dicho empuje es siempre vertical y acabamos de demostrar que el plano tangente en C, a la expresada superficie, es siempre horizontal.

También se deduce de las construcciones empleadas, por estar los puntos C y C' situados entre DE y DE', respectivamente, que las tangentes trazadas a la superficie de los centros de carena, dejarán todas a esta superficie hacia el mismo lado y dicha superficie será convexa en todos los puntos, pudiéndose representar la *indicatriz* de sus curvaturas, en un punto tal como el C, por una elipse cuyos ejes corresponderán a las secciones principales de la superficie de los centros de carena, y proporcionarán las curvaturas máxima y mínima de las diversas secciones normales trazadas por el punto C.

En el caso de un flotante que presente la simetría de la

figura 385 (caso de embarcaciones), uno de los ejes de la elipse indicatriz está situado en el plano de simetría y otro le es perpendicular.

713. Metacentros de un flotante. — Supongamos al cuerpo flotante en una posición de equilibrio (centros de gravedad y de carena en la misma vertical) e imaginemos que se le da una inclinación α infinitamente pequeña, alrededor de un eje cualquiera que pase por o (fig. 386), siendo C' el centro de carena correspondiente a la nueva posición; la normal a la superficie de los centros de carena en C' se cortará o cruzará con la normal en C; cuando se corten, el punto en que lo verifiquen, que es el centro de curvatura de la sección normal por C y C', se llama *metacentro* correspondiente al eje de inclinación empleado, y cuando no se corten recibe el mismo nombre el punto μ, pie de la perpendicular común a las dos normales $C\mu$ y $C'\nu$.

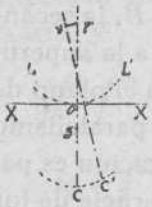


Fig. 386

Cuando el eje de inclinación es paralelo al eje mayor de la elipse indicatriz de las curvaturas (eje longitudinal en el caso de embarcaciones), la curvatura de la sección normal $C\,C'$ es la más pronunciada y el metacentro ocupa la posición más baja que a la posición de equilibrio dada puede corresponderle; por el contrario, cuando el eje de inclinación es paralelo al eje menor de dicha elipse (eje transversal de las embarcaciones), el metacentro se encuentra en la posición más elevada que puede tener en la de equilibrio considerada.

Entre estas dos posiciones extremas puede ocupar una cualquiera, en relación con la del eje de inclinación que se emplee, para producir el movimiento del flotante. Al metacentro correspondiente al eje de inclinación paralelo al mayor de la referida elipse indicatriz, le llamaremos metacentro *principal* de la posición de equilibrio dada.

714. Estabilidad del equilibrio de un flotante.—Supongamos el flotante de la figura 385 en su posición de equilibrio, correspondiente al plano de flotación $A\,B$, y separémosle de dicha posición dándole la inclinación α, infinitamente pequeña, alrededor de un eje cualquiera, que pase por o, teniendo en cuenta que para pasar el plano de flotación de $X\,X$ a $X'\,X'$, habrá sido preciso inclinar al flotante en el sentido positivo; en esta posición inclinada, se origina el par $[GP]$, cuyos vectores estarán aplicados en g el primero y en C' el segundo, siendo uno y otro normales al plano de flotación $X'\,X'$; pero la circunstancia demostrada de ser el empuje $[P]$ normal en C a la superficie de los centros de carena, hace que la línea de acción de $[P]$ pase por el metacentro μ, exactamente o a una distancia infinitamente pequeña, y esta consideración nos hace ver que, estando μ por encima de g, el par que se origina tiende a volver al flotante a su posición de equilibrio y, por el contrario, si μ estuviera más bajo que g, el par $[G\,P]$ le empujaría en el sentido de la inclinación α, produciendo la inversión del flotante.

En resumen, para que el equilibrio de un flotante, en una posición determinada, sea estable, *es preciso y basta que, estando el centro de gravedad y el de carena en la misma vertical, el metacentro principal, correspondiente a dicha posición, se encuentre por encima del centro de gravedad del cuerpo flotante;* puesto que el metacentro principal es el más bajo de los que corresponden a una posición cualquiera de equilibrio.

715. Distancia de los metacentros al centro de carena en las posiciones de equilibrio.—La influencia que en la estabilidad del equilibrio de un flotante tiene la posición del metacentro correspondiente, nos indica la conveniencia de determinar su posición. Refiriéndola a la del centro de carena, vamos a demostrar que *el metacentro correspondiente a*

un eje de inclinación cualquiera, trazado por el centro de gravedad de la sección de flotación, se encuentra sobre el centro de carena a la altura expresada por la fórmula $\overline{C\mu} = \frac{I}{V}$, *siendo* I *el momento de inercia de dicha sección de flotación, respecto al eje de inclinación, y* V *el volumen de la carena.*

Supongamos en cada punto de la carena AQB (fig. 385) aplicado un vector vertical ascendente igual al elemento de volumen correspondiente y en cada punto de la carena $A'QB'$ otro vector de las mismas condiciones, pero descendente; los primeros tendrán por resultante el vector V aplicado en C y los segundos el V' aplicado en C', formándose el par $[VV']$ cuyo momento, respecto al eje de inclinación proyectado en o, es

$$M_{oY}(VV') = V' \cdot \overline{C'F} = V \cdot \overline{F\mu} \operatorname{tg} \alpha,$$

o, por estar F infinitamente próximo a C,

$$M_{oY}(VV') = V \operatorname{tg} \alpha \, \overline{C\mu}.$$

Pero el conjunto de los dos sistemas vectoriales formados, equivale a los dos vectores dV y dV', aplicados en E y E' (centros de gravedad de los volúmenes parciales AoA' y BoB'), siendo dV y dV' evidentemente iguales y de sentido contrario. Consideremos ahora a los elementos de V y V', comprendidos en AoA' y BoB', teniendo por base el elemento $d\sigma$ de la sección de flotación AB y por altura las ordenadas z comprendidas entre AB y $A'B'$ se verificará

$$\int\int_A^o d\sigma z x + \int\int_o^B d\sigma z x = \int\int_A^B d\sigma z x =$$

$$= M_{oY}(VV') = V \operatorname{tg} \alpha \, \overline{C\mu}$$

y, por ser $z = x \operatorname{tg} \alpha$, se podrá simplificar la ecuación anterior, obteniéndose

$$\int\int_A^B d\sigma x^2 = V \cdot \overline{C\mu}, \text{ o } \overline{C\mu} = \frac{\int\int_A^B d\sigma x^2}{V} = \frac{I}{V},$$

como queríamos demostrar.

VI

MOVIMIENTO Y EQUILIBRIO DE UN CUERPO EN EL INTERIOR DE UNA MASA GASEOSA

716. Resistencia del medio.—Los razonamientos hechos en el número **707** para establecer la fórmula $R = K \delta S W^2$, como expresión general de la resistencia de un líquido al movimiento, en su interior, de un cuerpo sólido, son igualmente aplicables al caso de un cuerpo moviéndose en el interior de una masa gaseosa, salvo la diferencia que existirá para los valores de K en uno y otro caso. Según esto admitiremos que todo cuerpo moviéndose en el interior de un gas experimentará de parte de éste una acción, opuesta al movimiento, cuyo valor estará expresado por la fórmula $R = K \delta S W^2$, o $R = K S W^2$ cuando no sea necesario poner explícita la densidad del gas.

En el caso de grandes velocidades, como las que llegan a adquirir los proyectiles de las armas de fuego, se ha observado que la resistencia del aire crece en distinta proporción que el cuadrado de la velocidad y suelen emplearse fórmulas de la forma $R = K S W^n$ y otras más complicadas que dan, con valores convenientes de sus coeficientes y exponentes, valores más exactos que los obtenidos por la *ley del cuadrado:* sobre este asunto volveremos al tratar del movimiento de proyectiles en el aire.

717. Equilibrio de un cuerpo sumergido en un gas.—Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo sumergido en un gas son: la pesantez $G = V\delta' g = V\pi'$ y el empuje del gas $P = V\delta g = V\pi$, aplicadas en los centros de gravedad y carena respectivamente, siendo necesario y suficiente para el equilibrio, lo mismo que en el caso de líquidos, que la densidad media del cuerpo sea igual a la del gas y que los expresados centros estén situados en la misma vertical; además es necesario, para la estabilidad del equilibrio, que el centro de gravedad esté más bajo que el centro de carena.

Cuando las fuerzas $[G]$ y $[P]$ no son iguales, el cuerpo sumergido tomará un movimiento ascendente o descendente, con velocidad creciente, bajo la acción de la fuerza $[F] = [P] - [G]$ y de la resistencia del medio, hasta que se verifique la igualdad $F = R$, en cuyo instante el cuerpo continúa moviéndose con velocidad constante, determinada por la fórmula $W^2 = \dfrac{F}{KS}$.

718. Movimientos verticales de un globo aerostático.—El movimiento de los globos aerostáticos es un caso particular de movimiento en el interior de una masa gaseosa, de gran interés para el Oficial de Ingenieros, por cuyo motivo vamos a concretar a este caso el estudio de estos movimientos. Un globo aerostático ordinario está formado (fig. 387) por una envuelta esférica, de tela impermeable, cuyo interior se llena de un gas más ligero que el aire (hidrógeno o gas del alumbrado) y de la que se suspende la *barquilla*, donde se coloca el aeronauta con los aparatos, lastre y accesorios que para estos viajes se necesitan.

Fig. 387

Dos casos se suelen presentar en la subida de estos globos ordinarios: que el globo esté completamente lleno a la

partida, siendo su volumen constante, o que el globo parta sin estar lleno *(globo flácido)*, en cuyo caso su volumen será variable con la presión de las capas atmosféricas que vaya atravesando. En el primer caso es necesario dotar al globo de una manga o *apéndice*, que dé salida por la parte inferior al exceso de gas que la dilatación del flúido origina al elevarse el globo. En el segundo caso no necesita dicho apéndice, hasta que el globo llega al estado de *plenitud*, en cuyo momento, continuando la elevación, se produce la salida por el apéndice del gas sobrante, como ocurre en los globos llenos desde la partida.

719. Pesado del globo.—Tanto en el caso de globos llenos como de globos flácidos se efectúa, antes de la partida, la operación de *pesar* el globo, consistente en colocar en la barquilla sacos de lastre, de peso conocido, hasta que se reduzca a *cero* la fuerza ascensional ($P - G_0 = o$); esta operación tiene por objeto conocer el valor de F en el instante de la partida, pues si después de *pesado* el globo, se efectúa el deslastre l_0, para producir la ruptura del equilibrio y empezar la ascensión, será

$$F_0 = P - (G_0 - l_0) = P - G_0 + l_0 = l_0.$$

720. Fuerza ascensional remanente en el caso de globos llenos.—El valor de $F = P - G$ recibe el nombre de fuerza ascensional *remanente* del globo, en la capa atmosférica correspondiente a los valores variables de P y de G; para calcular con más facilidad el valor de F, observemos que, en la expresión de G, hay una parte que varía de un modo continuo, que es el peso $V\pi'$ del gas encerrado en el globo, y otra sensiblemente constante en tanto que no se hagan arrojes de lastre (peso de la envuelta, red, barquilla, aeronautas, lastre y accesorios); representando esta última parte por w, tendremos para expresión de F la fórmula

$$F = V\pi - V\pi' - w = V\pi(1 - d) - w,$$

en la que d representa la relación constante de los pesos específicos $\frac{\pi'}{\pi}$ a una altura cualquiera. Esta relación es igual a 0,12 para el hidrógeno comercial y 0,44 para el gas del alumbrado, de donde resulta

$$F = 0{,}88\ V\pi - w \quad \text{o} \quad F = 0{,}56\ V\pi - w,$$

según que la inflación se haga con el primero o el segundo de dichos gases.

Si la partida se supone al nivel del mar y la temperatura es $\tau = 0^0$, π_0 es igual a 1,293 Kg. y se obtiene para fuerza ascensional de partida

$$F_0 = 1{,}13\ V - w_0 = l_0$$

con globos llenos de hidrógeno, y

$$F_0 = 0{,}72\ V - w_0 = l_0$$

para globos llenos de gas del alumbrado; estas ecuaciones permiten conocer con bastante exactitud el peso w_0 de las partes sólidas del globo, en el instante de la partida, pues será

$$w_0 = 1{,}13\ V - l_0 \quad \text{o} \quad w_0 = 0{,}72\ V - l_0\,.$$

En lo sucesivo supondremos, cuando no se advierta lo contrario, que se trata de globos llenos de hidrógeno y usaremos la fórmula $F = 0{,}88\ V\pi - w$ para expresar la fuerza ascensional remanente del globo a una altura cualquiera y la $F_0 = 1{,}13\ V - w_0$ para la inicial de la ascensión.

721. Zona de equilibrio de un globo lleno. — Recibe este nombre la capa atmosférica donde la fuerza ascensional se reduce a *cero*; esta zona tiene que existir para un globo cualquiera, por ser indefinida la disminución del peso específico del aire y no poderse reducir w más de cierto límite.

La altura a que está situada se calculará determinando el valor de π que corresponde a la condición $0{,}88\ V\pi - w = 0$, o sea $\pi = \dfrac{w}{0{,}88\ V}$; sustituyendo en la fórmula del número **696'** resulta

$$z = 18400 \log \frac{1{,}293}{\pi} = 18400 \log \frac{1{,}13\ V}{w}.$$

Si no ha habido más deslastre que el inicial es $w = w_0 = 1{,}13\ V - l_0$ y si se han hecho otros arrojes de lastre $l_1, l_2 \ldots l_n$

$$w = w_0 - l_1 - \ldots - l_n = 1{,}13\ V - (l_0 + l_1 + \ldots + l_n) = 1{,}13\ V - l.$$

722. Paradoja aerostática.—Si en dos globos del mismo volumen, llenos de gases diferentes, se hace un mismo deslastre l, *la zona de equilibrio del globo lleno del gas más pesado está más alta que la correspondiente al gas más ligero.*

En efecto, si suponemos un globo lleno de gas del alumbrado, de volumen V y deslastre l, la altura de su zona de equilibrio es

$$z' = 18400 \log \frac{0{,}72\ V}{0{,}72\ V - l}$$

y como la fracción $\dfrac{0{,}72\ V}{0{,}72\ V - l}$ se puede suponer que proviene de restar a los dos términos de $\dfrac{1{,}13\ V}{w} = \dfrac{1{,}13\ V}{1{,}13\ V - l}$ la misma cantidad $0{,}41\ V$, será

$$\frac{0{,}72\ V}{0{,}72\ V - l} > \frac{1{,}13\ V}{1{,}13\ V - l} \text{ y } z' > z.$$

Esta propiedad se conoce en Aerostación con el nombre de *paradoja aerostática.*

723. Representación gráfica de la fuerza ascensional de un globo lleno a diversas alturas. — Si en el trazado gráfico de la figura 377 [**696'**], se suponen las abscisas multiplicadas por el factor 0,88 V, se tendrá la curva $A\,B$ de la figura 388, cuyas abscisas representarán el valor del producto

$$0{,}88\ V\pi = 0{,}88\ V \times 1{,}293 \times 10^{-\frac{z}{18400}} = 1{,}13\ V \times 10^{-\frac{z}{18400}}$$

y si se traza una paralela $a\,b$ al eje $o\,Z$, cuya distancia $o\,a$ sea igual a w, resultará que las abscisas de la curva $A\,B$, con relación a la paralela $a\,b$ trazada, representarán el valor de $F = 0{,}88\ V\pi - w$, o sea la fuerza ascensional remanente del globo a una altura cualquiera de las comprendidas en los límites del dibujo; así, trazando la $a_0\,b_0$, cuya abscisa es $oa_0 = w_0$, se ve que a 1000 metros de altura, la fuerza ascensional está representada por el segmento $m\,n$, y como el punto de intersección de $a_0\,b_0$ con la curva indica la anulación de F, la zona de equilibrio estará en Z_0 a *3000* metros de altura.

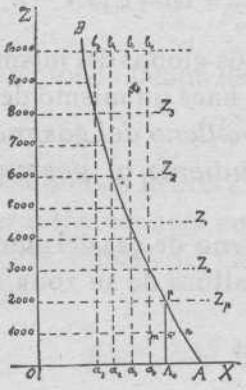


Fig. 388

Si el deslastre inicial hubiera sido $l = l_0 + l_1$, sería $oa_1 = w_1 = w_0 - l_1$ y la zona de equilibrio estaría en Z_1 a *4500* metros de altura, y lo mismo se obtendría para otro deslastre cualquiera.

724. Fuerza ascensional remanente en la subida de globos flácidos. — Supongamos ahora un globo con un *grado de flacidez* cualquiera $\frac{V_0}{V}$, correspondiente a la parte V_0 de su volumen que se ha llenado de gas; este volumen

V_0 y el grado de flacidez serán conocidos por la cantidad de gas que se haya inyectado en el globo, para efectuar la inflación parcial.

