cia de dicha subtangente finita. Que es &c.

EXEMPLO.

297. Sea la Espiral hiperbólica $CDGN$, cuya equacion es $uy=rb$, si se suponen, b un arco constante AR del círculo ACR descripto con el radio $CA=r$, la ordenada $CG=y$, y qualquier arco $AF=u$ contado desde el punto fixo A hasta el punto, donde la ordenada corta la circunferencia del círculo. *Fig.* 72.

Siendo $uy=rb$, será diferenciando $u\times-dy+ydu=o$, de donde $du=\frac{udy}{y}=\frac{rbdy}{y^2}$; pero (217) en las curvas referidas á los focus es $dx=\frac{ydu}{r}$, ó bien $\frac{rdx}{y}=du$: luego será $\frac{rdx}{y}=\frac{rbdy}{y^2}$, y $dx=\frac{bdy}{y}$; por consiguiente $dx:dy=b:y$: luego supuesta y infinita, será $dx=o$. La ordenada y es infinita, quando sea el arco $AF=u=o$, y en este caso la ordenada CG coincide con la recta CM que pasa por el punto A. Para determinar, si la recta CM es asíntota de la curva, ó bien otra recta paralela á CM, hállese el valor de la subtangente $\frac{ydx}{dy}$; y por ser $dx=\frac{bdy}{y}$, será $\frac{ydx}{dy}=b$: luego tirada la recta $CE=b$ perpendicular á CM, y por él punto E tirada EN paralela á CM, será la recta EN asíntota de la curva.

PROPOSICION XLIV.

298. Determinar, si una curva referida al exe ó diámetro tiene algun punto singular, en el qual la curvatura sea diferente de la del círculo. *Fig.* 73.

La equacion á qualquiera curva MN referida al exe ó diámetro AG sea $y=F.x$, en la qual $F.$ indica la funcion de la abscisa $x=AB$ que corresponde á la ordenada $BM=y$. Si en dicha funcion se substituye $x+dx$ en lugar de x, será

$$(79)\ F.(x+dx)=F.x+dx\times F'.x+\frac{dx^2\times F''.x}{2}$$
$$+\frac{dx^3\times F'''.x}{2\times 3}+\ \&c.$$ luego aumentada la abscisa $AB=x$ en el elemento $Bb=dx$, y tirada la ordenada bm que llamo y', será $y'=F.(x+dx)$
$$=F.x+dx\times F'.x+\frac{dx^2\times F''.x}{2}+\frac{dx^3\times F'''.x}{2\times 3}+$$
&c. en la qual serie los términos primero, segundo, tercero, quarto, &c. corresponden á los de la serie y, dy, d^2y, d^3y, &c. esto es, $y=F.x$, $dy=dx\times F'.x$, $d^2y=dx^2\times F''.x$, $d^3y=dx^3\times F'''.x$, y así sucesivamente. Y tirando las rectas, TMQ

tangente á la curva en el punto M, y ME paralela al diámetro AG, se tendrá que el primer miembro y' de la referida equacion es igual á $bE + EQ + Qm$, y que la suma de los dos primeros términos del segundo miembro es igual á $bE + EQ$: luego la parte evanecente Qm comprehendida entre la tangente y la curva será igual al tercer término $\frac{dx^2 \times F''.x}{2}$ de la referida serie con todos los demas. Ahora si la equacion $y = F.x$ es al círculo, como $F.x = \sqrt{(2ax - x^2)}$, se hallará que en el tercer término de la referida serie la cantidad $F''.x$ es finita; por consiguiente dicha parte evanecente comprehendida entre la tangente y la periferia es infinitésima del segundo orden, lo qual tambien se ha demostrado con otro método (22). Por tanto si en una curva dada la cantidad $F''.x$ es finita respecto á un punto determinado, la curvatura en este no será diferente de la del círculo; pero si $F''.x = o$, ó $F''.x = \infty$, ó bien $d^2y = o$, ó $d^2y = \infty$, respecto á un punto determinado en la curva, entonces la curvatura en dicho punto será diferente de la del círculo, y el punto será singular en la curva. Que es &c.

COROLARIO.

299. Luego para determinar en una curva dada CMN referida al diámetro AG el punto M de inflexîon visible, en donde la curva de cóncava pasa á ser convexâ al diámetro, ó al contrario (*Fig.* 74.), ó bien el punto M de regreso (*Fig.* 75.), se hallará la diferencial segunda de la equacion á la curva en la hipótesis de dx constante; despues se determinará el valor de d^2y, el qual se supondrá igual á cero ó al infinito; y por medio de la equacion que resulta, y de la equacion dada, se hallarán las coordenadas AB, BM correspondientes al punto de inflexîon ó de regreso.

EXEMPLO.

300. Sea la curva AMN la Concoide de Nicomedes, cuya equacion es $y^2 = \frac{a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4}{x^2}$, si se suponen $GA = GP = a$, $GE = x$, y $EM = y$. *Fig.* 76.

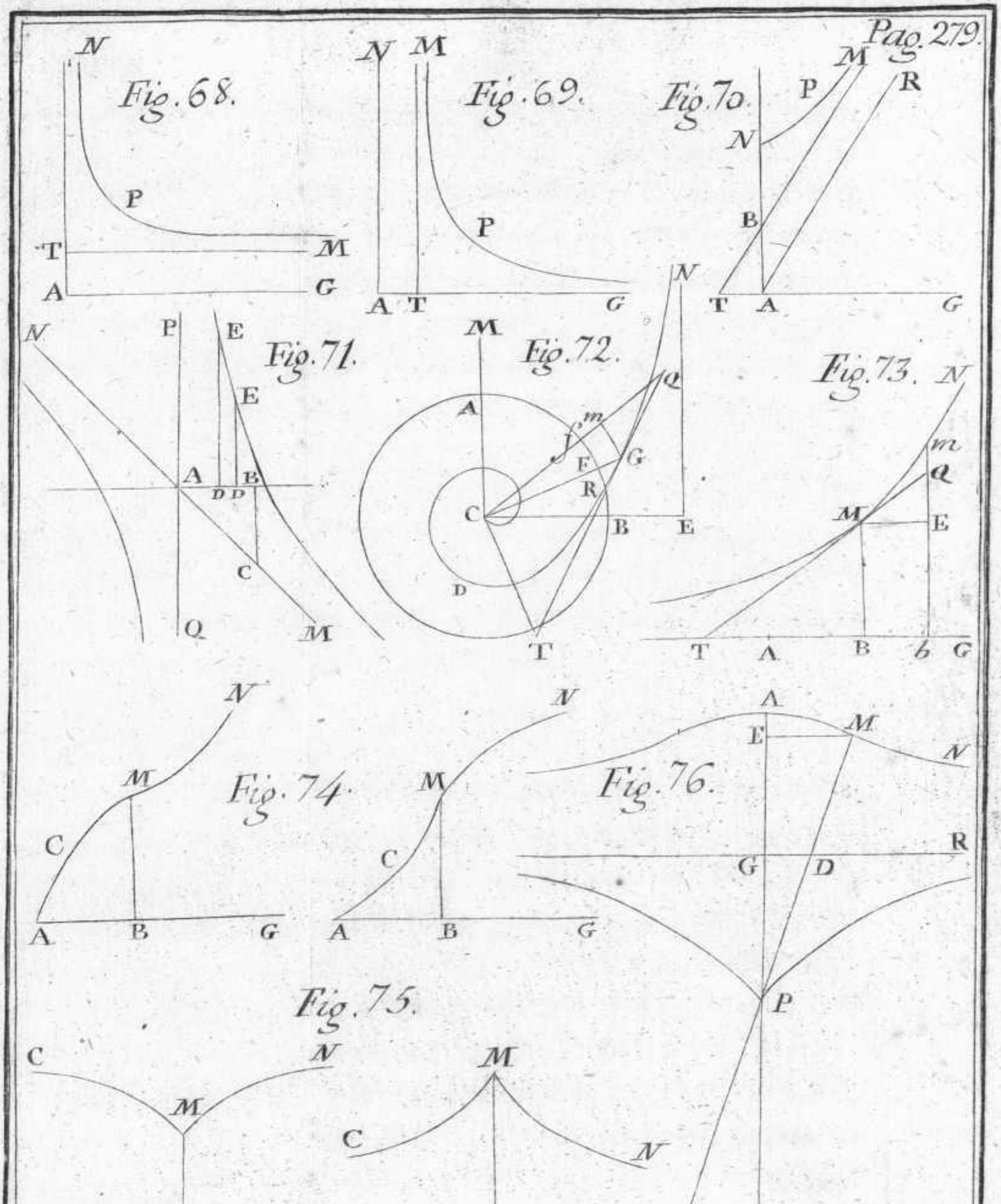
Siendo $y^2 = \frac{a^4 + 2a^3x - 2ax^3 - x^4}{x^2}$, será tambien $y = \frac{(a+x) \times \sqrt{(a^2 - x^2)}}{x}$: luego diferenciando será $dy = -\frac{x^3dx + a^3dx}{x^2\sqrt{(a^2 - x^2)}}$; y diferenciando de nuevo en la hipótesis de dx constante, será $d^2 y = \frac{2a^5 - 3a^3x^2 - a^2x^3}{x^3 \times (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \times dx^2$. Ahora si se supone $d^2 y = 0$, se tendrá la equacion $2x^5 - 3a^3x^2 - a^2x^3 = 0$, de donde $x^3 + 3ax^2 - 2a^3 = 0$; cuyas raices son $x = -a + \sqrt{(3a^2)}$, $x = -a - \sqrt{(3a^2)}$, $x = -a$. Tomada la abscisa $GE = x = -a + \sqrt{(3a^2)}$, se hallará por la equacion á la curva la ordenada $EM = y = \frac{\sqrt{(3a^2)} \times \sqrt{(-3a^2 + 2a\sqrt{(3a^2)})}}{-a + \sqrt{(3a^2)}}$, y quedará determinado el punto M de la inflexîon. El segundo valor de la x da la ordenada y imaginaria, y por consiguiente no sirve. En fin el tercer valor de la x da el punto P del regreso.

