TRACTATUS
PRÆLIMINARIS.
MATHEMATICARUM
DISCIPLINARUM ELEMENTA
IN USUM PHYSICÆ CANDIDATORUM.

AUCTORE

R. P. FRANCISCO A VILLALPANDO, *Ordinis Capucc. Philosophiæ, & Theologiæ Profess.*

MATRITI. MDCCLXXVIII.

Apud JOACHIMUM IBARRA, C. R. M. Typographum.

SUPERIORUM PERMISSU.

MONITUM.

Tametsi in hujusce Tract. efformatione, Elementis Mathematicis eorumdem ad Physicæ Phænomena applicationem, quorum cognitioni deservitura traduntur, adjungere proposueram, tamen postmodum eadem nuda exhibere congruentius mihi visum est; tum prolixitatis (ingentis equidem) vitandæ gratia: tum etiam quia cum Physicæ studium præire debeant, non modica ex rerum ignotarum admixtione confusio oriretur; tum aliis de causis. Fortasse aliquando, Deo favente, in nova hujusce tract. editione, notis nonnullis ad Physicam pertinentibus illustrabitur.

PARS

PARS PRIMA.

DE ELEMENTIS ARITMETICÆ.

Notiones prævia.

MAthematica ea facultas vocatur, quæ agit de *quantitate*, cujus nomine id omne quod augmenti, & diminutionis capax est, significatur. Quantitas, in sensu mathematico accepta, in *continuam*, & *discretam* dividitur. Illa est, cujus partes perfectè unitæ considerantur, v. g. extensio: hæc, cujus partes divisæ considerantur, v. g. numerus. De hac tantùm *Arithmetica* pertractat.

1 Proinde definitur: *scientia quæ circa quantitates discretas computandas versatur.* Ratione notarum, quibus utitur, dividitur in *vulgarem*, & *litteralem.* De illa postmodùm. De hac autem in præsentiarum acturi, ab *unitatis*, & *numeri* declaratione inchoabimus.

2 *Unitas* est quantitas quælibet, quam pro termino, cui aliæ ejusdem speciei comparentur, assumimus. Sic dum parietem centum ulnas longum dicimus, ulna pro unitate assumitur; quod si pedem assumere libeat, æque poterimus, parietem tunc trecentos ped. longum affirmantes.

3 *Numerus* ad unitatem relationem dicit. Et siquidem hæc relatio est quasi totius ad partem, *integer*: si tanquam partis ad totum, *fractus*; si autem ex utroque constet, *mixtus* vocatur.

4 Vulgaris arithmetica sequentibus utitur notis arabicis:

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
nulla unitas (vulgo *cero*),	unitas,	duo,	tres,	quatuor,	quinque,	sex,	septem,	octo,	novem,

usque ad *decadem* quæ ex decem unitatibus formatur: ex decem decadibus *centuria* &c., quæ iisdem ac simplices unitates notis designantur, situ tamen distinguuntur; nam primo loco (ad dexteram legentis) apponuntur simplices unitates: in sequenti decades: in proximo centuriæ &c.

5 Itaque ad exprimendum quinquaginta duo, quinque nempe decades, & duas unitates, scribendum 52, quorum 2 unitates, 5 decades exprimat.

6 Cifra o quamvis nihil significet, si tamen ad reliquorum dextram apponatur, eorum valorem decies auget; sic 10 valet decem: 20 viginti &c. Si cifra alia (ad dexteram) adjiciatur, decades in centurias convertentur. Sic 100 valet centum: 200 ducenta &c. Hoc est: *notæ eædem, ejusdemque intrinseci valoris, à situ diversum characterem induunt, fiuntque unitates, decades, centuriæ &c.*

7 Problema. *Legere quemcunque numerum ex quibuslibet notis compositum.*

Solut. In *classes* virgula' disjunctas dividatur, quarum quælibet trium sit notarum, à dextra incipiendo: ab eodem latere sex postmodum assumantur, tanquam valorum *dignitates.* In fine primæ dignitatis 1 supra apponatur: in fine secundæ 2 &c. Quo facto, à læva legere incipiatur, numerando *mille* ubi sola sit virgula'; ubi supra sit numerus' *millio*, toties repetendus, quot unitates in dicto numero sint &c; aut facilius millionis, billionis, trillionis, &c. vocibus utere, v. g. 2^3, 468. 539^2, 025, 641^1, 728, 028. Sic itaque legetur: duo trilliones, quatuorcentum sexaginta octo mille, quingenti triginta novem billiones, vigintiquinque mille, sexcenti, quadraginta & unus milliones, septingenti viginti & octo mille, & viginti & octo.

Axiomata.

8 Totum una sui parte majus est, & æquale omnibus partibus simul sumptis.

9 Æquales inter se quantitates, quarum utralibet æqualis est tertiæ: ac proinde, si ex pluribus quotcunque quantitatibus prima sit æqualis secundæ, secunda tertiæ, tertia qurtæ . . ; prima æqualis est ultimæ.

10 Quantitates æquales, post æqualia incrementa, aut decrementa æqualia, remanent æquales.

11 Quantitates inæquales, post æqualia incrementa, aut decrementa æqualia, remanent inæquales.

12 Quantitates æquales per incrementa inæqualia. aut inæqualia decrementa, fiunt inæquales.

13 Duo quicunque numeri aut sunt æquales, aut inæquales, ac proinde minor est majoris pars.

Definitiones.

14 Partes numeri aut sunt *aliquotæ*, aut *aliquantæ*. Illæ sunt, quæ aliquoties sumptæ totum adæquant, v. g. 4 respectu 16; hæ quæ secus, ut 4 ad 18.

15 *Quantitates æquales* eæ dicuntur, quæ substitui possunt, absque eo quod in calculi valore sit variatio.

16 *Quantitates similes* sunt eæ, in quibus eadem esse debent, per quæ discernantur.

17 *Mensura* cujuslibet quantitatis est, id quod semel, aut pluries sumptum, eidem aptatur; sic 1, 2, 3, 4, 6, 12 sunt mensuræ num. 12, postremaque *maxima* est.

18 *Mensura communis* duarum, aut plurium quantitatum est, quæ omnes metitur; sic 2 est mensura communis 8, & 12. Etiam 4 eorumdem mensura est, & quidem *maxima*.

19 *Quantitates commensurabiles* sunt eæ, in quibus

bus aut una aliarum mensura est, aut omnes mensuram communem habent. *Incommensurabiles* verò, quæ nullam habent mensuram communem.

20 Numerus *rationalis* vocatur ille, qui commensurari valet cum unitate; qui autem secus, *irrationalis*, aut *surdus*.

21 Numerus *primus* est ille, qui nonnisi unitatem partem aliquotam habet.

Signa hypothetica.

22 Hoc signum + significat *plus*: — *minus*: = *æquale* : × seu (.) *multiplicatum per* : (:) *divisum per*. Et ita, $2 = 2$; $3 + 5 = 8$; $6 - 2 = 4$; 4×2, seu $4.2 = 8$. $10 : 2 = 5$. Hoc postremum ita etiam enuntiari solet $\frac{10}{2} = 5$.

De Arithmeticæ operationibus.

ARTICULUS I.

De Numeris integris.

23 FUndamentales Arithmeticæ operationes sunt *additio*, *subtractio*, *multiplicatio*, *divisio*, quibus quæstiones quælibet circa numeros resolvuntur.

24 *Additio* est operatio qua quæritur summa plurium quantitatum.

25 Probl. *Numeros integros quoslibet addere.*

Sol. Numeros addendos alios aliis subscribito; ita ut omnium unitates sint in eadem columna, decades in eadem altera, centuriæ in tertia... *Dein, ducta lineola*, collige statim summam unitatum. Si illa summa minor est numero 10, scribatur in eadem columna infra lineolam:

lam: Si æqualis uni aut pluribus decadibus sine excessu, scribatur o; si cum excessu, scribatur excessus; & in utroque casu augeatur summa columnæ sequentis totidem unitatibus quod repertæ sunt decades. Idem facito successivè pro columnis decadum, centuriarum, chiliadum, &c. Numerus qui sic *infra lineolam* scribetur erit summa quæsita; & recta erit additio.

Exemp. I. Sint addendi numeri A, B, C. Dico $4+0+5=9$; $2+4+2=8$; $3+2+2=7$; $8+1=9$. Scribendo successivè illas summas, 9, 8, 7, 9, habeo numerum S, qui est summa quæsita.

$$\begin{array}{l} A..8324 \\ B..\ \ 240 \\ C..1225 \\ \hline S..9789 \end{array}$$

Exemp. II. Sint addendi numeri a, b, c. Dico $4+2+1=7$; deinde $5+6+7=18$. Scribo excessum 8 illius summæ supra unam decadem & addo 1 columnæ sequenti; $1+7+3+9=20$. Cum nullus sit excessus summæ supra decades, scribo o, & addo 2 columnæ sequenti; $2+6+5+0=13$. Scribo 3, & addo 1 columnæ sequenti; $1+9+8+5=23$. Scribo 3, & ad lævam illius 2, quia nulla remanet columna cui addi possit.

$$\begin{array}{l} a..96754 \\ b..85362 \\ c..50971 \\ \hline s.233087 \end{array}$$

Additionis probatio nulla alia adstruenda præter curam in æquivocatione qualibet vitanda, necnon & operationis repetitionem in omnem sensum. Quælibet alia probatio iisdem ac operatio periculis obnoxia est,

26 *Subtractio* est operatio, qua quæritur differentia duarum quantitatum, vel excessus majoris supra minorem. Illa *minuenda*: hæc *subtrahenda vocatur*: quantitas inventa dicitur *residuum.*

27 Probl. *Numeros integros subtrahere.*

Sol. Subscribantur unitates minoris unitatibus majoris, decades decadibus, centuriæ centuriis &c. Dein, ducta lineola, infra eam successivè scribantur varii excessus unitatum majoris supra unitates minoris, decadum supra decades, centuriarum..., si nulla nota superioris minor sit nota correspondente inferioris. Verum si quæ nota superioris minor sit nota correspondente inferioris, addatur numerus 10 notæ superiori, & detrahatur una unitas notæ numeri superioris ad lævam proximæ. *Denique* si nota ista ad lævam proxima sit expletiva, addatur, ut antea, numerus 10 notæ circa quam fit operatio: detrahatur una unitas notæ positivæ ad dexteram proximæ; addatur numerus 9 cuilibet notæ expletivæ positæ inter cifram quæ aucta fuit, & notam quæ fit imminuta; & fiat reliqua operatio ut in primo casu. Numerus repertus, qui sic scribitur infra lineolam, erit differentia numerorum propositorum.

Nam numerus ille continebit evidentèr excessus unitatum numeri superioris supra unitates inferioris, decadum supra decades... omniumque partium superioris supra partes correspondentes inferioris. Ergo numerus repertus erit excessus numeri superioris supra inferiorem. Atqui ille excessus est differentia numerorum propositorum; ergo numerus repertus erit &c.

Ex. Subtrahendum sit 19648 è 30539. Hos numeros sic dispono

30539 *Minuenda*
19648 *Subtrahenda*
10891 *Residuum*

Et ab unitatibus incipiendo, dico: $9 - 8 = 1$, quam sub lineola in columna unitatum scribo; & ad decennas transeundo, quoniam è 3 subtrahi nequit 4, addam primæ notæ decem unitates, è sibi proximo 5 desumptas, sicque dicam: $13 - 4 = 9$, quem sub decennarum co-

columna scribo. Transeo ad centennas; cumque 5 in 4 commutetur, nec ex eo 6 subtrahi valeat, aut unitas è nota proxima desumi, eo quod sit 0, eam è sequenti, 3 nempe desumam, dicens: 14 — 6 = 8, quem sub lineola colloco. Dein, (0 in 9 converso) 9 — 9 = 0, quem sub columna scribo; & ad sequentem pergens, dico denique: 2 — 1 = 1; sicque subtrahendo 19640 è 30539, residuum est 10891.

28 Subtractio examinatur colligendo summam ex minore numero, & differentia reperta. Si illa summa sit æqualis majori numero, certus manebis de rectitudine subtractionis. Certum quippe est, quod si quantitati minori addimus excessum majoris supra illam, summa erit æqualis quantitati majori.

29 *Multiplicatio* est operatio, qua datis duobus numeris, quæritur tertius, qui unum ex datis toties contineat, quoties altero continetur unitas. Numerorum alius *multiplicandus*, alius *multiplicator*, quarum vocum significatio per se patet.

30 Probl. *Quemlibet numerum integrum multiplicare.*

Sol. Primo memoritèr sequens tabula addiscatur.

9 · 9 = 81	7 · 7 = 49	4 · 4 = 16
9 · 8 = 72	7 · 6 = 42	4 · 3 = 12
9 · 7 = 63	7 · 5 = 35	4 · 2 = 8
9 · 6 = 54	7 · 4 = 28	3 · 3 = 9
9 · 5 = 45	7 · 3 = 21	3 · 2 = 6
9 · 4 = 36	7 · 2 = 14	2 · 2 = 4
9 · 3 = 27	6 · 6 = 36	
9 · 2 = 18	6 · 5 = 30	
8 · 8 = 64	6 · 4 = 24	
8 · 7 = 56	6 · 3 = 18	
8 · 6 = 48	6 · 2 = 12	
8 · 5 = 40	5 · 5 = 25	
8 · 4 = 32	5 · 4 = 20	
8 · 3 = 24	5 · 3 = 15	
8 · 2 = 16	5 · 2 = 10	

Dein-

Deindè : Subscribatur nota multiplicans unitatibus numeri multiplicandi. Dehinc, ducta lineola, seorsim sumantur producta unitatum, decadum, centuriarum.. multiplicandi per notam multiplicantem, & scribantur infra lineolam in propriis sedibus (nempe productum unitatum in columna unitatum, productum decadum in columna decadum..), si singula sint minora numero 10. Verum si aliquod ex illis productis sit æquale uni, pluribusve decadibus absque excessu, aut cum excessu, scribatur in propria sede, in primo casu 0, in secundo excessus; & in utroque, quotquot sunt repertæ decades, totidem addantur unitates producto notæ ad lævam proximæ per notam multiplicantem. Numerus sic repertus erit productum quæsitum.

Nam ad hoc sufficit quod numerus repertus constet ex productis unitatum, decadum, omniumque partium multiplicandi propositi per multiplicantem datum; atqui sic res est, ut patet: ergo numerus repertus est productum quæsitum.

Exemp.

235	*multiplicandus.*
43	*multiplicator.*
705	*product. per 3.*
940	*product. per 4.*
10105	*product. totale.*

Multiplicandus proponatur numerus 235 per 43. Scribe 43 sub 235; tunc ducta lineola, dic, 3 in 5 efficiunt 15, scribe 5 sub numero multiplicante 3, & unam decadem sepone adjiciendam facto sequenti ex 3 in 3, quod est 9; cui si addas 1, habebis unam decadem, & nullas præterea unitates: scribe igitur 0, & facto ex 3 in 2, quod est 6, adjiciens 1, scribe 7: rursus dic, 4 in 5 efficiunt 20; scribe 0, ita ut multiplicatori 4 subjaceat, & facto sequenti 4 in 3, quod est 12, adjiciens 2, habebis 14; scribe igitur 4, & seponens 1, dic, 2 in 4 effi-

efficiunt 8, & adjecto 1, scribe 9. Demum ducta linea, collige in unam summam hos numeros ita dispositos; eritque 10105 productum quæsitum.

31 *Dividere* est quærere quantitatem (quæ *quotiens* dicitur) exprimentem quoties una ex quantitatibus datis, *divisor* nuncupata, in alia *dividendus* dicta, contineatur.

32 Probl. 1. *Numerum integrum quemlibet per alium dividere.*

Sol. Pro casu, in quo divisor unica nota constat. Primò: Scripta ad dexteram dividendi nota dividente, per istam divide notam, quæ prima est ad lævam dividendi, si minor non sit dividente; si minor, divide simul primam cum secunda: & scribe quotientem sic repertum sub divisore. Secundò: Multiplica divisorem per notam quotientis sic repertam, & productum subtrahe ex primo divisionis membro, id est ex prima, vel duabus primis dividendi notis. Tertiò: Ad dexteram residui scribe sequentem dividendi notam. Ex illo residuo cum illa nota fiet alterum divisionis membrum, circa quod operaberis ut antea, & quotientem illius secundi membri per divisorem scribes ad dexteram quotientis primi membri. Quartò: Perge eodem modo operari, usque dum singulæ dividendi notæ successivè scriptæ fuerint ad dexteram singulorum residuorum, & singula divisionis membra divisa. Quintò: Si contingat residuum aliquod cum sequente dividendi nota esse minus divisore, scribe in quotiente 0, & novam dividendi notam adde ad dexteram primæ. Denique, si post ultimam subtractionem aliquid supersit, ad dexteram quotientis scribetur super lineolam verticalem, ac sub ea divisor.

Ex.

Ex. Sit dividendus numerus *D* per *d*. Dico : $\frac{4}{3} = 1$; scribo 1 in quotiente.

Deinde $3 \times 1 = 3$; $4 - 3 = 1$. Ad dexteram istius residui 1 primi membri, scribo sequentem dividendi notam 3. Habeo 13 pro secundo divisionis membro; & sic pergo, $\frac{13}{3} = 4$; scribo 4 in quotiente. Deinde dico $3 \times 4 = 12$; $13 - 12 = 1$, & venit tertium divisionis membrum 15. Dico itaque $\frac{15}{3} = 5$; scribo 5 in quotiente. Deinde $3 \times 5 = 15$, $15 - 15 = 0$, & venit quartum divisionis membrum 06, vel 6. Dico igitur $\frac{6}{3} = 2$, scribo 2 in quotiente. Denique $3 \times 2 = 6$, $6 - 6 = 0$. Unde numerus *Q* est verus quotiens qui quærebatur.

$$\begin{array}{r|l} D \ldots 4356 & 3 \ldots d \\ \underline{3} & 1452 \ldots Q \\ 13 & \\ \underline{12} & \\ 15 & \\ \underline{15} & \\ 06 & \\ \underline{6} & \\ 0 & \end{array}$$

Sol. pro casu 2.°, dum divisor pluribus notis constat.

Primò : Pro primo divisionis membro, sume totidem tantùm ad lævam dividendi notas, quot sunt in divisore, si sic faciendo, haberi possit membrum divisionis saltem æquale divisori ; si secus, sume dividendi notas plures una quam sunt in divisore.

Secundò : Primam illius membri notam in primo casu, duas primas in secundo divide per notam, quæ prima est ad lævam divisoris.

Tertiò : Quotientem sic repertum ne statim scribas, sed experire prius utrum illius productum per divisorem integrum, excedat membrum divisionis ; si non excedat, scribatur quotiens sub divisore ; si excedat, detrahatur ex illo quotiente unitas semel, bis, aut sæpius, usque dum dictum productum non excedat membrum divisionis.

Quartò : Reperta sic demum prima quotientis nota, ejus

ejus productum per integrum divisorem subtrahe ex membro divisionis, & ad lævam residui, scribe notam dividendi sequentem.

Quintò: Si secundum hocce divisionis membrum pauciores habet notas quam divisor, imò si minus sit divisore, scribatur in quotiente o, & addatur illi membro nova etiam dividendi nota; si notæ numero æquales sint in illo membro, & divisore, nec membrum minus sit divisore, dividatur prima illius nota per primam divisoris; si notæ illius membri sint una plures quam divisoris, dividantur duæ primæ illius per primam istius; & in utroque casu attentetur quotiens obvius antequam scribatur. Continuetur sic operatio, donec singulæ dividendi notæ scriptæ fuerint ad dexteram variorum residuorum.

$$\begin{array}{r} D\,..\,190{,}502 \\ \underline{170} \\ \underline{205} \\ \underline{204} \\ 102 \\ \underline{102} \\ 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 34\,...\,d \\ 5603\,..\,Q \end{array} \right.$$

Exemp. Sit dividendus D, & divisor d. (Signum $>$ enuntiatur *majus quam*, & signum $<$ enuntiatur *minus quam*). Dico $\frac{19}{3} = 6$; $6 \times 34 = 204 > 190$, $5 \times 34 = 170 < 190$. Scribo itaque sub divisore 5. Dico deinde $190 - 170 = 20$. Addo sequentem dividendi notam 5, & fit secundum divisionis membrum 205. Dico $\frac{20}{3} = 6$; $6 \times 34 = 204 < 205$. Scribo itaque 6 in quotiente. Deinde dico $205 - 204 = 1$. Addo sequentem dividendi cifram o; & habeo tertium divisionis membrum 10, quod cum sit minus divisore, scribo in quotiente o, & addo novam dividendi notam 2: atque ita fit ultimum divisionis membrum 102. Dico $\frac{10}{3} = 3$; $3 \times 34 = 102$. Scribo itaque in quotiente 3. Deinde dico $102 - 102 = 0$. Unde numerus Q est quotiens qui quærebatur.

33 Quod autem præfata methodo verus quotiens inve-

veniatur, ex eo patet; quia tunc obtinetur verus quotiens, quando productum illius per divisorem adæquat dividendum; atqui per præfatam methodum id obtinetur. Nàm producta divisoris per singulas quotientis notas successive subtrahuntur è singulis dividendi partibus; ac proinde productum integri quotientis per divisorem subtrahitur ex integro dividendo; & nihil superest: ergo &c. Idque locum habet, seu divisor sit numerus simplex, seu compositus.

34 Ad divisionem quamlibet examinandam, multiplicetur quotiens repertus per divisorem datum. Recta erit divisio, si productum reperiatur æquale dividendo.

Si quid residuum fuerit post ultimi membri divisionem, addatur illud residuum præfato producto. Recta erit divisio si summa illa sit æqualis integro dividendo. Nàm evidenter recta est divisio, si dictum productum sit æquale dividendo, detracto illo residuo. Ergo utrinque addendo illud residuum, recta est divisio, si dictum productum addito residuo, fit æquale dividendo integro.

ARTICULUS II.

De Fractionibus communibus numericis.

35 DIximus numerum fractum eum esse, qui ad unitatem relationem dicit partis ad totum. Sic unitas à nobis consideranda tanquam ex pluribus partibus (minoribus) constans, quæ & ipsæ unitates (diversæ licet naturæ) habeantur. Hæ partes *fractionem* constituunt, quæ ita signatur $\frac{3}{4}$.

36 Cum singulæ hæ partes nomine speciali distingui debeant, hinc numerus superior dicitur *numerator*,

v. g. in ex. apposito 2, inferior *denominator* scilicèt 4. Hic exprimit numerum partium, in quas totum aliquod divisum fingitur: ille autem, quot ejusdem partes accipiantur, seu quoties una ex illis partibus sumatur: ambo *termini fractionis* appellantur.

37 Ex hoc sequitur quod ut legatur numerus fractus, incipiendum à numeratore, eique denominator adjungendus; sic $\frac{3}{7}$ legendum *tria septima*, seu *tres septimæ partes*, significatque ex 7 part. in quas divisa concipitur unitas, tres esse desumendas.

38 Item deducitur, eo magìs fractionis valorem unitati accedere, quo magìs numerator denominatori appropinquat; & siquidem æquat, tunc idem unitatis, & fractionis valor: sic $\frac{3}{3} = 1$. Nàm clarè patet, quod si ulna in tres partes dividatur, & hæ simul accipiantur, tota ulna accipitur. Unde generatìm deducitur, quantitatem per se ipsam divisam æqualem esse unitati.

39 Dum ergo numerator est minor denominatore, fractio est minor unitate, magìs minusve, prout hic excessus fuerit major, aut minor; tuncque erit fractio proprie dicta; si autem ex adverso, fractio erit unitate major, ac proinde *impropria*.

40 Optime itaque poterit denominator augeri, aut minui, absque variatione valoris in fractione, modo æquè augeatur, aut minuatur numerator; hoc est, *non variatur valor fractionis, ex eo quod ejus termini per eandem quantitatem multiplicentur, aut dividantur.* Certum quippe est $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ esse fractiones æquales, cum earum quælibet dimidium unitatis exprimat: ergo $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$. Sed $\frac{2}{4} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2}$, seu $\frac{1}{2}$ multiplicatis numeratore, & denominatore per eandem quantitatem 2. Item $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; sed

$\frac{1}{2} = \frac{4:4}{8:4}$, seu $\frac{4}{8}$ divisis numeratore, & denominatore per eandem quantitatem 4: ergo, &c.

41 *Reductio* unius quantitatis ad aliam est diversa ejusdem expressio absque ulla variatione in valore.

42 Probl. 1. *Numerum integrum ad fractionem determinati denominatoris reducere.*

Sol. Multiplicetur numerus integer per datum denominatorem: productum erit numerator fractionis præfatum denominatorem habentis; sic ut 20 reducatur ad fractionem, quæ habeat denominatorem 4, 20 per 4 multiplicandus, & productum 80 erit numerator fractionis habentis denominatorem 4. Et ita $20 = \frac{20.4}{4} = \frac{80}{4}$ (§. 40).

43 Ergo in sensu contrario procedendo, seu diviso numeratore per denominatorem, dum fieri potest, numeri integri in fractione propria contenti invenientur. Sic $\frac{28}{6} = 4 + \frac{4}{6}$.

44 Semper numerator fractionis considerari valet ut quantitas in tot partes dividenda, quot unitates in denominatore continentur, posito scilicet numeratore pro dividendo, & denominatore pro divisore. Sic $\frac{3}{5}$ considerari valet tanquam tres unitates inter quinque dividendæ; idem quippe est quinta pars trium ulnarum, aut tres quintæ partes unius ulnæ.

45 Ergo facile valor cujuslibet fractionis habebitur, si numerator reducatur ad unitates speciei minoris (§. 42), ac postmodum per denominatorem dividatur (§. 43), V. g. ulna in pedes, pes in pollices, &c.

46 Probl. 2. *Duas, pluresve fractiones ad eandem denominationem reducere.*

Solut. Multiplicentur numeratores singuli seorsim sumpti per denominatores singulos, proprio

prio excepto denominatore: producta singula dabunt denominatores singulos quæsitos. Deinde denominatores singuli in se ipsos ducantur; habebitur denominator communis quæsitus. Ex. g. reducendæ sint ad communem denominationem fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$: multiplicetur 1 per 3, & dabit 3: multiplicetur itidem 2 per 2, & dabit 4: multiplicentur deinde per sese 2, & 3: productum 6 erit communis denominator, habebimusque $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$, & $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$; cumque operatio fiat per multiplicationem duorum terminorum fractionis per eandem quantitatem, absdubio æqualitas servabitur (§. 40).

Ut ad eandem denominationem hæ fractiones reducantur $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, procedendo juxta præfatam regulam, habebimus:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{15}{30}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{20}{30}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{18}{30}$$

47 Probl. 3. Fractionem ad minimam expressionem reducere. Sol. Quæratur mensura communis numeratori, ac denominatori, ac per eam singillatim uterque dividatur: *quotus* resultans erit fractio ad minimam expressionem reducta. Sic $\frac{12}{24} = \frac{12:12}{24:12} = \frac{1}{2}$, quia 12

 ma-

maxima communis mensura duorum terminorum est; quin ex eo valor fractionis immutetur (§. 40).

48 Probl. 4. Maximam communem mensuram duarum quantitatum invenire. Sol. Major quantitas per minorem dividatur; & siquidem residuum nullum sit, minor erit mensura communis maxima; si autem sit residuum, minor quantitas per illud dividatur, sicque fiat donec deveniatur ad divisorem exactum, atque hic maxima communis mensura erit; quod si inveniri nequeat, signum est quantitates propositas non aliam præter unitatem mensuram communem habere.

Quæritur maxima mensura communis harum quantitatum 144, & 96. Divido 144 per 96. Et quoniam residuum 48 superest, divido 96 per 48, quæ quidem divisio exacta resultat, ac proinde 48 erit mensura communis maxima illarum quantitatum, mensurans scilicet primam per tres, secundam per 2.

49 Pariter fractiones ad minorem expressionem reducuntur, earumdem terminis per 2 divisis, quoties id absque residuo fieri potest: postmodum per 3, per 5, 7, &c. Ultimus quotiens erit fractio ad minimos terminos redacta. Sic hæc fractio: $\frac{96}{144} = \frac{96:2}{144:2} = \frac{48}{72} = \frac{48:2}{72:2} = \frac{24}{36} = \frac{24:2}{36:2} = \frac{12}{18} = \frac{12:2}{18:2} = \frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$. Ad hujus methodi majorem facilitatem, observatum est omnem numerum parem esse divisibilem per 2: omnem finitum in 0 per 5, aut per 10: in 5 per 5. Itidem divisibilem esse per 3 numerum, cujus notæ aliæ aliis additæ quantitatem componunt divisibilem per 3. Sic 564 dividi potest per 3, nàm si ejus partes seorsim sumantur $5+6+4=15$, dividi valet per 3, & certè $564:3=188$.

Probl.

50 Probl. 5. Fractiones addere, aut subtrahere. Sol. Reducantur ad communem denominatorem : addantur, aut subtrahantur novi numeratores, atque summæ, aut residuo communis denominator apponatur. Addendæ sint v. g. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{5}$; reductis tribus his fractionibus (§. 46) ad eandem denominationem, habebimus $\frac{1}{2}=\frac{15}{30}$, $\frac{2}{3}=\frac{20}{30}$, $\frac{1}{5}=\frac{6}{30}$; additis igitur novis numeratoribus, trium fractionum summa erit $=\frac{15+20+6}{30}=\frac{41}{30}=1+\frac{11}{30}$ (§. 43).

Ex. Subtrahenda sit $\frac{1}{5}$ ex $\frac{2}{3}$; facta reductione ad communem denominatorem, habebimus $\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$, & $\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$; & subtrahendo novos numeratores, residuum erit $=\frac{10-3}{15}=\frac{7}{15}$.

51 Probl. 6. Fractiones multiplicare. Sol. Multiplicentur numeratores inter se, & factum erit numerator producti; multiplicentur etiam denominatores, ac quantitas inde prodiens erit denominator producti. V. g. Sit multiplicandum $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{2}$; multiplicetur numerator 2 per numeratorem 1; habebimus 2 pro numeratore producti; multiplicetur etiam denominator 3 per denominatorem 2; habebimus 6 pro denominatore producti, ita ut $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2\cdot 1}{3\cdot 2}=\frac{2}{6}$

52 Ad hoc perfectè capiendum præsens habeatur, quod in producto toties unus factor contineri debet, quoties in alio unitas continetur (§. 29); & sic in ex. adhibito, in producto $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ (§. 47) contineri debet unus factor $\frac{2}{3}$, dimidia vice; eodem modo ac unitas in alio factore $\frac{1}{2}$, nàm $\frac{2}{3}$ ita in $\frac{1}{3}$ continetur.

53 Probl. 7. Fractionem per aliam dividere. Sol. Invertantur duo termini divisoris, & per divisorem ita inversum multiplicetur dividendus; productum erit verus quo-

tiens. *Ex.* Dividendum sic $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{9}$; invertatur divisor hoc modo $\frac{9}{4}$, & multiplicetur dividendus $\frac{2}{3}$ per $\frac{9}{4}$; productum resultans, nempe $\frac{18}{12}$ erit quotiens hujus $\frac{2}{3} : \frac{4}{9}$.

Hoc significat, conformiter ad definitionem divisionis, quod dividendo $\frac{2}{3}$ per $\frac{4}{9}$, quotiens $\frac{18}{12} = \frac{18:6}{12:6} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ (§. 43) exprimet divisorem $\frac{4}{9}$ contineri sexquialtera in dividendo $\frac{2}{3}$; nàm si multiplicentur duo termini hujus fractionis per 3, habebimus, ejus valore immutato permanente (§. 40), quod $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$, nec dubitari potest quod divisor $\frac{4}{9}$ est sexquialtera minor, seu sexquialtera contineri in dividendo $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

54 Si fortè occurrat multiplicare, aut dividere fractionem per numerum integrum, aut viceversa, nulla erit major difficultas. Nàm omnes numeri integri possunt repræsentari tanquam fracti, eo solo quod pro denominatore 1 apponatur, quin valor ullatenus immutetur, nàm v. g. $4 = \frac{4 \cdot 1}{1} = \frac{4}{1}$ (§.40), observatis postmodum regulis pro reliquis fractionibus adhibitis.

55 Si integri fractis adjuncti reperiantur, methodis supra adhibitis procedi poterit, integris ad speciem suarum fractionum reductis, ac eisdem additis. Sic ad multiplicandum 4 & $\frac{1}{2}$ per 2 & $\frac{1}{3}$, quatuor integri ad dimidios, & alii duo ad tertios reducentur (§. 42), & multiplicandum habebimus $\frac{8}{2} + \frac{1}{2}$ per $\frac{6}{3} + \frac{1}{3}$, hoc est $\frac{9}{2}$ per $\frac{7}{3}$, & erit productum $\frac{63}{6} = 10 + \frac{3}{6}$ (§. 43); idem ad divisionem fiet.

AR-

ARTICULUS III.

De Fractionibus decimalibus.

56 SI unitas in 10 dividitur partes, harum quælibet erit proculdubio decies minor unitate. Hæ igitur sunt, quæ *fractionum decimalium* nomine veniunt; quæ quidem singulæ, si in alias 10 dividantur, quælibet erit decimæ decima pars, ac proinde centesima unitatis. Idem de centesima in alias 10 divisa, &c.

57 Decimales igitur sunt fractiones unitate minores, quæ per 10 decrescendo progrediuntur; unde & ad unitatum dexteram collocantur, ab eisque virgula ' secernuntur. Sic ad exprimendum 52 unitates, & 9 decimas, dicimus 52, 9. Ad exprimendas 2 unitates, & 4 centesimas sic 2, 04; si autem tres millesimas, 0, 003.

58 In fractionibus propriis certum est numeratorem per denominatorem dividi non posse, quin prius numerator reducatur ad species inferiores. Ut ad decimales (quod ad præsens propositum refert) reducatur, multiplicari debet (§. 42) per 10, aut addendum 0: postmodum dividendus per denominatorem: quotiens exprimet numerum decimarum, cuilibet divisoris, aut denominatoris unitati respondentium.

Si post divisionem supersint aliquæ decimæ, eodem pacto reducentur ad suas decimas, addito 0; factaque sicut prius divisione, quotiens exprimet centesimas respondentes, quæ ad dexteram decimarum simplicium apponentur. Idemque cum millesimis &c. fiat.

Reducenda exhibeatur v. g. fractio $\frac{2}{8}$ ad decimales. Reduco in primis 2 ad decimas (§. 42), habebimusque 20 decimas, quæ per 8 divisæ, dabunt pro

quo-

quotiente 2 decimas. Sed cum residuum sit 4 decimarum, eas ad suas decimas, seu ad unitatis centesimas reducere oportet, sicque dabunt 40, quæ per 8 divisæ quotiens erit 5 centies. Cumque nil supererit, concludo fractionem $\frac{2}{8}$, ad fractiones decimales reductam $= \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$; sed $\frac{2}{10} = \frac{2 \,.\, 10}{10 \,.\, 10} = \frac{20}{100}$: ergo $\frac{2}{8} = \frac{20}{100} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100}$ $= 0, 25$. (§. 57), seu 25 centesim.

59 Idem obtinetur addendo numeratori fractionis cifras 000 quascunque, ac postmodum per denominatorem dividendo; quo casu prior nota, quæ pro quotiente exeat, exprimet decimas: secunda centesimas, &c. Sic in exemplo proposito $\frac{2}{8}$ addantur 0000, & ita dividetur 20000 per 8, quotiens erit 2500 decem milles, qui quidem valor à præcedenti non differt, nam 0, $25 = \frac{25}{100} = \frac{25 \,.\, 100}{100 \,.\, 100} = \frac{2500}{10000} = 0{,}2500$. Si autem addendo 0 numeratori, per denominatorem dividi nequit, 0 loco decimarum ponetur; imò duo, vel tres; si autem partitio effici nequeat, etiamsi addantur duo 00, addetur 0 loco centesimarum, &c. (§. 58); sic $\frac{1}{125} = 0, 008$.

60 Decimalis itaque valor non variatur licet ad ejus dexteram addatur, vel auferatur unus, pluresve 00.

61 Ad pronuntiandum ergo quamlibet fractionem decimalem, sufficit notas numeratoris pronuntiare, seu eas, quæ decimales exprimunt, eodem modo ac si integri numeri forent, ac postmodum addere denominatorem unitatum decimalium ultimæ speciei, qui semper erit 1 cum tot 00, quot notæ sint in tota decimali; atque idcirco hæ fractiones semper carent denominatore; obliviscenda tamen non est virgula ' ad denotandum sequi fractionem decimalem, cui anteponi solet

let o, quando numeri integri desunt. Sic $35 + \frac{254}{1000}$, scribitur 35, 254; & legitur, 35 unit., & 254 milles.

62 Si fractio ad decimales reducenda fuerit impropria, extrahentur numeri integri (§. 43), ac deinceps operatio modo solito fiet, sicut (§. 59) dictum est.

63 Quoniam autem omnis quantitas minor est pars majoris (§. 13), rectè tanquam hujus fractio considerari poterit; v. g. pes tanquam fractio ulnæ, numero exprimente quotum pedum in ulna contentorum posito pro denominatore, sic pes $1 = \frac{1}{3}$ ulnæ: hora $1 = \frac{1}{24}$ diei: minutum $1 = \frac{1}{60}$ horæ &c.

64 Ergo quælibet quantitas exprimi potest tanquam fractio decimalis illius unitatis, cujus est fractio communis. Sic digitus exprimi valet tanquam fractio decimalis pedis; est enim fractio communis illius, nempe $\frac{1}{12}$, quæ fractio (§. 59) est = 0, 08333 pedis. Idem exprimi potest tanquam fractio decimalis ulnæ, cujus itidem est fractio communis, seu $\frac{1}{36}$, quæ ad decimalem reducta (§. 59), erit = 0, 02777, modica cum differentia.

65 Probl. 1. *Decimales addere.*

Sol. Aliæ quantitates sub aliis ponantur, ita ut unitates omnes ejusdem speciei sint in eadem columna: ita positæ addantur, eodem modo ac numeri integri (§. 25).

Exempla.

	2, 042	2, 3	0, 24
	90, 3212	25, 382	82, 0006
	28, 45276	4, 53126	4, 253
Summ.	120, 81596	32, 21326	86, 4936

66 Probl. 2. *Decimales subtrahere.*

 Sol.

Sol. Locentur quantitates sicut ad additionem (§. 65), ac minori sub majori posita, fiat id ipsum quod de numeris integris dictum manet (§. 27). Sed quoniam accidere potest, ut quantitas major in parte fractionali non tot habeat notas quot minor, addentur oo usque dum æquales reddantur: quod quidem erit reducere eas decimales ad eundem denominatorem (§. 60), eodem manente valore: postmodum fiat subtractio. Subtrahenda sit v. g. 0, 94052 ex 1, 823. Additis duobus oo decimali quantitatis majoris, facta subtractione, residuum erit 0, 88248.

min....	1, 82300
subs...	0, 94052
resid..	0, 88248

67 Probl. 3. *Decimales multiplicare.*

Sol. Locetur multiplicandus, & multiplicator, (virgula' spreta) sicut in numeris integris (§. 30): multiplicatio quoque iisdem regulis fiat: ex producto totali ad ejusdem decimales secernantur tot notæ, à dextra incipiendo, quot fuerint in decimalibus amborum factorum; reliquæ numeros integros exprimentur.

Multiplicandum sit v. g. 34, 62, per 4, 5. Factores ita dispono

$$\begin{array}{r} 3462 \\ 45 \\ \hline 17310 \\ 13848 \\ \hline 155,790 \\ \hline \end{array}$$

Et facta multiplicatione, extraho ex producto totali tres notas ad decimales, tot scilicet quot erant in decimalibus amborum factorum; sicque multiplicando 34, 62 per 4, 5, productum erit 155, 790 = 155, 79 (§. 60).

68 Ad hoc comprobandum, reducantur numeri integri

gri ad speciem minorem suarum decimalium (§. 42), ad modum fractionis communis : habebimus 34, 62 = $\frac{3462}{100}$, & 4, 5 = $\frac{45}{10}$: multiplicatis duabus his fractionibus, productum erit = $\frac{155790}{1000}$, deductisque integris (§. 51), habebimus (§. 43) $\frac{155790}{1000}$ = 155 + $\frac{79}{100}$ = 155, 79, quod ipsum est, quod per regulas præcedentes deduximus.

69 Verum si quando in producto non tot sint notæ quot in decimalibus amborum factorum, tunc casus tot addentur ad sinistram oo, quod neccessarii sint ad æquandas notas utriusque factoris in suis decimalibus, v. g. multiplicando o, 23, per o, 4, productum est o, 92; sed quia ad decimales producti debent separari tres notæ, quæ nempe sunt in decimalibus amborum factorum, interponetur o inter virgulam ' & 92, hoc modo o, o92, & ita productum o, 23 per o, 4 erit = o, o92, seu 92 millesim., sicut apparebit ex dictis (§. 68).

70 Probl. 4. *Decimales dividere.*

Sol. Æquetur numerus notarum decimalium in dividendo, & divisore, additis ad dexteram minus habentis oo necessariis, quo decimalium valor non immutabitur (§. 60). Dividatur deinde unus per alium (virgula ' spreta), tanquam numeri integri (§. 32). Quotiens dabit summam quæsitam.

Ad dividendum v. g. 155, 79 per 4, 5, quoniam duæ sunt notæ decimales in dividendo, & una in divisore, huic addo o: postmodum dividentur ac si forent numeri integri 15579 per 450, quotiens dabit 34 + $\frac{279}{450}$, quorum prior numerus unitates, secundus fractionem communem exprimit, quæ ad decimales reducta (§. 59) erit = o, 62, ac proinde totus quotiens = 34 + o, 62 = 34, 62.

71 Ad hujus operationis rectitudinem demonstrandam, reducantur dividendus, & divisor ad speciem infi-

fimam suarum decimalium (§. 42) : habebimus 155, $79 = \frac{15579}{100}$, & $4, 5 = \frac{45}{10}$, ac dividendo $\frac{15579}{100}$ per $\frac{45}{10}$ (§. 53), quotiens erit $= 34 + \frac{279}{450}$; quæ regulis divisionis optimè congruunt.

72 Probl. 5. *Fractiones ad integros, & decimales speciei inferioris reducere*; hoc est, *decimalium valorem invenire.*

Sol. Multiplicetur decimalis data per numerum exprimentem quot unitates speciei inferioris unam earum, ad quas superior pertinet, constituunt. Productum significabit integros, & decimales speciei inferioris, seu valorem decimalis in unitatibus speciei inferioris.

Reducere volo 0, 54117 aureos ad argenteos, & argentei decimales, seu illorum in his valorem comperire satago. Quoniam 15 arg. aureum componunt, multiplico 0, 54117 per 15 (§. 67) : productum est = 8, 11755, hoc est 8 arg. + 0, 11755 decim. Ut harum valor capiatur, multiplicandæ per 34 terunt., scilicèt qui argent. componunt : productum exprimet earum valorem in teruntiis, & decimalibus teruntii. Cum autem decimales sint veræ fractiones, & hæ computentur (§. 45) reducendo numeratorem ad species inferiores, & postea dividendo per denominatorem, patet quod in decimalibus reductio ad inferiores species sufficiet; cum enim denominator sit 1 (§. 61) cum tot 00 quot notæ sint in decimali, exiet semper quotiens æqualis producto à reductione procedenti. Unde ad transferendam decimalem à specie inferiori ad superiorem, sat erit dividere decimalem datam per numerum exprimentem quot unitates speciei propositæ componunt unitatem speciei superioris, ad quam facienda est reductio. Sic ad convertendam decimalem 0, 08333 ped. in decimalem ulnarum, posito quod ulna tribus pedibus constet, dividatur (§. 70)

0,

o, 08333 per 3, & quotiens o, 02777 dabit decimalem quæsitam, juxta modo dicta (§. 64).

ARTICULUS IV.

De Numeris denominatis complexis

73 NUmeri contracti ad species particulares, *denominati* dicuntur, qui quidem dum complexi sunt, speciali consideratione indigent.

74 Probl. 1. Addere numeros complexos. Sol. Locentur numeri alii sub aliis, ita ut singularum specierum unitates in singulis columnis sint; & ducta infra lineola, additio ab unitatibus speciei inferioris incipiat. Si summa unitatem speciei immediatè superioris non componit, sub propria columna scribetur; verum si componit, non scribetur ibi nisi excessus unitatum inferiorum superiorem componentium, & unitas superior ad propriam columnam servabitur. Idem cum cæteris fiet. Addere oporteat v. g.

aur.	arg.	terunt.
50	2	22
4	5	8
32	14	30
87	7	26

Summa terunt est 60, nempè 1 arg. & 26 terunt. Pono itaque 26 sub columna terunt, & servo unum arg. quod aliis addens, invenio summam 22 arg., vel quod idem est, aureum unum, & 7 arg. quod scribo sub columna arg. & servo 1 aur. qui reliquis additus, summam constituit 87 aur. Et ita summa totalis est $=$ 87 aur. $+$ 7 arg. $+$ 26 terunt.

75 Probl. 2. Numeros complexos subtrahere. Sol. Quantitas minor sub majori locetur, sicut ad additionem (§. 74). Incipiat subtractio à specie inferiori, & subscribatur residuum: si autem numerus quantitatis in-

inferioris major fuerit superiore ei respondente, unitas è specie proximè majori sumetur, quæ postea computabitur, & ad speciem inferiorem reducta (§. 42), numero superiori addetur, & facta postmodum subtractione, residuum sub respondente columna locabitur. Idem cum reliquis speciebus fiet.

Quantitas inferior è superiori subtrahenda.

	ann.	mens.	dies.	hor.	minut.
	24...	10...	25...	4..	32
	14...	11...	24...	12...	30
Resid.	9...	11...	0...	16...	2

Incipio à inferiori, & dico: è 32 minut. subtrahendo 30 remanent 2, quem sub lineola pono; & transeundo ad speciem immediatam, cum è 4 horis 12 subtrahi nequeant, sumo 1 è specie antecedenti, & 4 horis adjungo 24 horas, nempe diem unum componentes. Habebimus itaque 28 hor. è quibus subtrahendo 12, remanent 16; appono ergo sub columna hor. 16: Deinde è 24 dieb., eo jam detracto, qui assumptus est ut addereretur speciei inferiori, subtraho 24; cumque nullus remaneat, suppono 0. Hinc ad menses transeo, cumque è 10 nequeant subtrahi 11, addo 1, annum scilicet ad menses redactum, & 22 menses, è quibus 11 subtrahendo, residuum erit 11, quos sub lineola constituo. Denique è 23 ann. subtrahendo 14 (§. 27), residuum erit 9, quod sub lineola in ann. columna positum, residuum totale erit $= 9$ ann. $+ 11$ mens. $+ 16$ hor. $+ 2$ min.

76 Probl. 3. Numeros complexos multiplicare. Solut. Reducantur ambo factores ad speciem minorem, quam continent (§. 42): Postmodum unicuique pro denominatore apponatur numerus exprimens quot unitates speciei inferioris componant unam speciei superioris; atque hoc facto procedetur ad multiplicationem duarum

rum fractionum (§. 51). Quæritur v. g. quotus erit valor laboris 2 uln. itineris 1 ped. 3. digiti, assignatis pro singulis ulnis 2 aur. 2 denar. 3 terunt. mensuras illas ad digitos reduco. Habebimus 87 digit.; & quoniam digitus est $\frac{1}{36}$ ulnæ, 87 dig. erunt $\frac{87}{36}$ ulnæ. Eadem respectivè fiat reductio quoad aureos, denarios, ac teruntios, qua facta erunt 1091 terunt.; cumque terunt. sit $\frac{1}{510}$ aurei, 1091 ter. erunt $\frac{1091}{510}$ aurei, quæ multiplicata per $\frac{87}{36}$, productum erit $= \frac{94917}{18360}$ aurei, cujus valor inveniri poterit (§§. 43, & 45).

77 Alias complexorum numerorum multiplicandorum methodos nimis implexas invenimus, quam ut hìc apponantur.

78 Probl. 4. Numeros complexos dividere. Solut. Dividendus & divisor deducantur ad minorem speciem (§. 42): facta postmodum partitione, quotiens exprimet quoties divisor in dividendo continetur. Dividendi sunt 10 aur., 2 denar., & 22 terunt. per 2 aur., & 4 denar. Omnes quantitates ad teruntios reduco (§. 42), productum erit 5190 terunt. Idem facio cum 2 aur. & 4 denar. divisoris, ex quo prodeunt 1156 ter. Si itaque 5190 per 1156 dividatur, quotiens $4 + \frac{566}{1156}$ exprimet quoties divisor in dividendo continetur.

79 Regulæ allatæ limitantur ad casus, in quibus quotiens sit numerus abstractus, exprimens quoties divisor in dividendo continetur, seu in quibus uterque reduci valet ad unitates ejusdem speciei. Alii enim casus satis implexi melius per regulas proportionis resolventur.

AR-

ARTICULUS V.

De Potentiis, & radicibus.

80 PRimus *Gradus*, vel *prima Potentia* cujuslibet quantitatis est ipsa illa quantitas. Productum quantitatis per se ipsam semel, bis, ter, quater... multiplicatæ, dicitur *secunda*, *tertia*, *quarta*, *quinta*... *potentia*, vel *secundus*, *tertius*, *quartus*, *quintus*... *gradus* illius quantitatis. Quantitas quæ per se ipsam multiplicata semel, bis, ter, quater... producit aliam quantitatem, dicitur istius radix quadrata, radix cubica, radix quarta, quinta...

R....	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q....	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
C....	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Numeri linearum Q & C sunt *Quadrata*, vel secundæ potentiæ, & *Cubi*, vel tertiæ potentiæ numerorum qui ipsis directè imminent in linea R: & isti sunt radices quadratæ, & radices cubicæ numerorum ipsis directè subscriptorum in lineis Q & C.

De secunda Potentia, seu Quadrato.

81 SUmendo quemlibet numerum pro radice, inveniemus (§. 80) ejus quadratum, juxta leges multiplicationis (§. 30), generari multiplicando unitates, decenas, centenas, per unitates, decenas, centenas &c.

82 Ergo in quolibet quadrato contineri debet quadratum singularum notarum specificarum radicis: item duplum singulorum productorum binariorum, quæ formari possint è notis radicis, earum valore locali consi-

siderato, ratione cujus notæ specificæ à nobis vocantur.

83 Ergo radix unius notæ producet quadratum, ad summum, duarum notarum; nam unitates per unitates non possunt nisi unitates, & ad summum decenas producere. Radix duarum notarum nonnisi quatuor producere poterit, saltem autem trium, nam quadratum decenarum ad minus centenas exprimere debet. Radix trium notarum quadratum ad minus quinque, & ad summum sex notarum producet, quia quadratum centenarum ad minus centenas mill. producere necesse est. Et ita quodlibet quadratum ad summum duplum notarum radicis, & ad minus duplum una excepta continere debet. Omnium exempla accipe: 9 . 9=81. 10 . 10=100. 100 . 100=10000.

84 Ex hoc infertur radicem numeri, unius, aut duarum notarum, unica nota constare: trium, aut quatuor, duabus: quinque, aut sex, tribus.

85 Si ergo quemcunque numerum in series dividamus, quarum quælibet duabus notis constet, à dextera incipiendo, radix tot notas habebit, quot series in illo numero sint, & in qualibet quadratum illius notæ specificæ, quæ ei in radice respondeat, continebitur; hoc est, in serie prima ad dexteram quadratum unitatum: in secunda decenarum: in tertia centenarum radicis &c.

86 Verum cum in singulis numeris non solum contineantur quadrata notarum specificarum radicis, sed etiam duplum productorum binariorum notarum illarum (§. 82), observari opus est, quod duplum unitatum per decenas, valorem decenarum ad minus habebit, nam 1 . 10=10: duplum unitatum per centenas, valorem habebit cen-

te-

tenarum, 1 . 100=100 : duplum centenarum per centenas, mille, 10 . 100=1000 &c. Consequentèr duplum unitatum per decenas quærendum non est ad dexteram quadrati in prima nota, nec duplum centenarum per decenas ad dexteram in tribus notis ejusdem &c.

87 Cognito igitur loco illorum productorum binariorum, & uno ex factoribus invento (quod facile erit cuicunque reflectenti, quod in prima serie ad lævam continetur quadratum notæ majoris characteris in radice) (§. 85), invenietur & alius, diviso producto per factorem inventum. Sed cum producta binaria permixta sint (§. 86) quadratis notarum specificarum radicis, necesse erit operationem examinare, subtrahendo è producto summam quadrati factoris ultimò inventi, & producti ejusdem factoris per duplum radicis anterioris, quatenus jam suo loco sitæ. Ex hoc facile solvetur

88 Probl. 1. Numeri cujuslibet radicem quadratam extrahere. Sol. Incipiendo à dextera, dividatur (§. 85) in classes possibiles, etsi in ultima nonnisi unicus numerus, seu nota maneat. Sumatur prima series illius ad lævam; & examinetur quodnam sit majus illius quadratum, quod infra dictam classem locabitur: subtrahatur postmodum è illa serie, & residuum, si quod est, & radix quadrati locabitur ad dexteram numeri propositi, lineola verticali separatum. Series immediata ponatur ad continuationem residui, cui prima nota dictæ classis adjungatur: per duplum radicis inventæ dividatur: quotiens (§. 87) pro secunda nota radicis adhibebitur, & ad dexteram primæ, & divisoris locabitur.

Per hunc quotientem divisor ita auctus multiplicetur, & productum subtrahatur è omni serie, & residuo anteriori.

Pro-

Prosequatur descensus classis sequentis ad latus secundi residui, quod quidem unitum primæ hujus classis notæ, per duplum totius radicis jam inventæ dividatur, & methodo præfata usque ad ultimam classem procedendo, conclusa invenietur tota operatio.

Si fortè per duplum radicis partitio fieri nequeat, in loco respondente radicis apponetur o, & classem immediatam demittendo, juxta methodum præfatam procedetur.

			Radix.
Ex. 1. Sit extrahenda radix quadrata num.	1225	35	
	9 : :		
Resid.	325	65 divis.	
	325		
	000		

Divido hunc numerum in classes duarum notarum à dextra ad lævam; & repertis duabus classibus, certus sum radicem duas notas habituram. Primam quæro, extrahendo radicem quadratam primæ ad lævam classis. Dico itaque: maximum quadratum in 12 contentum est 9, cujus radix = 3. Scribo notam hanc 3 in loco radici destinato. Deinde ejus quadratum 9 subtraho ex prima classe. Residuum est 3, cui ad dexteram adjungo sequentem classem; & sic habeo 325 pro secundo operationis membro. Illud (exclusa ultima nota) divido per 6, duplum radicis 3 jam repertæ. Prodit quotiens 5, quem scribo tum in radice, tum ad dexteram divisoris 6. Hinc fit numerus 65, quem multiplico per eundem ipsum quotientem 5. Productum est 325. Quo subtracto ex secundo operationis membro 325, nihil residuum est. Et dico 35 esse radicem quadratam numeri 1225.

Ex. 2. Sit extrahenda		Radix.	
radix quadrata numeri.	5,47,56	234	
	4 : : : :		
1. *resid.*	147 : :	43	1. divis.
	129 : :		
2. *resid.*	1856	464	2. divis.
	1856		
3. *resid.*	0000		

Sumo primam classem ad lævam, & invenio quod 4 est quadratum majus, quod in 5 continetur. Pono itaque 4 infra 5, & facta subtractione subscribo residuum 1, & ante lineam verticalem appono 2, radicem nempe num. 4. Infra pono 47, ad residui 1 continuationem, quod quidem primæ classis notæ 4 unitum, dat 14 dividendum per 4, duplum scilicet radicis inventæ; & dico 4 in 14 ter continetur; pono itaque 3 in radice ad dexteram 2, & ad latus divisoris 4.

Divisorem sic auctum multiplico per 3, & productum 129 scribo sub num. 147, ac infra, facta subtractione, colloco residuum 18.

Ad hujus residui latus classem sequentem traho, cujus prima nota illi residuo unita dat 185 dividendum per 46, duplum radicis inventæ, & dico 4 in 18 quater continetur; 4 itaque scribo in radice, & ad latus secundi divisoris 46.

Divisorem sic auctum multiplico per 4, & scribo productum 1856 sub num. 1856, & facta subtractione, cum nullum maneat residuum, nec alia classis demittenda, dicam quod num. propositus 54756 est quadratum perfectum num. 234.

89 Si numerus propositus non fuerit perfectum quadratum, finita operatione aliquod manebit residuum, & tunc radix inventa erit radix quadrati majoris, quod in nu-

me-

mero proposito contineatur, nec possibile erit omnino exactam radicem invenire. Nihilominus mediis decimalibus ad eam valde approximabitur. Ad hoc, ultimo residuo aliquot classes oo addentur, ac deinceps explicata methodo procedetur, virgula ' adhibita ante notas media additione oo inventas, ut esse decimales significetur. Sic radix quadrata num. 586, erit modica cum differentia, 24, 207, sicut ex sequenti operatione apparebit.

		Rad.
num. prop.	5,86	24, 207
	4	
	186	44 1 divis.
	176	
	1000,00,00	482 2 divis.
	964	
	360000	48407 3 divis. & 4.
	338849	
	21151 &c.	

90 Radix quadrata fractionis invenitur, extrahendo radicem factoris, & denominatoris, & ex utraque radice fractionem efformando. Sic radix quadrata $\frac{9}{64}$ erit $\frac{3}{8}$. Nam cum, ut fractio quadrata fiat, necesse sit (§. 80) eam multiplicare per se ipsam, bis ut factorem sumptam, patet quod quadratum erit fractio composita ex producto numeratoris per se ipsum, & item denominatoris per se ipsum (§. 51); ergo &c. Tamen dum numerator, & denominator fractionis propositæ non sunt numeri perfectè quadrati, opportunius erit fractionem communem ad decimalem reducere (§. 59), ac postmodum extrahere radicem methodo indicata (§. 89),

supposito quod sermo nobis sit de fractionibus propriis; quo casu radix inventa erit fractio decimalis.

PARS SECUNDA.

De Elementis Algebræ.

Notiones Præliminares.

91 VOcatur *Algebra*, seu *Arithmetica litteralis* ea facultas, quæ docet calculum quantitatum indeterminatarum. Ad hoc utitur litteris, quæ cum significatione destituantur, idoneæ sunt ad valorem quemlibet indicandum. Hinc oritur generalitas resolutionum, quæ per Algebram fiunt.

92 Utitur etiam signis explicatis (§§. 22, 31), & item hoc $\pm$, quod significat magis, aut minus.

93 Quantitates affectæ signo $+$ dicuntur *positivæ*; quæ autem signo $-$ *negativæ*. Ambæ sunt reales, & in hoc distinguuntur, quod positivæ exprimunt excessum supra 0 usque ad infinitum; negativæ defectum similiter à 0 usque ad infinitum. Idcirco quilibet numerus quantitatum negativarum destruit æqualem numerum positivarum, sic $+a-a=0$; $+2a-a=a$; $-2a+a=-a$.

94 Quantitas algebrica alia est complexa, alia incomplexa. Litteris designatæ faciunt *expressionem algebricam*. *Polynomium*, vel *expressio complexa* illa est quæ plures designat quantitates signis $+$ aut $-$ junctas.

95 Illa verò in qua non reperiuntur quantitates dictis signis junctæ, vocatur expressio *incomplexa*, vel *Monomium*.

96 Partes polynomii signis $+$ aut $-$ junctæ sunt *termini* polynomii; quod dicitur *binomium*, *trinomium*, *quadrinomium*...., prout habet duos, tres, quatuor..

ter-

terminos. Sic istæ expressiones $+ a$, $- 2bd$, $+ abc$, $- 4b^2cd$ sunt totidem monomia: ista $+ ab - 2bcx$ est binomium, ista $- a + b + c$ est trinomium &c.

97 Terminus dicitur *positivus* aut *negativus*, prout illi præfixum est signum $+$ aut $-$. Ex instituto Mathematicorum positivum censetur monomium, aut primus polynomii terminus, cui nullum signum præfixum est.

98 Numerus terminum præcedens est *coefficiens* illius termini, & indicat quoties scriptus subintelligi debeat ille terminus cum eodem signo. Sic $+ 3ab = + ab + ab + ab$; $a - 2cd = a - cd - cd$.

99 Numerus vero supra aliquam litteram positus ad dexteram est *exponens* illius litteræ, & indicat quoties scripta subintelligi debeat illa littera in eodem termino. Sic $a^3 = aaa$; $a^2b^3c = aabbbc$. Unitas est coefficiens termini cui nullus præfixus est coefficiens, & exponens cujuslibet litteræ omni exponente scripto carentis. Hinc $- a^2bc^3 = - 1a^2b^1c^3$, & $abc = 1a^1b^1c^1$.

De Operationibus algebricis.

ARTICULUS I.

De Operationibus fundamentalibus.

100 OPerationes fundamentales algebricæ sunt additio, subtractio, multiplicatio, & divisio. Sed priusquam declarentur, sequens vulgare problema resolvendum.

101 Probl. Quantitates algebricas reducere. Sol. Omnes termini similes, hoc est (§. 16) qui eisdem litteris cum iisdem exponentibus constant, ad unum reducantur, commune signum retinentem, & cujus coefficiens sit summa

ma omnium coefficientium (§. 25). Sic $a + 2a = 3a$, $-2a - 4a = -6a$. Si terminorum similium diversa sint signa, subtrahentur coefficientes, & residuum, simul cum signo majoris erunt coefficiens, & signum termini reducti. Sic $3a - 6a = -3a$, $4bc - 2bc = 2bc$ (§. 93).

102 Probl. 1. Addere quantitates algebricas. Sol. Scribantur junctim, cum suis quæque signis, & redigantur (§. 101), si opus est: Habebitur summa quæsita. Sic harum quantitatum summa

$$\begin{array}{l} 2a + 4b - 5c + 2d \\ 3a - 2b + 4c + d \\ 2r + b - c - 6f \end{array}$$

est $2a + 3a + 2r + 4b - 2b + b - 5c + 4c - c + 2d + d - 6f = 5a + 2r + 3b - 2c + 3d - 6f$.

103 Fractiones algebricæ adduntur, reducendo eas primùm, si opus est, ad communem denominatorem (§. 46) & postmodum adhibendo summam omnium novorum numeratorum (§. 102) tanquam numeratorem unius fractionis, cujus denominator sit numerus inventus; sic $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad + cb}{bd}$; $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{m}{n} = \frac{adn}{bdn} - \frac{cbn}{bdn} + \frac{mbd}{bdn} = \frac{adn - cbn + mbd}{bdn}$.

104 Probl. 2. Quantitates algebricas subtrahere. Solut. *Scribatur statim cum propriis signis quantitas minuenda, & deinde quantitas subtrahenda mutatis signis.* Integra expressio quæ sic habetur est verum residuum; sive subtrahendum sit monomium positivum, sive monomium negativum, sive polynomium. In primo quidem casu, si ex a, verbi gratia, subtrahendum sit b, residuum est $a - b$, ut satis patet. In secundo, si ex a subtrahendum sit $-b$ residuum erit $a + b$.

Nam

Nam si ex a tolleretur o, residuum foret a. Ergo si ex a tollatur quantitas $-b$, quæ minor est quam o toto b, residuum debet esse majus toto b quam erat quando tollebatur o; ac proinde residuum esse debet $a+b$.

105 In tertio denique casu, si ex a tollere velis $b-c$ residuum erit $a-b+c$. Nam idem esse debet residuum quando totum simul subtrahitur polynomium, ac foret, si singuli ejus termini seorsim subtraherentur. Atqui, ex demonstratis, si singuli termini polynomii $b-c$ seorsim subtraherentur ex quantitate a, residuum foret $a-b+c$. Ergo quando totum simul subtrahitur polynomium, residuum est quoque $a-b+c$. Ergo habetur verum residuum sequendo præfatam legem. Hinc, exempli gratia, si ex $2ab-3ac$ subtrahere velis $ad-ab-d^2$; scribe statim $2ab-3ac-ad+ab+d^2$, & redigendo $=3ab-3ac-ad+d^2$.

106 Ad subtrahendam unam fractionem ab alia, mutantur subtrahendæ signa: postmodum ad eundem denominatorem reducuntur (§. 46): demum posita summa novorum numeratorum (§. 102) pro numeratore unius fractionis, cujus denominator sit numerus inventus, habebitur residuum. Sic ad subtrahendum $\frac{a}{b}$ ex $\frac{c}{d}$, dicam $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{cb}{bd}-\frac{ad}{bd}=\frac{cb-ad}{bd}$. Ad subtrahendum $-\frac{r}{b}$ ex $\frac{m}{n}$, dicam $\frac{m}{n}+\frac{r}{b}=\frac{mb+nr}{bn}$.

107 Probl. 3. Quantitates algebricas multiplicare. Solut. Hujus operationis rectitudo ex 4. sequentibus regulis pendet.

I. Pro signis. *Positivum sit productum, si signa facto-*

torum sint similia; si diversa, negativum.

II. Pro coefficientibus. *Detur producto pro coefficiente, productum coefficientium duorum factorum.*

III. Pro litteris propriis. *Scribantur in producto, cum suis quæque exponentibus, litteræ propriæ*, quæ scilicet reperiuntur in uno tantum factore.

IV. Pro litteris communibus. *Scribantur semel tantum in producto litteræ communes, cum exponente qui sit summa exponentium, quos habent in factoribus.* Sic ad multiplicandum $2ab^2$ per $3cd^2$ productum erit $6ab^2 cd^2$; $3ab^3 . -4a^2 = -12a^{1+2} b^3 = -12a^3 b^3$; $-3d^{-2} b. -ad^3 b^4 = 3ad^{-2+3} b^{1+4} = 3adb^5$.

108 Non augetur difficultas ex eo quod quantitates multiplicandæ sint plusquam duo; nam primùm duæ multiplicabuntur, ac postmodum productum illarum per tertiam &c. Sic $a. -b. -c.d = -ab. -c.d = abc.d = abcd$.

109 Dum quantitates multiplicandæ complexæ sunt, factor unus sub alio scribatur, & lineola infraducta, multiplicentur successivè (§. 107) omnes termini multiplicandi per terminos singulos multiplicatoris; producta in una linea posita (sub lineola) dabunt productum totale, quod reduci poterit (101) si sunt termini similes. Multiplicandum sit v. g. *A* per *B*: facta multiplicatione, resultat productum *C* in quo fient reductiones possibiles.

$$
\begin{array}{ll}
A. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2ab + bc - 3a^2 \\
B. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 2b - 4a \\
\hline
\end{array}
$$

$$C.\ 4ab^2 + 2b^2 c - 6a^2 b - 8a^2 b - 4abc + 12a^3 =$$
$$4ab^2 + 2b^2 c - 14a^2 b - 4abc + 12a^3$$

Dum

110 Dum solum volumus indicare multiplicationem quantitatum complexarum, singuli factores in parenthesi includuntur, & in medio signum multiplicationis apponitur (§. 22), aut duo parentheses junguntur; sic $(a+b+c).(d+f)$ vel $(a+b+c)(d+f)$, quod significat quantitatem primam per secundam multiplicari. Alii lineolam super singulos factores, cum signo multiplicationis in medio substituunt sic, $\overline{a+b+c} \times \overline{d+f}$. Ad indicandam multiplicationem polynomii per monomium, includitur illud in parenthesi, & ei adjungitur factor monomii, aut signum multiplicationis interponitur sic $\overline{ef+qd}.m$, vel $(ef+qd).m$. Brevius indicari solet sic, $(\overline{ef+qd}.m)$.

111 Fractiones algebricæ multiplicantur eodem modo ac numericæ (§. 51), servatis regulis adhibitis (§. 107). Sic $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, $\frac{d}{b}\frac{r}{q}=\frac{dr}{bq}$, $\frac{c}{d}$. $\frac{a+b}{m+n}=\frac{ca+cb}{dm+dn}=\frac{e+f}{m+n}.\frac{b+r}{q-s}=\frac{(e+f)(b+r)}{(m+n)(q-s)}=\frac{eb+er+fb+fr}{mq-ms+nq-ns}$.

112 Ad demonstrandam regulam signorum, quod nempe similia dent +, dissimilia —, multiplicandum detur binomium $2a-a$ per $3a-2a$, cujus productum necessario erit $=a^2$ (§. 107), cum $2a-a=a$, $3a-2a=a$. Hoc supposito, multiplicatio fiat, omissa lege signorum, primo termino excepto $6a^2$, qui proculdubio erit positivus, cum sit effectus quantitatum positivarum: productum, separatis media stellula singulis terminis, erit $6a^2 * 3a^2 * 4a^2 * 2a^2$; primus terminus $6a^2$ est sexies major quam a^2, quod quidem est productum quæsitum. Ergo ex terminis, qui supersunt debent aliqui es-

esse negativi, ut productum tandem deveniat $= a^2$; sed hoc verificari nequit, quæcunque signorum combinationes fiant, nisi ultimus terminus sit positivus, & duo intermedii negativi, hoc modo $6a^2 - 3a^2 - 4a^2 + 2a^2$; ergo hæc erit forma signorum. Sed termini intermedii sunt productum quantitatum, quæ habent signa dissimilia; extrema autem quantitatum habentium signa similia: ergo &c.

113 Probl. 4. Quantitates algebricas dividere. Sol. Divisio monomii per monomium juxta quatuor sequentes regulas procedere debet. Lex pro signis: similia in dividendo, & divisore dant $+$; dissimilia $-$; sic $+ : + = +$; $- : - = +$; $- : + = -$; certum quippe est solum hoc pacto posse æquari dividendo productum quotientis per divisorem (§§. 104, 34).

Lex pro coefficientibus: dividatur dividendus per divisorem (§. 32), & quotiens ponatur pro coefficiente quotientis, qui quæritur.

Lex pro litteris. Omnes litteræ dividendi ponantur in quotiente super unam lineam, & infra eam omnes litteræ divisoris.

Lex pro exponentibus: Si in dividendo, & divisore eadem littera inveniatur, scribatur tantum semel in quotiente super lineam, cum unico exponente, qui sit residuum ex subtractione exponentis dividendi è exponente divisoris. Sic dividendo a^2 per cb, quotiens erit $= \frac{a^2}{cb}$; $-2a^3 : -3ba = \frac{2a^{3-1}}{3b}$; $4b^2 : -2b = -2b^{2-1} = -2b$.

114 Juxta regulas adhibitas habebimus $a : a = a^{1-1} = a^0 = 1$, nam cum sit $a^0 = \frac{a}{a}$, & (§. 38) $\frac{a}{a} = 1$, erit etiam (§. 9) $a^0 = 1$; ergo quælibet quantitas cum ex-

exponente o erit æqualis unitati. Etiam inveniemus quod $a^2 : a^4 = a^{2-4} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, nam si $a^{-2} = a^2 : a^4 = \frac{a^2}{a^4}$ habebimus quod cum sit $\frac{a^2}{a^4} = \frac{a^2}{a^2} . \frac{1}{a^2} = 1 . \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$ erit etiam (§ 9) $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$: ergo in fractionibus poterit quilibet factor numeratoris, fieri factor denominatoris, & viceversa, eo solo quod signum exponentis mutetur, ac proinde sumi numeri integri pro fractis, & è converso.