Después de pesado el globo es indudable que, lo mismo que en el caso de globos llenos, la fuerza ascensional de partida $F_0 = 0{,}88\ V_0\ \pi_0 - w_0$, estará representada por el deslastre inicial l'_0, puesto que $0{,}88\ V_0\ \pi_0 - (w_0 + l'_0) = o$, y vamos a demostrar que *en los globos flácidos la fuerza ascensional remanente,* $F = 0{,}88\ V\pi - w_0$, *es constantemente igual a* F_0, *hasta llegar a la zona de plenitud.*

En efecto, de la ecuación característica $p\ V = p_0\ V_0 =$ *constante* y de la relación $\frac{p}{\pi} = \frac{p_0}{\pi_0}$, se deduce $\pi \frac{p_0}{\pi_0} V =$ *constante,* y lo mismo $V\pi =$ *constante;* de modo que en tanto que la masa gaseosa tenga libertad para dilatarse en el interior del globo, sin salir por el apéndice, y suponiendo que no se haga más arroje de lastre que el inicial l'_0, el valor de $F = 0{,}88\ V\pi - w$ permanecerá constante con el valor

$$l'_0 = 0{,}88\ V_0\ \pi_0 - w_0 = 1{,}13\ V_0 - w_0\ .$$

725. Zona de plenitud de un globo flácido.—Esta zona está caracterizada por la condición $V\pi = V_0\ \pi_0$: el valor de π correspondiente es

$$\pi = \pi_0 \frac{V_0}{V} \quad \text{y} \quad z = 18400 \log \frac{1{,}293}{\pi} = 18400 \log \frac{V}{V_0}\ ,$$

siendo independiente del arroje de lastre que se haya efectuado para hacer la ascensión.

726. Zona de equilibrio del globo flácido.—Al llegar a la zona de plenitud el globo flácido se comporta como un globo lleno y continúa subiendo, con fuerza ascensional decreciente, hasta llegar a la zona de equilibrio en que F se reduce a *cero.* La altura de esta zona estará dada por la fórmula

$$z' = 18400 \log \frac{1{,}293}{\pi} = 18400 \log \frac{1{,}293}{\frac{w}{0{,}88\ V}} = 18400 \log \frac{1{,}13\ V}{w}$$

y si no ha habido más deslastre que el inicial, será

$$w = w_0 = 1{,}13\ V_0 - l'_0 \text{ y } z' = 18400 \log \frac{1{,}13\ V}{1{,}13\ V_0 - l'_0}.$$

727. Representación gráfica de la fuerza ascensional en el caso de globos flácidos. – El trazado hecho en la figura 388, para un globo de volumen V, puede utilizarse para los casos de subir el globo en estado de flacidez; bastará para ello trazar la recta $A_0 p$, paralela a $o Z$, por el punto A_0 determinado por la abscisa $o A_0 = 1{,}13\ V_0$; el punto en que esta paralela corta a la curva $A B$ corresponde a la zona de plenitud, pues en él se verifica $1{,}13\ V_0 = 0{,}88\ V \pi$, o $0{,}88\ V_0 \pi_0 = 0{,}88\ V \pi$ y $V_0 \pi_0 = V \pi$, que es la condición que caracteriza a dicha zona.

Según esto, las abscisas del trazado $A_0 p B$, con relación a $o Z$, representarán el valor del término $0{,}88\ V \pi$, constante hasta Z_p y decreciente a mayores alturas; si ahora se trazan las paralelas $a_0 b_0$, $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, etc., y contamos dichas abscisas desde estas rectas, se tendrá la fuerza ascensional verdadera, $F = 0{,}88\ V \pi - w$, a cualquier altura y para un deslastre l determinado.

728. Tiempo empleado por un globo esférico en llegar a las zonas de plenitud y equilibrio. – El movimiento uniformemente acelerado que produciría la fuerza constante $F_0 = l$, en el caso de globos flácidos, se retarda por la acción de la resistencia del aire, verificándose al poco tiempo de la partida el equilibrio de F_0 y $J = K S W^2$ y adquiriendo el globo una velocidad de régimen

$$W^2 = \frac{F_0}{K S} = \frac{l}{K \pi R^2} \quad \text{o} \quad W = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{l}{0{,}1}} = \frac{\sqrt{10\ l}}{R},$$

por ser, aproximadamente, en los globos esféricos $J = 0{,}1\ R^2\ W^2$. Suponiendo la velocidad constante desde la partida y siendo h la altura de la zona de plenitud, tendremos

$$h = W \cdot t \quad \text{y} \quad t = \frac{h}{W} = \frac{h\,R}{\sqrt{10\,l}}.$$

Desde la zona de plenitud a la de equilibrio la fuerza ascensional es decreciente; esto da lugar a que el movimiento debido a F y J sea retardado y se admite que el tiempo t' que tarda el globo en recorrer dicha altura h' es $t' = 1{,}40\ \frac{h'\,R}{\sqrt{10\,l}}$; el total en llegar a la zona de equilibrio será

$$T = t + t' = \frac{R}{\sqrt{10\,l}}\,(h + 1{,}40\,h').$$

En los globos llenos su zona de plenitud está a la altura $h = o$ y resulta, para el tiempo que tarda en llegar a la zona de equilibrio de altura $h' = H$

$$T = \frac{1{,}40\,R\,H}{\sqrt{10\,l}}.$$

729. Presión atmosférica en las zonas de equilibrio.— Conocido el valor de π en la capa atmosférica correspondiente a la altura de equilibrio, se deduce la presión a dicha altura, por las fórmulas establecidas en el número **696**.

730. Descensos del globo.—Si se supone equilibrado un globo en la zona de altura $z = H$ y, por la maniobra de la válvula de escape, se produce la salida de una cierta cantidad de gas, el globo pasa al estado de flacidez, cuyo grado $\frac{V_o}{V}$ dependerá del tiempo que haya estado abierta la válvu-

la, e inmediatamente la fuerza ascensional $F = 0{,}88\ V\pi - w$, que era nula en dicha zona, toma el valor negativo $-F_o = 0{,}88\ V_o\pi - w$, descendiendo el globo bajo la acción de esta fuerza constante y la resistencia del aire $J = o,1\ R^2\ W^2$, hasta adquirir la velocidad de régimen $W^2 = \frac{10\ F_o}{R^2}$.

Esta velocidad puede ser peligrosa en la llegada a tierra; en la práctica se refrena con arrojes de lastre, o con el uso de la *cuerda freno.* Al llegar al suelo, si no hay personal que auxilie la toma de tierra, se maniobra la *banda de desgarre,* que produce la desinflación total del globo y evita el movimiento de arrastre del viento a flor de tierra y la reelevación del mismo por la salida de los aeronautas de la barquilla.

731. Globos con ballonet o cámara de aire.—Para reunir en un solo aerostato las ventajas de los globos llenos y de los flácidos, produciendo a voluntad del piloto, dentro de ciertos límites, uno y otro estado del globo, se coloca en el interior de éstos una cámara de aire, aislada del gas, llamada *ballonet,* en la que se puede, por medio del ventilador, maniobrado en la barquilla, inyectar o extraer el aire para hacer que el globo quede lleno o flácido según se desee. El efecto principal que el *ballonet* produce es economizar una gran cantidad de lastre, por el empleo como tal del aire contenido en dicha cámara, que se pierde y se recupera a voluntad, cosa que no ocurre con el lastre ordinario.

732. Globos con propulsor.—Los vehículos aéreos pueden estar dotados de un propulsor que les comunique cierta velocidad propia en sentido horizontal, dándole aptitud para trasladarse de un punto a otro, señalado de antemano, dentro de ciertos límites.

La figura 389 indica en líneas generales la forma de un dirigible; las fuerzas que actúan sobre el sistema son: la

pesantez G aplicada en g, el empuje vertical P aplicado en C (centro de carena del globo), el esfuerzo de propulsión θ en el árbol de la hélice y la resistencia R del aire, que se opone al movimiento y cuya línea de acción, más o menos inclinada, suele pasar por encima del punto C. Los puntos C y g deben estar en la misma vertical en la posición de reposo del dirigible, por ser $[P]$ y $[G]$ las únicas fuerzas que actúan sobre él en dicho estado.

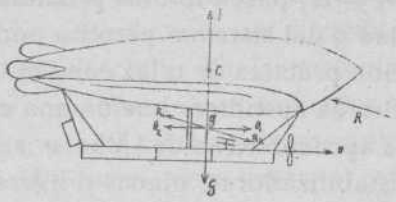


Fig. 389

733. Pares perturbadores y par estabilizador. — Si suponemos al dirigible marchando con una cierta velocidad relativa en la masa atmosférica, por efecto del esfuerzo θ desarrollado en la hélice propulsora, se obtendrá el movimiento del centro de gravedad del dirigible, trasladando a este punto g las fuerzas enumeradas antes y considerando la resultante de $[\theta]$ y $[R]$ (puesto que $[P]$ y $[G]$ se destruyen).

La traslación de fuerzas al punto g origina dos pares, uno debido al traslado de $[\theta]$ y otro al de $[R]$ y uno y otro producen el efecto de hacer girar al dirigible, elevando la proa y presentando a la dirección del movimiento mayor superficie que la correspondiente a la posición horizontal. El efecto que producen estos pares hace que se les llame *perturbadores* del movimiento del dirigible.

El giro indicado del eje del aerostato, por efecto de los pares perturbadores, hace que el centro de carena C se salga de la vertical del centro de gravedad y se origina un par, $[PG]$, que tiende a restablecer la horizontalidad del eje del globo, por cuyo motivo se le llama *par estabilizador*.

Para disminuir los efectos perjudiciales de los pares

perturbadores, conviene que la organización general del conjunto se haga en forma tal que las líneas de acción de $[\theta]$ y $[R]$ pasen lo más próximas posible al centro de gravedad g del sistema; pero no pudiéndose conseguir la realización práctica de tales condiciones, se colocan en la popa ciertos apéndices que de una manera permanente producen la aproximación de $[R]$ a g y se disponen otras superficies estabilizadoras, planas o ligeramente curvas, cuya inclinación gradúa el piloto, produciendo a voluntad la inclinación del eje del dirigible por encima o por debajo de la horizontal: estas superficies constituyen el *timón de profundidades*.

734. Sector abordable por el dirigible.—Si se conoce la velocidad del viento y la propia que puede desarrollar un dirigible, se determina el sector abordable por el globo, por la construcción geométrica que se estudió en Cinemática en la teoría del movimiento relativo **(257)**. La orientación conveniente se consigue por la maniobra del *timón de dirección*, que suele estar constituido por dos planos paralelos, próximos uno a otro y colocados verticalmente en la popa del dirigible: la inclinación a uno u otro lado de estos planos hace que, por la acción del aire, se incline en sentido contrario el eje del aerostato, tomando el rumbo que se desee.

735. Efecto sustentador producido por la resistencia del aire.—La resistencia R del aire, una vez trasladada al centro g, se puede descomponer en la dirección del movimiento, señalada por el árbol de la hélice, y en la dirección perpendicular; la primera representa el esfuerzo de tracción que tiene que desarrollar el motor, para marchar con velocidad constante en sentido horizontal, y la segunda se suma al empuje $[P]$ produciendo un efecto de sustentación análogo al de dicho empuje, dando lugar a una *sobre-elevación* de la zona de equilibrio, y cuya sobre-elevación

dependerá de la velocidad del globo con la cual está relacionada directamente.

736. Fundamento del funcionamiento de los aeroplanos.—La descomposición, hecha en el número anterior, de la resistencia del aire sobre la superficie de un dirigible, hace concebir la posibilidad de prescindir de la sustentación $[P]$ del aerostato, si la componente perpendicular al movimiento llegara a adquirir valores capaces de reemplazar el efecto sustentador de $[P]$; pero para llegar a esta sustitución, se precisarán grandes velocidades que sólo podrán conseguirse haciendo que la componente de $[R]$ opuesta al movimiento sea pequeña relativamente.

Estas condiciones, lejos de ser contradictorias, se unen para dar solución al problema de la *aviación*, mediante el empleo de superficies planas o ligeramente curvas, que presentando poca sección transversal a la dirección del movimiento, permitirán las grandes velocidades necesarias para que la componente de sustentación adquiera el valor que sea preciso para conseguir, por sí sola, el efecto sustentador que en los dirigibles producía el empuje $[P]$ del volumen de aire desalojado.

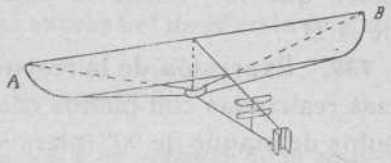


Fig. 390

737. Organización general de un aeroplano.—Según la disposición que tengan las superficies sustentadoras, en uno o en dos órdenes paralelos, se les da el nombre de *monoplanos* o el de *biplanos*; la figura 390 es un esquema de los primeros y la 391 de los segundos; el plano $A\,B$ de la figura 390 y los $\overline{A\,B}$ y $\overline{A'\,B'}$ de la 391 son las

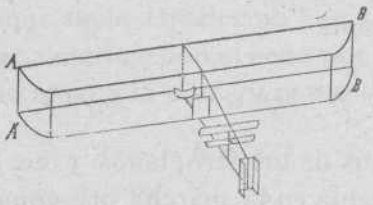


Fig. 391

superficies sustentadoras, llevando todos ellos los timones de profundidades y de dirección, análogos a los de los dirigibles, y el motor, hélices y demás accesorios que exige la maniobra de tales aparatos.

738. Angulo de ataque.—Centro de presión.—Cuando un plano $A\,B$ (392) se mueve en un medio resistente, el ángulo i que forma su dirección con la del movimiento W, se llama *ángulo de ataque* del plano; y se observa que el punto de aplicación de la resistencia R se aproxima sensiblemente al borde de ataque del plano, cuando dicho ángulo disminuye de 90° a 0°; para los valores que en la práctica de la aviación suele tener i, menores que 15°, oscila la distancia $A\,C$ entre 0,20 y 0,40 de $A\,B$.

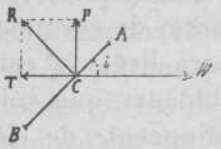


Fig. 392

739. Expresión de la resistencia del aire.—Las experiencias realizadas con planos cuadrados, marchando con ángulos de ataque de *90°* (planos ortogonales), han permitido dar al coeficiente K de la fórmula $R = K\,S\,W^2$ el valor medio $K = 0{,}08$ (*), que consignamos con la advertencia de ser un término medio entre resultados muy divergentes, obtenidos por diversos experimentadores y, por consiguiente, de poca confianza para las aplicaciones prácticas.

Si el plano, en vez de marchar ortogonalmente, forma un ángulo de ataque cualquiera i, se ha establecido empíricamente por *Renard* la fórmula

$$R = 2\,K\,S\,W^2 \operatorname{sen} i,$$

aplicable a los casos ordinarios de los aeroplanos y en la que K conserva el valor que tenía en la marcha ortogonal.

(*) Se suponen las experiencias hechas con la presión atmosférica de *760* milímetros y *15°* de temperatura.

Si se trata de un plano rectangular, se ha visto que influye en el valor de R la forma más o menos alargada del rectángulo y se hace intervenir este detalle en la fórmula, mediante el coeficiente $m = \frac{a-b}{a+b}$ que toma el valor $m = o$ para el caso del cuadrado, $m = +1$ para un rectángulo alargando indefinidamente en el sentido de su longitud ($a = \infty$) y $m = -1$ para el caso de alargamiento indefinido en el sentido de la anchura ($b = \infty$).

La resistencia del aire se expresa en estos casos por la fórmula de *Soreau*

$$R = K\,S\,W^2 f(m\,i) = K\,S\,W^2 \left(1 + (1+m)^2\right) \operatorname{sen} i\,,$$

que se reduce a la de Renard para $m = o$. Representando por n el valor $\left(1 + (1+m)^2\right)$, se expresa el de R en la forma

$$R = n\,K\,S\,W^2 \operatorname{sen} i.$$

740. Componentes de sustentación y de arrastre de la resistencia del aire.—Proyectando a R (fig. 392) sobre la dirección W del movimiento y sobre la perpendicular, se obtienen las componentes

$$P = n\,K\,S\,W^2 \operatorname{sen} i \cos i \quad \text{y} \quad T = n\,K\,S\,W^2 \operatorname{sen}^2 i,$$

que, por tratarse de los pequeños valores que al ángulo de ataque suele dársele, no hay gran inconveniente en simplificar, sustituyendo el seno por el arco y suponiendo el coseno igual a la unidad; con esta simplificación resulta

$$P = n\,K\,S\,W^2\,i \quad \text{y} \quad T = n\,K\,S\,W^2\,i^2.$$

Como la resistencia del aire no se ejerce sólamente sobre las superficies sustentadoras, hay que contar con los incrementos de P y T que produce la acción del aire sobre

el resto del aparato; el incremento de P es completamente despreciable, pero no así el de T, que afecta la forma $T' = K\sigma' W^2$, y que es preciso sumar a T.

741. Modificación en el caso de sustentadores curvos. – En las fórmulas anteriores se ha supuesto que las superficies sustentadoras eran planas y como la práctica ha demostrado la mayor eficacia de las curvas, indicaremos las modificaciones que esta disposición obliga a introducir, empezando por definir lo que se entiende por ángulo de ataque de dichas superficies curvas en una posición determinada.