PROPOSICION XLV.

301. Si en qualquiera curva ACD referida al exe ó diámetro AG son las rectas CQ, DQ perpendiculares á las respectivas tangentes TCK, YD en los puntos C, D del contacto, y si considerando el ángulo CQD evanecente, coincide el arco evanecente CD con él descripto con el radio QC; determinar la expresion diferencial de la recta QC que se llama Radio del ósculo, y el círculo descripto con este radio se dice Círculo osculador. Fig. 77 y 78.

Tírense las rectas, esto es, TZ perpendicular á la tangente DY, las ordenadas CL y DR, y por el punto C la MCS paralela á AG. Llámense, $AL=x$, $LC=y$, $AC=s$, y $TY=dz$; y serán, $LR=CS=MS=dx$, $DS=dy$, $CD=DM=ds$, la tangente $TC=TK=\frac{yds}{dy}$ (257), la subtangente $LT=\frac{ydx}{dy}$, $AT=\frac{ydx}{dy}-x$, y finalmente $TY=dz$ $=D.(\frac{ydx}{dy}-x)=\frac{y\times(dyd^2x-dxd^2y)}{dy^2}$, en la suposicion que dx, dy sean variables.

1°. Si la curva ACD se refiere al exe AG (*Fig.* 77.), serán los triángulos YZT, MSD semejantes, y en ellos proporcionales los lados, esto es, $MD:DS=YT:TZ$, ó bien $ds:dy=dz:TZ$, y por consiguiente $TZ=\frac{dy\times dz}{ds}$. En el quadrilátero $QCKD$, que tiene rectos los ángulos QCK, QDK, será la suma de los ángulos CQD, CKD igual á dos rectos; pero la suma de los ángulos ZKT, CKD es tambien igual á dos rectos: luego será $CQD+CKD=ZKT+CKD$, y quitado el comun ángulo CKD, se tendrá el ángulo $ZKT=CQD$; y siendo además los ángulos Z, QDC iguales por rectos, serán semejantes los triángulos KZT, CQD, y en ellos proporcionales



Lam VII.

los lados, esto es, $TZ:KT=CD:CQ$, ó bien $\frac{dy\times dz}{ds}:\frac{yds}{dy}=ds:CQ=\frac{y\times ds^3}{dy^2\times dz}$; y substituyendo en lugar de dz su valor hallado antes, se tendrá el radio del ósculo $CQ=\frac{ds^3}{dyd^2x-dxd^2y}$.

2.° Si la curva ACD se refiere (*Fig.* 78.) al diámetro AG, báxese la perpendicular DE á la MS, y llámese b el ángulo formado por las coordenadas AL, LC; y será $DE=\frac{Sc.b\times dy}{r}$: luego con el método expresado en el caso anterior por medio de las proporciones, esto es, $MD:DE=YT:TZ$, $TZ:KT=CD:CQ$, se hallará ser el radio del ósculo $CQ=\frac{r}{Sc.b}\times\frac{ds^3}{dyd^2x-dxd^2y}$. Que es &c.

COROLARIO I.

302. Baxada la perpendicular QN (*Fig.* 77.) á la ordenada CL prolongada, será $CF:CL=CQ:CN$; y dando los valores correspondientes á los tres primeros términos de dicha proporcion, se tendrá (270) $\frac{yds}{dx}:y=\frac{ds^3}{dyd^2x-dxd^2y}:CN$; por consiguiente será $CN=\frac{dx\times ds^2}{dyd^2x-dxd^2y}$. Tambien

por la semejanza de los triángulos CLF, CNQ, será $CF:FL=CQ:QN$, esto es, $\frac{yds}{dx}:\frac{ydy}{dx}=\frac{ds^3}{dyd^2x-dxd^2y}:QN=\frac{dy\times ds^2}{dyd^2x-dxd^2y}$. Por tanto quedan determinadas las fórmulas de las rectas CN y QN, que se suelen llamar Corradios.

COROLARIO II.

303. Tiradas las perpendiculares, CB al diámetro AG (*Fig.* 78.), y QP á dicha CB prolongada, será $CF:CB=CQ:CP$; pero (270) $CF=\frac{ryds}{rdx-Cc.b\times dy}$, $CB=\frac{Sc.b\times y}{r}$: luego será $\frac{ryds}{rdx-Cc.b\times dy}:\frac{Sc.b\times y}{r}=\frac{rds^3}{Sc.b\times(dyd^2x-dxd^2y)}:CP=\frac{(rdx-Cc.b\times dy)\times ds^2}{r\times(dyd^2x-dxd^2y)}$. Tambien por la semejanza de los triángulos CBF y CPQ será $CB:FB=CP:QP$, esto es, $\frac{Sc.b\times y}{r}:\frac{Sc.b\times ydy}{rdx-Cc.b\times dy}=\frac{(rdx-Cc.b\times dy)\times ds^2}{r\times(dyd^2x-dxd^2y)}:QP=\frac{dyds^2}{dyd^2x-dxd^2y}$. Si se prolonga la ordenada CL hasta encontrar la QP en H, serán los triángulos CLB, CHP semejantes, y en ellos proporcionales los lados $CB:CL=CP:CH$, esto es, $Sc.b:r=\frac{(rdx-Cc.b\times dy)\times ds^2}{r\times(dyd^2x-dxd^2y)}:CH=\frac{(rdx-Cc.b\times dy)\times ds^2}{Sc.b\times(dyd^2x-dxd^2y)}$: tambien por la semejanza

de los mismos triángulos será $CL:LB=CH:HP$, esto es, $r:Cc.\ b=\frac{(rdx-Cc.b\times dy)\times ds^2}{Sc.b\times(dyd^2x-dxd^2y)}:HP=\frac{Cc.b\times(rdx-Cc.b\times dy)\times ds^2}{rSc.b\times(dyd^2x-dxd^2y)}$; y restada HP de QP, se tendrá la expresion diferencial de QH.

COROLARIO III.

304. Si se supone dx constante, será en las curvas referidas á los exes (*Fig.* 77.) el radio del ósculo $CQ=-\frac{ds^3}{dxd^2y}$, y los corradios $CN=-\frac{ds^2}{d^2y}$, $QN=-\frac{dy\times ds^2}{dxd^2y}$; pero en las curvas referidas á los diámetros (*Fig.* 78.) será el radio del ósculo $CQ=-\frac{r\times ds^3}{Sc.b\times dxd^2y}$, $CP=-\frac{(rdx-Cc.b\times dy)\times ds^2}{rdxd^2y}$, $PQ=-\frac{dyds^2}{dxd^2y}$, $CH=-\frac{(rdx-Cc.b\times dy)\times ds^2}{Sc.b\times dxd^2y}$.

ESCOLIO.

305. Si la curva ACD se refiere al exe AG, se determinará el radio del ósculo CQ (*Fig.* 79.) por medio de las fórmulas siguientes, que evitan las diferenciales segundas. Suponiendo, pues, la construccion de la Figura, y las denominaciones anteriores, tómese $CB=a$; desde el punto B báxese la

perpendicular BN á CQ, y por el punto b tírese la recta bE perpendicular á DQ: en fin nómbrese $CN=z$, y será $Nn=dz$. Por ser los ángulos BCs, QCD iguales por rectos, será el ángulo BCN $=DCs$; pero los ángulos en N y s son iguales por rectos: luego serán semejantes los triángulos BNC, CsD, y en ellos proporcionales los lados, esto es, $Ds:DC=BN:CB$; y por ser el triángulo bNn semejante al triángulo nEQ ó bien al triángulo CDQ, será $DC:Nn=CQ:bN$ ó bien BN: luego por igualdad perturbada será $Ds:Nn$ $=CQ:CB$, esto es, $dy:dz=CQ:a$, y por consiguiente el radio del ósculo $CQ=\frac{ady}{dz}$. Finalmente por la semejanza de los triángulos DsC, CNB será $CD:Cs=CB:CN$, esto es, $ds:dx=a:z$ $=\frac{adx}{ds}$, y por medio de esta expresion facilmente se determinará el valor de la variable z.