115 Regulæ præfatæ applicari etiam possunt polynomiis, semper ac in utriusque terminis sit aliquis factor communis. Nam cum dividendus & divisor numerator, & denominator fractionis deveniant (§. 44), patet (§. 40) quod non mutabitur valor quotientis, licet duo termini fractionis, eum indicantes, multiplicentur, aut dividantur per eandem quantitatem : sic $(ax - 2abx) : (ax + ax^4) = \overline{ax - 2abx} : \overline{ax + ax^4} = \frac{ax - 2abx}{ax + ax^4}$ (omnibus enim his modis indicari solet divisio unius polynomii per aliud) $= \frac{ax\ (1 - 2b)}{ax\ (1 - x^3)} = a^0\ x^0 . \frac{1 - 2b}{1 + x^3} = \frac{1 - 2b}{1 + x^3}$: idem faciendum, dum dividendus sit polynomium, & divisor monomium : sic $(2ab - 4a^2x + 6ax^2) : 2ax = \frac{2a\ (b - 2ax + 3x^2)}{2a . x} = \frac{b - 2ax + 3x^2}{x}$

116 Licet regulæ hucusque traditæ generalissimæ sint, & reductionem facilitent, aliquando extensè divisionem exequi oportet. Unde sit

117 Probl. 5. Dividere unum polynomium per aliud. Sol. Dividendus, & divisor locentur sicut in Arithme

metica (§. 32), terminos juxta valorem exponentium ejusdem litteræ ordinando. Dividatur primus terminus dividendi per primum divisoris (§. 113), & quotiens sub divisore tanquam pars quotientis quæsiti apponatur: per eum multiplicetur totus divisor, & productum *e* dividendo subtrahatur; ad idque sub eo ponetur mutatis signis; & facta reductione (§. 101) residuum, si quod est, infra lineolam ponetur, ac operatio prosequetur, usque dum residuum sit $= 0$. Verum si pluries repetatur operatio, quin residuum possit esse $= 0$, apponitur fractio una pro ultimo termino quotientis, cum ultimo residuo pro numeratore, ac divisore pro denominatore.

Exemplum. *Divisor.*

$$
\begin{array}{ll|l}
\textit{Divid.} & a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4 & \quad a - b \\
 & -a^4 + a^3 b & \quad \textit{Quotiens.} \\
\hline
1.\ \textit{resid.} & -3a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4 & a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 b^3 \\
 & +3a^3 b - 3a^2 b^2 & \\
\hline
2.\ \textit{resid.} & +3a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4 & \\
 & -3a^2 b^2 + 3ab^3 & \\
\hline
3.\ \textit{resid.} & -ab^3 + b^4 & \\
 & +ab^3 - b^4 & \\
\hline
4.\ \textit{resid.} & 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Ordinatis, ut videtur, dividendo, & divisore, divido primum terminum dividendi a^4 per primum divisoris a, ac prodit quotiens b^3. Scribo itaque a^3 sub divisore tanquam partem quotientis: multiplico divisorem $a - b$ per hanc partem quotientis a^3: productum $a^4 - a^3 b$ pono sub dividendo, mutatis signis hoc modo $-a^4 + a^3 b$, & facta deinde subtractione, primum re-

residuum cum reductione possibili infra colloco sic $-3a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.

Divido primum terminum $-3a^3b$ hujus residui per primum divisoris, & scribo quotientem $-3a^2b$ continuatè ad primum: multiplico divisorem $a-b$ per $-3a^2b$, & posito producto, mutatis signis sub dividendo, resultat secundum residuum $3a^2b^2-4ab^3+b^4$.

Facta divisione primi termini hujus residui $3a^2b^2$ per primum terminum a divisoris resultat quotiens $+3ab^2$, quem scribo continuatè ad duos terminos anteriores; & procedendo eadem methodo in cæteris, prodit tertium residuum $-ab^3+b^4$.

Dividendo primum terminum hujus residui $-ab^3$ per primum terminum divisoris a, resultat quotiens $-b^3$, quem scribo continuatè ad reliquas partes quotientis principalis, & facta multiplicatione, & subtractione invenio quartum residuum 0; tunc ita operor: dividendo $a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$ per $a-b$, quotiens exactus erit $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

His regulis observatis inveniemus hanc operationem ritè factam.

$$
\begin{array}{lll|l}
 & & & \textit{Divisor.} \\
\textit{Divid.} & a^4 & -m^4 & a+m \\ \cline{4-4}
 & -a^4 & -a^3m & \textit{Quot.} \\ \cline{2-3}
\textit{resid.}1. & -a^3m & -m^4 & a^3-a^2m+am^2-m^4 \\
 & +a^3m & +a^2m^2 & \\ \cline{2-3}
\textit{resid.}2. & +a^2m^2 & -m^4 & \\
 & -a^2m^2 & -am^3 & \\ \cline{2-3}
\textit{resid.}3. & -am^3 & -m^4 & \\
 & +am^3 & +m^4 & \\ \cline{2-3}
\textit{resid.}\ 4. & 0 & 0 &
\end{array}
$$

118 Divisio unius polynomii per monomium ad hoc re-

reducitur, quod scilicet singuli termini dividendi dividantur per divisorem, & quotientes continuatim scribantur, tanquam partes quotientis principalis: sic........ $(a - 2b + 4r) : 2b = \frac{a}{2b} - 1 + \frac{2r}{b}$

119 Dum divisio exactè fieri nequit, ac proinde opus sit quotientem tantum hoc modo indicare $\frac{a}{b \pm c}$ uti nihilominus poterimus regulis adhibitis (§. 117), & habebimus $a : (b \pm c) = \frac{a}{b} \mp \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} \mp \frac{ac^3}{b^4} +$ &c. adeo ut, continuata operatione, quotiens infinitorum terminorum inveniatur: primus quidem est dividendus, per primum terminum divisoris divisus: secundus est productum primi per $\frac{c}{b}$: tertius productum secundi per $\frac{c}{b}$, &c. Signa quoque alternantur, & si quidem secundus terminus divisoris est negativus, reliqui termini quotientis sunt positivi.

120 Sic facile invenitur cujuslibet fractionis valor, hujus formulæ $\frac{a}{b \pm c}$; ad quam reduci poterunt quælibet aliæ; semper enim numerator potest repræsentari per unum, denominator autem per duos terminos: sic fractio $\frac{c - r + q}{a + b - cx \pm z}$, faciendo $c - r + q = m$, & $a + b - cx = n$, in hanc convertetur $\frac{m}{n \pm z}$, eandem nempe quam præfata formam habentem: ergo invento valore $\frac{m}{n \pm z}$ per methodum explicatam (§. 119), & substituendo valores m, & n, habebitur (§. 15) valor $\frac{c - r + q}{a + b - cx \pm z}$

Frac-

121 Fractiones algebricæ dividuntur eodem modo ac numericæ (§. 53), divisorem invertendo, & per eum ita inversum multiplicando dividendum (§. 107): sic $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} . \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$; $\frac{cf}{g} : -\frac{c}{d} = \frac{cf}{g} . -\frac{d}{c} = -\frac{cfd}{gc}$; $d : \frac{a}{b} = \frac{d}{1} . \frac{b}{a} = \frac{db}{a}$.

De Potentiis, & radicibus quantitatum algebricarum.

122 Scimus (§. 80) quamlibet quantitatem esse primam potentiam sui ipsius, ejusque productum, eadem pro factore assumpta bis, ter &c., esse secundam, tertiam &c.; sic $a.a = a^2$ exprimit secundam potentiam quantitatis a. Similiter, $a.a.a = a^3$, tertiam; & generatim $a.a^{n-1} = a^n$ exprimit potentiam n quantitatis a; & ita n est exponens hujus potentiæ a^n; exprimens nempe quoties radix pro factore sumitur.

123 Ergo ad elevandam quamlibet potentiam datam ad aliam exponentis etiam dati, exponens potentiæ datæ toties sumetur (§. 107) quot unitates sint in exponente potentiæ ad quam sit elevanda, vel quod idem est, exponens potentiæ datæ multiplicabitur per exponentem illius ad quam elevatio facienda est; productum erit exponens potentiæ quæsitæ, servata de cætero signorum lege. Sic secunda potentia quantitatis a est $a.a = a^{1+1} = a^{1.2} = a^2$; tertia potentia quantitatis a^2 est $a^2.a^2.a^2 = a^{2+2+2} = a^{2.3} = a^6$; & generatim potentia n^{ssima} quantitatis a^m est $a^{m.n} = a^{mn}$. Idem observabitur, licet quantitas elevanda sit productum diversorum factorum; constat enim quod quadratum quantitatis $2a^2b^3$ erit $2a^2b^3.2a^2b^3 = 4a^{2+2}b^{3+3} = 4a^{2.2}b^{3.2} = 4a^4b^6$; ergo generatim potentia p quantitatis a^sb^t erit $a^{sp}b^{tp}$; aliquando congruentius erit operationem indicare, includendo radicem in paren-

renthesi, & superimponendo, paulo ad dexteram, exponentem potentiæ ad quam facienda elevatio; sic $(cb)^n$ indicat cb elevatum esse ad potentiam n, ita ut $(cb)^n =$ $c^n b^n$, & $(a^2 d^3)^n = a^{2n} d^{3n}$.

Idem fieri debet dum radix, cujus elevationem indicare volumus, est quantitas complexa. Sic $(a+b)^2$ significat quantitatem $a+b$ elevatam ad secundam potentiam. Idem indicatur posita supra radicem lineola, & indice potentiæ ad dexteram; sic $(a+b)^2 = \overline{a+b}^2$, ac generatim $\overline{c-d}^n$ vel $(c-d)^n$ indicat quantitatem $c-d$ elevatam ad potentiam n.

124 Quantitas potentiam generans potest esse aut *positiva*, aut *negativa*. In primo casu quælibet potentia erit quantitas positiva (§§. 107, 122), quia multiplicatio procedet semper per signa positiva. In secundo, distinctio fieri debet inter potentias *pares*, & *impares*, quarum nempe exponens par est, aut impar.

In paribus exprimetur semper quantitas positiva, quia ad eas inveniendas multiplicari debet — per —; in imparibus è contra, quia multiplicatio procedere debet per signa dissimilia. Sic $a.a = a^2$; $a.a.a = a^3$; $-a.-a$ $= a^2$; $-a.-a.-a = -a^3$; ex quo deducitur quamlibet potentiam n, si n sit numerus par, generari posse per quantitatem, tam positivam $a+b$, quam negativam $-a-b$, hasque expressiones $(a+b)^n$, & $(-a-b)^n$ æque significare quantitatem positivam.

125 Ergo dari nequit quantitas aliqua positiva, aut negativa, cujus potentia par sit quantitas negativa; consequenter expressio ista $-a^2$ non est potestas quantitatis alicujus, sed solum productum $-a$ per a, seu -1 per a^2.

126 Sicut ad elevandum ad potentias proceditur multiplicando exponentem radicis per indicem potentiæ ad

quam

quam facienda est elevatio (§. 123), sic ut retrocedatur à potentiis ad radicem, opus est dividere exponentem potentiæ per indicem radicis quæsitæ. Nam si elevatio quantitatis a^1 ad potentiam octavam indicatur $a^{1\cdot 8}$, patet quod retrocessus ab a^8 ad a^1 indicabitur $a^{\frac{8}{8}} = a^1$, quæ reipsa est radix octava a^8 (§. 122). Pariter ad extrahendam radicem quartam ejusdem quantitatis a^8, dicendum $a^{\frac{8}{4}} = a^2$: ad extrahendam secundam, $a^{\frac{8}{2}} = a^4$ &c.

127 Quoad signa radicum, duplex casus distinguendus. 1.° dum quantitas, e qua extrahenda radix, est positiva. 2.° dum est negativa. Dum quantitas est positiva, & index radicis numerus impar, radix signo positivo affici debet; si autem par, signo uno positivo, & alio negativo (§. 124). Sic radix secunda quantitatis a^2 erit $\pm a$, id est $+a$, seu $-a$. Si quantitas fuerit negativa, & index radicis numerus impar, radix erit negativa; si autem par, radix erit *impossibilis*, aut imaginaria; talis est radix secunda quantitas $-a^2$, quæ nec est a, nec $-a$ (§. 125).

128 Cum exponens quantitatis radicalis semper debeat esse quotiens, ex divisione exponentis potentiæ per indicem radicis resultans (§. 126), patet quod semper ac hic quotiens nequeat esse numerus integer, sicut pluries accidere necesse est, quantitas radicalis habebit exponentem fractum, unam radicem indicantem. Sic $a^{\frac{4}{3}}$ indicat radicem tertiam potentiæ a^4; ac generatim $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ indicat radicem n potentiæ $(a+b)^m$, & hæ communiter *potentiæ imperfectæ* vocantur.

129 Ad eas repræsentandas utimur signo ($\sqrt{\ }$) quod

radicale vocatur, & eo affectæ quantitates *radicales*, aut *irrationales*: sub eo scribitur quantitas, cujus radix quæritur, eam si complexa est, aut æquivocationi locus esse potest, parenthesi includendo, indice radicis superposito, sic $\sqrt[3]{a^4}$ idem est ac $a^{\frac{4}{3}}$, & $\sqrt[n]{(a+b)^m}$, seu $\sqrt[n]{\overline{a+b}^m}$, idem ac $(a+b)^{\frac{m}{n}}$ seu $\overline{a+b}^{\frac{m}{n}}$ (§. 128): dum secunda radix indicanda est, omittitur, ex consuetudine ubique admissa, index alioquin super radicale ponendus. Sic $\sqrt{ab}$ idem est ac radix secunda ab. Radices impossibiles, aut imaginariæ hoc modo etiam repræsentantur. Sic $\sqrt[4]{-a^6}$ indicat radicem quartam quantitatis $-a^6$. Possunt etiam repræsentari hoc modo $\sqrt[4]{-1}\cdot\sqrt[4]{a^6}$, quod quidem nihil est nisi resolvere radicale in suos factores (§. 125).

ARTICULUS II.

De Operationibus circa quantitates irrationales.

130 Problem. 1. Reducere quantitates irrationales ad eandem denominationem. Sol. Multiplicentur per sese indices omnium radicum: productum erit communis denominator, aut index radicalis: multiplicetur etiam exponens singularum quantitatum, sub signis positarum, per productum indicum omnium radicalium, cujusque proprio excepto. Sic ad reducendum $\sqrt[n]{a^t}$, $\sqrt[s]{b^m}$ ad eandem denominationem, multiplicetur index n per indicem s, & productum ns erit communis denominator; multiplicetur etiam exponens t quantitatis a^t per indicem s, & exponens m quantitatis b^m per n: habebimus $\sqrt[n]{a^t} = \sqrt[ns]{a^{ts}}$, & $\sqrt[s]{b^m} = \sqrt[ns]{b^{mn}}$; cum sit $\sqrt[n]{a^t} = a^{\frac{t}{n}}$ (§.

(§. 129), & $\frac{t}{n}=\frac{ts}{ns}$ (§. 40), erit etiam $a^{\frac{t}{n}}=a^{\frac{ts}{ns}}$ $=\sqrt[ns]{a^{st}}$ (§. 129); ergo $\sqrt[n]{a^t}=\sqrt[ns]{a^{ts}}$ (§. 9). Idem demonstrabitur respectu $\sqrt[ns]{b^{mn}}$.

131 Probl. 2. *Reducere quantitates radicales ad simpliciorem expressionem.*

Sol. Hæc reductio locum habebit semper ac expressio sub signo posita exactè dividi possit per unam potentiam ejusdem cum indice radicali exponentis. Tunc fiet divisio scribendo quotientem sub signo radicali, & pro ejus coefficiente radicem divisoris. Reducenda sit v. g. quantitas $\sqrt{a^2m}$: quoniam a^2m divisibilis est per a^2, facta divisione, & scribendo quotientem m sub signo, ac pro coefficiente radicem quantitatis a^2 habebimus $\sqrt{a^2m}=$ $a\sqrt{m}$; etiam $\sqrt[4]{a^m x^4}=x\sqrt[4]{a^m}$, nam $\sqrt[4]{a^m x^4}=a^{\frac{m}{4}}x^{\frac{4}{4}}$ $=xa^{\frac{m}{4}}=x\sqrt[4]{a^m}$(§. 129). Similiter $\sqrt{18}=\sqrt{9.2}=$ $3\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{8.2}=2\sqrt[3]{2}$; & generatim $\sqrt[m]{\frac{a^{m+1}d}{b^m c}}=\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{ad}{c}}$.

132 Ergo procedendo in sensu contrario, introducere sub signo radicali poterimus quemlibet ejus coefficientem. Sic $a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b}$; $2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2.2^3}=\sqrt[3]{16}$, & generatim $\frac{a^m}{d}\sqrt[n]{\frac{c}{b}}=\sqrt[n]{\frac{ca^{mn}}{bd^n}}$.

133 Facile itaque erit unam expressionem introducere, v. g. $\frac{e}{h}$ in uno radicali $\frac{c}{d}\sqrt[m]{\frac{a^n}{b^s}}$, quin ejus valor

varietur, nam habebimus $\frac{c}{d}\sqrt[m]{\frac{a^z}{b^s}} = \frac{ce}{dh}\sqrt[m]{\frac{a^n}{b^s}\frac{b^m}{e^m}}$, eo quod sit (§. 132) $\frac{e}{h}\sqrt[m]{\frac{b^m}{e^m}} = \sqrt[m]{\frac{e^m\, b^m}{e^m\, b^m}} = \sqrt[m]{1} = 1.$

134 Probl. 3. *Quantitates irrationales addere.*

Sol. Scribantur omnes cum iisdem signis, quæ earum coefficientes præcedunt, in eadem linea; & siquidem termini similes resultant, seu ejusdem indicis radicalis, ac sub eo eadem expressio, reducantur (§. 101), & habebitur summa.

Addendæ sint $a\sqrt[m]{cb}$, $\frac{c}{q}\sqrt[n]{\frac{x^m}{d^s}}$, & $-\frac{r}{p}\sqrt[m]{cb}$, erit summa $a\sqrt[m]{cb} + \frac{c}{q}\sqrt[n]{\frac{x^m}{d^s}} - \frac{r}{p}\sqrt[m]{cb} = \frac{ap-r}{p}\sqrt[m]{cb} + \frac{c}{q}\sqrt[n]{\frac{x^m}{d^s}}$.

Sic $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4.2} + \sqrt{9.2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{2.5^2} = \sqrt{50}$.

135 Probl. 4. *Quantitates irrationales subtrahere.*

Sol. Omnia signa coefficientem subtrahendæ præcedentia mutentur in sua contraria, & facta summa cum minuenda (§. 134), habebitur residuum, quod reducetur postmodum (§. 101) si termini similes resultant. Subtrahenda sit, v. g. $2\sqrt{ac} + 3\sqrt[3]{acb}$ è $4\sqrt{ac} - 3\sqrt[3]{acb}$, scribam sicut dictum est $4\sqrt{ac} - 3\sqrt[3]{acb} - 2\sqrt{ac} - 3\sqrt[3]{acb} = 2\sqrt{ac} - 6\sqrt[3]{acb}$: ita $\frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} - \frac{e}{f}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = (\frac{c}{d} - \frac{e}{f}).\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{cf-ed}{df}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

136 Probl. 5. *Multiplicare, aut dividere quantitates irrationales.* Solut. Reducantur ad eandem denominationem

nem indices radicales (§. 130), si diversam habent denominationem : servata lege signorum, multiplicentur, aut dividantur coefficientia, ac producto, seu quotienti postponatur signum radicale, cum novo indice, aut cum proprio, si reductione opus non fuit. Multiplicentur denique, aut dividantur expressiones, quæ sub signo sunt, & productum, seu quotiens scribatur sub signo radicali prædicto.

Exempl. 1. Multiplicandum sit $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ per $\frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$; reductis ambobus radicalibus ad eandem denominationem, multiplicandum habebimus $\frac{p}{q}\sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^m}}$ per $\frac{r}{s}\sqrt[mn]{\frac{c^n}{d^n}}$; productum erit $\frac{pr}{qs}\sqrt[mn]{\frac{a^m c^n}{b^m d^n}}$.

Exempl. 2. Dividendum sit $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ per $\frac{r}{s}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$; facta reductione sicut in exemplo anteriori (§. 130), dividendum erit $\frac{p}{q}\sqrt[mn]{\frac{a^m}{b^m}}$ per $\frac{r}{s}\sqrt[mn]{\frac{c^n}{d^n}}$; productum erit $\frac{ps}{qr}$ $\sqrt[mn]{\frac{a^m d^n}{b^m c^n}}$

137 Ergo ad elevandam quantitatem radicalem ad potentiam quamcunque m sufficiet multiplicare exponentem expressionis, quæ sub signo est, per exponentem m potentiæ ad quam radicale est, elevandum (§. 123). Sic $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a} = a$ (131). Ex quo infertur quod ad elevandum radicale ad potentiam ejusdem cum signo radicali exponentis, signum radicale tollere suficiet.

138 Procedendo in sensu contrario, modum habebimus extrahendi quamlibet radicem n radicalis dati: Sic radix $n\sqrt[m]{a}$ erit $\sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}}=\sqrt[mn]{a}$ (§. 129); ergo ad extrahendam radicem cujuslibet radicalis, sat erit indicem signi per indicem radicis extrahendæ multiplicare.

Sic radix $\frac{u}{s}\ \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ erit $\frac{a^{\frac{s}{u}}}{b^{\frac{s}{u}}}\sqrt[\frac{nu}{s}]{\frac{c}{d}}$.

139 Quantitates impossibiles, aut imaginariæ adduntur, & subtrahuntur sicut reliquæ quantitates irrationales. Sic summa $\sqrt{-a^2}$, & $3\sqrt{-a^2}$ erit $4\sqrt{-a^2}$; summa $-\sqrt[4]{-a}, +4\sqrt[4]{-a}, -\sqrt[m]{-x}$ erit $4\sqrt[4]{-a}-\sqrt[m]{-x}-\sqrt[4]{-a}=3\sqrt[4]{-a}-\sqrt[m]{-x}$. Tollendo $\sqrt{-a^2}$ ex $3\sqrt{-a^2}$ erit residuum $3\sqrt{-a^2}-\sqrt{-a^2}=2\sqrt{-a^2}$ (§. 101).

140 Multiplicatio, & divisio harum quantitatum errori obnoxia est, ad quem vitandum procedatur sicut in exemplo sequenti. Sit multiplicanda $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-b}$, & quoniam $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,.\sqrt{-1}$, & $\sqrt{-b}=\sqrt{b}\,.\sqrt{-1}$ (§. 129) habebimus $\sqrt{-a}\,.\sqrt{-b}=\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1}\,.\sqrt{a}\,.\sqrt{b}=$ (§. 136) $\sqrt{ab}\,.\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1}$; sed $\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1}=-1$ (§. 137); ergo $\sqrt{ab}\,.\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1}=-1\sqrt{ab}=-\sqrt{ab}$, & consequentèr $\sqrt{-a}\,.\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$. Dividenda sit $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-b}$, ac transformatis dividendo, & divisore, sicut in exemplo

mul-

multiplicationis, habebimus $\sqrt{-a} : \sqrt{-b} = \frac{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{b}}$ $= \sqrt{\frac{a}{b}}$ (§. 136).

ARTICULUS III.

De Potentiis, & radicibus quantitatum complexarum

141 QUantitates complexæ elevantur ad suas Potentias, sicut incomplexæ; & quæcunque de his dicta sunt, & illis applicari possunt: sic: $((a \pm b)^n)^m = (a \pm b)^{mn}$; $\sqrt[n]{(a \pm b)^m} = (a \pm b)^{\frac{m}{n}}$ (§§. 123, 129): etiam erit $(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b)$; $(a \pm b)^3 = (a \pm b)(a \pm b)(a \pm b)$ &c. (122).

142 Ad praxim itaque reducendo multiplicationes, habebimus $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; & ita quadratum unius binomii componitur ex quadrato primi termini radicis, magis minusve ex duplo producto primi per secundum, & etiam ex quadrato secundi, totque terminis, uno amplius, quot unitates in exponente potentiæ sunt: positivis quidem signis, dum signa radicis similia sunt; dum autem dissimilia, semper erit negativum signum dupli producti primi termini radicis per secundum.

143 Cognitis ergo primis duobus terminis unius quadrati, facile complebitur, addito quadrato dimidii totius coefficientis secundi termini, per quem multiplicata invenitur radix primi termini quadrati incompleti. Sic expressio $x^2 \pm 3ax$ fiet quadratum completum, si addatur $9\frac{a^2}{4}$, quod est quadratum hujus $\pm \frac{3a}{2}$, quod quidem est dimidium coefficientis multiplicantis radicem x primi termini x^2; & profectò $x^2 \pm 3ax + \frac{9a^2}{4}$ est quadratum completum hujus $x \pm \frac{3a}{2}$ (§. 142).

144 Radix quadrata extrahitur eodem modo, divisione in clases excepta, ac radix numeri pluribus notis constantis (§. 88): Sic ad extrahendam radicem quadratam hujus $a^2 \pm 2ax + x^2$, ita disponetur quantitas:

$$\begin{array}{l|l} a^2 \pm 2ax + x^2 & \pm a \pm x \\ \underline{-a^2 \qquad\qquad\quad} & \overline{\pm 2a} \\ 0 \pm 2ax + x^2 & \\ \underline{\quad \mp 2ax - x^2} & \\ \quad\quad 0 \qquad 0 & \end{array}$$

Extraho radicem primi termini a^2, quæ est $\pm a$; eam ad dexteram loco, & subtracto quadrato a^2 è quantitate proposita, manet residuum $\pm 2ax + x^2$, in quo terminus $\pm 2ax$ exprimere debet (§. 142) duplum productum radicis inventæ per alium secundum ejusdem terminum. Et certe, dividendo $\pm 2ax$ per $\pm 2a$ duplum radicis inventæ, quotiens $\pm x$ erit secundus terminus radicis (§§. 33, 142): in ea igitur pro secundo termino appono $\pm x$; & quoniam subtrahendo ejus productum è $\pm 2a$, & ulterius ejus quadratum x^2 è residuo $\pm 2ax + x^2$ nil superest, constat quod radix hujus $a^2 \pm 2ax + 2x$ est $\pm a \pm x$.

145 Quando post divisionem, & ultimam subtractionem aliquod remanet residuum, signum est quod radix plusquam duobus terminis constat; & tunc radix inventa accipietur tanquam unicus ejusdem terminus, & ad alium qui superest inveniendum, ultimum residuum dividetur per duplum radicis jam inventæ, procedendo in cæteris sicut in exemp. antecedenti.

Exemp.

Exemp. Extrahenda sit radix quadrata

$$\begin{array}{lll}
 & a^2 + 2ab - 2ac - 2bc + b^2 + c^2 & \left.\right\} a + b - c \\
 & -a^2 & \left.\right\} 2a \ldots 1 \text{ divis.} \\ \hline
1.\ \textit{resid.} & 0 + 2ab - 2ac - 2bc + b^2 + c^2 & \\
 & \quad -2ab \qquad\qquad\qquad -b^2 & \\ \hline
2.\ \textit{resid.} & \ldots\ldots -2ac - 2bc + c^2 & \\
 & \qquad +2ac + 2bc - c^2 & 2a + 2b.\ 2 \text{ divis.} \\ \hline
3.\ \textit{resid.} & \ldots\ldots\ldots\ 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Radix primi termini est a; subtraho ejus quadratum è quantitate proposita, & residuum dividendo per $2a$, quotiens $+b$ erit secundus terminus radicis: Subtraho itaque productum per primum divisorem $2a$, item ejus quadratum b^2 è primo residuo, & divido quod superest per $2a + 2b$, duplum nempe radicis inventæ; quotiens $-c$ erit tertius terminus radicis.

Subtraho è secundo residuo productum hujus $-c$ per $2a + 2b$, secundum scilicèt divisorem, item ejus quadratum c^2, & remanet residuum o; & ita inveniemus radicem quadratam hujus $a^2 + 2ab - 2bc + b^2 - 2ac + c^2$ esse $a + b - c$.

146 Methodo multiplicationis difficile foret elevare polynomium quodlibet ad suas potentias gradus superioris; nec confusione careret extractio radicum potentiarum imperfectarum; seu quod idem est, ipsum ad potentias imperfectas elevare; idcirco dabimus formulam generalem, qua utrumque facilitèr consequi possimus.

147 Cum quodlibet polynomium $a + b - c + d + \&c.$ reduci possit ad formulam binomii $a + s$; faciendo $b - c + d + \&c. = s$, patet quod si hoc elevetur ad unam poten

tiam-

tiam quamlibet q, & substituantur valores respondentes speciei s, ejusque potentiis, habebitur potentia q polynomii propositi. Hac ratione dabimus formulam generalem binomii.

148 Juxta dicta (§. 122) habebimus (§. 109)

$$(a \pm b)^1 = a \pm b$$
$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$
$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$
$$(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$$
$$(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$$
$$(a \pm b)^7 = a^7 \pm 7a^6b + 21a^5b^2 \pm 35a^4b^3 + 35a^3b^4 \pm 21a^2b^5 + 7ab^6 \pm b^7$$

& accuratim observando omnes potentias præcedentes, animadvertitur: Primò: Quod signa quorumlibet terminorum, in quibus aliqua potentia impar secundæ partis radicis invenitur, possunt esse positiva, aut negativa. Erunt positiva dum signa radicis sunt positiva; negativa autem, dum sunt dissimilia; ac signa reliquorum terminorum esse positiva.

Secundo: numerum terminorum cujuscunque potentiæ unitate excedere exponentem ejusdem; sic numerus terminorum, quibus constat potentia m unius binomii, erit $m+1$.

Tertio: Quemlibet terminum esse productum potentiarum utriusque partis radicis; nam etsi in primo non advertatur potentia aliqua speciei b, potest tamen considerari $b^0 = 1$ (§. 114); & idem de ultimo termino respectu potentiæ speciei a.

Quarto: Exponentem primæ partis quantitatis a binomii in primo termino esse semper eundem cum exponente potentiæ quæsitæ, & in reliquorum terminorum singulis exponentem una unitate successivè, & gradatim diminui, usque dum in ultimo deveniat $= 0$; idcirco semper omittititur (§. 114). E converso exponentem secundæ partis b radicis, in primo termino esse o; in secundo 1; & in reliquorum singulis unitate crescere, usquedum in ultimo æqualis fiat potentiæ quæsitæ. Et ita præscindendo à coefficientibus, habebimus $(a \pm b)^8 = b^0 a^8 \pm a^7 b^1 + a^6 b^2 \pm a^5 b^3 + a^4 b^4 \pm a^3 b^5 + a^2 b^6 \pm a^1 b^7 + a^0 b^8 = a^8 \pm a^7 b + a^6 b^2 \pm a^5 b^3 + a^4 b^4 \pm a^3 b^5 + a^2 b^6 \pm a b^7 + b^8$; & generatim $(a \pm b)^m = a^m \pm a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 \pm a^{m-3} b^3 + a^{m-4} b^4 \pm a^{m-5} b^5 +$ &c.

Quinto: Coefficientem primi termini esse semper unitatem: secundi esse constanter æqualem potentiæ quæsitæ: denique singulos terminos habere pro coefficiente productum coefficientis termini præcedentis per exponentem, quem prima pars a binomii habet, divisum per numerum indicantem locum quem inter alios occupat præfatus ille terminus præcedens:

Sic $(a \pm b)^9 = a^9 \pm \frac{9}{1} a^8 b + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} a^7 b^2 \pm \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^6 b^3 + \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4} a^5 b^4 \pm \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5} a^4 b^5 + \frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6} a^3 b^6 \pm \frac{9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7} a^2 b^7 + \frac{9.8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7.8} a b^8 \pm \frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} b^9 = a^9 \pm 9 a^8 b + 36 a^7 b^2 \pm 84 a^6 b^3 + 126 a^5 b^4 \pm 126 a^4 b^5 + 84 a^3 b^6 \pm 36 a^2 b^7 + 9 a b^8 \pm b^9$; & generatim $(a \pm b)^m = a^m \pm \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.\overline{m-1}}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 \pm \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 +$ &c. usquedum exponens b sit $= m$. Et quoniam (§. 114) $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$, $a^{m-2} = \frac{a^m}{a^2}$ &c. Hos valores substituendo in formula præcedenti, habebimus $(a \pm b)^m = a^m \pm \frac{m}{1} \frac{a^m b}{a} + \frac{m.\overline{m-1}}{1 \cdot 2} \frac{a^m b^2}{a^2} \pm \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^m b^3}{a^3} +$ &c.

&c. Si supponimus cum Newtone $a = P$, & $\pm \frac{b}{a} = Q$, habebimus $(a \pm b)^m = (P + PQ)^m = P^m + \frac{m}{1} P^m Q + \frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} P^m Q^2 + \frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^m Q^3 +$ &c.; & faciendo

$P^m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A$

$\frac{m}{1} P^m Q = \frac{m}{1} AQ = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B$

$\frac{m \cdot \overline{m-1}}{1 \cdot 2} P^m Q^2 = \frac{m-1}{2} BQ = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C$

$\frac{m \cdot \overline{m-1} \cdot \overline{m-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^m Q^3 = \frac{m-2}{3} CQ = \ldots\ldots D$ &c. habebimus $(P + PQ)^m = P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} CQ + \frac{m-3}{4} DQ + \frac{m-4}{5} EQ +$ &c.

Hæc formula deservit ad efformandas quaslibet potentias, tum perfectas, tum imperfectas; sic ad inveniendam quintam potentiam quantitatis $a^2 + 2x$, faciemus $(a^2 + 2x)^5 = (P + PQ)^m$, ita ut $m = 5$, $P = a^2$, $PQ = 2x$, hoc est $Q = \frac{2x}{a^2}$, & consequenter

$P^m = a^{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A$

$\frac{m}{1} AQ = 5a^{10} \cdot \frac{2x}{a^2} = 10a^8 x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B$

$\frac{m-1}{2} BQ = \frac{4}{2} \cdot 10a^8 x \cdot \frac{2x}{a^2} = 40a^6 x^2 = \ldots\ldots C$

$\frac{m-2}{3} CQ = \frac{3}{3} \cdot 40a^6 x^2 \cdot \frac{2x}{a^2} = 80a^4 x^3 = \ldots\ldots D$

$\frac{m-3}{4} DQ = \frac{2}{4} \cdot 80a^4 x^3 \cdot \frac{2x}{a^2} = 80a^2 x^4 = \ldots\ldots E$

$\frac{m-4}{5} EQ = \frac{1}{5} \cdot 80a^2 x^4 \cdot \frac{2x}{a^2} = 32a^5 = \ldots\ldots F$

$\frac{m-5}{6} FQ = \frac{0}{6} \cdot 32x^5 \cdot \frac{2x}{a^2} = 0$

Sic-

Sicque habebimus $(a^2+2x)^5 = a^{10} + 10a^8x + 40a^6x^2 + 80a^4x^3 + 80a^2x^4 + 32x^5$.

Ad inveniendum valorem $\sqrt[4]{(a^2 - x^3)}$, faciemus $\sqrt[4]{(a^2 - x^3)} = (a^2 - x^3)^{\frac{1}{4}} = (P + PQ)^m$; hoc est $m = \frac{1}{4}$, $P = a^2$, $Q = -\frac{x^3}{a^2}$, & ita habebimus $P^m = a^{\frac{1}{2}} = A$; $\frac{m}{1} AQ = \frac{1}{4} A . -\frac{x^3}{a^2} = B$; $\frac{m-1}{2} BQ = -\frac{3}{8} B . -\frac{x^3}{a^2} = C$; $\frac{m-2}{3} CQ = \frac{7}{1} C . -\frac{x^3}{a^2} = D$ &c, & substituendo valores quantitatum A, B, C &c. erit,

$$\sqrt[4]{(a^2 - x^3)} = a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} . \frac{x^3}{a^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{32} . \frac{x^6}{a^{\frac{7}{2}}} - \frac{7}{128} . \frac{x^9}{a^{\frac{11}{2}}} - \text{\&c.}$$

Faciendo (§. 114) $\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = (P+PQ)^m$, hoc est $m = -1$, $P = 1$, & $Q = \frac{x^2}{1} = x^2$, habebimus $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 +$ &c. Si facimus $\frac{1}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = (2ax - x^2)^{-\frac{1}{2}} = (P+PQ)^m$, erit $m = -\frac{1}{2}$. $P = 2ax$, & $Q = \frac{-x^2}{2ax} = \frac{-x}{2a}$, ac prodiet $\frac{1}{\sqrt{(2ax - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2ax}} + \frac{x}{4a\sqrt{2ax}} + \frac{3x^2}{32a^2\sqrt{2ax}} + \frac{15x^3}{384a^3\sqrt{2ax}} +$ &c. $= \frac{1}{\sqrt{2ax}}\, 1 + \frac{x}{4a} + \frac{3x^2}{4.8a^2} + \frac{15x^3}{4.8.12a^3} +$ &c.

149 In numeris ad potentias elevandis, ac radicibus extrahendis, uti poterimus hac formula, $a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{2} a^{m-2} b^2$ &c, quæ in casu occurrente determinabitur, substituendo quemlibet numerum litteræ m. Sic ad elevandum 23 ad suam quartam potentiam faciemus $m = 4$, & ita habebimus $a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{2} a^{m-2}b^2 +$ &c. $= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, & faciendo $a = 20$, & $b = 3$, erit $(20+3)^4 = (20)^4 + 4\,(20)^3 . 3 + 6, (20)^2 . 3^2 + 4 . 20 . 3^3 + 3^4 = 160000 + 96000 +$

21600

$21600 + 2160 + 81 = 279841$.

Ad extrahendam radicem cubicam num. 13824, utemur eadem formula $a^m + ma^{m-1}b +$ &c. quæ determinabitur faciendo $m = 3$, ac in hanc convertetur $a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

Numerus propositus dividendus in classes tot notarum, à dextra incipiendo, quot unitates in indice radicis sint, 3 v. g. in casu proposito. Postmodum procedatur sicut in extractione radicis quadratæ (§. 88). Idcirco cum 8 sit cubus major, qui in classe prima ad lævam, continetur, faciemus $a^3 = 8$, quem quidem sub 13 apponemus, ac ejus radicem cubicam 2 ad latus; & ita classe immediata inferius posita, prima nota residuo 13 è 8 unita, quasi *dividendum* contemplabimur, juxta id quod formula indicat, per valorem scilicet $3a^2$, ad secundam radicis partem inveniendam, nempe $= b$; subtractis deinceps è numero proveniente è primo residuo, & serie infra posita, productis, quæ formula indicat, sicut in ex. apparet; hoc præ oculis habito, quod si continuanda sit operatio ad aliam notam radicis inveniendam, nota jam inventa fiet $= a$: postmodum fiet divisio per valorem $3a^2$ ad tertiam inveniendam, nempe $= b$; & ita deinceps.

13,824 | 24		$3a^2b = 48$	$a^3 = 8$
8 : : :	divisor	$3ab^2 = .96$	$a = 2$ ⟨ 1ª Not. rad.
———	12	$b^3 = ..64$	$a^2 = 4$
5824		———	$3a^2 = 12$ divis.
5824		5824	$b = 4$ ⟨ 2ª Not. rad.
———			———
0000			$3a^2b = 48$
			$b^2 = 16$
			$3a = 6$
			———
			$3ab^2 = 96$

Ex-

Extractio radicum numericarum, cum sat impleta sit, ad Logarithmos recurri solet.

PARS TERTIA.

De Analysi, & resolutione æquationum.

ARTICULUS PRIMUS.

De æquationibus primi gradus.

150 *ANalysis* est pars Algebræ, docens methodum resolvendi problemata, mediis æquationibus.

151 *Æquatio* est ratio æqualitatis inter duas quantitates, ex cognitis, & incognitis compositas; exprimiturque signo ($=$): Sic $ax+q=m$ significat quantitatem $ax+q$ esse æqualem quantitati m. Quantitas ad lævam signi $=$ sita, dicitur *primum membrum æquationis*; quæ autem ad dextram *secundum*.

152 Quantitates cognitæ (quæ etiam datæ nominantur) exprimi solent per primas alphabeti litteras, a, b, c &c.: incognitæ autem per postremas, z, x, y &c.

153 Æquationes, in qua unica est incognita, dicuntur *determinatæ*; si verò plures sint incognitæ, *indeterminatæ*.

154 Æquatio dicitur *primi gradus*, dum incognita primam potentiam non excedit; hæc v. g. $ax+bx+b=n-cx$. Si autem incognita elevata sit ad secundam potentiam dicitur *secundi gradus*: v. g. $ax+cx^2+n=m$; ac generatim $x^n+dx^{n-1}+q=r$ erit æquatio gradus n.

155 Finis æquationum est invenire valorem incognita-

tarum, quod quidem obtinetur mediis quibusdam operationibus, quibus illæsa æqualitate, incognita in uno æquationis membro sola remaneat. Hoc *resolvere problema* dicitur, & valor sic inventus *radix æquationis*, quæ quidem *positiva*, *negativa*, aut *imaginaria* erit juxta valorum naturam.

Hæ operationes in axiomatibus fundantur; quod nempe si æqualibus æqualia addantur, aut substrahantur: si æqualia per æqualia multiplicentur, aut dividantur: si ad easdem potentias eleventur, aut ex eis eædem radices extrahantur, aut æqualibus substituantur, &c. remanent æqualia.

156 Quando incognita, quæ segreganda venit, format summam, aut differentiam cum quantitatibus cognitis, substractione in 1°, & additione in 2° casu utendum. Sic si $x+b=d$, tollendo b ex utroque membro, erit $x+b-b=d-b$; hoc est (§. 101) $x=d-b$ similiter, si $x-b=m$, addendo b singulis membris erit $x-b+b=m+b$, hoc est $x=m+b$ (§. 101).

157 Ergo quicunque terminus sit in uno membro æquationis, poterit transferri ad aliud cum signo contrario, modo ab altero auferatur; hanc vocabimus translationem, qua media quilibet terminus è positivo fieri poterit negativus, & vice versa.

158 Dum incognita multiplicatur per unam, aut plures quantitates, segregatur dividendo duo membra æquationis per totum factorem, prædictam incognitam multiplicantem: ita si $mx=a+b$, erit etiam $\frac{mx}{m}=\frac{a+b}{m}$, hoc est $x=\frac{a+b}{m}$. Etiam: si $ax+bx-x=a$, erit $(a+b-1)x=a$, & $\frac{a+b-1}{a+b-1}.x=\frac{a}{a+b-1}$, hoc est $x=\frac{a}{a+b-1}$.

Si reperiatur incognita tanquam factor omnibus æquatio-tionis terminis communis inveniatur, simplificabitur dividendo omnes terminos per incognitam: ita si $ax + bx^2 = cx$, erit etiam $\frac{ax+bx^2}{x} = \frac{cx}{x}$, hoc est $a+bx = c$, & denique $x = \frac{c-a}{b}$.

159 Dum incognita per unam, aut plures quantitates dividitur, ab eis liberatur multiplicatis duobus membris æquationis per totum divisorem incognitæ: ita si $\frac{x}{a} = m$, erit etiam $\frac{ax}{a} = am$, hoc est $x = am$. Etiam, si $\frac{x}{a+b} = n$, erit $\frac{(a+b)x}{a+b} = n\,(a+b)$, hoc est $x = na + nb$.

160 Semper ac in aliqua æquatione occurrant termini fractionales, ab eis liberabitur, multiplicatis ambobus membris per productum omnium denominatorum. Sic si $\frac{x}{q} - \frac{nx}{m} = \frac{b}{p}$; erit si multiplicetur per mpq, $\frac{mpqx}{q} - \frac{mnpqx}{m} = \frac{mpqb}{p}$, hoc est $mpx - npqx = mqb$, vel $(mp - npq)\,x = mqb$, & denique $x = \frac{mqb}{mp-npq}$ (§. 158)

161 Dum incognita elevatur ad quamlibet potentiam, depuratur media extractione radicis ejusdem indicis cum exponente potentiæ; ideoque si hic fuerit numerus par, & signum præcedens incognitam fuerit negativum, fiet per translationem positivum (§. 157). Sic si $x^2 = 64a^3b^2$, erit $\sqrt{x^2} = \pm\sqrt{64a^3b^2}$, hoc est $x = \pm\sqrt{64a^2ab^2} = \pm\, 8\,ab\sqrt{a}$; ac generatim si $-x^{2m} = c^n - a^q$ erit $x^{2m} = a^q - c^n$, & $x = \pm\sqrt[2m]{a^q - c^n}$.

162 Denique si incognita affecta fuerit aliquo signo radicali, idipsum obtinetur, si spolietur radicale, ac postmodum elevetur utrumque æquationis membrum ad potentiam ejusdem exponentis cum indice radicali: sic si

$aq+\sqrt[3]{x}=b$, erit $\sqrt[3]{x}=b-aq$, hoc est $x=(b-aq)^3$ $=b^3-3b^2aq+3ba^2q^2-a^3q^3$. Item, si $ax-\sqrt{x}=q$, fiet $ax-q=\sqrt{x}$, & elevatis ambobus membris ad secundam potentiam $(ax-q)^2=x$, seu $x=a^2x^2-2aqx+q^2$, & transferendo $a^2x^2-2aqx-x=-q^2$ seu $x^2-(\frac{2aq+1}{a^2})x=-\frac{b^2}{a^2}$.

163 Regulæ adhibitæ servient etiam pro illis casibus, in quibus plures in æquatione incognitæ inveniantur, modo tot adhibeantur æquationes substantiales, quot fuerint incognitæ. Nam unam ex æquationibus sumendo, atque incognitas omnes, una excepta, tanquam cognitas tractando, hujus valorem inveniemus in quantitatibus, aliis quidem cognitis, aliis autem incognitis, qui quidem si in reliquis substituatur, æquationum, & incognitarum numerum unitate minuet; & idem cum cæteris, quoties opus fuerit, exequendo, ad unam æquationem tandem perveniemus, in qua unica sit incognita, cujus valorem per regulas adhibitas circa quantitates cognitas, facile inveniemus; ac retrocedendo, & substituendo valorem ultimò inventum in cæteris æquationibus, invenietur valor omnium incognitarum.

Sic supponendo $x+by=c^2$, $qy=m-fx$, tractando unicè tanquam incognitam x in prima æquatione, habebimus $x=c^2-by$, cujus valor substitutus in secunda æquatione dabit $qy=m-f(c^2-by)=m-fc^2+fby$, ubi jam unicè incognitam y habemus, cujus valor invenietur si æquatio per regulas adhibitas fiat; ita transferendo, erit $qy-fby=m-fc^2$; hoc est $y=\frac{m-fc^2}{q-fb}$; si hic valor y substituatur in æquatione $x=c^2-by$, habebimus $x=c^2$ $-b.$

$-b.\frac{m-fc^2}{q-fb}$, & ita compertus manet valor utriusque incognitæ. Similiter, supponendo $x+z+y=b$, $x-z-y=c$, $x+z-y=a$, habebimus pro prima æquatione $x=b-z-y$, cujus valor substitutus in secunda æquatione dabit $b-z-y-z-y=c$, hoc est (§.101), $b-2z-2y=c$, ubi jam solum duæ incognitæ inveniuntur. Accipiendo itaque y tanquam incognitam, & transpositione utendo habebimus $b-2z-c=2y$, hoc est $y=\frac{b-2z-c}{2}$, substituendo in tertia æquatione hunc valorem y, & ante inventum x, prodiet $b-z-(\frac{b-2z-c}{2})+z-(\frac{b-2z-c}{2})=a$, seu $c+2z=a$, hoc est $z=\frac{a-c}{2}$; si retrocedatur substituendo hunc valorem z in æquatione $y=\frac{b-2z-c}{2}$, erit $y=\frac{b-a+c-c}{2}=\frac{b-a}{2}$; & denique substituendo hos valores y & z in æquatione $x=b-z-y$, habebimus $x=b-\frac{a-c}{2}-\frac{b-a}{2}=\frac{2b-a+c-b+a}{2}=\frac{b+c}{2}$, & ita omnes incognitæ x, y, z cognitæ manent.

164 Incognitæ etiam depurantur additione, & substractione æquationum, in quibus inveniuntur. Sic si $x+y=a$, $x-y=b$, additione habebimus $2x=a+b$, hoc est $x=\frac{a+b}{2}$: substractione autem habebimus $2y=a-b$, seu $y=\frac{a-b}{2}$.

Verum si incognitæ coefficientes habeant, prima æquatio multiplicabitur per coefficientem, quem incognita quæ disparere debet, habet in secunda æquatione; & hæc per coefficientem ejusdem incognitæ in prima: hinc prodient aliæ duæ æquationes, in quibus media additione, & substractione, una ex incognitis disparebit: sint v. g. $ax+by=c^2$, $mx+ny=d$, multiplicata prima æquatione per m, & secunda per a, erit $amx+bmy=mc^2$, $amx+$

$a\,n\,y = a\,d$, in his duabus æquationibus subtrahendo secundam è prima habebimus $b\,m\,y - a\,n\,y = m\,c^2 - a\,d$, hoc est $y = \frac{a\,d - m\,c^2}{a\,n}$; ut eadem methodo inveniatur valor x, multiplicetur prima æquatio per n, & secunda per b, habebimus $n\,a\,x + n\,b\,y = n\,c^2$, $b\,m\,x + b\,n\,y = b\,d$, & subtrahendo secundam è prima, erit $n\,a\,x - b\,m\,x = n\,c^2 - b\,d$, hoc est $x = \frac{n\,c^2 - b\,d}{n\,a - b\,m}$. Generatim quando termini identici resultantes post multiplicationem, habent eadem signa, subtractione utendum; si autem dissimilia, additione. Calculus iste, dum plures quam duæ incognitæ sunt, implicatus est.

ARTICULUS II.

De Resolutione æquationum secundi gradus.

165 ÆQuationes *secundi gradus* vocantur hæ, in quibus incognita elevata reperitur ad secundam potentiam (§. 154). Harum aliæ *simplices* sunt, aliæ *affectæ*.

166 Simplices sunt illæ, in quibus secunda potentia incognitæ unicè continetur. Sic $c\,x^2 + d\,x^2 = n$ erit æquatio simplex secundi gradus, cujus resolutio ex regulis nuper adductis pendet; ita ut si $c\,x^2 + d\,x^2 = n$, erit etiam $(c + d)\,x^2 = n$, $x^2 = \frac{n}{c + d}$, & $x = \pm\sqrt{\frac{n}{c + d}}$.

167 Æquationes *affectæ* sunt illæ, in quibus ultra secundam continetur etiam prima potentia incognitæ. Sic $x^2 + b\,x = m$ erit æquatio affecta secundi gradus, ad cujus resolutionem sequentia servari debent. 1.° Omnes termini, in quibus incognita reperiatur, transferantur ad unum æquationis membrum, ita ut terminus continens maxi-

maximam potentiam sit positivus (§. 157). 2.° Maxima potentia incognitæ non habeat alium coefficientem, quam unitatem (§§. 158, 159). 3.° Addatur cuilibet membro quod necesse sit, ut illud in quo est incognita, sit quadratum completum (§. 143). 4.° Extrahatur radix quadrata uniuscujusque membri, ac postmodum transpositione habebitur valor incognitæ.

Resolvenda sit æquatio $a^2 - \frac{x^2}{2d} = c + x$, transfero in primis omnes terminos, in quibus est incognita, ad unicum membrum, ita ut illud in quo est maxima potentia, sit positivum: erit $\frac{x^2}{2d} + x = a^2 - c$, si à maxima potentia tollatur coefficiens, habebimus $x^2 + 2dx = 2a^2d - 2cd$, & quoniam membrum, in quo est incognita, non est quadratum completum (§. 142), complebitur addendo d^2, quadratum nempe $\frac{2d}{2}$ (§. 143); & addendo alteri membro eandem quantitatem d^2, ut sit æqualitas, habebimus $x^2 + 2dx + d^2 = 2a^2 d - 2cd + d^2$, & extrahendo radicem, erit $x + d = \pm \sqrt{(2a^2d - 2cd + d^2)}$, seu $x = -d \pm \sqrt{(2a^2 - 2c + d)d}$.

Sit $\frac{ax^2}{b} - cx = m$, erit etiam $x^2 - \frac{bcx}{a} = \frac{bm}{a}$, complendo quadratum (§. 143) habebimus $x^2 - \frac{bcx}{a} + \frac{b^2c^2}{4a^2} = \frac{bm}{a} + \frac{b^2c^2}{4a^2}$ & extrahendo radicem $x - \frac{bc}{2a} = \pm \sqrt{(\frac{bm}{a} + \frac{b^2c^2}{4a^2})}$, seu $x = \frac{bc}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{(4abm + b^2c^2)}$.

Si $x^2 + bx - cx = a^2$, erit etiam $x^2 + (b-c)x = a^2$, complendo habebimus $x^2 + (b-c)x + (\frac{b-c}{2})^2 = a^2 + (\frac{b-c}{2})^2$, & extrahendo radicem $x + \frac{b-c}{2} = \pm \sqrt{(a^2 + (\frac{b-c}{2})^2)}$, seu $x = -\frac{b-c}{2} \pm \sqrt{(a^2 + \frac{b^2-2bc+c^2}{4})} = \frac{-b+c \pm \sqrt{(4a^2+b^2-2bc+c^2)}}{2}$.

ARTICULUS III.

De Resolutione analytica problematum arithmeticorum.

168 CUM resolvere problema nil aliud sit (§. 155) quam invenire valorem unius, aut plurium incognitarum, mediis aliis quantitatibus cognitis, necessariò respectus inter duo hæc, quantitates nempe cognitas, & incognitas adstrui debet. Et ita omnis opera in eo locanda, ut nempe explicentur omnes conditiones substantiales problematis, mediis æquationibus exprimentibus respectum, qui datur inter quantitates cognitas, & incognitas. Et ut problema determinetur, opus est ut numerus æquationum æquet numerum incognitarum, cujus valor per regulas allatas invenietur.

169 Problem. 1. Numerum invenire, qui æqualis sit producto ejus dimidii per sextam partem. Solut. Sit x numerus quæsitus: erit ejus dimidium $\frac{1}{2}x$, sexta autem pars $\frac{1}{6}x$; igitur juxta conditionem problematis, habebimus $\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{6}x = x$, vel quod idem est $\frac{1}{12}x^2 = x$. Si omnem æquationem per 12 multiplicamus, ac per x dividimus, habebimus $x = 12$. Ergo hic erit numerus quæsitus.

170 Problem. 2. Duos numeros invenire, quorum summa sit $= a$, & differentia $= d$. Solut. Sit x numerus major, z numerus minor. Juxta conditiones problematis, erit $x + z = a$, $x - z = d$. Additione prodiet $2x = a + d$; vel $x = \frac{a+d}{2}$, ac subtrahendo secundam è prima $2z = a - d$, vel $z = \frac{a-d}{2}$.

171 Ergo ex duabus quantitatibus inæqualibus, major æqualis est semisummæ, addita semidifferentia: mi-

nor

nor æqualis est semisummæ, detracta semidifferentia.

172 Problem. 3. Eleemosynarius quidam, distribuere volens pauperibus certam nummorum portionem, animadvertit, quod ut singulis 3 denar. tribuat, desunt ei 8; si autem det 2, supersunt 4. Quæritur numerus pauperum, & denariorum. Solut. Sit numerus pauperum $= x$; & ut problema universalius fiat, sit $3 = m$, $8 = n$, $2 = p$, $4 = q$; & quoniam distribuendo singulis denarios m, desunt denarii n, numerus denariorum, quos habebat eleemosynarius, erit $mx - n$; verùm quia distribuendo singulis denarios p, supersunt q, erit etiam juxta hanc conditionem, numerus denariorum eleemosynarii $px + q$: ergo $mx - n = px + q$, & transponendo $mx - px = q + n$, & $x = \frac{q+n}{m-p} =$ numero pauperum; cumque sit numerus denar. $mx - n = px + q$, substituendo in utraque expressione valorem x, habebimus numerum denar. $= m. \frac{q+n}{m-p} - n = p. \frac{q+n}{m-p} + q = \frac{pn+qm}{m-p}$, & ita substituendo in ambabus formulis valores m, n, p, q, erit numerus pauperum $x = \frac{q+n}{m-p} = \frac{4+8}{3-2} = 12$, & numerus denar. $= \frac{pn+qm}{m-p} = \frac{2.8+4.3}{3-2} = 28$.

173 Problem. 4. Cognita velocitate unius cursoris: cognita etiam velocitate alterius, qui illum, post certum tempus, celerius subsequitur, invenire tempus occursus. Solut. Sit spatium à primo (diariò v. g.) percursum $= a$; à secundo $= b$; tempus præcedens egressum secundi $= c$, ac tempus (quod ignoratur) occursus $= x$; spatium à primo, ante egressum secundi, percursum erit $= ac$; percurrendum autem postmodum, quod ignoratur $= ax$; percurrendum autem à secundo tempore quod quæritur, erit $= bx$, ita ut juxta conditionem problematis, dum occursus verificabitur, erit $ac + ax =$

bx; transponendo erit $ac = bx - ax = (b-a)\,x$; ac denique $x = \frac{ac}{b-a}$.

174 Problem. 5. Cognita distantia inter duos locos, è quibus contraria directione exeunt singuli cursores; cognita item utriusque velocitate, invenire tempus occursus. Solut. Sit distantia inter duos locos $= a$, spatium diariò à primo percursum $= b$, à secundo $= c$, ac tempus ante occursum impendendum $= x$; erit spatium percursum à primo ante tempus occursus $= bx$: à secundo $= cx$; unde attenta distantia, proculdubiò erit $a = bx + cx = (b+c)\,x$, & $x = \frac{a}{b+c}$, atque hæc expressio manifestat numerum dierum ante occursum, post utriusque egressum, impendendum.

175 Problem. 6. Cognita velocitate (diaria) cursoris, & distantia ab uno loco ad alium, dies præcisè invenire, quibus alius eum assequetur, ita ut in termino assignato hoc fieri debeat, nec non & numerum leucarum, ad hoc percurrendarum. Solut. Sit iter diarium primi $= a$, tempus ante secundi egressum $= c$, distantia inter duos locos $= b$, terminus designatus $= m$, dies à secundo impendendi $= y$, leucæ diariò ab eodem percurrendæ $= x$. Erit iter percursum à primo ante egressum secundi $= ac$; quod percurrendum superest $= b - ac$; quod percurret tempore $y = ay$; percurrendum à secundo tempore $y = xy$; cumque b sit distantia inter duos locos, erit terminus designatus ad occursum $b - m$: Igitur conditiones problematis sunt $xy = b - m$; $ay = b - m - ac$, extrahendo valorem y in secunda æquatione, erit $y = \frac{b-m-ac}{a,}$ qui quidem substitutus in prima, dabit $x = \frac{(b-m)a}{b-m-ac} = \frac{ab-am}{b-m-ac}$.

176 Problem. 7. Duos numeros invenire, quorum pro-

producta, summa, & differentia quadratorum sint æqualia. Solut. Sit numerus major x, minor y; erit $x+y = xy$; $x^2 - y^2 = xy$; dividendo secundam æquationem per primam, erit $\frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = \frac{xy}{xy}$, hoc est $x - y = 1$, vel $x = 1 + y$, cujus valor substitutus in prima æquatione dabit $2y + 1 = y^2 + y$, vel $y^2 - y = 1$; complendo quadratum (143) habebimus $y^2 - y + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, & extrahendo radicem $y - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$, seu $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; hic valor substitutus in æquatione $x = 1 + y$ dabit $x = 1 + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

177 Problem. 8. Invenire duos numeros x, y, tales ut summa primi, & duplum secundi sit $= 80$, ac differentia, subtrahendo è triplo primi quadruplum secundi, $= 24$. Sol. Sit, facilitatis ergo, $80 = a$, $24 = b$. Erit $x + 2y = a$, $3x - 4y = b$; multiplicando primam æquationem per 3 coefficientem x in secunda, & hanc ab illa subtrahendo, habebimus $10y = 3a - b$, seu $y = \frac{3a - b}{10}$, cujus valor substitutus in æquatione $x + 2y = a$, dat $x + \frac{6a - 2b}{10} = a$, hoc est $x = a - \frac{6a - 2b}{10} = \frac{2a + b}{5}$; & substituendo valores a & b erit $y = \frac{3 \cdot 80 - 24}{10} = 21 + \frac{3}{5}$, $x = \frac{2 \cdot 80 + 24}{5} = 36 + \frac{4}{5}$.

178 Problem. 9. Data summa duarum quantitatum, nec non & quadratorum, dictas quantitates invenire. Solut. Sit summa duarum quantitatum $= 2a$: quadratorum $= 2b$: quantitas major $= x$; erit quantitas minor $= 2a - x$, ac juxta conditionem problematis $x^2 + (2a - x)^2 = 2b$, seu $2x^2 + 4a^2 - 4ax = 2b$; transferendo, & dividendo per 2, $x^2 - 2ax = b - 2a^2$, complendo, & extrahendo radicem, erit numerus major,

jor, $x = a \pm \sqrt{(b - a^2)}$, cujus valor substitutus in expressione $2a - x$, nempe numeri minoris, erit hic $= 2a - a \mp \sqrt{(b - a^2)} = a \mp \sqrt{(b - a^2)}$; nec mirandum signa inferiora, quæ radicale præcedunt, non resolvere problema, quoad id quod est numerum majorem significare formulam primam, minorem autem secundam. Nam æquationes nonnunquam inter veros valores dant etiam superfluos; quod quidem oritur ex complicatione operationum in illis peragendis, in quarum progressu verisimile est tacitas aliquas conditiones misceri, numerum radicum augentes; verum facilè superfluæ à veris discernentur, si successivè locentur omnes valores in cunctis æquationibus.

179 Diximus (§. 168) ad hoc ut problema sit determinatum, requiri numerum æquationum substantialium, quibus conditiones proportionantur, æquare numerum incognitarum; hoc est, conditiones debere re ipsa, non specie tenus, differre. V. g. Quærantur duo numeri x, y quorum summa sit $= 2a$, semisumma autem $= a$; juxta has conditiones habebimus $x + y = 2a$, $\frac{x+y}{2} = a$; multiplicando per 2 secundam æquationem, resultat $x + y = 2a$, quæ eadem est ac prima; ac proinde unica est conditio problematis, licet diversæ appareant, cum unica sit æquatio. In hoc casu, ac similibus, in quibus minor est numerus æquationum, quam incognitarum, problema vocatur *indeterminatum*; nunquam enim pervenire poterimus ad æquationem, in qua unica sit incognita; & ideo unius ex illis valor arbitrariè determinandus, ut reliquæ cognoscantur. Quæruntur v. g. duo numeri x, y quorum summa sit $= 8$. Ut maxime laboretur, non invenietur nisi hæc æquatio

$x+y$

$x+y=8$, vel $x=8-y$; unde ad inveniendum valorem x, determinandus est arbitrariè valor y. Supponamus itaque $y=28$; erit $x=-20$; & ita resolutum manet problema, quod quidem tot solutionum, quot y valorum capax est. Aliquando horum problematum solutio ad modica restringitur, dum nempe conditio adhibetur, quod numeri sint integri, & positivi; ob quod *semideterminata* nuncupantur. Sed hæc tanquam curiosa potius, quam utilia, consultò prætermittimus.

PARS QUARTA.

De Rationibus, & proportionibus.

ARTICULUS PRIMUS.

De Rationibus, & proportionibus in genere.

180 *Ratio* duarum quantitatum est comparatio unius, quæ vocatur *antecedens*, cum altera ejusdem speciei, quæ dicitur *consequens*. Antecedens, & consequens dicuntur *termini rationis*, & indicant tertiam aliam quantitatem, quæ vocatur *exponens*, aut *denominator* rationis.

181 Dum comparatio ordinatur ad quærendam differentiam inter antecedens, & consequens, ratio dicitur *Arithmetica*; si autem ad investigandam continentiam activam, aut passivam mutuam antecedentis in consequente, *Geometrica*.

182 Ergo exponens rationis arithmeticæ, seu differentia inter duos ejus terminos invenietur subtrahendo terminum minorem è majori; geometricæ autem dividendo unum terminum per alium: sic si $c-b=d$, d

erit

erit exponens rationis arithmeticæ c ad b; similiter, si $c : b = q$, q erit exponens, seu denominator rationis geometricæ c ad b.

183 Dum antecedens æquale est consequenti, ratio dicitur *æqualitatis*; si majus est, *majoris inæqualitatis*: si minus *minoris inæqualitatis*.

184 Si una ratio majoris, aut minoris inæqualitatis, cum alia simili comparatur, illa erit major, cujus exponens major sit; sed si exponentes sint æquales, rationes etiam erunt æquales; & in hoc casu duo termini unius dicuntur esse in eadem ratione cum duobus terminis alterius; sic si $a - b = d$, & $c - f = d$, erit (§. 9) $a - b = c - f$, quod indicari solet hoc modo, $a . b : c . f$, legiturque: a est arithmeticè ad b, sicut c ad f. Similiter si $a : b = d$, & $c : f = d$, erit (§. 9) $a : b = c : f$, vel $a : b :: c : f$. Significatque a esse geometricè ad b, sicut c ad f; & in hoc sensu dicimus quod termini primæ rationis sunt directè sicut termini secundæ, hoc est primum, & secundum antecedens æque se habere ad suum consequens.

Sed si comparatur ratio majoris aut minoris inæqualitatis cum alia æquali, minoris itidem, aut majoris inæqualitatis, tunc termini primæ rationis erunt *inversè*, seu *reciprocè* sicut termini secundæ; hoc est quod primum antecedens est ad suum consequens, sicut secundum consequens ad suum antecedens.

185 Ergo si duo termini unius rationis sint *inversè* ut duo termini alterius, cujuslibet ex illis termini invertantur, erunt directè in eadem ratione.

186 Æqualitas duarum rationum, seu duæ rationes æquales formant unam *proportionem*; *arithmeticam* quidem, aut *geometricam*, prout rationes fuerint arithme-

ti-

ticæ, aut geometricæ, & exprimi solet modo indicato (§. 184). Ex quo infertur unam proportionem constare quatuor terminis, quorum primus, & ultimus vocantur *extrema*, secundus, & tertius *media*.

187 Dum termini unius proportionis tales sunt, quod consequens primæ rationis est etiam antecedens secundæ, dicitur *proportio continua*; sic $a \,.\, b : b \,.\, c$, & $a : b :: b : c$ sunt proportiones continuæ, illa arithmetica, hæc geometrica. Mos est primam sic exprimere $\div a \,.\, b \,.\, c$: secundam $\because a \,.\, b \,.\, c$; in utraque secundus terminus b dicitur *medium proportionale*, in prima quidem arithmeticum, in secunda geometricum.

188 Proportiones continuæ plusquam trium terminorum efformant *progressionem*, quæ quidem duplex est: Arithmetica nempe, & geometrica. Illa est series terminorum, in quibus eadem est differentia uniuscujusque ad sibi proximum: hæc, in qua quilibet eodem modo in sibi immediato continetur. Si rationes componentes progressionem sunt majoris inæqualitatis, progressiones sunt *decrescentes*; si autem minoris inæqualitatis, *crescentes*.

ARTICULUS II.

De Rationibus, Proportionibus, & Progressionibus arithmeticis.

189 SI comparamus duas quantitates a, & b, quarum differentia supponantur d, & $a > b$, habebimus (§. 182) $a - b = d$, hoc est $b = a - d$. Si supponimus $b > a$, erit $b - a = d$, vel $b = a + d$, & ita $b = a \pm d$, hoc est quod consequens unius rationis arithmeticæ est semper æquale antecedenti, addito, aut de-

detracto exponente rationis, prout ratio est aut minoris inæqualitatis, & notatur signo +, aut majoris inæqualitatis, & notatur signo —. Consequenter omnis ratio arithmetica poterit repræsentari per $a \,.\, a \pm d$; ita si quantitas quælibet exprimatur per b, & ejus differentia, quæcunque illa sit, per d, ratio arithmetica inter illas erit $b \,.\, b \pm d$.

190 Ergo omnis proportio arithmetica generaliter poterit repræsentari per $a \,.\, a \pm d : b \,.\, b \pm d$. Nam cum duæ rationes sint æquales (§. 186), exponens debet esse idem in utraque (§. 184); cumque a, & b repræsentent antecedentia, si d supponatur exponens rationum, $a \pm d$, & $b \pm d$ erunt consequentia (§. 189): ergo &c.

191 Theor. 1. In omni proportione arithmetica summa extremorum, & mediorum æquales sunt. Nam omnis proportio arithmetica generaliter repræsentatur per $a \,.\, a \pm d : b \,.\, b \pm d$ (§. 190); ergo quidquid in hac verificatur, ubique verificabitur; sed in hac summa extremorum, nempe $a + b \pm d = a \pm d + b$, quæ est summa mediorum: ergo &c: ita si $a \,.\, b : c \,.\, d$, erit $a + d = b + c$.

192 Igitur si proportio est continua, summa extremorum erit æqualis duplo medii. Nam si $\div a \,.\, b \,.\, c$ (§. 187) idem est ut $a \,.\, b : b \,.\, c$, erit etiam (§. 191) $a + c = b + b = 2b$, & dividendo hanc æquationem per 2 erit $b = \frac{a+c}{2}$. Hoc itaque significat, quod medium proportionale arithmeticum est æquale semisummæ extremorum.

193 Theor. 2. Omnis progressio arithmetica potest generaliter repræsentari per $\div a \,.\, a \pm d \,.\, a \pm 2d \,.\, a \pm 3d$ &c. Nam cum duo primi termini progressionis arithmeticæ sint etiam antecedens, & consequens rationis arith-

arithmeticæ (§. 188), posito quod a sit antecedens, & d sit exponens rationis, consequens erit $a \pm d$ (§. 189); & ita differentia inter primum terminum a, & secundum $a \pm d$ est $\pm\, d$; ergo cum eadem intervenire debeat (§. 188) inter secundum $a \pm d$, & tertium, erit hic $a \pm d \pm d = a \pm 2d$; quartus similiter erit $a \pm 2d \pm d = a \pm 3d$ & sic de cæteris, signo $+$ crescentibus, signo $-$ decrescentibus inserviente (§. 188, 189). Ex hoc theoremate deducitur,

194 Primùm: quod in progressione arithmetica quilibet terminus componitur ex primo, addito, vel substracto producto exponentis communis per numerum terminorum præcedentium. Sic quartus terminus progressionis propositæ est $a \pm 3\,d$, & generatim terminus n dictæ progressionis erit $a \pm \overline{n-1}\,d$.