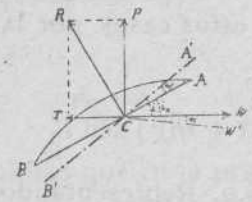


Fig. 393

Supongamos en la fig. 393 que el plano $A\,B$, base del sustentador, forma con la dirección del movimiento, W, el ángulo i_0 y hagamos girar el sustentador alrededor de C, hasta que tome una dirección $C\,W'$, en que desaparezca la componente de sustentación de R; el ángulo $i = i_0 + \alpha$ que forma la base $A\,B$ del sustentador con la dirección $C\,W'$, es el *ángulo de ataque del sustentador curvo* en la posición $A\,B$. Este ángulo se determina con más facilidad, trazando la recta $A'\,B'$ que forme con la $A\,B$ el ángulo α, y considerando como ángulo de ataque el que forma $A'\,B'$ con la dirección del movimiento. El plano $A'\,B'$, que se supone acompañando al sustentador en todas sus posiciones, se llama *plano ficticio de ataque*.

Respecto al centro de presión, sobre los sustentadores curvos, sólamente se sabe que se aproxima al borde de ataque cuando disminuye el ángulo i; pero no hay experiencias definitivas que permitan señalar, con probabilidades de acierto, la situación de dicho centro.

742. Componentes de la resistencia del aire sobre sustentadores curvos. – Admitida la definición que hemos dado en

el número anterior de ángulo de ataque, se ha visto que para los valores corrientes de i se pueden admitir, sin modificación, los de P correspondientes a los sustentadores planos, $P = n\,K\,S\,W^2\,i$; pero la fórmula de T tiene que adicionarse de un sumando independiente de i, de la forma $T'' = K\,\sigma''\,W^2$, y agregar, además, un nuevo factor empírico r al término dependiente de i, siendo

$$T = n\,K\,S\,W^2\,r\,i^2 + K\,\sigma''\,W^2.$$

743. Ecuaciones del movimiento uniforme de un aeroplano.—Supongamos el esquema de aeroplano indicado en la figura 394: $A\,B$ es el plano ficticio de ataque, equivalente a las superficies sustentadoras, δ la pendiente de la trayectoria rectilínea que se supone sigue el centro de gravedad g del aeroplano, θ_δ el esfuerzo motor desarrollado por la hélice, G el peso del aparato y T' la resistencia al arrastre de las diversas piezas y órganos del aeroplano, con excepción del sustentador cuya componente de arrastre es T.

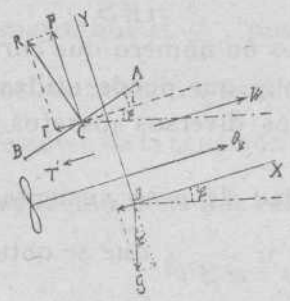


Fig. 394

Tomemos por ejes coordenados los $g\,X$ y $g\,Y$ señalados en la figura, el primero paralelo a la dirección W del movimiento y el segundo perpendicular al anterior en el plano de simetría del aparato; por tratarse de un movimiento uniforme y rectilíneo se verificarán las ecuaciones $\Sigma\,X = o$ y $\Sigma\,Y = o$, que expresan que la suma de proyecciones de las fuerzas que obran sobre el sistema, sobre dichos ejes, ha de ser nula: desarrollando estas ecuaciones, tendremos:

$$\Sigma\,X = \theta_\delta - G\,\mathrm{sen}\,\delta - n\,K\,S\,W^2\,r\,i^2 - K\,\sigma''\,W^2 - K\,\sigma'\,W^2 =$$

$$= \theta_\delta - G \operatorname{sen} \delta - n K S W^2 r i^2 - K \sigma W^2 = o,$$

$$\Sigma Y = n K S W^2 i - G \cos \delta = o,$$

habiendo supuesto en la primera $\sigma = \sigma' + \sigma''$.

Si se supone que el ángulo de pendiente δ es pequeño, se convierten las ecuaciones anteriores en

$$\theta_\delta = G \delta + n K S W^2 r i^2 + K \sigma W^2 \quad \text{y} \quad G = n K S W^2 i.$$

744. Consecuencias de las ecuaciones anteriores. — De las ecuaciones del movimiento uniforme, que acabamos de establecer, se deducen las siguientes consecuencias:

1.ª *En un aeroplano determinado, la velocidad W sólo puede hacerse variar cambiando el ángulo de ataque,* pues de la segunda ecuación resulta $W^2 . i = \dfrac{G}{n K S} = constante$. El valor de esta constante es un número que *caracteriza* a cada modelo de aeroplano y que puede utilizarse en los estudios comparativos de los diversos aparatos voladores.

2.ª El esfuerzo motor por unidad de peso sustentado, en marcha horizontal, es $\dfrac{\theta}{G} = r i + \dfrac{\sigma}{n S i}$, que se obtiene dividiendo miembro a miembro las ecuaciones del movimiento y haciendo $\delta = o$, y esto nos dice que *en cada aeroplano hay un ángulo de ataque especial y una velocidad de régimen en marcha horizontal, para los cuales el esfuerzo motor* $\dfrac{\theta}{G}$ *toma un valor mínimo.* El ángulo de ataque correspondiente a dicho mínimo es el valor $i_0 = \sqrt{\dfrac{\sigma}{n r S}}$, que anula al coeficiente diferencial $\dfrac{d \dfrac{\theta}{G}}{d i} = r - \dfrac{\sigma}{n S i^2}$ y se dice que el aeroplano se desplaza con

marcha normal (marcha núm. 1 de Soreau), cuando lleva el expresado ángulo de ataque, que corresponde al consumo mínimo de combustible y máxima duración del viaje aéreo.

El esfuerzo motor correspondiente a la *marcha normal* horizontal es

$$\frac{\theta_0}{G} = r\sqrt{\frac{\sigma}{n\,r\,S}} + \frac{\sigma}{n\,S}\sqrt{\frac{n\,r\,S}{\sigma}} = 2\sqrt{\frac{\sigma\,r}{n\,S}}$$

y la velocidad de régimen que con esta marcha se obtiene es

$$W_0^2 = \frac{G}{n\,K\,S}\cdot\sqrt{\frac{n\,r\,S}{\sigma}} = \frac{G}{K}\sqrt{\frac{r}{n\,S\,\sigma}}\,.$$

3.ª Si obrando sobre el motor se produce un esfuerzo $\frac{\theta'}{G}$, mayor que el $\frac{\theta_0}{G}$, puede seguir el aeroplano marchando horizontalmente, dando al ángulo de ataque los valores que resulten de la ecuación de segundo grado $\frac{\theta'}{G} = r\,i + \frac{\sigma}{n\,S\,i}$; esta ecuación tiene dos raíces de la forma

$$i_1 = i_0 + \alpha \quad \text{e} \quad i_2 = i_0 - \alpha'$$

y *si el exceso de esfuerzo motor se ha producido para aumentar la velocidad, será preciso tomar el ángulo de ataque* $i_2 = i_0 - \alpha'$, pues con el $i_1 = i_0 + \alpha$ se obtiene el resultado paradójico de emplear dicho exceso de fuerza motriz en disminuir la velocidad del aparato.

4.ª *El esfuerzo motor por unidad de peso sustentado, en marcha normal, es el mismo a cualquier altura; pero la velocidad de régimen correspondiente a un valor de* $\frac{\theta}{G}$ *es mayor cuanto más elevado esté el aeroplano.* Basta observar que el valor de $\frac{\theta_0}{G} = 2\sqrt{\frac{r\,\sigma}{n\,S}}$ es independiente

de K y, en cambio, el de $W_0^2 = \frac{G}{K}\sqrt{\frac{r}{n S_\sigma}}$ depende de dicha variable que, según sabemos, es función directa de la densidad del aire.

5.ª *Al variar el esfuerzo motor normal de un aeroplano, sin modificar el ángulo de ataque, la trayectoria deja de ser horizontal, produciéndose la subida o descenso del aparato.* En efecto, el esfuerzo motor por unidad de peso sustentado, en el caso de una pendiente ϵ, es $\frac{\theta_\epsilon}{G} = \frac{\theta}{G} + \epsilon$ y esta fórmula nos dice, que cuando $\frac{\theta_\epsilon}{G}$ sea mayor que $\frac{\theta}{G}$, ϵ es positivo y el aparato subirá y, por el contrario, si $\frac{\theta_\epsilon}{G}$ es menor que $\frac{\theta}{G}$ el aeroplano descenderá con la pendiente $\epsilon = \frac{\theta_\epsilon - \theta}{G}$.

745. Parada del motor.—Graduando convenientemente la disminución del esfuerzo motor, puede descender un aeroplano con una pendiente tan suave como desee el aviador; pero unas veces por circunstancias de localidad en el *aterrizaje* y otras por averías inevitables que pueden ocurrir en el motor, se impone la necesidad de descender en *vuelo plano,* o sea con el motor parado y será interesante averiguar el ángulo de ataque más conveniente para esta clase de vuelos.

Al parar el motor se suele producir un brusco descenso, con movimiento variado, hasta que se establece el régimen rectilíneo y uniforme con velocidad $W^2 = \frac{G}{n K S i}$ y pendiente $\epsilon = -\frac{\theta}{G}$, de donde resulta que el ángulo de ataque

más conveniente será el mismo $i_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{n r S}}$ que correspondía al mínimo de $\frac{\theta}{G}$.

El ángulo i_0 y la pendiente $\mathcal{E}_0$ que le corresponde están relacionados por la ecuación

$$\mathcal{E}_0 = 2\sqrt{\frac{\sigma r}{n S}} = 2 r \sqrt{\frac{\sigma}{n r S}} = 2 r i_0 \text{ o } i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{2 r}$$

y esto nos dice que, en los vuelos planos, debe hacerse que el ángulo de ataque se aproxime a $\frac{\mathcal{E}_0}{2 r}$, o bien, puesto que r difiere poco de la unidad, será conveniente que *el ángulo de ataque sea sensiblemente igual a la mitad del ángulo de pendiente de la trayectoria;* esta propiedad se conoce en aviación con el nombre de *teorema de Ferber.*

CAPITULO NOVENO

Dinámica especial de las fuerzas instantáneas

I

PERCUSIONES

746. Fuerzas instantáneas.—En todo lo que hasta ahora hemos estudiado, en esta parte de la Mecánica, se ha supuesto a las fuerzas que manejábamos de tal naturaleza, que necesitaban actuar durante intervalos de tiempo finitos, para producir en los móviles efectos finitos, siendo siempre de carácter infinitesimal los que producían en tiempos diferenciales.

Esta hipótesis, sostenida en lo anterior, no quiere decir que no existan fuerzas que puedan producir los indicados efectos finitos en intervalos de tiempo, tan excesivamente cortos, que pueden suponerse de naturaleza diferencial: tal ocurre, por ejemplo, en la acción producida por el golpe de un martillo sobre un péndulo, u otro objeto cualquiera, y, en general, en las acciones mutuas que se desarrollan en el *choque* de los cuerpos materiales.

Para distinguir estas fuerzas de las *continuas* que antes se han considerado, se les da el nombre de *instantáneas*, y en este capítulo nos vamos a ocupar de establecer algunas propiedades relativas a las mismas, que proporcionan el medio de hacerlas intervenir en los cálculos mecánicos.

747. Percusiones. — Las impulsiones **(438)** de las fuerzas instantáneas reciben el nombre de *percusiones* y suponiendo que su acción se ejerce en un tiempo infinitamente pequeño, verificarán las igualdades [**511**]

$$\int_t^{t+dt} X\,dt = X\,dt = \Delta \Sigma m \frac{dx}{dt},$$

$$\int_t^{t+dt} Y\,dt = Y\,dt = \Delta \Sigma m \frac{dy}{dt},$$

$$\int_t^{t+dt} Z\,dt = Z\,dt = \Delta \Sigma m \frac{dz}{dt},$$

que obligarían a aceptar valores modulares infinitamente grandes para las fuerzas instantáneas; como esto no puede verificarse y la práctica pone de manifiesto los valores finitos de los últimos miembros, es preciso admitir que, por rápida que sea la acción de dichas fuerzas, la duración de su acción no es infinitamente pequeña, y en este caso las percusiones se presentan como impulsiones totales, correspondientes a un intervalo de tiempo $\Delta t = t - t_0$, tan pequeño, que puede admitirse que durante el mismo *no adquieren variación sensible las posiciones de los puntos del sistema móvil,* y del mismo modo *se considerarán nulos los efectos que, durante la acción de la percusión, puedan producir las fuerzas ordinarias aplicadas al sistema móvil.*

La percusión producida por una fuerza instantánea tiene como punto de aplicación el de la fuerza y sus proyecciones, que representaremos por a, b y c, tienen por expresión simbólica las integrales

$$a = \int_{t_0}^{t} X\,dt, \quad b = \int_{t_0}^{t} Y\,dt, \quad c = \int_{t_0}^{t} Z\,dt;$$

pero siendo sumamente difícil la averiguación de los valores de X, Y y Z en esta clase de fuerzas, así como el de la duración $\Delta t = t - t_0$, se determina el vector $[P] \equiv [a] + [b] + [c]$ por las fórmulas

$$a = \Delta \Sigma m \frac{dx}{dt}, \quad b = \Delta \Sigma m \frac{dy}{dt}, \quad c = \Delta \Sigma m \frac{dz}{dt},$$

que constituyen la expresión analítica de la equipolencia

$$[P] \equiv \Delta \Sigma m [v] \equiv \Sigma m [v] - \Sigma m [v_0].$$

748. Distintas clases de percusiones que pueden actuar sobre un sistema material.—Las percusiones que en un instante determinado puede sufrir un sistema material, se clasifican en *directamente aplicadas* y *debidas a los enlaces* del sistema, e independientemente de esta clasificación, podrán ser también *exteriores* o *interiores;* es evidente que estas últimas, debidas a las acciones mutuas que entre los diversos elementos del sistema pueden ejercerse, serán, de dos en dos, iguales y directamente opuestas, anulándose por consiguiente las proyecciones y momentos del conjunto de todas ellas con relación a un eje cualquiera.

En las percusiones debidas a los enlaces de un sistema material hay que tener en cuenta, para las aplicaciones, que los respectivos enlaces puedan desaparecer o subsistir después de verificada la percusión correspondiente y de aquí que, en los problemas en que intervengan dichas percusiones, deben examinarse separadamente los casos de *persistencia* o *no persistencia* de los referidos enlaces.

749. Cantidad de movimiento y fuerza viva debida a las velocidades perdidas.—Si un punto material pasa bruscamente, por efecto de una percusión, de la velocidad $[v_0]$ a la velocidad $[v]$, experimenta esta magnitud mecánica el incremento gráfico $\Delta [v] \equiv [v] - [v_0]$ y este vector $\Delta [v]$, cambiado de signo,

$$-\Delta[v] \equiv [v_0] - [v] = [W]$$

se llama *velocidad perdida* por el punto considerado al recibir la percusión.

La expresión $m[W] = -\Delta m[v] \equiv m[v_0] - m[v]$ en un punto, o

$$\Sigma m[W] = -\Delta \Sigma m[v] \equiv \Sigma m[v_0] - \Sigma m[v]$$

en un sistema material, y lo mismo las cantidades $\frac{m W^2}{2}$ y $\Sigma \frac{m W^2}{2}$, reciben los nombres de *cantidad de movimiento* y *fuerza viva*, respectivamente, *debidas a las velocidades perdidas* por efecto de la percusión.

Es evidente, después de lo establecido en el número **747**, que la cantidad de movimiento debida a las velocidades perdidas, en una percusión sobre un punto o sobre un sistema, cumplirá las condiciones que expresan las ecuaciones

$$a + \Sigma m W_x = o, \quad b + \Sigma m W_y = o, \quad c + \Sigma m W_z = o.$$

750. Teoremas referentes a las percusiones.—1.° *El efecto producido en un punto material por varias percusiones simultáneas, en lo que se refiere a los incrementos de la cantidad de movimiento del móvil, es el mismo que el producido por una sola percusión, suma gráfica de las percusiones parciales.*—Puesto que cualquiera que sea la causa que produce dichos incrementos de $m[v]$, la naturaleza vectorial de esta magnitud mecánica, nos dice que

$$\Delta m[v] \equiv \Delta m[v_1] + \Delta m[v_2] + \ldots.$$

y como por hipótesis es $[P] \equiv [P_1] + [P_2] + \ldots.$ y los segundos miembros de las anteriores equipolencias son, a su vez, equipolentes, los primeros lo serán también, $[P] \equiv \Delta m[v]$. Consecuencia de esta propiedad es la aplicación de los

principios generales del Algoritmo mecánico a los vectores representativos de las percusiones aplicadas a un punto o sistema material.

2.° *El incremento gráfico de la cantidad de movimiento de un sistema material, sometido a varias percusiones simultáneas, es equipolente a la resultante de las percusiones exteriores que obren sobre el sistema.*—En efecto, para una sola percusión se verifica

$$\Delta \Sigma m\,[v] \equiv [P]$$

y, en el caso de ser varias, se podrán formar, sumando separadamente las exteriores e interiores, los dos grupos

$$[P] = \Sigma\,[P_e] + \Sigma\,[P_i];$$

pero siendo $\Sigma\,[P_i] = o$ se obtiene $\Delta \Sigma m\,[v] \equiv \Sigma\,[P_e]$.