Para determinar las expresiones de los corradios CS, SQ, adviértase que por la semejanza de los triángulos CNB, CSQ son proporcionales los lados, esto es, $CB:CN=CQ:CS$, $CB:BN=CQ:$ QS: luego serán $a:z=\frac{ady}{dz}:CS=\frac{zdy}{dz}$, $a:$ $\sqrt{(a^2-z^2)}=\frac{ady}{dz}:QS=\frac{dy\sqrt{(a^2-z^2)}}{dz}$.

EXEMPLO I.

306. Sea la curva ACD la Parábola Apoloniana referida al exe AG, cuya equacion es $y^2=2ax$, si se suponen las coordenadas $AL=x$, $LC=y$, y el parámetro $=2a$. *Fig.* 77.

Diferenciando la equacion propuesta, se tendrá $2ydy=2adx$, ó bien $ydy=adx$; y si esta equacion se diferencia en la suposicion de dx constante y dy variable, será $dy^2+yd^2y=o$; de donde resulta ser $d^2y=-\frac{dy^2}{y}$; pero $dx=\frac{ydy}{a}$, y $ds=\frac{dy\sqrt{(y^2+a^2)}}{a}$ (223): luego será $-\frac{ds^3}{dxd^2y}$ ó bien el radio del ósculo $QC=-\frac{\frac{dy^3}{a^3}\times(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{ydy}{a}\times-\frac{dy^2}{y}}$ $=\frac{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}$, de donde resulta la proporcion, esto es, $a^2:y^2+a^2=\sqrt{(y^2+a^2)}:CQ$. Siendo en la Parábola la subnormal $LF=a$ mitad del parámetro, será $CF=\sqrt{(y^2+a^2)}$: luego será $(LF)^2:(CF)^2=CF:CQ$; pero $(LF)^2:(CF)^2=LF:TF$: luego será $LF:TF=CF:CQ$, esto es, el radio del ósculo CQ será el quarto término proporcional á las rectas LF, TF, CF.

Ahora si se substituyen los referidos valores de ds, d^2y, dx en las fórmulas de los corradios, se tendrán $CN = -\frac{ds^2}{d^2y} = -\frac{dy^2\times(y^2+a^2)}{a^2} : -\frac{dy^2}{y} = \frac{(y^2+a^2)\times y}{a^2}$, $QN = -\frac{dy\times ds^2}{dx d^2y} = -\frac{dy\times dy^2\times(y^2+a^2)}{a^2} : \frac{ydy}{a}\times -\frac{dy^2}{y} = \frac{y^2+a^2}{a}$.

De otro modo.

En la fórmula $z = \frac{adx}{ds}$, substitúyanse los valores de dx, ds, esto es, $dx = \frac{ydy}{a}$, $ds = \frac{dy\sqrt{(y^2+a^2)}}{a}$, y será $z = ydy : \frac{dy\sqrt{(y^2+a^2)}}{a} = \frac{ay}{\sqrt{(y^2+a^2)}}$: luego diferenciando se tendrá $dz = \frac{a^3dy}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$; pero (*Fig.* 79.) el radio del ósculo $CQ = \frac{ady}{dz}$: luego será $CQ = ady : \frac{a^3dy}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}$. Ahora si se pide hallar los valores de los corradios por medio de sus respectivas fórmulas, se tendrán $CS = \frac{zdy}{dz} = \frac{aydy}{\sqrt{(y^2+a^2)}} : \frac{a^3dy}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y\times(y^2+a^2)}{a^2}$, y $QS =$

$$\frac{dy\sqrt{(a^2-z^2)}}{dz}=\sqrt{\left(a^2+\frac{a^2y^2}{y^2+a^2}\right)}\times dy:\frac{a^3dy}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{y^2+a^2}{a}.$$

Por tanto si en la expresion hallada del radio del ósculo para qualquiera punto de la Parábola Apoloniana se substituye $y=o$, se tendrá el radio del ósculo perteneciente al punto A vértice primario de la misma curva igual á a, esto es, igual á la mitad del parámetro.

EXEMPLO II.

307. Sea la curva ACD una Elipse ó una Hipérbola referida á los exes, á quienes pertenece la equacion $y=\frac{b}{a}\times\sqrt{(2ax\mp x^2)}$, siendo el exe transverso igual á $2a$, el conjugado igual á $2b$, la abscisa $AL=x$, y la ordenada $LC=y$. *Fig.* 77.

Diferenciando la equacion propuesta, será $dy=\frac{b}{a}\times\frac{adx\mp xdx}{\sqrt{(2ax\mp x^2)}}$; y si esta equacion se diferencia en la suposicion de dx constante y dy variable, se tendrá $d^2y=-\frac{ba\times dx^2}{(2ax\mp x^2)^{\frac{3}{2}}}$; pero (220) $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dx\sqrt{(a^2\times(2ax\mp x^2)+b^2\times(a\mp x)^2)}}{a\sqrt{(2ax\mp x^2)}}$:

luego será $-\frac{ds^3}{dxd^2y}$ ó bien el radio del ósculo $CQ=-\frac{dx^3\times(a^2\times(2ax\mp x^2)+b^2\times(a\mp x)^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3\times(2ax\mp x^2)^{\frac{3}{2}}}:=\frac{dx\times-badx^2}{(2ax\mp x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{(a^2\times(2ax\mp x^2)+b^2\times(a\mp x)^2)^{\frac{3}{2}}}{ba^4}$; pero (270) la normal $CF=\frac{yds}{dx}=\frac{b}{a^2}\sqrt{(a^2\times(2ax\mp x^2)+b^2\times(a\mp x)^2)}$: luego será el radio del ósculo $CQ=\frac{a^2\times(CF)^3}{b^4}$. Por tanto en el vértice A, en donde es $x=o$, será dicho radio igual á $\frac{b^2}{a}$.

Finalmente serán los corradios, $CN=-\frac{ds^2}{d^2y}=\frac{dx^2\times(a^2\times(2ax\mp x^2)+b^2\times(a\mp x)^2)}{a^2\times(2ax\mp x^2)}:-\frac{badx^2}{(2ax\mp x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $=\frac{\sqrt{(2ax\mp x^2)}\times(a^2\times(2ax\mp x^2)+b^2\times(a\mp x)^2)}{ba^3}$, y $QN=-\frac{dyds^2}{dxd^2y}=-\frac{b}{a}\times\frac{adx\mp xdx}{\sqrt{(2ax\mp x^2)}}\times\frac{dx^2\times(a^2\times(2ax\mp x^2)+b^2\times(a\mp x)^2)}{a^2\times(2ax\mp x^2)}:\frac{dx\times-badx^2}{(2ax\mp x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $=\frac{(a\mp x)\times(a^2\times(2ax\mp x^2)+b^2\times(a\mp x)^2)}{a^4}$.

EXEMPLO III.

308. Si la recta AG es tangente al círculo ATY en el punto A, y este círculo se hace rodar sobre la recta AG; el punto A tomado fixo en la circunferencia de dicho círculo describirá la curva ACG que se llama Cicloide, cuyo radio del ósculo se pide determinar. *Fig.* 80 y 81.

Considérese que dicho círculo (*Fig.* 80.) ha pasado á la posicion XVZ, y el referido punto A á D; y se tendrá la recta AX igual al arco DX por haberse aplicado todos los puntos de este arco á los de dicha recta: asimismo considérese que dicho círculo ha pasado á la posicion BEC, y el referido punto A á C, de modo que el diámetro CB sea perpendicular á AG; y se tendrá la recta AB igual á la semicircunferencia BEC, y la curva AC será la mitad de la cicloide ACG. Tírense las rectas, esto es, DF perpendicular al diámetro BC, las cuerdas DX y EB, y el diámetro XZ al punto del contacto X, de donde resulta ser XZ perpendicular á AG: luego en el rectángulo XF será $JX=BF$; y por ser los semicírculos XDZ, BEC iguales, serán tambien iguales las ordenadas DJ, EF; por consiguiente la cuerda $DX=EB$, y el arco $DX=BE$, y DE

$= JF = BX$; pero la recta $AB = BEC$, y la recta $AX = DX$ ó igual al arco BE: luego será BX ó bien DE igual al arco CE, que es la propiedad principal de la cicloide.