195 Secundùm: quod in omni progressione arithmetica summa extremorum æqualis est summæ quorumlibet duorum aliorum terminorum æquè ab illis distantium, aut si termini progressionis sint impares, duplo termini medii. Nam si in formula generali progressionis sumimus v. g. septem primos terminos $\div\, a.\, a \pm d.\, a \pm 2d.\, a \pm 3d.\, a \pm 4d.\, a \pm 5d.\, a \pm 6d$, habebimus.

$$\left.\begin{array}{ll}
1 \ldots \text{Sum. extrem.} & = a + a \pm 6d = \\
2 \ldots \text{Sum. 2. \& 6. term.} & = a \pm d + a \pm 5d = \\
3 \ldots \text{Sum. 3. \& 4. term.} & = a \pm 2d + a \pm 4d = \\
4 \ldots \text{Dupl. medii term.} & = 2(a \pm 3d) =
\end{array}\right\} \begin{array}{l} 2a \pm 6d. \\ \text{Ergo \&c.} \end{array}$$

196 Tertiùm: quod summa omnium terminorum progressionis arithmeticæ æqualis est producto summæ extremorum per dimidium omnium terminorum. Sic multiplicando $2a \pm 6d$ summam extremorum per $\frac{7}{2}$, dimidium nempe numeri terminorum, habebimus $(2a \pm 6d)\frac{7}{2} = a + a \pm d + a \pm 2d + a \pm 3d + a \pm 4d + a \pm 5d + a \pm 6d =$

7a

$7a \pm 21d$; quæ proprietas, posito quod s significet summam terminorum progressionis, n numerum suorum terminorum, a primum terminum, & v postremum, poterit generaliter exprimi per $s = (a + v)\frac{n}{2}$.

197 Probl. I. Datis tribus ex quinque, quibus constat una progressio arithmetica, primus terminus $= a$, ultimus $= v$, differentia communis $= d$, numerus terminorum $= n$, & omnium summa $= s$, invenire illico unum ex duobus aliis. Supponemus progressionem fore crescentem, cum decrescentes possint fieri crescentes, faciendo primum terminum $= v$, & ultimum $= a$.

Hoc supposito habebimus (§. 194) $v = a + \overline{n - 1}d = a + nd - d$; $a = v - nd + d$; $n = 1 + \frac{v - a}{d}$; $d = \frac{v - a}{n - 1}$: etiam habemus (§. 196) $s = (a + v)\frac{n}{2} = \frac{na + nv}{2}$, ex qua æquatione quatuor alias formulas deducere possumus.

Si hac ultima æquatione $2s = na + nv$ substituimus valorem a, in prima inventum, habebimus $2s = n(v - nd + d) + nv = 2nv - dn^2 + dn$, ex quo quatuor aliæ formulæ prodire valent. Substituendo in eadem æquatione $2s = na + nv$ valorem v inventum in prima, resultabit $2s = na + n(a + nd - d) = 2na + dn^2 - nd$ quatuor aliæ formulæ deduci poterunt. Si in eadem æquatione $2s = na + nv$ substituimus denique valorem n inventum in prima, habebimus $2s = a + v + \frac{v^2 - a^2}{d}$, unde & quatuor aliæ formulæ, quæ quidem cum sexdecim præcedentibus omnes casus possibiles problematis propositi comprehendunt.

198 Probl. 2. Inter duos terminos datos adhibere nume-

merum m mediorum proportionalium, quæ cum illis progressionem arithmeticam efforment. Sol. Dividatur differentia inter duos terminos datos per $m+1$, & quotiens erit differentia, quæ in progressione quæsita communis erit. Sic ut introducantur 6 media proportionalia inter 4, & 18, fiat $m=6$, ac subtrahendo 4 è 18, partiemur differentiam 14 per $m+1$, seu per 7 & quotiens 2 erit differentia communis progressionis, quæ proinde erit $\div$ 4.6.8.10.12.14.16.18. Ex (§. 197) habemus $v = a + \overline{n-1}d$, ergo $v - a = \overline{n-1}d$. Hoc est, quod differentia inter primum, & ultimum terminum progressionis arithmeticæ est æqualis producto differentiæ communis per numerum terminorum, qui ultimum præcedunt: ergo dividendo illud productum (nempe differentiam inter primum, & ultimum terminum) per numerum terminorum, quæ ultimum præcedere debent (tot nempe quot media introducenda addito primo termino progressionis) habebitur alius factor, seu differentia communis: ergo si m repræsentat numerum mediorum introducendorum, & a differentiam inter duos terminos, inter quos introducenda sunt, erit $\frac{a}{m+1}$ formula differentiæ communis quæsitæ.

ARTICULUS III.

De Rationibus, proportionibus, & progressionibus Geometricis.

HÆC ingentis usus in Mathematicis sunt; & idcirco dum ratio, proportio &c., nullo superaddito, nominatur, Geometrica intelligitur.

f Dum

199 Dum antecedens unius rationis continet exactè consequens, dicitur *ratio multiplex*; dupla nempe, tripla, &c. prout bis, ter &c. continet. Sed dum exactè continetur antecedens in consequenti, dicitur *ratio submultiplex*; subdupla nempe, subtripla &c. prout bis, ter &c. continetur.

200 Si termini variarum rationum ordinatè multiplicentur, hoc est antecedentia per antecedentia, consequentia per consequentia, producta formant unam rationem, quæ dicitur *composita*. Sic multiplicando ordinatè tres rationes . . . .

$$\begin{array}{c} a:b \\ c:d \\ \underline{e:f} \\ ace:bdf \end{array}$$

resultat ratio composita $ace:bdf$; & quælibet ex illis tribus dicitur ratio componens. Dum rationes componentes sunt æquales, composita dicitur etiam dupla, tripla &c. si componentes sint duæ, tres &c.; sic si $a:b = c:d$, $ac:bd$ erit etiam ratio dupla cujuslibet è componentibus; si $a:b=c:d=e:f$, $ace:bdf$ erit ratio tripla &c.

201 Supposito (ut supponi communiter debet, nisi aliud animadvertatur) quod exponens unius rationis directæ resultat ex divisione consequentis per antecedens, habebimus quod omnis ratio geometrica poterit generaliter exprimi per hanc formulam $a:aq$, seu per $b:bq$; hoc est quod consequens rationis geometricæ semper est æquale producto antecedentis per exponentem rationis. Cum enim exponens rationis sit quotiens resultans ex divisione consequentis per antecedens, patet quod consequens, seu dividendum, debet esse æquale producto quotientis (§. 34) per antecedens, seu divisorem; ergo generatim in omni ratione geometrica, si a sit antecedens, & q exponens rationis, erit aq consequens, & poterimus illam exprimere per $a:aq$, vel per $b:bq$, si b sit antecedens, & q denominator rationis. Hoc supposito, dum ratio est ma-

majoris inæqualitatis, exponens q erit fractio minor unitate; sed si ratio sit minoris inæqualitatis, q erit numerus major unitate. Sic in ratione 8: 24, $q=3$, nam cum sit antecedens $a+8$, consequens est $aq=8.3=24$; sed in ratione 24:8, $q=\frac{1}{3}$, nam cum antecedens sit $a=24$, consequens est $aq=24.\frac{1}{3}=8$.

202 Ergo omnis proportio geometrica poterit repræsentari per hanc formulam $a : aq :: b : bq$. Cum duæ rationes æquales esse debeant (§. 186), exponens idem esse debet (§. 184): ergo si a, & b sunt antecedentia, aq, & bq erunt consequentia (§. 201); ac per consequens $a : aq :: b : bq$ erit expressio generica omnis proportionis geometricæ.

203 Theor. I. Valor unius rationis non alteratur, licet duo termini multiplicentur, aut dividantur per eandem quantitatem. Nam una ratio semper est eadem, nisi varietur exponens (§. 184); sed in ratione a: aq, cujus exponens est q, licet duo termini multiplicentur per quamlibet quantitatem m, ita ut sit $am : amq$, non variatur exponens q: ergo am, amq sunt in eadem ratione ac $a : aq$. Similiter probari posset quod $\frac{a}{m}$ & $\frac{aq}{m}$ sunt id eadem ratione ac $a : aq$: ergo $a : aq = am : amq = \frac{a}{m} : \frac{aq}{m}$, &c.

204 Igitur duæ quælibet duæ quantitates sunt in eadem ratione ac eorum dupla, tripla, dimidia, tertia pars, &c. hoc est, fractiones habentes eundem denominatorem, sunt inter se sicut sui numeratores. Sic $a : b = \frac{a}{2} : \frac{b}{2} = \frac{a}{3} : \frac{b}{3} = \frac{a}{q} : \frac{b}{q}$, &c. igitur $\frac{a}{q} : \frac{b}{q} = aq^{-1} : bq^{-1} = a : b$, cum sit $q^{-1} : q^{-1} = 1$; è converso fractiones habentes eundem numeratorem, ac diversum denominatorem, sunt in ratione inversa suorum denominatorum: ita $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = c : b$, cum sit $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{ac}{bc} : \frac{ab}{bc}$ (§. 203); sed juxta supra-

dicta $\frac{ac}{bc} : \frac{ab}{bc} = ac : ab = c : b$; ergo &c.

205 Theor. II. Una ratio duplicata æqualis est rationi quadratorum terminorum unius ex componentibus; triplicata autem rationi cuborum terminorum cujuslibet è componentibus &c. Sint duæ rationes æquales componentes $a : aq$, & $b : bq$, erit $ab : abq^2$ una ratio duplicata (§. 200); patet autem quod $ab : abq^2 = a^2 : a^2q^2 = b^2 : b^2q^2$, nam cum sit (184) $a : aq :: b : bq$, si in composita $ab : abq^2$ substituimus pro $b : bq$, $a : aq$ resultabit $ab : abq^2 :: a^2 : a^2q^2$; si in eadem substituimus pro $a : aq$, $b : bq$, erit $ab : abq^2 = b^2 : b^2q^2$. Si rationes componentes fuerint tres sequentes $a : aq$, $b : bq$, $c : cq$ erit $abc : abcq^3$ una ratio triplicata (§. 200), & eadem utendo substitutione ac in anteriori , habebimus $abc : abcq^3 = a^3 : a^3q^3 :: b^3 : b^3q^3 :: c^3 : c^3q^3$, ergo , &c.

206 Theor. 3. In omni proportione geometrica productum extremorum æquale est producto mediorum. Nam omnis proportio geometrica generaliter repræsentatur per $a : aq :: b : bq$; sed in hac resultat productum extremorum $abq = aqb$ producto mediorum : ergo &c. sic si $a : b = c : d$ erit etiam $ad = bc$; ac consequenter si $b = c$, seu si fuerit proportio continua (§. 187) erit $ad = b^2$, hoc est cum proportio continua est , productum extremorum æquale erit quadrato medii.

207 Ergo quoties habeamus duo producta æqualia, habebimus proportionem , si considerentur duo factores unius producti tanquam extrema , & duo alterius tanquam media. Sic si $mn = rq$, erit etiam $m : r :: q : n$; si $ab = c$ erit $a : c :: 1 : b$.

Ex

208 Ex hac fundamentali proprietate proportionum oritur, quod 4 quantitates proportionales $a : b :: c : d$ subsistunt in proportione, licet terminorum locus varietur, modo sit semper $ad = bc$; sic habebimus, quod cum sit $a : b :: c : d$, erit etiam.

1.° Alternando . . . . $a : c = b : d$

2.° Invertendo . . . . $b : a = d : c$

3.° Componendo . . . $\begin{cases}(a+b) : b = (c+d) : d \\ (a+b) : a = (c+d) : c\end{cases}$

4.° Dividendo . . . . . $\begin{cases}(a-b) : b = (c-d) : d \\ (a-b) : a = (c-d) : c\end{cases}$

5.° Comp. & divid. $(a+b) : (a-b) = (c+d) : (c-d)$, &c. nam semper $ad = bc$, seu productum extremorum æquale producto mediorum.

209 Theor. 4. *Si sint plures rationes æquales, erit summa omnium antecedentium ad summam consequentium, sicut quilibet antecedens ad suum consequentem.* Sit $a : aq :: b : bq :: c : cq$, erit $(a+b+c) : (aq+bq+cq) :: a : aq :: (a+b) : (aq+bq)$; hoc est $(a+b+c) : (a+b+c)\,q :: a : aq :: b : bq :: c : cq :: (a+b) : (a+b)\,q$; nam cum in omnibus his rationibus idem exponens q communis sit, necessario erunt æquales (§. 184); ita si $a : b :: c : d :: e : f$, erit etiam $(a+c+e) : (b+d+f) :: a : b :: c : d :: e : f :: (a+c) : (b+d)$.

210 Theor. 5. *Si plures proportiones multiplicentur, aut dividantur ordinatè, producta erunt proportionalia.* Sic multiplicando proportionem

$$\begin{array}{rcccccc} & a & : & aq & :: & b & : bq \\ \text{per} & c & : & cp & :: & d & : dp \\ \hline \text{resultat} & ac & : & acpq & :: & bd & : bdpq \end{array}$$

quorum producta proculdubio sunt proportionalia (§. 189)

 cum

cum utrique communis sit exponens pq, aliundeque productum extremorum æquale sit producto mediorum. Similiter dividendo

$$\begin{array}{rl} & a : aq : : b : bq \\ \text{per} & \underline{c : cp : : d : dp} \\ \text{resultat} & \frac{a}{c} : \frac{aq}{cp} : : \frac{b}{d} : \frac{bq}{dp} \end{array}$$

vera proportio, cum communis sit idem exponens $\frac{q}{p}$, & itidem productum extremorum sit æquale producto mediorum.

211 Ergo eædem potentiæ, & radices quarumlibet quantitatum proportionalium, erunt etiam proportionales. Nam ultra dicta (§. 210), si $a : b : : c : d$, erit $ad = bc$, & $a^m d^m = b^m c^m$; ergo (§. 207) $a^m : b^m : : c^m : d^m$.

Similiter cum sit $a : b : : c : d$ erit $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} : : \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$; nam cum sit $ad = bc$, erit $a^{\frac{1}{n}} d^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{n}}$; ergo (§. 207) $a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}} : : c^{\frac{1}{n}} : d^{\frac{1}{n}}$, seu $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} : : \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

212 Theor. 6. *Omnis progressio geometrica potest generaliter repræsentari per hanc formulam* $\div a \,.\, aq \,.\, aq^2 \,.\, aq^3 \,.\, aq^4 \ldots aq^{n-1}$.

In ea verificatur quod eadem sit continentia cujuslibet termini in sibi immediato; nam dividendo quemlibet per præcedentem, resultat idem exponens q; sed hic est caracter progressionis geometricæ (§. 188): ergo &c.

213 Hæc formula erit eadem, licet exprimatur hoc modo $\div aq^0 \,.\, aq^1 \,.\, aq^2 \,.\, aq^3 \,.\, aq^4 \ldots aq^{n-1}$, in qua si fa-

facimus $a = 1$, convertetur in $\div q^0 . q^1 . q^2 . q^3 . q^4 . q^5 \ldots q^{n-1}$, ubi repræsentatur series potentiarum successivarum perfectarum cujuslibet quantitatis: ergo illæ potentiæ sunt in progressione geometrica, & earum exponentes in arithmetica.

214 Media formula generali (§. 212) convincitur primò: in omni progressione geometrica productum extremorum esse æquale producto duorum aliorum quorumlibet terminorum æque distantium ab ipsis, seu quadrato termini medii, si termini progressionis sunt inter se impares. Nam in $\div a . aq . aq^2 . aq^3 . aq^4$ resultat $a . aq^4 = aq . aq^3 = aq^2 . aq^2$.

215 Secundò, quod in qualibet progressione primus terminus est ad tertium, sicut quadratum primi ad quadratum secundi: ad quartum sicut cubus primi ad cubum secundi, ac generatim primus ad terminum n, sicut potentia $n-1$ primi ad potentiam $n-1$ secundi. Nam in $\div a . aq . aq^2 . aq^3 \ldots aq^{n-1}$ certum est $a : aq^2 :: a^2 : a^2q^2$; $a : aq^3 :: a^3 : a^3q^3$; $a : aq^{n-1} :: a^{n-1} : a^{n-1}\, q^{n-1}$, quoniam in his omnibus casibus productum extremorum æquale est producto mediorum.

216 Tertiò, quod in omni progressione quilibet terminus æqualis est producto primi per exponentem communem elevatum ad potentiam æqualem numero terminorum præcedentium. Nam in $\div a . aq . aq^2 . aq^3 . aq^4 . aq^5 \ldots aq^{n-1}$, quintus terminus v. g. aq^4 æqualis est producto primi a per exponentem communem q elevatum ad quartam potentiam, quoniam 4 sunt termini quintum præcedentes. Sic hæc proprietas generaliter exprimetur per $x = aq^{n-1}$, ita ut x denotet quemlibet terminum: a primum: q exponentem rationis, & n locum quem terminus x occupare debebit.

217 Probl. 1. Datis tribus terminis unius proportionis, quartum invenire. Sol. Posito quod hic sit x, fiat operatio locando incognitam in loco respondente: fiat postea æquatio productorum extremorum, & mediorum, in qua segregata incognita, habebitur valor termini superstitis. Si quæratur v. g. quarta proportionalis ad a, b, c, faciemus $a : b :: c : x$, erit $xa = bc$, & $x = \frac{bc}{a}$: ergo $a : b :: c : \frac{bc}{a}$. Ex. Sint a & b duo primi termini proportionis, & c quartus, ita ut tertius deficiat; faciemus $a : b :: x : c$, erit $ac = bx$, & $x = \frac{ac}{b}$, & habebitur proportio $a : b :: \frac{ac}{b} : c$; in hoc problemate continetur celebris *regula trium*, de qua postea.

218 Problem. 2. Invenire summam S omnium terminorum unius progressionis geometricæ, cognitio primo termino a, & ultimo, & exponente communi q. Solut. Quoniam in una progressione omnes termini, ultimo excepto, sunt antecedentia, & omnes, primo excepto, sunt consequentia (§. 188), erit (§. 209) $\overline{S-v} : \overline{S-a} :: a : aq$; hoc est $Saq - avq = sa - a^2$, seu dividendo per a, $sq - qv = S - a$, & transferendo $sq - s = vq - a$, seu denique $s = \frac{vq - a}{q - 1}$; quæ formula inserviet etiam ad addendas series decrescentes.

Si nobis proponamus additionem v. g. seriei decrescentis $\div \frac{1}{2} . \frac{1}{4} \frac{1}{8}$ &c. continuatam usque in infinitum, ultimus terminus deveniet $= 0$; & invertendo seriem ut sit crescens, habebimus primum terminum $a = 0$, postremum $v = \frac{1}{2}$, & exponentem communem $q = 2$, & ita faciendo has substitutiones in formula generali, habebimus $s = \frac{vq - a}{q - 1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 - 0}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$.

219 Problem. 3. Datis tribus è quatuor rebus unius pro-

progressionis geometricæ, primo termino $= a$, ultimo $= v$, exponente communi $= q$, & numero terminorum $= n$, quartam invenire. Scimus (§. 216) quod $v = aq^{n-1}$; ergo 1° $a = \frac{v}{q^{n-1}}$; 2° $q = \sqrt[n-1]{\frac{v}{a}}$; 3° $q^n = \frac{vq}{a}$, hoc est quod numerus terminorum n æqualis est exponenti habenti denominatorem communem q, qui æqualis sit producto ultimi termini per dictum denominatorem communem, diviso illo producto per primum terminum a.

Ad facilius inveniendum valorem n recurritur ad Logarithmos; & licet de illis sermo adhuc à nobis non sit institutus, formulam deducemus, quæ facile postmodum intelligetur, & applicabitur. Cum itaque sit $v = aq^{n-1}$, erit $Lv = La + \overline{n-1}\, Lq$, transferendo $Lv - La = \overline{n-1}\, Lq$, seu $n - 1 = \frac{Lv - La}{Lq}$, & denique $n = \frac{Lv - La}{Lq} + 1$.

220 Problem. 4. Introducere unum, aut multa media proportionalia inter duos terminos datos a, & b. Solut. Casus 1. Ad introducendum unum medium proportionale, habebimus (§. 187) $\div a \,.\, x \,.\, b$, hoc est $a : x :: x : b$; ergo (§. 206) $ab = x^2$, $yx = \sqrt{ab}$. Casus 2. Inter a, & b introducenda media m: ergo terminum b præcedent $m+1$ termini. Nam media m ultra terminum a sunt $m+1$. Hoc posito, si vocetur x exponens communis inveniendus, habebimus (§. 216) $b = ax^{m+1}$, ex quo denique exit $x = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$, formula generalis exprimens exponentem communem progressionis quæsitæ, exprimente m numerum mediorum introducendorum inter primum, & ultimum terminum a & b. Et ita habebimus $\div a \sqrt[m+1]{a^{mb}} \,.\, \sqrt[m+1]{a^{m-1}b^2} \,.\, \sqrt[m+1]{a^{m-2}b3}$

$\sqrt{a}$

$\sqrt[m+1]{a^{m-3}b^4}$ &c. usquedum exponens termini b deveniat $=$ $m+1$, quo casu exponens a erit $= 0$, & terminus $\sqrt[m+1]{a^0 b^{m+1}} = b$.

221 Problem. 5. Introducere numerum m mediorum proportionalium inter terminos unius progressionis geometricæ hujus formulæ $\div aq^0 . aq^1 . aq^2 . aq^3 . aq^4$, &c. Introducatur (§. 198) numerus m mediorum proportionalium arithmeticorum inter exponentes denominatoris communis. In quolibet termino progressionis propositæ habebuntur hoc pacto exponentes respondentes terminis introducendis (§. 213). V. g. introducendi sint quatuor termini inter singulos progressionis propositæ; habebimus $\div aq^0 . aq^{\frac{1}{5}} . aq^{\frac{2}{5}} . aq^{\frac{3}{5}} . aq^{\frac{4}{5}} . aq^1 . aq^{\frac{6}{5}} . aq^{\frac{7}{5}} . aq^{\frac{8}{5}} . aq^{\frac{9}{5}} aq^2$ &c.

Notandum : quod si duæ quantitates a & b sunt hujusmodi, ut incremento, aut decremento quantitatis a respondeat incrementum, aut decrementum quantitatis b, ita ut si a deveniat aq, b deveniat bq, dicitur a esse directè sicut b, & indicatur hoc modo $a = b$. Sed si incremento, aut decremento in a, respondeat decrementum, aut incrementum proportionale in b, ita ut si a deveniat aq, b deveniat $\frac{b}{q}$, dicitur quod a est inversè sicut b. & ita exprimitur $a = \frac{1}{b}$.

ARTICULUS IV.

De Logarithmis.

222 TErmini progressionis arithmeticæ respondentes terminis geometricæ, dicuntur horum Loga-

garithmi ; & cum exponentes progressionis geometricæ sint semper in progressione arithmetica (§. 213), illi exponentes erunt Logarithmi, singuli suorum terminorum respondentium. Sic in qualibet progressione geometrica ∸ a^0 . a^m. a^{2m}. a^{3m}. a^{4m}. a^{5m}. a^{6m} &c. exponens o erit Logarithmus unitatis.

223 Si in hac progressione multiplicamus v. g. secundum terminum a^m per quartum a^{3m}, productum a^{m+3m} quantitatis a^m & quantitatis a^{3m}, $= a^{4m}$, est quintus terminus progressionis, cujus Logarithmus est $4m$, hoc est summa exponentium *factorum* (§. 107): ergo Logarithmus unius producti est summa Logarithmorum *factorum*. Si in eadem dividatur terminus sextus a^{5m} per tertium a^{2m}, quotiens $a^{5m-2m} = a^{3m}$ est quartus terminus progressionis, cujus Logarithmus (§. 222) est $3m$; hoc est differentia exponentium divisoris, & dividendi (§. 113): ergo Logarithmus unius quotientis est differentia resultans è subtractione Logarithmi divisoris è Logarithmo dividendi.

224 Si facimus $a = 10$, & $m = 1$, progressio antecedens transformabitur in hanc ∸ 10^0 . 10^1 . 10^2 . 10^3. 10^4 . 10^5 . 10^6 . 10^7 . &c. quæ nempe deservit formationi tabularum Logarithmicarum, & sui exponentes 0, 1, 2, 3, &c. sunt respectivè Logarithmi num. 1, 10, 100, 1000 &c. num. 10 dicitur basis logarithmica ; & generatim basis logarithmica dicitur numerus, cujus logarithmus $= 1$.

225 Sed cum hi exponentes non offerant nisi Logarithmos progressionis decuplæ ∸ 1 . 10 . 100 . 1000. 10000 . &c, ad inveniendos Logarithmos numerorum intermediorum 2, 3 &c. 11, 12 &c. 101, &c. introducere cogitarunt 9999999 media proportionalia geometrica inter quemlibet terminum dictæ progressionis

∸ 10

$\div 10^0\ 10\ 10^2\ 10^3$ &c, introducendo ad hunc effectum (§. 221) 9999999 media arithmetica inter singulos exponentes terminorum dictæ progressionis invenerunt (§. 198) differentiam communem, progressionis arithmeticæ, quam formare debebant dicti exponentes, esse $\frac{1}{10000000} = 0,0000001$ (57); certique de eo, quod cum exponentes sunt in progressione arithmetica, valores num. 10 elevati ad potentias per illos indicatas, necesse est (§. 213) quod sint in progressione geometrica, ac proinde quod dicti exponentes sint eorum Logarithmi (§. 222), transformarunt progressionem antecedentem in hanc $\div 10^0 . 10^{0,0000001} . 10^{0,0000002} . 10^{0,0000003} . 10^{0,0000004}$. &c. $= \div 10^{0,0000000} . 10^{0,0000001}$. &c. (§. 60), in qua termini tam paulatim crescunt, quod ut ab 1 ad 10 perveniatur, decem milliones terminorum necessarii sunt, ita ut necesse sit quod aliquis eorum coincidat cum valore num. 2. alius cum 3, 4 &c. Hac via invenitur quod terminus $10^{0,3010300} = 2$, $10^{0,4771213} = 3$, $10^{0,6020600} = 4$, ita ut hi exponentes sint Logarithmi num. 2, 3, 4 &c.

226 Hinc infertur primò: quod omnis Logarithmus constat duabus partibus, quarum una ad lævam virgulæ denotat integros exponentis, & vocatur *characteristica*; altera ad dexteram exprimit fractionem decimalem, & vocari solet *mantissa*.

227 Secundò: quod characteristica Logarithmorum omnium numerorum qui sunt inter 1, & 10, est 0: eorum autem qui sunt inter 10, & 100 est 1: inter 100, & 1000 est 2 &c. Et ita characteristica unius Logarithmi constat semper tot unitatibus, una minus, quot notæ in numero, cujus est Logarithmus, continentur. Idcir-

circo viso Logarithmo, si ejus characteristica est 2, numerus, cui respondet, habebit tres notas, & viceversa, &c.

228 Si dicatur L, seu *Log.* Logarithmus cujuslibet numeri, habebimus (§. 223) $Lab = La + Lb$; si facimus $a = b$, erit $Lab = La^2 = La + La = 2La$; ergo generatim $La^m = mLa$, hoc est quod Logarithmus cujuslibet potentiæ æqualis est Logarithmo radicis multiplicato per exponentem illius potentiæ. Sic ut elevetur 6 ad quartam potentiam multiplicabitur Logarithmus 0,778151 per 4, & productum 3,112604 erit Logarithmus quartæ potentiæ num. 6; si quæratur igitur in tabulis numerus cui hic logarithmus respondet, invenietur 1296, qui quidem re ipsa est quarta potentia num. 6.

229 Si facimus $m = \frac{1}{n}$ erit $La^m = La^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} La$; hoc est, si dividitur Logarithmus unius quantitatis datæ per indicem radicis extrahendæ, quotiens erit Logarithmus radicis quæsitæ.

230 Juxta dicta (§. 223) $L\frac{a}{b} = La - Lb$; hoc est, quod Logarithmus unius fractionis æqualis est Logarithmo numeratoris, detracto logarithmo denominatoris.

ARTICULUS V.

De Regula aurea, seu trium.

231 VOcatur regula trium ea, qua media è tribus quantitatibus datis deducitur altera, quæ cum datis formet proportionem. Nititur in proprietate fundamentali proportionum (§. 206), ac dividitur in *directam*, & *indirectam*, seu *inversam*, ac harum quælibet in *simplicem*, & *compositam*.

Ut

232 Ut cognoscatur quando hæc regula est directa, aut inversa, necesse est primo, accuratè distinguere quænam sint quantitates respondentes, aut relativæ proportionis. Generatim causæ, & effectus sunt quantitates relativæ. In hac quæst. v. g.: si 30 operarii dierum 7 spatio milliare unum itineris componunt, 300 quot milliaria eodem temporis spatio perficient? patet quod 30 operarii & unum milliare elaboratum, nec non & 300 operarii, ac milliaria elaboranda sunt quantitates relativæ. Secundò: sciendum quod inter quantitates cognitas, semper duæ sunt homogeneæ, seu ejusdem speciei, alia cum quantitate quæsita homogenea. Sic 30, & 300 operarii quantitates homogeneæ sunt, unum milliare (elaboratum), & milliaria (elaboranda) similiter.

233 Hoc supposito tenendum: Primò, quod regula trium est directa semper ac è prima quantitatum homogenearum cognita tanquam antecedenti, & secunda tanquam consequenti, una ratione conflata, quantitas relativa primæ efformet cum quantitate relativa secundæ eandem rationem majoris, aut minoris inæqualitatis. Hoc est (§. 184) quod si crescit, aut decrescit secunda quantatis homogenea respectu primæ, debet etiam crescere, aut decrescere in eadem ratione quantitas relativa ad secundam homogeneam respectu relativæ primæ quantitatis. In hoc casu incognita collocatur quarto in loco, ac determinatur dividendo productum mediorum per primum terminum (§. 217). Secundò: regula trium est inversa semper ac efformata una ratione cum prima duarum quantitatum homogenearum cognitarum tanquam antecedenti, & secunda tanquam consequenti, si hæc est majoris, aut minoris inæqualitatis, quantitas relativa ad primam debet formare cum quantitate relativa ad se-

secundam, eandem rationem, minoris tamen, aut majoris inæqualitatis. Hoc est (§. 184) quod si crescit, aut decrescit secunda quantitas homogenea respectu primæ, in eadem ratione debet crescere, aut decrescere quantitas relativa ad secundam homogeneam respectu relativæ ad primam; quo in casu incognita locatur in tertio loco, ac determinatur dividendo productum extremorum per secundum terminum (§. 217).

234 Dum mediis tribus tantum quantitatibus cognitis, quæritur quarta ad complendam proportionem, regula trium est *simplex*; est autem *composita*, dum ad incognitam inveniendam, plusquam tres dantur quantitates. Hoc exemplis patefiet.

235 50 operarii excavationem 350 uln. certo tempore faciunt. Quæritur quot ulnas 32 operarii in eodem tempore perficient? Sol. Cognitis quantitatibus relativis, necnon & homogeneis (§. 232) ac efformata ex his duabus (§. 233) ratione 50 : 32, quoniam quæstio talis est indolis, quod in eadem ratione, qua 50 major est 32, etiam 350 uln., quæ est quantitas relativa ad 50, debet esse major quantitate relativa ad 32 (quæ nempe quæritur), ex eo quod si 50 operarii faciunt 350 uln., facient minus in eadem ratione, qua 32 minor est 50, dicemus quod regula est directa, simulque simplex (§. 234). Idcirco dicemus (233 . 1.°) $50 : 32 :: 350 : x = \frac{350 \cdot 32}{50} = 224$ uln., hæque erunt, quas 32 operarii perficient.

236 Ex. 2. In arce quodam alimenta sunt pro 3000 militibus, ad sex menses : augetur numerus militum usque ad 4500. Quæritur quandiu alimenta durabunt? Sol. Formetur ratio 3000 : 4500, & quoniam quæstio talis est, quod in eadem ratione qua 3000 minor est 4500,

quan-

quantitas sex mensium relativa ad 3000 debet esse major quantitate relativa ad 4500 (quæsita), quoniam si 3000 milites aluntur certa quantitate ciborum per 6 menses, patet quod eadem 4500 tanto minori tempore alentur, quanto 4500 major est 3000, dicemus quod regula est inversa, sed simplex (234); ita dicetur (233. 2.°) $3000 : 4500 :: x : 6$, seu $x = \frac{3000 \cdot 6}{4500} = 4$.

237 Ex. 3. Si vestis 800 militum valet 300000 denar., 50000 quot valebit? Sol. Scribamus $800 : 50000 :: 300000 : x = \frac{300000 \cdot 50000}{800} = 18750000$, pretium nempe vestis 50000 militum.

238 Ex. 4. Matriti diario 42 boves, ponderis 300 libr. consumuntur. Si alii ponderis 450 adducantur, quot consumentur? Facile agnoscitur quod hæc regula est inversa, quoniam numero libr. aucto, bovum numerus minuitur. Sic erit $300 : 450 :: x : 42$, seu $x = \frac{42 \cdot 300}{450} = 28$ boves.

239 Ex. 5. 20 homines 10 diebus operis 140 uln. conficiunt: 30 homines 24 diebus, quantum operis efficient? Patet (§. 234) quod hæc regula trium composita est. Ut resolvatur, reducetur quæstio ad varias regulas trium simplices, hoc modo. Si 20 homines certo tempore 10 v. g. diebus, 140 uln. operis elaborant, 30 homines eodem tempore quot laborabunt? Patet quod hæc regula est directa, quoniam incremento hominum respondet incrementum ulnarum. Sic faciemus $20 : 30 :: 140 : x = \frac{140 \cdot 30}{20} = 210$ ulnas.

2.° Si 30 homines faciunt 210 uln. operis 10 diebus, iidem 24 diebus quot efficient? Itidem hæc regula est directa, quoniam incremento dierum respondet incremen-

tum

tum ulnarum. Ideo dicemus $10 : 24 :: 210 : x = \frac{210 \cdot 24}{10}$ $= 504$ uln., & hoc est opus elaborandum respondens 30 hominibus, 20 diebus, ex eo quod 20 hom., 10 dieb. faciunt 140 uln. In omni regula trium composita, ratio inter quantitatem quæsitam, & ejus homogeneam cognitam determinatur præcisè per varias rationes simplices: ergo componendo unam ex omnibus illis (§. 200) juxta naturam quæstionis, omnis regula *trium* composita reducetur ad simplicem. Sic in casu proposito componendo rationes simplices, habebimus

$$\begin{array}{l} 20 : 30 \\ \underline{10 : 24} \\ 200 : 720 :: 140 : x = \frac{140 \cdot 720}{200} = 504 \end{array}$$

uln.; quod reipsa est idem quod deduximus methodo anteriori; nam profectò 20 homines laborando 10 diebus, facient idem quod decies 20 homines, seu 200 in una die. Similiter 30 homines 24 diebus facient idem ac vigesiesquatuor 30, seu 720 homines in una die. Methodo tamen anteriori utemur, quoniam in casibus complicatis clariùs apparet num inversio sit, aut non in rationibus componentibus.

240 Ex. 6. Si 40 Monachi 4 mensibus 60 amphoras vini consumunt, quot mensibus 80 Monachi consument 180? Reducendo quæstionem ad regulas simplices, dicemus 1°: Si 40 Monachi consumunt 60 amphoras vini 4 mensibus, 80 Monachi quanto tempore easdem consument? Hæc regula est inversa; quoniam quo major Monachorum numerus, eo minori tempore consument easdem vini amphoras; ideo faciemus $40 : 80 :: x : 4$. aut $x = \frac{40 \cdot 4}{80} = 2$ menses. 2.° Si 80 Religiosi 2 mensibus consumunt 60 vini amphoras, idem Monachi quanto tempore consument 180? Patet quod augmentum amphorarum vini respondet augmento temporis consump-

tionis ab eodem Monachorum numero, ac proinde regula est directa. Ideo dicemus 60@ : 180@ : : 2^{ms} : x^{ms} $= \frac{2 \cdot 180}{60} = 6$ menses; & in eodem tempore dicemus quod 80 Monachi consument 180 vini amphoras, eodem respectu, quo 40 consumunt 60 amphoras 4 mensibus.

ARTICULUS VI.

De Hujus regulæ applicatione.

241 Regula trium variè applicata, ex his rebus, quibus applicatur, nomen sumit: ideo est regula *associationis*, *lucri*, & *alligationis*. Regula *associationis* vocatur, dum agitur de dividendo lucro, aut damno inter multos socios, secundum proportionem rerum ab unoquoque contributarum. Proinde ad sequens problema reducitur.

242 Probl. Dividere numerum datum $= a$ in quemlibet numerum partium, quæ sunt inter se sicut quantitates m, p, q &c.; hoc est quod prima pars sit ad secundam, sicut m ad p; ad tertiam sicut m ad q &c. Sol. Si vocetur x prima pars, ad inveniendam secundam, faciemus juxta conditionem problematis $m : p : : x : \frac{px}{m} =$ secundæ parti; item $m : q : : x : \frac{qx}{m} =$ tertiæ parti; & quoniam summa omnium harum partium debet esse $= a$, habebimus $x + \frac{px}{m} + \frac{qx}{m} = a$, & multiplicando per m, $ma = mx + px + qx = (m + p + q)x$, unde exit $x = \frac{ma}{m+p+q}$ ac sequens analogia $\overline{m+p+q} : m : : a : x$, hoc est: summa omnium partium proportionalium est ad primam illarum partium, sicut numerus dividendus ad primam partium, in quas dividi debet.

Si vocetur A secunda pars, & substituatur valor invenventus num. x, erit $A = \frac{px}{m} = \frac{pa}{m+p+q}$: ergo $\overline{m+p+q} : p :: a : A$; hoc est: summa omnium partium proportionalium est ad secundam earum, sicut dividendus ad secundam partium, in quas dividi debet. Si vocetur B tertia pars, inveniemus eadem methodo $(m+p+q) : q :: a : B$; ac generatim summa omnium partium proportionalium datarum est ad partem n^ssimam^ ipsarum, sicut dividendus ad n^ssimam^ partium, in quas dividi debet. Hoc supposito, sit Cas. 1. Supponatur quod A, B, C societatem ineunt. A tribuit 100 denar., B 50, C 320. Ex hac summa provenit lucrum 1800 aur., qui inter singulos distribui debent secundum proportionem rerum contributarum. Hoc idem est ac dividere numerum 1800 aur. in tres partes, quæ sint inter se sicut 100, 50, 320: ergo ad inveniendam partem respondentem A, faciemus $100 + 50 + 320 = 470 : 100 :: 1800 : x = \frac{1800 \cdot 100}{470} = 382 + \frac{46}{47}$ aur. Ad eam inveniendam, quæ respondet B, faciemus: $100 + 50 + 320 = 470 : 50 :: 1800 : x = \frac{1800 \cdot 50}{470} = 191 + \frac{23}{47}$ aur. Ad tertiam C inveniendam faciemus $100 + 50 + 320 = 470 : 320 :: 1800 : x = \frac{1800 \cdot 320}{470} = 1225 + \frac{25}{47}$ aur.

Cas. 2. Supponatur quod A, & B societatem ineunt. A præbet 240 argenteos pro 8 mensibus: B autem 850 pro 6 mens. Cum hac summa damnum incurritur 6 aur. Quænam damni portio singulis respondet? Hæ, & similes vocantur regulæ *societatis compositæ*, seu *cum tempore*, ac resolvuntur eodem modo ac in casu anteriori, ea tamen cum differentia, quod in his portio singulorum multiplicari debet per tempus pro quo imponitur; nam reipsa idem est imponere 240 argent. pro 8 mens., ac oc-

 to-

togies 240 pro uno mense; aut 850 pro 6 mens., ac sexies 850 pro uno mense. Hoc supposito, ad inveniendam partem respondentem *A*, faciemus $240 . 8 + 850 . 6 = 7020 : 240 . 8 = 1920 :: 60 : x = \frac{60 . 1920}{7020} = 16 + \frac{48}{117}$ arg. Ad inveniendam partem respondentem *B*, faciemus $1920 + 5100 = 7020 : 5100 :: 60 : x = \frac{60 . 5100}{7020} = 43 + \frac{69}{117}$ arg.

243 Regula *lucri* vocatur ea quæ adhibetur ad inveniendam quantitatem solvendam pro aliqua nummorum portione, certis conditionibus præstita. Est lucrum *simplex*, & *compositum*. Illud est quod pro summa collata solvitur: hoc, quod pro summa, ac redditibus procedentibus solvitur. Sequentia problemata casus frequentiores circa præsens propositum comprehendent.

244 Probl. 1. Data summa, lucro inde processuro, nec non & tempore post eam ad lucrum impositam transacto, invenire summam sortis, ac redditus elapsos.

Sit sors $= a$, tempus transactum $= t$, summa sortis, ac lucri $= s$, lucrum annuum singulis sortis unitatibus respondens $= r$, cujus valor facile invenietur, si dicatur: si 100 unitates annuatim tantum præbent, una unitas quid præbebit? Hoc supposito, dicemus: si 1 dat $= r$ lucrum annuum, omnis sors a quantum præbebit? vel $1 : a :: r : x = a r$, lucrum respondens sorti a in uno anno: ergo in annis t erit illud lucrum $= art$, cum sit $1 : t :: a r : x = art$, consequenter, post annos t habebimus $s = a + art$, unde sequentes formulæ prodeunt 1.° $a = \frac{s}{rt+1}$; 2.° $r = \frac{s-a}{at}$, 3.° $t = \frac{s-a}{ar}$. Supponamus quod quidam mutuo præbuit 8620 arg., assignato redditu 4 per singulos 100 annuatim. Post 6 ann. exigit sortem, ac redditus elapsos. Quæritur quantum

tum recipiet? In hoc casu $a = 8620$ arg., $t = 6$ ann., $r = 0,04$, cum sit $100 : 1 :: 4 : x = \frac{4}{100} = 0,04$ (§. 57) ergo $s = 8620 + 8620 . 0,04 . 6 = 8620 + 2068,8 = 10688,8$; & in quolibet alio casu, mediis formulis superioribus, ac cognitis tribus è quatuor quantitatibus s, a, r, t, invenietur quarta.

245 Prob. 2. Data pensione annua, & numero annorum, quibus soluta non fuit, & reddituum incremento ex solutionis omissione proveniente per singulos annos, summam pensionis, & reddituum invenire. Sol. Sit pensio annua $= p$, numerus ann. quibus omissa fuit solutio $= t$, lucrum annuum ex qualibet unitate proveniens $= r$, ac summa quæsita $= s$. Et quoniam pensio solvi non debet nisi post annum completum, patet quod primus annus usuram non præbet; ideo hæc erit $= 0$; sed in fine secundi anni erit pr, cum sit $1 : p :: r : pr$; in fine tertii, $2pr$, in fine quarti $3pr$, ac denique post annos t erit $pr\,(t-1)$. Et ita post annos t redditus efformant progressionem Arithmeticam $\div 0 . pr . 2pr . 3pr . 4pr \ldots (t-1)\,pr$, cujus primus terminus $= 0$, ultimus $= (t-1)\,pr$, & num. terminorum $= t$, & per consequens summa (§. 196) erit $= \frac{t\,(t-1)\,pr}{2}$; si huic reddituum summæ adjicimus pensionem respondentem ann. t, seu pt, prodiet summa quæsita $s = \frac{prt\,(t-1)}{2} + pt = \frac{r\,(t-1)+2}{2} . pt$; unde prodit 1.° $p = \frac{2s}{r(t-1)+2 . t}$, 2.° $r = \frac{2s-2pt}{pt(t-1)}$; 3.° $t = \sqrt{\left(\frac{2s}{pr} + \left(\frac{2-r}{2r}\right)^2\right)} + \frac{r-2}{2r}$

Supponamus quod thesaurarius pensionem 600 aur. cuidam annuè præbere obligatus, suspensionem solutionis per 10 ann. à creditore obtinet, eo pacto ut illis transactis solvere debeat redditus omnes ex tota summa procedentes, quinque nempe per singulos 100.

Erit $p = 600$ aur. $r = 0,05$, & $t = 10$, ex quo resultat $s = \frac{0,05.9+2}{2}.10.600 = 7350$ aur., & auxilio formularum, cognitis tribus è quatuor quantitatibus p, r, t, s, facile agnoscetur quarta.

246 Prob. 3. Data sorte, tempore ex quo ad usuram posita est, & annuis redditibus per singulos 100, invenire post illud tempus summam sortis, ac reddituum, lucri nempe compositi. Sit sors $= a$, lucrum simplex annuum cujuslibet unitatis $= r$, tempus $= t$, summa quæsita $= s$. Erit igitur unitas, addito lucro ab ea procedente, post unum ann. $= 1 + r = q$, cujus valor facile invenitur per hanc proportionem: si 100 post ann. fiunt 105, quid fiet 1? vel $100 : 1 :: 105 : q = 1,05$ (§.62); & quoniam 1 producit q uno ann., idem q factus jam sors initio ann. sequentis, in fine illius producet q^2, eo quod sit $1 : q :: q : q^2$, & ita debitum pro una unitate sortis, & lucro (composito) ab ea procedente in fine secundi anni erit q^2: in fine tertii q^3; ac denique post ann. t, q^t; ad inveniendam igitur post annos t summam s totius sortis, & reddituum (ad lucrum compositum), faciemus: si 1 sortis in annis t devenit q^t, tota sors eodem tempore quò deveniet? $1 : a :: q^t : x = aq^t = s$; unde prodeunt

$$1.^\circ\ a = \frac{s}{q^t};\ 2.^\circ\ q = \sqrt[t]{\frac{s}{a}},\ \text{vel}\ Lq = \frac{Ls - La}{t};\ 3.^\circ\ t = \frac{Ls - La}{Lq}$$

Supponamus quod tutor quidam tradit 20000 aur. pupilli ad usuram, 5 v. g. per 100; post primum ann. solvunt sortem cum lucro respondente, & utrumque rursus eodem modo fœneratur, ita ut in secundo ann. sors constat è sorte primi ann., & insuper è lucro producto in illo anno. Idem

Idem fit per 6 ann. spatium. Quæritur quantum tutor pupillo post hoc tempus debebit? In hoc casu $a = 20000$ aur. $t = 6$ ann. $r = 0,05$, $q = 1,05$, consequenter debitum tutoris $s = aq^t = 20000.\ (1,05)^6 = 26801,8$ aur.

247 Probl. 4. Data pensione annua, tempore ex quo solvi desiit, ac redditu assignato per singulos 100, invenire post illud tempus summam pensionis, ac reddituum, in lucro composito. Sit pensio annua $= p$, tempus ex quo non solvitur $= t$, redditus annuus cujuslibet unitatis pensionis $= r$, una unitas cum ejus redditu post ann. $= 1 + r = q$, summa quæsita $= s$. Juxta suppositionem, in fine primi anni solum erit debitum $= p$; in fine secundi debebitur pensio p illius anni, & præterea illius usura in uno anno, quæ invenietur dicendo $1 : p :: q : pq$, ita ut in fine secundi ann. erit debitum $= p + pq$; in fine tertii debebitur pensio p illius anni, & usura ex $\overline{p + pq}$, quæ etiam invenietur, dicendo $1 : \overline{p + pq} :: q : \overline{pq + pq^2}$, cum quo in fine tertii ann. erit debitum $= p + pq + pq^2$, ac denique inveniemus quod in fine ann. t debitum erit $= p + pq + pq^2 + pq^3 \ldots + pq^{t-1}$, quæ est progressio geometrica, (§. 212), cujus summa (§. 218) est $\dfrac{q.q^{t-1} - 1}{q - 1}$.

$p = \dfrac{q^t - 1}{r} . p = s =$ ad summam pensionis, ac reddituum in lucro composito post ann. t, unde exit 1.° $p = \dfrac{rs}{q^t - 1}$.

2.° $t = \dfrac{L(\frac{rs}{p} + 1)}{Lq}$. 3.° $Lq = \dfrac{L(\frac{rs}{p} + 1)}{t}$.

Supponamus quod pensio annua sit 2400 aur., quæ solvi desiit spatio 8 ann., facta conventione solvendi 4 pro

100, ad lucrum compositum. Erit $p = 2400$, $t = 8$, $r = 0,04$, $q = 1,04$, ac consequenter post octo ann. erit, modica cum differentia, debitum $s = \frac{(1,04)^8 - 1}{0,04}$. $2400 = 22140$ aur.

248 Vocatur regula *alligationis* ea quæ adhibetur in consideranda mixtione diversorum, duobusque quasi ramis constat; aut enim agit de inveniendo pretio medio unius mixtionis, data quantitate, ac pretio singulorum mixtorum, aut de invenienda proportione, qua hæc misceri debent, cognito eorum pretio, ac pretio medio, seu mixtionis.

249 Cas. 1. Datis duobus miscendis, A nempe, cujus pretium est m, & B, cujus pretium est n, invenire pretium mixtionis, ut venditor nec lucrum, nec detrimentum patiatur.

Considerando quod in mixtione præcise continetur summa duorum miscendorum $A + B$, ac consequenter eorumdem pretiorum $Am + Bn$, patet quod summa $A + B$ miscendorum debet esse ad summam $Am + Bn$ pretiorum, sicut pars quælibet mixtionis ad suum pretium; hoc est $\overline{A + B} : 1 :: \overline{Am + Bn} : x = \frac{Am + Bn}{A + B}$, quæ quidem expressio manifestat pretium unius partis mixtionis.

Quæritur quanti vendi debeat marcus mixtionis ex 4 marc. argenti, pretio 150 arg. pro singulis, ac 16, pretio 200 argent. conflatæ, ut nec lucrum, nec detrimentum sit. In hoc casu $A = 4$, $m = 150$, $B = 16$, $n = 200$, consequenter erit marcus $x = \frac{Am + Bn}{A + B} = \frac{4.150 + 16.200}{4 + 16} = 190$. arg.

250 Cas. 2. Datis pretiis miscendorum, invenire in qua

qua proportione misceri debeant, ut ad certum pretium vendi queant. Regula. 1.° Scribantur pretia, vel circumstantiæ miscendorum in una columna, & pretium medium paulò ad lævam, linea verticali separatum.

2.° Sumatur distantia pretii cujuslibet è miscendis à pretio medio, & hæ differentiæ reciprocè, ex adverso ad pretia scriptæ, exprimient quota pars illius, cujus pretium ex adverso est, mixtionem ingredi debeat.

251 Ex. 1. Ex vino, pretio 22 arg. pro amphora, & alio 10 arg., mixtio fieri debet, cujus pretium sit 15 arg. pro amphora. Dispositis pretiis, ut jacet, sumitur differentia 15 ad 10, quam scribo è regione 22. Sumo deinceps differentiam 15 ad 22, seu 7, eamque reciprocè ex adverso ad 10 loco. Et dicam quod mixtio facta ex 5 amphoris vini, pretio 22 arg., & 7, pretio 10 arg., æstimabitur præcisè 15 arg., cum in omni casu sit $\frac{5.22+7.10}{12}=15$.

$$15\left\{\begin{array}{l}22\ldots 5\\ 10\ldots \underline{7}\\ \qquad\quad 12\end{array}\right.$$

Notandum quo duo quilibet alii numeri, qui in eadem forent ratione, in qua est 5 ad 7, ut eorum dupla, tripla &c., (204) similiter quæstionem solvent.

252 Ex. 2. Facienda sit mixtio ex triplicis generis vino, quorum unum 16, aliud 11, aliud 8 arg. pretium habeat, 12 arg. æstimanda. In hoc casu, & similibus singula singulorum pretia separatim sumenda, acsi unica forent.

Et dicemus quod ex 5 amph. vini primi generis, 4 secundi, ac 4 tertii, mixtio desiderata fiet.

$$12\left\{\begin{array}{l}16\ldots 4+1=5\\ 11\ldots 4\\ \ 8\ldots 4\end{array}\right.$$

253 Semperac unum ex pretiis majus sit pretio medio, reliqua autem minora, præfata methodo utemur. Sed si unum minus sit pretio medio, cætera autem ma-

majora, in sensum contrarium procedetur, locando è regione pretii minoris differentias cæterorum ad medium, ac è regione cæterorum omnium differentiam pretii minoris ad medium. v. g. ....

$$10\left\{\begin{array}{l} 8 \,..\, 10+4+1=15 \\ 11 \,..\, 2 \\ 14 \,..\, 2 \\ 20 \,..\, 2 \end{array}\right.$$

254 Ex. 3. Collector quidam habet vina triplicis huius pretii, 30, 18, 10 arg. pro amphora. Quæritur quantum ex duabus speciebus inferioribus misceri debeat cum 10 amphoris superioris, ut 22 arg. æstimetur.

$$22\left\{\begin{array}{l} 30 \,..\, 12+4=16 \\ 18 \,..\, 8 \\ 10 \,..\, 8 \end{array}\right.$$

Procedendo juxta dicta (§. 253) habebimus, quod ex mixtione 16 amphor. vini primi generis, cum 8 singulorum aliorum, fiet mixtio desiderata. Sed cum collector nolit plusquam 10 amph. vini superioris miscere, patet quod eo minori portione aliorum indegebit, quo 10 minus est 16; quod quidem per hanc proportionem determinabitur. Si 16 minuitur usque dum deveniat 10, quantum 8 diminui debet? Seu $16:8::10:x=\frac{80}{16}=5$ amphoras vini pretii supremi, seu 18, ac totidem pretii 10.

255 Ex. 4. Ex saccharo pretii triplicis, 10 nempe, 8, & 4 arg. pro libra, 60 libr. pretio 7 arg. componendæ sunt. Quantum ex singulis desumi debet?

$$7\left\{\begin{array}{l} 10 \,..\, 3 \\ 8 \,..\, 3 \\ 4 \,..\, \underline{3+1=4} \\ \qquad\quad 10 \end{array}\right.$$

256 Procedendo juxta dicta (§. 253) habemus 10 lib. sacchari, pretio 7 argent. Cumque velimus ut sint 60, necesse erit ut singulæ portiones augeantur in eadem ratione, qua augetur 10 usque ad 60. Hoc obtinebitur per hanc proportionem: si 10 augentur usque dum fiant 60, quælibet portio singillatim quantum augeri debebit?

Hoc

Hoc est $10 : 4 :: 60 : x = \frac{60.4}{10} = 24$ lib. sacchari, pretio 4 argent. $10 : 3 :: 60 : x = \frac{60.3}{10} = 18$ lib. sacchari, pretio 10 argent., & totidem 8 argent.

257 Probationes omnium operationum circa alligationes desumuntur ex dictis in fine (§. 251).

APPENDIX

De Aliquali serierum notione.

258 SEries idem est ac polinomium, cujus termini legem constantem servant. Tales sunt omnes progressiones arithmeticæ, & geometricæ. Dicitur *finita*, dum constat determinato numero terminorum; *infinita* autem, quæ constat infinitis terminis, seu qui in infinitum continuantur.

Series illa, in qua valor cujusque termini major est quam antecedentis, dicitur *divergens*; si autem è converso, *convergens*. Ex quo infertur series eo esse magis convergentes, aut divergentes, quo valor cujusque termini major est, aut minor, quam antecedentis.

Dum series talis est, ut ad valorem cujusque termini inveniendum, necesse sit alicujus, aut aliquorum è præcedentibus valorem invenire, dicitur *recurrens*; & quidem primi, secundi, aut tertii gradus &c. prout unius, duorum terminorum &c. valorem invenire opus est.

Series principaliores numerorum sunt, *numerorum figuratorum*, seu *ordinum differentium*; *polygonorum*, ac *potentiarum*.

259 Series numerorum *figuratorum* procedunt sicut in exemp. sequentibus ....

Cons-

Numeri	Constantes aut primi ordinis	1 . 1 . 1 . 1 . 1 . &c.
	Naturales, aut secundi ordinis	1 . 2 . 3 . 4 . 5 . &c.
	Triangul., aut tertii ordinis	1 . 3 . 6 . 10 . 15 . &c.
	Piramid., aut quarti ordinis	1 . 4 . 10 . 20 . 35 . &c.

Harum lex est, quod quilibet suorum terminorum debet esse summa terminorum seriei præcedentis usque ad eum, qui correspondet in loco quem occupant: sic termini secundæ seriei formantur per continuam additionem unitatum; tertiæ autem per continuam additionem terminorum secundæ. Nam $1 = 1$, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, &c.

260 Numeri resultantes è continua additione terminorum unius progressionis arithmeticæ à 1 incipientis, dicuntur *polygoni*; dicenturque triangulares, quadrati &c. prout differentia illius progressionis est 1, 2, 3, &c.

Progres. Arithm.	Dif.	Num. Polig.	
1 . 2 . 3 . 4 . 5 . &c. . .	1	1 . 3 . 6 . 10 . &c.	Triang.
1 . 3 . 5 . 7 . 9 . &c. . .	2	1 . 4 . 9 . 16 . &c.	Quadrat.
1 . 4 . 7 . 10 . 13 . &c. . .	3	1 . 5 . 12 . 22 . &c.	Pentag.
1 . 5 . 9 . 13 . 17 . &c. . .	4	1 . 6 . 15 . 28 . &c.	Exag.

Observatur quod secundæ differentiæ horum numerorum polygonorum sunt constantes; & idem de tertiis observaretur, si continua additione series aliæ efformarentur, &c.

261 Vocantur series *potentiarum* eæ quæ resultant è quadratis, cubis &c. terminorum seriei numerorum naturalium 1, 2, 3, &c. ita erit

$$\left.\begin{array}{l} 1 . 4 . 9 . 16 . 25 . \&c. \text{ Series quadratorum} \\ 1 . 8 . 27 . 64 . 125 . \&c. \text{ Series cuborum} \end{array}\right\} \text{ex } 1.2.3.4.\&c.$$

262 Ultra has sunt plurimæ aliæ series numerorum. Sed in invenienda earum lege, difficultas unice consistit. Ad hoc, si illico cognosci nequit, scribetur series sub di-

diversa forma, quæ aliqualem legis, quam sequitur, ideam nobis exhibeat. Sic in hac serie v. g. $\frac{1}{1}$. $\frac{2}{3}$. $\frac{4}{15}$. $\frac{8}{105}$. &c. scribemus $\frac{1}{1}$. $\frac{2}{1.3}$. $\frac{4}{1.3.4}$. $\frac{8}{1.3.5.7}$. &c.

Ubi apparet quod numeratores sunt termini unius progressionis geometricæ subduplæ (§. 199), & denominatores producta primi, duorum, trium primorum &c. numerorum imparium.

263 Fractiones legitimæ, & radices potentiarum imperfectarum vidimus qualiter (§. 148) convertuntur in series infinitas. Nihilominus methodum ingeniosam adhibebimus. Convertenda sit fractio $\frac{a}{b+x}$ in seriem ordinatam per x. Faciemus $\frac{a}{b+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$ tollendo fraction. erit $a = (b+x)(A + Bx + Cx^2 + \&c.) =$

$$bA + bBx + bCx^2 + bDx^3 + \&c.$$
$$+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + \&c.$$

in qua æquatione indeterminati manent coefficientes A, B, C, D, &c., sed determinantur comparando singulum coefficientium terminorum seriei secundi membri cum coefficientibus suorum terminorum homologorum, seu ejusdem potentiæ x in primo membro. Et quoniam $a = a + 0x + 0x^2 + \&c.$ habebimus $bA = a$, $bB + A = 0$, $bC + B = 0$, $bD + C = 0$, &c. hoc est $A = \frac{a}{b}$, $B = -\frac{a}{b^2}$, $C = \frac{a}{b^3}$, $D = -\frac{a}{b^4}$ &c. qui quidem valores si substituantur in prima serie, cui æqualis facta est fractio, dabunt $\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \&c. = \frac{a}{b}\left(1 - \frac{x}{b} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{x^3}{b^3} + \&c.\right)$.

Ubi observatur quod si $x = b$, summa cujuslibet numeri paris terminorum est $= 0$; imparis autem

=

$= \frac{a}{b}$, quæ quidem series dicuntur *parallelæ*. Si $x < b$ series erit convergens (258), ac consequenter magis & magis approximabitur vero valori fractionis; sed si $x > b$ series erit divergens (258), & à vero valore fractionis magis recedet.

Ad extrahendam hac methodo radicem quadratam, v. g. ex $a^2 + x^2$ faciemus $\sqrt{a^2 + x^2} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 +$ &c. erit..

$$a^2 + x^2 = A^2 + 2ABx^2 + B^2x^4 + 2ADx^6 + \&c.$$
$$+ 2ACx^4 + 2BCx^6 + \&c;$$

& sic comparando coefficientes terminorum homologorum $A^2 = a^2$, $2AB = 1$, $B^2 + 2AC = 0$, $2AD + 2BC = 0$ &c. hoc est $A = a$, $B = \frac{1}{2a}$, $C = -\frac{1}{8a^3}$ $D = \frac{1}{16a^5}$ &c. quorum valores si substituantur in serie $A + Bx^2 + Cx^4 +$ &c. dant $\sqrt{a^2 + x^2} = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} -$ &c. $= a \left(1 + \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^4}{8a^4} + \frac{x^6}{16a^6} - \&c.\right)$.

Ex quo observatur quod si $x < a$, series erit convergens (§. 258); sed si $x > a$ erit divergens; & patet quod si loco x substituatur a, & loco a substituatur x, posito quod sit $x > a$, series è divergente convertetur in convergentem.

De additione serierum.

264 Seriem addere idem est ac eius terminos reducere ad unicam expressionem finitam.

265 Ad hoc quæritur methodus addendi aliquot series, quarum producta tanquam formulæ erunt, ad quas, si fieri potest, series addendæ reducantur. Aliquan-

quando resolvitur series in alias, quas addi posse cognoscimus mediis aliquibus formulis, ac postmodum, juxta seriei constitutionem, adduntur, aut subtrahuntur summæ inventæ, & ita obtinetur summa totius seriei. Sic inventa formula ad addendos v. g. omnes terminos unius progressionis geometricæ decrescentis in infinitum, per eamdem addere poterimus omnes series, quæ resolvantur in multas alias, quarum termini sint etiam in progressione geometrica decrescente.

Hoc signum ∞ significat infinitum. ac proinde $\frac{1}{\infty}$, $\frac{a}{\infty}$ denotant quantitates infinitè parvas.

266 Sit $\div \frac{d}{b} \cdot \frac{d}{bq} \cdot \frac{d}{bq^2} \cdot \frac{d}{bq^3} \cdots\cdots\cdots \frac{d}{bq^\infty}$ una progressio decrescens, ut necesse est (258), ex eo quod sit $q > 1$ (§. 201), crescentibus enim denominatoribus, decrescet continuatè valor cujusque termini.

Si scribimus $\div \frac{d}{bq^\infty} \cdots \frac{d}{bq^3} \cdot \frac{d}{bq^2} \cdot \frac{d}{bq} \cdot \frac{d}{b}$, series erit crescens (§. 258), & applicata formula $s = \frac{vq - a}{q - 1}$ (§. 218) erit $a = \frac{d}{bq^\infty}$, $v = \frac{d}{b} \cdots\cdots$ ac per consequens $s = \dfrac{\frac{dq}{b} - \frac{d}{bq^\infty}}{q - 1}$, ita ut spreta quantitate infinitè parva $\frac{d}{bq^\infty}$, erit denique $s = \frac{dq}{bq - b}$, formula generalis manifestans summam totius progressionis geometricæ, in infinitum decrescentis.

267 Hoc supposito, addenda sit series $\frac{a}{b}$, $\frac{a+d}{bq}$, $\frac{a+2d}{bq^2}$, $\frac{a+3d}{bq^3}$ &c. cujus numeratores sint in progressione arithmetica (193), & denominatores in progressione geometrica (212). Ad hoc ordinabitur sub hac forma $\frac{a}{b}$,

$\frac{a}{bq} + \frac{d}{bq}, \frac{a}{bq^2} + \frac{d}{bq^2} + \frac{d}{bq^2}, \frac{a}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3}$, &c.
ex qua deduci poterunt series sequentes, quæ totidem sunt progressiones geometricæ (§. 212).

$\div \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{bq} \cdot \frac{a}{bq^2} \cdot \frac{a}{bq^3}$. &c. cujus summa (§. 267) est $= \frac{aq}{bq-b}$

$\div \quad \frac{d}{bq} \cdot \frac{d}{bq^2} \cdot \frac{d}{bq^3}$. &c. cujus summa (§. 267) est $= \frac{d}{bq-b}$

$\div \quad \frac{d}{bq^2} \cdot \frac{d}{bq^3}$. &c. cujus summa (§. 267) est $= \frac{d}{bq^2-bq}$

$\div \quad \frac{d}{bq^3}$. &c. cujus summa (§. 267) est $= \frac{d}{bq^3-bq^2}$

Omnes hæ summæ, prima excepta, efformant (212) progressionem geometricam $\div \frac{d}{b(q-1)} \cdot \frac{d}{bq(q-1)} \cdot \frac{d}{bq^2(q-1)}$. &c. cujus summa (§. 267) est $= \frac{dq}{bq(q-1)-b(q-1)} = \frac{dq}{bq^2-2bq+b}$ & huic addendo summam $\frac{aq}{bq-b}$ primæ seriei, erit summa omnis seriei propositæ (§. 266) $= \frac{aq}{bq-b} + \frac{dq}{bq^2-2bq+b} = \frac{aq^2-aq+dq}{bq^2-2bq+b}$, multiplicatis terminis primæ fractionis per $q-1$, quæ formula inserviet etiam ad addendas omnes series fractionum, quarum numeratores sint in progressione arithmetica, denominatores autem in geometrica.

268 Vocatur terminus generalis unius seriei illa expressio ex n (quæ quidem denotat numerum terminorum), omnes terminos seriei producens, eo solo quod in ea successivè substituantur loco n numeri naturales 1, 2, 3, &c. sic terminus generalis seriei 1 . 4 . 9 . 16 . 25 . &c. est n^2, nam faciendo successivè $n = 1, = 2, = 3$, &c. habebimus statim omnes terminos seriei 1 . 4 . 9 . 16 . &c.

269 Summa generalis unius seriei est illa expressio ex n, in qua si substituatur quilibet numerus integer, producit summam tot terminorum seriei, quot unitates sunt in numero loco n substituto. Sic expressio $\frac{aq^n - a}{q - 1}$ est sum-

summa generalis totius progressionis, ex qua cognoscimus primum terminum a, numerum terminorum n, exponentem communem q.

270 Probl. 1. *Data summa generali unius seriei, invenire ejus terminum generalem.*

Clarè patet quod terminus generalis T æqualis est summæ S omnium terminorum seriei, usque ad terminum $n^{essimum}$ inclusivè, excepta summa S' omnium terminorum ejusdem, usque ad terminum $\overline{n-1}^{essimum}$ inclusivè; & quoniam data summa generali S unius seriei, si in ea substituatur $n-1$ loco n, resultet necesse est summa S' omnium terminorum ejusdem usque ad terminum $\overline{n-1}^{essimum}$, patet quod hanc è illa subtrahendo, habebimus terminum generalem quæsitum $T = S - S'$.

Sit v. g. $S = \dfrac{aq^n - a}{q-1}$, erit $S' = \dfrac{aq^{n-1} - a}{q-1}$, & $S -$

$$S' = \frac{aq^n - a}{q-1} - \frac{aq^{n-1} - a}{q-1} = \frac{aq^n}{q-1} + \frac{a}{q-1} - \frac{a}{q-1} - \frac{aq^{n-1}}{q-1} = \frac{aq^n}{q-1} - \frac{aq^{n-1}}{q-1} = \frac{aq^{n-1}(q-1)}{q-1} = aq^{n-1} = T.$$

271 Probl. 2. *Dato termino generali unius seriei, ejus summam generalem invenire.*

In hoc problemate solvendo, mirum quantopere torqueantur ingenia. Sequenti tamen methodo ingentis extensionis resolutionem assequemur.

Sit T expressio rationalis numeri terminorum n, hoc est $T = an^m + bn^{m-1} + cn^{m-2} + \&c. + v$; supposito quod summa generalis $S = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + Dn^{m-2} + \&c. + R$, substituendo $n-1$ loco n, erit

$$S' = A(n-1)^{m+1} + B(n-1)^m + C(n-1)^{m-1} + D(n-1)^{m-2} + \&c.$$
$$= An^{m+1} - A.\overline{m+1}n^m + \frac{A\overline{m+1}.m}{2}n^{m-1} - \frac{A\overline{m+1}.m\overline{m-2}}{2.3}n^{m-2} + \&c.$$
$$+ B.n^m - B.m.n^{m-1} + \frac{B.m.\overline{m-1}}{2}n^{m-2} - \&c.$$
$$+ C.n^{m-1} - C\overline{m-1}.n^{m-2} + \&c.$$
$$+ D.n^{m-2} - \&c.$$

Ergo $\overline{S - S'}$, seu $an^m + bn^{m-1} + cn^{m-2} + dn^{m-3} + \&c.$

$$= A\overline{m+1}n^m - \frac{A\overline{m+1}.m}{2}n^{m-1} + \frac{A\overline{m+1}.m.\overline{m-1}}{2.3}n^{m-2} - \&c.$$
$$+ B.m.n^{m-1} - \frac{Bm.\overline{m-1}}{2}n^{m-2} + \&c.$$
$$+ C.\overline{m-1}.n^{m-2} - \&c.$$

& comparando terminos homologos habebimus $A = \frac{a}{m+1}$, $B = \frac{1}{2}a + \frac{b}{m}$, $C = \frac{c}{m-1} + \frac{1}{2}b - \frac{1}{12}am$ &c. quorum valores substituti in formula $S = An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + \&c.$ dant $S = \frac{a}{m+1}n^{m+1} + (\frac{b}{m} + \frac{1}{2}a)n^m + (\frac{c}{m-1} + \frac{1}{2}b + \frac{1}{12}am)n^{m-1} + \&c.$

Invenienda proponatur summa seriei $1.2.3.4..n$, cujus terminus generalis est n; in hoc casu $a = 1$, $m = 1$, $b = 0$, $c = 0$; ergo $S = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$.

272 Addenda sit series $1.4.9.16.25$ &c, cujus terminus generalis est n^2 (§. 269), erit si comparetur hic terminus generalis cum proposito ad formulam generalissimam $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $m = 2$, qui quidem valores substituti in formula generali termini summatorii, dant $S = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

273 Addenda sit series $1^m.2^m.3^m.$ &c. cujus terminus generalis est n^m, erit $a = 1$, $m = m$, $b = 0$, $c = 0$, & consequentèr $S = \frac{1}{m+1}n^{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \frac{1}{12}mn^{m-1} +$ &c.

&c. & supponendo $n = \infty$; n^m, n^{m-1} &c. erunt quantitates infinitè parvæ respectu n^{m+1}, idcirco prætermitti poterunt absque errore sensibili, & habebimus $S = \frac{n^{m+1}}{m+1} = 1^m + 2^m + 3^m \ldots\ldots + n^m$; sed hæc formula solum habebit locum, dum n est quantitas infinita, & positiva; si enim negativa sit, erit finita, nisi dum $m = -1$.

De Methodo inversa serierum.

274 Data una æquatione, v. g. $x = ay^m + by^{m+n} + cy^{m+2n} + dy^{m+3n} +$ &c. Si invenire volumus valorem ex y in expressionibus ex x, methodo inversa serierum utemur, quæ explicata manet (§. 264).