Proyectando sobre los tres ejes coordenados se formarán las ecuaciones

$$\Delta \Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma a_e,\ \Delta \Sigma m \frac{dy}{dt} = \Sigma b_e,\ \Delta \Sigma m \frac{dz}{dt} = \Sigma c_e.$$

COROLARIO.—*El incremento gráfico de la cantidad de movimiento del centro de gravedad del sistema material, sometido a varias percusiones simultáneas, es equipolente a la resultante de las percusiones exteriores.*

3.° *El incremento del momento de la cantidad de movimiento de un sistema material sometido a varias percusiones simultáneas, con relación a un eje, es igual a la suma de los momentos de las percusiones exteriores respecto al mismo eje.*—Demostremos primero este teorema para un solo punto material: partiendo de la ecuación (**441**—2.° *enunciado*)

$$d\left(x\,m\frac{dy}{dt} - y\,m\frac{dx}{dt}\right) = x\,Y\,dt - y\,X\,dt$$

y suponiendo las fuerzas instantáneas, se obtiene

$$\Delta\left(x\,m\frac{dy}{dt} - y\,m\frac{dx}{dt}\right) =$$

$$= x\int_{t_0}^{t} Y\,dt - y\int_{t_0}^{t} X\,dt = x\,b - y\,a.$$

Si ahora suponemos un sistema sometido a varias percusiones exteriores e interiores, tendremos, sumando las igualdades análogas a la establecida, en todos los puntos

$$\Delta\,\Sigma\left(x\,m\frac{dy}{dt} - y\,m\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma\,(x\,b - y\,a) =$$

$$= \Sigma\,(x\,b_e - y\,a_e) + \Sigma\,(x\,b_i - y\,a_i) = \Sigma\,(x\,b_e - y\,a_e).$$

COROLARIO.—*El incremento gráfico del momento de la cantidad de movimiento de un sistema material sometido a varias percusiones simultáneas, con relación a un punto, es equipolente al momento de las percusiones exteriores respecto al mismo punto.*

4.° *La suma de los trabajos virtuales de las percusiones simultáneas aplicadas a un sistema material y los de las cantidades de movimiento debidas a las velocidades perdidas, es siempre nula* (*).

En efecto, en cada punto es

$$a + m\,W_x = o, \quad b + m\,W_y = o, \quad c + m\,W_z = o;$$

formando las ecuaciones análogas para todos los del sistema, multiplicando por δx, δy y δz respectivamente, y sumando, resulta

$$\Sigma\,(a\,\delta x + b\,\delta y + c\,\delta z) + \Sigma\,(m\,W_x\,\delta x + m\,W_y\,\delta y + m\,W_z\,\delta z) = o.$$

(*) Entenderemos por trabajo virtual de las percusiones y de las cantidades de movimiento citadas, el producto geométrico de estos vectores por el desplazamiento supuesto en su punto de aplicación. Como las percusiones y cantidades de movimiento no son fuerzas, resulta impropia la denominación empleada, pero es cómodo su empleo, por lo que abrevia la explicación, y por esto la aceptamos.

En el primer sumando figurarán, cuando existan, las percusiones debidas a los enlaces, pero si se admite que los desplazamientos virtuales imaginados son compatibles con dichos enlaces, serán nulos sus trabajos y no será preciso que figuren en la ecuación precedente.

Si en algún caso no hubiera más que percusiones de enlaces, que existieran en el sistema o se introdujeran bruscamente, la ecuación encontrada se reduce a

$$\Sigma (m W_x \delta x + m W_y \delta y + m W_z \delta z) = o,$$

suponiendo que los desplazamientos sean compatibles con dichos enlaces.

5.° *Teorema de Carnot.—Cuando un sistema material experimenta una percusión interior, debida a enlaces existentes, o introducidos bruscamente y que persistan después de la percusión, la pérdida de fuerza viva que sufre, es igual a la fuerza viva debida a las velocidades perdidas* —En efecto, la pérdida de fuerza viva del sistema móvil, por efecto de la percusión, es

$$\Sigma \frac{m V_o^2}{2} - \Sigma \frac{m V_1^2}{2};$$

pero en un punto se tiene

$$W^2 = (V_{ox} - V_{1x})^2 + (V_{oy} - V_{1y})^2 + (V_{oz} - V_{1z})^2 =$$
$$= V_o^2 + V_1^2 - 2 V_{ox} V_{1x} - 2 V_{oy} V_{1y} - 2 V_{oz} V_{1z},$$

de donde

$$W^2 - V_o^2 + V_1^2 = -2 [V_{1x} W_x + V_{1y} W_y + V_{1z} W_z].$$

Si suponemos ahora un desplazamiento virtual, compatible con la persistencia del enlace, será

$$\delta x = V_{1x} dt, \quad \delta y = V_{1y} dt, \quad \delta z = V_{1z} dt$$

y, sustituyendo, tendremos

$$W^2 - V_0^2 + V_1^2 = -2\frac{W_x \delta x + W_y \delta y + W_z \delta z}{dt}.$$

Formando las ecuaciones análogas para todos los puntos, multiplicando por m, dividiendo por 2 y sumando, resulta

$$\frac{\Sigma m W^2}{2} - \frac{\Sigma m V_0^2}{2} + \frac{\Sigma m V_1^2}{2} =$$

$$= \frac{-\Sigma (m W_x \delta x + m W_y \delta y + m W_z \delta z)}{dt}$$

pero, en virtud del teorema anterior, el segundo miembro de la ecuación encontrada es *cero* y

$$\frac{\Sigma m V_0^2}{2} - \frac{\Sigma m V_1^2}{2} = \frac{\Sigma m W^2}{2}.$$

II

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE LAS PERCUSIONES

751. Percusiones sobre un sólido móvil alrededor de un eje.—Supongamos, como aplicación de las propiedades demostradas sobre las percusiones, que se tiene un cuerpo sólido girando alrededor de un eje, con la velocidad angular ω_0 y que en un instante determinado se le aplica una percusión y propongámonos determinar la velocidad angular ω_1 que instantáneamente toma el móvil, por efecto de dicha percusión, así como las reacciones que se desarrollan, por la misma causa, en los dos puntos de apoyo que se supone fijan la posición del eje de giro.

Sea P (fig. 395) la percusión aplicada al sólido S en el punto $A\ (x\ y\ z)$ y representemos por P' y P'' las percusiones que se desarrollan en los puntos de apoyo, o y o'. Para calcular la velocidad angular ω_1 que adquiere el sólido, emplearemos el teorema 3.° demostrado que nos dará el incremento de velocidad $\omega_1 - \omega_0$ y de este incremento será fácil deducir el valor de ω_1.

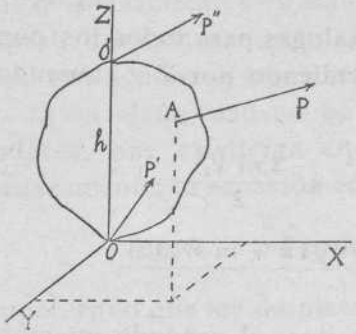


Fig. 395

Aplicando el expresado teorema a los momentos con relación al eje de giro (coordenado $o\,Z$), tendremos

$$\Delta \Sigma \left(x\, m \frac{d\,y}{d\,t} - y\, m \frac{d\,x}{d\,t} \right) = x\,b - y\,a\,;$$

pero

$$\Delta \Sigma \left(x\, m \frac{d\,y}{d\,t} - y\, m \frac{d\,x}{d\,t} \right) = \Delta \Sigma\, m\, v_\rho = I\,(\omega_1 - \omega_0),$$

luego

$$\Delta\,\omega = \omega_1 - \omega_0 = \frac{x\,b - y\,a}{I} \quad \text{y} \quad \omega_1 = \omega_0 + \frac{x\,b - y\,a}{I}\,.$$

Cuando el cuerpo se encuentre en reposo, al recibir la percusión, será $\omega_0 = o$ y $\omega_1 = \dfrac{x\,b - y\,a}{I}$.

752. Cálculo de las percusiones en los apoyos.— Las percusiones

$$[P'] \equiv [a'] + [b'] + [c'] \quad \text{y} \quad [P''] \equiv [a''] + [b''] + [c'']$$

se calculan haciendo aplicación del teorema 2.°, referido a

los tres ejes coordenados, y del 3.° aplicado a los ejes $o\,X$ y $o\,Y$; de este modo se obtienen las ecuaciones siguientes:

$$\Delta \Sigma m \frac{dx}{dt} = -\Delta\omega \Sigma m y = a + a' + a'',$$

$$\Delta \Sigma m \frac{dy}{dt} = +\Delta\omega \Sigma m x = b + b' + b'',$$

$$\Delta \Sigma m \frac{dz}{dt} = o = c + c' + c'',$$

$$\Delta \Sigma \left(y m \frac{dz}{dt} - z m \frac{dy}{dt} \right) = -\Delta\omega \Sigma m x z = y c - z b - h b'',$$

$$\Delta \Sigma \left(z m \frac{dx}{dt} - x m \frac{dz}{dt} \right) = -\Delta\omega \Sigma m y z = z a - x c + h a''.$$

La tercera ecuación nos dice que la suma de las dos componentes longitudinales, $c' + c''$, de las reacciones es igual y de sentido contrario a la componente c de la percusión aplicada y considerando esta suma como una incógnita, ya conocida, nos quedan cuatro ecuaciones para determinar las componentes transversales a' b' y a'' b''; de las dos últimas se sacarán los valores de a'' y b'' que, llevados a las dos primeras, permitirán conocer inmediatamente el valor de a' y b'.

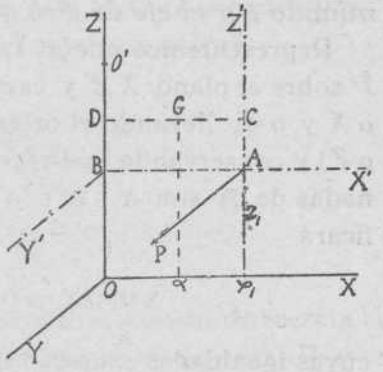


Fig. 396

753. Centro de percusión de un sólido.— En el problema resuelto resulta interesante averiguar las condiciones de posición que debe tener el cuerpo con relación al eje y

la forma de aplicar la percusión, para que las reacciones de los enlaces se anulen.

En primer lugar, debiendo ser nula la suma $c' + c'' = c$, es preciso que la percusión se aplique perpendicularmente al eje de la rotación y cumpliéndose esta condición ($c = o$), supongamos, para facilitar la investigación, que el eje $o\,Y$ es paralelo a la percusión, resultando $a = o$ y $b = P$ (figura 396).

Con estos datos las ecuaciones anteriores se convierten, prescindiendo de la tercera, que es una identidad, en

$$\Delta_\omega \Sigma m y = o, \quad \Delta_\omega \Sigma m x = P,$$

$$\Delta_\omega \Sigma m x z = z P, \quad \Delta_\omega \Sigma m y z = o.$$

La condición $\Delta_\omega \Sigma m y = o$, o $\Sigma m y = o$, expresa que el centro de gravedad G del cuerpo tiene que estar situado en el plano $X Z$, y este resultado se interpreta diciendo que *la percusión tiene que ser perpendicular al plano determinado por el eje de giro y el centro de gravedad.*

Representemos por $x_1 z_1$ las coordenadas de la traza de P sobre el plano $X Z$ y cambiemos la posición de los ejes $o X$ y $o Y$, llevando el origen a B (proyección de A sobre $o Z$) y conservando la dirección de los mismos; las coordenadas de A son x_1, o y o y para los nuevos ejes se verificará

$$\Sigma m y z' = o, \quad \Sigma m x z' = o,$$

cuyas igualdades expresan que *el eje de giro tiene que ser principal de inercia, con relación al punto obtenido proyectando sobre él la traza de la percusión en el plano determinado por dicho eje y el centro de gravedad del sólido.*

El punto A del plano $O Z G$, por donde tiene que pasar la línea de acción de la percusión aplicada al sólido, para

conseguir la anulación de las reacciones en los apoyos, se llama *centro de percusión* del sólido, correspondiente al eje de giro $o\,Z$; sus coordenadas, referidas a los primeros ejes, se deducen de las fórmulas

$$z_1 = O\,B = \Delta\omega \frac{\Sigma m\,x\,z}{P} = \frac{\Sigma m\,x\,z}{\Sigma m\,x},$$

$$x_1 = B\,A = \frac{I\,.\,\Delta\omega}{P} = \frac{I}{\Sigma m\,x},$$

deducida esta última de la establecida al final del número **751**. Si el eje de la rotación pasa por el centro de gravedad del sólido, el de percusión está en el infinito.

Si trazamos por A un eje $A\,Z'$, paralelo al de rotación, existe entre $O\,Z$ y $A\,Z'$ la misma relación de reciprocidad que se vió existía entre los ejes de suspensión y oscilación de un péndulo compuesto **(542')**; en efecto, esta relación expresada por la condición $G\,C \times G\,D = constante$, se demuestra en este caso con el siguiente cálculo

$$G\,C = x_1 - a = \frac{I}{\Sigma m\,x} - a = \frac{M\,K^2}{M\,a} - a = \frac{K^2}{a} - a,$$

$$G\,C \times G\,D = a\,(x_1 - a) = K^2 - a^2;$$

pero siendo K el radio de giro del momento de inercia con relación al eje $o\,Z$, el correspondiente al eje paralelo trazado por G es $K^2 - a^2 = \rho^2$ y por consiguiente $G\,C \times G\,D = \rho^2$, que tiene el mismo valor para uno y otro eje.

754. Péndulo balístico.—Es un aparato cuya organización esquemática indica la figura 397; se utiliza para determinar la velocidad remanente de los proyectiles de las armas de fuego, por el efecto de percusión que el proyectil

produce en el aparato, al chocar contra la masa de arena de que está lleno el cilindro inferior.

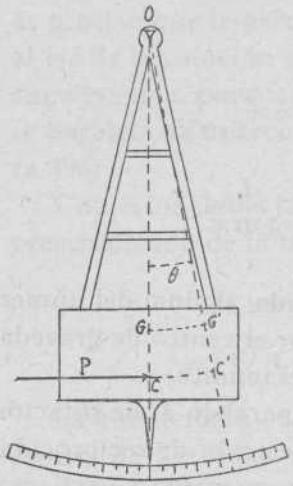


Fig. 397

Supongamos sea m la masa del proyectil, v su velocidad al llegar al péndulo, $O\,G = a$ la distancia del centro de gravedad del aparato al eje de suspensión, $l = O\,C$ la distancia de la línea de acción de la percusión al mismo eje, M la masa del péndulo y K el radio de giro de su momento de inercia con relación al eje o.

Al verificarse el choque del proyectil con el péndulo, se supone que se anula su cantidad de movimiento y la percusión estará expresada por la fórmula $P = \Delta m\, v = m\, v$ y aplicando al movimiento producido en el péndulo, la ecuación establecida en el número **751**, se obtiene

$$\Delta\omega = \omega = \frac{P.l}{MK^2 + ml^2} = \frac{ml\,v}{MK^2 + ml^2},$$

y

$$v = \omega\,\frac{MK^2 + ml^2}{ml}.$$

La fórmula anterior expresa el valor de v en función de ω, pero es más cómodo, en las aplicaciones, eliminar esta cantidad y hacer intervenir la amplitud θ de la oscilación que el choque ocasiona en el péndulo.

Para esto observemos que la expresión **(535)**

$$\frac{I}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) = TF,$$

se convierte para este caso en

$$\frac{M K^2 + m l^2}{2} \omega^2 = M g (\alpha - \alpha \cos \theta) + m g (l - l \cos \theta) =$$

$$= g (1 - \cos \theta) (M \alpha + m l) = 2 g \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} (M \alpha + m l),$$

de donde se deduce

$$\omega = \sqrt{\frac{g (M \alpha + m l)}{M K^2 + m l^2}} \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2},$$

y sustituyendo en la fórmula anterior, resulta

$$v = \frac{2}{m l} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \sqrt{(M \alpha + m l) (M K^2 + m l^2) g}.$$

Si el choque tiene lugar en el centro de percusión del péndulo, será

$$G c \times G o = (l - \alpha) \alpha = K^2 - \alpha^2, \quad \text{o} \quad K^2 = \alpha l$$

y el valor de v se convierte en

$$v = 2 \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{M \alpha + m l}{m} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}.$$

755. Poleas enlazadas bruscamente por una correa.—En las transmisiones por medio de correas suele ocurrir que el ramal conductor cesa en ciertos instantes de realizar la conducción, por quedar en avance la polea conducida sobre la conductora, a

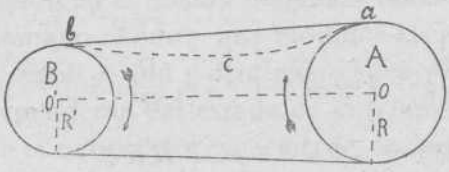


Fig. 398

causa de las irregularidades inevitables en la marcha de las máquinas; en estos casos, si no se tiene un gran cuidado con el arreglo de la tensión de la correa, se producirá el efecto indicado en la figura 398, que demuestra, por la forma de la correa en $a\ c\ b$ (ramal conductor), que las dos poleas marchan con independencia una de otra.

Pero es evidente que al retrasarse la marcha de la polea B, por efecto del trabajo resistente o al producirse el avance de la A, por la acción del esfuerzo motor, la correa se pondrá bruscamente en tensión, dando lugar a una percusión interior, que modificará el estado de movimiento de las dos poleas y además ocasionará una cierta pérdida de fuerza viva que vamos a determinar.