Ahora si se suponen (*Fig.* 81.) las coordenadas $CF = x$, $FD = y$, y el radio $CR = r$, por ser el arco $CE = ED$ por la propiedad de la curva, será $y = CE + EF = S.\frac{rdx}{\sqrt{(2rx - x^2)}} + \sqrt{(2rx - x^2)}$; y diferenciando esta equacion, se tendrá (A) $dy = \frac{\sqrt{(2r - x)} \times dx}{\sqrt{x}}$, de donde resulta ser $dy : dx = \sqrt{(2rx - x^2)} : x$: luego supuesta la recta DM tangente á la curva en el punto D, será la ordenada DF á la subtangente FM como EF á FC; por consiguiente la tangente DM es paralela á la cuerda EC: y diferenciando la equacion (A) en la suposicion de dx constante, será $d^2y = -\frac{rdx^2}{x\sqrt{(2rx - x^2)}}$; y por ser (220) $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ será $ds = \sqrt{\left(dx^2 + \frac{(2r - x) \times dx^2}{x}\right)} = dx \sqrt{\frac{2r}{x}}$, de donde $ds^3 = \frac{2r\sqrt{2r} \times dx^3}{x^{\frac{3}{2}}}$: luego será $-\frac{ds^3}{dxd^2y}$ ó bien el radio del ósculo $DQ = -\frac{2r\sqrt{2r} \times dx^3}{x^{\frac{3}{2}}} : dx \times$

$-\frac{rdx^2}{x\sqrt{(2rx-x^2)}} = 2\times\sqrt{(2r\times(2r-x))}$, esto es, el radio del ósculo DQ igual al duplo de la cuerda BE; pero la tangente DM es paralela á la cuerda EC, y los ángulos QDM, BEC son iguales por rectos: luego será tambien el radio del ósculo DQ paralelo á la cuerda EB. Se infiere que el radio del ósculo en el punto C, en donde es $x=o$, será igual á $4r$; por consiguiente prolongado el diámetro CB, hasta que sea $BH=BC$, será la recta HC el radio del ósculo perteneciente al punto C. Tambien por ser $ds = dx\sqrt{\frac{2r}{x}} = \sqrt{2r}\times x^{-\frac{1}{2}}dx$, será $s=\sqrt{2r}\times x^{\frac{1}{2}}:\frac{1}{2}=2\sqrt{2rx}$, esto es, el arco CD de la cicloide duplo de la cuerda CE; por consiguiente la semicicloide AC será dupla del diámetro CB del círculo.

PROPOSICION XLVI.

309. Si en qualquiera curva BCD referida al focus F son las rectas CQ, DQ perpendiculares á las respectivas tangentes TC, YD en los puntos C, D del contacto, y si considerando el ángulo CQD evanecente, coincide el arco evanecente CD con él descripto con el radio QC; determinar la expresion diferencial del radio del ósculo QC. *Fig*.82.

Tírense las ordenadas FC, FD; con el radio FC descríbase el arco evanecente Cm; y desde el focus F báxense las perpendiculares, FM á CQ, y Ft á DQ. Llámense, $FC=y$, $Cm=dx$, $BC=s$, $CM=z$; y serán, $Dm=dy$, $CD=ds$, y $Mu=dz$. Siendo, pues, los ángulos QCD, FCm iguales por rectos, será tambien el ángulo $mCD=FCM$; pero los ángulos en M y m son iguales por rectos: luego los triángulos FMC, CmD serán semejantes, y en ellos proporcionales los lados, esto es, FC: $FM=CD:Dm$; pero por ser el triángulo FuM semejante al triángulo Qut ó bien á QCD, será $FM:Mu=QC:CD$: luego por igualdad perturbada será $FC:Mu=QC:Dm$; esto es, $y:dz=QC$: dy, de donde resulta ser el radio del ósculo $QC = \frac{ydy}{dz}$. Finalmente por la semejanza de los triángulos FMC, CmD, será $FC:CM=CD:Cm$, esto es, $y:z=ds:dx$; por consiguiente se tendrá $z=\frac{ydx}{ds}$. Que es &c.

COROLARIO.

310. Desde el centro Q del círculo osculador baxada la perpendicular QN á la ordenada CF prolongada, si es necesario, se tendrán los trián-

gulos QNC, FMC semejantes, y en ellos proporcionales los lados, esto es, $QC:CN = CF:CM$, $QC:QN = CF:FM$: luego $y:z = \frac{ydy}{dz}:CN$, $y:\sqrt{(y^2-z^2)} = \frac{ydy}{dz}:QN$; por consiguiente serán los corradios, $CN = \frac{zdy}{dz}$, $QN = \frac{dy\sqrt{(y^2-z^2)}}{dz}$, en cuyas expresiones es $z = \frac{ydx}{ds}$, como se ha dicho antes (309).

ESCOLIO.

311. Se ha demostrado antes ser el radio del ósculo $QC = \frac{ydy}{dz}$, y $z = \frac{ydx}{ds}$; y si se pide excluir la *dz* de la expresion de dicho radio, se diferenciará la equacion $z = \frac{ydx}{ds}$, y el valor correspondiente á *dz* se substituirá en la fórmula $\frac{ydy}{dz} = QC$. Por tanto si se diferencia la equacion $z = \frac{ydx}{ds}$, en la suposicion de dx, ds variables, será $dz = \frac{dydxds + yd^2xds - ydxd^2s}{ds^2}$; pero (220) $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, y diferenciando $d^2s = \frac{dxd^2x + dyd^2y}{ds}$: luego será *dz*

$= (dydxds + yd^2xds - \frac{ydx \times (dxd^2x + dyd^2y)}{ds}) : ds^2$ $= \frac{dydxds^2 + yd^2xds^2 - ydx^2d^2x - ydxdyd^2y}{ds^3}$; y substituyendo en el segundo término en lugar de ds^2 su valor $dx^2 + dy^2$, se tendrá $dz =$ $\frac{dydxds^2 + yd^2xdy^2 - ydxdyd^2y}{ds^3}$. Por tanto será $QC =$ $\frac{yds^3}{dxds^2 + yd^2xdy - ydxd^2y}$, $CN = \frac{ydxds^2}{dxds^2 + yd^2xdy - ydxd^2y}$, y $QN = \frac{ydyds^2}{dxds^2 + yd^2xdy - ydxd^2y}$. Si se supone dx constante, las fórmulas anteriores del radio y de los corradios, tendrán el denominador $dxds^2 - ydxd^2y$.

EXEMPLO.

312. Sea la curva BCD la Espiral de Archîmedes, cuya equacion es $y = \frac{ru}{p}$. *Fig.* 82.

Diferenciando la equacion propuesta, será $dy = \frac{rdu}{p}$; pero (217) en las curvas referidas á los focus es $dx = \frac{ydu}{r}$, de donde $du = \frac{rdx}{y}$: luego será $dy = \frac{r^2dx}{py}$, y por consiguiente $dx = \frac{pydy}{r^2}$. Se ha demostrado (226) que en la curva propuesta es

$ds = \frac{p}{r^2} \times dy \surd\left(y^2 + \frac{r^4}{p^2}\right) = \frac{p}{r^2} \times dy \surd(y^2 + m^2)$

llamada $\frac{r^4}{p^2} = m^2$. Por tanto si se substituyen los valores hallados de dx, ds, en la fórmula $\frac{ydx}{ds} = z$, se tendrá $z = \frac{py^2 dy}{r^2} : \frac{p}{r^2} \times dy \surd(y^2 + m^2) = \frac{y^2}{\surd(y^2 + m^2)}$, y diferenciando será $dz = \frac{y^3 dy + 2m^2 y dy}{(y^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}}$: luego será $\frac{ydy}{dz}$ ó bien el radio del ósculo $CQ = ydy$: $\frac{y^3 dy + 2m^2 y dy}{(y^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(y^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}}{y^2 + 2m^2}$; y si los valores hallados de z, dz se substituyen en las expresiones $\frac{zdy}{dz}$, $\frac{dy \surd(y^2 - z^2)}{dz}$, se tendrán los valores de los corradios de la curva propuesta, esto es, $CN = \frac{y^2 dy}{\surd(y^2 + m^2)} : \frac{y^3 dy + 2m^2 y dy}{(y^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y \times (y^2 + m^2)}{y^2 + 2m^2}$, $QN = dy \surd\left(y^2 - \frac{y^4}{y^2 + m^2}\right) : \frac{y^3 dy + 2m^2 y dy}{(y^2 + m^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{m \times (y^2 + m^2)}{y^2 + 2m^2}$.

PROPOSICION XLVII.

313. Dada la curva *AMN* referida al exe *AG*, determinar la equacion á la Evoluta *ST*, esto es,

á la curva que pasa por los centros P de los infinitos círculos osculadores á la curva dada. *Fig.* 83.