Si in æquatione proposita supponimus $m = n = 1$, erit $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ &c. Ad inveniendum igitur valorem ex y in expressionibus ex x faciemus

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{\&c. ergo}$$

$$\begin{array}{l} y^2 = \ldots\ldots A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + \text{\&c.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 2ACx^4 \\ y^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + \text{\&c.} \\ y^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots A^4x^4 + \text{\&c.} \\ \text{\&c.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{\&c.} \end{array}$$

& consequenter

$$x = \left\{\begin{array}{l} ay = aAx + aBx^2 + aCx^3 + aDx^4 + \text{\&c.} \\ by^2 = \ldots bA^2x^2 + 2bABx^3 + bB^2x^4 + \text{\&c.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2bACx^4 \\ cy^3 = \ldots\ldots\ldots\ldots cA^3x^3 + 3cA^2Bx^4 + \text{\&c.} \\ dy^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots dA^4x^4 + \text{\&c.} \\ \text{\&c.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{\&c.} \end{array}\right.$$

 Un-

Unde comparando terminos homologos, prodit $Aa = 1$, $aB + bA^2 = 0$, $aC = 2bAB + cA^3 = 0$ &c, hoc est $A = \frac{1}{a}$, $B = -\frac{b}{a^3}$, $C = \frac{2b^2 - ac}{a^5}$, $D = \frac{5abc - a^2d + 5b^3}{a^7}$, &c. Si hos valores substituimus in æquatione $y = Ax + Bx^2 +$ &c. deducemus $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a^3}x^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}x^3 + \frac{5abc - a^2d + 5b^3}{a^7}x^4 + \frac{14b^4 - 21abc^2c + 6a^2bd + 3a^2c^2 - a^3e}{a^9}x^5 +$ &c.

Formula generalis ad omnes casus hujus naturæ, quæ quidem applicabitur, substituendo in ea valores respondentes coefficientibus a, b, c, d, &c.

Si $x = ay + by^3 + cy^5 +$ &c. faciemus $y = Ax + Bx^3 + Cx^5 +$ &c., & postea procedetur sicut in casu anteriori.

Si $x = p + ay + by^2 +$ &c. fiet $x - p = z$, quare erit $z = ay + by^2 +$ &c., supponendoque $y = Az + Bz^2 +$ &c. procedetur sicut in casu primo, curando de eo quod substituatur loco z ejus valor $x - p$.

275 Problem. I. Invenire seriem exprimentem Logarithmum cujuslibet numeri.

Sit numerus, cujus Logarithmus desideratur $= 1 + x$, faciendo $(1 + x)^m = 1 + z$, erit $1 + z = 1 + mx + \frac{\overline{m \cdot m - 1}}{2}x^2 + \frac{\overline{m \cdot m - 1} \cdot \overline{m - 2}}{2 \cdot 3}x^3 +$ &c. hoc est $z = mx + \frac{\overline{m \cdot m - 1}}{2}x^2 + \frac{\overline{m \cdot m - 1} \cdot \overline{m - 2}}{2 \cdot 3}x^3 +$ &c. Si supponimus $L(1 + x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 +$ &c. erit $L(1 + z) = Az + Bz^2 + Cz^3 +$ &c., & cum sit juxta hypothesim $(1 + x)^m = 1 + z$, erit (§. 228) $mL(1 + x) = L(1 + z)$, seu $mAx + mBx^2 + mCx^3 +$ &c. $= Az + Bz^2 + Cz^3 +$ &c. & siquidem in hac æquatione substituimus loco z ejus va-

valorem inventum in expressionibus ex x, habebimus $mAx + mBx^2 + mCx^3 + mDx^4 +$ &c.

$$= Amx + Am\frac{\overline{m-1}}{2}x^2 + Am\frac{\overline{m-1}.\overline{m-2}}{2.3}x^3 + \text{\&c.}$$
$$+ Bm^2 . x^2 + Bm^2 . \overline{m-1} . x^3 + \text{\&c.}$$
$$+ C . m^3 . x^3 + \text{\&c.}$$

Transferendo terminum Amx, & homologos comparando (§. 264) erit $mB = A\frac{m . \overline{m-1}}{2} + Bm^2$, $mC = Am\frac{\overline{m-1}}{2} . \frac{\overline{m-2}}{3} + Bm^2\, \overline{m-1} + Cm^3$ &c. Unde exeunt $B = -\frac{1}{2}A$, $C = \frac{1}{3}A$, $D = -\frac{1}{4}A$, &c. quorum valoribus substitutis in æquatione $L(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 +$ &c. daut $L(1+x) = A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 +$ &c.).

276 Patet quod quantitas A manet indeterminata; ex quo infertur quod numerus propositus $1 + x$ habere potest infinitos Logarithmos. Hinc varietas systematum Logarithmicorum. Sed brevius illud est, in quo supponitur $A = 1$, atqui hi ***Logarithmi hyperbolici*** vocantur.

277 Ergo in omnibus systematibus Logarithmus hujus $1 + x$ reducitur ad productum ejus Logarithmi hyperbolici per quantitatem A; atque hic dicitur *modulus constans*, respectu omnium systematum, quæ idcirco ad hyperbolicum reduci possunt.

278 Supposito igitur $A = 1$, habebimus $L(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} -$ &c. quæ quidem series erit convergens, si $x < 1$, & si singulis membris æquationis addimus La, posito quod a repræsentet (§. 224) basim Logarithmicam, resultat $La + L(1+x)$, seu (§. 223) $L(a+ax) = La + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} -$ &c.

Si supponimus $ax = z$, erit $x = \frac{z}{a}$, & consequenter $L(a+ax)$ seu $L(a+z) = La + \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} + \frac{z^3}{3a^3} -$ &c., & faciendo $ax = -z$ erit $L(a-z) = La - \frac{z}{a} - \frac{z^2}{2a^2} - \frac{z^3}{3a^3} -$ &c, & $L(a+z) - L(a-z)$, seu $L\left(\frac{a+z}{a-z}\right) = \frac{2z}{a}\left(1 + \frac{z^2}{3a^2} + \frac{z^4}{5a^4} + \frac{z^6}{7a^6} + \text{\&c.}\right)$ in qua expressione necesse est quod $z < a$ ut $\frac{a+z}{a-z}$ sit quantitas positiva; et ita series erit semper convergens.

279 Ut seriei antecedentis applicatio fiat, sit $\frac{a+z}{a-z} = \frac{m}{m-1}$, erit $\frac{z}{a} = \frac{1}{2m-1}$, & $L\left(\frac{m}{m-1}\right)$, seu (223) $Lm - L(m-1) = \frac{2}{2m-1}\left(1 + \frac{1}{3(2m-1)^2} + \frac{1}{5(2m-1)^4} + \frac{1}{7(2m-1)^6} + \text{\&c.}\right)$: ergo $Lm = L(m-1) + \frac{2}{2m-1}\left(1 + \frac{1}{3(2m-1)^2} + \frac{1}{5(2m-1)^4} + \text{\&c.}\right)$ hæc series eo erit magis convergens, quo major sit valor m, supposito quod ad inveniendum Logarithmum numeri m, opus sit prius cognoscere Logarith. hujus $m-1$.

Ad inveniendum Logarithmum hyperbolicum num. 2. faciemus $m = 2$, & erit $L2 = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} + \text{\&c.}\right) = 0,69314791$. Si facimus $m = 5$ habebimus $L5 = 2L2 + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9^2} + \frac{1}{5 \cdot 9^4} + \text{\&c.}\right) = 1,60943791$.

Hac methodo facile Logarith. omnium primorum numerum invenientur, ac media additione, ac subtractione, etiam multiplorum, ac submultiplorum (§. 223). Nam $L6 = L2 + L3$; $L9 = 2L3$; $L10 = L5 + L2$ &c.

280 Ad determinandum valorem moduli A, ad aliud systema, v. g. tabularum, in quo $a = 10$ (§. 224) quæremus (in explicito systemate) Logarith. num. 10, addendo $L2$, $L5$, erit $L10 = 2,3058509$, cumque sit in sys-

systemate tabularum (§. 224) $L10 = 1$, erit (§. 277) $1 = A\,(2{,}30258509$ &c.), seu $A = \frac{1}{2{,}30258509} = 0{,}43429448$ &c. (§. 70), & hic est valor moduli tabularum.

281 Ergo Logarithmi hyperbolici convertentur in Logar. tabularum, si illi multiplicentur per 0, 43429448.

E converso Logarithmi tabularum convertentur in hyperbolicos, si illi multiplicentur per 2, 30258509

L. hyp. de $z = L$ tabularum ex $z \times 2{,}30258509$

L. tabularum ex $z = L$ hyp. ex $z \times 0{,}43429448$

282 Probl. 2. *Dato quolibet Logarithmo invenire numerum, cui respondet.* Sol. Reducatur Logar. datus ad systema hyperbolicorum (§. 281); hoc facto sit z Logar. reductus, & $1+x$ num. cui respondet, quem quærimus, erit (§. 278) $z = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} -$ &c. & ita difficultas est invenire valorem ex x in expressionibus ex z, quod consequemur (§. 274) per medium illius formulæ generalis, vel faciendo

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{\&c.}$$

& ita erit

$$\begin{aligned} x^2 &= A^2z^2 + 2ABz^3 + B^2z^4 + \text{\&c.} \\ &\qquad\qquad\quad + 2ACz^4 \\ x^3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ A^3z^3 + 3A^2Bz^4 + \text{\&c.} \\ x^4 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ A^4z^4 + \text{\&c.} \end{aligned}$$

consequenter

$$z = \begin{cases} x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{\&c.} \\ -\frac{x^2}{2} = -\frac{A^2z^2}{2} - ABz^3 - \frac{1}{2}B^2z^4 - \text{\&c.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - ACz^4 \\ \frac{x^3}{3} = \ldots\ldots\ \frac{1}{3}A^3z^3 + A^2Bz^4 + \text{\&c.} \\ -\frac{x^4}{14} = \ldots\ldots\ldots\ldots - \frac{1}{4}A^4z^4 - \text{\&c.} \end{cases}$$

 Un-

Unde resultat (§. 264) $A = 1$, $B = \frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{6}$, $D = \frac{1}{2.3.4}$, $E = \frac{1}{2.3.4.5}$ &c.: ergo $x = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} +$ &c. Et quoniam ex hypoth. $z = L(1+x)$, erit $1 + x = 1 + L(1+x) + \frac{L^2(1+x)}{2} + \frac{L^3(1+x)}{2.3} +$ &c.; & generatim numerus quilibet $n = 1 + Ln + \frac{L^2n}{2} + \frac{L^3n}{2.3} + \frac{L^4n}{2.3.4} +$ &c.

283 Invenienda proponatur, media hac serie, basis logarithmorum hyperbolicorum, seu illum num., cujus Logarithm. hyperbolicus sit $= 1$

Tunc (§. 224) $Ln = 1$, & consequenter $n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} +$ &c. $= 2{,}71828183$.

GEO-

*G*Eometria* est *scientia quantitatum extensarum, prout terminatarum*; hoc est, linearum, superficierum, & solidorum. Unde & triplex Geometriæ objectum, triplexque hujusce tract. divisio.

PARS PRIMA.

De Lineis.

ARTICULUS PRIMUS.

De Linearum natura, earumque diversa consideratione in eodem plano.

284 DEfin. 1. *Punctum* est, quod undequaque se ipsum terminat, seu quod terminis à se distinctis caret.

285 Defin. 2. *Linea* est id, quod resultat à motu puncti ex *A* ad *B*. 1

286 Coroll. Ergo hæc puncta *A*, & *B* sunt termini lineæ secundum ejus longitudinem; secundum latitudinem autem, & profunditatem ipsa est sui terminus; vel quod idem est, *linea solùm est extensa secundum longitudinem.*

287 Definit. 3. *Distantia* est linea brevior inter o.

288 Definit. 4. *Linea recta AB* est brevior, quæ à puncto *A* ad punctum *B* duci potest.

289 Coroll. 1. Ergo linea recta est vera mensura distantiæ ab uno puncto ad aliud.

290 Coroll. 2. Ergo duo puncta tantùm determinant po-

Fig. positionem unius rectæ ; & consequenter *ab uno puncto ad aliud unica recta duci potest.*

291 Coroll. 3. Ergo duæ lineæ rectæ in unico puncto concurrere possunt ; nam si in duobus punctis concurrerent, hæc essent utrique communia, ac positionem unius rectæ determinarent (§. 291), contra stabilitum : ergo &c.

2 292 Definit. 5. *Lineæ fractæ* vocantur omnes lineæ similes lin. *ADB* ; *curvæ* autem similes lin. *ACB*.

Igitur ab uno puncto ad aliud infinitæ lineæ fractæ, & curvæ, inter se diversæ, duci possunt ; cum è converso, unica recta duci queat (§. 291).

293 Schol. Lineæ rectæ in charta describuntur, ducendo graphium, vel plumbaginem juxta regulam ad puncta data applicatam ; & in solo per baculos hinc inde, juxta directionem ejusdem radii visualis, positos, seu erectos.

294 Definit. 6. *Mensurare* est sumere quantitatem aliquam loco unitatis, ad exprimendam rationem, quam
1 cum ea habeant aliæ quælibet quantitates homogeneæ. Quantitas quæ pro unitate sumitur, dicitur *mensura.*

295 Schol. Mensura linearum est *recta* longitudinis arbitrariæ, pro unitate sumpta ; supposito v. g. quod *AB* repræsentet unitatem, decies, vigesies, quadragesies, &c. in directione rectæ *AC* locata, habebimus quod *AC* 40 unitatibus æquivalet ; sed mos est omnes decennas suo ordine numeris signare, signando in prima decenna unitates, quibus constat, ac subdividendo, si fieri potest, primam unitatem in partes minores, sicut in figura apparet ; ita ut si *AB* designat ulnam : *Ab*, *bc*, *cB*, denotabunt pedes ; *A* decem ulnas &c. Linea *AC* vocari solet *schala proportionis.*

296 Definit. 7. Si recta *AC* circum punctum *C* mobilis, facit integram circum illud punctum revolutionem, ejus extremitas *A* describet curvam *clausam*, seu *redeuntem AEBFDA*. Spatium per hanc curvam terminatum, dicitur *circulus*. Curva terminans *peripheria*, aut *circumferentia* : punctum *C centrum* circuli. Fig. 2

297 Definit. 8. Linea *CA*, & quælibet alia recta, ducta à circumferentia ad centrum *C* circuli vocatur *radius*; & linea *ACF*, hoc est radius *AC* prolongatus à centro *C* usque ad peripheriam, dicitur *diameter*.

298 Coroll. 1. Ergo æquales sunt omnes radii ejusdem circuli, cum aliud nil sunt, quam recta *AC*; (§. 297) & quoniam diameter duobus radiis (298) constat, diametri omnes æquales erunt; ac proinde *omnia peripheriæ puncta æqualiter à centro* C *distabunt.*

299 Coroll. 2. Diameter *AF* dividit circulum, & circumferentiam in duas partes æquales. Nam si semidiameter, aut radius *CA* omnem circulum, & circumferentiam *AEBFDA* (§. 297) integra sui revolutione describit, patet quod sua semirevolutione, dum in eadem secum directione ponatur, ac diametrum *AF* formet, (§. 298) proculdubio describet semicirculum *AEBFCA*, & semicircumferentiam *AEBF*; ex quo deducitur, quod *supra rectam quamlibet, prolongatam si opus fuerit, describi poterit semicirculus à puncto* C *in ea sumpto.* 3

300 Coroll. 3. Circumferentiæ duorum, aut plurium circulorum concentricorum, qui scilicet centrum in eodem puncto *C* habeant, nequeunt se intersecare, quin confundantur. Nam si radii sunt æquales, omnia puncta circumferentiarum, quas describent, æqualiter à centro *C* distabunt (§. 299), ac proinde in unam coincident. Si radii sunt inæquales, circumferentiæ, quas describent, 3

Fig. bent, in omnibus punctis distabunt à centro communi *C*, magis minusve pro majori minorive longitudine radiorum (§. 298). Ergo quæ minoribus radiis describentur, cadent omnes intra spatium circuli, qui respondet circumferentiæ, majori radio descriptæ, ac consequenter se nunquam poterunt intersecare; & hoc casu, pars circuli majoris, inter duas circumferentias comprehensa, vocatur *corona*, seu *annulus*.

301 Coroll. 4. Ergo erunt circuli excentrici, seu centri diversi quicunque in suis circumferentiis se tangunt.

302 Coroll. 5. Ergo si circulus diametro sua *DB* inflectitur, duæ semicircumferentiæ *DFB*, *DAB* in unam solam confundentur, & omnia unius puncta cum punctis alterius coincident.

303 Schol. Circulus describitur in charta, sumendo, circino, longitudinem lineæ, quæ pro radio esse
3 debet (§. 296), uno crure circini in puncto, quod circuli centrum erit, locato, & integram, altero crure, circum illud revolutionem faciendo, ita ut descriptus circulus maneat cum sua peripheria; in solo autem chorda, aut baculo ejusdem cum radio longitudinis.

304 Def. 9. Quælibet portio *DA*, *AEB*, *BF* circumferentiæ, dicitur *arcus*: spatium *CAEBC* inter arcum *AEB*, & radios *CA*, *CB*, per ejus extremitates transeuntes, contentum, dicitur *sector*.

305 Def. 10. Una recta, velut *AB*, à quolibet puncto *A* circumferentiæ ad aliud *B* ejusdem ducta, vocatur *chorda*, vel *subtensa*; & spatium *AEBA* inter ipsam, & arcum *AEB* contentum, dicitur *segmentum*.

306 Theor. 1. *Chorda quælibet* AB *minor est diametro* DB. Nam ducta *CA*, resultat $ACB > AB$ (§. 289); sed $ACB = DB$, cum sit $CA = CD$ (§. 298): ergo dia-

diameter circuli major est quam quælibet chorda alia. *Fig.*

307 Theor. 2. *In eodem, aut æqualibus circulis, arcus æquales AND, ARB subtendunt chordæ æquales AD, AB; & vice versa.* 4

Si consideremus arcuum figuram inflexam diametro *AE*, arcus *AND* confundetur cum arcu *ARB* (§.302); & cum sit commune punctum *A*, & ex hypothesi *AND* = *ARB*, punctum *D* coincidet cum puncto *B*; & ita coincident extrema chordarum *AB*, & *AD*; & cum inter duo puncta unica recta duci possit, (§. 290), patet quod *AB* = *AD*.

Si supponimus *AB* = *AD*, & eodem modo inflectimus figuram, coincident extrema arcuum *AND*, *ARB*; & omnibus punctis intermediis similiter coincidentibus (§. 302) prodiet *AND* = *ARB*.

308 Coroll. 1. Ergo in uno, aut æqualibus circulis, chordæ majores arcus subtendentes majores sunt, quam eæ quæ minores arcus subtendunt, & vice versa.

309 Schol. 1. Chorda *AB* arcus cujuslibet *AEB*, 3
erit etiam omnis residui *ADFB* circumferentiæ (§. 305); sed cum de arcu, quem chorda subtendit, sermo instituitur, communiter de arcu minore intelligitur.

310 Schol. 2. Geometræ dividunt circumferentiam cujuslibet circuli in 360 partes æquales, quas *gradus* vocant: quilibet gradus subdividitur in 60 minuta: quodlibet minutum in 60 secunda &c. Supra numerum exprimentem gradus apponitur ad dextram signum (o): supra exprimentem minuta ($'$); supra numerum secundorum ($''$) &c. Sic ad exprimendum 8 grad., 20 minut., 3 secund., 30 tert. Scribitur $8^{o}\ 20'\ 3''\ 30'''$.

311 Coroll. 2. Ergo gradus, & minuta non sunt quantitates absolutæ, & determinatæ, sicut pes, ulna, &c.; hoc

Fig. hoc est : gradus unius circumferentiæ majoris excedunt gradus alterius circumferentiæ minoris , & quidem in eadem ratione ac una circumferentia major est alia. Nam cum utriusque gradus sint $\frac{1}{360}$ pars periferiæ (311), partes similes erunt (§. 15) , & in eadem ratione cum suis totis (§. 204); idcirco si peripheria unius circuli sit æqualis b, & d peripheriæ alterius, erit $\frac{b}{360} : \frac{d}{360} :: b : d$.

ARTICULUS II.

De Angulis , & eorum mensura.

312 DEf. 1. *Angulus planus ACD* est inclinatio duarum linearum *AC*, *CD* , in eodem puncto *C* concurrentium, ita ut prolongatæ se intersecarent in eodem. Lineæ *CA*, *CD* vocantur *crura*, seu *latera*, diciturque angulum insistere in linea latera terminante : punctum *C* vocatur *vertex* anguli ; qui quidem erit *rectilineus* , *cur-*
5 *vilineus* , aut *mixtilineus* , prout lineæ generantes fuerint rectæ , curvæ , aut una recta , altera curva.

313 Schol. Dum exprimendus venit angulus , tribus litteris signatur , una in vertice , duabus autem in lateribus , quarum quæ in vertice est , semper secundo loco nominatur. Aliquando sola hac littera anguli exprimuntur.

5 314 Def. 2. *Mensura* anguli *ACD* erit arcus *LK* descriptus radio *CL* (ad arbitrium ducto) à vertice *C* inter crura *CA*, *CD*.

315 Coroll. Arcus tantummodo distingui possunt per numerum graduum , quibus constant (§. 311): ergo quantitas angulorum æstimabitur per numerum graduum, minutorum , &c. quibus constat arcus descriptus à vertice inter latera ; sic *dum dicitur quod angulus* ACD *æqua-*

æqualis est arcui KL, *intelligi debet de numero graduum illius arcus, non de longitudine absoluta.* Fig.

316 Schol. Licet à centro *C* possint describi innumeri arcus inter latera *CA*, *CD* anguli *ACD*, cum omnes constare debeant eodem numero graduum (§. 311) eo quod sint partes similes suarum circumferentiarum, inde est quod *mensura angulorum semper est fixa, & constans, angulusque idem subsistit, licet latera prolongentur, aut brevientur.*

317 Probl. *Formare angulum* ABC *æqualem alteri angulo dato* abc. 6

Sol. A puncto *B* tanquam centro describatur radio ad arbitrium ducto *Bd* arcus indefinitus *dm* (§. 303): sumpto deinde tanquam centro vertice anguli dati *abc*, eodem radio describatur arcus *tr*: sumatur in arcu indefinito *dm*, $dq = tr$; per puncta *q*, & *B* ducatur denique recta *Bq*, quæ cum *BC* formabit angulum *ABC* æqualem angulo *abc*.

Arcus *tr* mensura anguli *abc* (§. 314) est æqualis arcui *dq*, mensuræ nempe anguli *ABC* (§. 307), cum sint arcus æqualium circulorum, subtensi per chordas æquales per construct.; ergo illi anguli sunt æquales (§. 315).

318 Theor. 1. *Si duo anguli* ABC, abc *sunt æquales, & vertex* b *unius ponitur super verticem* B *alterius, ita ut latus* bc *illius cadat supra latus* BC *alterius latus* ba *primi cadet supra latus* BA *secundi.*

Nam si *ba* caderet intra, aut extra ang. *ABC*, v. g. in *Bm*, aut *Bn*, arcus *dm*, aut *dn*, mensura ang. *abc*, erit major, aut minor arcu *dq*, mensura angul. *ABC* (§. 315), ac proinde illi anguli erunt inæquales contra hypoth.; ergo &c.

Schol.

Fig. 319 Schol. Ad mensurandum numerum grad. quibus
5 constat ang. *ACD*, utimur semicirculo exacte diviso in 180° centrum hujus instrumenti ponitur in vertice *C* ang. ac dirigendo partem interiorem ejus radii in directione unius ex lateribus *CD*, punctum in quo latus aliud *CA* secat circunferentiam instrumenti, signabit numerum grad. illius ang. (§. 315).

5 320 Defi. 3. Angulus dividitur in rectum, acutum, & obtusum. *Rectus* est, qui pro mensura habet arcum 90°, aut quartam partem circunferentiæ, v. g. ang. *ACI*. *Acutus* est, qui arcum minorem: *obtusus* qui majorem 90° pro mensura habet; sic ang. *BCd* est acutus: ang. *ACD* est obtusus. Omnes anguli non recti, dicuntur generatim *obliqui*.

321 Coroll. *Ergo omnes anguli recti sunt æquales inter se.*

322 Defi. 4. Vocatur *complementum* anguli, aut arcus, differentia quæ resultat subtrahendo è ang., aut arcu 90°, ang. aut arcum propositum.

323 Coroll. *Ergo complementum unius ang. acuti erit positivum; obtusi autem negativum.* Sic complementum ang., aut arcus 57°, 31′ est ang. aut arcus = 32°, 29′. Complementum ang., aut arcus 118°, 12′, 20″ est ang. aut arcus = − 28°, 12′, 20″.

324 Defi. 5. *Supplementum* arcus, aut anguli vocatur, id quod addi debet ad habendum arcum, aut angulum 180°. Angulus, qui alterius supplementum est, vocatur *deinceps*, aut *ad continuationem positus.*

325 Coroll. 1. Ergo ang. acutus habebit pro deinceps, aut supplemento angulum obtusum: obtusus acutum: rectus alium rectum.

326 Coroll. 2. Ergo ang., vel arcus æquales habebunt æqua-

æqualia supplementa ; & viceversa , æquales erunt arcus, Fig.
aut anguli , quorum supplementa sunt æqualia , aut complementa.

328 Theor. 2. *Si una recta* CD *super aliam rectam AB cadit , cum hac formabit in puncto* C *duos angulos* 5
ACD , DCB *æquales duobus rectis , seu* 180°. Super rectam *AB* è puncto *C* tanquam centro describatur semicircumferentia *KLH* (§. 303), erit *KL* + *LH* mensura duorum angul. *ACD*, *DCB* (§. 315) ; sed *KL* + *LH* = 180° (§. 310) : ergo , &c.

329 Coroll. 1. Quoniam quilibet numerus ang. *ACI*, *ICD* , *dCB* super rectam *AB* in eodem puncto *C* formatorum , habent semper pro mensura summam arcuum *KI* + *IL* + *Ld* + *dH* , quæ nempe est tota semicircumferentia (§. 299) , patet (§. 310) quod omnes habebunt pro mensura arcum 180°, duobus rectis æquivalentem (§. 320).

330 Coroll. 2. Ergo omnes ang. circum punctum *C* formati æquales sunt 360°. Nam si consideretur descriptus circulus *e* illo puncto , erit omnium mensura tota peripheria *KLHGK* (§. 314), hoc est 360° (§. 310).

331 Theor. 3. *Si è vertice* C *anguli* ACD, *prolongantur crura* AC , DC , *anguli* ACD , FCB , *qui* 5
verticales , *seu* ad verticem oppositi *dicuntur* , *erunt æquales*.

Anguli *ACD* , *FCB* habent pro supplemento communi ang. *LCB* : ergo sunt æquales (§. 326).

Fig.

ARTICULUS III.

De Lineis perpendicularibus, & obliquis.

332 DEfin. 1. Illæ vocantur lineæ *perpendiculares*,
7 quæ formant ang. rectos in puncto occursus. Sic *AB* est perpendicularis ad *DF*, & vice versa. Quæ autem in puncto occursus formant angulos obliquos, dicuntur *obliquæ*.

333 Theor. 1. *Si super perpendicularem* DF, *duo puncta* D, *&* F *æque distantia à puncto intersectionis* C *sumantur*, *quodlibet lineæ* AB *punctum æque distabit à puncto* D, *quam à puncto* F.

Cum radio $CD = CF$ describatur è centro *C* circumferentia *DEFBD*, arcus *DE* erit 90° (§. 332), ac proinde æqualis arcui *EF* (§. 325): ergo chordæ *DE*, & *EF* erunt etiam æquales (§. 307): ergo punctum *E* æque distat à puncto *D*, quam à puncto *F* (§. 289); cumque ex hypoth. sit $CD = CF$, linea *AB* habet duo puncta *E*, *C*, quorum quodlibet æque distat à puncto *D*, quam à puncto *F*: ergo eadem proprietas in reliquis punctis verificabitur, cum duo tantum puncta positionem rectæ determinent (§. 290).

334 Theor. 2. *Lin.* AB *in duas partes æquales* CD, CF *dividit rectam* DF, *eritque eidem perpendicularis, si duo ejus puncta* A, E *æque distent à duobus punctis* D, *&* F *rectæ* DF.

Cum ex hypoth. duo puncta lin. *AB* æque distent à puncto *D*, quam à puncto F, reliqua puncta eamdem habebunt proprietatem (§. 333): ergo $CD = CF$.

Eadem ratione erit $ED = EF$: ergo arcus *ED*, *EF* erunt etiam æquales (§. 307), ac proinde quilibet 90°

(§.

(§. 310): ergo recta AB est perpendicularis ad rectam DF (§. 332). Fig.

335 Coroll. 1. Ergo si recta AB perpendicularis est ad rectam DF, & illius punctum A ex utroque latere æque distet ab hujus punctis D, & F, reliqua puncta lin. AB eandem habebunt proprietatem; alioquin recta AB, contra hypoth., non esset perpendicularis ad rectam DF (§. 333). 7

336 Coroll. 2. Ergo è puncto E extra lineam DF, demitti nequit nisi unica perpendicularis ad illam lineam.

Sit EC perpendicularis; & quoniam punctum E ex utroque latere æque distare debet è duobus punctis rectæ DF (§. 335), si hæc sint D, F, erit $FC = CD$ (§. 334): ergo $FD = 2CD$; supponendo quod EQ sit etiam perpendicularis, erit ob eandem rationem $FQ = QD$, ac proinde $FD = 2\,QD$; unde resultat (§.9) $2QD = 2CD$, seu $QD = CD$, hoc est, pars toti æqualis; cumque hoc sit absurdum (§. 8), sequitur &c.

337 Coroll. 3. Ergo unicum punctum E sufficit ad determinandam positionem perpendicularis EC ad rectam DF.

338 Theor. 3. *Perpendicularis* CD *brevior est qualibet obliquarum* DE, DA, *quæ è puncto* D *descendere possunt ad rectam AB.*

Prolongetur CD usque ad F, ita ut sit $CF = CD$; ducantur deinde obliquæ EF, AF, erit $EF = ED$, $DA = AF$ (§. 335); & habebimus $DCF < DEF < DAF$ (§. 288): ergo etiam DC, dimidium DCF, $< DE$ dimidium DEF, & $< DA$ dimidium DAF (14).

339 Coroll. 1. Ergo distantia puncti à linea est perpendicularis, si demittatur ab illo ad hanc (287).

 Coroll.

Fig. 340 Coroll. 2. Ergo obliquæ demissæ à puncto D ad lineam AB, eo longiores erunt, quo magis recedant à perpendiculari DC. Nam recedendo à breviori via, majorem circuitum efficient, ac necessariò longiores erunt.

341 Probl. 1. *Lineam datam* DC *in duas partes æquales dividere.*

8 Sol. Sumendo tanquam centrum C, & D, describantur eodem radio DG (§. 303) duo arcus circuli sese secantes in punctis G, & H: ducta per eos recta GFH, erit $DF = FC$. Nam cum sit $HG = HD$, & $DG = CG$ (§. 298), lin. HFG duo habet puncta æque distantia à puncto D, quam à puncto C: ergo $FD = FC$ (§. 334).

342 Probl. 2. *A puncto* G *extra lineam* AB *demittere perpendicularem* GF *ad dictam lin.*

Sol. Sumpto pro centro G describatur arcus DC, secans lin. AB in punctis C, D: dividatur CD in duas partes æquales in puncto F (§. 341), & ducendo per puncta G & F rectam GF, habebitur perpendicularis quæsita. Cum enim duo ejus puncta G, & F æque distent, per construct., à puncto C, quam à puncto D (§. 298), FG erit perpendicularis ad AB (§. 334).

343 Probl. 3. *Erigere perpendicularem* FG *ad rectam* AB *è puncto* F *in ea sumpto.*

Sol. Posito crure uno circini in F, fiat $FD = FC$: duobus punctis C, & D pro centro sumptis, ducantur eodem radio CG duo arcus se intersecantes in G; recta GF ducta per puncta G, & F erit perpendicularis ad AB in puncto F (§. 334).

344 Theor. 4. *A puncto* F *sumpto in linea* AB *erigi nequit plusquam unica perpendicularis* FG *ad illam lineam.*

Cum sit FG perpendicularis ad AB, erit rectus ang.

AFG

AFG (§. 332); si supponimus quod etiam *FQ* sit perpendicularis ad *AB*, erit etiam rectus ang. *AFQ* : ergo *AFG* = *AFQ* (§. 321); sed hoc est absurdum, nam tunc casus latus *QF* ang. *AFQ* caderet supra latus *FG* anguli *AFG* (§. 318): ergo, &c. *Fig.* 8

345 Schol. Si punctum *F*, è quo erigenda est perpendicularis, fuerit in extremitate lineæ *AB*, hæc prolongabitur, si fieri potest, & procedetur juxta modo dicta.

ARTICULUS IV.

De Lineis perpendicularibus, in circulo consideratis.

346 THeor. I. *Si radius* CM *perpendicularis est ad chordam* FG, *dividit in duas partes æquales*, 1° *chordam* FG : 2° *arcum* FMG *ista chorda subtensum* : 3° *ang.* FCG ; & *vice versa.* 9

Cum, ex hypoth., *CM* sit perpendicularis ad *FG*, & ejus punctum *C* æque distet à *F*, & à *G* (§. 298), erit (§. 335) *FD* = *DG* : erit etiam (§. 335) *MG* = *MF* : ergo arcus *MLG* æqualis est arcui *MIF* (§. 307); unde infertur quod ang. *FCM* æqualis est ang. *MCG* (§. 315).

Sit *DG* = *DF*, habebimus (298) & ex hypoth., in radio *CM* duo puncta *C*, *D*, æquè distantia à puncto *F*, quam à puncto *G* : ergo est perpendicularis ad *FG* (§. 334), & ideo erit etiam juxta demonst., *FIM* = *MLG*, & ang. *FCM* æqualis ang. *MCG*.

Sit denique arcus *FIM* = *MLG*, erit *MG* = *MF* (§. 307); & cum sit etiam *CF* = *CG* (§. 298), habebimus (§. 334) quod *CM* erit perpendicularis ad chordam *FD*, & *DG* = *DF*.

 Theor.

Fig. 347 Theor. 2. *Si recta* DM *secet in duas partes æquales chordam* FG, *& ad ipsam fuerit perpendicularis, illa recta transiet per centrum* C, *& dividet arcum* FMG *in duas partes æquales.*

9 Ex hypoth. punctum *D* perpendicularis *DM* æque distat à puncto *F* quam à puncto *G*: ergo in omnibus punctis verificabitur eadem proprietas (§. 335), ac consequenter $CF = CG$: ergo punctum *C* est in centro circuli (§. 298).

Juxta demonst. recta *DM*, quæ est perpendicularis ad chordam *FG*, eamque dividit in duas partes æquales, transit per centrum *C* circuli: ergo *CM* est radius perpendicularis ad illam chordam, ac proinde arcum *FMG* dividit in duas partes æquales (§. 346).

348 Probl. 1. *Arcum datum* DMC *in duas partes æquales dividere.* Sol. Ducatur chorda *DC*: dividatur in duas partes æquales in puncto *F* (§. 341), & in eo erigatur perpendicularis *FG* (§. 343); hæc, si prolongetur, secabit arcum *DMC* in duas partes æquales
8 in puncto *M* (§. 347).

349 Coroll. Ergo ad dividendum ang. *DGC* in duas partes æquales, describetur è vertice *G* inter ejus latera, quolibet radio *GD*, arcus *DMC*: hic dividetur in duas partes æquales in puncto *M* (§. 348), & ducendo lin. *MG*, manebit divisus ang. *DGC* in duas partes æquales *DGM*, *MGC* (§. 315).

350 Schol. Si eodem modo dividitur ang. *DGM* in duas partes æquales, habebimus quartam partem ang. *DGC*: eadem methodo habebitur ejus octava pars, decima sexta, &c.; & ita hac via dividere poterimus quemlibet angulum, aut arcum juxta progressionem ∸ 2. 4. 8. 16. 32. &c.

Probl.

351 Probl. 2. *Circulum efficere, cujus circumferentia transeat per tria puncta data* A, B, D, *quæ quidem in eadem recta non sint.* Sol. Ducantur lin. rectæ *AB*, *AD*: dividantur in duas partes æquales (§. 341) in *F*, & *G*, in quibus erigentur perpendiculares *GI*, *FL* (§. 343), ac punctum intersectionis *C* erit centrum cir- 10
culi quæsiti. *CF* est perpendicularis ad *AB*, eam in duas partes æquales, per const., dividens: ergo $CA = CB$ (§. 335): ob eadem rationem erit etiam $CB = CD$: ergo $CA = CB = CD$; proindeque punctum *C* est cen- 10
trum circuli, cujus circumferentia per tria puncta data *A*, *D*, *B* transit (§. 298).

352 Coroll. 1. *Igitur tria tantùm puncta, modo non sint in lin. recta, determinant positionem circuli. Unde & circumferentiæ duorum circulorum in duobus tantum punctis se intersecare possunt.* Si enim in tribus se intersecarent, idem centrum haberent, & in una circumferentia confunderentur; sicque *semicircumferentiæ in uno solo puncto se intersecabunt.*

353 Coroll. 2. Ergo ad inveniendum centrum cujuslibet circumferentiæ, seu circuli, cujus habebit arcus, sumantur tria quælibet puncta in illa circumferentia, seu arcu, eaque uniendo per duas chordas, fiet sicut dictum manet (§. 351).

ARTICULUS V.

De Tangentibus.

354 DEfinit. *Tangens* unius circuli vocatur recta 9
TM, in unico puncto *M* tangens circumferentiam, ita ut si prolongetur, tota extra illum cadet. Punctum *M* vocatur *punctum contactus.*

Fig. 355 Theor. 1. *Radius ductus ad punctum contactus* M, *est perpendicularis ad tangentem* TM, *& vice versa.*

9 Cum *TM*, tangens in puncto *M* sit, tantùm habebit punctum illud commune cum peripheria circuli, reliquaque extra erunt (§. 354); unde si quælibet alia recta *CK* ducatur, cum sit $CM = CO$ (§. 299), semper erit $CM < CO + OK$ (§. 12): ergo *CM* est mensura distantiæ à centro *C* ad tangentem *TM*, proindeque & ad ipsam perpendicularis (§. 339).

Sit *TM* perpendicularis ad extremitatem *M* radii *CM*, quælibet alia obliqua *CK*, quæ ducatur à centro *C* ad tangentem *TM*, major erit radio *CM* (§. 338), ac consequenter ejus punctum extremum *K* extra peripheriam circuli cadet (§. 299). Idem dicendum de cæteris punctis tangentis *TM*, à puncto *M* distinctis : ergo *TM* est tangens circuli in puncto *M*.

356 Coroll. Ergo radius ductus ad tangentem perpendiculariter, determinat punctum contactus.

357 Probl. *Ducere rectam* TM *quæ tangat circulum in puncto dato* M.

Sol. Ducatur ad punctum contactus *M* radius *CM*: erigatur in hoc puncto *TM* perpendicularis ad radium *CM* (§. 345); & hæc erit tangens quæsita (§. 355).

358 Theor. 2. *Si duo, aut plures circuli se tangunt in eodem puncto, seu interius, seu exterius, linea eorum centra uniens transiet per punctum contactus.*

Sit *TM* tangens in puncto contactus *M* circulorum: erit etiam perpendicularis ad radios *CM*, & *AM* (§. 355) in eodem puncto *M*; sed ab uno puncto *M* non potest erigi ad rectam *TM* nisi unica perpendicularis (§. 344):
11 ergo radii *CM*, & *AM* efformant unicam lineam rectam, centra circulorum unientem, & per punctum contac-

tactus *M* transeuntem ; eritque semper $CA = CM$ Fig.
$\pm AM$.

ARTICULUS VI.

De Lineis parallelis.

359 DEfinit. 1. Duæ lin. *AB*, *CD*, dicuntur parallelæ, dum in omnibus suis punctis æquè una ab alia distat. 12

360 Coroll. 1. Ergo perpendiculares *EG*, *FH* ductæ è punctis *E*, *F* unius parallelæ *AB* ad aliam *CD*, sunt æquales (§. 339), & vice versa, si perpendiculares *EG*, *FH* fuerint æquales, lin. *AB*, *CD* erunt parallelæ (§. 359), cum duo puncta sola determinent positionem unius rectæ (§. 290).

361 Coroll. 2. Ergo lineæ parallelæ nequeunt se tangere, seu erunt *inconcurrentes*, tametsi in infinitum prolongentur.

362 Def. 2. Duæ lin. *AB*, *CD* quæ non sunt parallelæ, dicuntur *convergentes* versus illam partem, in qua formant cum secante *GH* duos angulos *AGH*, *CHG* 13 minores duobus rectis ; & *divergentes* versus illam partem, in qua anguli *BGH*, *DHG* majores sunt duobus rectis.

363 Theor. 1. *Si linea quælibet* QN *secat parallelas* AB, DC, *anguli* AFG, FGD *qui dicuntur* alterni interni *æquales sunt.* 12

E verticibus dictorum angulorum *F*, & *G* describantur eodem radio *GF* (§. 303) duo arcus indefiniti circuli *FLM*, *GKI*, & prolongentur perpendiculares *GE*, *FH* usque dum occurrant illis arcubus in punctis *I* & *M*: habebimus $EG = FH$ (§. 360); sed $EI = EG$, &

MH

Fig. $MH = HF$ (§. 346): ergo $EG + EI = FH + HM$ (§. 10); hoc est, $GI = MF$: ergo arcus FLM, GKI, eodem radio GF descripti, subtenduntur per æquales
12 chordas GI, FM: ergo sunt æquales (§. 307); & cum sit (§. 346) $GK = KI$, & $FL = LM$, erit etiam $FLM - ML = GKI - KI$ (§. 10), hoc est $FL = GK$; ergo mensura ang. AFG æqualis est mensuræ ang. FGD (§. 314): ergo sunt æquales (§. 315).

364 Coroll. 1. Supposito quod AB est parallela ad CD infertur 1°, quod etiam æquales sunt anguli alterni interni GFB, CGF, cum sint supplementum alternorum, & æqualium AFG, FGD (§§. 324. 326).

365 2° Angulos NFB, NGD, quos vocant *correspondentes*, & *oppositos*, *internum*, & *externum*, esse similiter æquales. Nam cum sit $NFB = AFG$ (§. 331), & $AFG = NGD$ (§. 364), erit (§. 9) $NFB = NGD$; & idem demonstrabitur de reliquis angulis correspondentibus.

366 3° Quod anguli qui vocantur *alterni externi*
13 CGQ, NFB similiter sunt æquales, cum sit (§. 331) $CGQ = NGD$; sed $NGD = NFB$ juxta demonst.: ergo $CGQ = NFB$ (§. 9). Eadem via probabitur quod angulus alternus externus $QGD = NFA$.

367 4.° Quod anguli oppositi interni BFG, DGF æquales sunt duobus rectis; hoc est $BFG + DGF = 180°$. Nam cum sit, ex demonst., $DGF = NFB$, erit etiam (§. 10) $DGF + BFG = BFG + NFB$; sed $BFG + NFB = 180°$ (§. 328): ergo $BFG + DGF = 180°$ (§. 9).

368 Coroll. 2. Vidimus (§. 363) quod proprietas sit indefectibilis parallelarum efformare cum recta eas secante æquales angulos alternos internos: ergo reciprocè, si una lin. QN secat lin. AB, CD, ita ut anguli

al-

alterni interni *AFG*, *FGD* sint æquales, illæ lineæ *AB*, *Fig.*
CD erunt parallelæ.

369 Coroll. 3. Etiam ex dictis (§§. ant.) constat 12
quod si sint æquales anguli alterni interni, æquales itidem necessariò erunt anguli correspondentes, & alterni externi: nec non & oppositos internos esse æquales duobus rectis: ergo reciprocè si lin. *QN* secat lin. *AB*, *CD*, ut quælibet ex his proprietatibus verificetur, æquales anguli alterni interni resultabunt, ac consequenter lin. *AB*, *CD* erunt parallelæ (§. 368).

370 Probl. 1. *Per punctum datum* G *ducere parallelam* GD *ad lin.* AB. Sol. Per punctum *G* ducatur linea indefinita *GN*, secans lineam *AB* in quolibet puncto *F*: Formetur in *G* ang. *FGH*, æqualis ang. *EFG* (§. 318), & habebitur *GD* parallela ad *AB* (§. 368).

371 Probl. 2. *Erigere perpendicularem* AF *ad extremitatem* A *rectæ* AB, *quæ prolongari nequit.* Sol. In 14
quolibet puncto *C* erigatur perpendicularis *CD* (§. 343): ducatur postmodum per punctum *A* parallela *AF* ad perpendicularem *CD* (§. 370); erit ang. *FAB* = *DCB* (§. 365); sed *DCB* est angulus rectus per construct. (§. 332): ergo ang. *FAB* est etiam rectus (§. 9), & consequenter *FA* perpendicularis ad *AB* (§. 332).

372 Coroll. 1. Ergo si duæ rectæ sunt perpendiculares ad eandem lin. *AB*, sunt inter se parallelæ.

373 Coroll. 2. Ergo si recta *AB* est perpendicularis ad unam è duabus parallelis *CD*, erit similiter ad aliam *AF*; & viceversa, è duabus parallelis *CD*, *AF*, si una *CD* est perpendicularis ad *AB*, erit etiam alia *AF*, cum in utroque casu resultare debeat *FAB* = *DCB* (§. 365).

374 Coroll. 3. Anguli *ABC*, *NRM*, quæ latera habent *AB*, *NR*, & *BC*, *RM* parallela, sunt æquales.

Nam

Fig. Nam si prolongetur latus *NR* usque dum occurrat lateri
15 *BC* in puncto *D*, erit (365) *NRM* = *NDC* = *ABC*.

9 375 Theor. 2. *In circulo arcus* FI , GL *inter parallelas* FG, IL *comprehensi* , *sunt æquales*. Radius *CM* ductus perpendiculariter super lin. *FG* (342), erit etiam perpendicularis ad lin. *IL* (§. 373) ; & ita habebimus (§. 346) arcum *GLM* = *MIF*, & arcum *ML* = *MI*: ergo arcus *GLM* — *LM* = *MIF* — *MI* (10) ; hoc est arcus *GL* = *FI*.

16 376 Schol. Eædem proprietates, quæ de duabus parallelis demonstratæ manent, verificantur etiamsi major earum numerus sit. Nam si supponatur quod *HI* est parallela ad *EF*, & quod *LM* est parallela ad *HI*, ducendo rectam *AC*, erit ex 1.ª hypoth. $c = m$ (§. 363), & ex secunda $m = n$ (§. 365): ergo $c = n$ (9) ; ac consequenter *LM* erit parallela ad *EF* (368), *& ita duæ rectæ, quæ ad tertiam parallelæ sunt, erunt etiam parallelæ interse & iisdem ac cæteræ proprietatibus gaudebunt.*

ARTICULUS VII.

De mensura angulorum in circulo.

17 377 THeor. 1. *Ang.* BAD *formatus per tangentem* BA, *& chordam* AD, *vocatur* angulus segmenti , *& habet pro mensura medietatem arcus* , *quem subtendit chorda* AD.

Ducatur per centrum *C* diameter *HCG* , parallela ad chordam *AD* (§. 370) : ducatur etiam radius *CF* perpendicularis ad eandem (§. 342) , & radius *CA* ad punctum contactus *A*. Ang. *BAC* erit rectus (§. 355): similiter ang. *FCG* (§. 373) : ergo (§. 322) ang. *FCG*

=

$= BAC =$ arcui FAG (§. 315); sed (§. 363) ACG Fig.
$= DAC =$ arcui AG (§. 315): ergo ang. BAC — ang. $DAC =$ arcui FAG — arcu AG (§. 10); hoc 17
est *ang.* $BAD =$ arcui $FA =$ arcui $\frac{AFD}{2}$, cum sit $AF = FD$ (§. 346).

378 Theor. 2. Ang. DAE, *comprehensus inter duas chordas* DA, AE, *vocatur* angulus inscriptus, *seu* angulus in peripheria, *& habet pro mensura medietatem arcus* DE, *super quem insistunt ejus crura.*

Per verticem A ducatur tangens BA (§. 357); erit (§. 377) ang. $BAE =$ arcui $\frac{ADE}{2}$. Ob eandem rationem erit ang. $BAD =$ arcui $\frac{AFD}{2}$: ergo ang. BAE — ang. $BAD =$ arcui $\frac{ADE}{2}$ — arcu $\frac{AFD}{2}$; hoc est, ang. DAE habet pro mensura arcum $\frac{DE}{2}$.

379 Coroll. 1. Ang. DCE, qui vocatur *centralis*, seu *angulus in centro*, habet pro mensura omnem arcum DE (§. 315); ergo est duplum anguli in peripheria DAE, qui super eundem arcum DE insistit.

380 Coroll. 2. Ergo omnes anguli in peripheria, in- 18
sistentes super eundem arcum, aut super arcus æquales ejusdem, aut æqualium circulorum, erunt æquales; & vice versa.

381 Coroll. 3. Anguli in peripheria DAC, DBC, 19
quorum crura insistant extremitatibus D, C diametri, qui quidem vocantur anguli *in semicirculo*, habent pro mensura dimidium semiperipheriæ (§. 378); ergo erunt recti (§. 321).

382 Coroll. 4. Ergo anguli in peripheria DFE, quorum

Fig. rum crura insistant in eodem arcu *EDABC*, qui major sit semicircumferentia, erunt obtusi; acuti autem, si insistant super arcum minorem, v. g. ang. *CFA* (§. 320).

383 Probl. *Per punctum datum* A *extra circulum*
20 *ducere duas tangentes ad ejus circumferentiam.*

Sol. E puncto dato *A* ducatur ad centrum *C* circuli recta *AC*: dividatur hæc in duas partes æquales in puncto *B* (§. 341): è *B* tanquam centro describatur radio *CB* circumferentia per puncta *M*, *R*, in quibus hæc secat peripheriam circuli propositi, & per punctum datum *A* ducantur rectæ *AM*, *AR*, quæ quidem erunt tangentes quæsitæ.

Nam ducendo radios *CM*, *CR*, anguli *CMA*, *CRA* sunt recti (§. 381): ergo lineæ *AM*, *AR* sunt perpendiculares ad radios *CM*, *CR* (§. 332), ac consequenter tangentes circuli in punctis *M*, *R* (§. 355).

384 Theor. 3. *Ang.* BAD, *cujus vertex est intra*
21 *circulum, ac extra centrum, vocatur* excentricus, *& habet pro mensura semisummam arcuum, super quos insistunt ipsi, ejusque verticalis.*

Prolongentur crura *CA*, *BA* anguli dati, ad formandum ejus verticalem: per punctum G, in quo crus *BA* prolongatum peripheriæ occurrit, ducatur *GR* parallela ad *TC* (§. 370); erit (§. 365) ang. $BAC =$ ang. BGR $=$ arcui $\frac{BC}{2} + \frac{CR}{2}$ (§. 378); sed arcus $CR = TG$ (375): ergo ang. $BAC =$ arcui $\frac{BC}{2} + \frac{TG}{2}$.

385 Theor. 4. *Ang.* BAD, *cujus vertex est extra cir-*
22 *culum, & crura* BA, DA, *quæ vocantur* secantes *circuli, terminant in parte ejus concava, dicitur* angulus circumscriptus, *aut* extra peripheriam, *& habet pro men-*

mensura semidifferentiam inter arcum concavum BD *super quem insistit, & convexum* CI *inter ejus crura contentum.* Fig.

Ducatur CE parallela ad AD (§. 370) erit (§. 365) ang. $BAD = BCE =$ (378) arcui $\frac{BE}{2} = \frac{BE}{2} + \frac{ED}{2} - \frac{ED}{2}$; sed arcus $ED = CI$ (§. 375): ergo ang. $BAD =$ arcui $\frac{BE}{2} + \frac{ED}{2} - \frac{CI}{2}$; hoc est, ang. $BAD =$ arcui $\frac{BD}{2}$ — arcu $\frac{CI}{2}$.

386 Coroll. Ergo si AB separatur, usque dum coincidat cum AF, ang. FAD formatus per tangentem FA, & secantem AD, erit $=$ arcui $\frac{FD}{2}$ — arcu $\frac{FCI}{2}$.

Ob eandem rationem, ang. FAM formatus per duas tangentes FA, MA erit $=$ arcui $\frac{FEM}{2}$ — arcu $\frac{FCIM}{2} = \frac{FEM - FCIM}{2}$.

387 Theor. 5. *Ang.* AMB *formatus per chordam* AM, 23
& prolongationem MB *alterius extra circulum, habet pro mensura semisummam arcuum, duabus chordis subtensorum.* Per verticem M anguli propositi ducatur tangens CMD (§. 357); erit ang. $BMC = DME$ (331): ergo ang. $AMB = AMC + EMD =$ arcui $\frac{ARM + MSE}{2}$ (§. 377).

ARTICULUS VIII.

De Figuris planis.

388 DEfinit. 1.ª Vocatur *figura* spatium undique terminatum una, aut pluribus lineis, quarum summa dicitur *perimetrum* figuræ; linea autem quælibet *latus* figuræ, aut perimetri.

De-

Fig. 389 Defin. 2. Figuræ vocantur *rectilineæ*, si perimetrum constat solùm lineis rectis : *curvilineæ*, si curvis : *mixtilineæ*, si utrisque.

390 Defin. 3. Fig. *ACB* dicitur *inscripta in circulo*,
24 si peripheria transit per vertices omnium angulorum; tuncque dicitur quod circulus est *circumscriptus figuræ*.

391 Defin. 4. Fig. *ABD* dicitur *circumscripta* ad circulum, si quodlibet ejus laterum est tangens circuli (§. 354), & tunc casus circulus dicitur *inscriptus* in figura.

ARTICULUS IX.

De Triangulis.

392 DEfin. 1. *Triangulum* est spatium terminatum per perimetrum trium linearum ; ad eum designandum utimur signo (Δ).

393 Defin. 2. Si triangulum habet omnia latera æqualia, vocatur *æquilaterum* ; si duo habet æqualia, dicitur *isosceles*, seu *equicrurum* : si omnia habeat inæqualia, vocatur *scalenum*.

394 Defin. 3. Triangulum habens unum è suis angulis rectum, vocatur *rectangulum* : latus illi angulo oppositum *hypothenusa* : quæ autem angulum rectum comprehendunt, *catheti*.

395 Defin. 4. Triang. habens unum è suis angulis obtusum, dicitur *obtusangulum*, *acutangulum* autem, si habeat omnes acutos.

396 Defin. 5. Latus trianguli, cuilibet angulo oppositum, dicitur *basis* illius anguli ; perpendicularis verò è illo angulo ad basim prolongatam ducta (si opus est), dicitur *altitudo* trianguli.

Co-

397 Coroll. 1. Cum triangulum tribus tantum la- *Fig.*
teribus constet (§. 392), illorum duo lineam fractam necessariò efformabunt (292) : ergo eorum summa tertio latere major erit (288).

398 Coroll. 2. Per tria quælibet puncta, quæ non sint in linea recta, duci potest circumferentia unius circuli (351) : ergo omne triangulum est inscriptibile in circulo (390).

399 Theor. 1. *Summa trium angulorum unius trian-* 24
guli est semper æqualis duobus rectis, seu 180°.

Considerando triangulum ABC inscriptum in circulo, habebimus quod ang. $ABC =$ arcui $\frac{AC}{2}$ (378), & ang. $ACB =$ arcui $\frac{BA}{2}$, & ang. $BAC =$ arcui $\frac{BC}{2}$: ergo ang. $ABC + ACB + BAC =$ arcui $\frac{AC}{2} + \frac{BA}{2} + \frac{BC}{2} = 180°$ (§. 310).

400 Coroll. 1. Ergo angulus externus FAB, resultans ex prolongatione lateris cujuslibet AC trianguli, æqualis est summæ duorum angulorum internorum oppositorum ABC, ACB.

Nam semper erit (328) ang. $FAB + BAC = 180°$ $=$ ang. $ABC + ACB + BAC$ (399), ac proinde ang. $FAB =$ ang. $ABC + ACB$, subtrahendo utrinque angulum communem BAC.

401 Coroll. 2. Ergo quilibet angulus unius trianguli 24
est supplementum summæ duorum aliorum (324), & ita cognitis duobus angulis triang., vel eorum summa, hanc è 180 subtrahendo, tertius invenietur.

402 Coroll. 3. Ergo in triangulo obtusangulo non nisi unicus angulus potest esse obtusus ; reliqui autem duo necessariò acuti, cum sint residuum è illa subtractione proveniens.

403 Coroll. 4. Eadem ratione in triangulo rectan-

k gu-

Fig. gulo unicus ang. rectus esse potest: duo alii acuti, & unus complementum alterius (322).

404 Theor. 2. *In quolibet triangulo* ABC, *latera opposita ad angulos æquales sunt æqualia*; & *vice versa.*

Considerato triangulo inscripto in circulo, habebimus quod si $B = C$, erit arcus $CA =$ arcui AB (380): ergo erunt etiam æquales chordæ AC, AB eos subtendentes (307). Similiter si supponimus æqualia latera AC, AB, erunt etiam æquales arcus subtensi (307); sed horum arcuum medietates sunt mensura angulorum B, & C (378) ad latera AC, AB oppositorum: ergo illi anguli sunt æquales (380).

24 405 Coroll. 1. Ergo in quolibet triangulo BAC, majori lateri opponitur major angulus; & vice versa. Nam majus latus proculdubio majorem arcum sustinebit (307), cujus medietas erit mensura anguli oppositi (378), ac consequenter erit ille angulus reliquis major.

26 406 Coroll. 2. Triangulum æquicrurum habet duo latera æqualia (393): ergo anguli ad illa latera oppositi erunt æquales, & vice versa (404); consequenter cognito uno angulo, alii duo illico cognoscentur. Nam ponendo quod sit $AB = BC$, erit $A = C$; & si detur cognitus quilibet horum angulorum, erit (401) $B = 180° - 2A$; & si detur cognitus ang. B, erit $A = C = 90° - \frac{B}{2}$.

407 Coroll. 3. Ergo in triangulo isoscele omnes anguli oppositi ad latera æqualia sunt acuti; cum enim æquales esse debeant (404), nequeunt esse obtusi, aut recti; alioquin summa trium angul. excederet valorem duorum rectorum.

408 Coroll. 4. Cum in triangulo æquilatero æqualia

sint tria latera (393), omnes anguli erunt etiam æqua- Fig.
les (404): ergo cujuslibet valor erit $\frac{180°}{3} = 60°$ (§. 399).

409 Theor. 3. *In triangulo isoscele* ABC *perpendicularis* BF *ducta è vertice* B *super basim* AC, *æque distat in quolibet puncto suæ extensionis à puncto* A *quam à puncto* C, *ac consequenter dividit basim* AC *in duas partes æquales in puncto* F: *dividit ang.* ABC *in duos equales* ABF, FBC, *& vice versa.* 26

Cum sit *ABC* triang. isoscele, est *AB* = *BC* (393): ergo *BF* in puncto *B* æque distat à puncto *A*, & *C*; ac consequenter habebit eandem proprietatem in reliquis punctis (335), cum sit ex hypoth. perpendicularis ad *AC*: ergo *AF* = *FC*.

Si è vertice *B* tanquam centro describitur arcus radio *BA*, transiet hic per punctum *C* (298), cum sit *BA* = *BC* (393), & erit ejus chorda basis *AC* trianguli: ergo radius *BF* perpendicularis ex hypoth. ad illam basim, dividet ang. *ABC* in duas partes æquales, & habebit reliquas proprietates designatas (§§. 346. 347).

ARTICULUS X.

De Æqualitate & similitudine triangulorum.

410 DEfinit. 1. Triangula, quæ habent omnes suos angulos respectivè æquales, dicuntur *similia*. Sic si $A = a$, $B = b$, $C = c$, duo triang. *ABC*, *abc*, sunt similia; cumque duo triangula, quæ in se invicem confunduntur habere debeant æquales omnes suos 27
angulos (§. 318), & similia sint necesse est.

411 Definit. 2. Si duo triangula sunt similia, latera opposita ad angulos æquales, vocantur *homologa*. Et generatim dicuntur *dimensiones homologæ* duarum figu-

Fig. rarum *lineæ correspondentes*, seu eodem modo in una quam in alia sitæ. Sic in duobus circulis v. g. sunt dimensiones homologæ radii, diametri, circumferentiæ &c.

412 Coroll. 1. Similia sunt duo triangula, quæ habent duos angulos respectivè æquales; nam eo ipso æqualem etiam tertium angulum habebunt (§. 401).

413 Coroll. 2. Ergo duo triangula rectangula erunt similia, si unum ex suis angulis acutis habeant æqualem (§. 403).

414 Coroll. 3. Duo triangula, quæ habent omnia sua latera homologa parallela, habebunt omnes suos angulos respectivos æquales (§. 374); ac proinde erunt similia.

27 415 Coroll. 4. Si cuncta latera unius trianguli sunt perpendicularia ad cuncta latera homologa alterius, illa triangula erunt similia. Nam supponendo quod latera *ab*, *ac*, *cb* trianguli *abc* sunt parallela ad latera homologa *AB*, *AC*, *CB* triang. *ABC*, illa triangula erunt similia (§. 414), & permanebunt similia in qualibet alia positione (§. 410); semper enim tres anguli unius permanebunt æquales tribus angulis alterius. Considerando itaque quod *abc* vertitur circum punctum *c*, ita ut describat punctis *a*, & *b* quadrantem circuli, seu 90°, patet quod singulum laterum *ca*, *ab*, *bc*, fiet perpendiculare ad se ipsum (§§. 320. 332), ac consequenter erunt etiam perpendicularia ad latera correspondentia *CA*, *AB*, *BC* (§. 373): ergo &c.

28 416 Theor. 1. *Si numerus quilibet parallelarum* DF, IL, AB *secant latera anguli* ACB, *omnia triangula* DCF, ICL, ACB *erunt similia.*

Omnia triangula resultantia eundem habent angulum communem *C*, ac ratione parallelarum *DF*, *IL*, *AB*,

erit etiam ang. $CDF = CIL = CAB$, & ang. $CFD =$ Fig.
$CLI = CBA$ (§. 365): ergo illa triangula erunt similia (§. 410).

417 Theor. 2. *Duo triangula* ACB, acb *quæ habent omnia sua latera homologa æqualia, æqualia sunt, & similia; & vice versa.* 28

Sit $ab = AB$, $ac = AC$, $cb = CB$: è punctis A, & 29
B tanquam centris describantur radiis AC, BC arcus mn, or: consideretur triang. abc positum super triang. ABC, ita ut punctum a cadat super A, & latus ab super AB; punctum b cadet super B, cum sit $ab = AB$; & cum itidem sit $ac = AC$, & $bc = BC$, lin. ac habet extremum c in aliquo puncto arcus mn: & lin. bc habebit extremum c in aliquo puncto arcus or; sed punctum c est commune ambabus lineis ac, bc; ergo ac in arcu mn, & bc in arcu or habent punctum commune c; cumque illi arcus nequeant habere super unam lineam nisi unum punctum commune C, intersectionis videlicet (§. 352), infertur quod punctum c cadet super punctum C: ergo triangulum abc confundetur cum triangulo ABC, eritque ei simile, & æquale (§. 410). Ponamus quod ob similitudinem triangulorum sit $c = C$, & $a = A$ (§. 410): superponendo triangulum abc triangulo ABC, ita ut c cadat super C, & ca super CA, cadet cb super CB (§. 318): concipiamus etiam $ca = Cl$, & $cb = CL$, erit $ba = LI$ (§. 290), & $\triangle abc = \triangle CLI$, pars nempe $\triangle ACB$ contra hypoth.: Patet ergo quod nequit $\triangle abc$ esse æquale, & simile $\triangle ABC$, nisi sit $ca = CA$, $cb = CB$, ac consequenter $ab = AB$ (§. 290): *ergo triangula æqualia, & similia habent latera homologa æqualia.*

418 Theor. 3. *Duo triangula erunt æqualia, & si-* 28

 mi-

Fig. *milia, si duo latera unius sint æqualia duobus lateribus*
29 *alterius, angulusque inter ipsos comprehensus sit etiam æqualis.*

Sit $a = A$, $ab = AB$, $ac = AC$; si consideretur triang. *abc* positum super *ABC*, ita ut vertex *a* cadat super *A*, & *ab* super *AB*, *ac* cadet super *AC* (§. 318), & cum sit $ab = AB$, $ac = AC$, punctum *b* cadet super punctum *B*, & *c* super *C*: ergo *cb* confundetur cum *CB* (§. 290), & totum triang. *acb* cum toto triang. *ACB*: ergo &c. (§. 410).

419 Theor. 4. *Duo triangula erunt æqualia, & similia, si unum latus, & anguli adjacentes in uno, sit æquale alteri lateri, & angulis adjacentibus in alio.*

Sit $ab = AB$, $a = A$, $b = B$; superponendo latus *ab* lateri *AB* cum sit $a = A$, & $b = B$, latus *ac* cadet super *AC*, & *bc* super *BC* (§. 318); consequenter *ac* occurret *bc* in eodem puncto *C*, in quo *AC* occurret *BC* (§. 291): ergo triangula confundentur, & erunt æqualia, & similia (§. 410).

ARTICULUS XI.

De Quadrilateris.

420 DEfinit. 1. Vocatur *quadrilaterum* figura, cujus perimetrum constat quatuor lineis rectis.

421 Definit. 2. Quadrilaterum *ABCD* non habens
30 ullum latus parallelum alteri, dicitur *trapezoides*: *trapezion* autem quadrilaterum *ABCL*, duo tantum latera
31 *AB*, *LC* habens parallela.

422 Definit. 3. Vocatur parallelogramum quadrilaterum habens latera opposita parallela; ac nominari solet

let duabus litteris earum, quæ in verticibus angulorum *Fig.*
oppositorum sunt.

423 Definit. 4. Parallelogrammum *ABCD*, habens rectos, ac proinde æquales (§. 321) omnes suos angulos, & latera æqualia, dicitur *quadratum*: dum æqualia sunt latera, & inæquales anguli, v. g. *ACBD*, dicitur *Rhombus*. 32 33

424 Definit. 5. Parallelogrammum *ABCD* habens rectos, ac proinde æquales (§. 321) omnes suos angulos, & latera opposita æqualia dicitur *rectangulum*, seu *oblongum*: dum anguli sunt inæquales, & latera opposita æqualia, v. g. *ABDC*, dicitur *Rhomboides*. 34

425 Definit. 6. Latus inferius *AB* vocari solet *basis* quadrilateri; & perpendicularis *CL* ducta ad basim, 35
vel ad ejus prolongationem è latere opposito, *altitudo* quadrilateri.

426 Theor. 1. *Summa omnium angulorum quadrilateri est æqualis quatuor angulis rectis, seu* 360°.

Ducendo diagonalem *AC*, manebit divisum quadrilaterum in duo triangula, quæ eodem cum quadrilate- 31
ro angulorum numero constent; sed anguli trianguli sunt æquales duobus rectis, seu 180° (§. 399): ergo anguli duorum triangulorum, seu summa omnium angulorum quadrilateri erit æqualis quatuor angulis rectis, seu 360°.

427 Theor. 2. *Si in quadrilatero* CB *fuerint æqualia, & parallela latera opposita* AB, CD, *erunt etiam æqualia, & parallela duo alia* CA, BD.

Ducendo diagonalem *AD*, erit $t = m$ (363), cum- 35
que ex hypoth. sit $AB = CD$, triangula *ABD*, *ADC* habebunt *AB* æquale lateri *DC*, & latus commune *AD*, & angulum inter illa latera comprehensum æqualem:

Fig. ergo erunt æqualia (§. 418), ac consequenter $CA = DB$. Etiam erit $n = s$: ergo CA est parallela ad DB (§. 368).

35 428 Coroll. 1. Ergo rectæ unientes æquales, & parallelas debent esse æquales, & parallelæ.

429 Coroll. 2. Ergo diagonalis AD dividit parallelogrammum $ABDC$ in duo triangula æqualia.

430 Coroll. 3. Parallelæ inter parallelas oportet quod semper efforment parallelogrammum (§. 422); ergo parallelæ inter parallelas erunt semper æquales.

431 Theor. 3. *In omni parallelogrammo* ABDC *anguli ex diametro oppositi sunt æquales : item æqualia sunt latera opposita ; sed anguli adjacentes ad unum latus sunt æquales duobus rectis.*

Ducantur diagonales AD, CB, erit (§. 363) $t = m$, $s = n$; ergo $t + s = m + n$, hoc est $A = D$: etiam erit $x = o$, $z = r$; ergo $x + z = o + r$, hoc est $C = B$. Ex hypoth. $ABDC$ est parallelogrammum : ergo ejus latera opposita sunt parallela (§. 422) ; sed parallelæ inter parallelas sunt æquales (§. ant.) : ergo &c.

Anguli oppositi interni inter parallelas contenti, sunt æquales duobus rectis (§. 367) : ergo &c.

432 Coroll. Ergo in uno parallelogrammo si unus angulus est rectus, omnes erunt recti. Cum enim anguli adjacentes ad unum latus sint æquales duobus rectis (§. ant.), si unus est rectus, erit etiam alius (§. 325) & ad latus contiguum transeundo idem verificabitur.

36 433 Probl. *Formare parallelogrammum habens unum angulum æqualem angulo dato* a, *inter duas lineas datas* ad, ab *comprehensum.*

Solut. Sumatur $AB = ab$, & in puncto A formetur an-

angulus *BAD* æqualis dato *a* (§. 317), fiat *AD*=*ad*, *Fig.*
& per punctum *D* ducatur *DC* parallela ad *AB* (§. 370); ducendo denique per punctum *B* lin. *CB* parallelam ad *AD*, patet quod conclusum manebit parallelogrammum (§. 422) quæsitum.

ARTICULUS XII.

De Polygonis.

434 DEfinit. 1. Vocatur *Polygonum* quælibet figura, cujus perimetrum plusquam quatuor lateribus constat. Si constet 5 lateribus, vocatur *pentagonum*: si 6 *exagonum*: si 7 *eptagonum*: si 10 *decagonum*: si 12 *duodecagonum*: si 15 *pentedecagonum*, &c.

435 Definit. 2. Vocatur *Polygonum regulare* quod habet omnes angulos inter se æquales, nec non & latera; cætera *irregularia* dicuntur.

436 Definit. 3. Anguli v. g. *A*, *B*, *C*, &c, quorum 37
vertex cadit extra figuram, dicuntur *anguli prominentes* polygoni; illi autem, quorum vertex cadit intra figu- 38
ram, vocantur *introcedentes*, v. g. *CDE*.

437 Definit. 4. Rectæ *SP*, *SQ* perpendiculariter ductæ à centro *S* Polygoni super latera, vocantur *radii recti*, *seu apothemata*, & rectæ *SD*, *SC* ductæ è 37
S ad angulos Polygoni, *radii obliqui*.

438 Theor. 1. *Summa omnium angulorum interiorum* ABC, BCD, CDE &c. *cujuslibet Polygoni*, *non habentis angulos introcedentes*, *tot* 180° *valet quot habet latera*, *demptis duobus.* 39

Ducendo è quolibet angulo *A* Polygoni diagonales *AC*, *AD*, prodit polygonum divisum in tot triangula, quod

Fig. quod habet latera, demptis duobus; patet quod summa omnium angulorum istorum triangulorum æqualis est summæ angulorum internorum Polygoni: ergo illa summa erit æqualis (399) 180°, si toties scilicet summatur, quod latera habet Polygonum, demptis duobus. Hæc proprietas, denotando S summam angulorum Polygoni, n numerum laterum, exprimetur hac formula $S = 180^\circ\,(n-2)$.