Sean I e I' los momentos de inercia de las piezas montadas en los ejes conductor y conducido, ω_0 y ω'_0 las velocidades angulares anteriores a la percusión y ω_1 y ω'_1 las subsiguientes a la misma. En virtud del teorema de Carnot, puesto que se trata de percusiones de enlaces persistentes, se tendrá

$$\left(\frac{1}{2} I\,\omega_0^2 + \frac{1}{2} I'\,\omega'^2_0\right) - \left(\frac{1}{2} I\,\omega_1^2 + \frac{1}{2} I'\,\omega'^2_1\right) =$$

$$= \frac{1}{2} I\,(\omega_0 - \omega_1)^2 + \frac{1}{2} I'\,(\omega'_0 - \omega'_1)^2,$$

o $$I\,\omega_1^2 + I'\,\omega'^2_1 = I\,\omega_0\,\omega_1 + I'\,\omega'_0\,\omega'_1;$$

pero $\frac{\omega_1}{\omega'_1} = \frac{R'}{R}$ y substituyendo se tiene

$$I\,\omega_1^2 + I'\,\omega_1^2\,\frac{R^2}{R'^2} = I\,\omega_0\,\omega_1 + I'\,\omega'_0\,\omega_1\,\frac{R}{R'},$$

$$\omega_1\,(I\,R'^2 + I'\,R^2) = \omega_0\,I\,R'^2 + \omega'_0\,I'\,R\,R',$$

$$\omega_1 = \frac{R'\,(I\,R'\,\omega_0 + I'\,R\,\omega'_0)}{I\,R'^2 + I'\,R^2},$$

y lo mismo

$$\omega'_1 = \frac{R\,(I\,R'\,\omega_0 + I'\,R\,\omega'_0)}{I\,R'^2 + I'\,R^2},$$

cuyas fórmulas expresan las velocidades angulares resultantes a las dos poleas, al entrar en acción el enlace de la correa.

La pérdida de fuerza viva ocasionada por la percusión en el sistema móvil es

$$P_v = \frac{1}{2} I\,(\omega_0 - \omega_1)^2 + \frac{1}{2} I'\,(\omega'_0 - \omega'_1)^2$$

y sustituyendo los valores de ω_1 y ω'_1

$$P_v = \frac{I.I'}{2\,(I\,R'^2 + I'\,R^2)} \times (R\,\omega_0 - R'\,\omega'_0)^2.$$

III

TEORÍA DEL CHOQUE

756. Definiciones.—Cuando dos cuerpos tienden a ocupar, en virtud de las leyes de su movimiento, la misma posición en el mismo instante, tiene lugar el fenómeno físico llamado *choque*, que modifica las expresadas leyes y obliga a seguir a uno y otro cuerpo trayectorias que en cada caso dependerán del estado de movimiento inicial al choque y de la naturaleza especial de los móviles, así como de la forma de las superficies que se ponen en contacto.

El choque de dos cuerpos puede ser *directo* y *oblicuo;* se llama directo cuando las trayectorias respectivas son

tangentes en el punto de choque y oblicuo en caso contrario.

Por la naturaleza de los cuerpos que chocan, supondremos primeramente que se trata de cuerpos *perfectamente elásticos*, que después de deformarse por efecto de la percusión ocasionada por el choque, reaccionan, recuperando su primitiva forma, y separándose para seguir cada uno la trayectoria que después del choque le corresponda; en segundo lugar consideraremos el choque de los cuerpos llamados *plásticos*, que al deformarse se unen, sin reaccionar, y continúan el movimiento formando un solo cuerpo, y, por último, indicaremos la resolución del mismo problema en el caso de tratarse de *cuerpos naturales*, que no reunan las condiciones de elasticidad perfecta supuesta en el primer caso.

757. Problema general de esta teoría.—El problema general, que trata de resolver esta teoría, consiste en determinar las leyes del movimiento que, después del choque, corresponde a los dos cuerpos que chocan, suponiendo conocidas las circunstancias del movimiento y naturaleza de los cuerpos en el instante inicial del choque.

Prescindiremos de estudiar el problema enunciado en toda su generalidad, limitándonos en estas nociones a considerar el choque directo de dos cuerpos, reducidos a puntos materiales finitos de forma esférica y dotados de movimientos de traslación.

758. Choque directo de dos cuerpos perfectamente elásticos.—Sean v_0 y v'_0 las velocidades iniciales del choque, v_1 y v'_1 las finales y m y m' las masas respectivas de los dos cuerpos móviles. Como los incrementos de la cantidad de movimiento en el instante del choque son iguales a las percusiones exteriores y en este caso la percusión es interior al conjunto de los dos cuerpos, se deduce que las cantidades de movimiento inicial y final del choque serán iguales, formándose la ecuación

$$m\,v_0 + m'\,v'_0 = m\,v_1 + m'\,v'_1,$$

que relaciona los datos con las dos incógnitas v_1 y v'_1.

Por otra parte, tratándose de dos cuerpos perfectamente elásticos, que después del choque recuperan su primitiva forma, será nulo el trabajo de las fuerzas interiores y como el de las exteriores también lo es, se verificará igualmente la conservación de la fuerza viva **(517)** y podremos establecer la ecuación

$$\frac{m\,v_0^2}{2} + \frac{m'\,v'^2_0}{2} = \frac{m\,v_1^2}{2} + \frac{m'\,v'^2_1}{2}.$$

Las dos ecuaciones encontradas se reducen a

$$m\,(v_1 - v_0) = m'\,(v'_0 - v'_1),$$

$$m\,(v_1^2 - v_0^2) = m'\,(v'^2_0 - v'^2_1);$$

divididas miembro a miembro dan

$$v_1 + v_0 = v'_1 + v'$$

y combinando esta última con la primera, se obtienen las fórmulas

$$v_1 = \frac{(m - m')\,v_0 + 2\,m'\,v'_0}{m + m'},$$

$$v'_1 = \frac{(m' - m)\,v'_0 + 2\,m\,v_0}{m + m'},$$

que resuelven el problema.

759. Consecuencias.--De las fórmulas obtenidas se deducen las siguientes consecuencias, aplicables al choque directo de los cuerpos perfectamente elásticos:

1.ª *La suma de las velocidades inicial y final en cada cuerpo es la misma para los dos.*

2.ª *La diferencia entre las dos velocidades iniciales es igual y de signo contrario a la de las velocidades finales.*

3.ª *Las diferencias entre la velocidad final de cada cuerpo y la inicial del otro son iguales.*

Las tres propiedades enunciadas se deducen de la igualdad

$$v_1 + v_0 = v'_1 + v'_0$$

y de sus equivalentes

$$v_0 - v'_0 = -(v_1 - v'_1) \quad \text{y} \quad v_1 - v'_0 = v'_1 - v_0 .$$

4.ª *Cuando las dos masas son iguales los cuerpos cambian sus velocidades entre sí.* En efecto, si $m = m'$, es

$$v_1 = \frac{2\,m'\,v'_0}{2\,m'} = v'_0 \quad \text{y} \quad v'_1 = \frac{2\,m\,v_0}{2\,m} = v_0$$

760. Caso de estar fijo uno de los dos cuerpos.—Si uno de los cuerpos está fijo y se supone enlazado de tal modo que el choque no le saque de su posición, se deberá hacer en las fórmulas anteriores $m' = \infty$ y $v'_0 = o$, para calcular la velocidad v_1 que le resulta al cuerpo móvil, después del choque contra dicho obstáculo; poniendo el valor de v_1 en la forma

$$v_1 = \frac{\left(\frac{m}{m'} - 1\right) v_0 + 2\,v'_0}{\frac{m}{m'} + 1},$$

y haciendo ahora $m' = \infty$ y $v'_0 = o$, resulta $v_1 = -v_0$; es decir, que el móvil no hace más que *cambiar el sentido de su velocidad, sin modificar su valor modular.*

761. Choque directo de dos cuerpos plásticos.—En estos casos no se verifica la conservación de la fuerza viva;

pero sí tiene lugar la de las cantidades de movimiento y con esta condición nos basta para resolver el problema. Supongamos los mismos datos que antes y llamemos V la velocidad común a las dos masas m y m' después del choque; la condición aludida se expresa por la ecuación

$$m v_0 + m' v'_0 = (m + m') V,$$

que nos da la fórmula

$$V = \frac{m v_0 + m' v'_0}{m + m'}$$

762. Consecuencias.—1.ª *Cuando las dos masas son iguales, la velocidad resultante del choque es la semisuma o la semidiferencia de las velocidades de los dos cuerpos.* En efecto, si

$$m = m', \text{ es } V = \frac{m (v_0 \pm v'_0)}{2 m} = \frac{v_0 \pm v'_0}{2}.$$

2.ª *Si los dos cuerpos marchan en sentido contrario, el movimiento resultante toma la dirección del que tenga mayor cantidad de movimiento.*

3.ª *Si los dos cuerpos tienen la misma cantidad de movimiento, marchando en sentido contrario, quedarán inmóviles después del choque.*

763. Pérdida de fuerza viva en el choque de dos cuerpos plásticos.—Las condiciones en que se realiza el choque, en estos casos, permite aplicar el teorema de Carnot al cálculo de la pérdida de fuerza viva que se ocasiona; dicha pérdida será

$$P_v = \frac{1}{2} m (v_0 - V)^2 + \frac{1}{2} m' (v'_0 - V)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{m m'^2 (v_0 - v'_0)^2}{(m + m')^2} + \frac{m' m^2 (v_0 - v'_0)^2}{(m + m')^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{m m'}{m + m'} (v_0 - v'_0)^2.$$

Cuando el choque tenga lugar marchando los dos móviles en sentido contrario, es

$$P_v = \frac{1}{2} \cdot \frac{m\,m'}{m + m'} \cdot (v_0 + v'_0)^2.$$

De la primera de estas fórmulas parece deducirse que cuando $v_0 = v'_0$ no hay pérdida de fuerza viva en el choque, pero este caso, único en que P_v es *cero*, no puede presentarse, porque marchando los dos cuerpos con la misma velocidad y en el mismo sentido no llegan a chocar.

El cálculo de la pérdida de fuerza viva podría hacerse partiendo de la diferencia

$$P_v = \frac{m\,v_0^2}{2} + \frac{m'\,v'^2_0}{2} - \frac{(m + m')\,V^2}{2}$$

y se llegaría al mismo resultado.

764. Caso de cuerpos imperfectamente elásticos.—La propiedad expresada en la consecuencia segunda del número **759** no se verifica en los cuerpos elásticos naturales, observándose que en todos ellos la diferencia $v_1 - v'_1$ es algo más pequeña que la $v'_0 - v_0$; esta circunstancia se puede expresar por medio de un *coeficiente de reducción* K, determinado experimentalmente, y con cuyo conocimiento se podrán relacionar las velocidades iniciales y finales del choque directo de dos cuerpos naturales, en la forma $v_1 - v'_1 = K(v'_0 - v_0)$.

Esta cuestión sustituirá, en estos casos, a la que expresaba la conservación de la fuerza viva en los cuerpos perfectamente elásticos y como la de las cantidades de movimiento se verifica siempre, tendremos dos ecuaciones para calcular las velocidades resultantes del choque en función de las iniciales.

Las dos ecuaciones

$$m(v_1 - v_0) = m'(v'_0 - v'_1) \quad \text{y} \quad v_1 - v'_1 = K(v'_0 - v_0)$$

sirven para todos los casos, dando a K el valor de $K = 1$ para los cuerpos que puedan suponerse perfectamente elásticos, el $K = o$ para los plásticos y los valores intermedios entre o y 1, que las tablas experimentales señalan, para los demás cuerpos naturales.

Resolviendo dichas ecuaciones se tiene

$$v_1 = \frac{m v_0 + m' v'_0 - K m'(v_0 - v'_0)}{m + m'},$$

$$v'_1 = \frac{m v_0 + m' v'_0 - K m(v'_0 - v_0)}{m + m'},$$

que se reducen a las encontradas para los cuerpos elásticos cuando $K = 1$ y toman el valor común

$$V = v_1 = v'_1 = \frac{m v_0 + m' v'_0}{m + m'},$$

cuando sea $K = o$.

765. Pérdida de fuerza viva en el choque de dos cuerpos naturales.—La deformación permanente que experimentan los cuerpos en el choque, acusa la existencia de la pérdida de fuerza viva que trae consigo la colisión de los móviles; su valor se determina por la fórmula

$$P_v = \frac{m v_0^2}{2} + \frac{m' v'^2_0}{2} - \frac{m v_1^2}{2} - \frac{m' v'^2_1}{2},$$

sustituyendo en ella los valores encontrados para v_1 y v'_1 en función de K.

Efectuando operaciones, después de dicha sustitución, se obtiene

$$P_v = \frac{1}{2} \cdot \frac{m\,m'}{m + m'} (v_o - v'_o)^2 (1 - K^2);$$

esta fórmula se convierte en la que hemos encontrado, para el caso de cuerpos plásticos, haciendo $K = o$, y se reduce a *cero* cuando, al tratarse de cuerpos perfectamente elásticos, se supone $K = 1$.

APÉNDICE Nociones de Balística

I

Balística exterior

766. Preliminares.—Al estudiar en el capítulo 3.° el movimiento de proyectiles en el vacío, se indicó que dicho estudio no podía recibir aplicaciones prácticas en el tiro de las armas de fuego, por las grandes modificaciones que en los resultados de sus fórmulas introducía la *resistencia del medio* donde tiene lugar el movimiento de sus proyectiles. Esta consideración nos obliga a plantear otra vez este problema, teniendo presente la expresada circunstancia, para llegar a obtener varias fórmulas de verdadera aplicación práctica, que constituyen la base de la *Balística exterior* que en cursos posteriores se estudia con todo detalle (*).

El método que seguiremos, para desarrollar esta teoría, es el llamado *de Siacci* que, aparte del carácter científico y práctico a la vez que le distingue, tiene la gran ventaja de establecer sus fórmulas con cierta independencia de la forma que se adopte para expresar la ley de la resistencia del

(*) La circunstancia de existir textos de Balística que dan por sentado el conocimiento de las aludidas fórmulas, por suponer, con buen acuerdo a nuestro juicio, que su deducción es un problema de análisis mecánico, nos ha inducido a incluir en esta obra este Apéndice, que consideramos como lazo de unión entre la Mecánica general y la citada asignatura.

aire y permite, por consiguiente, acomodarlas fácilmente tanto a las expresiones de dicha ley, hoy en uso, como a las futuras que el progreso de la Balística pueda establecer.

767. Expresión analítica de la resistencia del aire.—Las diversas experiencias efectuadas para establecer analíticamente la ley de la resistencia del aire, en la marcha de los proyectiles de las armas de fuego, no han producido hasta ahora resultados de general aplicación y de aquí la necesidad de valerse de distintas fórmulas, cuya aplicación varía con las circunstancias de forma de los proyectiles y más particularmente con las velocidades iniciales que la explosión de la carga comunica a los expresados móviles.

La fórmula $R = K S W^2$, que hemos aplicado en el movimiento de globos y aeroplanos, no da resultados aceptables en el movimiento de los proyectiles de las armas de fuego y se ha tratado de sustituir por otras, en las que se hace intervenir la forma del proyectil, por medio del *coeficiente balístico c*, la masa del mismo $m = \frac{p}{g}$ y la velocidad v de su centro de gravedad, suponiendo que dicha resistencia es de la forma $R = \frac{m}{c} f(v)$ y admitiendo para $f(v)$ el valor que en cada caso se crea que está más en consonancia con los resultados de las experiencias.

768. Ecuaciones del movimiento del centro de gravedad del proyectil.—Prescindiendo, por ahora, del movimiento relativo de los proyectiles con relación a su centro de gravedad, podremos establecer el de este centro partiendo de las ecuaciones

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{m}{c} f(v) \cos\theta \quad \text{y} \quad \frac{m v^2}{\rho} = -m g \cos\theta,$$

en las que θ (fig. 399) representa el ángulo que forma con

el eje $o\,X$ (horizontal del plano de tiro pasando por la boca del arma) la tangente a la trayectoria en un punto cualquiera (*).

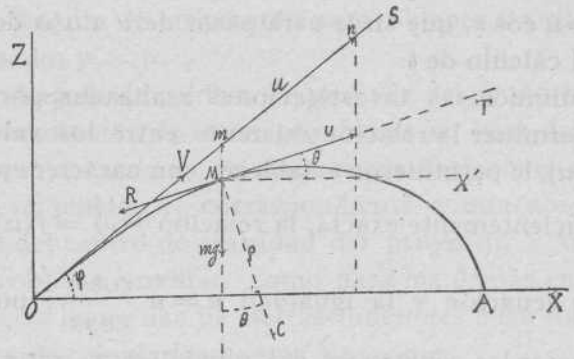


Fig. 399

Suprimiendo el factor m, sustituyendo en vez de $\frac{dx}{dt}$ su igual $v\cos\theta$ y eliminando a dt y a ρ, por medio de las relaciones

$$dt=\frac{dx}{v\cos\theta}\quad\text{y}\quad\rho=\frac{de}{d\theta}=\frac{dx}{\cos\theta\,d\theta},$$

se obtienen las ecuaciones

$$\frac{d(v\cos\theta)}{dx}=-\frac{1}{c}\cdot\frac{f(v)}{v}\quad\text{y}\quad\frac{d\theta}{dx}=-\frac{g}{v^2}.$$

Representemos por u la proyección oblicua $m\,n$ de la velocidad del proyectil sobre la *línea de proyección o S*;

(*) Las ecuaciones escogidas por Siacci (una de las de Mac-Laurin y otra de las de Euler), para punto de partida de sus cálculos, presentan la ventaja de no hacer figurar en los segundos miembros respectivos más que una de las dos fuerzas que intervienen en el movimiento; las ecuaciones de proyección sobre el eje $o\,Z$ (fig. 399) y sobre la tangente $M\,T$, presentarían forma binomia en los segundos miembros, dependiendo del peso y de R.

este nuevo elemento, que desempeña un papel importantísimo en las fórmulas de Siacci, fué llamado por este ilustre Artillero *seudo-velocidad* y se relaciona con la velocidad remanente, en una posición cualquiera, por la ecuación $v \cos \theta = u \cos \varphi$, que sirve para pasar de v a u o de u a v, previo el cálculo de θ.