Desde qualquier centro P'' báxese la perpendicular $P''R$ al exe AG, y tírese la recta $P''Q$ perpendicular á la ordenada $M'''B$ prolongada. Siendo, pues, la abscisa $AB = x$, y la ordenada $BM''' = y$, se tendrá la equacion entre las coordenadas x, y, y por x, y se determinarán (302, 304) los valores de los corradios $M'''Q$, $P''Q$. Llámense, la abscisa de la evoluta, esto es, $AR = z$, y la ordenada $RP'' = u$; y se tendrán las equaciones $z = x + QP''$, $u = M'''Q - y$. Ahora si por medio de estas dos equaciones, y de la equacion á la curva dada, se despejan las cantidades x, y, quedará la equacion entre las coordenadas z, u de la evoluta ST. Que es &c.

COROLARIO I.

314. Se infiere que el radio del ósculo es igual al arco de la evoluta que le corresponde, ó difiere de él en una cantidad constante: pues, $P''M''$ es igual á la suma última de las cuerdas evanecentes $SP + PP' + \&c. + AS$; y siendo la suma última de dichas cuerdas igual al arco SPP'', será el radio $P''M'' = SPP'' + AS$. Si en el punto A el radio del ósculo fuere cero, esto es, $AS = o$,

sería el radio del ósculo $P''M'' = SPP''$.

COROLARIO II.

315. Luego si la curva AMN es algébrica, su evoluta ST será tambien algébrica, y se podrá rectificar.

ESCOLIO.

316. Si un hilo bien extenso se envuelve en $ASPT$, siendo la parte AS tangente á la curva ST en el punto S, y se aparta dicho hilo de la posicion $ASPT$ sucesivamente por su extremo A; el punto A describirá la curva AMN que se llama Curva de evolucion, siendo SPT la evoluta. Y respecto á que el hilo AS se puede aumentar ó disminuir al infinito, de una misma evoluta ST resultarán infinitas curvas de evolucion, pero no al contrario.

EXEMPLO I.

317. Sea la curva AMN la Parábola Apoloniana referida al exe AG, cuya equacion es $y^2 = 2ax$, si se suponen las coordenadas $AB = x$, $BM''' = y$, y el parámetro $= 2a$. *Fig.* 83.

Siendo en la Parábola Apoloniana (306) los corradios, $QP'' = \frac{y^2 + a^2}{a}$, y $QM''' = \frac{y \times (y^2 + a^2)}{a^2}$, se tendrá que las dos equaciones $z = x + QP''$, y $u = M'''Q - y$, serán en el caso propuesto $z = x + \frac{y^2 + a^2}{a} = \frac{y^2}{2a} + \frac{y^2 + a^2}{a}$, ó bien $2az = 3y^2 + 2a^2$, y $u = \frac{y \times (y^2 + a^2)}{a^2} - y = \frac{y^3}{a^2}$, ó bien $a^2 u = y^3$, de donde $y^2 = \sqrt[3]{(a^4 u^2)}$. Ahora substituyendo el valor hallado de y^2 en la primera equacion $2az = 3y^2 + 2a^2$, se tendrá $2az = 3\sqrt[3]{(a^4 u^2)} + 2a^2$, ó bien $a \times (z - a) = \frac{3}{2} \times \sqrt[3]{(a^4 u^2)}$; y elevando ambos miembros al cubo, será $a^3 \times (z - a)^3 = \frac{27}{8} \times a^4 u^2$, de donde $(z - a)^3 = \frac{27a}{8} \times u^2$: luego la evoluta *ST* de la parábola apoloniana *AN* referida al exe *AG* es la Parábola segunda cúbica descripta con el parámetro $\frac{27a}{8}$ cerca de la tangente *SG*, tomada $AS = a$ valor del radio del ósculo (306) correspondiente al vértice primario *A* de la parábola apoloniana. Obsérvese que la parábola segunda cúbica se puede rectificar, de modo que el arco SPP'' es igual á $\frac{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} - a$; pues, $P''M''' = AS + SPP''$; pero $AS = a$, $P''M''' = \frac{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2}$: luego $\frac{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} = a + SPP''$, de donde $SPP'' = \frac{(y^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2} - a$.

EXEMPLO II.

318. Sea la curva AMN la Hipérbola ó la Elipse referida á sus exes, á quienes pertenece la equacion $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \times (2ax \pm x^2)$, si se suponen las coordenadas $AB = x$, $BM = y$, y los semiexes a, b. *Fig.* 83.

En las equaciones á la evoluta $z = x + QP''$, $u = M'''Q - y$, substitúyanse los valores (307) de los corradios QP'', $M'''Q$, como tambien en lugar de y su valor dado por x; y se tendrán las equaciones,

$$z = x + \frac{(a \pm x) \times (a^2 \times (2ax \pm x^2) + b^2 \times (a \pm x)^2)}{a^4},$$

$$u = \frac{\sqrt{(2ax \pm x^2)} \times (a^2 \times (2ax \pm x^2) + b^2 \times (a \pm x)^2)}{ba^3} - \frac{b}{a} \times \sqrt{(2ax \pm x^2)},$$

ó bien (*A*) $a^4 z = a^4 x + (a \pm x) \times (a^2 \times (2ax \pm x^2) + b^2 \times (a \pm x)^2)$,

$ba^3 u = \sqrt{(2ax \pm x^2)} \times (a^2 \times (2ax \pm x^2) + b^2 \times (a \pm x)^2 - b^2 a^2)$;

pero $a^2 \times (2ax \pm x^2) + b^2 \times (a \pm x)^2 - b^2 a^2 = (a^2 \pm b^2) \times (2ax \pm x^2)$: luego será $ba^3 u = (a^2 \pm b^2) \times (2ax \pm x^2)^{\frac{3}{2}}$, y por consiguiente $b^{\frac{2}{3}} a^2 u^{\frac{2}{3}} = (a^2 \pm b^2)^{\frac{2}{3}} \times (2ax \pm x^2)$, ó bien $b^{\frac{2}{3}} a^2 u^{\frac{2}{3}} = \pm (a^2 \pm b^2)^{\frac{2}{3}} \times (\pm 2ax + x^2)$, y añadiendo $\pm a^2 \times (a^2 \pm b^2)^{\frac{2}{3}}$ á ambos miembros, se tendrá $\pm a^2 \times ((a^2 \pm b^2)^{\frac{2}{3}} \pm b^{\frac{2}{3}} u^{\frac{2}{3}}) = \pm (a^2 \pm b^2)^{\frac{2}{3}} \times$

$(a\pm x)^2$: luego extrayendo la raiz quadrada de ambos miembros, será $a\times((a^2\pm b^2)^{\frac{2}{3}}\pm b^{\frac{2}{3}}u^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}= (a^2\pm b^2)^{\frac{1}{3}}\times(a\pm x)$, de donde $(a^2\pm b^2)^{\frac{1}{3}}\times \pm x=a\times((a^2\pm b^2)^{\frac{2}{3}}\pm b^{\frac{2}{3}}u^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}-a\times(a^2\pm b^2)^{\frac{1}{3}}$. Ahora si se substituyen los valores hallados de x, $a\pm x$, $a^2\times(2ax\pm x^2)+b^2\times(a\pm x)^2$ en la equacion (A), se tendrá $c^{\frac{4}{3}}a^2\times(z\pm a)^2 = (\sqrt[3]{(c^2b^2u^2)}\pm c^2)^2\times(c^{\frac{4}{3}}\pm\sqrt[3]{(b^2u^2)})$ en quien $c^2=a^2\pm b^2$. Téngase presente que los signos superiores dan la relacion de las coordenadas z, u de la evoluta correspondiente á la Hipérbola, y que los signos inferiores corresponden á la evoluta de la Elipse.

EXEMPLO III.

319. Sea la curva ACG la Cicloide; se pide hallar su Evoluta AHG. *Fig.* 81.

Se ha demostrado (308) que el radio del ósculo CH correspondiente al vértice primario C es duplo del diámetro CB, esto es, $CB=BH$: luego si se completa el rectángulo BK, y sobre AK como diámetro se forma el círculo SNK, será éste igual al círculo REC. Tambien se ha demostrado (308) que el radio del ósculo DQ es paralelo á la cuerda BE, y que es duplo de la misma cuerda: luego será $DT=TQ$; y tirada por el punto Q la recta OQP paralela á AB, se tendrá $FB=BP=AO$, y los arcos AN, BE serán iguales, y sus cuerdas BE y AN serán iguales y paralelas; pero TQ y EB son iguales y paralelas: luego serán tambien las rectas AN y TQ iguales y paralelas, y por consiguiente $AT=NQ$; pero AT es igual al arco BE, por ser la semicircunferencia $BEC=AB$, y el arco $CE=ED=BT$: luego será el arco $AN=NQ$ en qualquiera punto Q de la evoluta AH. Por tanto dicha evoluta AH de la semicicloide AC será tambien una semicicloide igual á ella, pero en situacion inversa. Dígase lo mismo de la evoluta HG de la semicicloide CG.

PROPOSICION XLVIII.

320. Dada la curva AMN referida al focus F, determinar la equacion á la evoluta ST, esto es, á la curva que pasa por los centros P de los infinitos círculos osculadores á la curva dada. *Fig.* 84.