38 * Schol. *Si Polygonum habeat angulos introcedentes, idem calculus deserviet; intelligatur tamen, quod ad hoc computanda sunt tanquam latera Polygoni, ea quæ formant angulum, vel angulos introcedentes.*

Nam si è puncto O sumpto intra Polygonum ducantur lineæ ad omnes angulos introcedentes, & prominentes, proculdubiò resultabunt tot triangula ODE, ODC, OCB &c., quot latera habeat perimetrum Polygoni, & eorum anguli toties valebunt 180°, quot latera habeat perimetrum figuræ (§. 399); sed cum anguli circum verticem O omnium triang. non pertineant ad Polygonum, subtrahi debet è producto (§. 330) $360^\circ = 180^\circ \times 2$: *ergo summa omnium angulorum Polygoni est* $=180^\circ \times$ *per numerum laterum, demptis duobus.*

439 Coroll. I. Cum sint æquales inter se omnes anguli interni unius Polygoni regularis (§. 435), patet quod si omnium summa dividatur per numerum angulorum, quibus constat Polygonum, vel quod idem est, per numerum ejus laterum, quotiens exprimet valorem unius ex angulis; proinde si sit $S = 180^\circ.\ (n-2)$ (§. ant.), erit expressio generalis unius anguli Polygoni regularis $\frac{S}{n} = 180^\circ \frac{(n-2)}{n} = 180^\circ\left(1 - \frac{2}{n}\right)$. Sic quilibet angulus trianguli æquilateri erit $=60^\circ$; quadrati $=90^\circ$; pentagoni regularis $=108^\circ$; exagoni regularis $=120^\circ$ &c.

Co-

440 Coroll. 2. Ergo omnes anguli unius Polygoni re- *Fig.*
gularis sunt eo obstusiores, quo major est numerus ejusdem laterum.

441 Theor. 2. *Summa omnium supplementorum* ABF,
BCG, CDH, &c. *angulorum internorum unius Polygo-* 39
ni, non habentis angulos introcedentes, æqualis est 360°.

Quodlibet supplementum singillatim est $= 180°$, excepto angulo polygoni (§. 324): ergo summa omnium erit $= 180° \times n$ — summa omnium angulorum interiorum Polygoni; hoc est $= 180° \times n - 180° (n-2) = 180° (n-n+2) = 360°$.

** Theor. 3. *Si Polygonum habeat angulos introceden-* 38
tes, summa omnium supplementorum angulorum prominentium, additis omnibus angulis introcedentibus, erit $= 360° + 180°$, *toties sumpta, quot anguli intrantes sint in Polygono.*

Summa omnium supplementorum angulorum prominentium Polygoni *ABCEFG* est $= 360°$; si fiat angulus introcedens *CDE*, summa supplementorum augetur angulis *ECD*, *CED*, hoc est $180° - CDE$, ang. scilicet introcedente (§. 399).

Si fiat alius angulus introcedens *FHG*, jam erit summa supplementorum angulorum prominentium $= 360° + 180° \times 2 - CDE - FHG$: ergo $360° + 180° \times 2 - CDE - FHG + CDE + FHG = 360° + 180° \times 2$; hoc est *summa omnium supplementorum omnium angulorum prominentium + summa omnium introcedentium est* $= 360° + 180° \times$ *per numerum angulorum introcedentium Polygoni.*

442 Theor. 4. *Omne Polygonum regulare est inscriptibile in circulo, & circumscriptibile ad ipsum.*

Dividantur in duas partes æquales (§. 349) an- 40
gu-

Fig. guli A, B, D &c. Polygoni per rectas AC, BC, DC &c. & cum sit $A = B = D$ (§. 435) erunt etiam medietates $m = x = z = r$ &c. (§. 204): ergo triangula ABC, BCD, DCE &c. erunt isoscelia (§. 406), & consequenter $AC = BC = DC$, &c., & peripheria circuli descripti è puncto C cum radio CB transiet per omnes vertices angulorum Polygoni (§. 298): ergo omne Polygonum regulare est inscriptibile in circulo (§. 390).

Ex demonst. triangula ABC, BCD, DCE &c. sunt Isoscelia; consequenter ducendo radios rectos CR, CL, CG &c. erit (§. 409) $BR = BL = DG$ &c; est præterea $x = z$; ergo triangulum rectang. RCB æquale est, & simile triangulo CBL (§. 413), ac consequenter $CR = CL$; eadem via probabitur quod $CL = CG = CK$ &c: ergo peripheria circuli descripti radio CR è centro C trans-
40 iet per puncta R, L, G, K &c. (§. 298), in quibus radii CR, CL, CG, &c. sunt perpendiculares ad latera Polygoni (§. 437), & dividit in duas partes æquales (§. 409): ergo illa latera erunt tangentes circuli (§. 355) ad quem consequenter erit circumscriptum Polygonum (§. 391).

443 Coroll. 1. Ergo radii obliqui dividunt in duas partes æquales angulos unius Polygoni regularis: æquales sunt inter se: determinant centrum C Polygoni, ac dividunt in tot triangula isoscelia æqualia, & similia, quot habet latera.

444 Coroll. 2. Etiam sunt æquales inter se omnes radii recti Polygoni regularis: dividunt latera in duas partes æquales: determinant puncta in quibus tangentes sunt latera Polygoni regularis ABD, EFH, ad circulum circumscripti.

445 Coroll. 3. Si consideretur Polygonum regulare in-

inscriptum in circulo, ejus latera omnem circumferentiam circuli subtendent: ergo dividendo 360° per numerum laterum Polygoni, habebimus valorem arcus, qui subtendere debet singulum latus (§. 310); sic expressio generalis unius lateris Polygoni regularis in circulo inscripti, est chorda arcus $\frac{360^\circ}{n}$, denotante n numerum laterum Polygoni. Fig.

446 Coroll. 4. Ergo ad inscribendum Polygonum regulare, dato numero laterum, in circulo dato *ABDEFHA*, quæratur (§. ant.) valor arcus, qui subtendere debet singulum polygoni latus, & ducta chorda arcui respondente per omnem circumferentiam circuli, in eo inscriptum relinquet Polygonum regulare, quæsito latero numero constans. Nam summa omnium arcuum erit $= 360^\circ$.

447 Coroll. 5. Cum sit $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, angulus *ACB* oppositus chordæ *AB* erit $= 60^\circ$ (§. 315); cumque ulterius sit isoscele triang. *ABC* (§.443), erit (§.406) 40
$m = x = 90^\circ - \frac{60^\circ}{2} = 60^\circ$: ergo $AB = AC = BC$ (§. 408); hoc est, *latus exagoni regularis semper est æquale radio circuli, in quo inscribi debet.*

448 Probl. *Circumscribere circulo dato* abdefga *Polygonum regulare, cognito numero laterum.*

Sol. Inscribatur in circulo dato polygonum regulare, 41
æqualis numeri laterum cum circumscribendo (§. 446): è centro *C* demittatur super singulum latus, sicut super *AB*, radius rectus *CM* (§. 342), per cujus extremitatem *M* ducetur tangens *AMB* (§. 357) quæ quidem in *A* & *B* secabit radios obliquos *ca*, *cb*, prolongatos; erit *AB* unum ex lateribus polygoni quæsiti, & idem cum reliquis lateribus *BD*, *DE*, &c. faciendo, habebitur polygonum quæsitum *ABDEFG*. *AM*, & *am*, sunt per cons-

Fig. construct. perpendiculares ad CM: ergo & sunt inter se parallelæ (§. 372), & △ ABC erit simile △ abC (§. 416); idem probabitur de reliquis triangulis; cum enim omnia triangula polygoni interioris sint isoscelia,
41 & inter se similia (§. 443), patet quod etiam erunt isoscelia, & similia omnia triangula ABC, BDC &c. polygoni exterioris; ideoque erit $AC = BC = CD$ (§.406): ergo triangula ABC, BCD, DCE, &c. sunt isoscelia, æqualia, & similia (§. 418). Unde infertur 1° quod $AB = BD = DE$ &c. (§. 417): ergo polygonum est æquilaterum. 2° quod angulus $CAB = CBA = CBN = CDN = CDE$ &c. (§.406); ac consequenter ang. $CBA + CBN = CDN + CDE$ &c.: ergo polygonum est æquiangulum.

3.° Quod cum sint CM, CN perpendiculares per construct. ad AB, BD &c. ac juxta demonstratum $AB = BD = DE$ &c., erit etiam (§. 409) $AM = BM = \frac{AB}{2} = BN$ &c.: ergo latera polygoni sunt tangentes in punctis, in quibus à radiis rectis dividuntur in duas partes æquales, ac consequenter polygonum est ipsum quod quæritur (§. 442).

ARTICULUS XIII.

De Lineis proportionalibus.

42 449 QUando lin. A est ad B, sicut C ad D, lineæ A, B, C, D sunt proportionales inter se, quibus proinde aptantur quæcunque de proportionibus in genere dicta manent.

450 Theor. 1. *Si super lin.* AH, *quæ format cum lin.* AO *angulum* HAO, *sumatur* AB = BC = CD *&c.*

&

& è punctis B, C, D *&c. ducantur versus* AO *parallelæ* Fig.
BI, CK, DL *&c.*, *lineæ* AI, IK, KL *&c. erunt etiam* 43
æquales inter se.

Per puncta *B*, *C*, *D*, ducantur lin. *BQ*, *CR*, *DS* &c. parallelæ ad *AO* (§. 370); erit (§. 365) angul. $IAB = QBC = RCD$; etiam erit ratione parallelarum *BI*, *CK* &c. ang. $ABI = BCQ = CDR$ &c. ac consequenter $\triangle\ ABI = \triangle\ BCQ = \triangle\ CDR$ &c. (§. 419), cum sit ex hypoth. $AB = BC = CD$ &c.: ergo $AI = BQ = CR = DS$ &c.; sed $BQ = IK$, $CR = KL$ &c. (§. 430): ergo (9) $AI = IK = KL$ &c.

451 Coroll. 1. Ergo si *AB* est v. g. dimidium *AI*, *BC*, quæ ex hypothesi est $= AB$ erit etiam dimidium *AI* (§. 15); sed $AI = IK$: ergo *BC* erit etiam dimidium *IK* &c; sic erit $AB : AI :: BC : IK :: CD : KL :: DE : LM$, & consequenter (§. 209) *AG* summa omnium antecedentium erit ad *AO* summam consequentium, sicut unum antecedens *AB* ad suum consequens *AI*, seu sicut *AD* summa cujuslibet numeri antecedentium ad *AL* summam æqualis numeri consequentium &c.

452 Coroll. 2. Ergo semper ac inter latera *AC*, *BC* unius anguli *ACB* inveniantur duæ, pluresve parallelæ
DE, *AB*, segmenta *AD*, *EB*, & *CD*, *CE* laterum, 44
sunt proportionalia ad eadem latera *AC*, *BC*; hoc est $CA : CB :: CD : CE :: DA : EB$.

453 Theor 2. *Triangula similia* ABC, abc *habent omnia sua latera homologa proportionalia* ; *& vice versa, similia erunt triangula, si habent omnia sua latera homologa proportionalia.*

Sit $c = C$: ergo si triangulum *abc* superponitur triangul. *ABC*, ita ut *cb* cadat super *CB*, *ca* cadet super *CA* (318); sumendo itaque in lin. *CB* partem *CE* æqualem

Fig. lem lateri homologo cb, ac ducendo ED parallelam ad
44 AB (370), erit (§. 365) ang. $CED = B = b$ (§.9), & $\triangle CED = \triangle ced$ (§. 419); sed $CA : CB :: CD : CE$ (§. 452): ergo $CA : CB :: ca : cb$; similiter probabitur quod $CA : AB :: ca : ab$, & quod $AB : BC :: ab : bc$.

Super latus CB trianguli CBA sumatur pars $CE = cb$, & ducta ED parallela ad BA (§. 370), $\triangle CDE$ erit simile $\triangle CAB$ (§. 416), & juxta demonst. $CB : CE :: CA : CD :: BA : DE$; sed ex hypoth. $CB : cb :: CA : ca :: BA : ba$, ac per construct. $CE = cb$: ergo $CD = ca$, & $DE = ab$; ac consequenter $\triangle CDE$ est æquale, & simile $\triangle abc$ (§. 417); sed $\triangle CDE$ est simile $\triangle ABC$: ergo erunt etiam similia triangula ABC, & abc.

454 Theor. 3. *Triangula* ABC, abc *quæ habent unum angulum æqualem inter duo latera proportionalia, sunt similia.*

Sit $c = C$, & ponamus quod $cb : ca :: CB : CA$; sumatur $CE = cb$, & ducatur lin. ED parallela ad BA : habebimus (§. 452) $CE : CD :: CB : CA$: ergo $cb : ca :: CE : CD$; sed $cb = CE$ per construct.: ergo $ca = CD$, ac consequenter $\triangle cba$ est æquale, & simile $\triangle CDE$ (§. 418), cumque hoc sit simile $\triangle ABC$ (416), infertur quod etiam sunt similia triangula ABC, & abc.

455 Theor. 4. *Lin.* DA *dividens in duas partes æqua-*
45 *les angulum quemlibet* A *trianguli* ABC, *dividit etiam latus oppositum* BC *in duo segmenta* BD, DC, *proportionalia lateribus adjacentibus* BA, CA; *ita ut* BD : DC :: BA : AC.

Ducendo per punctum B parallelè ad DA rectam BF usque dum occurrat lateri CA prolongato, erit $m = F$ (§. 365), & $n = x$ (§. 363); sed ex hypoth. $m = n$:
er-

ergo $F = x$ (§. 9), & $FA = BA$ (§. 404); etiam erit (§. 452) $BD : DC :: FA : CA$: ergo si loco FA substituatur BA ei æquale, erit denique $BD : DC :: BA : AC$. Fig.

456 Theor. 5. *Lineæ* AD, BC *sese secantes inter parallelas, habent sua segmenta proportionalia.* 35

In triangulis ABO, CDO æquales sunt anguli in O (§. 331), ac ratione parallelarum CD, AB, erit (§. 363) $z = r$, $t = m$: ergo illa triangula sunt similia (§. 410), ac consequenter $AO : DO :: BO : CO$ (§. 453). 45

457 Theor. 6. *Si è vertice anguli recti* A *unius trianguli rectanguli* ABC *ducatur lin.* AD *perpendicularis ad hypothenusam* BC, 1.° *triangula resultantia erunt similia inter se, & totali.* 2.° *Perpendicularis* AD *est media proportionalis inter segmenta* BD, DC *hypothenusæ.* 3.° *Quilibet cathetus* AB, *vel* AC *est medium proportionale inter hypothenusam, & segmentum adjacens* BD, *vel* DC.

Triangulum rectangulum BAD habet unum angulum acutum B communem cum triangulo totali ABC: ergo sunt similia (§. 413); triangulum rectangulum ADC habet unum angulum acutum C communem cum totali ABC: ergo sunt similia (§. 413): ergo triangula ABD ADC sunt similia totali ABC, ac proinde & inter se.

Cum sint ergo similia triangula ABD, ADC, habebimus (§. 453) $BD : AD :: AD : DC$, seu $\overline{AD}^2 = BD \times DC$. Etiam erit ob similitudinem triangulorum BAD, BAC, (§. 453) $BD : BA :: BA : BC$. Ob eandem rationem triangula DAC, BAC dant $CD : CA :: CA : BC$.

458 Coroll. Cum sit $BD : BA :: BA : BC$, & $CD : CA :: CA : BC$, erit $\overline{BA}^2 = BD \times BC$, & $\overline{CA}^2 = CD \times BC$ (§. 206): ergo $\overline{BA}^2 + \overline{CA}^2 = BD \times BC + CD \times BC = (BD + CD) \times BC = \overline{BC}^2$; hoc est, *quadratum hypothenusæ æquale est summæ quadratorum cathetorum.*

Fig.

ARTICULUS XIV.

De Lineis proportionalibus in circulo consideratis.

459 THeor. 1. *Perpendicularis* MP *demissa è quoli-*
46 *bet puncto* M *è peripheria circuli sumpto ad suam diametrum* AB, *est media proportionalis inter segmenta* AP, PB; & *chordæ* AM, *vel* BM *sunt mediæ proportionales inter omnem diametrum* BA, & *segmentum adjacens* AP, *vel* PB.

Chordæ *MB*, *MA* ductæ è puncto *M* per extremitates diametri *AB*, faciunt triangulum *AMB* rectangulum in *M* (§. 381) : ergo $AP : PM :: PM : PB$, vel $\overline{PM}^2 = AP \times PB$ (§. 457).

Item constat, ob eandem rationem, quod $\overline{AM}^2 = AP \times AB$ & quod $\overline{MB}^2 = PB \times AB$: ergo &c.

460 Theor. 2. *Segmenta duarum chordarum* AC, BD, *quæ se secant in circulo, sunt reciprocè proportio-*
18 *nalia; hoc est, erit* $AF : BF :: FD : FC$, *vel* $AF \times FC = BF \times FD$.

Si ducantur chordæ *AB*, *DC*, triangula *AFB*, & *DFC* habent angulos in *F* æquales pro verticalibus (§. 331), & angulum $ABF = FDC$ (§. 380) : ergo sunt similia (§. 412), ac consequenter (§. 453) $AF : BF :: FD : FC$.

461 Theor. 3. *Secantes* AB, AC *ductæ è puncto* A *extra circumferentiam circuli sumpto, in cujus parte con-*
47 *cava terminant, sunt reciprocè proportionales ad sua segmenta externa* AD, AE; *hoc est* AB : AC :: AE : AD.

Ducendo chordas *BE*, *DC*, triangula *ABE*, *ADC* habent angulum *A* communem, & $B = C$ (§. 380) : ergo sunt similia (§. 412), ac consequenter (§. 453) *AB*:

$AB : AC :: AE : AD$, seu $AB \times AD = AC \times AE$. Fig.

462 Theor. 4. *Si è eodem puncto* A, *extra circulum sumpto, ad illud ducuntur tangens* AM, *& secans* AB, 47
tangens AM *erit media proportionalis inter omnem secantem* AB, *& ejus partem* AD *exteriorem circulo.*

Ducendo chordas DM, BM, triangula AMB, AMD habent unum angulum A communem, & angulum $AMD = B$, cum sit dimidium arcus DM, qui est utriusque mensura (§§. 377. 378): ergo sunt similia (§. 412), & ideo (§. 453) $AB : AM :: AM : AD$.

463 Probl. 1. *Datis tribus lineis* a, b, c, *invenire* 48
quartam proportionalem.

Sol. Ducantur rectæ AM, AS, efformantes angulum quemlibet MAS: super AM sumetur $AB = a$, & $AD = b$; sumatur etiam in AS pars $AC = c$: ducatur linea BC, & per punctum D lin. DE parallela ad BC (§. 370); dico quod AE erit quarta proportionalis quæsita.

Triangula ABC, ADE sunt similia (§. 416): ergo (§. 453) $AB\,(a) : AD\,(b) :: AC\,(c) : AE$.

464 Coroll. Ergo ad inveniendam tertiam proportionalem duabus rectis datis a, & b, uti poterimus eadem methodo, sumendo scilicet $AB = a$, $AD = b$, & $AC = b$, & faciendo juxta modo dicta, resultabit $AB\,(a) : AD\,(b) :: AC\,(b) : AE$ (§. 453).

465 Probl. 2. *Invenire mediam proportionalem inter* 49
duas rectas datas a, *&* b.

Sol. super unam rectam indefinitam AQ sumatur $AP = a$, $PB = b$; ac dividendo lineam AB in duas partes æquales in C (§. 341), describatur radio $CA = \frac{CB}{2}$ semiperipheria AMB (§. 303); quo facto è puncto di-

Fig. visionis P erigatur perpendicularis PM (§. 343), quæ quidem erit media proportionalis quæsita, cum sit (§. 459) $\overline{PM}^2 = AP \times PB$.

466 Coroll. Cum sit in omni casu $AP : PM :: PM :$
49 PB, & $AP + PB = AB$, infertur quod data (sagitta) AP, & dimidio chordæ PM, invenietur diameter AB, quærendo (§. 464) sagittæ AP, & medietati MP chordæ tertiam proportionalem PB, quæ unita sagittæ AP dabit diametrum $AB = AP + PB$.

50 467 Probl. 3. *Dividere unam lineam datam in partes habentes inter se rationes datas.*

Sol. Dividenda sit linea AR in duas partes, quæ habeant inter se rationem 5 ad 3 v.g.; in hoc casu ducendo per punctum A lineam indefinitam AM, quæ formet cum AR angulum quemlibet MAR, sumentur super AM octo partes æquales AB, BC &c. magnitudinis arbitrariæ. Per extremitatem F ultimæ, & per punctum R lineæ AR ducetur lin. RF, & postmodum per punctum D, extremitatem nempe tertiæ divisionis, ducetur lin. DL parallela ad FR (§. 370), & ita habebitur lin. RA divisa in puncto L in duas partes RL, LA, quæ erunt inter se ut 5 ad 3; quoniam ratione parallelarum, LD, RF, erit (§. 452) $RL : LA :: FD : DA$; sed $FD : DA ::$ $5 : 3$ per construct.: ergo $RL : LA :: 5 : 3$.

468 Schol. 1. Si lin. AR dividenda foret in majorem numerum partium proportionalium, v. g. in quatuor partes, quæ essent inter se sicut numeri 1, 3, 7, 9, additis his numeris, summa foret $= 1 + 3 + 7 + 9 = 20$; sumeremus itaque super AM è puncto A 20 partes æquales, ac per ultimæ extremitatem F, & per punctum R lin. AR, duceretur recta FR; denique ducendo per extremitates primæ, tertiæ, & septimæ divisionis lineæ

neæ *AM* parallelas ad *FR*, maneret per eas divisa lin. *AR*, sicut desideratur (452). Fig.

469 Schol. 2. Si rationes lineis exhiberentur, locarentur omnes per ordinem, ac continuatè in lin. *AM*, ac procedetur de cætero sicut dictum manet.

470 Coroll. Ergo si lin. *AR* dividenda foret in quemlibet numerum partium æqualium, v.g. in 8, sumi deberent super *AM* octo quælibet partes æquales: ducenda per extremitatem *F* octavæ divisionis, & per punctum *R* recta *FR*; ac ducendo denique è omnibus punctis divisionis lin. *AM* parallelas ad *FR* (§. 370), manebit linea *AR* divisa in octo partes æquales (§§. 450. 452).

471 Probl. 4. *Dividere rectam datam* AB *in mediam, & extremam rationem in* F; *hoc est, taliter ut segmentum majus* BF *sit medium proportionale inter omnem* 51
lin. AB, *& ejus segmentum minus* AF.

Solut. In extremitate *A* lineæ *AB* erigatur perpendicularis $AC = \frac{AB}{2}$ (371), & facto centro in *C*, radio *CA* describatur circulus (303): per puncta *B*, & *C* ducatur lin. *BCD*, & è puncto *B*, radio *BL* describatur arcus *LF*, qui secabit *AB* in puncto *F*, ita ut fiat quod quæritur, nempe $BA : BF :: BF : AF$, seu $\overline{BF}^2 = BA \times AF$.

Juxta construct. resultat quod *BA* est tangens circuli descripti radio *CA* (355); ideo habebimus (462) $BD : BA :: BA : BL$: ergo (208) $BD - BA : BA :: BA - BL : BL$; sed $BD - BA = BL = BF$, cum sit $BA = 2AC$ per const., & $2AC = DL$ (298): & similiter $BA - BL = BA - BF = AF$, cum sit (298) $BL = BF$: ergo substituendo $BF : BA :: AF : BF$; seu $\overline{FB}^2 = BA \times AF$.

Fig.

ARTICULUS XV.

De Figuris similibus.

472 DEfinit. Duæ figuræ, quæ habent eundem numerum laterum: angulos angulis respectivè æquales, & latera lateribus homologis proportionalia, dicuntur *similes.*

473 Coroll. Ergo sunt similia inter se omnia polygona regularia ejusdem ordinis, seu ejusdem numeri laterum (435); consequenter sunt similes inter se omnes circuli, qui considerari valent tanquam polygona regularia infinitorum laterum, quæ ob eorum exiguitatem, cum circumferentiis confunduntur.

52 474 Theor. I. *Duæ figuræ* ABCDE, abcde, *quæ constant eodem numero triangulorum similium, ac eodem modo sitorum, sunt similes.*

Cum similia sint ex hypoth. triangula AED, ABC, ADC triangulis aed, abc, adc, habemus (410) $B=b$, $E=e$, $EDA=eda$, $ADC=adc$, $ACD=acd$, $BCA=bca$ &c. ergo ang. $EDA+ADC=eda+adc$, $ACD+BCA=acd+bca$ &c. (10); hoc est, ang. $EDC=edc$, $DCB=dcb$, $BAE=bae$: ergo duæ figuræ sunt inter se æquiangulæ.

Etiam habemus (453) $AB:ab::BC:bc::AC:ac$; sed $AC:ac::CD:cd::AD:ad$; & $AD:ad::DE:de::EA:ea$; ergo $AB:ab::BC:bc::CD:cd::DE:de::EA:ea$; ergo Polygona proposita sunt æquiangula inter se, & habent omnia sua latera homologa proportionalia, ac proinde sunt similia (472).

475 Theor. 2. *Diagonales* AC, AD, ac, & ad *ductæ è angulis homologis* A, *&* a *duarum figurarum simi-*

milium sunt proportionales inter se, & lateribus homologis ED, ed &c., *& triangula homologa, seu eodem modo locata, quæ formant illæ diagonales in singulis figuris, sunt similia inter se.* Fig

Ratione similitudinis figurarum erit (472) $E = e$, $B = b$, $AE : ae :: ED : ed$, $AB : ab :: BC : bc$: ergo triangula AED, ABC sunt similia triangulis aed, abc, singulum singulo (459); consequenter (410) ang. 52
$EDA = eda$, $BCA = bca$; etiam erit (453) $ED : ed :: DA : da$, & $BC : bc :: CA : ca$; sed $ED : ed :: BC : bc$ (472): ergo $ED : ed :: DA : da :: CA : ca$; hoc est, *Diagonales sunt proportionales inter se, & lateribus homologis Polygonorum.*

Ex modo demonstratis $AD : ad :: AC : ac :: CD : cd$; ergo triang. ADC est simile triang. adc (453); cumque etiam sint similia, sicut demonstratum manet, triangula AED, ABF triangulis aed, abc, infertur quod similia sunt inter se triangula homologa formata per diagonales homologas; unde oritur quod *figuræ similes habent universim proportionales omnes suas dimensiones homologas.*

476 Coroll. 1. Ergo si duæ figuræ $ABCDE$, $abcde$ sunt similes, earum perimetra erunt inter se in eadem ratione cum suis lateribus homologis: cum summis cujuslibet numeri laterum homologorum, seu in eadem ratione cum suis diagonalibus, seu quibuslibet aliis dimensionibus homologis.

Cum semper sit (§. 472) $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: EA : ea$: ergo (§. 209), $(AB + BC + CD + DE + EA) = ABCDEA : (ab + bc + cd + de + ea) = abcdea :: AB : ab :: (AB + BC) : (ab + bc) :: AC : ac$, cum sit $AB : ab :: AC : ac$ (§. 475).

Fig. 477 Coroll. 2. Cum sint similia omnia polygona regularia ejusdem ordinis (473), eorum perimetra erunt
52 in eadem ratione cum quibuslibet dimensionibus homologis (476).

478 Coroll. 3. Ob eandem rationem circumferentiæ duorum circulorum sunt inter se sicut radii, sicut diametri, sicut chordæ similes, vel denique sicut arcus similes, aut ejusdem numeri graduum (§. 311).

479 Probl. *Construere Polygonum simile Polygono dato* ABCDE, *habens pro latere homologo ad* AB *lineam datam.*

Solut. Super *AB* prolongatam, si opus est, sumatur *Ab* æqualis lateri dato, homologo nempe ad *AB*, & ducendo postmodum diagonales *AC*, *AD*, ducetur per punctum *b* linea *bc* parallela ad *BC* (§. 370): per punctum *c* lin. *cd* parallela ad *CD*; per punctum *d* lin. *de* parallela ad *DE*; ex quo resultabit polygonum *Abcde* simile dato *ABCDE.*

Ex construct. resultat quod omnia triangula polygoni *Abcde* sunt similia triangulis homologis polygoni *ABCDE* (§. 416): ergo sunt similia illa polygona (§. 474).

PARS SECUNDA.

ARTICULUS PRIMUS.

De Superficiebus in genere.

480 DEfinit. 1. Vocatur *Superficies* extensio constans duabus dimensionibus, scilicet latitudine, & longitudine, ac considerari potest generata ex motu lineæ parallelè ad se ipsam.

Co-

481 Coroll. Ergo termini superficiei, secundum longitudinem, & latitudinem, sunt lineæ; secundum profunditatem ipsa est terminus sui ipsius. *Fig.*

482 Schol. In qualibet figura *ABCD* sunt duo præcipuè consideranda, perimetrum nempe (de quo egimus), & spatium inter illud comprehensum, & hoc propriè *superficies* dicitur, seu *area*, de qua nunc agendum. 32

483 Definit. 2. Mensura superficierum necessariò est una superficies (§. 294), quæ sumpta tanquam unitas exprimere valeat rationem, quam cum ea habeant quælibet aliæ superficies, quibus proculdubio homogenea est (480).

484 Schol. Superficies pro unitate sumpta ad mensurandas superficies est quadratum magnitudinis arbitrariæ; nam cum sint æquales ejus anguli, & latera (§. 423), uno dimenso habetur longitudo, & latitudo (§. 360), quare facilius exprimitur ratio cum quibuslibet aliis superficiebus. Unde *quadrare*, & *mensurare* pro eodem in Geometria habetur. 32

485 Probl. *Invenire superficiem unius quadrati* AC.

Solut. Videatur quoties in basi *AB* contineatur basis *ab* unitatis, ac numerus quotum exprimens in se ipsum ducatur; productum declarabit quoties sumenda sit unitas, seu superficies *abcd* ad habendam superficiem quadrati *AC*. 53

Super basim *AB* continebitur unitas, vel quadratum *abcd* toties, quoties basis *ab* unitatis; & item unitas *abcd* super latus *BC*, quoties latus unitatis *bc*, toties scilicet quoties basis *ab* super basim *AB*, cum sit $AB = BC$, $ab = bc$ (§. 423): ergo si consideretur divisa basis *AB*, & latus *BC* in quemlibet numerum partium æqualium *ac*, *ab*, si per puncta cujuslibet divisionis lin. *AB* ducantur paralle-

Fig. lelæ ad latus BC, & per puncta cujuslibet divisionis lin. BC parallelæ ad AB (§. 370), patet quod quadratum AC manebit divisum in quadrata minora æqualia per const. unitati $abcd$ (§. 433), quorum tot erunt series, quot partes habeat latus AB, & in qualibet serie tot quadratula, quot partes habeat latus BC, seu ipsi æquale AB: ergo *numerus horum quadratulorum æqualium unitati* abcd, *hoc est area quadrati* AC, *invenietur* (§. 29) *multiplicando per se ipsum numerum exprimentem quot vicibus basis* ab *unitatis continetur in basi* AB *quadrati propositi*; *vel quod idem est*, *area unius quadrati æqualis est quadrato unius è lateribus*; vel $AC = \overline{AB}^2$ (§. 122).

486 Schol. Expressio hæc, licet exacta non sit, eo quod productum unius lin. per aliam debet esse linea, quæ contineat lin. sumptam tanquam *multiplicandum* toties quoties lin. sumpta tanquam *multiplicator* contineat unitatem (§§. 29. 295), praxi recepta est, eaque deinceps in sensu indicato utemur.

54 487 Coroll. Ergo area rectanguli DB est æqualis producto basis AB per altitudinem BC; hoc est, $BD = AB \times BC$.

Nam semper verificabitur quod super basim AB tot erunt series unitatum, quot vicibus basis unitatis continetur in AB, & in qualibet serie tot unitates, quot vicibus latus unitatis continetur in altitudine BC: ergo numerus omnium unitatum, seu area rectanguli BD invenietur multiplicando basim AB per altitudinem BC; hoc est, $BD = AB \times BC$.

488 Theor. 1. *Duo parallelogramma* ABCD, BCFH *formata super eandem basim* CB, *& inter easdem parallelas* CB, DH, *sunt æqualia*, *seu æqualis superficiei.*

Jux-

Juxta hypoth. erit $DC = AB$, & $FC = HB$, cum sint Fig.
latera opposita parallelogrammorum (422): etiam erit $m = n$ (374) : ergo $\triangle CDF = \triangle BHA$ (418) ; ac consequenter si è utroque tollatur triangulum commune AGF, manebit (10) trapezium $AGCD$ = trapezio $FGBH$, quibus si triangulum commune addatur CGB, parallelogrammum component $ABCD$ = parallelogrammo $BCFH$.

489 Coroll. 1. Parallelogramma formata super eandem basim CB, & inter easdem parallelas CB, DH, habent semper eandem altitudinem (§§. 425, 360): ergo parallelogramma formata super eandem basim, & ejus- 54
dem altitudinis sunt æqualia.

490 Coroll. 2. Ergo area unius parallelogrammi cujuslibet $HBCF$ est æqualis producto basis CB per altitudinem BA: Nam cum sit parallelogrammum $HBCF = ABCD$ (§. 489), & $ABCD = BC \times AB$ (§. 487) patet quod erit $HBCF = CB \times AB$.

491 Theor. 2. *Triangulum quodlibet* CBH *est dimidium parallelogrammi* BCFH *formati super eandem, aut æqualem basim* CB, *&* *ejusdem altitudinis, vel inter easdem parallelas.*

Triangulum HCB est semper æquale triangulo HCF (§. 429) ; sed $\triangle HCB + \triangle HCF = ABCF$: ergo $\triangle HBC = \frac{HBCF}{2}$.

492 Coroll. 1. Triangula HBC, DBC formata super eandem aut æqualem basim, & inter easdem parallelas, seu ejusdem altitudinis, sunt æquales. Nam semper erit $\triangle HBC = \frac{FB}{2} = \frac{AC}{2}$, cum sit $AC = FB$ (§. 489); sed $\triangle DBC = \frac{AC}{2}$ (§. 491): ergo &c.

Co-

Fig. 493 Coroll. 2. Ergo area trianguli cujuslibet æqualis est producto basis per dimidium altitudinis, seu producto dimidii basis per altitudinem; sic *dividendo aream per dimidium altitudinis, invenietur basis*; & *dividendo aream per dimidium basis, invenietur altitudo.*

31 494 Theor. 3. *Superficies unius trapezii æqualis est producto semisummæ suarum basium parallelarum per distantiam* AL, *quæ inter ipsas est*, seu *producto unius lin.* TQ *ductæ ad distantias æquales duarum basium parallelarum per omnem distantiam* AL *inter illas bases.*

Ducta diagonali AC, triangula ABC, ACL habebunt eandem altitudinem AL (§. 360), eo quod sit inter easdem parallelas AB, LC ex supposit.; consequenter erit superficies trianguli $ABC = AL \times \frac{AB}{2}$, & superficies trianguli $ACL = AL \times \frac{LC}{2}$ (§. 493): ergo $\triangle ABC + \triangle ACL = AL \times \frac{AB + LC}{2} = ABCL$.

Juxta hypoth. erit $TL = TA$, & TQ parallela lin. LC, & AB (§§. 359, 376), & consequenter erunt similia triangula CAL, RAT (§. 416): ergo $AT : LA :: TR : LC : AR : AC$ (§. 453), sed $AT = \frac{LA}{2}$; ergo $TR = \frac{LC}{2}$, & $AR = \frac{AC}{2} = CR$: erit etiam $CR : CA :: RQ : AB$; sed $CR = \frac{AC}{2}$ per demonst.: ergo $RQ = \frac{AB}{2}$; eo quod habebimus $TQ = TR + RQ = \frac{LC + AB}{2}$; hoc est *lin.* TQ *ducta ad distantias æquales duarum parallelarum* AB, LC, *æqualis est ejus semisummæ*: ergo superficies trapezii erit juxta demonstrat. æqualis producto istius lin. per distantiam AL inter bases parallelas.

40 495 Theor. 4. *Superficies polygoni regularis cujuslibet* ABDEFH *est æqualis producto radii recti* CR *per dimidium sui perimetri.*

Ra-

Radii obliqui *CB*, *CA* &c. resolvunt polygonum in *Fig.* tot triangula æqualia *ACB*, *BCD* &c., quot habet latera (§. 443); sed superficies unius ex his triangulis æqualis est (§. 493) producto medietatis unius è late- 40 ribus polygoni per suum radium rectum *CR* æqualem in omnibus (§. 444): ergo superficies totalis polygoni erit æqualis producto semiperimetri per suum radium rectum *CR*.

496 Coroll. 1. Cum peripheria circuli possit considerari tanquam perimetrum polygoni regularis infinitorum laterum (§. 473), patet quod radius circuli non distinguetur à radio recto; consequenter *superficies unius circuli erit æqualis producto ejus circumferentiæ per medietatem radii, seu semicircumferentiæ per radium.*

497 Coroll. 2. Ergo superficies unius sectoris circuli est æqualis producto radii per medietatem arcus eum terminantis.

498 Schol. Ad inveniendam superficiem circuli, vel quod idem est, ad inveniendam quadraturam circuli, necesse foret cognoscere rationem radii ad circumferentiam; quod quidem hucusque exacte invenire non potuit; tantum sufficienti approximatione inventa est ratio diametri ad circumferentiam, quæ est ut 7 ad 22, seu ut 100 ad 314; seu ut 113 ad 355, vel exactius ut 1 ad 3, 1415926535897932 cum aliis 111 decimal.

499 Probl. 1. *Data diametro, seu circumferentia unius circuli, invenire superficiem.*

Sol. 1. Habendo rationem diametri ad peripheriam (§. 498) dato quolibet ex his, invenietur aliud (§. 217). 2.° Multiplicetur circumferentia per quartam partem diametri; productum erit area circuli (§. 496).

Co-

Fig. 500 Coroll. 1. Si diameter unius circuli sit = 100 erit ejus circumferentia = 314 (§. 498); & superficies
40 = 7850 (§. 499); quadratum diametri erit = 10000 (§. 80): ergo quadratum diametri unius circuli est ad ejus superficiem proximè ut 10000 ad 7850, seu ut 1000 ad 785.

501 Coroll. 2. Ergo data area unius circuli, invenietur ejus diameter, si quærendo quartum terminum proportionalem ad 785, 1000, & ad aream datam (§. 217), extrahamus ejus radicem quadratam.

502 Probl. 2. *Data diametro unius circuli, & ratione in gradibus unius arcus ad circumferentiam, invenire aream sectoris arco correspondentem.*

Sol. 1.° Quæratur circumferentia circuli (§§. 498, 217).

2.° Quæratur quartum proportionale ad 360°, ad arcum datum, & ad circumferentiam inventam (217), habebitur longitudo arcus dati in eadem mensura diametri datæ.

3.° Multiplicetur arcus inventus per quartam partem diametri datæ, & productum erit area sectoris (497).

503 Probl. 3.° *Data altitudine* FA *segmenti, & dimidio* FD *chordæ illud efformantis, invenire superficiem.*
55

Sol. 1.° Quæratur diameter *AL* (466), & dimidio *CA* describatur (303) circulus per puncta *B*, & *D* transiturus (§§. 333, 298).

2.° Ducantur radii *CB*, *CD*, & comperiatur numerus graduum arcus *DAB* (319).

3.° His datis quæratur superficies sectoris *BCADB* (502).

4.° Cum sit $DB = 2DF$, quæ est quantitas cognita, & $CF = CA - FA$, quantitates itidem cognitæ, invenietur area trianguli *DCB* (493).

Sub-

5.° Subtrahatur è area sectoris area trianguli, residuum erit area segmenti *DABFD*. *Fig.*

504 Schol. Superficies polygonorum irregularium invenitur, dividendo ea in diversa triangula; nam inventis separatim horum superficiebus (493), summa 55
omnium erit superficies polygoni irregularis.

ARTICULUS II.

De Comparatione, reductione, & divisione superficierum.

505 THeor. 1. *Superficies duorum triangulorum quorumlibet sunt inter se in ratione composita basium, & altitudinum.*

Repræsentet B basim, H altitudinem, S superficiem trianguli: b, h, s, basim, altitudinem, & superficiem alterius trianguli; habebimus $S = \frac{BH}{2}$; & $s = \frac{bh}{2}$ (493): ergo $S : s :: \frac{BH}{2} : \frac{bh}{2} :: BH : bh$ (204).

506 Coroll. 1. Si $B = b$, erit $S : s :: H : h$; hoc est, *triangula habentia eandem, aut æquales bases sunt inter se sicut altitudines.*

507 Coroll. 2. Si $H = h$, $S : s :: B : b$; hoc est, *superficies duorum triangulorum habentium eandem, aut æqualem altitudinem, sunt inter se sicut bases.*

508 Coroll. 3. Si $BH = bh$, erit $S = s$, & tunc casus habebimus $B : b :: h : H$ (207), hoc est, *triangula quorum superficies sunt æquales, habent reciprocè proportionales suas bases, & altitudines; & vice versa, erunt æquales superficies duorum triangulorum, si eorum bases, & altitudines fuerint reciprocè proportionales.*

509 Theor. 2. *Superficies duorum triangulorum*

si-

Fig. *similium sunt inter se sicut quadrata suarum dimensionum homologarum.* Ratione similitudinis triangulorum erit $B:b::H:h$ (475) : aliunde $S:s::BH:bh$ (§. 505): ergo $BH:bh$ est ratio duplicata (200), & consequenter (§. 205) $S:s::B^2:b^2::H^2:h^2$: ergo &c.

510 Coroll. Parallelogramma sunt dupla triangulorum, æqualis cum eis basis, & altitudinis (491): ergo (§. 204)

1.° Duo parallelogramma erunt in ratione composita basium, & altitudinum (§. 505).

2.° Si bases habent æquales, erunt sicut altitudines (§. 506).

3.° Si habent æquales altitudines, erunt sicut bases (§. 507).

4.° Si fuerint æqualia, habebunt reciprocè proportionales bases, & altitudines, & vice versa (§. 508).

5.° Si fuerint similia, erunt inter se ut quadrata suarum dimensionum homologarum (§. 509).

52 511 Theor. 3. *Superficies figurarum similium, tum regularium, tum irregularium, sunt inter se ut quadrata suarum dimensionum homologarum.*

Sint similes fig. *ABCDE*, *abcde*; triangula *AED*, *ADC*, & *ABC* sunt respectivè similia suis homologis *aed*, *adc*, & *abc* (§. 475) : ergo (§. 509) $\triangle ABC : \triangle abc :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2$; $\triangle ACD : \triangle acd :: \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2$; $\triangle ADE : \triangle ade :: \overline{DE}^2 : \overline{de}^2$; sed cum sit $BC : bc :: CD : cd :: DE :$
52 de &c. (§. 472), est etiam $\overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 :: \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2 :: \overline{ED}^2 : \overline{ed}^2$ &c. (§. 211): ergo $\triangle ABC : \triangle abc :: \triangle ACD : \triangle acd :: \triangle ADE : \triangle ade$; & consequenter (§. 209) $(\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE) = ABCDE : (\triangle abc + \triangle acd + \triangle ade) = abcde :: \triangle ABC : \triangle abc :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 :: \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2$: &c: cum

cum sit juxta demonst. $\Delta ABC : \Delta abc :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 :: \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2$: &c. ergo, &c. Fig.

512 Coroll. 1. Omnia polygona regularia ejusdem ordinis, sunt figuræ similes (§. 473): ergo eorum superficies erunt inter se ut quadrata quarumlibet dimensionum homologarum.

513 Coroll. 2. Cum sint etiam similes omnes circuli (§. 473), eorum superficies erunt inter se ut quadrata suorum radiorum, diametrorum, circumferentiarum, ac generatim ut quadrata suarum dimensionum homologarum.

514 Theor. 4. *una quælibet fig.* AFEDC, *formata* 56
super hypothenusam AC *trianguli rectanguli* ACB, *æqualis est summæ duarum figurarum ei similium* AGHIB, BKLPC *efformatarum super duos cathetos.*

Cum sint figuræ similes, erit (§. 511) $AFEDC : AGHIB : BKLPC :: \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 :: \overline{BC}^2$; ergo $AFEDC : \overline{AGHIB + BKLPC} :: \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$; sed $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ (§. 458): ergo $AFEDC = AGHIB + BKLPC$.

515 Coroll. Ergo semicirculus descriptus super hypothenusam, erit æqualis summæ semicirculorum super duos cathetos descriptorum; & idem verificabitur de omnibus figuris regularibus ejusdem numeri laterum, ratione similitudinis (§. 473).

516 Probl. 1. *Invenire quadratum, cujus superficies sit æqualis superficiei parallelogrammi dati.*

Sol. Quæratur media proportionalis inter basim, & altitudinem parallelogrammi dati (§. 465); & hæc erit latus quadrati quæsiti.

Productum basis per altitudinem exprimit aream parallelogrammi (§. 490); sed quadratum lineæ inventæ est æquale illi producto (§. 206): ergo &c.

Fig. 517 Probl. 2. *Datis duabus figuris similibus* AGHIB, BKLPC *invenire aliam, quæ eis sit similis, & ejus superficies æqualis summæ duarum superficierum datarum.*

56 Sol. Disponantur latera homologa *AB*, *BC* ita ut forment angulum rectum (§. 371); hypothenusa *AC* erit latus homologum figuræ *AFEDC* quæsitæ (§. 514), post modum construendæ (§. 479).

518 Probl. 3. *Dividere triangulum* ACE *in quas volueris partes æquales, lineis ductis è puncto dato* D.

57 Sol. Dividatur basis *AE* in tot partes æquales, quot sunt eæ, in quas dividi debet triangulum (§. 470), v. g. in duas partes æquales in *B*. Per hoc punctum ducantur ad verticem *C* trianguli, & ad punctum datum *D* rectæ *BC*, *BD*, & è vertice *C* ducatur *CF* parallela ad *DB* (§. 370); ducendo denique è puncto dato *D* rectas *DF*, *DC*, manebit divisum triangulum in duas partes æquales *FACD*, & *FBECD*.

Cum sit $AB = BE$, per construct., triangula *ABC*, *BCE* habentia suos vertices in eodem puncto *C*, ac consequenter habentia eandem altitudinem (§. 339), resultabunt æqualia (§. 492): ob eandem rationem erit $\triangle CFB = \triangle CFD$ cum habeant eandem basim *CF*, & sint inter easdem parallelas *CF*, *DB* per construct.: ergo $\triangle CFB - \triangle FPC = \triangle CFD - \triangle FPC$ (§. 10), hoc est, $\triangle FPB = \triangle CPD$, ex quo resultat $\triangle ABC - \triangle FPB + \triangle CPD = \triangle BCE - \triangle CPD + \triangle FPB$; hoc est, trapezoides $FACD = FBECD$.

519 Probl. 4. *Dividere parallelogrammum* ABCD

58 *in duas partes æquales per punctum datum* P.

Sol. Sumatur $AL = PC$, & ducatur recta *PL*, erit $LADP = LBCP$.

Ducatur diagonalis *AC*, ratione parallelarum *DC*, *AB* (§. 422) erit $m = n$, & $t = z$ (§. 363); sed *AL* =

$= PC$ per const.; ergo $\triangle ALF = \triangle CPF$ (§. 419); & *Fig.* cum sit etiam $\triangle ABC = \triangle ACD$ (§. 492), patet quod $\triangle ABC - \triangle ALF + \triangle CPF = \triangle ACD - \triangle CPF + \triangle ALF$ (§. 10) hoc est trapezium $LADP = LBCP$.

520 Probl. 5. *Dividere unam figuram rectilineam in quotcumque partes æquales.* 59

Sol. 1.° Quæratur area figuræ (§. 504), & dividatur in tot partes æquales, in quot fig. dividenda sit, v. g. in tres.

2.° Area tertiæ partis (in nostro casu) dividatur in duas partes æquales.

3.° Area trianguli AED subtrahatur è tertia parte, & residuum dividatur per $\frac{AD}{2}$; quotiens erit altitudo trianguli AID (§. 493), qui addetur primo AED, ut sit $AEDI$ tertia pars figuræ.

4.° Cum hujus altitudinis intervallo ducatur parallela ad eandem AD (§. 370), quæ determinabit punctum I, per quod duci poterit recta ID, quæ secabit tertiam partem fig. $DEAI$.

5.° Dimidium tertiæ partis fig. dividatur per $\frac{DI}{2}$, quotiens erit altitudo trianguli IKD, sexta pars figuræ (§. 493).

6.° Cum hujus itaque altitudinis intervallo ducatur parallela ad eandem ID (§. 370), ut habeatur punctum K.

7.° Dividatur adhuc dimidium tertiæ partis fig. per $\frac{KD}{2}$ ad habendam altitudinem trianguli KLD, æqualis itidem sextæ parti fig. (§. 493).

8.° Idcirco cum hujus intervallo ducatur denuo

Fig. parallela (§. 370) ad eandem *KD*, ad determinandum punctum *L*, secaturum tertiam partem fig. *KIDL*, ac determinaturum aliam tertiam partem *KBCL.*

ARTICULUS III.

De Planis.

521 DEfin. Vocatur *planum* una superficies æqualis, cui per omnes suæ extensionis partes accommodari potest linea recta ; superficies cui hæc proprietas convenit, vocatur *plana*, ad distinctionem superficierum *convexarum*, seu *concavarum*, v. g. superficies interior, & exterior vasis v. g.

522 Theor. 1. *Si una recta quælibet habet duo puncta communia cum plano, reliqua puncta ejusdem rectæ erunt in eodem plano.*

Duo sola puncta determinant positionem unius rectæ (§. 290) : aliunde essentia plani consistit in eo, quod ei undequaque recta accommodari possit (§. ant.) : unde patet, quod si in duobus punctis coincidunt, in omnibus coincident, ac proinde semper coincident, seu confundentur, licet prolongentur in infinitum.

523 Theor. 2. *Recta* AB *perpendicularis ad planum* PQ *est etiam perpendicularis ad omnes rectas* BF,
60 BG, BD *&c. positas in eodem plano, quæ transeunt per extremitatem* B *ejusdem perpendicularis.*

Juxta supposit. anguli quos format lin. *AB* cum plano *PQ* in puncto *B*, debent esse recti ; sed lineæ *BF*, *BG* &c. confunduntur cum eodem plano (§. ant.) & transeunt per punctum *B* juxta hypoth. : ergo erunt recti omnes anguli *ABL*, *ABF* &c. : ergo *AB* erit per-

perpendicularis ad illas rectas (§. 332). Fig.

524 Theor. 3. *E puncto dato* A *extra planum* PQ *non potest demitti plusquam una perpendicularis* AB; *& hæc erit distantia à puncto ad planum.*

Demittatur, si fieri potest, perpendicularis *AF*, & per punctum *F* ducatur recta *FB* in plano *PQ*; habebimus (§. ant.) quod *AB*, & *AF* sunt perpendiculares ad eandem rectam *FB* è eodem puncto *A*; sed hoc est absurdum (§. 336): ergo &c.

Cum sit rectangulum in *B* triangulum *ABF*, *AF* erit latus oppositum majori angulo (§. 403): ergo erit major quam *BA* (§. 405), & cum idem probari possit de qualibet alia obliqua, sequitur quid perpendicularis est distantia à puncto ad planum (§. 287).

525 Theor. 4. *Communis sectio duorum planorum* HD, KF, *quæ se secant, est lin. recta* AB. 61

Recta *AB* ducta per puncta *A*, & *B*, communia utrique plano, confunditur cum plano *HD*, & cum plano *KF* (522) : ergo illa linea *AB* est intersectio communis, ac consequenter sectio communis duorum planorum est linea recta, cum superficies profunditate careant (§. 481).

526 Coroll. Ergo si una recta *AB* secat duas parallelas *CB*, *EF*, erit cum eis in eodem plano. Nam 64 si concipimus quod per puncta *A*, *B* transeat planum, secans illud in quo sunt parallelæ *CB*, & *EF*, erit communis sectio recta *AB* (§. ant.), ac consequenter erit in eodem plano parallelarum.

Unde patet *rectam poſse esse in infinitis planis diversis.*

527 Theor. 5. *Si recta* MN *fuerit perpendicularis* 67 *ad plana* HF, LI, *hæc plana erunt parallela.*

Fig. Si plana *HF*, *LI* non sunt parallela, producta concurrent in puncto *Q*, & sit communis sectio *SR* (§. 525); è puncto Z in ea sumpto ducantur in suis cujusque planis rectæ Z*M*, Z*N*, habebimus, ex hypoth. in triangulo Z*MN* duos angulos Z*MN*, Z*NM* rectos (§. 523); cumque hoc sit absurdum (§. 403), infertur quod plana *HF*, *LI* sunt inconcurrentia, & proinde parallela.

62 528 Theor. 6. *Tria sola puncta sola* A, B, C, *quæ non sunt in linea recta, determinant positionem unius plani cujuslibet* ABC.

Uniantur tria puncta cum rectis *AB*, *BC*, & *CD*; si dicatur quod triangulum *ACB* resultans, non est totum in eodem plano, supponatur quod ejus pars *DFA* est in uno plano, & pars *CDFB* in alio: ergo pars *FA* rectæ *FB* erit etiam in eodem plano, in quo est triangulum *DFA*, ac consequenter recta *BF* producta desinit esse in plano *BFCD*; sed hoc est absurdum (§. 522): ergo &c.

529 Coroll. 1. Ergo tria puncta non possunt esse communia duobus planis diversis, nisi sint in linea recta; ac proinde omne triangulum *ABC* debet esse in eodem plano.

61 530 Coroll. 2. Ergo duæ rectæ *CA*, *DA* sese secantes sunt in eodem plano *PQ*, quia tria puncta *C*, *A*, *D* determinant positionem duarum rectarum *CA*, *AD* (§. 290).

531 Coroll. 3. Ergo angulus quilibet determinat positionem unius plani (312).

60 532 Theor. 7. *Si recta* AB *est perpendicularis ad duas rectas* FB, GB *in punto* B *suæ intersectionis*, *erit etiam perpendicularis ad ejus planum* PQ.

Si concipimus quod recta *FB* revolvitur circum lineam

neam immobilem *AB*, describet suo motu planum per- *Fig.*
pendiculare ad *AB*, ex hypoth.; sed hoc planum est etiam rectarum *FB*, *GB* (§. 530): ergo &c.

533 Theor. 8. *Si recta* AB *sit perpendicularis ad* 65
rectas BC, BD, BE *in puncto* B, *in quo concurrunt, illæ tres lineæ erunt in eodem plano.*

Sint, ut supponi potest (§. 530) rectæ *BC*, *BD* in plano *FC*; recta *BE*, quæ concurrit cum *BA* in puncto *B*, sit cum ea, si fieri potest, in eodem plano *AG*, & sit *BG* communis sectio planorum; cum sit *AB* perpendicularis, ex supposit., ad rectas *BC*, *BD*, erit etiam perpendicularis ad planum *FC* (§. 532): ergo erit etiam perpendicularis ad communem sectionem *BG*, quæ transit per punctum *B* (§. 525, 523); sed *AB* est, ex supposit., ad *BE* in eodem plano *AG*, in quo est etiam communis sectio *BG* (§. 525); ergo ang. *ABG*, *ABE* sunt recti (§. 332), ac consequenter (§. 321) $ABE = ABG$; hoc est, pars æqualis toto; cumque hoc sit absurdum (§. 8): ergo &c.

534 Theor. 9. *Si duæ rectæ* AB, CD *fuerint* 66
perpendiculares ad idem planum EF, *erunt parallelæ inter se.*

Ducendo lin. *BD* in plano *EF*, anguli *ABD*, *CDB*, erunt, ex hypoth., recti (§. 523): in eodem plano *EF* ducatur lin. *DG* perpendicularis ad *DB* (§. 343), & fiat $DG = AB$; unde resultat quod in triangulis *BAD*, *BGD* duo latera *AB*, *BD* unius æqualia sunt aliis duobus lateribus *GD*, *BD* alterius, & angulus comprehensus rectus; ergo $AD = BG$ (§. 418); & ita latera *DG*, *DA*, *AG* trianguli *ADG* sunt æqualia tribus lateribus *AB*, *BG*, *AG* trianguli *BAG*: ergo angulus $ABG = GDA$ (§. 417); sed *ABG* est rec-

Fig. tus (§. 523) : ergo & *GDA* est etiam rectus; & cum sit itidem rectus, eadem ratione, angulus *GDC*, infertur quod *GD* est perpendicularis ad tres rectas *DB*, *DA*, *DC* (§. 332): ergo omnes illæ sunt in eodem plano (§. ant.), in quo est etiam *AB* (§. 529), eo quod sit latus trianguli *ABD* : ergo *AB*, & *CD* sunt perpendiculares ad eandem rectam *BD*, quæ cum eis est in eodem plano : ergo sunt inter se parallelæ (§. 372).

535 Theor. 10. *E puncto* B *sumpto in plano* PQ *non*
60 *potest erigi nisi unica perpendicularis* BA *ad illud planum.*

Erigatur, si fieri potest, perpendicularis *MB* : habebimus quod *AB*, & *MB* erunt ambæ perpendiculares ad idem planum *PQ*, ac proinde parallelæ inter se (§. 534); sed hoc est absurdum (§. 361), nam supponimus quod concurrunt in eodem puncto *B* : ergo &c.

536 Def. 2. Inclinatio unius plani *KG* ad aliud planum *AD* est angulus *HFM*, quem formant duæ rectæ
63 *HF*, *FM* perpendiculares ad communem sectionem *GE* planorum in eodem puncto *F*, quarum una ducatur in plano *AB*, alia in plano *KG*.

537 Theor. 11. *Inclinatio unius plani* KG *ad aliud planum* AD *est eadem in omnibus punctis* F, f *&c.* Ducantur perpendiculariter ad communem sectionem *EG* è punctis *F*, & *f* rectæ *FH*, *fh* in plano *AD* : & in plano *KG* rectæ *FM*, *fm* (§. 343).

Sumatur $HF = hf$, $FM = fm$; habebimus quod *HF* erit parallela ad *hf*, & *FM* ad *fm* (§. 372): consequenter *Hh*, & *Mm* erunt æquales, & parallelæ ad *Ff* (§. 428), & *Hh* æqualis, & parallela ad *Mm* (§§. 9. 376); unde etiam *HM*, & *hm* erunt inter se æquales, & parallelæ (§. 428); unde resultat quod triangula *HFM*, *hfm* habent omnia sua latera homologa, æqualia,

&

& parallela : ergo erunt similia (§. 417), & angulus *HFM* = *hfm* (§.410) ; sed anguli sunt mensura inclinationis duorum planorum *KG*, & *AD* (§. ant.) : ergo &c. Fig.

538 Coroll. 1. Cum unus angulus solus determinet positionem unius plani (§. 531), considerare possumus quod per angulum *HFM* transit planum *HMF*, & per angulum *hfm* aliud planum *hmf* ; hoc non obstante anguli *HFM* , *hfm* habentes sua crura *HF*, *FM*, & *hf*, *fm* respectivè parallela , sunt æquales (§. ant.): ergo *anguli comprehensi inter crura respectivè parallela sunt æquales , licet siti in diversis planis.*

539 Coroll. 2. Cum una , & eadem sit inclinatio planorum in omnibus suis punctis (§. 537), nec differat ab inclinatione perpendicularium , è illis ductarum ad idem punctum sectionis (§. 536), infertur 1°: *unum planum alteri occurrens formaturum cum eo duos angulos , qui juncti valeant* 180° (§. 328) : 2.° *Omnes angulos formatos per quemlibet numerum planorum, sese secantium in una linea valere* 360° (§. 330): 3.° *duobus planis sese secantibus , angulos ad verticem oppositos esse æquales* (331) : 4.° *Uno plano secante duo, aut plura plana parallela , cum eis formare angulos alternos internos æquales &c.* (§. 363 usque ad 369).

540 Theor. 12. *Si planum* AC *secaverit alia duo,* 67
plurave plana parallela FH , IL , *sectiones* AD, BC *erunt parallelæ inter se.*

Lineæ *AD* , *BC* sunt in planis *FH* , *IL* (§. 525): ergo confundentur cum illis (§. 522) ; sed plana , ex hypoth., sunt inconcurrentia : ergo & inconcurrentes erunt illæ sectiones : ergo &c. (361).

541 Theor. 13. *Si è uno puncto quolibet* B *sumpto in* 61
plano CG *perpendiculari ad planum* PQ *ducatur recta*

BA

Fig. BA *perpendicularis ad communem sectionem* CF, *recta erit perpendicularis ad planum* PQ.

In plano *PQ* ducatur *DA* perpendicularis ad *AC* (§. 343), habebimus quod ang. *BAD*, quo regulari debet duorum planorum inclinatio *CG*, *PQ* (536) debet esse rectus (332), eo quod supponatur planum *CG* perpendiculare ad planum *PQ*: ergo *BA* est perpendicularis ad duas rectas *CA*, *DA* in puncto suæ intersectionis *C*: ergo est perpendicularis ad planum *PQ* (§. 532).

542 Theor. 14. *Si plana* DH, CG *sunt perpendicularia ad idem planum* PQ, *ejus communis sectio* BA *erit etiam perpendicularis ad idem planum.*

Cum duo plana *DH*, *CG* sint, ex supposit., perpendicularia ad planum *PQ*, patet erigi posse in quolibet illorum perpendicularem ad planum *PQ* è puncto *A* communi tribus planis; sed è uno puncto non potest erigi ad unum planum nisi unica perpendicularis (§. 535): ergo illa perpendicularis erit eadem in utroque plano; cumque communis sectio *AB* est eadem lin. sita in utroque plano è puncto *A* (§. 525), hæc erit perpendicularis ad planum *PQ*.

68 543 Theor. 15. *Si è puncto* A *ducitur quilibet numerus rectarum* AdD, AfF *&c. quæ transeant per plana* PQ, pq *parallela*, 1.° *omnes rectæ se intersecabunt proportionaliter*: 2.° *fig.* DFGEH, dfgeh *erunt similes.*

Si consideretur quod per tria puncta *A*, *D*, *F* transit unum planum, intersectiones *DF*, *df* cum planis *PQ*, *pq* erunt parallelæ (§. 540): ergo triangula *AFD*, *afd* erunt similia (§. 416); & cum idem probari possit de reliquis triangulis *AFG*, *afg*, *AEG*, *aeg* &c., habebimus (§. 453) *AD* : *ad* :: *DF* : *df* :: *AF* : *af* :: *FG* : *fg* :: *AG* : *ag* &c. :: *AB* perpendicularis ducta è puncto *A* ad pla-

planum PQ : ab perpendicularis ducta è eodem puncto a, Fig.
vertice scilicèt omnium triangulorum, ad planum pq (475): ergo rectæ AD, AF, AG &c. se secabunt proportionaliter per plana parallela PQ, pq.

Ex demonst. constat quod latera figurarum $DFGEH$, 68
$dfgeh$ sunt parallela respectivè: ergo anguli D, F, G &c. comprehensi inter latera primæ figuræ, sunt æquales angulis d, f, g comprehensis inter latera parallela secundæ (§. 538); aliunde etiam manet demonstratum, quod $DF : df :: AF : af :: FG : fg :: AG : ag :: GE : ge$ &c.: ergo $DF : df :: FG : fg :: GE : ge$ &c. hoc est, latera primæ figuræ sunt proportionalia ad omnia latera homologa secundæ: ergo illæ figuræ sunt similes (§. 472).

544 Coroll. 1. Ratione similitudinis figurarum $DFGEH$, $dfgeh$, habebimus (511) quod earum superficies erunt inter se $:: \overline{DF}^2 : \overline{df}^2 :: \overline{AB}^2 : \overline{Ab}^2$ quadrata distantiarum è puncto A ad singula plana PQ, pq; cumque hæc sit ratio invariabilis respectu ejusdem puncti A, sequitur quod quicunque sit rectarum numerus AD, AF &c. semper superficies figurarum resultantium $DFGEH$, $dfgeh$ erunt inter se in ratione constanti ex $\overline{AB}^2$ ad $\overline{ab}^2$ (§. 511); & perimetra erunt in ratione constante ex AB ad ab (§. 543).

545 Coroll. 2. Si lineæ AdD, AfF &c. fuerint parallelæ, segmenta Dd, Ff &c. erunt æqualia (§. 430) cum sint inter parallelas (§. 540): ergo $df = DF$; $fg = FG$ &c. (§. 430), ac consequenter fig. $DFGEH$ erit æqualis, & similis aliæ figuræ $dfgeh$.

PARS

Fig.

PARS TERTIA.

De Solidis, ac eorum generatione.

ARTICULUS PRIMUS.

546 DEfin. 1. *Solidum*, *volumen*, seu *corpus* est quantitas composita è tribus dimensionibus, seu extensum juxta longitudinem, latitudinem, & profunditatem.

69 547 Def. 2. *Angulus solidus D* est inclinatio plusquam duarum linearum *AD*, *CD*, *BD*, quæ in eodem puncto *D* concurrunt, nec sunt in eodem plano; ex quo resultat, quod angulus solidus *D* continetur plusquam duobus planis *ADC*, *CDB*, *BDA*, quæ idem non constituunt (§. 530), ac proinde quod ad angulum solidum efformandum, sunt ad minus necessarii tres anguli plani.

548 Def. 3. Mensura unius anguli solidi, est summa angulorum planorum, illum efformantium. Sic mensura anguli solidi *D* v. g. est angulus $ADC + CDB + ADB$.

549 Theor. 1. *Si angulus solidus* D *continetur tribus angulis planis, duo quilibet tertio superstite majores erunt.*

Unicus casus in quo dubium esse posset, ille est in quo duo anguli *ADC*, *CDB* æquales, aut inæquales inter se, majores sunt angulo *BDA*, illorum singulis majore.

In plano *ABD* formetur in vertice *D* angulus $ADR = ADC$ (§. 317): sumatur $DR = DC$; per punctum *R* ducatur eodem plano recta *AB*, secans alias duas *DA*, *DB* in punctis *A*, & *B*, & uniantur rectæ *AC*, *BC* in puncto to C; cum sit AD latus commune, ac per construct. $DC = DR$, & angulus $RDA = ADC$, habebimus $AR = AC$ (§. 418); sed $CB + AC > BR + RA$ (§. 288): ergo $CB + AC - AC > BR + RA - RA$ (11), hoc est $CB > BR$; cum sint ergo latera CD, DB trianguli CDB æqualia lateribus DR, DB trianguli RDB, & basis CB primi major basi BR secundi, erit angulus $CDB > RDB$ (proposit. 25 lib. 1. Euclid.): ergo angulus $CDB + CDA > RDB + RDA$, hoc est angulus $CDB + CDA > BDA$. *Fig.*

550 Coroll. 1. Ergo ut anguli solidi sint æquales contineri debent angulis planis, numero, & valore æqualibus, ac eodem ordine dispositis.

551 Coroll. 2. Si anguli plani, concurrentes in eodem puncto, adæquant summam 360°, erunt omnes in plano unius circuli (§. 330), & sic non formabunt angulum solidum (§. 547); ergo summa omnium angulorum, qui efformare debent angulum solidum, debet esse minor 4 rectis, seu 360° esse debet.

552 Def. 4. Si concipimus quod planum ABD movetur parallelè ad se ipsum juxta directionem unius rectæ cujuslibet BC, generabit solidum $EFCBADE$, quod *prisma* dicitur, quod quidem erit rectum, si linea BC 70
suæ directionis sit perpendicularis ad planum generans; si autem non sit ad illud planum perpendicularis, prisma dicetur obliquum. Dicitur speciatim *prisma triangulare*, *quadrangulare &c.*, juxta numerum laterum plani generatoris.

553 Coroll. 1. Ergo prisma quodlibet habet duas bases DAB, EFC æquales, & parallelas, ac circum terminatur tot parallelogrammis, quot sunt latera plani generatoris. Nam EC est æqualis, & parallela ad BD (§.

Fig. (§. ant.) : ergo *ED* erit etiam æqualis , & parallela ad *CB* (§. 428) : ergo *BCED* est parallelogrammum (§. 422) ; & idem demonstrabitur de reliquis planis lateralibus.

554 Coroll. 2. Ergo sectiones prismatis, factæ paral-
70 lelè ad basim *ADB* , sunt æquales , & similes inter se, & ad planum generans (§. 545).

555 Def. 5. Linea *RP* ducta perpendiculariter è puncto unius basis ad aliam , vocatur *altitudo prismatis* , & lineæ *DE* , *BC* , *AF* æquales inter se , & parallelæ (§.553) *aristæ* vocatur.

556 Def. 6. Si planum generans fuerit quadratum
71 *BD* , & arista *BC* æqualis suo lateri *BF* , & perpendicularis ad planum *BD* , prisma vocatur *cubus*.

557 Coroll. Ergo cubus terminatur per sex quadrata æqualia inter se (§. 553).

72 558 Def. 7. Dum planum generans est quodlibet parallelogrammum *AB* , prisma dicitur *parallelepipedum*.

559 Def. 8. Dum planum generans est circulus , pris-
73 ma nominatur *cylindrus* , rectus , aut obliquus juxta po-
74 sitionem lineæ motus (§. 552).

560 Def. 9. Si una recta , habens unum ex extremis fixum in *D* , alio pergit per cuncta latera perimetri fig. *ACB* , quæ ei pro basi est , solidum generabit , quod *Py-*
75 *ramidem* dicimus , triangulare , quadrangulare &c. prout figura basis fuerit triangulum , quadrilaterum , pentagonum &c.

561 Coroll. 1. Ergo Pyramis erit circumterminata tot triangulis *ASC* , *CSB* , *BSA* , vertices in puncto *S* reunientibus , quot fuerint latera basis *ABC*.

562 Coroll. 2. Sectiones factæ in pyramide parallelè ad suam basim , sunt huic similes (§. 543), & inter se.

Def.

Fig.

563 Def. 10. Punctum S vocatur *vertex*, seu *cuspis* Pyramidis: perpend. So, ducta è cuspide ad basim, prolongatam si opus est, *altitudo pyramidis*; & recta ducta etiam è vertice S ad centrum basis, *axis pyramidis*.

564 Def. 11. Quando polygonum basis est regulare, & altitudo coincidit cum axe, pyramis vocatur regularis; reliquæ irregulares.

565 Coroll. Ergo bases triangulorum lateralium pyramidis regularis erunt omnes (§. 435) æquales, & earum extremitatis æque distantes è cuspide S pyramidis, aliter perpendicularis So non coincidet cum axi, ac consequenter triangula lateralia pyramidis regularis erunt omnia isoscelia (§. 393), æqualia & similia (§. 417), & tunc linea SD ducta perpendiculariter è cuspide S super unum laterum AC basis, quod in duas partes æquales dividet (§. 409), vocatur *apothema*, & erit altitudo omnium triangulorum (§. 396).