Las minuciosas investigaciones realizadas por Siacci para determinar la relación existente entre los valores de $f(v)$ y $f(u)$, le permitieron establecer con carácter empírico, pero suficientemente exacta, la relación $f(v) = f(u) \dfrac{\cos^2 \varphi}{\cos \theta}$; con esta ecuación y la igualdad $v = u \dfrac{\cos \varphi}{\cos \theta}$, podremos transformar las ecuaciones del movimiento, antes encontradas, en

$$\frac{d(u \cos \varphi)}{dx} = -\frac{1}{c} f(u) \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \theta} : \frac{u \cos \varphi}{\cos \theta} =$$

$$= -\frac{1}{c} \cdot \frac{f(u)}{u} \cos \varphi \quad \text{o} \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{f(u)}{u},$$

como equivalente a la primera, y

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{g \cos^2 \theta}{u^2 \cos^3 \varphi} \quad \text{o} \quad \frac{d \operatorname{tg} \theta}{dx} = -\frac{g}{u^2 \cos^2 \varphi},$$

como equivalente a la segunda.

769. Problemas principales que se resuelven con las ecuaciones anteriores.—Los problemas balísticos cuyas fórmulas nos proponemos establecer, mediante la integración de las ecuaciones, son los siguientes:

1.° Cálculo de la inclinación θ de la trayectoria en un punto de abscisa determinada.

2.° Cálculo de la velocidad remanente del proyectil en el mismo punto.

3.° Tiempo invertido por el proyectil en llegar a la indicada posición.

4.° Ecuación de la trayectoria del centro de gravedad del proyectil.

5.° Angulo de proyección para obtener un alcance determinado, y

6.° Angulo de caída o de arribada del proyectil.

La resolución de estos problemas se hace depender de otro, que consiste en determinar previamente el valor de la seudo-velocidad u, correspondiente a una abscisa cualquiera del centro de gravedad del proyectil, y tanto para este problema auxiliar, como para los demás enunciados, se precisa hacer uso de ciertas funciones cuya formación y manera de calcularlas vamos a exponer.

770. Funciones balísticas de Siacci.—Supongamos que para la resolución de alguno de los problemas enunciados, se presente el caso de calcular la integral $\int_{u_0}^{u} F(u)\, d\, u$, siendo $F(u)$ una función indeterminada, por ahora, de la seudo-velocidad del proyectil. En primer lugar observaremos que el límite inferior de la integral es la velocidad inicial del móvil, $u_0 = V$, puesto que al salir el proyectil por la boca del arma son θ y φ iguales, y si representamos por L un número mayor que los máximos valores admisibles para u y V, podremos transformar la integral anterior, dándole la forma

$$\int_{u_0}^{u} F(u)\, d\, u = \int_{V}^{L} F(u)\, d\, u + \int_{L}^{u} F(u)\, d\, u =$$

$$= \int_{V}^{L} F(u)\, d\, u - \int_{u}^{L} F(u)\, d\, u$$

que se presta con facilidad, cuando la $F(u)$ esté determi-

nada, a construir una tabla de simple entrada donde se pueda encontrar el valor de $\int_u^{\cdot} F(u)\,du$ para cada valor de u, y recíprocamente, dada la integral, se encontrará el valor de u que le corresponde.

La forma adoptada para el cálculo de la integral $\int_V^u F(u)\,du$ tiene por objeto utilizar las tablas de simple entrada que se han indicado, no obstante la presencia de las dos variables V y u que contiene, pues es evidente que si en la tabla de valores de $\int_u^{\cdot} F(u)\,du$ buscamos en la columna de u el valor de la velocidad inicial V, obtendremos el de la integral $\int_V^{L} F(u)\,du$ y por una sencilla substracción de los dos valores encontrados en la misma tabla, resultará conocido el de la integral

$$\int_V^u F(u)\,du = \int_V^L F(u)\,du - \int_u^L F(u)\,du .$$

Las funciones cuya integración se presenta, como veremos, en la resolución de los problemas antes enunciados, puestas en la forma que acabamos de expresar, se llaman *funciones balísticas* de Siacci y son las siguientes:

$$1.^a: D(u) = \int_u^L \frac{u\,du}{f(u)},\quad 2.^a: J(u) = \int_u^L \frac{2g\,du}{u f(u)},$$

$$3.^a: T(u) = \int_u^L \frac{du}{f(u)} \quad \text{y} \quad 4.^a: A(u) = \int_u^L \frac{J(u)\,u\,du}{f(u)}.$$

Admitiendo para el factor $f(v)$ de la ley de resistencia del aire, una forma determinada, se podrán construir ta-

blas que expresen el valor de las cuatro funciones anteriores para uno cualquiera de u: las *tablas balísticas* más generalizadas son las del mismo *General Siacci*, completadas para límites más extensos por nuestro *General La Llave*: con el empleo de estas tablas supondremos que, dado un valor de u, se conocen los de dichas cuatro funciones y, recíprocamente, dado el de una de ellas se conocerá el de u y el de las tres restantes.

771. Cálculo de la seudo-velocidad del proyectil en un punto de abscisa determinada.—Volviendo a las ecuaciones diferenciales del movimiento del centro de gravedad del proyectil **(768)**, tomaremos la primera

$$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{f(u)}{u}$$

para resolver el problema auxiliar enunciado.

Haciendo la separación de variables, integrando y efectuando la descomposición en las dos integrales antes indicadas **(770)** tendremos

$$x = -c \int_{u_o}^{u} \frac{u\,d\,u}{f(u)} = c\left[D(u) - D(V)\right].$$

Con esta fórmula, conociendo la velocidad inicial V y el coeficiente balístico c del proyectil, se calculará el valor de

$$D(u) = \frac{x}{c} + D(V),$$

y por medio de la tabla se obtendrá el valor de u, que supondremos conocido en los problemas siguientes, cuando se fije la abscisa de la posición del proyectil.

772. Primer problema.—*Cálculo de la inclinación* θ *de*

la trayectoria en un punto de abscisa conocida.—De las ecuaciones diferenciales del movimiento **(768)** se deduce

$$d\,\mathrm{tg}\,\theta = \frac{-g\,dx}{u^2\cos^2\varphi} = \frac{c}{2\cos^2\varphi}\cdot\frac{2g\,du}{u f(u)},$$

e integrando

$$\mathrm{tg}\,\theta - \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{c}{2\cos^2\varphi}\Big(J(V) - J(u)\Big)$$

y

$$\mathrm{tg}\,\theta = \mathrm{tg}\,\varphi - \frac{c}{2\cos^2\varphi}\Big(J(u) - J(V)\Big).$$

Con esta fórmula y previo el cálculo de u en función de x, se determina la tangente del ángulo θ. En la rama descendente de la trayectoria se cambiarán el minuendo y el substraendo para obtener valores positivos de $\mathrm{tg}\,\theta$.

773. Segundo problema.—*Cálculo de la velocidad remanente del proyectil en el punto de abscisa x.*—Este problema exige la resolución del anterior para conocer el ángulo θ, y una vez conocido este ángulo, juntamente con la seudo-velocidad, se obtiene $v = \dfrac{u\cos\varphi}{\cos\theta}$.

774. Tercer problema.—*Tiempo invertido por el proyectil en llegar al punto de abscisa x.*—De la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\theta = u\cos\varphi$$

se deduce

$$dt = \frac{dx}{u\cos\varphi} = -\frac{c}{\cos\varphi}\cdot\frac{du}{f(u)},$$

e integrando

$$t = -\frac{c}{\cos\varphi}\int_{u_0}^{u}\frac{du}{f(u)} = \frac{c}{\cos\varphi}\Big[T(u) - T(V)\Big].$$

775. Cuarto problema.—*Ecuación de la trayectoria del centro de gravedad del proyectil.*—Partiendo de la ecuación $\frac{dy}{dx} = \text{tg}\,\theta$ se obtiene

$$dy = \text{tg}\,\theta \,.\, dx = \text{tg}\,\varphi \,.\, dx - \frac{c\,dx}{2\cos^2\varphi}\Big(J(u) - J(V)\Big) =$$

$$= \text{tg}\,\varphi \,.\, dx + \frac{c^2}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{J(u)\,u\,du}{f(u)} - J(V)\,.\,\frac{u\,du}{f(u)}\right],$$

e integrando

$$y = x\,\text{tg}\,\varphi - \frac{c\,x}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right] =$$

$$= x\left(\text{tg}\,\varphi - \frac{c}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right]\right).$$

776. Quinto problema.—*Angulo de proyección para obtener un alcance determinado.*—El ángulo φ, que corresponde a $y = o$, está determinado por la ecuación

$$\text{tg}\,\varphi - \frac{c}{2\cos^2\varphi}\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right] = o,$$

poniendo en ella los valores de las funciones $A(u)$ y $D(u)$ que correspondan a la abscisa igual al alcance que se haya señalado; así se deduce la fórmula

$$\text{sen}\,2\varphi = c\left[\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V)\right],$$

que resuelve el problema enunciado.

777. Sexto problema.—*Angulo de caída o de arribada del proyectil.*—Este ángulo, que representaremos por ω, se deduce de la fórmula del primer problema, poniendo en ella el valor de $J(u)$ que corresponde al alcance del tiro.

Sustituyendo también el valor de sen 2φ, encontrado en el problema quinto en función de $A(u)$ y $D(u)$, se obtiene

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{c}{2\cos^2\varphi}\left[J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)}\right].$$

778. Parámetro de curvatura de la trayectoria.—En todas las fórmulas anteriores se ha supuesto implícitamente que se trata del tiro rasante de las armas de fuego; en el caso de ángulos de proyección mayores que 12^o y particularmente al pasar de 20^o, las fórmulas anteriores necesitan ir acompañadas de un nuevo factor θ, llamado *parámetro de curvatura,* cuyo valor, deducido experimentalmente para distintos ángulos de proyección y alcances, constan en las tablas que acompañan a los tratados de Balística.

779. Funciones balísticas secundarias.—Para hacer más cómodo el empleo del método de Siacci en los problemas balísticos, se han construído tablas de doble entrada que dan, para valores de u y de V determinados, el de los factores

$$J(u) - J(V), \quad T(u) - T(V),$$

$$\frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)} - J(V) \quad \text{y} \quad J(u) - \frac{A(u) - A(V)}{D(u) - D(V)},$$

que entran en las expresadas fórmulas.

Estas expresiones y otras que con el mismo objeto se emplean, han recibido el nombre de *funciones balísticas secundarias* y su uso, muy útil en todos los casos, ha dado nombres especiales a métodos de cálculo empleados en *Balística,* como los de *Braccialini* y *Parodi,* que en realidad no son más que perfeccionamientos del de Siacci.

780. Efectos mecánicos del rayado de las armas de fuego.—La discusión de los coeficientes balísticos de los proyectiles, para disminuir en lo posible la resistencia que el aire opone al movimiento de estos móviles, trajo consigo

la adopción de los proyectiles alargados de cabeza ojival; pero la teoría y la práctica demuestran que si un proyectil de esta forma sale del arma sin más movimiento que el de traslación, producido por la explosión de la carga, al pronunciarse la curvatura de la trayectoria el proyectil *no marcha de punta* y entonces, lejos de encontrarse en buenas condiciones para vencer la resistencia del aire, llega ésta a adquirir valores mayores que los ordinarios de un proyectil esférico, con el inconveniente grave de ejercerse con mayor intensidad sobre la parte anterior del proyectil y producir el giro de éste alrededor de un eje horizontal perpendicular al plano de tiro, dando lugar a que el proyectil se invierta y llegue al blanco en malas condiciones para producir el efecto útil que de él podría esperarse.

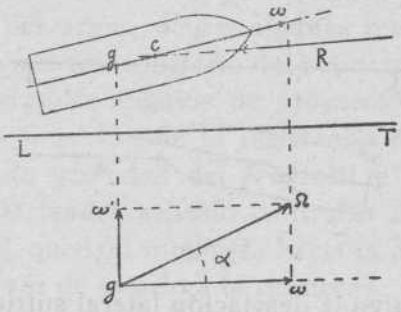


Fig. 400

Los inconvenientes citados se han remediado con el empleo de las *armas rayadas*, que hacen que el proyectil salga del ánima del cañón dotado de un movimiento de rotación alrededor de su eje, cuya rotación [ω], compuesta con la [ω'] que en el primer instante tiende a producir el aire, ocasiona una resultante $[\Omega] \equiv [\omega] + [\omega']$ (fig. 400) que produce inmediatamente la salida del proyectil del plano de tiro, inclinándolo a la derecha, o a la izquierda, según sea el sentido de la rotación causada por el rayado (en el caso de la fig. 400 la desviación se produce hacia la izquierda) (*).

(*) El rayado que produce en el proyectil la rotación [ω] dirigida sobre el eje en el sentido del movimiento, se llama *sinistrorsum* y cuando el sentido de [ω] es contrario *dextrorsum*; estos nombres son debidos a la dirección que toman las rayas en cada uno de los casos, examinando el ánima del cañón desde la recámara.

Al salirse el eje del proyectil del plano de tiro y colocarse respecto a éste en la posición que indica la figura 401, la resistencia del aire se ejerce sobre el lado derecho del proyectil, originando una nueva rotación [ω''], alrededor de un eje próximamente vertical, y esta rotación, compuesta con la resultante anterior [Ω], produce la [Ω_1], que hace bajar la cabeza del proyectil hasta colocar su punta en la dirección del movimiento, en cuyo instante, encontrándose el proyectil en las mismas condiciones de posición, respecto a la trayectoria del centro de gravedad, que al salir por la boca del arma (salvo la desviación lateral sufrida), se reproducen en cada *dos tiempos* los fenómenos anteriores y el proyectil *marcha de punta* hasta chocar con el blanco.

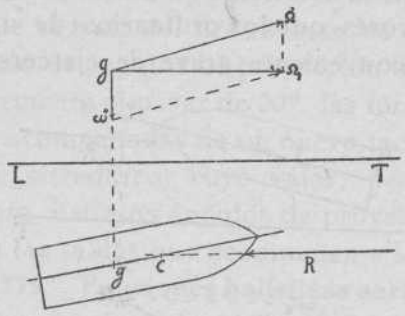


Fig. 401

Los aparatos giroscópicos ponen de manifiesto fácilmente los efectos de las composiciones de rotaciones efectuadas; pero hay que tener en cuenta que la velocidad angular de las producidas por la resistencia del aire no puede determinarse exactamente y de aquí que el trazado de las rayas esté sujeto a reglas empíricas que, si bien bastan para la práctica, no tienen, ni pueden tener, la exactitud suficiente para afirmar que en todos los casos el eje del proyectil se desplaza tangentemente a la trayectoria descrita por su centro de gravedad.

781. Derivación.—La desviación continua que, a la derecha o a la izquierda del plano de tiro, experimentan los proyectiles de las armas rayadas, recibe el nombre de *derivación*; en las armas portátiles sus efectos para la puntería

no son de consideración; pero no ocurre lo mismo con los proyectiles de la artillería, en los que adquiere dicha desviación valores que obligan a adoptar medios especiales de puntería para corregirla.

La derivación es una función del ángulo de proyección y de la velocidad inicial, que se calcula por medio de fórmulas empíricas, siendo una de las más sencillas $D = h\ V^2\ \text{sen}^2\ \varphi$.

A pesar de lo dicho sobre la relación entre el sentido de la derivación y el rayado del arma, ocurre algunas veces que aquella tiene lugar en sentido contrario del supuesto; esto sucede en el tiro con grandes ángulos de proyección, por pasar entonces la línea de acción de la resistencia del aire por debajo del centro de gravedad del proyectil y la rotación [ω'] de la figura 400 tendrá sentido contrario del supuesto y la resultante [Ω] quedará inclinada hacia la derecha del plano de tiro, en vez de estarlo a la izquierda.

II

Balística de efectos

782. Penetración de proyectiles en medios de mayor densidad que la del aire. — La parte de la Balística que se ocupa de examinar las condiciones en que el proyectil llega y penetra en el blanco, para producir su destrucción, se llama *Balística de efectos* y aun cuando en esta parte del movimiento de los proyectiles predomina, más que en las anteriores, el empirismo, es sin embargo conveniente que nos demos cuenta del fundamento teórico que tienen la mayoría de las fórmulas empleadas (*).

(*) De acuerdo con este criterio prescindiremos de señalar valores a los coeficientes de las fórmulas que obtengamos, pues la discusión y señalamiento de dichos valores, así como las aplicaciones prácticas de tales fórmulas pertenecen a la *Balística*.