Tírense las ordenadas FP', FP'', y haciendo centro en F con el intervalo FP' descríbase el arco $P'Q$; desde el punto P' báxese la perpendicular $P'O$ á la ordenada FM'. Llámense, la ordenada FP' de la evoluta igual á t, el arco evanecente $P'Q=dz$, la ordenada FM' de la curva dada igual á y, y finalmente dx el arco evanecente descripto con el radio $= y$: luego se determinarán (309, 310) los valores del radio del ósculo $M'P'$, y de los corradios $M'O$, OP' por la variable y; pero $FP' = \sqrt{((FO)^2 + (P'O)^2)}$: luego será (*A*) $t = \sqrt{((y - M'O)^2 + (P'O)^2)}$. Y siendo el arco evanecente $P'P''$ igual á su cuerda evanecente que es la diferencial del radio del ósculo $M''P''$ ó bien $M'P'$, se tendrá dicho arco $P'P''$ dado por y, dy; pero (220) $P'P'' = \sqrt{((P'Q)^2 + (P''Q)^2)}$: luego será (*B*) $D.M'P' = \sqrt{(dz^2 + dt^2)}$. Ahora si de las equaciones halladas *A* y *B* se despeja la incógnita y, se tendrá la equacion entre t y dz, esto es, la equacion á la evoluta *ST* referida al focus *F*. Que es &c.

EXEMPLO.

321. Sea la curva *AMN* la Espiral logarítmica referida al focus *F*, cuya equacion es $dx = \frac{Sc.a \times dy}{Cc.a}$, suponiendo y la ordenada, dx el arco evanecente del círculo descripto con dicha ordenada, y a el ángulo constante que forma la tangente tirada á qualquiera punto de dicha curva con la ordenada tirada al mismo punto. *Fig.* 84.

Se ha demostrado (309) que en qualquiera curva referida al focus es la fórmula del radio del ósculo $M'P' = \frac{ydy}{dz}$, supuesta $z = \frac{ydx}{ds}$; pero (220) $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, y $dy^2 = \frac{(Cc.a)^2 \times dx^2}{(Sc.a)^2}$: luego será $z = ydx : \sqrt{\left(\frac{(Cc.a)^2 \times dx^2}{(Sc.a)^2} + dx^2\right)} = \frac{ySc.a}{r}$; y diferenciando se tendrá $dz = \frac{dySc.a}{r}$: luego será $\frac{ydy}{dz}$ ó bien el radio del ósculo $M'P' = \frac{ry}{Sc.a}$; y substituyendo los valores hallados de z, dz en las fórmulas (310) de los corradios, resultará ser $M'O = y = M'F$, $OP' = \frac{yCc.a}{Sc.a}$. Ahora si los valores hallados del radio y de los corradios se substituyen en las equaciones A y B de la Proposicion antecedente, se tendrán las equaciones $t = \frac{yCc.a}{Sc.a}$, $\frac{rdy}{Sc.a} = \sqrt{(dz^2 + dt^2)}$; y diferenciando la primera, será $\frac{dt}{Cc.a} = \frac{dy}{Sc.a}$: luego $\frac{rdt}{Cc.a} = \sqrt{(dz^2 + dt^2)}$; y elevando al quadrado ambos miembros, y reduciendo, se hallará $dz = \frac{Sc.a \times dt}{Cc.a}$, equacion á la evoluta que es la misma Espiral logarítmica propuesta, pero con distinta posicion.

osculo $M'P' = \frac{-ydy}{dz}$, supuesta $z = \frac{ydx}{dz}$: pero (220)

$dz = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, y $dy^2 = \frac{(Co.a)^2 dx^2}{(Se.a)^2}$: luego

será $z = ydx : \sqrt{(dx^2 + \frac{(Co.a)^2 dx^2}{(Se.a)^2})} = \frac{ySe.a}{r}$; y

diferenciando se tendrá $dz = \frac{dySe.a}{r}$: luego será

$\frac{ydy}{dz}$ ó bien el radio del osculo $M'P' = \frac{ry}{Se.a}$; y

substituyendo los valores hallados de z, dz en las fórmulas (310) de los corradios, resultará ser

$M'O = y = M'F$, $OP' = \frac{rCo.a}{Se.a}$. Ahora si los valores hallados del radio y de los corradios se substituyen en las equaciones A y B de la Proposicion antecedente, se tendrán las equaciones $t = \frac{sCo.a}{Se.a}$,

$\frac{rdt}{Se.a} = \sqrt{(ds^2 + dt^2)}$; y diferenciando la primera, será $\frac{dt}{Co.a} = \frac{ds}{Se.a}$: luego $\frac{rdt}{Co.a} = \sqrt{(ds^2 + dt^2)}$;

y elevando al quadrado ambos miembros, y reduciendo, se hallará $ds = \frac{[illegible]}{Se.a}$, equacion á la evoluta que es la misma Espiral logarítmica propuesta, pero con distinta posicion.

LIBRO SEGUNDO.

DEFINICION.

322. La Fraccion $\frac{Pdx}{Q}$ se llama racional, quando las cantidades P, Q se componen de constantes y de potestades perfectas de la variable x. Así la fraccion $\frac{ax^m + bx^n + cx^p + \&c.}{ex^l + fx^g + \&c.} \times dx$ será racional, qualesquiera que sean los coeficientes a, b, c, e, f, &c. con tal que los exponentes m, n, p, q, g, &c. sean enteros.

COROLARIO I.

323. Si el numerador Pdx está con la diferencial dQ del denominador en una razon dada, por exemplo, en la de a á b, la integral de la fraccion $\frac{Pdx}{Q}$ dependerá del logaritmo hiperbólico de Q: pues siendo $Pdx : dQ = a : b$, se tendrá $Pdx = \frac{a}{b} \times dQ$; y partiendo por Q, será $\frac{Pdx}{Q} = \frac{a}{b} \times \frac{dQ}{Q}$: luego $S.\frac{Pdx}{Q} = \frac{a}{b} \times L.Q$ (87).

COROLARIO II.

324. Es evidente que qualquiera fraccion racional se divide en las fracciones $\frac{ax^m dx}{ex^q + fx^s + \&c.} + \frac{bx^n dx}{ex^q + fx^s + \&c.} + \frac{cx^p dx}{ex^q + fx^s + \&c.} + \&c.$ luego en general la integral de la fraccion $\frac{Pdx}{Q}$ se tendrá, si se halla la integral de la fórmula $\frac{ax^m dx}{ex^q + fx^s + \&c.}$

ESCOLIO.

325. Adviértase que los exponentes de la variable x se pueden considerar todos positivos: pues si no lo son, se reducirán multiplicando el numerador y denominador de la fraccion racional dada por la x elevada á una potestad positiva igual á la mayor de las negativas. Adviértase tambien que, si el mayor exponente de la x en el numerador es mayor que él del denominador, por la particion se podrá reducir la fraccion racional propuesta á otra, en la qual el mayor exponente de la x del numerador sea menor que él del denominador.

PROPOSICION I.

326. La diferencial $x^n dx \times (a+bx^p)^m$ se integra algébricamente ó por los logaritmos, si el exponente m, ó $\frac{n-p+1}{p}$, ó $-\frac{mp+n+p+1}{p}$ son números enteros y positivos, ó cero.

1°. Si el exponente m es número entero y positivo, elévese el binomio $a+bx^p$ á la potestad m; y los términos de la serie finita que resulta multiplíquense por $x^n dx$. Por tanto la diferencial propuesta se transformará en la suma de muchas diferenciales monomias, cada una de las quales se integrará algébricamente (77), ó por los logaritmos (87) si resulta la diferencial partida por su integral: luego en la suma de dichas integrales se tendrá la de la propuesta.

Si el exponente m es cero, la diferencial propuesta se reducirá á $x^n dx$, cuya integral es $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, ó $L.x$ siendo $n=-1$.

2°. Si la cantidad $\frac{n-p+1}{p}$ es número entero y positivo, hágase $a+bx^p=z$; y se tendrán, x^p $=\frac{z-a}{b}$, $x=\frac{(z-a)^{\frac{1}{p}}}{b^{\frac{1}{p}}}$, $x^n=\frac{(z-a)^{\frac{n}{p}}}{b^{\frac{n}{p}}}$, y $dx=\frac{1}{p}\times$

$\frac{(z-a)^{\frac{1}{p}-1} \times dz}{b^{\frac{1}{p}}}$; por consiguiente será $x^n dx \times$

$$(a+bx^p)^m = \frac{(z-a)^{\frac{n}{p}}}{b^{\frac{n}{p}}} \times \frac{(z-a)^{\frac{1}{p}-1} \times dz}{pb^{\frac{1}{p}}} \times z^m$$

$= \frac{1}{p \times b^{\frac{n+1}{p}}} \times (z-a)^{\frac{n-p+1}{p}} \times z^m dz$; pero esta diferencial se integra algébricamente ó por los logaritmos, si $\frac{n-p+1}{p}$ es número entero y positivo, ó cero, como se ha demostrado en el caso anterior: luego en las referidas hipótesis se integrará del mismo modo la fórmula diferencial propuesta.