566 Definit. 12. Dum basis pyramidis est circulus $BDLT$, quem consideramus tanquam polygonum regu- 76
lare infinitorum laterum (§. 473), pyramis vocatur *conus*; *rectus* quidem si altitudo coincidit cum axe; *obliquus* 77
autem, si altitudo SM format cum axe SC angulum MSC.

567 Coroll. Ergo conus rectus est pyramis regularis (§. 564), in qua rectæ SB, SD, SL, quæ dicuntur latera coni, non differunt ab apothemate (§. 565). 76

568 Definit. 13. Si figura quælibet ABD versatur circum lineam AD immobilem, describet solidum, quod communiter vocant *solidum revolutionis*, & linea AD *axis* vocatur.

569 Coroll. Ergo singulum punctum R perimetri figuræ describet circumferentiam circuli, cujus radius RP est perpendicularis ad axim AD, ac cujus centrum

P

Fig. *P* est in ipso axe (§. 296). Consequenter in solidis
73 revolutionis, sectiones factæ per plana perpendicularia ad suum axim, sunt circuli.

76 570 Definit. 14. Si polygonum generans fuerit rec-
79 tangulum *RCLS*, quod vertitur circum axim *LS*, generabit sua revolutione cylindrum rectum, qualis est definitus (§. 559); & si fuerit triangulum *SCL*, rectangulum in *C*, qui vertitur circum cathetum *CS*, generabit conum rectum (§. 566); si autem fuerit dimidium polygoni magni numeri laterum, producet sphæroidem.

78 571 Definit. 15. Dum polygonum generans est semicirculus *ABD* qui vertitur circum diametrum *AD*, solidum generatum vocatur *Sphæra*. Centrum *C* circuli vocatur centrum sphæræ: Diameter *AD*, diameter, seu axis sphæræ, & duo extrema *A*, *D*, *poli sphæræ*.

572 Coroll. Ergo omnes rectæ ductæ è superficie sphæræ usque ad centrum *C* sunt æquales (§. 298). Unde oritur quod potest sumi pro axe sphæræ quælibet recta per ejus centrum transiens, ac consequenter sectiones factæ in sphæra per quælibet plana, sunt semper circuli: Nam si è centro *C* sphæræ ducitur diameter perpendicularis ad planum secans, potest hæc diameter considerari tanquam axis revolutionis, ac verificabitur quod sit semper sectio circulus (§. 569).

573 Definit. 16. Circuli sectionum factarum per plana quæ transeunt per centrum *C* sphæræ, vocantur *circuli maximi sphæræ*, & omnes sunt æquales, cum habeant æquales suas diametros (§. 572); sed circuli, quorum plana non transeunt per centrum *C* sphæræ, vocantur *minores*, quia eorum diametri *RH* sunt chordæ circuli generatoris, diametro minores (§, 306).

574 Defin. 17. Plana secantia sphæram, quin trans-

eant

eant per centrum, eam dividunt in duas partes inæqua- *Fig.*
les, quarum una vocatur *segmentum majus*, alia *segmen-* 78
tum minus sphæræ, & superficies convexa hujus *fragmentum* (vulgò *casco*) *sphæricum*. Superficies convexa *BNLMRKHS* portionis sphæræ comprehensæ inter duo plana parallela dicitur *Zona*.

575 Definit. 17. Si planum generans fuerit sector circuli *RCA*, qui vertitur circum radium *CA*, generabit solidum quod vocatur *sector sphæricus*.

576 Definit. 18. Si concipimus quod multa plana uniuntur per suos angulos, ita ut concludant aliquod spatium, generabitur solidum, quod communiter vocatur *poliedrum*, cujus facies sunt plana efformantia, & eorum anguli solidi resultant è concursu angulorum planorum.

577 Definit. 19. Poliedrum terminatum per plana regularia, & æqualia inter se, vocatur *corpus regulare*, seu *platonicum*, & speciatim vocatur *thetraedron*, quod continetur quatuor triangulis æquilateris, & æqualibus: *octaedron*, quod octo: *icosaedron* quod 20; quod sex quadratis æqualibus continetur, vocatur *hexaedron*, seu *cubus*; & *dodecaedron*, quod continetur duodecim pentagonis regularibus, & æqualibus.

578 Theor. 2. *Non ultra quinque corpora regularia possibilia sunt.*

Cum ad minùs necessarii sunt tres anguli plani ad efformandum unum angulum solidum (§. 547), patet quod duobus triangulis, aut quibuslibet aliis figuris non potest constitui angulus solidus (§. 576): ergo ad efformandum angulum solidum corporis regularis debent concurrere saltim tres anguli trianguli æquilateri, quadrati &c (§. 577).

Fig. Hoc supposito: 1° quoniam quilibet angulus trianguli æquilateri valet 60° (§. 408), summa trium horum angulorum erit = 180°, summa quatuor = 240°, summa quinque = 300°, & summa sex 360°; sed 360° non possunt formare angulum solidum (§. 551): ergo angulus solidus corporis regularis terminati per triangula tantum poterit resultare ex 3, 4, 5 angulis planis trianguli æquilateri, qualia sunt thetraedron in primo casu, octaedron in secundo, & icosaedron in tertio.
78

2.° Angulus quadrati est = 90° (§. 473); consequenter summa trium horum angulorum erit = 280°, & summa quatuor = 360°; ergo angulus solidus corporis regularis terminati per quadrata, tantum resultare poterit è concursu trium angulorum planorum quadrati (§. 551), quale est exaedron, seu cubus (§. 557).

3.° Cum angulus pentagoni regularis constet 108° (§. 439), summa trium horum angulorum = 324°, & summa quatuor = 432°: ergo angulus solidus corporis regularis terminati per pentagona, tantum contineri poterit tribus angulis pentagoni regularis (§. 551), sicut dodecaedron.

4.° Angulus exagoni regularis est = 120° (§. 439), & summa trium horum angulorum = 360°: ergo non poterit formari angulus solidus cum angulis planis exagoni regularis (§. 551), ac proinde impossibile est corpus regulare exagonis terminatum, ac multo minus per polygonos regulares majoris numeri laterum, eo quod eorum anguli eo sunt obtusiores, quo pluribus lateribus constent (§. 440).

Ergo quinque tantum corpora regularia supradicta possibila sunt.

AR-

Fig.

ARTICULUS II.

De Mensura superficierum solidorum.

579 THeor. 1. *Superficies prismatis cujuslibet, ejus basibus non computatis, est æqualis producto unius aristæ* BC *per perimetrum unius sectionis* abd, *factæ in prismate per planum perpendiculare ad illam aristam; hoc est* $=$ BC (bd + ab + ad). 70

Cum prisma terminetur per tot parallelogramma lateralia, quot sunt latera plani generantis (553), patet quod superficies lateralis prismatis erit æqualis summæ superficierum omnium parallelogrammorum, illud terminantium. Hoc supposito, cum sit, ex hypoth, planum *abd* perpendiculare ad aristam *BC*, erit etiam perpendiculare ad reliquas aristas *AF*, *DE*, parallelas, & æquales ad *BC* (555), ac consequenter erit superficies parallelogrammi (490) $BDEC = DE \times db = BC \times bd$: parallelogrami $AFCB = BC \times ab$; & parallelogrami $AFED = AF \times ad = BC \times ad$; ergo summa superficierum omnium parallelogramorum, hoc est, superficies lateralis prismatis $= BC \times bd + BC \times ab + BC \times ad = BC\,(bd + ab + ad)$.

580 Coroll. 1. In prismatibus rectis sectio *abd* perpendicularis ad aristam *BC* est parallela ad basim (§§. 552. 527), ac proinde perimetrum $abd = ABD$ (554), & arista $BC =$ altitudini *PR*: ergo superficies lateralis prismatis recti est æqualis producto perimetri suæ basis *ABD* per aristam *BC*, aut per altitudinem *RP*.

581 Coroll. 2. Ergo superficies convexa cylindri recti est æqualis producto circumferentiæ circuli suæ basis per ejus altitudinem *LS*. 73

Fig.

74 582 Coroll. 3. Ergo superficies convexa cylindri obliqui *BDEF* est æqualis producto lateris *DE* per perimetrum *bedf* sectionis perpendicularis ad illud latus (579).

75 583 Theor. 2. *Superficies lateralis pyramidis cujuslibet est æqualis summæ superficierum triangulorum lateralium, eam terminantium.*

Nam cum omnis pyramis terminetur per tot triangula lateralia, quot basis habet latera (561), patet quod ejus superficies lateralis non potest differre à summa superficierum illorum triangulorum.

584 Coroll. 1. Cum sit in pyramide regulari apothema *DS* altitudo omnium triangulorum lateralium *ACS*, *BCS*, *ABS* (565), superficies cujuslibet è his erit productum apothematis per dimidium suæ basis (493): ergo summa superficierum omnium horum triangulorum, seu quod idem est superficies lateralis pyramidis regularis est æqualis producto apothematis *DM* per semiperimetrum polygoni suæ basis.

76 585 Coroll. 2. Ergo superficies convexa coni recti est æqualis producto semicircumferentiæ suæ basis per suum apothema *BS* (567).

75 586 Theor. 3. *Superficies lateralis trunci pyramidis regularis basium parallelarum, quæ vocatur* pyramis truncata, *est æqualis producto altitudinis trapezii lateralis* AC ca *per semisummam perimetrorum duarum basim* acb, ACB, *seu producto altitudinis trapezii lateralis per perimetrum sectionis factæ ad distantias æquales duarum basium.*

Polygonum *acb* est simile *ACB* (562): ergo sunt æqualia inter se, & habent æquale apothema triangula *Sbc*, *Sca*, *Sab*, quæ terminant pyramidem *Sbca* (§§. 564. 565); unde evidens redditur quod æqualia sunt etiam trapezia *BCcb*, *ACca* &c. (10), quorum la-

latera parallela sunt latera basium superioris, & inferioris Fig.
pyramidis truncatæ, quam lateraliter terminant, & quæ habent æqualem altitudinem, quæ est residuum *Dd* apothematis totalis *SD*; sed superficies cujuslibet è his trapeziis *ACca* est æqualis producto semisummæ basium parallelarum *AC*, *ac* per altitudinem *Dd*, seu producto unius lineæ *rm* ductæ ad æquales distantias basium parallelarum per eandem altitudinem *Dd* (494): ergo summa superficierum omnium trapeziorum, seu quod
idem est, superficies lateralis pyramidis truncatæ est 75
æqualis producto semisummæ perimetrorum suarum basium parallelarum per altitudinem unius è trapeziis lateralibus; seu producto &c.

587 Coroll. Ergo superficies lateralis unius coni rec-
ti truncati est æqualis producto lateris *Bb* per semisum- 76
mam circumferentiarum duarum basium parallelarum (567), seu producto lateris *Bb* per circumferentiam unius sectionis *monr* factæ ad æquales distantias basis superioris, & inferioris.

588 Theor. 4. *Superficies sphæroidis cujuslibet est*
æqualis producto ejus axis per circumferentiam circu- 79
li, cui circumscribitur.

Si consideremus semipolygonum regulare *RAG* verti circum axim *RG*, per ejus centrum transeuntem, observabimus quod singulum latus *MR*, *KG* polygoni, cum sit immediatum polis *R*, & *G*, describit conum rectum (570); quod latus *AE* describit cylindrum; & denique quod latera *AM*, *EK* quodlibet describit conum truncatum: ergo superficies cujuslibet è istis solidis erit æqualis producto lateris generatoris, v. g. *AM*, per circumferentiam circuli descripti à puncto *D*, siti in medietate illius lateris (§§. 581. 585. 587); nam in

Fig. cylindro circumferentia circuli unius sectionis ad æquales distantias à suis basibus, proculdubio erit æqualis circumferentiæ circuli cujuslibet è basibus (554); in cono autem circumferentia circuli sectionis factæ ad æquales distantias à cuspide, & à circulo suæ basis, profectò erit æqualis dimidio circumferentiæ circuli basis; sem-
79 per enim erit $= \frac{circ.\ o + circ.\ bas.}{2} = \frac{circ.\ basis}{2}$ (586).

Hoc supposito, sit CD radius circuli inscripti in polygono dato; demittendo super axim RG perpendiculares MS, DB, AI (342), & ducta lin. MH parallela ad RG (370), resultat quod triangula AMH, DBC habent per const. perpendicularia omnia sua latera homologa, ac consequenter sunt similia (415): ergo AM: $MH = SI :: CD : BD$ (453); cumque circumferentiæ circulorum sint proportionales ad radios, quibus describuntur (478), erit etiam $AM : SI ::$ circumf. CD : circumf. BD; ergo $AM \times$ circumf. $BD = SI \times$ circumf. CD (206); sed $AM \times$ circumf. BD est expressio superficiei coni truncati, descripti per AM (587): ergo illa superficies est æqualis producto partis SI axis RG per circumferentiam descriptam radio CD circuli inscripti in polygono dato.

Idem probabitur de superficiebus reliquorum solidorum; ac consequenter superficies totius sphæroidis erit $= (RS + SI + IP + PQ + QG) \times$ circumf. $CD = RG \times$ circumf. CD.

589 Coroll. 1. Cum sphæra considerari possit tanquam sphæroides infinitorum laterum (§§. 473. 571),
78 infertur quod superficies sphæræ est æqualis producto ejus diametri AD per circumferentiam unius è ejus circulis maximis.

590 Coroll. 2. Ergo superficies fragmenti sphærici pro-

producti per revolutionem semisegmenti *RAP* est æqualis producto altitudinis *PA* fragmenti per circumferentiam unius è circulis maximis sphæræ. *Fig.*

591 Coroll. 3. Ergo superficies unius Zonæ sphæricæ productæ per revolutionem semizonæ circularis *BRPC* est æqualis producto ejus altitudinis *CP* per circumferentiam unius è circulis maximis sphæræ. 78

592 Coroll. 4. Cum sit superficies unius circuli maximi sphæræ æqualis producto quartæ partis diametri per ejus circumferentiam (496), infertur quod superficies sphæræ est quadruplum superficiei unius é circulis maximis (589).

593 Coroll. 5. Superficies convexa cylindri *RBAP* circumscripti ad sphæram *ENDM* est æqualis producto circumferentiæ circuli, cujus diameter est $AB = MN$ per axim *ED* sphæræ (581); sed superficies sphæræ inscriptæ est etiam æqualis producto ex *ED* per circumferentiam unius è circulis maximis, seu cujus diameter est *MN* (589): ergo superficies sphæræ est æqualis superficiei convexæ cylindri circumscripti (9). 80

594 Coroll. 6. Si superficiei convexæ cylindri circumscripti additur superficies suarum duarum basium, idem erit ac si addatur superficies duorum circulorum maximorum sphæræ; consequenter resultabit superficies totalis cylindri duplum superficiei sphæræ: ergo superficies sphæræ erit ad superficiem totalem cylindri circumscripti :: $1 : \overline{1+\frac{1}{2}} :: 1 : \frac{3}{2} :: 2 : 3$ (§. 53).

595 Theor. 5. Superficies corporis regularis cujuslibet est æqualis producto superficiei unius è planis illud terminantibus per numerum illorum planorum.

Cum enim æqualia sint omnia plana, quibus omne corpus regulare continetur (577), inventa superficie

 unius

Fig. unius è illis planis, erit superficies totalis corporis regularis æqualis producto superficiei inventæ per numerum superficierum, seu planorum terminantium.

ARTICULUS III.

De Mensura soliditatis solidorum.

596 DEfinit. *Mensura solidorum debet esse solidum,* (294) quod pluries pro unitate sumptum exprimere valeat rationem quam cum eo habeant quælibet alia solida.

597 Schol. Solidum pro unitate sumendum ad mensuranda solida, debet esse cubus arbitrarius; cum enim tres dimensiones sint æquales (556), & similiter anguli (550), facilior redditur expressio ejus rationis cum quibuslibet solidis; unde *cubatura* in Geometria idem est ac *soliditas.*

72 598 Theor. I. *Soliditas prismatis cujuslibet* ADBNF *est æqualis producto numeri unitatum, quibus basis* abdn *cubi pro unitate sumpti continetur in basi* ADBN *prismatis, per numerum unitatum, quibus altitudo* ar *cubi continetur in altitudine* AR *prismatis.*

Super basim *AB* prismatis continebitur cubus *adbnf* tot vicibus, quot in ea contineatur basis *ab* ejusdem; similiter tot vicibus, quot altitudo *ar* unitatis contineatur in altitudine *AR* prismatis, tot continebitur unitas in prismate juxta hanc dimensionem: ergo si consideretur, quod per omnia puncta divisionum altitudinis *AR* prismatis transeat planum parallelum ad suam basim, tot cuborum fragmenta resultabunt, æqualia unitati, quot fuerint divisiones altitudinis *AR*, & in singulis fragmentis tot cubi,

bi, seu unitates erunt, quot vicibus continetur basis *ab* Fig.
unitatis in basi *AB* prismatis: ergo numerus harum unitatum, seu soliditas prismatis invenietur, comperiendo quot vicibus basis *adbn* unitatis continetur in basi *AB* prismatis, nec non & quoties altitudo *ar* illius continetur in altitudine *AR* hujus, & multiplicando primum numerum per secundum; quæ quidem veritas communiter exprimitur, licet improprie (486), dicendo, quod *soliditas prismatis est æqualis producto basis per altitudinem.*

599 Coroll. 1. Dum prisma est rectum, habet pro altitudine (§§. 552. 524) ejus aristam: ergo soliditas prismatis recti cujuslibet est æqualis producto suæ basis per unam è aristis.

600 Coroll. 2. Ergo soliditates cuborum, parallelepipedorum, & cylindrorum sunt æquales producto basium per altitudines.

601 Coroll. 3. Ergo sunt æqualia inter se omnia prismata habentia æquales bases, & altitudines; ac consequenter ea quæ cum habeant æquales bases, sunt inter eadem plana parallela.

602 Theor. 2. *Si duæ pyramides* SABCDE, OGHK 81
habent altitudines SF, OD *æquales*, *soliditates sunt inter se sicut bases* ABCDE, GHK.

Secando duas pyramides plano parallelo ad planum suarum basium, sectiones *abcde*, *ghk* erunt duo polygona æqualiter distantia è cuspidibus S, O (§. 10), & habebimus (544) $ABCDE : abcde :: \overline{SF}^2 : \overline{Sf}^2$ & $GHK : ghk :: \overline{OD}^2 : \overline{Od}^2$; sed $\overline{SF}^2 : \overline{Sf}^2 :: \overline{OD}^2 : \overline{Od}^2$ (§. 211), cum sit ex hypoth. $SF = OD$, & ex supposit. $Sf = Od$: ergo $ABCDE : GHK :: abcde : ghk$: itaut consideratis his sectionibus tanquam altitudinis infini-

Fig. nitè parvæ, erit summa omnium sectionum, seu elementorum *abcde*, seu soliditas pyramidis *SABCDE*, ad summam elementorum *ghk*, seu ad soliditatem pyramidis *OGHK*, sicut basis *ABCDE* illius ad basim *GHK* hujus.

603 Coroll. Ergo si duæ quælibet pyramides æqualis altitudinis, seu inter eadem plana parallela, habeant etiam æquales bases, illæ pyramides erunt in soliditate æquales.

82 604 Theor. 3. *Prisma triangulare dividi potest in tres pyramides æquales.*

In prismate triangulari *ABCDEF* ducantur è angulo *E* in parallelogrammis lateralibus *BCDE*, *BAFE*, diagonales *EC*, *EA*. Si consideretur planum transire per illas diagonales, prisma manebit divisum in duas pyramides *EABC*, *EFDCA*, quarum prima est triangularis (§. 560), ejusque basis *ABC* eadem ac prismatis, & altitudo, cum habeat verticem *E* in basi superiori prismatis, non differt ab hujus altitudine (§. 524).

Si consideretur transire aliud planum per puncta *E*, *F*, *C* secundæ pyramidis *EFDCA* quadrangularis, resultabunt aliæ duæ pyramides triangulares *EFAC*, *EDFC*, quarum bases *FCA*, *FCD* erunt æquales (§. 429), cumque hæ sint in eodem plano, & earum vertices in eodem puncto *E*, eandem habebunt altitudinem (§. 524): ergo erunt æquales (§. 603). Comparata nunc pyramide *EDFC* cum pyramide *EABC*, inveniemus quod basis *EFD* unius est æqualis basi *ABC* alterius, suntque inter eadem plana parallela (§. 553): ergo duæ hæ pyramides sunt æquales inter se (§. 603); ac consequenter tres pyramides *EABC*, *EFAC*, *EDFC* sunt omnes
82 æqualis soliditatis (§. 9): ergo prisma triangulare &c.

605 Coroll. 1. Ergo pyramis triangularis est tertia

pars

pars prismatis ejusdem basis, & altitudinis; hoc est, soliditas est æqualis tertiæ parti producti basis per altitudinem (§. 598). *Fig.*

606 Coroll. 2. Cum dividi possit basis cujuslibet prismatis multangularis in tot triangula, duobus minus, quot latera habeat, mediis diagonalibus ductis è angulo quolibet, si per harum singulas, ac ei correspondentes in basi opposita planum transire consideretur, patet quod prisma multangulare manebit divisum in tot prismata triangularia, quot fuerint, duobus minus, latera basis multangularis. Considerando postmodum, quod per singulam diagonalem basis pyramidis multangularis, ac per ejus cuspidem transit planum, pyramis multangularis manebit divisa in tot pyramides triangulares, quot fuerint latera basis, duobus minus, multangularis; unde resultat quod cum quælibet pyramis triangularis sit tertia pars prismatis ejusdem basis, & altitudinis (§. 605), pyramis multangularis erit semper æqualis tertiæ parti prismatis ejusdem cum ea basis, & altitudinis: ergo soliditas pyramidis cujuslibet est æqualis tertiæ parti producti ejus basis per altitudinem (§. 598).

607 Coroll. 3. Ergo soliditas coni cujuslibet est æqualis tertiæ parti cylindri ejusdem basis, & altitudinis, seu tertiæ parti producti basis per altitudinem (§. 566).

608 Probl. 1. Invenire soliditatem unius pyramidis 81
truncatæ *GHK khg* data ejus altitudine *Dd*.

Solut. 1. Quæratur altitudo *Od* pyramidis deficientis, faciendo (§. 543) $GH : gh :: \overline{Od + Dd} : Od$; erit $Od = \frac{gh \times dD}{GH - gh}$.

2.° Quæratur soliditas pyramidis totalis *OGHK* (§. 606), & etiam pyramidis deficientis *Oghk*.

Sub-

Fig. 3.° Subtrahatur soliditas hujus è soliditate illius; quod superest erit soliditas pyramidis truncatæ, cum sit $OGHK = Oghk + GHKkhg$, ac consequenter (§. 10) $OGHK - Oghk = GHKkhg$.

609 Probl. 2. Invenire soliditatem coni truncati
76 $TBDLldb$, data ejus altitudine Cc, & diametris BL, bl basium.

Solut. 1. Quæratur altitudo Sc coni $Sbdl$ deficientis, faciendo (§. 543) $BL : bl :: Cc + Sc : Sc$; unde resultat $Sc = \frac{Cc \times bl}{BL - bl}$.

2° Quæratur soliditas coni totalis $SBDL$, & etiam coni deficientis $Sbdl$ (607).

3.° Subtrahatur soliditas hujus è soliditate illius; residuum erit soliditas coni truncati propositi.

610 Theor. 4. *Sphæra est æqualis pyramidi habenti pro base superficiem, ac pro altitudine radium sphæræ.*

78 Concipiatur superficies sphæræ resoluta in quadrata infinitè parva, quæ proinde pro planis accipi possint. Si concipiamus quod è centro sphæræ ducantur rectæ ad omnes angulos illorum quadratorum, patet quod sphæra constabit innumeris pyramidibus quadrangularibus, quarum vertices in centro reuniantur, & altitudines à radiis differant quantitate indesignabili, seu nulla; sed summa omnium basium adæquat superficiem sphæræ: ergo tota sphæra erit reipsa, seu reputari poterit pro pyramide, cujus basis est superficies, & cujus altitudo est radius sphæræ.

611 Coroll. 1. Ergo soliditas sphæræ est æqualis producto ejus superficiei per tertiam partem radii (§.606).

612 Coroll. 2. Si vocetur S superficies unius è cir-
80 culis maximis sphæræ, & c ejus radius, erit superficies sphæ-

sphæræ $= 4s$ (§. 592), ac consequenter ejus soliditas $= \frac{4sc}{3}$ (§. 611); sed superficies cylindri circumscripti sphæræ erit $= 2sc$ (§. 600): ergo soliditas sphæræ est ad eam cylindri circumscripti :: $\frac{4sc}{3}$: $2sc$ :: 2 : 3. Fig.

613 Coroll. 3. Sector sphæricus *RAHC* constat ex infinitis pyramidibus, vertices in centro *C* reunentibus, quarumque bases adæquant superficiem sphæricam (§§. 610. 575): ergo soliditas sectoris sphærici est æqualis producto superficiei fragmenti sphærici *ARKHS* (§. 590) per tertiam partem radii sphæræ (§. 611). 78

614 Coroll. 4. Si è soliditate sectoris sphærici *RAHC* (§. 613) subtrahimus soliditatem coni *CRKHS* descripti per triangulum *CPR* (§. 607), residuum erit soliditas segmenti sphærici *ARKHS*.

615 Theor. 5. *Soliditas corporis regularis cujuslibet est æqualis producto soliditatis pyramidis, habentis pro base faciem unam polyedri, ac pro altitudine radium sphæræ, cui possit circumscribi, per numerum facierum corporis, cujus soliditas quæritur.*

Si concipimus corpus quodlibet regulare sphæræ circumscriptum, & è hujus centro duci rectas ad angulos omnium facierum corporis circumscripti, profectò resultabunt tot pyramides, quot sunt illæ facies, omnesque pro altitudine habituras radium sphæræ inscriptæ (§§. 563. 572); sed omnes facies corporis regularis sunt æquales (§. 577): ergo omnes pyramides in quas resolvi potest corpus regulare, sunt æquales inter se (§. 603), ac consequenter inventa soliditate unius è pyramidibus (§. 606), si hæc multiplicetur per numerum facierum corporis (577), habebitur tota sua soliditas: ergo &c.

AR-

Fig.

ARTICULUS IV.

De Similitudine solidorum.

78 616 DEf. Vocantur *corpora similia*, quæ terminantur per æqualem numerum planorum similium, & similiter sitorum.

617 Coroll. 1. Cum in planis similibus æquales sint anguli homologi (§. 472), cumque in corporibus similibus resultent anguli solidi homologi ex variorum planorum concurrentia (§. 547), similium, æqualium, & eodem medio sitorum (§. 616), dubium non est quin anguli solidi homologi sint æquales in corporibus similibus (§. 550).

618 Coroll. 2. Cum sint proportionalia latera homologa in planis similibus (§. 472), patet quod in corporibus similibus erunt etiam proportionales lineæ quælibet homologæ.

619 Coroll. 3. Corpora regularia terminantur per plana regularia, & eadem numero in singulis ordinibus (§. 577), ac proinde similia (473) : ergo etiam erunt similia omnia corpora regularia ejusdem ordinis (§.616).

620 Coroll. 4. Consideratur tota sphæra ut terminata per infinita quadrata infinitè parva; sed hæc sunt similia (§§. 473. 435. 423.) : ergo sunt similes inter se omnes sphæræ (616)

ARTICULUS V.

De Ratione superficierum solidorum inter se.

621 THeor. *Superficies duorum quorumlibet solidorum sunt inter se in ratione composita duarum dimensionum generantium.*

Cum

Cum generatim omnis superficies sit productum duarum dimensionum linearium (*p.* 3. *art.*2.), si S, s repræsentent duas quaslibet superficies, A, B, factores primæ, & a, b, factores secundæ, erit semper $S = AB$, & $s = ab$: ergo $S : s :: AB : ab$; hoc est superficies duorum quorumlibet corporum sunt in ratione composita dimensionum producentium. *Fig.*

622 Coroll. 1. Si $A = a$, erit $S : s :: B : b$; hoc est superficies in quibus sit æqualis una ex dimensionibus producentibus, erunt inter se in eadem ratione, ac aliæ duæ dimensiones superstites.

Sic superficies laterales duorum quorumlibet prismatum ejusdem v. g. altitudinis, erunt inter se ut perimetra sectionum factarum perpendiculariter super unam è aristis (§. 579) &c.

623 Coroll. 2. Si $A : a :: b : B$, erit $AB = ab$, ac consequenter $S = s$; hoc est, quod si dimensiones producentes superficies duorum corporum fuerint reciprocè proportionales, illæ superficies erunt æquales, & vice versa.

624 Coroll. 3. Si $A : a :: B : b$, erit $S : s :: A^2 : a^2 :: B^2 : b^2$; sed in solidis similibus est $A : a :: B : b$ (§. 618); ergo superficies quorumlibet corporum similium sunt inter se ut quadrata dimensionum homologarum quarumlibet; sic superficies duarum sphærarum sunt inter se ut quadrata diametrorum &c.

ARTICULUS VI.

De Rationibus solidorum.

625 THeor. *Duo quælibet solida sunt in ratione composita trium dimensionum, quibus producuntur.*

Vi-

Fig. Vidimus (*p.*3.*art*.3.) quod soliditas est productum unius superficiei per unam lineam; sed cum superficies sit productum duarum dimensionum linearium, resultat quod soliditas est productum trium dimensionum linearium: ergo si S, s repræsentent duo quælibet solida: A, B, C, factores primi; & a, b, c factores secundi, erit universaliter $S = ABC$, & $s = abc$: ergo $S : s :: ABC : abc$, hoc est quod duo quælibet solida sunt in ratione composita trium dimensionum illa producentium.

626 Coroll. 1. Si $A = a$, erit $S : s :: BC : bc$; hoc est, quod solida, quibus una ex dimensionibus æqualis sit, erunt in ratione composita duarum aliarum dimensionum quæ supersunt.

627 Coroll. 2. Si $A : a :: bc : BC$, erit $ABC = abc$, & $S = s$, hoc est, quod *solida in quibus una ex dimensionibus est reciprocè proportionalis producto aliarum duarum, erunt æqualia inter se.*

628 Coroll. 3. Si $A : a :: B : b :: C : c$, erit $S : s :: A^3 : a^3 :: B^3 : b^3 :: C^3 : c^3$; sed in solidis similibus est $A : a :: B : b :: C : c$ (§. 618): ergo solida similia sunt inter se ut cubi suarum dimensionum homologarum.

Sic soliditates duarum sphærarum v. g. sunt inter se ut cubi radiorum, diametrorum, vel quarumlibet aliarum dimensionum homologarum.

PARS

PARS QUARTA.

De Algebræ ad Geometriam applicatione.

ARTICULUS PRIMUS.

De Constructione Geometrica æquationum determinatarum primi, & secundi gradus.

629 DEf. construere *geometricè* æquationem, est lineis mediis invenire valorem incognitæ.

630 Probl. 1. *Construere æquationem linearem, seu primi gradus.*

Sol. Cum in his æquationibus inveniatur valor *analyticus* incognitæ, media additione, subtractione, multiplicatione, aut divisione (156... 159); similiter ejus valor *geometricus* habebitur, media additione, aut subtractione variarum linearum rectarum; vel ad summum, quærendo tertias, aut quartas lineas proportionales (464. 463).

631 Unde 1.° Si $x = a - b + c$, lineæ a & c in unica recta uniuntur, & ex earum summa subtrahendo lineam b, residuum erit valor incognitæ x.

2.° Si $x = \frac{ab}{c}$, erit etiam (160) $cx = ab$; ac proinde (207) $c : a :: b : x$; ergo x est quarta proportionalis ad lineas c, a, b cognitas, qua quæsita (463); habebitur valor ipsius x.

3.° Si $x = \frac{abc}{df}$, erit $x = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{f}$; ac faciendo juxta modo dicta $\frac{ab}{d} = m$, habebimus $x = \frac{mc}{f}$, cujus valor eadem via habebitur.

Fig.

4.° Si $x = \frac{a^2}{b}$, erit $bx = a^2$ (160), ac consequenter (207) $b : a :: a : x$; ergo x est tertia proportionalis ad lineas a, & b cognitas, qua quæsita (464), habebitur valor ipsius x.

5.° Si $x = \frac{a^3}{bc}$, erit $x = \frac{a^2}{b} \cdot \frac{a}{c}$, ac juxta casum quartum faciendo $a^2 = m$, erit $x = \frac{ma}{c}$, quæ constructio pertinet ad casum secundum.

6.° Si $x = \frac{ab + cb}{m + n}$ erit $x = \frac{(a + c)b}{m + n}$, cumque $a + c$ repræsentet lineam æqualem summæ linearum a & c, & similiter $m + n$, si prima appelletur d, secunda e, erit $x = \frac{db}{e}$, quæ constructio pertinet ad casum secundum.

7.° Sit $x = \frac{ab + cd}{e + f}$; omnis difficultas, sicut ex præcedentibus constat, consistit in fractione ad tales terminos reducenda, quod ejus numerator sit productum duorum factorum linearium, ac denominator quantitas linearis; quo circa frequenter ad substitutionem recurritur. Sic in ex. adhibito, si loco cd substituatur alius terminus æqualis, & aliquo ex factoribus alterius termini constans, v. g. a, hic casus ad 6.^{m} reducetur. Ad quod faciemus (463) $a : c :: d$ ad quartam proportionalem, quam m appellabimus, erit (206) $ma = cd$; ac consequenter $x = \frac{ab + am}{e + f} = \frac{(b + m)a}{e + f}$, qui valor ex casu 6.° invenietur.

8.° Si $x = \frac{abc - dcf}{gh + kl}$, fiet methodo casus præcedentis $ef = am$, $kl = ar$, $gh = an$; habebimus $x = \frac{abc - amd}{an + ar} = \frac{bc - md}{n + r}$; & faciendo eadem methodo $dm = bs$, erit $x = \frac{bc - bs}{n + r} = \frac{(c - s)b}{n + r}$; quæ quidem constructio pertinet ad casum sextum.

9.° Si $x = \frac{a^2 + b^2}{e}$, faciemus methodo casus septimi

a^2

Fig.

$a^2 = bn$, erit $x = \frac{bn + b^2}{c} = \frac{(n+b)b}{c}$, quæ est constructio casus sexti.

10.° Si $x = \frac{a^2 - b^2}{c}$ faciendo $a^2 = bn$, erit $x = \frac{bn - b^2}{c} = \frac{(n-b)b}{c}$, & consequenter $c : \overline{n - b} :: b : x$; ut in casu sexto.

632 Probl. 2. *Construere geometricè æquationem quadratam, seu secundi gradus.*

Hujus problematis solutio optime explicabitur constructione casuum sequentium.

1.° Sit $x = \sqrt{ab}$, seu $x^2 = ab$, erit (207) $a : x :: x : b$; ergo x, seu $\sqrt{ab}$ est media proportionalis inter lineas a, & b cognitas: qua inventa (465) habebitur valor x.

2.° Si $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ ducetur lin. $BM = a$, & ejus extremitate M erigetur (343) perpendicularis $MA = b$; ducendo rectam AB, cum angulus AMB sit rectus (332), habebimus (458) $\overline{AB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 = a^2 + b^2$: ergo $\sqrt{\overline{AB}^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = x$ hoc est $x = AB$. 46

3.° Si $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, ducetur recta $AB = a$, super quam tanquam diametrum sumptam, describetur semicirculus AMB; è puncto B ducetur chorda $BM = b$, & punctis M, A, per rectam MA unitis, cum angulus in M sit rectus (381) habebimus (458) $\overline{AB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2$, vel $\overline{AM}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BM}^2 = a^2 - b^2$; ergo $\sqrt{\overline{AM}^2} = \sqrt{a^2 - b^2} = x$; hoc est; $x = AM$. 46

4.° Si $x = \sqrt{\frac{a^3}{b} + cd}$; faciemus $\frac{a^2}{b} = m$ (464), erit $x = \sqrt{am + cd}$; & quærendo (465) duas medias proportionales, unam inter a & m, quam n appellabimus, alteram inter c & d, quam vocabimus e, erit $x = $

 √

Fig. $\sqrt{n^2 + e^2}$; quæ constructio pertinet ad casum secundum.

5.° Sit $x = \sqrt{\left(\frac{ab^2 + cd^2}{b + c}\right)}$ faciendo (463) $\frac{ab}{b+c} = m$, & $\frac{cd}{b+c} = n$, erit $x = \sqrt{bm + dn}$; quiquidem valor habebitur per casum anteriorem.

6.° Si $x = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}$; faciemus (517) $a^2 + b^2 = m^2$, $c^2 + d^2 = n^2$, erit $x = \sqrt{m^2 - n^2}$, quæ constructio pertinet ad casum tertium.

7.° Sit $x = \sqrt{a^2 + \sqrt{b^4 + c^4}}$; faciemus (464) $b^2 = cd$, erit $\sqrt{b^4 + c^4} = \sqrt{c^2 d^2 + c^4} = c\sqrt{d^2 + c^2}$ (131), & faciendo etiam juxt. cas. 2. $\sqrt{d^2 + c^2} = m$ habebimus $c\sqrt{d^2 + c^2} = cm$; ergo $x = \sqrt{\left(a^2 + \sqrt{(b^4 + c^4)}\right)} = \sqrt{c^2 + cm}$; qui valor, quærendo (465) mediam proportionalem inter lineas c & m invenietur per casum secundum.

ARTICULUS II.

De Resolutione aliquorum problematum geometricorum primi, & secundi gradus.

633 PRobl. 1. *Data recta* AB *quocunque modo divisa in* C, *eam usque ad* E *prolongare, taliter ut rectangulum* AE *per* EB *sit æquale quadrato* CE.

83 Solut. Sit $AB = a$, $CB = b$, & $BE = x$ eo quod hæc sit incognita, in cujus determinatione solutio problematis fundatur. Juxta propositam conditionem, esse debet $AE \times EB = \overline{CE}^2$; ergo $\overline{a+x} \cdot x = \overline{b+x}^2$, hoc est $ax + x^2 = b^2 + 2bx + x^2$, seu $ax - 2bx = b^2$; unde $x = \frac{b^2}{a - 2b}$; ergo $\overline{a - 2b} : b :: b : x$; quod indicat incognitam $BE = x$ esse tertiam proportionalem ad $a - 2b$, & b; unde deducitur sequens

Con-

Constructio: sumatur $CD = b$, ut sit $AD = a - 2b$: *Fig.* è punctis C, B erigantur duæ parallelæ CL, BH; fiat $CL = AD$, $BH = CB$, & uniantur puncta L, B cum recta LB, parallelè ad hanc ducatur lin. HE, quæ lin. AB seccabit in E, ac determinabit lin. HE quæsitam. Nam ratione similitudinis (414) triangulorum LCB, 83
HBE, erit (453) $CL : CB :: BH : BE$; hoc est, $\overline{a - 2b} : b :: b : BE = \frac{b^2}{a - 2b}$.

634 Schol. Si $b < \frac{a}{2}$, punctum D cadet semper inter A, & C, & habebit locum præcedens constructio. Sed si $b = \frac{a}{2}$, punctum D cadet in A, & erit $AD = 0$; ergo etiam $CL = 0$; quapropter punctum L cadet in C, & LB super CB; consequenter lin. HE parallela ad LB non concurret cum lin. AB. Denique si $b > \frac{a}{2}$, punctum D cadet ultra punctum A, unde resultabit lin. AD negativa, & ob hanc rationem ducenda erit lin. CL ad latus rectæ AB, primo oppositum; ac proinde etiam lin. HE parallela ad LB secabit lin. AB in latere opposito primo (1).

635 Probl. 2. *In triangulo dato* ABC *inscribere quadratum tale, quod unum ejus lateribus cadat supra basim* BC *trianguli.* 84

Sit quadratum inscriptum $EDFG$; super basim BC de-

(1) Si super rectam AO sumitur punctum quodlibet L tanquam origo linearum LM, LN &c., LK, LI &c, patet quod illæ lin. in puncto L erunt $= o$; ac proinde considerando quod recta LO, cum sit positiva, minuitur usquedum punctum O cadat super L, erit tunc $LO = o$; sed si adhuc imminutio prosequatur, lin. LO convertetur in quantitatem $< o$, ac consequenter negativam. Sic si punctum O retrocedit usque ad punctum K, erit LK quantitas negativa. Ergo lineæ negativæ procedunt semper in sensum contrarium, ac positivæ.

Fig. demittatur perpendicularis AH, quæ quidem erit quantitas cognita, ex eo quod cognitum supponatur triangulum; sit $BC=a$, $AH=b$, $HL=FG=x$. Ob similitudinem triangulorum ABH, AFL erit $AH:AL::AB:AF$. Etiam vi similitudinis triangulorum ABC, AFG erit $AB:AF::BC:FG$; ergo $AH:AL::BC:FG$; hoc est, $b:\overline{b-x}::a:x$; seu alternando, $b:a::\overline{b-x}:x$; & componendo, $b+a:a::b:x$: ergo x est quarta proportionalis ad rectas cognitas $b+a$, a, b.

Constructio. Indefinitè prolongata lin. BC, fiat $HM=BC$, & $MN=AH$, ut sit $HN=a+b$; uniantur
84 puncta A, N cum recta AN, & parallelè ad hanc è puncto M ducatur recta ML, quæ secabit lin. AH in puncto L, per quod duci debet recta FLG parallela ad basim BC, ac demissis postmodum perpendicularibus FD, GE, resultabit quadratum $EDFG$. Nam ratione harum parallelarum AN, LM, erit (452) $MN=AH:AL::HM=BC:HL$. Etiam ob similitudinem triangulorum ABC, AFG (416) erit (453): $AH:AL::BC:FG$; ergo $BC:HL::BC:FG$, ac consequenter $HL=FG$; ergo in quadrilatero $EDFG$ reperiuntur omnes quadrati proprietates (423).

636 Schol. Si angulus ACB fuerit acutus, exacta resultabit præcedens constructio: Si fuerit rectus, patet quod latus GE quadrati coincidet cum CG; si autem fuerit obtusus, pars quadrati $EDFG$ erit extra triangulum ABC, in quo proinde non inscribetur. Idem de angulo B dictum habeatur.

637 Probl. 3. *Invenire duas rectas reciprocè propor-*
85 *tionales ad duas alias datas* AC, CB, *& quarum differentia sit æqualis aliæ rectæ datæ* CS.

Sit $AC=a$, $CB=b$, $CS=c$, & reciproca minor $=x$,

$= x$, major erit $= c + x$: ergo $x : a :: b : \overline{c + x}$; consequenter $ab = cx + x^2$, ac complendo quadratum $x^2 + cx + \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}c^2 + ab$: ergo $x = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab} - \frac{1}{2}c$. Fig.

Constructio. Quæratur media proportionalis CD inter $AC = a$, $CB = b$; faciendo $CE = \frac{1}{2}c$, erit $DE = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab}$, ex quo subtrahendo $EF = \frac{1}{2}c$, remanebit $DF = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + ab} - \frac{1}{2}c = x$.

638 Probl. 4. *Dividere rectam datam* AB *in* F *media, & extrema ratione, ita ut sit* AB : FB :: FB : AF.

Sit $AB = a$, $BF = x$, erit $AF = a - x$; ergo juxta conditionem problematis $a : x :: x : \overline{a - x}$, seu $a^2 = x^2 + ax$; complendo, & extrahendo radicem quadratam, erit $x = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2} - \frac{1}{2}a$. 51

Constructio: formetur ex $AB = a$, & $AC = \frac{1}{2}a$ angulus rectus, & uniendo puncta C, B, erit $CB = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2}$; fiat $CL = \frac{1}{2}a$, & $BF = BL$, erit $BF = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2} - \frac{1}{2}a = x$; quod quidem cum demonstratis in geometria congruit.

639 Probl. 5. *Triangulum facere æqualem alteri dato* HLI, *simulque simile alteri dato* NOP. 86

Sit $HI = a$, $LM = b$, $NP = c$, $QO = d$, basis trianguli quæsiti $= x$, & ejus altitudo $= z$; erit juxta primam conditionem $xz = ab$, & consequenter $a : x :: z : b$; juxta secundam erit $d : c :: z : x$, & faciendo $d : c :: b : m$, erit $z : x :: b : m$, vel alternando $z : b :: x : m$; ergo basis x trianguli quæsiti est media proportionalis inter a, & m; unde hac inventa, & formando in ejus extremitatibus angulos N, P, triangulum resultans erit simile triang. NOP (412). Ulterius juxta dicta, cum sit $m = \frac{bc}{d}$, erit $x = \sqrt{am} = \sqrt{abc}$, & $z = \frac{bx}{m} = \frac{d}{c}\sqrt{\frac{abc}{d}} =$

Fig. $\sqrt{\frac{abd}{c}}$: ergo $xz = \sqrt{\frac{abc}{d}} . \sqrt{\frac{abd}{c}} = ab$; ac proinde triangulum erit æquale proposito *HLI.*

PARS QUINTA.

De Elementis Trigonometriæ planæ.

ARTICULUS PRIMUS.

640 DEfin. 1. Trigonometria plana *est scientia, qua datis tribus partibus trianguli rectilinei* (*ex*
87 *his quinque duobus angulis, & tribus lateribus*), *reliquæ inveniuntur.*

641 Definit. 2. Perpendicularis *DG* ducta è extremitate *D* arcus super radium *HL*, qui transit per aliam ejusdem extremitatem *L* vocatur *sinus*, seu *sinus rectus* arcus *DL*, aut anguli *DHL*, quem metitur. Pars *GL* radii comprehensa inter sinum, & extremitatem arcus, dicitur *sinus versus* ejusdem. Radius *BH* vocatur *sinus totalis*, aut *sinus quadrantis BDL.*

642 Defin. 3. Pars rectæ *LC* tangens circuli in puncto *L*, ac comprehensa inter radium *HL* ductum ad punctum contactus, & rectam *HC* ducta è centro *H* per aliam extremitatem arcus *LD*, dicitur *tangens* illius arcus: & recta *HC*, vel quod idem est, radius *HD* productus, usque dum concurrat in *C* cum tangente, *secans* arcus *DL.*

643 Coroll. 1. Cum arcus *BD* sit complementum arcus *DL* erunt *DE*, *BE*, *BT*, *HT* sinus, sinus versus, tangens, & secans complementi præfati arcus *DL*, quæ lineæ, brevitatis ergo, vocantur *cosinus*, cosinus *versus*, *cotangens*, & *cosecans* arcus *DL*, vel ang. *DHL* quem metitur.

644 Coroll. 2. Ergo omnes sinus super eundem radium

dium insistentes, sunt inter se paralleli (372); ac Fig. 87
consequenter $ED = HG$, & $DG = EH$ (430); hoc est, cos. ED arcus cujuslibet DL est semper æqualis parti HG radii HL, inter sin. DG, & centrum H circuli comprehensæ.

645 Coroll. 3. Ergo sinus arcus cujuslibet est dimidium chordæ arcus dupli. Nam si producatur sin. DG usque ad R, patet quod cum HG sit perpendic. ad DR, erit (346) $DG =$ dimidio ipsius DR, chordæ nempe arcus $DLR = 2DL$. Unde infertur, quod cum radius sit æqualis chordæ 60° (447), sin. 30° est æqualis dimidio radii.

646 Coroll. 4. Si supponimus $DL = BD = 45°$, cum ang. CLH sit rectus, erit ang. $HCL = 180° - 90° - 45° = 45° = DHL$ (401): ergo $CL = HL$ (404); hoc est, tangens 45° est æqualis radio; & idem de cotang., quæ similiter est tangens 45°.

ARTICULUS II.

De Applicatione Algebræ ad lineas Trigonometricas.

647 IN posterum utemur litteris initialibus *sin.*, *cos.* *tang*, *cot.*, *sec.*, *cosec*, *sin. v*, *cos. v*, ad exprimendum sinum, cosinum, tangentem, cotangentem, secantem, cosecantem, sinum versum, cosinum versum. Sic vocando z angulum, seu arcum quemlibet, erit *sin.* z, *cos.* z, &c. idem ac sinus, cosinus, anguli, vel arcus z, &c. Sinus totalis, seu radius exprimetur littera r, & semiperipheria circuli littera p.

648 Schol. Si attentè consideremus naturam linearum trigonometricarum, observabimus quod quando

sin.

Fig. *sin.* $DG = 0$, erit *cos.* $GH = r$, *sec.* HC itidem $= r$, *tang.* $LC = 0$, sed *cosec.* HT, & *cot.* BT infinitæ reddentur. Si ex adverso supponimus quod *cos.* GH decrescit usque dum fiat $= 0$, tunc *sin.* DG, & *sec.* HC fient $= r$, *cot.* $BT = 0$, *tang.* & *sec.* in hoc casu fient infinitæ.

649 Coroll. 1. Ergo 1° supponendo arcum $LD = 0$, habemus *sin.* $DG = 0$, & *cos.* $GH = r$. Considerando eundem arcum positivè sumptum > 0, & $< \frac{1}{2}p$, erunt positivi *sin.* DG, & *cos.* GH. Si arcus deveniat $= LB = \frac{1}{2}p$, erit *sin.* $= r$, *cos.* $= 0$. Si adhuc crescat usquedum fiat $= LBM$, erit *sin.* MI positivus, & *cos.* HI negativus. Si fuerit $= LBN = p$, erit *sin.* $= 0$, & *cos.* $= -r$. Aucto arcu usquedum sit $> p$, sed $< \frac{3}{2}p$ sicut
78 $LBNS$, tunc tam *sin.* SF quam *cos.* FH sunt negativi. Verum si fuerit $= \frac{3}{2}p = LBNA$, *sin.* fiet $= -r$, & *cos.* $= 0$. Crescente adhuc arcu usquedum sit $> \frac{3}{2}p$, sed $< 2p$ usque dum sit v. g. $= LBNAK$, *sin.* KP subsistet negativus, sed *cos.* PH fiet positivus. Si arcus fuerit $= 2p$ *sin.* rursus erit $= 0$, & *cos.* $= r$. Denique si consideremus, quod arcus adhuc augetur, usquedum sit $= 2p + z$, denotando z arcum quemlibet, *sin.* & *cos.* iidem forent, qui simplici arcui z corresponderent.

2°. Si arcus negativè sumptus, fuerit $< \frac{1}{2}p$, sicut arcus LK v. g., *sin.* KP correspondens erit negativus, & *cos.* PH positivus: ergo *sin. negativus cum cos. positivo pertinent ad duos arcus diversos, quorum unus negativus* $< \frac{1}{2}p$, *alter positivus* $> \frac{3}{2}p$, *sed* $< 2p$

3°. Si arcus negativus fuerit $> \frac{1}{2}p$, & $< p$, sicut LAS, erunt negativi tum *sin.* SF, tum *cos.* FH: ergo *sin. & cos. negativi respondent arcui positivo* $> p$, *sed* $< \frac{3}{2}p$, *& alii negativo* $> \frac{1}{2}p$, *sed* $< p$.

4°. Si arcus negativus fuerit $> p$, & $< \frac{3}{2}p$, sicut

$LANM$

LANM, erit *sin. MI* positivus, & *cos. IH* negativus: ergo *sin. positivus cum cos. negativo respondent arcui positivo* $> \frac{1}{2} p$, *&* $< p$, *& alii negativo* $> p$, *&* $< \frac{3}{2} p$. Fig.

5°. Si arcus negativus sit $> \frac{3}{2} p$, & $< 2p$, sicut *LANBD*, erunt positivi tum *sin. DG*, tum *cos.GH*: ergo *sin.* & *cos.* positivi pertinent ad arcum positivum > 0, sed $< \frac{1}{2} p$, & ad alium negativum $> \frac{3}{2} p$, sed $< 2p$. 87

650 Coroll. 2. Ergo quælibet combinatio *sin.* & *cos.* respondet duobus arcubus, positivo, & negativo; ac proinde si semper ac *sin.* est positivus sumimus arcum positivum, & negativum, semper ac est negativus, quicumque sit *cos.*, patet quod ille arcus erit necessario $< 180°$, ac adaptabilis angulis erit calculus sinuum.

651 Coroll. 3. Si arcus *LD* positivè sumptus fuerit $< \frac{1}{2} p$, ejus *tang. LC*, & *cot. BT* erunt ambæ positivæ: si fuerit $> \frac{1}{2} p$, & $< p$, sicut *LBM*, *tang. LZ*, & *cot. BQ* erunt negativæ: si fuerit $> p$ & $< \frac{3}{2} p$, sicut *LBNS*, *tang. LC*, & *cot. BT* convertentur in positivas: si denique fuerit $> \frac{3}{2} p$, & $< 2p$, sicut *LBNAK*, *tang. LZ*, & *cot. BQ* erunt rursus negativæ. Si ex adverso sumamus arcus negativè, sicut $LK < \frac{1}{2} p$, *tang. LZ*, & *cot. BQ* erunt omnino eædem cum respondentibus arcui positivo $LBNAK > \frac{3}{2} p$, sed $< 2p$; & in eodem sensu procedendo inveniemus 1°, quod *tang. LC*, & *cot. BT* positivæ denotant 4 arcus, unum positivum $< \frac{1}{2} p$, alium itidem positivum $> p$, & $< \frac{3}{2} p$, alium negativum $> \frac{1}{2} p$, & $< p$, alium etiam negativum $> \frac{3}{2} p$, & $< 2p$.

2°. Quod *tang. LZ*, & *cot. BQ* negativæ quatuor alios arcus similiter significant, duos positivos *LBM*, *LBNAK*, & duos negativos *LK*, *LANM*.

652 Coroll. 4. Ergo *tang.* & *cot.* positivæ, *tang.* & *cot.* negativæ possunt exprimere arcus $< p$.

Co-

Fig. 653 Coroll. 5. Ergo arcus, cujus *tang.* +, & *cot.* —, aut è converso, impossibilis habendus est.

654 Coroll. 6. *sin. DG*, *tang. LC* & *sec. HC* pertinent (641. 642) ad arcum *LD*, & ejus supplementum *NBD*; unde resultat, vocando z arcum quemlibet, seu angulum, $sin.\ \overline{p-z} = sin.\ z$; $sin.\ \overline{-p+z} = sin. -z = -sin.\ z$; $cos. -z = cos.\ z$; $cos.\ \overline{p-z} = cos.\ \overline{-p+z} = -cos.\ z$: etiam est $sin.\ z = cos.\ (\frac{1}{2}p - z)$; $cos.\ z = sin.\ (\frac{1}{2}p - z)$, quæ doctrina, juxta dicta, facile extenditur ad reliquas lineas trigonometricas.

655 Probl. 1. *Datis sin. vel cos. unius arcus invenire ejus tang., sec., cot., & cosec.*

Solut. Cum sit rectangulum in G triang. *HGD*, erit $\overline{HD}^2 = \overline{HG}^2 + \overline{HD}^2$, seu $r^2 = cos.^2 + sin.^2$ hoc est, *vi hujus æquationis, dato sinu, facile cognoscitur cos. & dato cos., sin., cum radius* r *sit quantitas constans*; &

87 vi hujus proprietatis, ac similitudinis triangulorum rectangulorum *HGD*, *HLC*, *HBT* habebimus semper, ad hujus, & aliorum problematum solutionem, analogias, & æquationes sequentes:

1.ª $GH : GD :: LH : LC$; seu $cos : sin :: r : tang. = \frac{r.\,sin.}{cos.}$

2.ª $GH : HL :: HD : HC$; seu $cos : r :: r : sec. = \frac{r^2.}{cos.}$

3ª $GD : LC :: HD : HC$; seu $sin : tang :: r : sec. = \frac{r.\,tang.}{sin.}$

4.ª $LC :: LH :: HB : BT$; seu $tang : r :: r : cot. = \frac{r^2}{tang.}$

5.ª $LH : HC :: BT : TH$; seu $r : sec :: cot : cosec. = \frac{cot \times sec.}{r}$

6.ª $LC : CH :: HB : HT$; seu $tang : sec :: r : cosec. = \frac{r.\,sec.}{tang.}$

7.ª $GD : GH :: HB : BT$; seu $sin : cos :: r : cot. = \frac{r.\,cos.}{sin.}$

8.ª $HG : HD :: BT : HT$; seu $cos : r :: cot : cosec. = \frac{r.\,cot.}{cos.}$

9.ª $GD : HD :: HB : HT$; seu $sin : r :: r : cosec. = \frac{r^2}{sin.}$

Prob.

656 Prob. 2. *Datis sinibus* BT, CS, *vel cos.* TM, *Fig.*
SM *arcuum* AB $=$ y, & BC $=$ z, *invenire sinum* CN, & 88
cos. NM *arcus* ABC $=$ y $+$ z.

Quoniam dato sinu habetur cosinus, & vice versa (655); cum sint similia triangula rectangula *CSO*, *ONM*, *BTM*, habebimus $\cos. y : r :: \sin. z : CO = \frac{r.\sin. z}{\cos. y}$, $\cos. y : \sin. y :: \sin. z : SO = \frac{\sin. z.\sin. y}{\cos. y} = \cos. z - OM$; ergo
$OM = \cos. z - \frac{\sin. z.\sin. y}{\cos. y} = \frac{\cos. z.\cos. y - \sin. z.\sin. y}{\cos. y}$; etiam erit $r : \sin.$ 88
$y :: OM = \frac{\cos. z.\cos. y - \sin. z.\sin y}{\cos. y} : ON = \frac{\cos. z.\cos. y.\sin. y - \sin. z.\overline{\sin. y}^2}{r.\cos. y}$; ergo $CO + ON$, seu $\sin.\overline{y+z} = \frac{r.\sin. z}{\cos. y} + \frac{\cos. z.\cos. y.\sin. y - \sin. z.\overline{\sin. y}^2}{r.\cos. y}$, & cum sit $\overline{\sin. y}^2 = r^2 - \overline{\cos. y}^2$, substituendo, ac reducendo ad unam denominationem, erit $\sin.\overline{y+z} = \frac{r^2.\sin. z + \cos. z.\cos. y.\sin. y - r^2.\sin. z + \sin. z.\overline{\cos. y}^2}{r.\cos. y} = \frac{\sin. y.\cos. z + \sin. z\cos. y}{r}$.

Ob similitudinem triangulorum præfatorum, habebimus $\sin. y : \cos. y :: ON = \frac{\cos. z.\cos. y.\sin. y - \sin. z.\overline{\sin. y}^2}{r.\cos. y} : MN = \frac{\cos. z.\cos. y.\sin y. - \sin. z.\overline{\sin. y}^2}{r.\sin. y} = \frac{\cos. y.\cos. z. - \sin. y.\sin. z}{r} = \cos.\overline{y+z}$.

657 Probl. 3. *Datis sin.* CN, BT, *seu cosin.* NM, TM *arcuum* CA $=$ y, BA $=$ z *invenire sinum* CS, & *cosinum* SM *arcus* BC $=$ y $-$ z.

Ob similitudinem triangulorum *CSO*, *ONM*, *BTM*, est $\cos. z : \sin. z :: \cos. y : ON = \frac{\cos. y.\sin. z}{\cos. z} = \sin. y - CO$; ergo $CO = \sin. y - \frac{\cos. y.\sin. z}{\cos. z} = \frac{\sin. y\cos. z - \sin. z.\cos. y}{\cos. z}$; hoc supposito etiam habebimus $r : \cos. z :: CO = \frac{\sin. y.\cos. z - \sin. z.\cos. y}{\cos. z}$: $CS = \frac{\sin. y.\cos. z - \sin. z.\cos. y}{r} = \sin.\overline{y-z}$.

Ob eandem rationem erit $\sin. z : r :: NO = \frac{\cos. y.\sin. z}{\cos. z}$: 88
$OM = \frac{r.\cos. y}{\cos. z}$. Etiam $\cos. z : \sin. z :: CS = \frac{\sin. y\cos. z - \sin. z.\cos. y}{r}$:

SO

Fig. $SO = \frac{\sin. y \cos. z . \sin. r - \cos. y . \overline{\sen. z}^2}{r . \cos. z}$; consequenter $SO +$ OM, seu $\cos. \overline{y - z} = \frac{r^2 \cos. y + \sin. y . \cos. z . \sin. z . - \cos. y . \overline{\sen. z}^2}{r . \cos. z}$; sed

88 $\overline{\sen. z}^2 = r^2 - \overline{\cos. z}^2$; ergo $\cos. \overline{y - z} = \frac{\cos. y . \cos. z + \sen. y . \sin. z}{r}$.

658 Coroll. 1. Ergo media additione, & subtractione habebimus.

1.° $\sin. \overline{y + z} + \sin. \overline{y - z} = \ldots . \frac{2 \sin. y . \cos. z}{r}$.

2.° $\sin. \overline{y + z} - \sin. \overline{y - z} = \ldots \frac{2 \cos. y . \sin. z}{r}$.

3.° $\cos. \overline{y + z} + \cos. \overline{y - z} = \ldots . \frac{2 \cos. y . \cos. z}{r}$.

4.° $\cos. \overline{y - z} - \cos. \overline{y + z} = \ldots . \frac{2 \sin. y . \sen. z}{r}$.

659 Coroll. 2. Si facimus $y = z$, vi æquationum præcedentium, & ex eo quod sit $\cos. \overline{y + z} = \frac{\cos. y . \cos. z - \sin. y \sin. z}{r}$, habebimus sequentes:

1.° $\sin. 2 y = \ldots \ldots \ldots . \frac{2 \sin. y . \cos. y}{r}$.

2.° $\cos. 2 y = \frac{\overline{\cos. y}^2 - \overline{\sen. y}^2}{r} = \frac{\overline{\cos. y + \sin. y} . \overline{\cos. y - \sin. y}}{r}$

3.° $\cos. y = \ldots \ldots \sqrt{\frac{r^2 + r . \cos. 2 y}{2}}$.

4.° $\sin. y = \ldots \ldots \sqrt{\frac{r^2 - r . \cos. 2 y}{2}}$.

Quarum duæ primæ deserviunt ad inveniendum *sin.*, & *cos.* arcus dupli, cognito *sin.* aut *cos.* arcus simplicis: Tertia & quarta exprimunt modum inveniendi *sin.* & *cos.* dimidii arcus, cujus *sin.* vel *cos.* cognoscitur.

660 Coroll. 3. Per medium formularum 1.ª 2.ª 7.ª & 9.ª quas invenimus (§. 655), & quod jam probatum est (§§. 656. 657) habemus theor. sequentia.

1.° $\tang. \overline{y \pm z} = \frac{r . \sin. \overline{y \pm z}}{\cos. \overline{y \mp z}} = \frac{r (\sin. y . \cos. z \pm \sin. z \cos. y)}{\cos. y . \cos. z \mp \sin. y . \sin. z}$

2.° $\sec. \overline{y \pm z} = \frac{r^2}{\cos. \overline{y \pm z}} = \frac{r^3}{\cos. y . \cos. z \mp \sin. y . \sin. z}$.

3.° $\cot. \overline{y \pm z} = \frac{r . \cos. \overline{y \pm z}}{\sin. \overline{y \pm z}} = \frac{r (\cos. y . \cos. z \mp \sin. y . \sin. z)}{\sin. y . \cos. z \pm \sin z . \cos. y}$

Co-

4.° $Cosec.\ \overline{y \pm z} = \frac{r^2}{sin.\ \overline{y \pm z}} = \frac{r^3}{sin.\ y\ .\ cos.\ z \pm sin.\ z\ cos.\ y}$. Fig.

661 Coroll. 4. Quoniam valor fractionis non alterantur licet duo ejus termini dividantur per eandem quantitatem, erit

$$Tang.\ \overline{y \pm z} = \frac{\frac{r\,(sin.\ y\ .\ cos.\ z \pm sin.\ z\ .\ cos.\ y)}{sin.\ y\ .\ cos.\ z}}{\frac{cos.\ y\ .\ cos.\ z \mp sen.\ y\ sen.\ z}{sin.\ y\ .\ cos.\ z}} = \frac{\frac{r\,(1 \pm cos.\ y\ sin.\ z)}{sin.\ y\ cos.\ z}}{\frac{cos.\ y}{sen.\ y} \mp \frac{sen.\ z}{cos.\ z}}$$ 88

$$Sec.\ \overline{y \pm z} = \frac{\frac{r^3}{cos.\ y\ .\ cos.\ z}}{\frac{cos.\ y\ cos.\ z \mp sin.\ y\ .\ sin.\ z}{cos.\ y\ .\ cos.\ z}} = \frac{\frac{r^2}{cos.\ y} \cdot \frac{r}{cos.\ z}}{\frac{1 \mp sin.\ y\ sin.\ z}{cos.\ y\ cos.\ z}}$$

Unde cum sit $\frac{sin.}{cos.} = \frac{tang.}{r}$; $\frac{cos.}{sin.} = \frac{r}{tang.}$; & $\frac{r^2}{cos.} = sec.$ resultant sequentia theoremata:

1.° $$Tang.\ \overline{y \pm z} = \frac{r\left(1 \pm \frac{r}{tang.\ y} \cdot \frac{tang.\ z}{r}\right)}{\frac{r}{tang.\ y} \mp \frac{tang.\ z}{r}} = \frac{r^2\,(tang.\ y \pm tang.\ z)}{r^2 \mp tang.\ y\ .\ tang.\ z}$$

2.° $$Sec.\ \overline{y \pm z} = \frac{sec.\ y\ .\ \frac{r}{cos.\ z}}{1 \mp \frac{tang.\ y}{r} \cdot \frac{tang.\ z}{r}} = \frac{r\ .\ sec.\ y\ .\ \frac{r^2}{cos.\ z}}{r^2 \mp tang.\ y\ tang.\ z} = \frac{r\ .\ sec.\ y\ .\ sec.\ z}{r^2 \mp tang.\ y\ .\ tang.\ z}$$

662 Coroll. 5. Cum sit $cot. = \frac{r^2}{tang.}$ & $cosec. = \frac{r\ .\ sec.}{tang.}$, habebimus.

1.° $$Cot.\ \overline{y \pm z} = \frac{r^2}{tang.\ \overline{y \pm z}} = \frac{r^2 \mp tang.\ y\ .\ tang.\ z}{tang.\ y \pm tang.\ z}$$

2.° $$Cosec.\ \overline{y \pm z} = \frac{r\ .\ sec.\ \overline{y \pm z}}{tang.\ \overline{y \pm z}} = \frac{\frac{r^2\ sec.\ y\ .\ sec.\ z}{r^2 \mp tang.\ y\ .\ tang.\ z}}{\frac{r^2\,(tang.\ y \pm tang.\ z)}{r^2 \mp tang.\ y\ .\ tang.\ z}} = \frac{sec.\ y\ .\ sec.\ z}{tang.\ y \pm tang.\ z}$$

663 Coroll. 6. Si facimus $y = z$, etiam habebimus æquationes sequentes:

1.° $$Tang.\ 2\,y = \frac{r^2\ .\ 2\ tang.\ y}{r^2 - tang.\ y^2} = \frac{r^2}{r + tang.\ y} \cdot \frac{2\ tang.\ y}{r - tang.\ y}$$

Sec.

Fig.

$2.^a$ *Sec.* $2y = \dfrac{\overline{r.\ sec.\ y}^2}{r^2 - \overline{tang.\ y}^2} = \dfrac{\overline{sec.\ y}^2}{r + tang.\ y} \cdot \dfrac{r}{r - tang.\ y}$.

$3.^a$ *Cot.* $2y = \dfrac{r^2 - \overline{tang.\ y}^2}{2\ tang.\ y} = \dfrac{r + tang.\ y}{tang.\ y} \cdot \dfrac{r - tang.\ y}{2}$.

$4.^a$ *Cosec.* $2y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{\overline{sec.\ y}^2}{2\ tang.\ y}$.

664 Theor. *Sinus anguli cujuslibet est ad summam radii, & cos., sicut tangens dimidii illius anguli ad radium ipsum.*

89 Si super rectam *BG* describitur semicirculus *BDG*, & in centro *C* formatur angulus $BCD = x$; *DF* erit *sin.*, ut *CF cos.*, & *BL tangens*; ducendo rectam *DG*, & parallelè ad hanc è centro *C* rectam *CO*, erit $DGB = BCO = \frac{x}{2}$ & ejus *tangens* erit recta *BO*; sed ob similitudinem triangulorum *DFG*, *OCB*, est $DF : FG :: OB : BC$; ergo $sin.\ x : \overline{r + cos.\ x} :: tangens\ \frac{x}{2} : r$.

665 Coroll. 1. Cum sint etiam similia triangula *BOC*, *BDF*, habebimus $DF : FB :: CB : BO$: ergo $sin.\ x : \overline{r - cos.\ x} :: r\ tang.\ \frac{x}{2}$; hoc est, *sin.* anguli cujuslibet est ad differentiam *sin.* totalis, & *cos.*, sicut *sin.* totalis ad tangentem dimidii illius anguli.

666 Coroll. 2. Scimus (655) quod $tang. : r :: r : cot.$; ergo

$1.^o$ $Sin.\ x : \overline{r + cos.\ x} :: r : cot.\ \frac{x}{2}$.

$2.^o$ $Sin.\ x : \overline{r - cos.\ x} :: cot.\ \frac{x}{2} : r$.

667 Schol. 1. Sat apertus præcedentium omnium formularum usus, quæ si opportunè adhibeantur, plurima alia facilitare poterunt theoremata, quæ consultò prætermittimus, quia exhibita sufficere nobis videntur.

668 Schol. 2. Efformatæ reperiuntur tabulæ linearum

tri-

trigonometricarum, minutis & gradibus respondentium, *Fig.*
in partibus nempè radii, qui cum supponatur unitati æqualis, divisus consideratur in partes 10000000, pluresve; nec non & logarithmi aucti, respondentes numeris sinus, tangentes &c. repræsentantibus, logarithmis tabularum logarithmic. conformes.

ARTICULUS III.

Propositiones aliquæ circa theoriam, & resolutionem triangulorum.

669 THeor. 1. *In omni triangulo latera sunt ut sinus angulorum oppositorum.* 24

Cum omne triangulum sit inscriptibile in circulo (398), quodlibet è lateribus *AB*, *BC*, *AC* erit chorda arcus correspondentis; consequenter eorum dimidia erunt sinus medietatum illorum arcuum (645); sed arcuum medietates sunt mensuræ angulorum oppositorum *C*, *BAC*, *B* (378): ergo quælibet medietas laterum trianguli est sinus anguli oppositi; cumque medietates sint in eadem ratione cum suis totis (204), sequitur quod in omni triang. erit AB : sin. C :: BC : sin. BAC :: AC : *sin.* B.

670 Theor. 2. *In quolibet triang. si unum latus* AB *secatur per ejus dimidium in* L, *& è angulo* C *ducitur lin.* CL, *erit* sin. z : sin. x :: sin. A : sin. B :: CB : CA. 90

Habemus (669) *sin.* z : *sin.* A :: AL : CL : item *sin.* x : *sin.* B :: $BL = AL$: LC; ergo *sin.* z : *sin.* A :: *sin.* x : *sin.* B, seu *sin.* z : sin. x :: *sin.* A : *sin.* B :: CB : CA (669).

671 Theor. 3. *In quolibet triang. si ultra rectam* CL *ductam sicut in theorem. præcedenti, ducitur quælibet*

Fig *bet recta* DG, *quæ secet in* K *lin.* CL, *erit* GK : KD :: CB × CG : CA × CD.