Cuando un proyectil penetra en un obstáculo sólido (maderas, tierras, mamposterías, corazas, etc.), consume su fuerza viva o energía cinética en vencer tres clases de resistencias: la producida por la cohesión del medio que se opone al desgarramiento que el proyectil produce para abrirse paso; otra debida a la acción del rozamiento de la superficie del proyectil sobre la del hueco producido en la penetración, y por último la debida a la fuerza viva que tiene que comunicar a la parte arrancada del obstáculo y la que adquieren por el choque y vibraciones consiguientes las demás partes del mismo.

Representando por F, F' y F'' las fuerzas equivalentes a dichas resistencias y suponiendo que el proyectil entra en el obstáculo con la velocidad V, siendo v la que conserva en una posición cualquiera del recorrido, se podrá establecer la ecuación **(445)**

$$d\,\frac{m\,v^2}{2} = -\,(d\,TF + d\,TF' + d\,TF''),$$

o

$$\frac{m\,V^2}{2} - \frac{m\,v^2}{2} = TF + TF' + TF'',$$

con la que podremos resolver los problemas de penetración de proyectiles, cuando se conozcan, o se supongan conocidas, las expresiones de F, F' y F'', en función de los elementos del obstáculo y condiciones del proyectil.

783. Hipótesis sobre la determinación de F, F' y F''.—Como resultado de un gran número de experiencias se ha visto que el esfuerzo F debido a la cohesión de la materia, depende de la forma del proyectil y es proporcional a la sección transversal S del mismo: el valor de F podrá expresarse por la fórmula

$$F = \alpha \, . \, i \, . \, S,$$

siendo i el *coeficiente de forma* del proyectil y α el parámetro de proporcionalidad de esta fuerza resistente.

El valor de F', es función lineal del perímetro de la sección recta y además depende en cada instante del espesor que presenta el obstáculo delante del proyectil, su expresión es de la forma

$$F' = \delta \, i \, (E - x) \, \pi \, D,$$

siendo E el espesor del obstáculo, x la penetración conseguida en un instante cualquiera, D el calibre del proyectil y δ el coeficiente práctico de proporcionalidad.

El sumando F'', dependiente de la fuerza viva comunicada en forma de transporte y vibraciones a la masa del obstáculo, es

$$F'' = \gamma \, i \, S \, v^2,$$

representando por γ el correspondiente coeficiente práctico.

En resumen, el esfuerzo total resistente, cuyo trabajo se ha de desarrollar a expensas de la fuerza viva del proyectil, estará expresado por la fórmula

$$J = F + F' + F'' = \alpha \, i \, S + \delta \, i \, (E - x) \, \pi \, D + \gamma \, i \, S \, v^2 =$$
$$= i \left[S \, (\alpha + \gamma \, v^2) + \pi \, \delta \, (E - x) \, D \right]$$

y la ecuación de la fuerza viva, antes establecida, se convierte en

$$d \, \frac{m \, v^2}{2} = - \, i \left[S \, (\alpha + \gamma \, v^2) + \pi \, \delta \, (E - x) \, D \right] d \, x,$$

cuya integración conduce a fórmulas complicadas, sin la

seguridad de obtener resultados suficientemente aproximados a la realidad; por este motivo se simplifica el procedimiento, suponiendo que, en los casos de aplicación, se reducen a *cero* los coeficientes de proporcionalidad que menos influencia produzcan en los resultados.

784. Fórmulas de penetración en medios de menor densidad que el proyectil. — Cuando el obstáculo que ha de atravesar el proyectil es de menor densidad que éste los esfuerzos resistentes F y F'' toman valores preponderantes y se suele prescindir del F'; haciendo $\delta = o$ en la ecuación anterior, resulta

$$d\,\frac{m v^2}{2} = - S i (\alpha + \gamma v^2)\, d x,$$

$$\frac{p v d v}{g} = - S i \alpha (1 + n v^2)\, d x,$$

$$d x = - \frac{p}{2 g S \alpha i n} \cdot \frac{2 n v d v}{1 + n v^2} = - \frac{c}{i} h \frac{2 n v d v}{1 + n v^2},$$

habiendo hecho intervenir en la última transformación el *coeficiente balístico* $c = \dfrac{p}{1000\, D^2}$ y representado por h el producto de los restantes factores numéricos que entran en el coeficiente de la fórmula.

Integrando entre V y v la expresión de $d x$, se obtiene

$$x = \frac{c h}{i}\, l \frac{1 + n V^2}{1 + n v^2} = \frac{c}{i} K \log \frac{1 + n V^2}{1 + n v^2},$$

siendo K el producto de h por el módulo de transformación de los logaritmos neperianos a decimales.

La fórmula anterior permite resolver los problemas que tengan por objeto la determinación de la velocidad v que

conserva el proyectil después de penetrar una longitud x en obstáculos de menor densidad que el hierro, como tierras, mamposterías, hormigón, maderas, etc., y el recíproco del anterior que servirá de base para calcular los espesores de dichos obstáculos y proteger las obras o elementos de defensa colocados detrás de ellos.

785. Penetración total.—*Fórmula de Didion.*—Si en la fórmula anterior se supone $v = o$, se obtendrá el valor de x correspondiente al máximo recorrido que el proyectil efectúa dentro del obstáculo; así resulta la fórmula del *General francés Didion*

$$X = \frac{c}{i} K \log (1 + n V^2),$$

que sirve para calcular la penetración total del proyectil, en obstáculos de la naturaleza indicada, en función de la velocidad remanente del mismo en el instante inicial del choque y, recíprocamente, se podrá determinar la velocidad remanente necesaria en dicho instante, para conseguir determinadas penetraciones.

786. Fórmulas de penetración en medios de la misma o mayor densidad que el proyectil.—Cuando el proyectil penetra en obstáculos metálicos, adquieren valores preponderantes las fuerzas resistentes F y F' y se prescinde del término $F'' = \gamma\, i\, S\, v^2$ en la ecuación que sirve de punto de partida al cálculo de las fórmulas de penetración **(783)**.

Suponiendo $\gamma = o$ en dicha ecuación, se obtiene

$$d \frac{m v^2}{2} = \frac{p v d v}{g} = - i \left(S \alpha + \pi \delta (E - x) D \right) d x =$$
$$= - K_1 D^2 d x - K_2 (E - x) D d x,$$

e integrando entre V y o, o sea para el segundo miembro,

entre o y E resulta

$$\frac{p\,V^2}{2\,g} = K_1\,D^2\,E + \frac{K_2}{2}\,D\,E^2,$$

que sirve para calcular el espesor máximo de planchas metálicas que puede atravesar un proyectil de calibre D, llegando al obstáculo con la energía cinética $\frac{p\,V^2}{2\,g}$.

787. Fórmulas monomias de penetración de corazas.—La fórmula binomia anterior no es muy cómoda para los cálculos y como su exactitud deja que desear, por la diversidad de valores que las experiencias atribuyen a los coeficientes K_1 y K_2, se suele sustituir por las fórmulas monomias, que tienen por base para su deducción el valor de F o el de F', según el criterio especial de los experimentadores.

Partiendo de la ecuación (α y γ iguales a cero)

$$d\,\frac{m\,v^2}{2} = \frac{p\,v\,d\,v}{g} = -\,i\,\pi\,\delta\,(E-x)\,D\,d\,x,$$

se obtiene

$$\frac{p\,V^2}{2\,g} = \frac{K_2}{2}\,D\,E^2.$$

Esta fórmula, cuyo coeficiente K_2 será, naturalmente, distinto del K_2 de la anterior, se acostumbra a poner en la forma

$$E = \sqrt{\frac{p\,V^2}{2\,g}\cdot\frac{1}{\pi\,D}\cdot\frac{1}{K}}$$

y se conoce con el nombre de *fórmula de Fairbairn*; en ella se ha representado por $\frac{1}{K}$ el valor numérico $\frac{2\,\pi}{K_2}$.

Si se considera preponderante en la penetración el esfuerzo $F = \alpha\,i\,S$, se obtiene la fórmula monomia

$$d\,\frac{m v^2}{2} = \frac{p v\, d v}{g} = - i_a \frac{\pi D^2}{4} d x,$$

que, integrada, se convierte en $\frac{p V^2}{2 g} = K D^3 E.$

788. Fórmulas en función de la energía del proyectil por centímetro cúbico de la esfera inscrita. — Comparando los efectos producidos por proyectiles de distintos calibres y longitudes, se ha visto la conveniencia de expresar las fórmulas de penetración en función de la energía por $c\,m^3$ de la esfera inscrita en el cilindro formado por el cuerpo del proyectil; esta energía es

$$W = \frac{p\, v^2}{2 g} : \frac{1}{6} \pi D^3$$

y sustituyendo el valor de $\frac{p v^2}{2 g}$ en la forma binomia establecida en el número **786**, resulta

$$W \frac{1}{6} \pi D^3 = K_1 D^3 E + \frac{K_2}{2} D E^2,$$

y

$$W = K' \cdot \frac{E}{D} + K'' \cdot \left(\frac{E}{D}\right)^2,$$

cuyos coeficientes se han determinado experimentalmente con suficiente concordancia para ofrecer garantías de exactitud en los casos de aplicación.

789. Penetración oblícua. — En todas las fórmulas anteriores se ha supuesto que el proyectil choca normalmente contra la superficie del obstáculo; cuando esta circunstancia no se verifique, se toma, como base de los cálculos de pe-

netración, la energía $\frac{p\ V_1^2}{2\ g}$ que corresponde a la componente normal V_1 de la velocidad del proyectil en el instante del choque y se modifican los valores de los coeficientes, según el ángulo de oblicuidad, por las distintas condiciones en que se realiza el movimiento de penetración.

FIN

ERRATAS

Páginas	Línea	DICE	DEBE DECIR
29	9	$L' = -(y\,Z - z'\,Y)$,	$L' = -(y'\,Z - z'\,Y)$,
53	14	acción $[R]$ y $[G]$,	acción de $[R]$ y $[G]$,
82	3	$L\,Y + M\,Y + N\,Z \gtrless o.$	$L\,X + M\,Y + N\,Z \gtrless o.$
157	29	$\Sigma\, m\, x\, z' = o$	$\Sigma\, m\, x\, z = o$
169	21	$M\,R_m$	$M\,R^2_m$
186	24	$\frac{\xi - z}{x'}$	$\frac{\xi - x}{x'}$
189	5	$\xi - \frac{x'}{z}\,\zeta =$	$\xi - \frac{x'}{z'}\,\zeta =$
189	11	indicatriz de un	indicatriz en un
190	6	$(y\,z' - z\,x')^2$	$(y\,z' - z\,y')^2$
228	11	$E = E_o + W_o\,t + \frac{1}{2}\,K\,t$	$E = E_o + W_o\,t + \frac{1}{2}\,K\,t^2$
249	14	$G_n = \frac{V^2}{a} = \omega^2\,.\,a$	$G_n = \frac{V^2}{a} = \omega^2\,.\,a$
258	6	$z'\,\frac{d\cos\gamma_2}{d\,t}$	$z'\,\frac{d\cos\gamma_3}{d\,t}$

Páginas	Línea	DICE	DEBE DECIR
333	8	**331**	**311**
381	1	$N=\frac{c'}{p}=\frac{2\pi R}{p}$ y $N'=\frac{c}{p}=\frac{2\pi R'}{p}$	$N=\frac{c}{p}=\frac{2\pi R}{p}$ y $N'=\frac{c'}{p}=\frac{2\pi R'}{p}$
423	11	$\cos F_v$	$\cos \overline{Fv}$
425	23	$F\,d\,e''\,\overline{F\,d\,e''}$	$F\,d\,e''\cos\overline{F\,d\,e''}$
473	19	$\int_D' \frac{K\,d\,m}{R}$	$\int_D' \frac{K\,d\,m}{r}$
512	13	$m\frac{d^2x}{d\,t}$	$m\frac{d^2x}{d\,t^2}$
668	20	$(1+2^2+3^3+\ldots.+n^2)$	$(1+2^2+3^2+\ldots.+n^2)$
698	13	$p_1=\frac{a\,A}{a\,E}$	$p_1=P_1\frac{a\,A}{A\,E}$
711	31	**sobre**	**durante**
757	13	$\frac{P}{\pi}$	$\frac{p}{\pi}$
757	21	$\frac{P}{\pi}$	$\frac{p}{\pi}$
834	23	cuestión	ecuación

ÍNDICE

Páginas

Prólogo V
Advertencia VI
Informe VII

INTRODUCCION

Objeto y divisiones de la Mecánica 1

PRIMERA PARTE

TEORÍA VECTORIAL O ALGORITMO MECÁNICO

CAPÍTULO PRIMERO.—Elementos determinativos de las magnitudes mecánicas

Preliminares 11
Sumas gráficas.—Equipolencias 16
Momentos de un vector respecto a un eje y a un punto 21
Momentos de un sistema vectorial respecto a un eje y con relación a un punto 34

CAPÍTULO SEGUNDO.—Equivalencia y composición de los sistemas vectoriales

Equivalencia de los sistemas vectoriales 44
Reducción de los sistemas vectoriales 51
Composicion y descomposición gráfica 56
Composición y descomposión analítica 75

Páginas

CAPÍTULO TERCERO.—Polígonos y curvas funiculares

Polígonos funiculares 86
Aplicaciones de los polígones funiculares 97
Curvas funiculares 109

CAPÍTULO CUARTO.—Momentos estáticos, centros de gravedad y momentos de inercia

Momentos con relación a planos de los sistemas vectoriales paralelos 120
Centros de distancias proporcionales, de distancias medias y de gravedad de un sistema de puntos aislados 129
Momentos estáticos y centros de gravedad de extensiones geométricas 133
Momentos de inercia o de segundo orden 148

CAPÍTULO QUINTO.—Teoría de las funciones gráficas o geométricas

Funciones gráficas y sus derivadas lineales, angulares y areolares... 170
Funciones gráficas derivadas de otra función 178
Determinación analítica de una función gráfica 184

SEGUNDA PARTE

CINEMÁTICA

Preliminares 195

CAPÍTULO PRIMERO.—Cinemática del punto geométrico

Trayectoria y función gráfica del movimiento de un punto..... 199
Ecuaciones del movimiento 205
Teoría de las velocidades..... 220
Teoría de las aceleraciones..... 229
Ejemplos de movimientos especiales de un punto..... 241
Movimientos simultáneos..... 253

Páginas

Ejemplos de movimientos compuestos de un punto..... 267
Otras aplicaciones de la teoría del movimiento relativo..... 278

CAPÍTULO SEGUNDO.—Cinemática del sólido o cuerpo geométrico

Movimientos simples de un sólido.—Su composición..... 286
Movimiento de un sólido alrededor de un punto..... 299
Movimientos generales de un cuerpo geométrico.—Su composición 305
Movimiento de un sólido paralelamente a un plano.—Movimiento de una figura plana en su plano..... 308
Movimiento relativo de un sólido con relación a otro móvil..... 327

CAPÍTULO TERCERO.—Cinemática de los sistemas de enlace o Teoría de los Mecanismos

Preliminares..... 337
Mecanismos de primer género..... 354
Mecanismos de segundo género..... 366
Mecanismos de tercer género.—Contacto plano..... 375
Mecanismos de tercer género.—Contacto no plano..... 395
Mecanismo de dirección de los automóviles..... 403

TERCERA PARTE

DINÁMICA

Preliminares..... 411

CAPÍTULO PRIMERO.—Generalidades sobre las fuerzas

Principios fundamentales y primeras nociones sobre las fuerzas.... 414
Trabajo y potencia de las fuerzas..... 422
Fuerzas potenciales..... 436

CAPÍTULO SEGUNDO.—Teoría de los campos de fuerzas

Elememtos de un campo de fuerzas..... 442
Campos newtonianos de uno y de varios centros aislados..... 453

Páginas

Campos newtonianos compuestos de infinitos centrales..... 466
Otros ejemplos de campos de fuerzas: campos uniformes y campos rotatorios..... 477

CAPÍTULO TERCERO.—Dinámica del punto material

Ecuaciones generales del movimiento y equilibrio de un punto material..... 482
Teoremas generales de la Dinámica del punto material..... 487
Ejemplos especiales del movimiento de un punto..... 500
Movimiento de un punto cuando existen fuerzas de enlace..... 521
Ejemplos de movimiento de un punto sometido a fuerzas de enlace. 537
Movimiento relativo del punto material..... 546
Ejemplos de movimiento y equilibrio relativos del punto material.. 557

CAPÍTULO CUARTO.—Dinámica general de los sistemas materiales

Preliminares..... 565
Teoremas generales..... 574
Movimiento relativo de los sistemas materiales..... 593

CAPÍTULO QUINTO.—Dinámica especial de los sistemas indeformables

Movimiento de un sólido libre..... 599
Sólido con tres o más puntos fijos..... 603
Sólido con dos puntos fijos..... 609
Sólido con un punto fijo..... 624

CAPÍTULO SEXTO.—Dinámica especial de los sistemas articulados

Preliminares..... 639
Equilibrio de los sistemas reticulares..... 643
Equilibrio de los sistemas funiculares..... 657
Movimiento de los sistemas de enlace constituídos por las máquinas. 669
Equilibrio de los mismos..... 688

Páginas

CAPÍTULO SÉPTIMO.—Dinámica especial de los sólidos y sistemas articulados naturales