Si es $\frac{n-p+1}{p} = 0$, ó bien $n = p-1$, será la diferencial propuesta $x^{p-1} dx \times (a+bx^p)^m$, y la transformada se reducirá á $\frac{1}{pb} \times z^m dz$; por consiguiente será $S. x^{p-1} dx \times (a+bx^p)^m = \frac{1}{pb \times (m+1)} \times z^{m+1} = \frac{1}{pb \times (m+1)} \times (a+bx^p)^{m+1}$, por ser $z = a+bx^p$.

3°. Si la cantidad $-\frac{mp+n+p+1}{p}$ es número entero y positivo, hágase $a+bx^p=zx^p$; y será

$a=(z-b)\times x^p$, de donde $x^p=\frac{a}{z-b}$, $x=\frac{a^{\frac{1}{p}}}{(z-b)^{\frac{1}{p}}}$,

$dx=-\frac{1}{p}\times a^{\frac{1}{p}}\times(z-b)^{-\frac{1}{p}-1}dz$, $x^n=\frac{a^{\frac{n}{p}}}{(z-b)^{\frac{n}{p}}}$:

luego la diferencial propuesta $x^n dx\times(a+bx^p)^m$

se transformará en la $\frac{a^{\frac{n}{p}}}{(z-b)^{\frac{n}{p}}}\times-\frac{a^{\frac{1}{p}}}{p}\times(z-b)^{-\frac{1}{p}-1}$

$\times dz\times z^m\times\frac{a^m}{(z-b)^m}=-\frac{a^{\frac{n+1+pm}{p}}}{p}\times z^m dz\times$

$(z-b)^{-\frac{mp+n+p+1}{p}}$; pero esta diferencial se integra por el caso primero, si $-\frac{mp+n+p+1}{p}$ es número entero y positivo, ó bien cero: luego en estas suposiciones se integrará del mismo modo la diferencial propuesta. Que es &c.

COROLARIO I.

327. Se infiere que siendo $p=1$, la diferencial

$x^n dx \times (a+bx)^m$ se integrará algébricamente, ó por los logaritmos, quando m, ó bien n, ó bien $-n-m-2$, sean números enteros y positivos, ó cero.

COROLARIO II.

328. Si es $p=2$, la diferencial $x^n dx \times (a+bx^2)^m$ se integrará algébricamente ó por los logaritmos, con tal que m, ó bien $\frac{n-1}{2}$, ó bien $-\frac{2m+n+3}{2}$ sean números enteros y positivos, ó cero.

PROPOSICION II.

329. Hallar la integral de la fraccion racional $\frac{x^n dx}{(x+a)^m}$, en quien los exponentes n y m son enteros y positivos.

Hágase $x+a=z$; y serán, $x=z-a$, $dx=dz$, y $x^n=(z-a)^n$: luego la diferencial propuesta $\frac{x^n dx}{(x+a)^m}$ se transformará en la $\frac{(z-a)^n \times dz}{z^m}$ que es igual á la serie $z^{n-m} dz - naz^{n-m-1} dz + \frac{n \times (n-1)}{2} \times$ $\times a^2 \times z^{n-m-2} dz -$ &c. $\pm a^n z^{-m} dz$. Es evidente que todos los términos de esta serie se integran (77) algébricamente, si es $m > n+1$; pero siendo $m=n+1$, ó $m<n+1$, alguno de los términos de

dicha serie tendrá la forma $z^{-1}dz$, cuya integral (87) depende de los logaritmos, y los demas términos se integrarán algébricamente: luego en la suma de las integrales de todos los términos de la referida serie se tendrá la integral de la fraccion racional propuesta. Que es &c.

COROLARIO I.

330. Se infiere que la diferencial $\frac{x^n dx}{(x+a)^m}$ se integra algébricamente, siendo $m > n+1$, y en los demas casos depende su integral de los logaritmos, con tal que los exponentes n y m sean enteros y positivos.

COROLARIO II.

331. Si se propone la diferencial $\frac{(x+a)^m \times dx}{x^n}$, en quien los exponentes m y n se consideran enteros y positivos; hecha como antes la substitucion $x+a = z$, se transformará en la $\frac{z^m dz}{(z-a)^n}$; pero esta se integra algébricamente, siendo $n > m+1$, y en los demas casos depende de los logaritmos; luego la diferencial propuesta se integrará del mismo modo.

PROPOSICION III.

332. Hallar la integral de la fraccion racional $\frac{dx}{x^n\times(x+a)^m}$, en quien los exponentes n y m son enteros y positivos.

Hágase $x=\frac{a^2}{y}$; y serán $dx=-\frac{a^2dy}{y^2}$, $x^n=\frac{a^{2n}}{y^n}$, $x+a=\frac{a^2}{y}+a=\frac{a\times(a+y)}{y}$: luego la diferencial propuesta se transformará en la $-\frac{a^2dy}{y^2}:\frac{a^{2n}}{y^n}\times\frac{a^m\times(a+y)^m}{y^m}=$ $-\frac{1}{a^{2n+m-2}}\times\frac{y^{n+m-2}dy}{(a+y)^m}$, cuya integral (330) se tiene por lo demostrado, y depende de los logaritmos, porque m no puede ser mayor que $n+m-1$. Que es &c.

COROLARIO I.

333. Siendo $\frac{dx}{x^n\times(x^2+bx)^m}=\frac{dx}{x^{n+m}\times(x+b)^m}$, resulta que la diferencial $\frac{dx}{x^n\times(x^2+bx)^m}$ se integra siempre por los logaritmos, con tal que los exponentes n y m sean enteros y positivos.

COROLARIO II.

334. Tambien por ser $\frac{x^ndx}{(x^2+bx)^m}=\frac{x^{n-m}dx}{(x+b)^m}=$

$\frac{dx}{x^{m-n}\times(x+b)^m}$, resulta que la diferencial $\frac{x^n dx}{(x^2+bx)^m}$ se integra ó algébricamente, ó por los logaritmos.

ESCOLIO.

335. Téngase presente que las integrales de las fracciones racionales $\frac{x^n dx}{(x^2 \pm r^2)^m}$, $\frac{x^n dx}{(r^2-x^2)^m}$, en quienes los exponentes n y m son números enteros, positivos ó negativos, se tienen por lo demostrado (192, 194, 186) ya sea algébricamente, ya por los arcos circulares, ó ya por los logaritmos.

PROPOSICION IV.

336. Hallar la integral de la fraccion racional $\frac{x^n dx}{(x^2+2bx+fa)^m}$, en quien los exponentes n y m son enteros y positivos.

Hágase $x+b=z$; y serán $x=z-b$, $dx=dz$, $x^n=(z-b)^n$, $x^2+2bx=z^2-b^2$, $x^2+2bx+fa=z^2+ga$, hecha la substitucion $fa-b^2=ga$, en quien g expresará segun las circunstancias una cantidad positiva ó negativa: luego la diferencial propuesta se transforma en $\frac{(z-b)^n\times dz}{(z^2+ga)^m}$, la qual por la fórmula newtoniana del binomio se convierte en la serie $\frac{z^n dz}{(z^2+ga)^m} - \frac{nb \times z^{n-1} dz}{(z^2+ga)^m} + \frac{n \times (n-1)}{2} \times \frac{b^2 z^{n-2} dz}{(z^2+ga)^m} \ldots \ldots \pm \frac{b^n dz}{(z^2+ga)^m}$. Por lo demostrado (192) los términos de esta serie se integran ya sea algébricamente, ya por los logaritmos, ó ya por los arcos circulares: luego del mismo modo se integrará la fraccion racional propuesta. Que es &c.

PROPOSICION V.

337. Hallar la integral de la fraccion racional $\frac{dx}{x^n \times (x^2 + 2bx + fa)^m}$, en cuya expresion los exponentes n y m son enteros y positivos.

Hágase $x = \frac{fa}{z}$; y serán, $dx = -\frac{fadz}{z^2}$, $x^n = \frac{f^n a^n}{z^n}$, y $x^2 + 2bx + fa = \frac{f^2 a^2}{z^2} + \frac{2abf}{z} + fa = \frac{fa}{z^2} \times (z^2 + 2bz + fa)$: luego la fórmula propuesta se transformará en la $-\frac{1}{(af)^{n+m-1}} \times \frac{z^{n+2m-2} dz}{(z^2+2bz+fa)^n}$; cuya integral se tiene por lo demostrado (336): luego del mismo modo se integrará la fórmula propuesta. Que es &c.

PROPOSICION VI.