Patet (669) quod $GK : CK :: sin.\, z : sin.\, t$; similiter $DK : KC :: sin.\, x : sin.\, y$; dividendo primam proportionem per secundam, erit $\frac{GK}{DK} : 1 :: \frac{sin.\, z}{sin.\, x} : \frac{sin.\, t}{sin.\, y}$; sed (670) $sin.\, z : sin.\, x :: CB : AC$, & ob eandem rationem $sin.\, t : sin.\, y :: CD : GC$: ergo $\frac{GK}{DK} : 1 :: \frac{CB}{AC} : \frac{CD}{GC}$, ac tollendo fractiones $GK : DK :: CB \times CG : AC \times CD$.

672 Theor. 4. *In quolibet triang.* ACB, *summa duorum laterum* CA, CB, *est ad differentiam eorumdem, sicut tangens semisummæ angulorum oppositorum* A, B, *ad tangentem suæ semidifferentiæ.*

Sit $CA = a$, $CB = b$, semisumma angulorum A, B, $= m$, semidifferentia $= n$; erit angulus major v. g. $B = m + n$, & minor $A = m - n$; & ita habebimus (669) $\overline{a : b} :: sin.\, \overline{m+n} : sin.\, \overline{m-n} :: \overline{sin.\, m.\, cos.\, n + sin.\, n.\, cos.\, m.} : \overline{sin.\, m.\, cos.\, n - sin.\, n.\, cos.\, m}$; ergo $\overline{a+b} : \overline{a-b} :: 2\, sin.\, m.\, cos.\, n : 2\, sin.\, n.\, cos.\, m :: \frac{sin.\, m}{cos.\, m} : \frac{sin.\, n}{cos.\, n} :: tang.\, m : tang.\, n$.

91 673 Theor. 5. *Si prolongatur latus* DB *cujuslibet anguli* DBG, *ducendo ad libitum rectam* CL, *& parallelè ad hanc è puncto* B *rectam* BK, *erit sin.* x : *sin.* z :: BL : BC.

Ratione parallelarum BK, CL, est $z = y$, $x = C$; ergo $sin.\, x : sin.\, z :: sin.\, C : sin.\, y$; sed $sin.\, C : sin.\, y :: BL : BC$ (669) : ergo $sin.\, x : sin.\, z :: BL : BC$.

674 Coroll. Hoc theoremate obtinetur modus dividendi angulum quemlibet in ratione data. Nam sumendo ad arbitrium *BL*, & prolongando lin. *DB* usque ad *C*, ita ut sit *BL* : *BC* in ratione data, ducendo postmodum rectam *CL*, & parallelè ad hanc per punctum *B* rectam *BK*, manebit divisus ang. *DBG*, sicut petitur.

Theor.

675 Theor. 6. *Si inter latera* BK, BG *anguli cujuslibet* KBG *ducitur recta* LA, *& per verticem* B *parallela* BD, *erit* $sin.\, x : sin.\, \overline{x+z} :: BL : BA$. Fig.

Ratione parallelarum LA, BD, est $x = n$, & cum sit (quia externus) $u = n + z$, erit etiam $u = x + z$; ergo $sin.\, x : sin.\, \overline{x+z} :: sin.\, n : sin.\, u$; sed $sin.\, u = sin.\, m$ (654): ergo $sin.\, x : sin.\, \overline{x+z} :: sin.\, n : sin.\, m :: BL : BA$, cum sit (669) $sin.\, n : sin.\, m :: BL : BA$.

676 Coroll. Hoc theoremate augeri valet ang. quilibet *KBG* in ratione data, eo solo quod sumatur $BL : BA$ in illa ratione, ac ducatur lin. *BD* parallela ad *LA*.

Hæc methodus illis casibus inservit, in quibus angulus incrementi x habere debet rationem datam ad resultantem $x + z$. Sed si volumus quod angulus incrementi x habeat ad angulum propositum z rationem datam, tunc casus sumetur *BL* ad arbitrium, & per punctum *L* ducetur recta indefinita *LC* parallela ad *BK*, & faciendo $BL : BC$ in ratione data, *BC* è vertice *B* ducetur, usque dum occurrat *LC*, ac prolongata postmodum versus *D*, formabit angulum quæsitum x (673).

677 Theor. 7. *In quolibet triang.* ACB, *latus* AB *est ad summam duorum laterum superstitum* AC + CB, *ut differentia eorumdem* AC — CB *ad summam, seu ad differentiam segmentorum* AL ± LB, *quæ format perpend.* CL *demissa è angulo opposito super latus* AB *productum, si opus est*, adhibito signo + quando perpendicularis cadit extra triang.; signo — dum cadit intra illud. 92 93

E vertice *C* radio æquali lateri *CB*, superstitibus duobus minori, describatur circumferentia *DGB*, & producatur latus *CA* usque dum ei occurrat in *D*, cum sit $CB = CD = CG$ (§. 299), erit $AD = AC + CB$, &

 AG

Fig. $AG = AC - CB$. Etiam cum sit $BL = KL$ (§. 346), erit $AK = AL + LB$ in primo casu, & secundo casu $AK = AL - LB$; sed $AB : AD :: AG : AK$ (§. 461): ergo $AB : \overline{AC + CB} :: \overline{AC - CB} : \overline{AL \pm LB}$

678 Theor. 8. *In quolibet triang.* ABC, *quadratum unius lateris* AC *est æquale summæ quadratorum duorum aliorum laterum* $\pm$ *duplo producto basis* AB, *super quam productam, si opus est, cadit perpend.* CL *ducta è extremitate* C *lateris* AC, *cujus quadratum sumitur pro segmento adjacente anguli illi lateri opposito*; adhibito signo +, dum perpend. cadit extra triang., quod quidem accidit quando est obtusus angulus oppositus lateri, cujus quadratum sumitur; & signo — quando perpend. cadit intra triang. quando nempe acutus est angulus oppositus lateri, cujus quadratum sumitur.

Scimus (458) quod $\overline{CA}^2 = \overline{CL}^2 + \overline{LA}^2$; $\overline{CL}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{LB}^2$: etiam est $\overline{LA}^2 = \overline{AB \pm LB}^2 = \overline{AB}^2 \pm 2\,AB \times LB + \overline{LB}^2$; ergo $\overline{CA}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{LB}^2 + \overline{AB}^2 \pm 2\,AB$
92 $\times LB + \overline{LB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 \pm 2\,AB \times LB$.

679 Probl. 1. Datis duobus lateribus CA, CB triang. ABC, & uno angulo A opposito uni ex illis, duos alios
93 angulos invenire ABC, ACB, & latus BA.

Sol. Fiat (669) $CB : CA :: sin.\,A : sin.\,ABC = \frac{CA\,.\,sin.\,A}{CB}$; & ideo si in tabulis quærimus *sin.* anguli A cogniti, per CA multiplicamus, & productum dividimus per CB, quotiens erit valor arcus, vel ang. ABC correspondentis; proinde habebitur etiam (401) angulus $ACB = 180° - A - ABC$.

2.° Faciendo *sin.* A : *sin.* $ACB :: CB : BA$ erit latus $BA = \frac{CB\,.\,sin.\,ACB}{sin.\,A}$.

Schol.

680 Schol. 1. Multo commodius hæ operationes me- Fig.
diis Logarithmis fiunt; cum enim in eis additio, & subtractio æquivaleat multiplicationi, & divisioni numerorum, quos repræsentant, facilitant supramodum operationes.

681 Schol. 2. Si reflectimus super triang. *ACB*, inveniemus quod resolutio præcedens correspondet etiam triang. *ACK*, in quo cum sit *CK* = *CB* (298), eadem sunt data ac in triang. *ACB*, cumque ob hanc rationem 93
sit angulus *B* = *CKB*, resultat *sin. AKC* = *sin. B* (654), ac consequenter data resolutio convenit duobus triangulis *ACB*, *ACK*. Nihilominus cum idem *sin.* positivè sumptus tantum possit correspondere duobus arcubus, quorum unus minor, alius major sit quadrante, tametsi minor semicircumferentia, qui quidem proinde supplementum sit alterius, si ulterius indicetur num ang. *ABC* debeat esse acutus, aut obtusus, clarè determinabitur triang. *ABC* in primo casu, & triang. *ACK* in secundo.

682 Probl. 2. *Datis duobus angulis* A, B, *unius triang.* ACB, *& uno latere* BC, *invenire duo alia* AC, AB.

Solut. Invento ang. $ACB = 180° - B - A$ (401) 90
habebimus (§. 669)

$$Sin.\ A : sin.\ B :: BC : CA = \frac{BC.\ sin.\ B}{sin.\ A}.$$

$$Sin.\ A : sin.\ ACB :: BC : AB = \frac{BC.\ sin.\ ABC}{sin.\ A}$$

683 Prob. 3. *Datis in uno triang.* NOP *duobus lateribus* NO, OP, *& ang.* NOP *inter ea contento, invenire aliud latus* NP, *& angulos* N, P *cum respondentibus perpendicularibus* OQ, NR, *segmenta* OR, RP, NQ, QP, *& aream triang.* 36

Sit $NO = a$, $OP = b$, & ang. $NOP = m$, habebimus (§. 669) $r : sin.\ m :: a : NR = \frac{a.\ sin.\ m}{r}$; $r : cos.\ m :: a :$

Fig. $OR = \frac{a.\ cos.\ m.}{r}$; ergo $RP = b - \frac{a.\ cos.\ m}{r}$; & area triang. $= \frac{NR\ .\ OP}{2} = \frac{ab.\ sin.\ m}{2r}$; & cum sit (§. 678) $\overline{NP}^2 = \overline{NO}^2 - 2OP \times OR + \overline{OP}^2$, erit $\overline{NP}^2 = a^2 - \frac{2ab.\ cos.\ m}{r} + b^2$; ergo $NP = \sqrt{a^2 - \frac{2ab.\ cos.\ m}{r} + b^2}$; quæ formula repræsentat basim trianguli, cujus latera sunt a, b, inter quæ comprehenditur angulus m.

Invento latere NP invenientur ang. P, ONP per sequentes proportiones

$$NP : NO :: sin.\ NOP : sin.\ P = \frac{NO.\ sin.\ NOP}{NP}$$

$$NP : PO :: sin.\ NOP : sin.\ ONP = \frac{B.\ sin.\ NOP}{NP}:$$

$$\text{Ergo } sin.\ P = \frac{a.\ sin.\ m}{\sqrt{a^2 - \frac{2ab.\ cos.\ m}{r} + b^2}}$$

$$Sin.\ ONP = \frac{b.\ sin.\ m}{\sqrt{a^2 - \frac{2ab.\ cos.\ m}{r} + b^2}}$$

Perpendicularis OQ facile inveniri potest, si attendatur quod $OQ \times NP = NR \times OP$, unde resultat $OQ =$

86 $\frac{NR \times OP}{NP} = \frac{ab.\ sin.\ m}{r\sqrt{a^2 - \frac{2ab.\ cos.\ m}{r} + b^2}}$. Inventa perpendic. OQ, & sinibus angulorum P, ONQ, quoniam mediis sinibus habentur cosinus (655), invenientur etiam segmenta NQ, QP per duas proportiones sequentes, $r : cos\ P :: OP : QP = \frac{OP.\ cos.\ P}{r}$, $r : cos.\ ONP :: NO : NQ = \frac{NO.\ cos.\ ONP}{r}$.

684 Schol. Hoc problema posset etiam resolvi per theor. 4. (672); nam cognito ang. NOP, erit $N + P = 180° - NOP$; consequenter sumpto dimidio residui,

è

è hac subtractione prodeuntis, & quærendo ejus tang. Fig.
in tabulis, servando anteriores denominationes, habebimus $\overline{a+b} : \overline{a-b} :: tang. \frac{N+P}{2} : tang. \frac{N-P}{2} = \frac{a-b}{a+b} . tang. \frac{N+P}{2}$; & ita mediis tabulis habebitur ang. æqualis semidifferentiæ angulorum N, P; & ideo cognita semisumma, & semidifferentia, habebitur ang. major, ille nempe qui majori laterum cognitorum opponatur (405), addita semisummæ semidifferentia; & subtrahendo è semisumma semidifferentiam, ang. minor invenietur (171). Denique, cognitis omnibus angulis, & duobus lateribus, tertium invenietur per problema secundum (682).

685 Probl. 4. *Datis tribus lateribus unius triang.* 93
ACB, *reliquum invenire.*

Solut. E quolibet ang. C demittatur super latus ejus oppositum perpendic. CL; & sit $CB = a$, $AB = b$, $AC = c$, & ang. $A = x$; erit $r : cos. x :: c : LA = \frac{c. cos. x}{r}$, sed (678) $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 - 2BA \times LA + \overline{BA}^2$, seu $a^2 = c^2 - \frac{2bc. cos. x}{r} + b^2$; ergo $cos. x = \frac{r}{2bc} . \overline{c^2+b^2-a^2}$; & ita habebimus $LA = \frac{c^2+b^2-a^2}{2b}$; $LB = b - LA = \frac{b^2+a^2-c^2}{2b}$, & $CL = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{BL}^2} = \sqrt{\overline{CB+BL} \times \overline{CB-BL}} = \frac{\sqrt{\overline{a+b+c} . \overline{a+b-c} . \overline{a-b+c} . \overline{-a+b+c}}}{2b}$; & consequenter

area triang. erit $= \sqrt{\frac{\overline{a+b+c} . \overline{a+b-c} . \overline{a-b+c} . \overline{-a+b+c}}{4}}$

$= \sqrt{\frac{\overline{a+b+c}}{2} . \frac{\overline{a+b-c}}{2} . \frac{\overline{a-b+c}}{2} . \frac{\overline{-a+b+c}}{2}}$.

Cognito *cos. A*, etiam cognoscetur ejus *sin.* (655), Fig. ac consequenter habebimus angulo B, $BC : CA :: sin. A : sin. B = \frac{CA.\ sin.\ A}{BC}$.

686 Schol. Theoremate 7 (677) possunt etiam inveniri segmenta BL, LA, quæ format perpendic. CL
93 super basim BA; ac consequenter resolvendo quodlibet è triangulis rectangulis BCL, ALC per probl. 1 (679), solvetur etiam triang. totale ABC.

PARS SEXTA.

De Applicatione Algebræ ad Geometriam superiorem curvarum.

ARTICULUS PRIMUS.

687 TOtum hujus applicationis fundamentum sistit in eo quod, mediis æquationibus, exprimantur leges, juxta quas actum est in curvarum, quarum natura quæritur, descriptione. Et ita unius curvæ æquatio inventa aut data, tanquam regula erit ad eandem describendam, ejusque proprietates detegendas.

ARTICULUS II.

Notiones Præliminares.

688 DEfinit. 1. *Quantitas constans* ea dicitur, quæ in tota operationis serie eundem valorem determinatum servat, v. g. radius quo describitur circulus; has quantitates primis alphabeti litteris designabimus. *Quantitas variabilis* est ea, quæ valorem determinatum non habet, sed quoscunque tum positivos, tum ne-

negativos, tum integros, tum fractionales obtinere valet; imo & rationales, & irrationales, ac ipsius etiam o; has ultimis alphabeti litteris designabimus. Fig.

689 Definit. 2. *Quantitas maxima* est valor major, cujus est capax *variabilis*, quæ quidem natura sua obtinere potest valores usque ad certum terminum crescentes, quò cum perventum fuerit, decrescentes alios accipere incipiet. Valor minor, cujus est capax variabilis, *quantitas minima* vocatur, post eamque incrementum reddit. Illæ autem variabiles quæ in crescendo, & decrescendo limite carent, *carere maximo*, & *minimo* dicuntur.

690 Definit. 3. *Functio* est expressio variabilis, ex una pluribusve variabilibus, & nonnullis constantibus composita. Ejus gradus petitur à numero superiori factorum variabilium, qui in illius terminis reperitur; sic $a+bx-cy$ dicitur functio primi gradus: $bx+cy^2$ secundi: $bxy+ax^2z$ tertii &c.

691 Schol. Idea quantitatum variabilium commode 94 sensibilis reddi potest, media recta indefinita RS, in qua, ut variabili valores omnes, quorum capax est tribuantur, opus est punctum A eligere, è quo successivè portiones ad dextram & sinistram sumi possint arbitrariè, v. g. AP, Ap; eo semper præ oculis habito, quod si ei valores omnes positivi possibiles versus dextram tribuantur, illi qui versus sinistram sumantur, erunt omnes negativi possibiles, quoniam eorum valor in $A=o$.

692 Definit. 4. Punctum A vocatur *origo abscissarum*: AP, AP *abscissæ positivæ*: Ap, Ap *abscissæ negativæ*; seu vice versa prout videatur. In quacunque hypoth., omnes abscissas positivas exprimemus per x, & negativas per $-x$.

Schol.

Fig. 693 Schol. 1. Si post desumptos è punćto A quoslibet valores, erigimus in omnibus punćtis P, p perpen-
94 diculares, velut PM, pm, sed ita ut omnes inter se æqualitatem servent, absdubio si per extrema M, m harum perpendicularium transire concipiamus lineam, hæc erit rećta, & parallela ad RS.

Si perpendiculares in punćtis P, p erećtæ habuerint eandem cum respećtivis abscissis rationem, lin. per omnes earum extremitates transiens erit rećta convergens cum lin. RS; quia deveniet latus unius triang. rećtilinei, in quo lineæ AP, AP esse debent ad PM, PM parallelas in eadem, aut constanti ratione. Sed si perpendiculares erećtæ in punćtis P, & p rationem aliquam habeant cum suis abscissis, ex innumeris, quæ considerari valent, modo nulla sit ex præfatis, lineæ per earum extremitates transeuntes infinitudinem curvarum constituent.

694 Schol. 2. Idem resultabit, licet lineæ erećtæ in P, & p non sint perpendiculares ad RS, modo sint inter se parallelæ, & rationes præfatas servent.

695 Definit. 5. Lin. RS vocatur *axis direćtionis*: perpendiculares PM, pm erećtæ in punćtis P, p, *applicatæ*, aut *ordinatæ orthogonales*: PT erećtæ obliquè ad RS *applicatæ obliquangulæ*: ordinatæ PM, pm dućtæ è parte superiori axis RS *ordinatæ positivæ*: PM', pm' sitæ in parte inferiori *ordinatæ negativæ*, aut vice versa. In quacunque hypothesi applicatas positivas exprimemus per y, negativas per $-y$; ita ut in punćtis P, p, $y = 0$. Abscissæ, & ordinatæ correspondentes vocantur generatim *coordinatæ*.

696 Coroll. 1. Ergo media lin. RS, sicut dićtum est considerata, ideam efformabimus cunćtarum linearum possibilium, tum rećtarum, tum curvarum, earumque

positionis, & proculdubio expressio analytica rationis, Fig.
quam coordinatæ habeant inter se, dabit æquationem lineæ correspondentis.

697 Coroll. 2. Cum in omni æquatione, seu functione in qua duæ variabiles reperiantur, exprimatur ratio aliqua inter illas, quoniam valor unius determinatur per modificationem alterius, profectò in qualibet æquatione duarum variabilium continebitur præcisè linea recta, aut curva. Sic si in æquatione variabilium x, y, arbitrariè, & successivè attribuuntur x omnes valores, quos suscipere valet, è $+\infty$ usque ad $-\infty$ resultabunt omnes valores correspondentes y, & ita ductus lin. rectæ, aut curvæ in æquatione repræsentatæ habebitur.

698 Schol. Ex valoribus datis x resultare solent 94
valores impossibiles y, quod indicat lineam non transire infra, aut supra illud punctum axis; aliquando etiam valor resultans in y transit de positivo in negativum, aut vice versa; quod indicat lineam axim secasse.

699 Coroll. Ergo in hoc casu, faciendo $y = o$ invenietur valor x illi puncto respondens, in quo lin. secat axim. Ex quo infertur quod si faciendo $y = o$ resultat in æquatione etiam $x = o$, signum erit quod in puncto, in quo lin. secat, seu tangit axim, ibi est origo A abscissarum.

700 Schol. 1. Dando itidem valores x, resultare solent in y duo valores; quo casu, si unus sit positivus, alter negativus, signum est quod lin. transit supra, & infra axim respectu puncti ejusdem: si ambo sint negativi, aut ambo positivi, signum erit quod lin. bis transit supra, aut infra illud punctum: si sint æquales, indicabit quod curva regreditur, aut se ipsam secat; quod quidem per valores immediatos determinabitur. Puncta in

Fig. in quibus varii unius curvæ rami concurrunt, vocantur *multipla*; ac speciatim *dupla*, *tripla*, &c. juxta numerum ramorum concurrentium.

701 Schol. 2. Accidit quoque quod præbendo valores x, resultant primò valores reales in y, postmodum valores impossibiles, usquedum rursus valores reales in y resultant; quod indicium est curvam habere varias partes discontinuas; semper autem eadem curva manebit, cum hæ partes determinentur per eandem rationem in æquatione, aut functione contentam. Sic

702 Definit 6. Curva *continua* dicitur ea, cujus omnes partes, seu continuæ, seu discontinuæ sint, determinantur vi unius solius functionis. Verum illa cujus partes, tametsi inter se unitæ, determinantur per varias functiones, aut rationes, vocatur *discontinua*.

703 Defin. 7. Si præbendo valores x resultant in y duo valores æquales, unus positivus, & alter negativus, tunc axis directionis vocatur *axis curvæ*, si applicatæ y sunt orthogonales; si autem sint obliquangulæ, dicetur tantum *diameter curvæ*. Duplum ordinatæ, secantis in illa hypoth. axim, seu diametrum curvæ in duas partes æquales, vocatur *axis*, seu *diameter conjugatus* curvæ, & punctum intersectionis *centrum curvæ*.

704 Coroll. Ergo in hoc casu axis, seu diameter curvæ erit quantitas constans.

705 Schol. Quoniam gradus functionum distinguuntur per majorem numerum dimensionum, quas in suis terminis habent variabiles (§. 690), stabilire poterimus formulas generales, ad quas reducantur functiones innumeræ cujusque gradus. Sic erunt

$a+bx+cy=$ .... M. primi gr.

$M+dx^2+ey^2+fxy=$ .... N. secundi.

$N+$

$N+gx^3+hy^3+kx^2y+lxy^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ P. tert. *Fig.*
$P+mx^4+ny^4+px^3y+qx^2y^2+sxy^3 = \ldots$ quarti &c.

ARTICULUS III.

De Construct. functionum, & resolutione aliquorum aliorum problematum.

706 PRobl. 1. *Invenire lin. contentam in æquatione* nx = cy.

Ducatur axis directionis RS, & eligatur in eo punc- 94
tum A tanquam origo abscissarum: fiat successivè
$x = 0, = 1, = 2, = \infty, = -1, = -2, = -\infty$, erit
$y = 0, = \frac{n}{c}, = \frac{2n}{c} = \frac{n.\infty}{c} = -\frac{n}{c}, = -\frac{2n}{c}, = -\frac{n.\infty}{c}$,

Ergo denotantibus valoribus y longitudinem totidem aliarum ordinatarum, patet quod lin. per earum extremitates transiens tanget in puncto A origine abscissarum, & quoniam crescentibus valoribus positivis, seu negativis x, crescunt etiam valores positivi, aut negativi y, infertur quod lin. repræsentata in æquatione, postquam axim in origine A abscissarum secaverit, est à parte superiori, & inferiori divergens ab axi RS, habetque duos ramos infinitos.

Si facimus $x = a$, erit $am = cy$; ergo $a : y :: c : m$; sed $c : m$ est ratio invariabilis, cum c, & m sint quantitates constantes; ergo quicunque valor abscissæ x attribuatur, semper ordinatæ y correspondebit valor proportionalis, ac consequenter lin. repræsentata per æquationem erit recta (693).

Si sit $x = a$, resultat $y = \frac{am}{c}$; ergo si in extremitate P abscissæ $AP = x = a$ erigatur ordinata orthogo-

Fig. nalis $PM = y = \frac{am}{c}$, recta AM ducta per puncta A, M æquationi satisfaciet. Similiter eveniet, si in illo puncto P erigatur ordinata obliquangula PT, & ducitur recta TA.

707 Coroll. Cum omnes functiones primi grad. repræsentari possint per $a + bx = cy$, si facimus $x = m$, & $a = fm$, erit $a + bx = fm + bm = cy$, seu $\overline{f+b}.\, m = cy$: ergo $m : y :: c : \overline{f+b}$; ex quo infertur quod omnis functio primi gradus repræsentat lineam rectam, cum sit $c : \overline{f+b}$ ratio invariabilis.

708 Probl. 2. *Invenire lineam repræsentatam in æquatione* $y^2 = 2ax - x^2$.

Ducto axi directionis RS, & electo origine abscis-
95 sarum A, apparebit quod si $x = o$, etiam $y = o$: ergo lin. quæsita transiet per punctum A.

Faciendo $y = o$, resultat $x = 2a$; unde infertur quod si è origine A sumimus abscissam $x = AB = 2a$, lin. repræsentata in functione transiet per punctum B.

Si facimus $x = a = AC$ habebimus $y = \pm a$; unde colligitur quod ordinata y habet duos valores æquales in puncto C, unum positivum CG, & alium negativum CK; & quoniam lin. quæsita transire debet per puncta A, G, B, K, patet quod erit curva in illis punctis æque distans à puncto C; unde credi potest quod sit circumferentia circuli.

Si ad comprobandum facimus $x = c = AE$, habebimus $y^2 = 2ac - c^2 = \overline{EM}^2$, & ducendo rectam CM, erit $\overline{CM}^2 = \overline{EM}^2 + \overline{EC}^2 = y^2 + \overline{a-c}^2 = 2ac - c^2 + a^2 - 2ac + c^2 = a^2$: ergo $CM = a$; hoc est, quod *omnia puncta M curvæ quæsitæ sunt æque distantia à puncto* C; *quæ quidem est proprietas characteristica circumferentiæ circuli.*

Præ-

Præterea æquatio ipsa $y^2 = c . \overline{2a-c}$ dat $c : y :: y : \overline{2a-c}$, seu $AE : EM :: EM : EB$: ergo quicunque sit valor x, applicata orthogonalis y semper est media proportionalis inter segmenta AE, & EB diametri AB; quæ est proprietas circuli. Fig.

Si facimus $x = -n = AL$, erit $y^2 = -2an - n^2$, & consequenter $y = \pm\sqrt{-2an-n^2}$, qui sunt valores impossibiles. Similiter si $x = 2a + d = AB + BO$, erit $y^2 = 2a . \overline{2a+d} - (2a+d)^2 = -2ad - d^2$; ergo $y = \pm, \sqrt{-2ad-d^2}$, qui etiam sunt valores impossibiles; unde infertur quod curva repræsentata in æquatione proposita, hoc est circulus, nullam habet partem discontinuam.

709 Probl. 3. *Invenire valorem chordæ cujuslibet* AM *circuli dati* AMGB.

Solut. Super diametrum $AB = 2a$ demittatur è puncto M ordinata orthogonalis ME erit $\overline{AM}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EM}^2 = x^2 + 2ax - x^2 = 2ax$: ergo $x : AM :: AM : 2a$; hoc est, *chorda* AM *est media proportionalis inter omnem* 95 *diametrum, & ejus segmentum adjacens*; quæ est etiam proprietas demonstrata circuli.

710 Coroll. Cum ob hanc rationem sit $\overline{MB}^2 = \overline{ME}^2 + \overline{EB}^2 = 2ax - x^2 + 4a^2 - 4ax + x^2 = 4a^2 - 2ax$, habebimus $\overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 = 2ax + 4a^2 - 2ax = 4a^2 = \overline{AB}^2$; ergo AB est hypothenusa triang. AMB, ac proinde angulus in semicirculo AMB est rectus, prout demonstratum manet.

711 Probl. 4. *Cognitis distantiis duarum applicatarum à centro, majorem invenire.*

Solut. Distet applic. $EM = y$ à centro quantitate $EC = m$, & applic. $PD = z$ quantitate $CP = n$, & sit

m

Fig. $m > n$; ducendo radios $CM = CD = a$, habebimus $a^2 = y^2 + m^2 = z^2 + n^2$; ergo $y^2 + m^2 = z^2 + n^2$; sed $m^2 > n^2$ per hipoth.: ergo $z^2 > y^2$, & consequenter $z > y$; hoc est, *applicatarum illa est major quæ minus distat à centro; & hoc ipsum verificatur de chordis, quarum applicatæ medietates sunt.*

712 Def. 1. *Parametrum curvæ* vocatur tertia proportionalis ad suos axes, seu diametros conjugatas.

713 Coroll. 1. Ergo cum axes, seu diametri inæquales sint, quælibet suum habebit parametrum.

714 Coroll. 2. Ergo in circulo diameter ipse erit parametrum.

715 Def. 2. *Focus curvæ* dicitur punctum in ejus axi principali existens, ubi applicata est æqualis dimidio parametri prædicti axis; & recta ducta è foco ad curvam, vocatur *radius vector.*

716 Coroll. Ergo in curva tot erunt foci, quot puncta in ejus axi principali, ubi applicata sit æqualis dimidio parametri; consequenter in circulo unicus est focus, centrum nempe.

717 Def. 3. *Tangens curvæ* est recta GM, quæ illam in unico puncto M tangit, cum cætera extra cadant: lin.
98 DM erecta perpendiculariter super tangentem GM in puncto contactus M usque ad concurrendum cum axi in puncto D, vocatur *normalis*, seu *perpendicularis ad curvam*: pars PD axis, comprehensa inter normalem, & ordinatam PM, vocatur *subnormalis*: pars PG axis comprehensa inter ordinatam PM, & punctum G in quo tangens secat axim prolongatum, dicitur *subtangens.*

718 Probl. 5. Invenire lin. contentam in æquatione $y^2 = a^2 - x^2$

95 Sol. Ducto axi directionis RS, & electo puncto C tan-

tanquam origine abscissarum, si facimus $y = o$, resultat $x = \pm a$: ergo si sumimus $CB = CA = \pm a$, lin. repræsentata in æquatione transiet per puncta B, A æque distantia à puncto C. Faciendo etiam $x = o$, resultat $y = \pm a$: ergo si in origine abscissarum C eriguntur applicatæ orthogonales $CG = CK = \pm a$, habebimus quod curva transit per quatuor puncta A, G, B, K æque distantia à puncto C; ob quod verisimile apparet quod sit circumferentia circuli, cujus radius $= a$, & centrum C. Fig. 95

Ad hoc comprobandum, supponamus quod faciendo $x = CE$ resultat $y = EM$: si postmodum ducimus è origine C rectam CM, habebimus $\overline{CM}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{EM}^2 = x^2 + y^2 = x^2 + a^2 - x^2 = a^2$: ergo $CM = a$; & ita omnia puncta M curvæ repræsentatæ in æquatione æque distant à puncto C: ergo &c.

719 Coroll. Ergo arbitraria est electio originis abscissarum ad repræsentandam naturam curvarum; & ex hac varietate prodit etiam varietas æquationum, quibus repræsentantur. Sic vidimus eandem curvam per duas æquationes diversas repræsentari; & licet in casibus hucusque propositis axis curvæ coinciderit cum axi directionis, neque hoc necessarium est, sicut in sequenti problemate apparebit.

720 Prob. 6. *Invenire lin. repræsentatam in æquatione* $y^2 = 2ax - x^2 - a^2 + 2ay$.

Sol. Ducto axi directionis HI, & electo origine abscissarum F, si facimus $y = o$, resultat $x = a$: ergo sumendo $FK = a$, lin. transiet per punctum K. Substituendo loco x hunc valorem $x = a$, resultat $y = \pm a + a$, hoc est $y = 2a$, $y = o$: ergo si in puncto K erigatur applicata orthogonalis $KG = 2a$, lin. transiet per puncta G, K.

Si supponimus $x = o$, erit $y = a$: ergo si in origine

Fig. F abscissarum erigitur applicata orthogonalis $FA = a$ lin. transiet per puncta A, G, K, ac proinde erit curva,

Si sumendo $KQ = FK = a$, facimus $x = FQ = 2a$, resultabit in æquatione $y = a$; & ideo erigendo in puncto Q applicatam orthogonalem $QB = a$, habebimus puncta K, A, G, B, per quæ transit curva; cumque ulterius, FA, QB sint æquales, & parallelæ, etiam recta AB erit æqualis, & parallela ad rectam FQ; proinde CK erit etiam æqualis, & parallela ad FA: unde resultat $AC = CB = CK = CG = a$: ergo curva transeunte per puncta A, G, B, K, distat æquè è puncto C; ex quo deducitur, quod est circumferentia circuli, cujus diameter $AB = 2a$, centrum C, & axis directionis HI, ejus tangens in puncto K.

ARTICULUS IV.

De Sectionibus Conicis.

721 VOcantur generatim *sectiones conicæ* illæ quæ resultant in cono secto per quodlibet planum; sic circulus est sectio conica, quæ oritur secando conum per planum parallelum ad suam basim.

Triang. est etiam sectio conica, quæ oritur secando conum per planum, per ejus verticem, juxta axis directionem, transiens, quod quidem idcirco vocatur *triangulum per axim.* Tamen speciatim vocantur *sectiones conicæ* tres quædam sectiones factæ in cono, quarum originem, & proprietates examinabimus.

AR-

Fig.

ARTICULUS V.

De Origine, & æquatione generali sectionum conicarum.

722 PRob. *Invenire æquationem curvæ* MDm *quæ resultat secando conum rectum* ABC *per pla-* 96
num DMP.

Sol. Si consideramus quod per verticem B transit planum BAC perpendiculariter ad basim coni, & quod planum secans DMP est itidem perpendiculare ad idem planum BAC, intersectio duorum planorum erit recta DF. Consideremus quoque quod per punctum M transit planum LMG parallelum ad basim coni; profectò hæc sectio erit circulus perpendicularis ad planum BAC, & ejus intersectio cum plano DMP erit (542. 523.) recta PM perpendicularis ad rectas DF, LG, quæ ex hypoth., sunt in plano BAC; ergo PM est ordinata communis ad circulum, & ad sectionem MDm. 96

Hoc supposito sit $DP = x$, $PM = y$, $BD = d$, ang. $DBF = B$, & ang. $BDF = D$: habebimus juxta naturam circuli $y^2 = LP \times PG$.

Ducendo nunc in plano BAC lin. DE paral. ad CA, & PK paral. ad BC habebimus per triang. BDE, *sin.* DEB: $BD = d :: \sin. B : DE = \frac{d . \sin. B}{\sin. DEB}$; sed (§. 406) $DEB = 90^\circ - \frac{1}{2} B$; ergo $\sin. DEB = \sin. (90^\circ - \frac{1}{2} B) = \cos. \frac{1}{2} B$ (§. 654); & consequenter $DE = \frac{d . \sin. B}{\cos. \frac{1}{2} B}$; sed (§. 659) (supposito pro nunc ac postmodum quod *sin.* totalis $= 1$) $\sin. B = 2 \sin. \frac{1}{2} B \cos. \frac{1}{2} B$; ergo $DE = \frac{d . 2 \sin. \frac{1}{2} B \cos. \frac{1}{2} B}{\cos. \frac{1}{2} B} = 2d \sin. \frac{1}{2} B$. Etiam virtute triang. DKP habebimus *sin.*

Fig. $DKP : DPK :: x : DK = \frac{x \cdot sin. DPK}{sin. DKP}$; sed (§. 365) ang. $DKP = DEB$, $DPK = DFE = D + B$ (§. 400), & $sin. DEB = cos. \frac{1}{2} B$, juxta demonstratum; ergo $DK = \frac{x \cdot sin. \overline{D + B}}{cos. \frac{1}{2} B}$ & consequenter $KE = PG = DE - DK$

$= 2d\, sin. \frac{1}{2} B - \frac{x \cdot sin. \overline{D + B}}{cos. \frac{1}{2} B}$.

Habemus etiam per triang. DPL, $sin. DLP : x :: sin. D : LP = \frac{x \cdot sin. D}{sin. DLP}$; sed (§. 654) $sin. DLP = sin. BLG = sin. BGL = sin. BED = cos. \frac{1}{2} B$; ergo $LP = \frac{x \cdot sin. D}{cos. \frac{1}{2} B}$ qui valores substituti in æquatione $y^2 = LP \times PG$ dant $y^2 = \frac{sin. D}{\overline{cos. \frac{1}{2} B}^2} (2dx\, sin. \frac{1}{2} B\, cos. \frac{1}{2} B - x^2\, sin. \overline{D + B}) = \frac{sin. D}{\overline{cos. \frac{1}{2} B}^2}$
96 $(d\, x\, sin. B - x^2\, sin. \overline{D + B})$.

723 Schol. Tres casus occurrere valent. 1° Quando $D + B = 180°$, quod quidem accidit, dum planum secans DMP est parallelum ad latus BC; quo casu sectio conica vocatur *parabola*, & ejus æquatio $y^2 = \frac{sin. D \cdot sin. B}{\overline{cos. \frac{1}{2} B}^2}$.

$dx = \frac{\overline{sin. B}^2}{cos. \frac{1}{2} B} \cdot dx = dx \frac{(2\, sin. \frac{1}{2} B \cdot cos. \frac{1}{2} B)^2}{\overline{cos. \frac{1}{2} B}^2} = 4dx\, \overline{sin. \frac{1}{2} B}^2$.

2.° Dum $D + B$ est minor 180°, quoties nempe planum secans DMP productum secat aliud latus BC; & tunc sectio resultans vocatur *ellipsis*, & ejus æquatio est $y^2 = \frac{sin. D}{\overline{cos. \frac{1}{2} B}^2} (dx \cdot sin. B - x^2 \cdot sin. \overline{D + B})$.

Dum

3.° Dum $D+B$ excedit valorem 180°, ut accidit *Fig.*
quando planum secans *DMP* productum secat aliud latus *BC* etiam productum versus verticem *B* coni; quo casu sectio conica vocatur *hyperbola*, cujus æquatio est $y^2 = \frac{sin.\ D}{cos.\ \frac{1}{2}B^2}(dx\,.\,sin.\ B + x^2\ sin.\ \overline{D+B-180°})$; nam cum sit $D+B > 180°$, ejus *sin.* debet esse negativus (649) æqualis alteri positivo tot grad. quot $D+B$ excedit 180°.

ARTICULUS VI.

De Parabola.

724 ÆQuatio ad hanc curvam est $y^2 = 4dx\ \overline{sin.\ \frac{1}{2}B}^2$, & faciendo quantitatem constantem $4d\ \overline{sin.\ \frac{1}{2}B}^2 = p$, erit $y^2 = px$, qua æquatione media, figuram, construct., & proprietates parabolæ comperire satagemus. Ad hoc ducatur axis directionis *R*, & eligatur 97
origo *A* abscissarum. Patet quod faciendo $x = o$, resultat $y = o$, & vice versa; ergo parabola transit per punctum *A*, quod *vertex parabolæ* appellatur. Ex eadem æquatione resultat $x : y :: y : p$; hoc est, *omnes ordinatæ* PM *sunt mediæ proportionales inter suas abscissas* AP, *& quantitatem constantem p*: ergo si è puncto *A* sumantur valores quilibet *AP*, *AP* &c., & inter singulas *AP*, & p mediæ proportionales *PM*, *PM* &c. quærantur, ac supra puncta *P* axis perpendiculariter attollantur, curva transiens per omnia puncta *M*, & *A* erit parabola.

Cum sit $y = \pm\sqrt{px}$ patet quod cuilibet abscissæ *AP* respondent duæ applicatæ æquales, una positiva *PM*, alia negativa *Pm*; ergo parabola habet duos ramos, qui

Fig. è vertice A procedentes, alius supra, alius infra axim tendit; & ob eandem rationem RS semper erit axis parabolæ.

Cum sit $y^2 = px$, crescente x ad infinitum, usque crescet similiter y: ergo duo rami cujus curvæ sunt infiniti, divergentes inter se, & ab axi RS, qui quidem idcirco erit etiam infinitus, ac consequenter ejus punctum medium distabit infinitè à vertice A: consequenter duplum ordinatæ correspondentis erit ejus axis conjugatus, etiam infinitus.

97 725 Coroll. 1. Cum in omni casu sit $x : y :: y : p$, quantitas p constans erit tertia proportionalis ad abscissam, & applicatam, etiam dum hæ coordinatæ sunt infinitæ: ergo p est parametrum axis curvæ; sicque dicemus *quod in parabola quadratum ordinatæ est æquale rectangulo abscissæ per parametrum.*

726 Corol. 2. Cum sit itaque $y^2 = px$, erit respectu alterius ordinatæ $= v$, & alterius abscissæ $= z$, $v^2 = pz$; ergo $y^2 : v^2 :: px : pz :: x : z$; & consequenter $y : v :: \sqrt{x} : \sqrt{z}$; hoc est, *quod in parabola quadrata ordinatarum sunt sicut abscissæ: & ordinatæ sicut radices quadratæ suarum abscissarum.*

727 Probl. 1. *Invenire focum in parabola.*

Solut. Quoniam applicata in puncto foci est æqualis dimidio parametri, faciendo $y = \frac{p}{2}$, erit $y^2 = \frac{p^2}{4} = px$; consequenter $x = \frac{p}{4}$; hoc est *vertex in hac curva distat à vertice* A *quarta parte parametri* p; *& ideo si sumimus* AF $= \frac{p}{4}$, *erit* F *focus parabolæ.*

728 Probl. 2. *Determinare in parabola valorem unius radii vectoris cujuslibet* FM, *hoc est distantiam foci* F *à puncto quolibet* M *parabolæ.*

So-

Solut. Cum sit $AP = x$, erit $FP = AF - AP = \frac{p}{4} - x$, seu $= AP - AF = x - \frac{p}{4}$; $\overline{FP}^2 = x^2 - \frac{px}{2} + \frac{p^2}{16}$, cum sit etiam juxta equationem $\overline{PM}^2 = y^2 = px$, habebimus $\overline{FM}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{PM}^2 = x^2 - \frac{px}{2} + \frac{p^2}{16} + px = x^2 + \frac{px}{2} + \frac{p^2}{16}$; ergo $FM = x + \frac{p}{4}$; hoc est, *in parabola radius vector quilibet, vel quod idem est, distantia foci ad quolibet punctum parabolæ est æqualis abscissæ respondenti addita quarta parte parametri.* Fig.

729 Coroll. Ergo vertex cujuslibet diametri parabolæ distat à foco F quantitate $x + \frac{p}{4}$, cumque in hac curva distantia foci ad verticem sit æqualis quartæ parti parametri (731), infertur quod parametrum cujuslibet diametri parabolæ est $= 4x + p$; hoc est, æquale parametro p axis principalis, addito quadruplo abscissæ correspondentis. 97

730 Probl. 3. *Per punctum* M *datum in parabola* AM *ducere tangentem* GM.

Sol. E puncto M demittatur ordinata orthogonalis PM, & faciendo $PG = 2x$, ducatur GM quæ erit tangens quæsita. Consideretur GP crescere, aut minui quantitate, licet minima, $Pc = n$, & erigendo in punctis c perpendiculares ch, dicatur pars $co = z$; erit $GP : Gc :: PM : ch$, seu $2x : \overline{2x \pm n} :: y = \sqrt{px} : ch = \frac{(2x \pm n)\sqrt{px}}{2x} = \sqrt{px \pm np + \frac{n^2p}{4x}}$; etiam erit (730) $\sqrt{x} : \sqrt{x \pm n} :: y = \sqrt{px} : z = \frac{\sqrt{px}\,.\,\sqrt{x \pm n}}{\sqrt{x}} = \sqrt{px \pm np}$; verum sive n sit quantitas positiva, aut negativa, semper est $\sqrt{px \pm np + \frac{n^2p}{4x}} > \sqrt{px \pm np}$; ergo semper $ch > co$; hoc est, licet minimus sit valor n, ordinatæ co ad parabolam

Fig. iam sunt minores ordinatis ch ad triang. GPM quantitate $\frac{n^2}{4x}$, nec esse æquales verificabitur nisi dum $n = o$; proinde GM tangit in unico puncto M parabolam reliquis extra eam cadentibus : ergo &c.

731 Coroll. 1. Ergo subtangens GP est semper dupla abscissæ AP, cum in omni casu segmentum externum GA æquale sit dictæ abscissæ.

732 Coroll. 2. Medio triang. rectangulo GMD habebimus $GP : PM :: PM : PD$, seu $2x : \sqrt{px} :: \sqrt{px} : PD = \frac{p}{2}$, hoc est, quod *subnormalis* CD *est semper æqualis dimidio parametri, ac proinde est quantitas constans.*

97 733 Coroll. 3. Ergo erit tangens $GM = \sqrt{\overline{GP}^2 + \overline{PM}^2} = \sqrt{4x^2 + px} = \sqrt{4MF \cdot x}$; & normalis $MD = \sqrt{\overline{PD}^2 + \overline{PM}^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + px} = \sqrt{FM \cdot p}$.

734 Coroll. 4. Cum sit GD æquale summæ subtangentis, & subnormalis $= 2x + \frac{p}{2}$, erit $\frac{GD}{2} = x + \frac{p}{4}$: ergo $\frac{GD}{2} = GF = FD = FM$ & punctum F erit focus parabolæ, consequenter si è hoc puncto describitur radio $FG = FD$ circulus, ejus circumferentia transiet per punctum M.

735 Coroll. 5. Ergo si è foco F cum aliquo intervallo ad quodlibet punctum M parabolæ describitur semicirculus, ejus semicircumferentia determinabit puncta G, D subtangentis & subnormalis, ac proinde tangentem, & normalem in illo puncto M.

736 Coroll. 6. Ergo triang. GFM erit semper Isoscele; ac proinde si per punctum M ducitur lin. MK parallela ad axim AD, erit ang. $KML = MGF = FMG$.

737 Probl. 4. *Invenire æquationem parabolæ respectu axis* BE *perpendicularis ad axim principalem* RS *in ejus*

ejus vertice A, *quam vocare solent æquationem* ad parabolam externam. Fig.

Solut. Substituatur in æquatione $y^2 = px$ loco y, x, nec non & x loco y; habebitur $x^2 = py$, quæ quidem est æquatio quæsita, denotante y ordinatas BM, ac x abscissas AB.

738 Probl. 5. *Invenire æquationem ad parabolam respectu axis* MK *paralleli ad* RS, *& ejus applicatas* BE *parallelas ad tangentem in vertice* M.

Solut. Fiat $ME = x$, $BE = y$, $AP = AG = a$, habebimus $MP = \sqrt{ap}$, ac appellando q parametrum correspondens novo axi MK, erit (§. 733) $q = p + 4a$, & $MG = \sqrt{aq}$ (§. 737).

Hoc posito, ducendo lin. BV perpendicularem ad axim principalem, triang. similia BFV, MGP dabunt $MG : BF :: MP : BV$, seu $\sqrt{aq} : y + \sqrt{aq} :: \sqrt{ap} : BV = \frac{y\sqrt{ap}}{\sqrt{aq}} + \sqrt{ap}$; etiam erit $MG : BF :: GP : FV$, seu $\sqrt{aq} : y + \sqrt{aq} :: 2a : FV = \frac{2ay}{\sqrt{aq}} + 2a$; sed $FA = FG - AG = x - a$, cum sit $FG = ME$; ergo $AV = FV + FA = x + a + \frac{2ay}{\sqrt{aq}}$; cumque per naturam parabolæ $p \,.\, AV = \overline{BV}^2$, habebimus $ap + px + \frac{2apy}{\sqrt{aq}} = (\sqrt{ap} + \frac{y\sqrt{pa}}{\sqrt{aq}})^2 = ap + \frac{2apy}{\sqrt{qa}} + \frac{apy^2}{aq}$.

Unde transferendo, & reducendo, deducemus denique $y^2 = qx$, ac consequenter $y = \pm\sqrt{qx}$; hoc est cuilibet abscissæ correspondent duæ applicatæ æquales, una positiva, & altera negativa: ergo MK est diameter parabolæ. Unde apparet ingentem esse similitudinem inter æquationem ad parabolam respectu cujuslibet diametri, & eam quæ propriam naturam definit per respectum ad axim principalem. 98

Probl.

Fig. 739 Probl. 6. *Dato axi* AV, *& parametro* = p *invenire diametrum* MK, *quæ cum ejus ordinatis efficiat ang.* MEf = a.

Solut. Hujus problematis pendet à determinatione puncti P, in quo perpend. MP secat axim. Ad hoc, faciendo $AP = x$, habebimus medio triangulo rectangulo GPM, $GP = 2x : PM = \sqrt{px} :: cos.\ a : sin.\ a :: 1 : MG = \frac{sin.\ a}{cos.\ a} = tang.\ a = \frac{\sqrt{px}}{2x}$, consequenter $\overline{tang.\ a}^2 = \frac{p}{4x}$; ergo $x = \frac{p}{4\,\overline{tang.\ a}^2} = \frac{p}{4}\,\overline{cot.\ a}^2$; ac determinato per hanc æquationem puncto P, perpend. PM determinabit verticem M diametri MK, cujus parametrum erit $= p + 4x = p + \frac{p\,\overline{cos.\ a}^2}{\overline{sin.\ a}^2} = \frac{p\left(\overline{sin.\ a}^2 + \overline{cos.\ a}^2\right)}{\overline{sin.\ a}^2} = \frac{p}{\overline{sin.\ a}^2}$, cum sit $cot. = \frac{cos.}{sin.}$, & $\overline{sin.\ a}^2 + \overline{cos.\ a}^2 = 1$. Hinc facile cognoscitur hoc problema duas admittere solutiones; nam determinato puncto P, determinare etiam possumus punctum m, & applicatam $Pm = -\sqrt{px}$ &c.

740 Probl. 7. *Data diametro* MK, *cujus vertex est punctum* M, *ejus parametro* = q, *& ang. coordinatarum* $= a$, *invenire axim* AV, verticem A, *& parametrum* p.

Servando easdem denominationes ac in problemate antecedenti, habebimus $q = p + 4x = \frac{p}{\overline{sin.\ a}^2}$; consequenter $p = q\,\overline{sin.\ a}^2$, $x = \frac{q-p}{4} = \frac{q - q\,\overline{sin.\ a}^2}{4} = \frac{q\left(1 - \overline{sin.\ a}^2\right)}{4} = \frac{q\,\overline{cos.\ a}^2}{4}$, & $PM = \pm\sqrt{px} = \frac{1}{2}\,q\ sin.\ a.\ cos.\ a = \frac{1}{4}\,q\ sin.\ 2a$ (§. 659); & ita erigendo in M per-

perpendiculariter ad diametrum datam *MK* lin. $MP = $ Fig.

$\frac{q\,\overline{cos.\,a}^2}{4}$ habebitur punctum *P*, per quod ducta *AV* parallela ad *MK*, problema resolutum dabitur.

741 Prob. 8. *Dato, seu ad arbitrium electo parametro unius parabolæ, eam mechanicè describere.*

Ducatur axis *RS*, & electo in eo puncto *A*, sumatur $AF =$ quartæ parti parametri, ut habeatur focus *F*; in puncto *A* erigatur *EAB* perpend. ad *RS*, & sit *KMB* regula mobilis, parallela ad *AS* juxta directionem *BE*, sumendo filum $KMF = KM + PA + AF$, alligabi- 97
tur una ex ejus extremitatibus in foco *F*, & altera in extremitate *K* regulæ *BK*; hoc facto applicetur regula *BK* ad axim *RS*, usquedum punctum *B* cadat super punctum *A*, & procedatur postmodum discedendo, ducendo semper filum bene extentum, & eidem unitum medio frustulo lapidis delineatorii *M* è puncto *A*; profectò lin. hoc motu continuo descripta, erit parabola; semper enim verificabitur quod sit $FM = AP\ AF = x + \frac{p}{4}$, quæ quidem est proprietas parabolæ (§. 782), quæ nequidem in puncto *A* deficit, cum in eo sit $x = 0$.

ARTICULUS VII.

De Ellipsi.

742 ÆQuatio ad ellipsim est $y^2 = \frac{sin.\,D}{\overline{cos.\,\frac{1}{2}B}^2}\,(dx\ sin.\,B -$
$x^2\ sin.\,\overline{D+B})$ in qua apparet cuilibet abscissæ *AP* cor- 99
respondere duas ordinatas æquales, unam positivam *PM*, & aliam negativam *Pm*; & siquidem facimus $y = 0$ resul-

Fig.

sultat $x=0$, $x=\frac{d\,\sin. B}{\sin.\,\overline{D+B}}$; sumendo itaque $AB=\frac{d\,\sin. B}{\sin.\,\overline{D+B}}$, habebuntur puncta A, & B in quibus ellipsis secat axim directionis, determinando ejus axim majorem AB; quem faciemus $=2a$, & erit $y^2 = \frac{\sin. D\,\sin. B\,dx}{\cos.\frac{1}{2}B^2} - \ldots$

$\frac{\sin. D.\,\sin.\,\overline{D+B}x^2}{\cos.\frac{1}{2}B^2} = \frac{\sin. D.\,\sin. B\,.\,\sin.\,\overline{D+B}\,dx}{\cos.\frac{1}{2}B^2\,.\,\sin.\,\overline{D+B}} - \ldots\ldots$

$\frac{\sin. D.\,\sin.\,\overline{D+B}x^2}{\cos.\frac{1}{2}B^2} = \frac{\sin. D.\,\sin.\,\overline{D+B}}{\cos.\frac{1}{2}B^2}(2ax - x^2)$. Si facimus $x=\frac{1}{2}AB=AC=a$, & appellamus b applicatam, aut semiaxim minorem CD, erit $b^2 = \frac{\sin. D.\,\sin.\,\overline{D+B}}{\cos.\frac{1}{2}B^2}a^2$ seu $\frac{b^2}{a^2} = \frac{\sin. D.\,\sin.\,\overline{D+B}}{\cos.\frac{1}{2}B^2}$; ergo $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$, quæ quidem æquatio repræsentat naturam ellipsis, numerando abscissas è vertice A, ac etiam cum ea axes conjugatos, atque in sequentem analogiam resolvitur $y^2 : x\,.\,\overline{2a-x} ::$
99 $b^2 : a^2$, seu $\overline{PM}^2 : AP \times PB :: \overline{CD}^2 : \overline{CB}^2$; hoc est *in ellipsi quadratum unius ordinatæ cujuslibet ad axim majorem, est ad rectangulum segmentorum, quæ super illum axim efformat, sicut quadratum axis minoris ad quadratum axis majoris.*

Si facimus $x = a - x$, hoc est $CP = x$, erit $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ æquatio simplicior quam prima, quæ manifestat naturam ellipsis, numerando abscissas è centro C; observatuque dignum est, quod si supponatur $b = a$, resultat $y^2 = a^2 - x^2$, quæ est æquatio ad circulum (718); un-

unde infertur quod circulus potest considerari sicut ellipsis *æquilatera*, seu axium æqualium. *Fig.* 99

Hæc æquatio dat $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$; ergo crescente valore ex x in sensu positivo, seu negativo, decrescit valor ex y, usque dum deveniendo $x = \pm a$ fit $y = o$; ex quo deducitur, quod ellipsis est curva clausa, quæ puncta A, B non pertransit, quoniam si fit $x > a$, resultant valores impossibiles in y.

743 Coroll. 1. Cum æquatio $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ transformetur facile in hanc, $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$ habebimus $x^2 : \overline{b - y} \,.\, \overline{b + y} :: a^2 : b^2$, seu $\overline{Mn}^2 : Cn \times nE :: \overline{AC}^2 : \overline{CD}^2$; ergo *quadrata ordinatarum ad axim minorem ellipsis, sunt ad rectangula segmentorum, super illum axim efformatorum, sicut quadratum axis majoris ad quadratum axis minoris.*

744 Coroll. 2. Appellando p parametrum axis majoris, erit (§. 712) $2a : 2b :: 2b : p = \frac{2b^2}{a}$, unde resultat $b^2 = \frac{1}{2} ap$, qui quidem valor substitutus in æquationibus superioribus, dat $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2)$, $y^2 = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2)$; primam pro iis casibus, in quibus numerantur abscissæ è vertice; secundam dum numerantur è centro.

745 Coroll. 3. Si è centro C ellipsis describitur circulus radio $= AC = a$, & applicata PM producitur usque ad N, faciendo $PM = y$, $PN = z$, erit $y^2 : (a^2 - x^2) :: b^2 : a^2$; sed per naturam circuli $z^2 = a^2 - x^2$: ergo $y^2 : z^2 :: b^2 : a^2$, seu $y : z :: b : a$; ergo ordinatæ ad ellipsim sunt ad ordinatas in circulo sui axis majoris per diametrum, sicut axis minor ellipsis ad suum axim majorem.

Si supponamus quoque quod super axim minorem ellipsis describitur alius circulus, faciendo ordinatam ad ellip-

Fig. ellipsim $= s$, & ordinatam ad circulum $= u$, erit $s^2 : u^2 ::$
99 $a^2 : b^2$, vel invertendo $u^2 : s^2 :: b^2 : a^2$, consequenter $u : s :: b : a$; ergo $y : z :: u : s$; hoc est, *ordinatæ in ellipsi respectu sui axis majoris sunt ad ordinatas in circulo, formato super illum axim per diametrum, in ratione inversa ordinatarum in ellipsi respectu sui axis minoris, ad ordinatas in circulo descripto super hunc axim per diametrum.*

746 Prob. 1. *Invenire focum, aut focos ellipsis.*

Fiat $y = \frac{1}{2} p = \frac{b^2}{a}$, & substituendo hunc valorem in æquatione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ habebimus $x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$; faciendo igitur $CF = Cf = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$, habebuntur foci F, & f ellipsis (715), sic *si è extremitate* D *axis minoris cum radio* = a *fiunt decusationes* F, f, *determinabuntur foci; quia semper excentricitas, vel distantia à centro ad focum* $\mathrm{CF} = \mathrm{Cf} = \pm\sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2}$, *signo* $\pm$ *denotante focum unum cadere ad latus unum centri* C, *alium ad aliud.*

747 Coroll. 1. Ergo $AF = CA - CF = a - \sqrt{a^2 - b^2}$, & $Af = a + \sqrt{a - b^2}$, hoc est, *quilibet è focis ellipsis distat à vertice principali* A *quantitate æquali dimidio axis majoris*, $\mp$ *radice differentiæ quadratorum semi axium conjugatorum.*

748 Coroll. 2. Etiam erit $AF \times BF = (a - \sqrt{a^2 - b^2})(a + \sqrt{a^2 - b^2}) = b^2 = \overline{CD}^2$; hoc est, *quadratum semiaxis minoris ellipsis est medium proportionale inter distantias focorum ad duos vertices* A & B *ellipsis.*

749 Prob. 2. *Invenire expressionem radiorum vectorum* FM, fM.

Sit $CF = Cf = q = \sqrt{a^2 - b^2}$, erit $q^2 = a^2 - b^2$,

con-

consequenter $FM = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{PF}^2} = \sqrt{y^2 + (q-x)^2} =$ Fig. 99
$\sqrt{(b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + a^2 - b^2 - 2qx + x^2)} = \sqrt{a^2 - 2qx + \frac{x^2}{a^2}(a^2 - b^2)}$
$= \sqrt{a^2 - 2qx + \frac{q^2 x^2}{a^2}} = a - \frac{qx}{a}$. Per hanc methodum inveniemus $fM = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{Pf}^2} = \sqrt{y^2 + \overline{q+x}^2} =$
$a + \frac{qx}{a}$.

750 Coroll. Ergo $FM + fM = a - \frac{qx}{a} + a + \frac{qx}{a}$
$= 2a$; hoc est, *summa duorum quorumlibet radiorum vectorum ellipsis est semper æqualis axi majori* AB.

751 Prob. 3. *Per punctum datum* R *ducere tangentem* RT *ad ellipsim.*

Sol. Ducantur radii vectores FR, fR, ac producto FR, ita ut $RS = RF$, ducatur Sf, & dividatur in duas partes æquales in O; recta KT ducta per puncta O, R, erit tangens quæsita.

Fecimus $RS = Rf$, ergo $FS = FR + fR = 2a$, etiam fecimus $fO = SO$; ergo omnia puncta lin. KT sunt æquè distantia à puncto f, quam à puncto S (§. 333), & consequenter $Kf = KS$; ergo $Kf + KS = KF + Kf$; sed $(KF + KS) > FS$; ergo $(KF + Kf) > 2a$; consequenter punctum K extra ellipsim cadet; & idem probabitur de quolibet alio puncto linea TK distincto à puncto R: ergo &c.

752 Coroll. Ergo anguli TRf, KRF, quos format tangens ellipsis cum radiis vectoribus ductis ad punctum contactus, sunt æquales. Nam cum sit $RS = RF$, & $SO = fO$, triang. SRf est isoscele, & tangens TK est perpendicularis ad basim Sf (§.334); ergo $TRf = TRS$ (§.409), sed $TRS = KRF$ per verticales; ergo $TRf = KRF$.

753 Prob. 4. *Invenire in ellipsi expressionem subnormalis* HL.

An-

Fig. Anguli HRK, HRT quos format normalis HR cum
99 tangente KT sunt æquales, quia sunt recti, & cum sit $KRF = TRf$ (§. 752) sequitur quod $FRH = fRH$ (§. 10); ergo (§. 455) $FR : fR :: FH : fH$, vel $\overline{FR + fR} : fR :: \overline{FH + fH} : fH = \frac{fR \times \overline{FH + fH}}{FR + fR} =$

$\frac{(a - \frac{qx}{a})\, 2q}{2a} = q - \frac{q^2 x}{a^2} = q - \frac{x}{a^2}(a^2 - b^2) = q - x +$

$\frac{b^2 x}{a^2}$, sed $q - x = fL$, numerando abscissas centro; ergo $fH = fL + \frac{b^2 x}{a^2}$, & consequenter $fH - fL = HL = \frac{b^2 x}{a^2} = \frac{px}{2a}$, cum sit $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p}{2a}$ (§. 748).

754 Prob. 5. *Invenire in ellipsi valorem subtangentis* LT.

Sol. Cum sit rectangulum in R triang. HRT habebimus (§. 457) $HL : LR :: LR : LT = \frac{\overline{LR}^2}{HL} = \frac{y^2}{HL} =$

$\frac{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}{\frac{b^2 x}{a^2}} = \frac{{}^2 - x^2}{x}$.

755 Coroll. 1. Ergo $CL \times LT = x \cdot \frac{a^2 - x^2}{x} = a^2 - x^2$: ita appellando S subtangentem LT, erit $Sx = a^2 - x^2$.

756 Coroll. 2. Ergo $CT = LT + CL = \frac{a^2 - x^2}{x} + x = \frac{a^2}{x}$, unde resultat $x : a :: a : CT$, vel $CL : CB :: CB : CT$ cujus æquationis vi determinare poterimus punctum T, ac subsequenter ducere tangentem TR.

757 Theor. *Si è puncto contactus* R, *& per centrum*
100 C *ellipsis ducitur recta* RCH; *& per idem centrum* C *recta* NV, *parallela ad tang.* TRZ, *& è punctis* R, N *demittuntur ad axim principalem* AB *ordinatæ orthogona-*

nales RK, NI, *triangula* RKCNIC *erunt æqualia.* Fig.

Sit $CK = x$, $NI = u$, per similitudinem triangulorum NIC, RKT habebimus $\overline{KR}^2 : \overline{KT}^2 :: \overline{NI}^2 : \overline{CI}^2$; sed $\overline{KR}^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, $\overline{KT}^2 = (\frac{a^2 - x^2}{x})$, (754), & $\overline{CI}^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - u^2)$ (743); ergo $\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) : (\frac{a^2 - x^2}{x})^2 :: u^2 : (a - \frac{a^2 u^2}{b^2})$, & consequenter $u = \frac{bx}{a}$, unde resultat $CK : NI :: a : b$; eadem methodo inveniremus etiam $CI : KR :: a : b$; ita ut $CK : NI :: a : b :: CI : KR$; ergo triang. RKC, NIC sunt æqualia (508).

758 Coroll. Ergo $\overline{NI}^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot \overline{CK}^2 = b^2 - \overline{RK}^2$, vel $\overline{NI}^2 + \overline{RK}^2 = b^2$, cum sit $\overline{CK}^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - \overline{RK}^2)$ (§. 743), & ob easdem rationes habebimus $\overline{IC}^2 = \frac{a^2}{b^2}$, $\overline{KR}^2 = a^2 - \overline{CK}^2$, vel $\overline{CI}^2 + \overline{CK}^2 = a^2$.

759 Prob. 6. *Invenire æquationem ad ellipsim per respectum ad unum axim principalem* CR, *&* *ordinatas* PM *parallelas ad tangentem in vertice* R.

Sit $CP = x$, $PM = y$, $RT = t$, $RK = r$, $KT = s$, $CK = z$, $CR = m$, & ducantur PG, MT perpend. ad axim AB, & PL perpend. ad MF, habebimus virtute triangulorum similium RKT, MLP (supponendo, ut diximus, *sin.* totalem $= 1$) $ML = \frac{ry}{t}$, $PL = FG = \frac{sy}{t}$; etiam habebimus per triang. CPG, CRK similia, $PG = FL = \frac{rx}{m}$, $CG = \frac{zx}{m}$; ergo $CF = CG - FG = \frac{zx}{m} - \frac{sy}{t}$, & FM $FM = FL + LM = \frac{rx}{m} + \frac{ry}{t}$; sed juxta naturam ellipsis, est $\frac{a^2}{b^2} \cdot \overline{FM}^2 = a^2 - \overline{CK}^2$; ergo substituendo, & ordinando erit $(\frac{a^2 r^2}{b^2 t^2} + \frac{s^2}{t^2})y^2 + (\frac{a^2 r^2}{b^2} - zs)\frac{2xy}{mt} + (\frac{a^2}{b^2 m^2} + \frac{z^2}{m^2})x^2 = a^2$, & quoniam (§. 758) $\frac{a^2 r^2}{b^2} = a^2 - \overline{CK}^2 = zs$ (§. 755) denique habebimus $(\frac{a^2 r^2}{b^2 t^2} + \frac{s^2}{t^2})y^2 + (\frac{a^2 r^2}{b^2 m^2} + \frac{z^2}{m^2})x^2 = a^2$.

Fig. Si in hac æquatione facimus $x = o$, resultat $y = \frac{abt}{\sqrt{a^2x^2 + b^2s^2}} = CN$, quam appellabimus $= n$, & erit $\frac{a^2r^2 + b^2s^2}{b^2t^2} = \frac{a^2}{n^2}$; observamus itidem quod faciendo $y = o$ resultat $x = CR = m$; ergo $\frac{a^2r^2 + z^2}{b^2m^2} = \frac{a^2}{m^2}$ qui quidem valores substituti in æquatione modo adhibita dant $\frac{a^2}{n^2}y^2 + \frac{a^2}{m^2}x^2 = a^2$; ergo dividendo per a^2, multiplicando per n^2, & transferendo habebimus: $y^2 = n^2 - \frac{n^2}{m^2}x^2 = \frac{n^2}{m^2}(m^2 - x^2)$, æquatio perfectè similis ei quæ axibus correspondet; unde infertur, quod *CN*, *CR* sunt semidiametri conjugatæ.

760 Coroll. 1. Vidimus (§. 758) quod $\overline{NI}^2 + \overline{RK}^2 = b^2$ $\overline{CI}^2 + \overline{CK}^2 = a^2$; ergo $a^2 + b^2 = \overline{NI}^2 + \overline{CI}^2 + \overline{RK}^2 + \overline{CK} = \overline{NC}^2 + \overline{RC}^2 = n^2 + m^2$; hoc est, *summa quadratorum duarum diametrorum conjugatarum est semper æqualis summæ quadratorum duorum axium.*

761 Coroll. 2. servando easdem denominationes, & ducendo lin. *NR*, area triang. $NCR = \frac{1}{2}(NI + RK)(IC + CK) - \frac{1}{2} IC \times IN - \frac{1}{2} CK \times RK = \frac{1}{2} IC \times RK + \frac{1}{2} CK \times NI =$ (§. 758) $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \overline{CK}^2) + \frac{b}{a} \cdot \overline{CK}^2\right) = \frac{1}{2}ab$; & consequenter area parallelog. *NCRZ* erit $= ab$, & area parallelogrammi integri $QTZS = 4ab = 2a \cdot 2b$; hoc est quod *omnia parallelogramma circunscripta ad ellipsim, sunt æqualia inter se & rectangulo duorum axium.*

762 Coroll. 3. Si vocamus p angulum $CPM = NCH$, erit area trianguli $NCR = \frac{mn\ sin.\ p}{2}$ (§. 683) cum sit *sin.* $NCR = sin.\ NCH$ (§. 654) ergo $mn\ sin.\ p = ab$ (§. 761).

763 Prob. 7. *Datis duobus semiaxibus* a, b *ellipsis, inve-*

venire duas diametros, comprehendentes angulum datum Fig.
p = NCH.

Habemus $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, & $mn = \frac{ab}{sin.\, p}$; ergo $m^2 + n^2 + 2mn = a^2 + b^2 + \frac{2ab}{sin.\, p.}$; & $m^2 + n^2 - 2mn = a^2 + b^2 - \frac{2ab}{sin.\, p}$; consequenter $m + n = \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{sin.\, p}}$; $m - n = \sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2ab}{sin.\, p}}$, quæ æquationes per media additione & substractione dant $m = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{sin.\, p}} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2ab}{sin.\, p}}$, $n = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + \frac{2ab}{sin.\, p}} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - \frac{2ab}{sin.\, p}}$.

Ad determinandam nunc directionem unius è diametris, vel ang. *BCR*, quem dicemus = *C*, scire oportet quod ang. *NCH* = *p* = *CRZ* (§. 365) = *C* + *RTC* (400): ergo *RTC* = *p* — *c*; hoc supposito, ac præ oculis habendo, quod *sin. CRZ* = *sin. CRT* (654); medio triangulo *RCT* inveniemus $sin.\, \overline{p - c} : m :: sin.\, p : CT = \frac{a^2}{CK}$ (756) $= \frac{m\, sin.\, p}{sin.\, \overline{p - c}}$; ergo $CK = \frac{a^2\, sin.\, \overline{p - c}}{m\, sin.\, p}$; & transeundo ad triang. rectang. *CRK*, habebimus $1 : m :: cos.\, c : \frac{a^2\, sin.\, \overline{p - c}}{m \,.\, sin.\, p}$; ergo $m^2\, cos.\, c \,.\, sin.\, p = a^2\, sin.\, \overline{p - c} = a^2\, sin.\, p.\, cos.\, c - a^2\, sin.\, c\, cos.\, p$, $\frac{a^2 - m^2}{a^2}.\, sin.\, p.\, cos.\, c = sin.\, c \,.\, cos.\, p.$ vel $\frac{a^2 - m^2}{a^2} = \frac{sin.\, c}{cos.\, c} \,.\, \frac{cos.\, p}{sin.\, p} = \frac{tang.\, c}{tang.\, p}$ (§. 655), & denique $tang.\, c = \frac{a^2 - m^2}{a^2} \,.\, tang.\, p$.