Principios generales..... 706
Aplicaciones..... 717

CAPÍTULO OCTAVO.—Dinámica de los sistemas flúidos

Principios fundamentales y ecuaciones generales del movimiento.. 736
Movimientos permanentes..... 749
Equilibrio de los sistemas flúidos..... 766
Cálculo de presiones sobre superficies en contacto con los flúidos.. 776
Movimiento y equilibrio de un cuerpo en el interior de un líquido. 784
Movimiento y equilibrio de un cuerpo en el interior de una masa gaseosa..... 793

CAPÍTULO NOVENO.—Dinámica especial de las fuerzas instantáneas

Teoría de las percusiones..... 814
Aplicaciones..... 821
Teoría del choque..... 829

APÉNDICE

NOCIONES DE BALÍSTICA

Balística exterior.—Fórmulas de Siacci..... 837
Balística de efectos.—Fórmulas de penetración de proyectiles..... 849

Erratas..... 857

OBRAS DEL AUTOR

MECÁNICA GENERAL

Pesetas

Un volumen de 864 páginas de 10,5 × 17 cms., con 400 figuras intercaladas (2.ª edición)..... 40

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

Un volumen de 128 páginas de 10,5 × 17 cms., (3.ª edición)..... 4

ELEMENTOS DE NOMOGRAFÍA

Un volumen de 80 páginas de 10 × 16 cms., con nueve láminas, conteniendo 18 nomogramas y 40 figuras esquemáticas..... 5

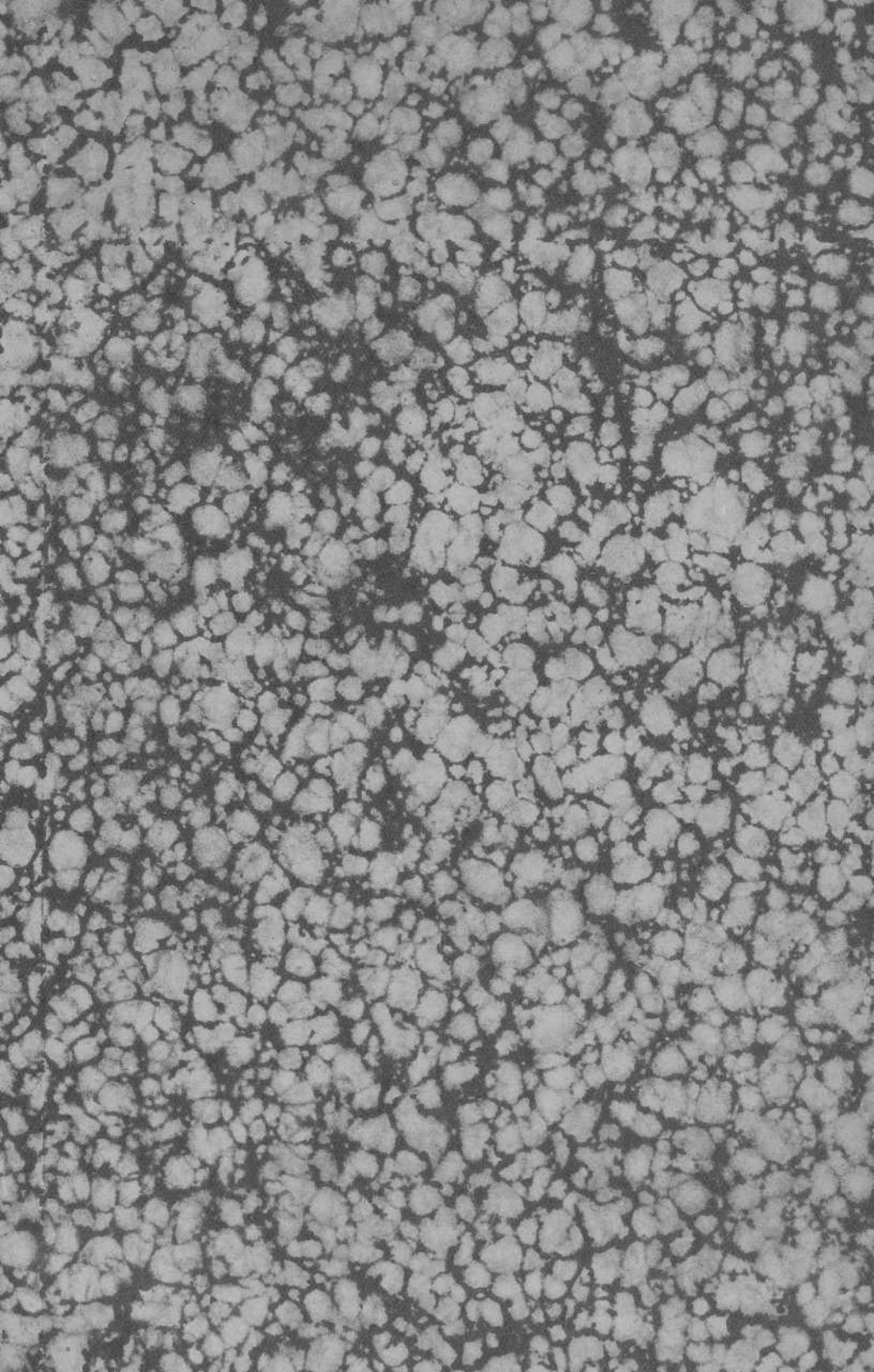
REGLA DE CÁLCULO LOGARÍTMICA

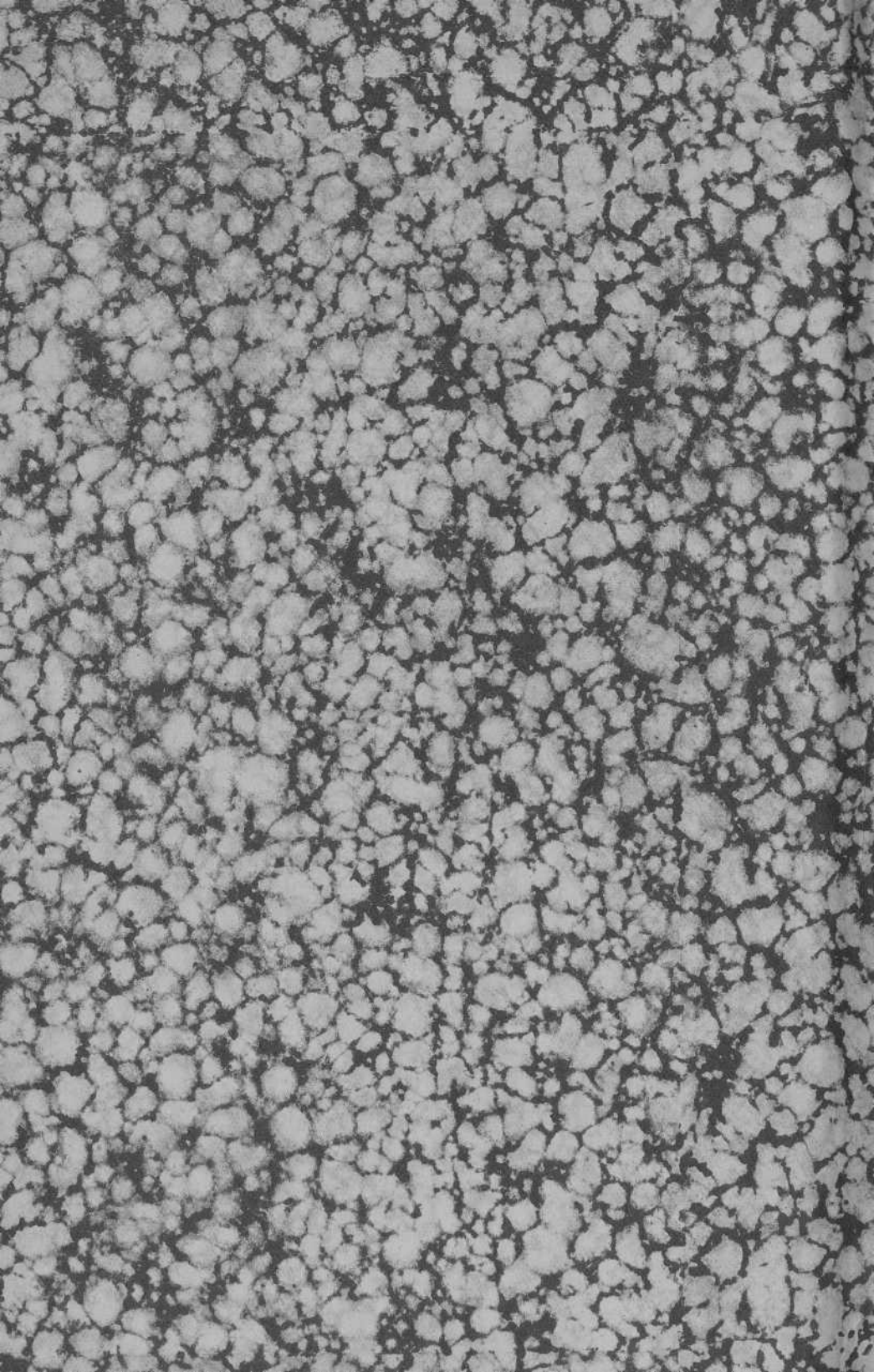
La Regla (15 cms.), con un folleto explicativo de 86 páginas de 9,5 × 16,5 cms..... 16

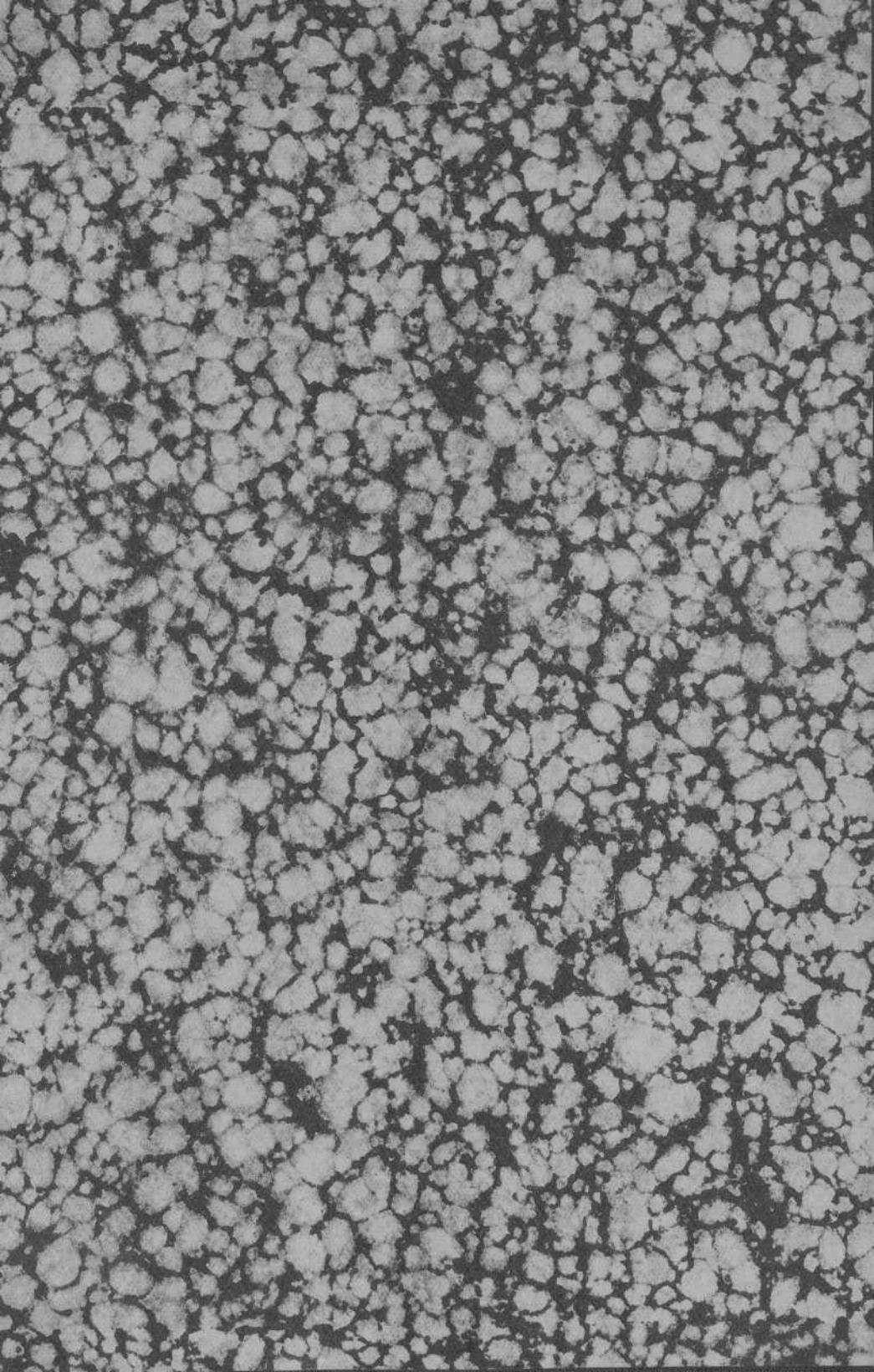
NOTA.—Cedida por el autor la propiedad de su Regla de Cálculo al Colegio de Huérfanos de Santa Bárbara y San Fernando, los pedidos de ella se harán a la Asociación de dicho Colegio, Ministerio de la Guerra, Madrid.

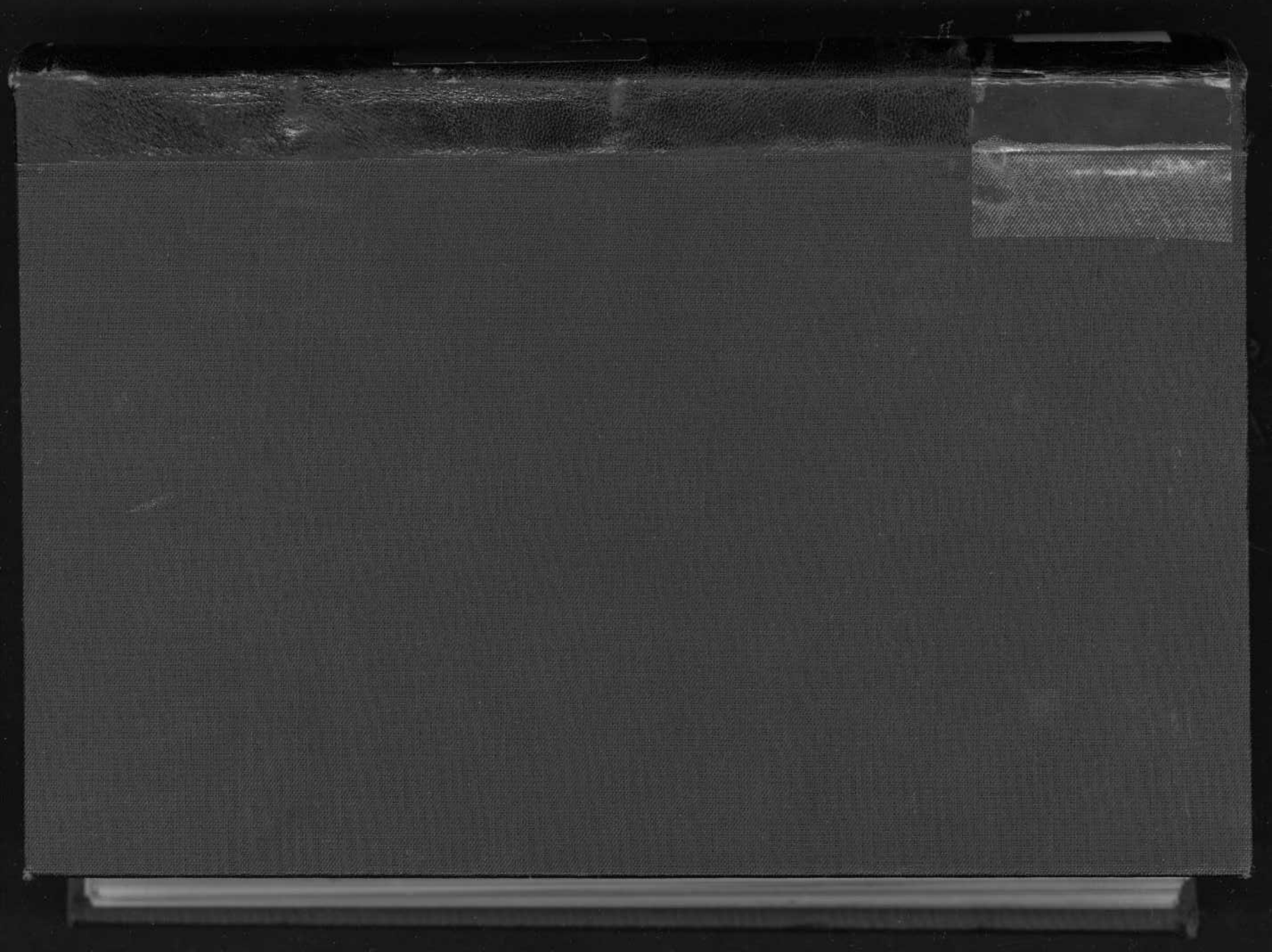
De venta en la LIBRERÍA DE D. E. DOSSAT

Plaza de Santa Ana, 9.—Madrid









N. ALCAYDE

MECÁNICA GENERAL

D-2
1002