764 Coroll. Si attendamus ad formulas determinantes valores ex m, & n, inveniemus quod si $\frac{2ab}{sin.\, p} = a^2 + b^2$, evanescit secundum membrum singularum formularum ac consequenter erit $m = n = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$; & ang. p quem comprehendere debent, habebimus $sin.\, p = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$; sed si $\frac{2ab}{sin.\, p} > a^2 + b^2$, semidiametra fiunt imaginaria: ergo impossi-

Fig. biles sunt duo diametri in ellipsi, dum ang. comprehensus p habet pro sinu quantitatem minorem, quam $\frac{a^2+b^2}{2ab}$.

765 Probl. 8. *Datis duabus semidiametris* m, n, *&*
100 *ang.* p, *quem diametri formare debent, invenire duos semiaxes* a, *&* b.

Duæ æquationes $mn\ sin.\ p. = ab$, $a^2+b^2 = m^2+n^2$, factæ juxta modum problematis anterioris, dant $a = \frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2+2mn\ sin.\ p} + \frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2-2mn\ sin.\ p}$, & $b = \frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2+2mn\ sin.\ p} - \frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2-2mn\ sin.\ p}$.

766 Probl. 9. *Construere mechanicè ellipsim, datis vel ad arbitrium sumptis duobus ejus axibus.*

Inventis focis Ff (746), in eis uniantur extremi-
99 tates fili $FMf = AB = 2a$; in plicatura introducatur frustulum M, quò filum extentum permaneat, quod quidem circum focos Ff movendo, manebit descripta ellipsis $AMBEA$ (750); semper enim verificabitur quod $FM+fM = 2a$.

ARTICULUS VIII.

De Hyperbola.

767 Æquatio ad hanc curvam, est $y^2 = \frac{sin.\ D}{cos.\ \frac{1}{2}B^2}(dx\ sin.\ B + x^2\ sin.\ \overline{D+B-180^\circ})$, in qua si facimus $y = 0$, resultat $x = 0$, $x = -\frac{d\ sin.\ B}{sin.\ \overline{D+B-180^\circ}}$; faciendo itaque $AB = \frac{d.\ sin.\ B}{sin.\ \overline{D+B-180^\circ}} = 2a$, habebimus puncta A & B, in qua curva axim tangit; unum quidem in origine A abscissarum; alium autem in puncto in quo $x = -2a$.

In

Fig.

Introducendo in æquatione, hanc lineam $AB = \frac{d \sin. B}{\sin. \overline{D+B-180^\circ}} = 2a$, erit $y^2 = \frac{\sin. D. \sin. B\, dx}{\cos. \frac{1}{2} B^2} + \ldots\ldots$

$\frac{\sin. D. \sin. \overline{D+B-180^\circ}\, x^2}{\cos. \frac{1}{2} B^2} = \frac{\sin. D. \sin. B. \sin. \overline{D+B-180^\circ}\, dx}{\cos. \frac{1}{2} B^2 \sin. \overline{D+B-180^\circ}} +$

$\frac{\sin. D. \sin. \overline{D+B-180^\circ}\, x^2}{\cos. \frac{1}{2} B^2} = \frac{\sin. D. \sin. \overline{D+B-180^\circ}}{\cos. \frac{1}{2} B^2}(2ax + x^2)$;

faciendoque $x = AC = -a$, si vocamus b applicatam correspondentem puncto C, habebimus $b = \pm \ldots\ldots\ldots$

$\sqrt{-\frac{\sin. D. \sin. \overline{D+B-180^\circ}\, a^2}{\cos. \frac{1}{2} B^2}}$; ergo impossibilis est applicata ad illud punctum C; nihilominus si in eo puncto C erigatur perpend. $CD = b$, ita sumpta ut sit $\frac{b^2}{a^2} =$

$\frac{\sin. D. \sin. \overline{D+B-180^\circ}}{\cos. \frac{1}{2} B^2}$, & ejus valor introducitur in æquatione præcedenti, erit æquatio ad hyperbolam $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ in qua numerantur abscissæ è vertice A.

Ex ea patet quod si x tribuantur valores usque ad ∞, resultant semper in y duo valores æquales, unus positivus, & alter negativus: ergo curva habet duos ramos æquales, & infinitos AM, Am in sensu positivo, divergentes inter se, & ab axi AS. Similiter faciendo $x = -n < 2a$, resultat $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-2an + n^2}$, quantitas impossibilis, nam cum sit $-n < 2a$, erit etiam multiplicando per $-n\; n^2 < -2an$. Sed si fit $x = -n > 2a$ erit $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{-2an + n^2}$ quantitas realis, quia cum sit $-n > 2a$ erit $n^2 > -2an$; unde infertur, quod 101

Fig. si x est negativa, curva disparet, usque dum fit $x = -2a$; sed quoniam tribuendo x valores negativos $< 2a$ usque ad ∞, rursus resultant in y duo valores æquales, unus positivus, & alter negativus, patet quod curva habet duos alios ramos æquales & infinitos BM', Bm' in sensu negativo, à duobus aliis separatos quantitate $2a$, quæ vocatur *axis major*, seu *transversus*, in cujus medio C consideratur centrum hujus curvæ, & perpend. $DR = 2CD = 2b$, quæ dividit axim transversum in duas partes æquales vocatur *axis minor*, seu *conjugatus*.

768 Coroll. 1. Quoniam $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ erit $y^2 : x(2a + x) :: b^2 : a^2$, hoc est, *in hyperbola quadrata ordinatarum ad axim principalem sunt ad rectangula distantiarum ad duos vertices, seu abscissarum per rectam compositam è iisdem abscissis, & diametro transversa, sicut quadratum axis minoris ad quadratum majoris.*

Si supponimus quod sit $x = x - a$, hoc est $CP = x$, erit $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; æquatio repræsentans naturam hyperbolæ numerando abscissas è centro C, quæque facile transformatur in hanc $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$, repræsen-
101 tantem naturam hyperbolæ, numerando abscissas $CL = PM = y$ in axi conjugato RD prolongato, & adstantibus ordinatis $LM = CP = x$.

769 Coroll. 2. Si appellamus p parametrum axis transversi, erit (712) $2a : 2b :: 2b : p = \frac{2b^2}{a}$, cujus valor introductus in æquationibus ad hyperbolam $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ dat $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax + x^2)$, $y^2 = \frac{p}{2a}(x^2 - a^2)$; & substitutus in æquatione $x^2 =$

$\frac{a^2}{b^2}$

$\frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$ respectiva ad axim minorem, erit $x^2 =$ *Fig.*
$\frac{2a}{p}(y^2 + b^2) = \frac{2a}{p}(y^2 + \frac{1}{2}ap)$.

770 Definit. Quando $2a = 2b$, hoc est, dum axis transversus, & conjugatus sunt æquales, hyperbola dicitur æquilatera; proinde æquationes huic curvæ correspondentes erunt $y^2 = 2ax + x^2$; $y^2 = x^2 - a^2$; & ejus æquatio cum respectu ad axim conjugatum erit $x^2 = y^2 + a^2$; ubi in transitu notanda ingens similitudo inter has æquationes ad hyperbolam æquilateram, & eas quæ circulo respondent (708. 718).

771 Probl. 1. *Invenire focum, aut focos hyperbolæ.*

Fiat $y = \frac{1}{2}p = \frac{b^2}{a}$, & substituendo hunc valorem in æquatione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, habebimus $x = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$, ducendo itaque rectam DA, cum hæc sit $= \sqrt{a^2 + b^2}$, patet quod si è centro C sumitur ad utrumque latus $CF = Cf = DA$, habebuntur foci Ff.

772 Coroll. Erit igitur $FA \times FB = (\sqrt{a^2 + b^2} - a)(\sqrt{a^2 + b^2} + a) = b^2$; hoc est, *semiaxis minor est medium proportionale inter distantias unius foci à duobus verticibus.*

773 Probl. 2. *Invenire expressionem radiorum vectorum* FM, fM.

Sit $CF = Cf = q = \sqrt{a^2 + b^2}$, erit $b^2 = q^2 - a^2$ quo valore substituto in æquatione $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ dat $y^2 = \frac{q^2x^2}{a^2} - q^2 - x^2 + a^2$; etiam erit $FP = x - q$, $fP = x + q$; ergo $FM = \sqrt{\overline{PM}^2 + \overline{FP}^2} = \sqrt{y^2 + (x-q)^2} = \sqrt{(\frac{q^2x^2}{a^2} - q^2 - x^2 + a^2 + x^2 -}$

r 4 $2qx$

Fig. $2qx + q^2) = \frac{qx}{a} - a$, & $fM = \sqrt{y^2 + (x+q)^2} = \sqrt{\frac{q^2x^2}{a^2} - q^2 - x^2 + a^2 + x^2 + 2qx + q^2} = \frac{qx}{a} + a$.

774 Coroll. Ergo $fM - FM = \frac{qx}{a} + a - \frac{qx}{a} + a = 2a$, hoc est, *differentia duorum quorumlibet radiorum vectorum hyperbolæ est semper æqualis axi transverso.*

775 Probl. 3. *Per punctum datum* M *ducere tangentem* TM *ad hyperbolam.*

Ductis radiis vectoribus FM, fM, sumatur $MG = MF$, & ducendo lin. GF per ejus medium E, & per punctum datum M, ducatur lin. TM, & hæc erit tangens quæsita.

Ad hoc probandum, eligatur in illa recta TM punctum aliud quodlibet K, & ducantur rectæ Kf, KG, KF; cum sit per const. $MF = MG$, & $FE = GE$, patet quod omnia puncta lin. TMK æque distabunt à punctis G, & F (333), & ideo erit $KF = KG$; hoc supposito, habebimus (774) $fM - FM = fM - MG = fG = 2a$, & si punctum K posset correspondere hyperbolæ, esset ob eandem rationem $Kf - KF = Kf - KG = fG$, vel $Kf = fG + KG$; sed hoc est absurdum (288): ergo punctum K non pertinet ad hyperbolam; & idem probabitur de quolibet alio puncto lin. TK diverso à puncto M: ergo &c.

101 776 Coroll. 1. Ergo sunt æquales anguli fMT, TMF, quos format tang. hyperbolæ cum suis radiis vectoribus ductis ad puncta m contactus; nam cum sit $MG = MF$, & $FE = GE$, triang. GMF est isoscele, & tang. MT erit perpend. ad suam basim GF (334): ergo ang. $fMT = FMT$ (§. 409).

777 Coroll. 2. Cum sit $fMT = FMT$, habebimus

(455) $fM : FM :: fT : FT$, vel $\overline{fM+FM} : fM :: \overline{fT+FT}$: Fig.
fT, hoc est (773) $\frac{2qx}{a} : \frac{qx+a^2}{a} :: 2q : fT = \frac{qx+a^2}{x} = \frac{a^2}{x} + q$; ergo $fT - q = CT = \frac{a^2}{x}$ unde apparet $x : a : a : CT$, vel $CP : CA :: CA : CT$, per medium cujus analogiæ facile est determinare punctum T, ac consequenter ducere tangentem TM ad punctum N hyperbolæ.

778 Coroll. 3. Ergo subtangens erit $PT = CP - CT = x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x}$; ac consequenter habebitur expressio $CP \times PT = x^2 - a^2$ ita ut vocando subtangentem $PT = S$, erit $sx = x^2 - a^2$.

779 Coroll. 4. Cum sit (§. 457) $PV = \frac{\overline{PM}^2}{TP}$, substituendo habebimus valorem subnormalis $PV = \dfrac{\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}{\frac{x^2 - a^2}{x}} = \frac{b^2 x^2}{a^2}$; quare habebitur etiam normalis $MV = \sqrt{\frac{b^4 x^2}{a^4} + \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)}$.

ARTICULUS IX.

De hyperbola cum respectu ad suas assymptotas, & diametros.

780 PRobl. 1. *Ducendo per verticem* A *hyperbolæ parallelè ad applicatas orthogonales* PM, *rectam* AL = AG = b *semiaxim conjugatum*; *ducendo postmodum è centro* C, *& per puncta* L, G *indefinitas* CR, CV, *sicut etiam lin.* AS *parallelam ad* CV, AT *parallelam ad* CR; *ac demum prolongando applicatam* PM *per ambo latera usque ad puncta* R, V, *determina-* 102

Fig. *nare* 1. *quadratum ex* CT, *hoc est quod vocant potentiam hyperbolæ* : 2. *Differentiam quadratorum ex* MP, *ac* PR : 3. *Valorem rectanguli facti lineis* RM, MV.

Ratione parallelismi est $AS = CT$, ac etiam $LA : LG :: AS : CG$; sed $AL = \frac{LG}{2}$; ergo $AS = CT = \frac{CG}{2} = GT$, ac ob eandem rationem $TA = \frac{CL}{2} = CS = SL$, & cum sit præterea $CG = \sqrt{a^2 + b^2} = CL$, erit etiam $\frac{CG}{2} = \frac{CL}{2}$ ac consequenter $CT = AS = TG = TA = CS = SL$.

Hoc supposito erit $\overline{GL}^2 (= 4b^2) : \overline{LA}^2 (= b^2) :: \overline{CG}^2 (= \overline{a^2 + b^2}) : \overline{CT}^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$.

Similiter ex hypothesi erit $CA (= a) : LA (= b) :: CP (= x) : PR = \frac{bx}{a}$; ergo $\overline{PR}^2 - \overline{PM}^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = b^2$

Juxta demonstratum erit $RM = RP - PM = \frac{bx}{a} - y$, & quoniam $PR = PV$, prout facile demonstrari valet ex similitudine triang. CLG, CRV; etiam erit $MV = \frac{bx}{a} + y$; ergo $RM \times MV = (\frac{bx}{a} - y)(\frac{bx}{a} + y) = \frac{b^2x^2}{a^2} - y = \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = b^2$.

781 Coroll. Ex æquatione $MV \times MR = b^2$ prodit $MR = \frac{b^2}{MV}$, cumque crescentibus abscissis, necesse sit quod crescat MV, absdubio decrescet valor ex MR, ac proinde curva magis, ac magis rectam CR appropinquabit; tamen nunquam verificabitur, quod punctum M curvæ concurrat cum puncto correspondente R illius rectæ, licet producantur in infinitum, ex eo quod semper $\overline{PR}^2 - \overline{PM}^2 = b^2$, & ideo illæ lineæ dicuntur *assymptotæ* hyperbolæ, seu cum ea inconcurrentes.

782 Probl. 2. *Invenire æquationem ad hyperbolam inter suas assymptotas.*

Sit

Sit $SA = c$, erit $c^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ (§. 780): ducatur lin. *MK* parall. ad *CV*, ac lin. *MF* parall. ad *CK*, & denominetur $CK = MF = x$, $KM = CF = y$; virtute similitudinis triang. *ALS*, *KMR*, *MFV* habebimus $RM : LA :: KM : SA$, $MV : LA :: MF : LS = SA$, multiplicando erit $RM \times MV : \overline{LA}^2 :: KM \times MF : \overline{SA}^2$; sed $RM \times MV = \overline{LA}^2$ (§. 780); ergo $KM \times MF = \overline{SA}^2$, vel $xy = c^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$. Fig.

783 Theor. 1. *Duæ quælibet parallelæ* Ff, Gg *ductæ per spatium hyperbolicum è una assymptota ad aliam, ita se intersecant per quemlibet è ramis hyperbolæ, quod rectangulum segmentorum unius est æquale rectangulo segmentorum alterius, hoc est* $FK \times Kf = GH \times Hg$. 103

Ducendo è punctis *K*, *H* lin. *MKm*, *NHn* perpendiculares ad axim principalem, resultabunt similia triang. *GHN*, *FKM*, & *Hng*, *Kmf*; quare erit $GH : HN :: FK : KM$, $Hg : Hn :: Kf : Km$, & multiplicando $GH \times Hg : HN \times Hn :: FK \times Kf : KM \times Km$, sed $KM \times Km = b^2 = HN \times Hn$ (§. 780); ergo $GH \times Hg = FK \times Kf$ ac ob eandem rationem $gZ \times ZG = fX \times XF$.

784 Coroll. 1. Ergo si supponamus quod puncta *K*, *X* coincidunt in unico puncto *E*, lin. *TEt* erit tang. in puncto *E*, & habebimus $FK \times Kf = TE \times Et$, $fX \times XF = TE \times Et$: ergo $FK \times Kf = fX \times XF$, vel $FK\,(KX + Kf) = fX\,(KX + KF)$ unde exequendo multiplicationem, resultat denique $FK = fX$; hoc est, *quomodolibet ducatur recta* Ff *per spatium hyperbolicum usque ad assymptotas, segmenta* FK, fX, *inter curvam, & assymptotas comprehensa, erunt semper æqualia.*

785 Coroll. 2. Cum tang. *Tt* sit recta, cujus segmen-

Fig. menta TE, Et comprehenduntur inter punctum E curvæ, & ejus assymptotas, erit $TE = Et$; & patet quod si è illo puncto E ducatur lin. ED parallela ad assymptotam Ct, vel ordinatam ad CT, resultabunt similia triang. TED, TtC, ac consequenter $TD = DC$; unde ut ducatur tang. è puncto E dato in hyperbola, sat erit ducere per illud punctum parallelam ad assymptotam Ct, ac postmodum sumere $DT = DC$, & demum ducere per puncta T, E tang. TEt quæsitam.

786 Prob. 3. *Invenire æquationem ad hyperbolam per respectum ad unum axim* CP, *& suas ordinatas* PF *parallelas ad tang.* Tt, *quæ transit per punctum* E, *in quo*
103 *axis ille secat curvam.*

Per triang. similia CTE, CFP, & CEt, CPf inveniemus, factis correspondentibus analogiis, quod cum sit $TE = Et$ (§. 785), & $FK = fX$ (784) erit etiam $PK = PX$.

Hoc supposito sit $CE = m$, $CI = ET = n$, $CP = x$, $PK = y$; per similitudinem triangulorum CET, CPF habebimus $m : n :: x : PF = \frac{nx}{m}$; præterea est $TE \times Et = \overline{TE}^2 = FK \times Kf = (FP - PK)(FP + PK)$: ergo substituendo habebimus $n^2 (\frac{nx}{m} - y) = (\frac{nx}{m} + y) = \frac{n^2x^2}{m^2} - y^2$; consequenter $y^2 = \frac{n^2}{m^2}(x^2 - m^2)$, æquatio simillima æquationi axium, qua media patet quod CE, & CI sunt semidiametri conjugatæ.

787 Coroll. Ex præcedenti æquatione deducitur sequens $x^2 = \frac{m^2}{n^2}(y^2 + n^2)$, repræsentans naturam hyperbolæ numerando abscissas $CL = PK = y$ in secunda diametro BI producta, & adstantibus $LK = CP = x$ ordinatis.

Theor.

788 Theor. 2. *Si è extremitatibus* D, L *diametrorum conjugatarum* CD, CL, *demittuntur lin.* DH, LPS *perpendiculares ad axim principalem* CA, *resultabunt æqualia triang.* CDH, CLP. Fig. 104

Ducatur è extremitate T tangentis Tt alia perpendic. TK ad axim principalem, & parallelè ad ipsum rectæ TS, LE; patet quòd triang. CHD, LTE, LSt habent sua latera homologa parallela; quare cum præterea sit $CD = LT = Lt$ (785), illa triang. erunt æqualia, & similia (419), ac proinde $CH = LE = St$, $DH = TE = LS$.

Hoc supposito sit $CP = u$, $PL = z$, $CH = LE = St = r$, $DH = TE = LS = s$, $CL = m$, $CD = TL = Lt = n$, $CA = a$, $AF = b$, erit $TK = z + s$, $CK = u + r$, & habebimus per similitudinem triangulorum CTK, CFA, $\overline{z+s} : \overline{u+r} :: b : a$; ergo $az + as = bu + br$.

Erit etiam per similitudinem triangulorum TEL, LPG, $s : r :: z : PG = \frac{rz}{s}$; sed (778) $PG = \frac{u^2 - a^2}{u} = \dfrac{\frac{a^2}{b^2}(z^2 + b^2) - a^2}{u}$ (768) $= \frac{a^2 z^2}{b^2 u}$; ergo $PG = \frac{a^2 z^2}{b^2 u} = \frac{rz}{s}$, unde resultat $r = \frac{a^2 sz}{b^2 u}$, cujus valor substitutus in æquatione $az + as = bu + br$ dat $(bu - as)(bu - az) = 0$; sed $bu - az$ esse nequit $= 0$, quia in hoc casu esset $z^2 : u^2 :: b^2 : a^2$, quod absurdum est (§. 768); ergo necesse erit $bu - as = 0$, vel $bu = as$, ac consequenter in æquatione dicta resultabit $az = br$; quare habebimus $s = \frac{bu}{a}$, $r = \frac{az}{b}$, & analogias sequentes $a : b :: CP : HD :: CH : PL$; ergo triang. CDH, CLP habent reciprocè proportionales suas bases, altitudinesque, ac proinde æqualia sunt (508).

789 Coroll. 1. Ducendo lin. LD, erit CDH

—oLD

Fig. $-oLD-HoC=CLP+oLD+HoC$, hoc est triang. DLC, vel $\frac{1}{2}CDTL=$ ad trapezium $HDLP=(HD+LP)\frac{PH}{2}$ (§. 494) $=S+z.\frac{u-r}{2}=\frac{su+uz-sr-rz}{2}=\frac{su-rz}{2}$ (1) $=\frac{b}{2a}u^2-\frac{a}{2b}z^2$ (2) $=\frac{b^2u^2-a^2z^2}{2ab}=\frac{a^2b^2}{2ab}$ (3) $=\frac{1}{2}ab$; unde infertur quod *omne parallelog.* TT *constructum super diametros conjugatas hyperbolæ æquale est rectangul. axium.*

790 Coroll. 2. Quoniam $a:b::CP:HD::CH:PL$ (§. 788), erit $HD=\frac{b}{a}CP$, $\overline{HD}^2=\frac{b^2}{a^2}\overline{CP}^2$, sed $\overline{CP}^2=\frac{a^2}{b^2}(\overline{PL}^2+b^2)$ (§. 768); ergo $\overline{HD}^2=b^2+\overline{PL}^2$, vel $\overline{HD}^2-\overline{PL}^2=b^2$.

Erit etiam $CH=\frac{a}{b}PL$, $\overline{CH}^2=\frac{a^2}{b^2}\overline{PL}^2$, sed $\overline{LP}^2=\frac{a^2}{b^2}(\overline{CP}^2-a^2)$; ergo $\overline{CH}^2=\overline{CP}^2-a^2$, vel $\overline{CP}^2-\overline{CH}^2=a^2$.

Unde patet $a^2-b^2=\overline{CP}^2+\overline{PL}^2-\overline{CH}^2-\overline{HD}^2=\overline{CL}^2-\overline{CD}^2$; *hoc est, in hyperbola differentia quadratorum duarum diametrorum conjugatarum æqualis est differentiæ quadratorum duorum axium.*

791 Coroll. 3. Si vocamus p ang. DCL compre-
104 hensum per duas diametros conjugatas, habebimus quod area triang. CDL erit $=\frac{mn\ sin.\ p}{2}$ (§. 683) $=\frac{ab}{2}$ (§. 789): ergo $mn.\ sin.\ p=ab$.

792 Probl. 4. *Datis duobus axibus* a, b, *invenire duas*

(1) Cum sit $uz=sr$, posito quod uz repræsentat duplum triang. CLP & sr duplum triang. CDH, quæ quidem sunt æqualia (§. 788).

(2) Cum sit $s=\frac{bu}{a}$, & $r=\frac{az}{b}$ (§. 788).

(3) Substituendo loco u^2 ejus valorem $\frac{a^2}{b^2}(z^2+b^2)$ (§. 768).

duas diametros, quæ faciant inter se angulum datum p. *Fig.*

Habemus $m^2 = n^2 + a^2 - b^2$, & $mn = \frac{ab}{sin. p}$; ergo $m^2 - n^2 + 2mn\sqrt{-1} = a^2 - b^2 + \frac{2ab\sqrt{-1}}{sin. p}$, $m^2 - n^2 - 2mn\sqrt{-1} = a^2 - b^2 - \frac{2ab\sqrt{-1}}{sin. p}$, & extrahendo radicem quadratam, $m + n\sqrt{-1} = \sqrt{a^2 - b^2 + \frac{2ab\sqrt{-1}}{sin. p}}$, $m - n\sqrt{-1} = \sqrt{a^2 - b^2 - \frac{2ab\sqrt{-1}}{sin. p}}$, quæ quidem æquationes, media additione, & substractione, dant

$$m = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2 + \frac{2ab\sqrt{-1}}{sin. p}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2 - \frac{2ab\sqrt{-1}}{sin. p}}$$

$$n = \frac{\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2 + \frac{2ab\sqrt{-1}}{sin. p}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2 - b^2 - \frac{2ab\sqrt{-1}}{sin.}}}{\sqrt{-1}}$$

Quadrando singulas has formulas, & extrahendo postea radicem quadratam habebimus

$$m = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + \frac{4a^2b^2}{sin. p^2}}}$$

$$n = \sqrt{-\tfrac{1}{2}(a^2 - b^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b^2)^2 + \frac{4a^2b^2}{sin. p^2}}}$$

Ad determinandam nunc directionem unius è diametris, vel ang. *LCP*, quem dicemus $= c$, faciemus medio triang. *CPL*, $1 : m :: sin. c : PL = m\, sin. c$; consequenter $CH = \frac{a}{b} PL$ (790) $= \frac{am . sin. c}{b}$, unde virtute triang. *DCH* resultat $1 : n :: cos. \overline{p+c} : \frac{am . sin. c}{b}$: ergo $\frac{am}{bn} sin. c = cos. \overline{p+c} = cos. p. cos. c - sin. p . sin. c$, $\frac{am}{bn} = \frac{cos. p. cos. c}{sin. c} - sin. p$, vel $\frac{am}{bn} + sin. p. = \frac{cos. p.}{tang. c}$, hoc est $\frac{am + bn\, sin. p}{bn} = \frac{cos. p.}{tang. c}$: ergo $tang. c = \frac{bn . cos. p}{am + bn\, sin. p}$; & cum sit $ab = mn\, sin. p$, erit $a = \frac{mn\, sin. p}{b}$, cujus valor substitut. dat $tang. c = \frac{bn\, cos. p}{\frac{m^2 n\, sin. p}{b} + bn\, sin. p}$

=

Fig. $= \frac{b\ cos.\ p}{(m^2 + b^2)\ sin. p} = \frac{b^2}{m^2 + b^2}\ cot.\ p.$

793 Prob. 5. *Datis semidiametris conjugatis* m, n, *& ang.* p *inter eas contento, invenire duos axes* a, b.

Habemus $m^2 - n^2 = a^2 - b^2$, $ab = mn\ sin.\ p$: ergo $a^2 - b^2 + 2ab\sqrt{-1} = m^2 - n^2 + 2mn\ sin.\ p\sqrt{-1}$, a^2, $b^2 - 2ab\sqrt{-1} = m^2 - n^2 - 2mn\ sin.\ p.\sqrt{-1}$, & exequendo easdem operationes ac in problemate antecedenti, erit denique

$$a = \sqrt{\tfrac{1}{2}(m^2 - n^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2 - n^2)^2 4 + m^2 n^2\ sin.\ p^2}}$$

$$b = \sqrt{-\tfrac{1}{2}(m^2 - n^2) + \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2 - n^2)^2 4\ m^2 n^2\ sin.\ p^2}}$$

101 794 Prob. 6. *Construere mechanicè hyperbolam, datis, seu ad arbitrium sumptis duobus axibus conjugatis* 2a, 2b.

Eligatur axis directionis *fS*: sumatur $AB = 2a$, & determinando focos F, f (771), figatur in quolibet ex illis regula *fMO* mobilis circum illud punctum.

Hoc facto sumatur filum *FMO*, æquale regulæ $fMO - 2a$, ligata una ex ejus extremitatibus in foco *F*, & alia in extremo *O* regulæ.

Denique in plicatura fili introducatur frustulum plumbaginis, ac primùm applicata regula axi *Sf*, circumvoveatur, filo semper extento; profectò describet ramum hyperbolæ *AM* (774), cum sit semper $fM - FM = 2a$.

795 Schol. 1. Si in cunctis formulis exprimentibus proprietates hyperbolæ, facimus $a = b$, habebuntur exactè proprietates hyperbolæ æquilateræ.

796 Schol. 2. Ultra has curvas sunt aliæ innumeræ, quarum nonnullæ celebres habentur; veluti cyclois, spiralis, quadratrix, cysois, logarithmica, sinuum &c.

qua-

quarum aliæ sunt geometricæ, & algebricæ, aliæ transcendentes, seu mechanicæ: illæ vocantur, quarum abscissæ, & applicatæ sunt lineæ rectæ, quarum ratio geometricè determinari valet; hæ autem sunt vel arcus circuli, vel rectæ sinibus, logarithmis &c. æquales. De his agere certe non vacat. *Fig.*

APPENDIX

De Analysi quantitatum infinitarum.

ARTICULUS PRIMUS.

De Calculo differentiali.

797 DEf. 1. Omnis quantitas certis limitibus contenta, seu magnitudinis assignabilis, dicitur *finita*; quæ concipitur supra omnem limitem assignabilem aucta, vocatur *infinita*: quæ verò ultra quoscunque limites imminuta consideratur, *infinitesima*.

798 Coroll. Ergo infinitesima continebitur infinities in quantitate finita, hæcque infinities in quantitate infinita. Consequenter considerari poterit infinitesima tanquam quotiens quantitatis finitæ cujuslibet, per aliam infinitam divisæ hoc modo, $\frac{x}{\infty}$, repræsentando x quamlibet quantitatem finitam.

Si supponimus quod divisor sit realiter infinitus, quotiens exprimens quot vicibus divisor continetur in dividendo, necessario erit $= o$; unde resultat $\frac{x}{\infty} = o$, $x = o . \infty$, $\frac{x}{o} = \infty$; $x : \infty :: o : 1$; hoc est, 1° o multiplicatum per quantitatem infinitam posse esse æquale cuilibet quantitati finitæ, & vice versa. 2° Quamlibet quantitatem fini-

Fig. nitam divisam per o posse esse æqualem infinito. 3° Omnem quantitatem finitam posse reputari tanquam o respectu quantitatis infinitæ.

799 Schol. 1. Cum sit $\infty^2 = \infty . \infty$, proculdubio in ∞^2 continebitur infinities infinitum, hoc est, ∞^2 est infinitum infinities sumptum, seu infinitum secundi ordinis. Ob eandem rationem $\infty^3 = \infty^2 . \infty$ est infinitum secundi ordinis infinities sumptum, seu infinitum tertii ordinis; ac generatim ∞^m est infinitum ordinis m; & ita infinitorum gradus distinguuntur per numerum unitatum suorum exponentium. Hinc prodit quod cum infinitum ordinis inferioris in alio ordinis immediatè superioris infinities contineatur, poterit hoc considerari tanquam infinitum primi ordinis respectu illius (798), & omne infinitum ordinis inferioris tanquam finitum respectu infiniti ordininis immediatè superioris.

800 Schol. 2. Cum sit etiam $\frac{x}{\infty^2} = \frac{x}{\infty} . \frac{1}{\infty}$, patet quod $\frac{x}{\infty^2}$ est infinitesima per infinitesimam multiplicata, vel *infinitesima secundi ordinis*; cumque ex eadem æquatione prodeat $\frac{x}{\infty^2} = \frac{x}{\infty} : \infty$, evidens redditur quod infinitesima secundi ordinis continetur infinities in infinitesima primi ordinis: item quod $\frac{x}{\infty^2} = \frac{x}{\infty^3} . \infty$; ac proinde quod omnis infinitesima ordinis inferioris potest considerari tanquam quantitas finita respectu infinitesimæ ordinis immediatè superioris, hæcque tanquam infinitesima primi ordinis respectu illius. Ob eandem rationem quantitas finita quælibet considerari valet tanquam infinita respectu infinitesimæ primi ordinis, quæ infinitè major est illa (798).

801 Coroll. Quoniam $1 - 1 = -1 + 1 = 0$, & $\frac{x}{0} = \infty$, erit $\frac{x}{1-1} = \frac{x}{-1+1} = \infty$; sed $\frac{x}{1-1} = x + x + x$ +

Fig.

$+ \ldots\ldots\ldots \frac{x}{1-1}$, & $\frac{x}{-1+1} = - x - x - x + \ldots \frac{x}{-1+1}$; ergo $\infty = x + x + x + \infty = - x - x - x + \infty = \infty$; hoc est, *non variatur valor quantitatis infinitæ per additionem, aut subtractionem quarumlibet quantitatum finitarum, quæ proinde omitti poterunt in calculo, dum quantitati infinitæ adduntur, aut subtrahuntur*; sic $\infty + 1 = \infty - 100 = \infty - a + b = \infty$.

802 Def. 2. His positis, si consideramus quod incrementa, aut decrementa quæ in quantitates variabiles cadere possunt, fiunt per partes infinitesimas, cum inter quantitatem quamlibet, & ejus incrementum aut diminutionem, seu eandem auctam aut imminutam verificari debeat differentia incremento, aut decremento æqualis, hinc est quod pars illa analysis, quæ media cognitione quantitatum, ducit ad cognitionem incrementorum, aut decrementorum, rationisque quæ inter eadem est, vocatur *calculus differentialis*, illaque incrementa, aut decrementa infinitesima, *differentiæ*, aut *differentialia* quantitatum variabilium, quæ quidem frequenter tanquam *elementa quantitatum finitarum* considerantur.

Sic v. g. si concipimus quod lin. pm ducitur parallela & infinitè proxima ad ordinatam PM, & è puncto M ducitur itidem lin. MR parallela ad AP, proculdubio abscissa AP degenerabit in AP; ordinata PM in Pm: arcus AM in Am: & area APM in Apm; unde resultat $Pp = MR$ incrementum nempe abscissæ AP; Rm incrementum ordinatæ PM; Mm arcus AM; & $PMmp$ areæ APM. 105

803 Coroll. Cum non augeatur, aut minuatur valor quantitatum constantium, ut maxime immutetur valor variabilium, infertur quod differentiale quarumlibet quantitatum constantium $= 0$.

Fig. 804 Schol. Ad designandum differentiale cujuslibet variabilis anteponitur littera d; quæ littera solummodo repræsentat differentiale illius quantitatis, quam immediatè præcedit ; sic dx significat differentiale variabilis x; $dyax$ denotat solùm differentiale variabilis y, multiplicatæ per ax. Idcirco dum composita est quantitas, cujus differentiale indicandum venit, v. g. hæ x^2, xy, $3x + 2x$, $\sqrt{a-x}$ &c., dicetur $d(x^2)$, $d(xy)$, $d(3x^2+2x)$, $d(\sqrt{a-x})$; hæc expressio dx^2 eadem est ac hæc $dx \,.\, dx$, ac denotat quadratum differentialis dx; proinde valde differt ab hac $d(x^2)$, & similibus, quæ indicant differentiale quadrati variabilis x.

805 Prob. 1. *Invenire differentialia quantitatum variabilium, signis +, vel — copulatarum.*

Sol. Sumatur differentiale singularum variabilium, immutatis signis; omnium aggregatum erit differentiale quæsitum.

Nam si quantitatibus variabilibus earumque incremento, aut decremento infinitesimo, subtrahimus variabiles, absque tali incremento, aut decremento consideratas residuum exprimet necessariò incrementum illud, aut decrementum, hoc est, differentiale variabilis propositæ; erit enim $d(x + a - y) = x + dx + a - y - dy - x - a + y = dx - dy$; ergo &c.

Exempl.

$1^o \ldots d(x + z + y) = dx + dz + dy$

$2^o \ldots d(a^2 - x + b) = - dx$

$3^o \ldots d(a + bc - x + y) = - dx + dy$

$4^o \ldots d(a + b^2 - c^2) = 0$

806 Prob. 2. *Invenire differentialia expressionum, in quibus variabiles copulantur per multiplicationem.*

Sol. Sumantur differentialia variabilium singillatim, quæ nempe in producto continentur : singula per productum reliquorum factorum multiplicentur, tum variabilium,

lium, tum invariabilium; singulorum productorum aggregatum erit differentiale quæsitum. *Fig.*

Nam omnes hujus generis expressiones repræsentare possumus per axy, in qua quantitas a tanquam constans nullum habet differentiale; variabilis x per incrementum fiet $x+dx$, & variabilis y fiet $y+dy$; ergo axy per incrementum infinitesimum fiet $= a(x+dx)(y+dy) = axy + axdy + aydx + adxdy$; ac consequenter differentiale expressionis axy erit $axdy + aydx + axy - axy + adxdy$; sed $adxdy$ est infinitesima multiplicata per aliam infinitesimam, seu infinitesima secundi ordinis, quæ proinde contemni poterit respectu reliquarum (801): ergo $d(axy) = axdy + aydx$.

807 Coroll. 1. Cum sit $ax^2 = axx$, erit $d(ax^2) = d(axx) = axdx + axdx = 2axdx = 2ax^{2\ 1}dx$: ob eandem rationem erit $d(ax^3) = d(axxx) = ax^2 dx + ax^2 dx + ax^2 dx = 3ax^2 dx = 3ax^{3-1} dx$; ergo ad differentiandam quamlibet potentiam variabilis, hac regula utemur: *multiplicare per exponentem potentiæ eandem potentiam, ejus exponente una unitate imminuto: postmodum productum multiplicare per differentiale radicis; ideo generatim erit* $d(ax^m) = max^{m-1} dx$.

808 Coroll. 2. Si ponatur $m = -n$, erit $ax^m = ax^{-n}$; ergo $d(ax^m) = d(ax^{-n})$; sed $d(ax^m) = max^{m-1} dx$; ergo $d(ax^{-n}) = -nax^{-n-1} dx$.

Supponendo etiam $m = \frac{t}{n}$, erit $d(ax^m) = d(ax^{\frac{t}{n}})$; sed $d(ax^m) = max^{m-1} dx$; ergo $d(ax^{\frac{t}{n}}) = \frac{t}{n} ax^{\frac{t}{n}-1} dx$; hoc est, *quælibet potentia unius variabilis, seu perfecta, seu imperfecta, cum exponente positivo, aut negativo, differentiari semper debet, juxta regulam modo stabilitam* (807).

809 Coroll. 3. Si facimus $x = y + ay$, erit $d(ax^m)$

 =

Fig. $= d\left(a(y+ay)^m\right)$ ac proinde $d\left(a(y+ay)^m\right) = ma(y+ay)^{m-1}(dy+ady)$; *ergo quælibet potentia, seu ejus radix complexa sit, seu incomplexa, semper differentiatur juxta regulam datam* (807.).

810 Coroll. 4. Quoniam denominator fractionis sumi potest tanquam factor sui numeratoris, regulæ hucusque exhibitæ circa variabiles copulatas per multiplicationem, extendi poterunt ad copulatas per divisionem: sic $d\left(\frac{x}{y}\right) = d(xy^{-1}) = y^{-1}dx + xd(y^{-1})$; sed $d(y^{-1}) = -y^{-1-1}dy$ (§. 808); ergo $d\left(\frac{x}{y}\right) = d(xy^{-1}) = y^{-1}dx - xy^{-2}dy = \frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$; hoc est, *differentiale unius fractionis est æquale differentiali numeratoris, multiplicato per denominatorem, dempto differentiali denominatoris multiplicato per numeratorem, ac diviso omni hoc per quadratum denominatoris.*

Regulis præcedentibus accuratè observatis, facile invenientur differentialia in exempl. sequentibus.

1.° $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$.

2.° $d\left(\sqrt{ay+y^2}\right) = d\left((ay+y^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(ay+y^2)^{\frac{1}{2}-1}.\ d(ay+y^2) = \frac{dy\left(\frac{1}{2}a+y\right)}{\sqrt{ay+y^2}}$

3.° $d\left(\sqrt[n]{(ay+by^2+cy^3)^m}\right) = d\left((ay+by^2+cy^3)^{\frac{m}{n}}\right) = \frac{m}{n}(ay+by^2+cy^3)^{\frac{n}{m}-1}.(ady+2bydy+3cy^2dy)$.

4.° $d\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+x^2}\right)} = d\left((x+x^2)^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{2}(x+x)^{-\frac{1}{3}-1}.\ (dx+2xdx) = -\frac{dx+2xdx}{3\sqrt[3]{(x+x^2)^4}}$

Schol.

811 Schol. 1. Cognito respectu inter variabiles x, y, pluries accidit quod crescente variabili x, decrescit in eadem ratione altera variabilis y; hoc notatur in calculo, anteposito signo — differentiali variabilis decrescentis. *Fig.*

812 Schol. 2. Differentialia quantitatum variabilium aut permanent semper eadem, licet mutentur variabiles ex quibus procedunt, aut crescunt, vel decrescunt. Primo casu habebuntur pro constantibus; in secundo autem reputabuntur tanquam variabiles, hæque differentiæ habebunt suas differentias, quæ *differentiæ secundæ* dicentur; & siquidem hæ suas quoque habeant, dicentur *tertiæ* &c., calculusque easdem computans *differentio — differentialis* nuncupatur; hoc semper præ oculis habito, quod regulæ exhibitæ ad quærendas differentias quantitatum variabilium, deserviunt etiam ad habendas differentias differentiarum earumdem quantitatum, sumendo tanquam constantes eas, quæ non habent variationem, aut novas differentias; sic $d(adx - bdy) = ad^2x - bd^2y$; etiam $d(dxdy) = dxd^2y - dyd^2x$; $d\left(\frac{ady}{bdx}\right) = \frac{adxd^2y - adyd^2x}{bdx^2}$ &c.

813 Coroll. Ergo ad inveniendas secundas, tertias &c. differentias quantitatis variabilis, quærentur primæ differentiæ, quæ differentiatæ exhibebunt secundas differentias quantitatis propositæ &c. Sic $dd(xy) = d(ydx + xdy) = yd^2x + xd^2y + 2dxdy$, &c.

814 Theor. 1. *Differentiale logarithmi hyperbolici quantitatis cujuslibet est æqualis differentiali ejusdem quantitatis diviso per quantitatem ipsam.*

Proponatur differentiandus logarithmus hyperbolicus variabilis x, quem hoc modo exprimemus lx, & faciendo $lx = z$, erit $z + dz = l(x+dx)$; ergo dz, vel $d(lx)$

Fig. $= l(x+dx) - lx = l\frac{x+dx}{x} = l(1+\frac{dx}{x}) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3}$ — &c. $= \frac{dx}{x}$ (§. 801); ergo &c.

815 Coroll. 1. Ergo respectu systematis, cujus modulus sit $= m$, erit juxta naturam logarithmorum $d(lx) = \frac{mdx}{x}$, & sic quæcunque de logarithmorum hyperbolicorum differentialibus dicantur, facile eis cæterorum systematum applicabuntur, sicut apparebit in ex. sequentibus.

$dl(a+x) = \frac{dx}{a+x}$; $dl\frac{a}{a+x} = \frac{-dx}{a+x}$; $dlx^n = \frac{nx^{n-1}dx}{x^n} = \frac{ndx}{x}$;

$dl(xy) = d(lx+ly) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = \frac{ydx+xdy}{xy}$; $dl\frac{x}{y} = d(lx-ly)\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}$; $dl\sqrt[m]{(a+x^n)^p} = dl(a+x^n)\frac{p}{m} = \frac{pnx^{n-1}dx}{m(ax^n)}$

Et quoad potentias logarithmorum habebimus etiam $d((lx)^m) = m(lx)^{m-1}.\frac{dx}{x}$; $d(x^m(lx)^n) = m(lx)^n x^{m-1} dx + nx^{m-1}(lx)^{n-1}dx = x^{m-1}dx(m(lx)^{n-1}lx + n(lx)^{n-1}) = x^{m-1}dx(lx)^{n-1}(mlx+n)$.

816 Coroll. 2. Supposito quod $d(lx) = \frac{dx}{x}$, erit $dx = xd(lx)$; ergo differentiale cujuslibet quantitatis variabilis est æquale producto illius quantitatis per differentiale sui logarithmi. Sic $d(x^m) = x^m dlx^m = x^m.\frac{mdx}{x} = mx^{m-1}dx$, &c.

817 Coroll. 3. Hac methodo facillime differentiari possunt quantitates, quas vocant *exponentiales*, quæ nempe pro exponente habent quantitatem variabilem, v.g. a^x, x^y, x^{x^y}, &c.; a^x, x^y sunt exponentiales *primi ordinis*: x^{x^y} *secundi*: &c. Nam transformando quantitates illas exponentiales in logarithmicas, habebimus (§. 816) $d(a^x) = a^x dla^x = a^x d(xla) = a^x dxla$; ergo si a est basis loga-

garithmica, cujus logarithmus $= 1$, erit $d(a^x) = a^x dx$, & utendo eodem artificio, erit etiam $d(x^y) = x^y dlx^y = x^y d(ylx) = x^y (dylx + \frac{ydx}{x})$, &c.

818 Theor. 2. *Differentiale sinus unius arcus cujuslibet est æquale producto differentialis illius arcus per ejus cosinum; & differentiale cosinus cujuslibet arcus est æquale producto differentialis negativè sumpti illius arcus per ejus sinum.*

Sit $sin.\ x = y$, erit $y + dy = sin.\ (x + dx) = sin.\ x.\ cos.\ dx + sin.\ dx.\ cos.\ x$; sed dx arcus est infinitè parvus, ac consequenter resultare debet $sin.\ dx = dx$, & $cos.\ dx = 1$; ergo $y + dy$, vel $sin.\ (x + dy) = sin.\ x + dx\ cos.\ y$, & denique dy, vel $d\ sin.\ x = dx\ cos.\ x$.

Quoniam $dx\ cos.\ x = d\ sin.\ x$, si facimus $x = 90° - y$, erit $dx = -dy$, cum sit $90°$ quantitas constans, cujus valores substituti in æquatione superiori dant $-dy\ cos.\ (90° - y) = d\ sin.\ (90° - y)$; sed (654) $cos.\ (90° - y) = sin.\ y$, & $sin.\ (90° - y) = cos.\ y$; ergo $-dy\ sin.\ y = d\ cos.\ y$.

819 Coroll. 1. Cum sit tang. $x = \frac{sin.\ x}{cos.\ x}$, erit etiam d tang. $x = \frac{dx\ \overline{cos.\ x}^2 + dx\ \overline{sin.\ x}^2}{\overline{cos.\ x}^2} = \frac{dx}{\overline{cos.\ x}^2}$, cum sit $cos.^2 + sin.^2 = 1$; ergo *differentiale tangentis arcus æquale est differentiali ejusdem diviso per quadratum cos. ejus.*

Cum itidem sit $cot.\ x = \frac{cos.\ x}{sin.\ x}$, erit $d\ cot.\ x = \frac{-dx\ \overline{sin.\ x}^2 - dx\ \overline{cos.\ x}^2}{\overline{sin.\ x}^2} = \frac{-dx}{\overline{sin.\ x}^2}$; etiam $d\ sec.\ x = d\ \frac{1}{sin.\ x} =$

Fig. $\frac{dx \sin. x}{\cos. x^2} = \frac{dx}{\cos. x} \, tang. \, x$. Et denique $d \, cosec. \, x = d \, \frac{1}{\sin. x} = \frac{-dx \cos. x}{\sin. x^2} = \frac{-dx}{\sin. x} \, . \cot. x$.

820 Coroll. 2. Ergo repræsentando x arcum quemlibet, erit juxta æquationes anteriores, ejus differentiale $dx = \frac{d \sin. x}{\cos. x} = \frac{-d \cos. x}{\sin. x} = \overline{\cos. x}^2 \, d \, tang. \, x = \frac{d \, tang. x}{\overline{sec. x}^2} = \frac{d \, tang. x}{\overline{1 + tang. x}^2} = -d \cot. x \, \overline{\sin. x}^2 = \frac{-d \cot. x}{\overline{cosec. x}^2} = \frac{-d \cot. x}{\overline{1 + \cot. x}^2}$.

ARTICULUS II.

De applicatione calculi differentialis ad theoriam curvarum.

821 PRob. 1. *Invenire formulas generales subtangentibus, subnormalibus* &c. in qualibet curva algebrica.

Solut. Repræsentet AMN quamlibet curvam algebricam, $Ap = x$ abscissam, $PM = y$ ordinatam, MT
105 tangentem in puncto M, & MQ normalem in eodem puncto; erit PT subtangens, PQ subnormalis, AT segmentum externum, & AE portio tangentis ad verticem; quas quidem expressiones comperiendas habemus. Et quoniam pm est infinitè proxima, & parallela ad PM, & MR parallela ad AP, resultabunt similia triangula TMP, MRm, TMQ, MPQ, TAE; quare habebimus

1.° $Rm : RM :: MP : PT$, vel $dy : dx :: y : PT = \frac{ydx}{dy}$; expressio omnis subtang.

2.°

2.° $RM : Rm :: MP : PQ$, vel $dx : dy :: y : PQ = \frac{ydy}{dx}$; Fig.
expressio totius subnormalis in genere.

3.° Cum sit $PT = \frac{ydx}{dy}$, erit $TA = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$; expressio generalis segmenti externi.

4.° Erit etiam $PT : MP :: TA : AE$, vel $\frac{ydx}{dy} : y :: \frac{ydx - xdx}{dy}$: $AE = \frac{ydx - xdy}{dx}$, expressio generalis portionis tang. ad verticem.

5.° Cum sit rectang. in P triang. TMP, erit $TM =$ 105
$\sqrt{\overline{TP}^2 + \overline{PM}^2} = \sqrt{\frac{y^2 dx^2}{dy^2} + y^2} = \frac{y}{dy}\sqrt{dx^2 + dy^2}$
expressio generica omnis tangentis.

6.° Erit etiam $MQ = \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{PQ}^2} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2}}$ $= \frac{y}{dx}\sqrt{dx^2 + dy^2}$, expressio generica omnis normalis.

822 Probl. 2. *Invenire in qualibet curva algebrica, data ejus æquatione, subtangentem, subnormalem*, &c.

Solut. Differentietur æquatio data curvæ: Segregetur valor quantitatis dx, seu dy, ac etiam dx^2, si opus sit, seu dy^2; hi valores inventi substituentur in formula generali correspondente; productum dabit quantitatem quæsitam.

Ex. In parabola, cujus æquatio est $y^2 = px$, erit $2ydy = pdx$; ergo $dx = \frac{2ydy}{p}$, multiplicando per y, & dividendo per dy erit $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y}{p} = 2x = PT$ subtang. (731).

Ergo segmentum externum $AT = TP - AP = 2x - x = x$ (§. 731).

Igitur cum sit $2ydy = pdx$, erit $ydy = \frac{pdx}{2}$; ergo $\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}p = PQ$ subnormalis (732).

Quoniam $\frac{2ydy}{p} = dx$, erit $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$; ergo $dx^2 +$

dy^2

$dy^2 = \frac{4y^2dy^2 + p^2dy^2}{p^2}$, $\frac{y}{dy}\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{y}{dy}\sqrt{\frac{4y^2dy^2 + p^2dy^2}{p^2}}$
$= y\sqrt{\frac{4y^2 + p^2}{p^2}} = \sqrt{\frac{4p^2x^2 + p^3x}{p^2}} = \sqrt{4x^2 + px} = TM$ tangent. (733), &c.

Eodem modo procedetur in qualibet alia curva; ac profectò determinata, hac methodo, subtangente, habebimus semper duo puncta, ex quibus tangens duc possit.

ARTICULUS III.

De usu calculi differentialis in methodo de maximis, & minimis.

823 Cognita functione repræsentante naturam curvæ facilè dignoscetur num fruatur aut non maxi mis, & minimis. Nam si incremento abscissarum respondet incrementum in ordinatis usque ad infinitum, curva carebit maxima applicata. Si crescentibus abscissis, decrescunt ordinatæ usque ad *o*, curva carebit minima ordinata. Si ordinatæ crescant usque in infinitum, & non decrescant usque ad *o*, curva habebit unam, aut plures minimas, nullam autem maximam. E converso, si ordinatæ decrescant usque ad *o*, nec crescant usque in infinitum, necesse est quod curva habeat unam, aut plures maximas, sed nullam minimam. Denique si ordinatæ nec crescant usque in infinitum, nec decrescant usque ad *o*, proculdubio curva habebit aliquam maximam, & aliquam minimam.

Hoc supposito cum per rectam indefinitam significari possit quælibet quantitas variabilis (691), sequitur quod quælibet quantitas maxima, aut minima, repræsentari possit per applicatam curvæ; ex ex quo methodus de maximis, & minimis generalissima fit ad comperiendas quantitates quaslibet maximas, aut minimas, seu in lineis, areis, solidis, horum superficiebus, peripheriis curvarum, perimetris rectilineis, seu etiam in viribus potentiis, motibus, velocitatibus, temporibus, spatiis &c. Sed ut perfectius hæc methodus agnoscatur, sit *Fig.*

824 Lemma. *Nulla quantitas variabilis transire potest de positiva in negativam, & viceversa, quin transeat per* o, *aut per* ∞; *hoc est, quin destruatur, aut fiat infinitè magna.*

Sit Lm quantitas variabilis positiva, incrementa, aut decrementa habens per gyrum rectæ AB circum punctum C; patet quod ut quantitas positiva Lm fiat negativa LM, recta AB esse debet in positione PQ; sed hanc positionem acquirere nequit, nisi moveatur versus S, & fiat prius parallela ad Lm in positione HK, aut moveatur versus R, & ponatur in situ CL, in quibus omnibus casibus Lm debet fieri infinita, aut destrui priusquam positionem LM obtineat: ergo &c. 106

825 Coroll. His intellectis, si consideretur MT ut tangens curvæ AMO in quolibet puncto M, & quod ordinata correspondens MP moveatur semper parallelè ad se ipsam usquedum coincidat cum CO, absdubio subtangens PT, positiva ex hypoth., crescit aut minuitur usquedum ordinata MP perveniat ad punctum C, maximæ ordinatæ CO correspondens; verum si illa ordinata suum prosequitur motum, subtangens PT transiet de positiva in negativam; & idem probabitur de axi Ap, & ordinatis Mp, dum deveniant ad coincidendum cum minima cO in puncto c; ergo subtangens in punctis C, c, aut fit infinita, aut destruitur. 107

Hoc

Hoc posito, cum per expressionem subtangentis habeamus $PT : MP :: dx : dy$ (821), si supponimus $PT = \infty$, erit $\infty : MP :: dx : dy$; sed in hoc casu $MP = 0$ respectu PT (798) : ergo etiam $dy = 0$ respectu dx.

Si supponimus $PT = 0$, erit ob eandem rationem $0 : MP :: dx : dy$; sed tunc $MP = \infty$ respectu PT : ergo etiam $dy = \infty$ respectu dx.

Unde infertur quod in casu maximæ, aut minimæ applicatæ, differentiale dy aut fit infinitum, aut destruitur ; ac consequenter habebitur tanquam fundamentum methodi de maximis, & minimis sequens

Regula : Differentietur expressio quantitatis variabilis, cujus maximum, aut minimum quæritur, & faciendo differentiale $= 0$, seu $= \infty$, deducetur, si fieri potest, valor quantitatis x, qui quidem determinabit locum maximæ, ut minimæ ordinatæ, ac repræsentabit maximam, aut minimam quantitatem variabilem illius speciei, de qua in problemate agitur ; hoc bene perspecto, quod ad inveniendum postmodum verum valorem maximi, aut minimi correspondentis, introducendus est in expressione principali valor inventus quantitatis x.

826 Schol. Methodo exhibita in præcedenti regula, evidens fit ultimam resolutionem non sufficere ad comperiendum, num quantitas inventa sit determinatè maxima, aut minima. Idcirco ut dubium hoc auferatur, ac quodlibet aliud præcaveatur, augebitur, & minuetur valor abscissæ x correspondentis maximo, aut minimo ; quo facto si utroque casu valor ordinatæ y creverit, hæc repræsentabit minimum ; si autem decreverit, maximum ; verum si creverit versus unam partem, & decreverit versus aliam, neque maximum, neque minimum repræsentabit.

Ac-

Accidere potest quod augmento, aut decremento va- *Fig.*
loris abscissæ x maximo, aut minimo correspondentis, respondeant duo, aut plures valores in ordinata y; quo casu inspiciendum num majores sint quam valor ordinatæ in illo puncto; tunc quippe repræsentabit minimum; si autem minores sint, maximum; ni autem fuerint unus major, alter minor, neque maximum erit, neque minimum.

Ex. Investigandum est num in hac expressione $x + \frac{a^2}{x}$ aliquod maximum, aut minimum contineatur. Differentiando, & æquando cum o habebimus $dx - \frac{a^2\,dx}{x^2} = 0$; multiplicando per x^2, & dividendo per dx, resultat denique $x = a$, cujus valor substitutus in expressione proposita dat $a + a = 2a = y$, maximum scilicet, aut minimum quæsitum: ad quærendum modò num reipsa sit maximum, aut minimum, augebimus valorem abscissæ a quantitatis m, & habebitur $a + m$, cujus valor substitutus pro x in expressione principali, dat $a + m + \frac{a^2}{a+m} = \frac{2a^2 + 2am + m^2}{a+m} = \frac{2a(a+m)}{a+m} + \frac{m^2}{a+m} = \frac{2a + m^2}{a+m}$ quantitas proculdubio $> 2a$; minuendo etiam valorem abscissæ a ejusdem quantitatis m, fiet $a - m$, cujus valor substitutus pro x in expressione principali dat $a - m + \frac{a^2}{a-m} = 2a + \frac{m^2}{a-m}$, quantitas etiam $> 2a$: ergo ordinata $y = 2a$ repræsentat minimum.

827 Prob. 1. *Dato triang.* ABC *determinare parallelogrammum majus, quod in eo possit inscribi, ita ut hujus basis* HB *cadat supra basim* AB *triang.* 108

Sit $AB = a$, $DC = b$, & DF, altitudo parallelogrammi inscribendi $= x$; cum juxta hypoth. KG debeat esse parallela ad AB, habebimus $DC : AB :: CF : KG$, vel $b : a :: \overline{b-x} : KG = \frac{ab-ax}{b}$, ac consequenter area parallelo-

Fig. logrammi quæsiti erit $= KG \times DF = \frac{abx - ax^2}{b}$, cujus expressio differentiata, faciendoque differentiale $= 0$, dat $x = \frac{1}{2} b$; cujus valor manifestat, quod majus parallelogrammum quod inscribi potest in triang. formari debet sumendo dimidium altitudinis triang. pro altitudine parallelogrammi.

828 Prob. 2. *In omnibus triangulis rectangulis ejusdem areæ, illud invenire in quo altitudo cathetorum* AB + BC *minor sit, quam fieri possit.*

Sit area triang. $= a$, latus $AB = x$, erit $BC = \frac{2a}{x}$ (493), ac proinde $AB + BC = x + \frac{2a}{x}$; differentiando hanc expressionem, & æquando differentiale ad o erit $dx - \frac{2adx}{x^2} = 0$; unde resultat $x = AB = \sqrt{2a}$, & $BC = \frac{2a}{x} = \sqrt{2a}$; ergo cathetorum unus debet esse alteri æqualis, ut habeatur quod quæritur.

SECTIO II.

De Calculo integrali, seu summatorio.

ARTICULUS PRIMUS.

829 SIcut elementa infinitesima quantitatum variabilium sunt earum differentialia, sic ex eis coalescentes quantitates variabiles, vocantur *integrales*; parsque illa analysis eas investigans *calculus integralis*, aut *summatorius*, qui docet modum inveniendi, mediis differentialibus datis, variabiles ipsas unde dimanarunt; idcirco appellatur etiam *methodus inversa calculi infinitesimalis*.

Schol.

830 Schol. Ad denotandam integralem cujuslibet differentialis, anteponitur littera $S.$; sic sdx denotat integralem differentialis dx, $S.(adx - 2xdx)$ significat integralem correspondentem differentiali $adx - 2xdx$; idcirco litterarum d, $S.$ usus in calculo infinitesimali æquivocationibus locum præberet posset. *Fig.*

ARTICULUS II.

De Integratione quantitatum differentialium.

831 PRobl. *Invenire regulam fundamentalem ad integrandas quantitates differentiales.*

Posito quod differentiale quantitatis cujuslibet variabilis est productum ejus exponentis per eandem quantitatem, diminuto exponente in una unitate, multiplicato hoc producto per differentiale radicis (807), & quod calculus integralis est inversus respectu differentialis, patet quod ad integrandam quantitatem quamlibet differentialem, observari debet sequens

Regula: Augeatur una unitate exponens quantitatis differentialis, & dividatur postmodum tota expressio differentialis per differentiale radicis multiplicatæ per exponentem ita auctum.

832 Coroll. Cum omittantur, quando differentiatur aliqua quantitas, quantitates constantes quæ in expressione inveniuntur segregatæ à variabilibus, eo quod ejus differentiale sit $= 0$ (803), infertur quod etiam dum integratur expressio differentialis per regulam anteriorem, asseri nequit quod quantitas inde proveniens sit integralis completa; idcirco integrali per illam regulam resultanti necesse est semper addere quantitatem indeter-

Fig. minatam C, cujus valor invenietur juxta naturam quæstionis per sequentem regulam. In integrali inventa fiat variabilis $x = 0$, & siquidem destruitur tota expressio, signum erit quod integralis exacta est, & resultabit $C = 0$; sed si manet aliquod residuum, hoc $+ C = 0$, & sic residuum illud cum signo contrario erit proculdubio valor quantitatis C; quod præsens ad omnes casus particulares habebitur, hæc enim praxis, confusionis vitandæ gratia, omittitur.

Exemp. expressionum, quæ per regulam fundamentalem integrantur.

1.° $S.dx = S.x^0dx = \dfrac{x^{0+1}dx}{dx} = x.$

2.° $S.xdx = \dfrac{x^2dx}{2dx} = \frac{1}{2}x^2.$

3.° $S.ax^mdx = \dfrac{ax^{m+1}dx}{(m+1)dx} = \dfrac{ax^{m+1}}{m+1}.$

4.° $S.bx^{\frac{m}{n}}dx = \dfrac{bx^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} = \dfrac{bnx^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}.$

5.° $S.\dfrac{dx}{ax^m} = S.\dfrac{x^{-m}dx}{a} = \dfrac{x^{-m+1}}{a(1-m)} = \dfrac{1}{ax^{m-1}(1-m)}.$

6.° $S.\dfrac{x^mdx}{a^2x^n - b^2x^n} = S.\dfrac{x^{m-n}dx}{a^2 - b^2} = \dfrac{x^{m-n+1}}{(a^2-b^2)(m-n+1)}.$

7.° $S.(2ax^2dx - bx^3dx + 3c^2ydy) = \frac{2ax^3}{3} - \frac{bx^4}{4} + \frac{3c^2y^2}{2}.$

8.° $S.(ax + x^2)^2dx = S.(a^2x^2dx + 2ax^3dx + x^4dx) = \frac{a^2x^3}{3} + \frac{ax^4}{4} + \frac{x^5}{5}.$ &c.

Schol. 1.

833 Schol. 1. Si in hac expressione differentiali $x^m dx$ Fig. supponimus quod sit $m = -1$, & utimur regula fundamentali, resultat $S.x^m dx = \frac{x^0}{0} = \infty$, cujus valor nil prodest; sed cum differentiale $x^m dx$ reducatur hoc casu ad $\frac{dx}{x}$, quæ expressio, ut constat (814), est differentiale logarithmi hyperbolici ex x, proculdubio ejus integrale erit lx, hoc est $S.\frac{dx}{x} = lx$; hoc innuit, quod *integrale fractionis, cujus numerator est differentiale denominatoris, æquale est logarithmo sui denominatoris.*

834 Schol. 2. Frequenter occurrunt expressiones differentiales, quæ sunt productum functionis ex x, & dx multiplicatæ per quantitatem radicalem quamlibet; & tunc ad eam integrandam recurri solet ad substitutionem. Ad hoc expressio sub radicali posita fit æqualis uni variabili, z v. g., ac differentiando postmodum æquationem, deducuntur valores ex x, dx, &c. in valores ex z, dz, &c. factaque integratione per regulam fundamentalem, rursus substituuntur pro z, ejusque potentiis valores correspondentes in expressionibus ex x, & ita habetur integrale quæsitum.

Ex. 1. Integranda sit expressio $xdx \sqrt[4]{a-x}$; ad hoc faciemus $\sqrt[4]{a-x} = z$, erit $a - x = z^4$, $x = a - z^4$, $dx = -4z^3dz$, consequentes $xdx \sqrt[4]{a-x} = (a-z^4) \cdot -4z^3dz.\ z = 4z^8dz - 4az^4dz$; ergo $S.xdx \sqrt[4]{a-x} = S.(4z^8dz - 4az^4dz) = \frac{4z^9}{9} - \frac{4az^5}{5} = \frac{4z^8 \cdot z}{9} - \frac{4z^4 z}{5}$, in cujus integrali restitutis valoribus ex z in expressionibus ex x resultat denique $S.xdx \sqrt{a-x} = \frac{4}{9}(a-x)^2(a-x)^{\frac{1}{4}} - \frac{4a}{5}(a-x)(a-x)^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{9}(a-x)^{\frac{9}{4}} - \frac{4a}{5}(a-x)^{\frac{5}{4}}$.

Fig. Ex. 2. Integranda proponatur expressio $px^{m-1} dx(x^m + a^m)^{\frac{n}{r}}$, & faciendo $(x^m + a^m)^{\frac{n}{r}} = z$, erit $x^m + a^m = z^{\frac{r}{n}}$, $x^m = z^{\frac{r}{n}} - a^m$, quæ expressio differentiata dat $mx^{m-1}dx = \frac{r}{n} z^{\frac{r}{n} - 1} dz$; ergo $px^{m-1}dx(x^m + a^m)^{\frac{n}{r}} = \frac{pr}{mn} z^{\frac{r}{n}} dz$; consequenter $S.\left(px^{m-1} dx(x^m + a^m)^{\frac{n}{r}}\right) = S.\frac{pr}{mn} z^{\frac{r}{n}} dz = \frac{pr}{mr + mn} z^{\frac{r}{n}+1} = \frac{rp}{mr + mn}(x^m + a^m)(x^m + a^m)^{\frac{n}{r}}$ restitutis jam valoribus ex z in expressionibus ex x, &c.

835 Schol. 3. Dum expressiones differentiales integrationis exactæ capaces non sunt, recurritur ad approximationem; ad hoc, reducentur quantitates, per quas multiplicatum est differentiale variabilis, in series infinitas juxta formulam Newtonianam, aliamve, ac postea exequendo multiplicationem per differentiale, resultabit series terminorum, qui omnes integrari per regulam fundamentalem poterunt.

Ex. 1. Integranda sit expressio $\frac{bdx}{a+x} = dx \frac{b}{a+x}$, ad quod resolvemus fractionem $\frac{b}{a+x}$ in seriem infinitam $\frac{b}{a} - \frac{bx}{a^2} + \frac{bx^2}{a^3} - \frac{bx^3}{a^4} +$ &c., erit $\frac{bdx}{a+x} = \frac{bdx}{a} - \frac{bxdx}{a^2} + \frac{bx^2dx}{a^3} +$ &c.; ergo $S. \frac{bdx}{a+x} = \frac{bx}{a} - \frac{bx^2}{2a^2} + \frac{bx^3}{3a^3} - \frac{bx^4}{4a^4} +$ &c.

Ex. 2. Integranda sit expressio $mdx\sqrt{a^2 - x^2}$; ad hoc resolvetur radicale $\sqrt{a^2 - x^2}$ in seriem infinitam $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} -$ &c., erit $mdx\sqrt{a^2 - x^2} = madx - \frac{mx^2dx}{2a} - \frac{mx^4dx}{8a^3} - \frac{mx^6dx}{16a^5} -$ &c., ac consequenter $S.mdx\sqrt{a^2 - x^2} = max - \frac{mx^3}{3.2a} - \frac{mx^5}{5.8a^3} - \frac{mx^7}{7.16a^5} -$ &c.

AR-

ARTICULUS III.

De Integratione differentialium logarithmicorum, & exponentialium.

836 IN integratione differentialium logarithmicorum, specialem locum obtinet substitutio. Integranda v. g. proponatur expressio $\frac{dx}{xlx}$, ac faciendo $lx = y$, erit $\frac{dx}{x} = dy$; ergo $\frac{dx}{xlx} = \frac{dy}{y}$; ac consequenter $S. \frac{dx}{xlx} = S. \frac{dy}{y} = ly$, in qua expressione substituendo loco y ejus valorem lx, erit denique $s \frac{dx}{xlx} = llx$. **Fig.**

Itidem integranda sit expressio $m(lx)^{m-1} \frac{dx}{x}$, faciemus $lx = y$, erit $\frac{dx}{x} = dy$, $(lx)^m = y^m$, $(lx)^{m-1} = y^{m-1}$, ac consequenter $S.m(lx)^{m-d} \frac{dx}{x} = S.my^{m-1} dy = y^m = (lx)^m$ substituto jam loco y^m ejus valore $(lx)^m$.

837 Cum sit $d(a^x) = a^x d(xla) = a^x dx$ (817), necessario resultabit $S.a^x dx = a^x = \dfrac{a^x dx}{d(xla)} = \dfrac{a^x dx}{dla^x}$. Itidem observatur quod $d(x^y) = x^y d(ylx) = x^y(dylx + \frac{ydx}{x})$; ergo $S.x^y(dylx + \frac{ydx}{x}) = x^y$; sed $x^y = \dfrac{x^y\, dylx + \frac{ydx}{x}}{dylx + \frac{ydx}{x}} = \dfrac{x^y(dylx + \frac{ydx}{x})}{dlx^y}$, cum sit $dylx + \frac{ydx}{x} = d(ylx) = dlx$; *ergo integrale unius expressionis differentialis exponentialis æquale est illæ expressioni differentiali divisæ per differentiale logarithmi quantitatis exponentialis, in expressionem ingredientis.*

Fig.

ARTICULUS IV.

De Integratione differentialium, in quæ ingrediuntur sinus, & cosinus.

838 EX eo quod $dz \cos. z = d \sin. z$, ac quod $-dz \sin. z = d \cos. z$ (§. 818) necesse est ut resultet $S.dz \cos. z = \sin. z$, ac $S.dz \sin. z = -\cos. z$: proinde generatim erit $S.dz \cos.nz = \frac{1}{n} S.ndz \cos.nz = \frac{1}{n}\sin.nz$: & itidem $S.dz \sin. nz = -\frac{1}{n}\cos. nz$.

ARTICULUS V.

De Applicatione calculi integralis ad quadraturam curvarum.

839 THeor. *Formula generalis exprimens differentiale, aut elementum infinitesimum superficiei unius curvæ, est* $=$ ydx.

105 Diximus (802) quod spatium *PMmp* est incrementum infinitesimum areæ *APM*; sed (494) $PMmp = \frac{PM+pm}{2} \times Pp = \frac{2y+dy}{2}. dx = ydx + \frac{dxdy}{2} = ydx$ (801): ergo &c.

840 Coroll. Cum sit spatium infinitesimum $PMmp = ydx$, differentiale areæ *APM* erit etiam $sydx = APM$. Unde resultat quod ut applicetur hæc formula generalis areis particularibus, sumi debet æquatio curvæ, cujus area quæritur, ad per eam deducendo valorem ex y, hunc in illa expressione substituere; ex quo