338. Hallar la integral de la fraccion racional $\frac{f+gx+hx^2+\&c.}{(a+x)\times(b+x)\times(c+x)\times\&c.}\times dx$, en la qual el denominador está compuesto de factores binomios reales del primer grado, y primeros entre sí, y el exponente mayor de la x en el numerador es menor que el número de los factores del denominador.

Método 1°.

Hágase $\frac{f+gx+hx^2+\&c.}{(a+x)\times(b+x)\times(c+x)\times\&c.}=\frac{A}{a+x}+\frac{B}{b+x}+\frac{C}{c+x}+\&c.$ siendo A, B, C, &c. numeradores constantes que se han de determinar. Redúzcanse estas fracciones á un comun denominador, y se tendrá la equacion

$$f+gx+hx^2+\&c.=\left\{\begin{array}{l} Abc+Acx+Ax^2+\&c. \\ +Bac+Abx+Bx^2 \\ +Cab+Bax+Cx^2 \\ +\&c.\ +Bcx+\&c. \\ \qquad\quad +Cbx \\ \qquad\quad +Cax \\ \qquad\quad +\&c. \end{array}\right.$$

Compárense los términos del primer miembro con los correspondientes del segundo, y se tendrán tantas equaciones, como son las cantidades A, B, C, &c. es á saber, $f = Abc + Bac + Cab +$ &c. $g = Ac + Ab + Ba + Bc + Cb + Ca +$ &c. $h = A + B + C +$ &c. y así sucesivamente, y por medio de estas equaciones se determinarán los valores de las cantidades A, B, C, &c. luego se tendrá $\frac{f + gx + hx^2 + \&c.}{(a+x)\times(b+x)\times(c+x)\times\&c.} \times dx = \frac{Adx}{a+x} + \frac{Bdx}{b+x} + \frac{Cdx}{c+x}$ + &c. é integrando será $S.\frac{f + gx + hx^2 + \&c.}{(a+x)\times(b+x)\times(c+x)\times\&c.} \times dx = A \times L.(a+x) + B \times L.(b+x) + C \times L.(c+x)$ + &c.

Método 2°.

Supuesta como antes la fraccion $\frac{f + gx + hx^2 + \&c.}{(a+x)\times(b+x)\times(c+x)\times\&c.} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{b+x} + \frac{C}{c+x}$ + &c. se podrá tambien hallar el valor de la constante A, haciendo $\frac{B}{b+x} + \frac{C}{c+x} + \&c. = \frac{N}{M}$, esto es, N igual á la suma de los numeradores de las fracciones del primer miembro reducidas á un comun denominador, y M igual al producto de todos los denominadores de las mismas fracciones, es decir, igual á $(b+x) \times (c+x) \times$ &c. de lo que se infiere que N y M son funciones racionales y enteras de la x. Por tanto se tendrá $\frac{f+gx+hx^2+\&c.}{(a+x)\times(b+x)\times(c+x)\times\&c.}=\frac{A}{a+x}+\frac{N}{M}=\frac{AM+N\times(a+x)}{M\times(a+x)}$, de donde $f+gx+hx^2+\&c.$ $=AM+N\times(a+x)$, y $N=\frac{f+gx+hx^2+\&c.-AM}{a+x}$; pero N es funcion racional y entera de la x: luego lo será tambien su igual $\frac{f+gx+hx^2+\&c.-MA}{a+x}$, y por consiguiente el numerador se podrá partir por $a+x$, ó bien será $a+x$ factor del numerador: luego si en el mismo numerador $f+gx+hx^2+\&c.-MA$ se substituye $-a$ en lugar de la x, será dicho numerador igual á cero, esto es, $f+gx+hx^2+\&c.-MA=o$, y por consiguiente $A=\frac{f+gx+hx^2+\&c.}{(b+x)\times(c+x)\times\&c.}$: luego si en esta fraccion se substituye $-a$ en lugar de la x, se tendrá el valor del numerador A de la fraccion $\frac{A}{a+x}$, esto es, $A=\frac{f-ga+ha^2-\&c.}{(b-a)\times(c-a)\times\&c.}$. Del mismo modo se hallarán, $B=\frac{f+gx+hx^2+\&c.}{(a+x)\times(c+x)\times\&c.}$, $C=\frac{f+gx+hx^2+\&c.}{(a+x)\times(b+x)\times\&c.}$, y así sucesivamente, si se substituyen, $-b$ en lugar de la x en la primera equacion, $-c$ en lugar de la x en la segunda, y así siempre con el mismo órden.

Hallados los valores de las cantidades A, B, C, &c. se tendrá como antes $S.\frac{f+gx+hx^2+\&c.}{(a+x)\times(b+x)\times(c+x)\times\&c.}$ $\times dx = A\times L.(a+x)+B\times L.(b+x)+C\times L.(c+x)+\&c.$ Que es &c.

COROLARIO.

339. Luego la fraccion racional $\frac{Pdx}{Q}$ se integra siempre por los métodos antecedentes, si el denominador Q se puede resolver en binomios reales del primer grado, y todos primeros entre sí.

EXEMPLO I.

340. Se pide integrar la fraccion racional $\frac{f+gx}{(a+x)\times(b+x)}\times dx$.

Supongo como en el método primero $\frac{f+gx}{(a+x)\times(b+x)}$ $=\frac{A}{a+x}+\frac{B}{b+x}$; reduzco estas fracciones á una misma denominacion, por lo que resulta

$f+gx=\left\{\begin{array}{l}Ab+Ax\\+Ba+Bx\end{array}\right.$; supongo primero $f=Ab+Ba$, y en segundo lugar $g=A+B$; y por medio de estas dos equaciones determino los valores de las cantidades A y B, de donde resulta ser $A=\frac{f-ga}{b-a}$, $B=\frac{f-gb}{a-b}$: luego será $\frac{f+gx}{(a+x)\times(b+x)}$ $=\frac{f-ga}{b-a}\times\frac{1}{a+x}+\frac{f-gb}{a-b}\times\frac{1}{b+x}$, y por consiguiente $\frac{f+gx}{(a+x)\times(b+x)}\times dx=\frac{f-ga}{b-a}\times\frac{dx}{a+x}+\frac{f-gb}{a-b}\times\frac{dx}{b+x}$: luego integrando será $S.\frac{f+gx}{(a+x)\times(b+x)}\times dx=\frac{f-ga}{b-a}\times$ $L.(a+x)+\frac{f-gb}{a-b}\times L.(b+x)$.

EXEMPLO II.

341. Se propone integrar la fraccion racional $\frac{f+gx+hx^2}{(a+x)\times(b+x)\times(c+x)}\times dx$.

Supongo $\frac{f+gx+hx^2}{(a+x)\times(b+x)\times(c+x)}=\frac{A}{a+x}+\frac{B}{b+x}+\frac{C}{c+x}$. Consta del método segundo ser 1°. $A=\frac{f+gx+hx^2}{(b+x)\times(c+x)}$, si en lugar de la x se substituye $-a$; 2°. $B=$ $\frac{f+gx+hx^2}{(a+x)\times(c+x)}$, si en lugar de la x se substituye $-b$; 3°. $C=\frac{f+gx+hx^2}{(a+x)\times(b+x)}$, si en lugar de la x se substituye $-c$: luego serán, $A=\frac{f-ga+ha^2}{(b-a)\times(c-a)}$, $B=$ $\frac{f-gb+hb^2}{(a-b)\times(c-b)}$, y $C=\frac{f-gc+hc^2}{(a-c)\times(b-c)}$; por consiguiente se tendrá $\frac{f+gx+hx^2}{(a+x)\times(b+x)\times(c+x)}\times dx=\frac{f-ga+ha^2}{(b-a)\times(c-a)}\times$

$$\frac{dx}{a+x} + \frac{f-gb+hb^2}{(a-b)\times(c-b)} \times \frac{dx}{b+x} + \frac{f-gc+hc^2}{(a-c)\times(b-c)} \times \frac{dx}{c+x};$$

luego integrando será $S. \frac{f+gx+hx^2}{(a+x)\times(b+x)\times(c+x)} \times dx$

$$= \frac{f-ga+ha^2}{(b-a)\times(c-a)} \times L.(a+x) + \frac{f-gb+hb^2}{(a-b)\times(c-b)} \times$$

$$L.(b+x) + \frac{f-gc+hc^2}{(a-c)\times(b-c)} \times L.(c+x).$$

PROPOSICION VII.

342. Hallar la integral de la fraccion racional

$$\frac{h+jx+kx^2+lx^3+mx^4+nx^5+px^6+qx^7+ \&c.}{(a+x^2)\times(b+x^2)\times \&c. \times(c+ex+x^2)\times(f+gx+x^2)\times \&c.} \times dx$$

en la qual el denominador está compuesto de factores binomios y trinomios irreducibles del segundo grado, y el exponente mayor de la x en el numerador es menor que la potestad mas alta de la x en el denominador, hecha la multiplicacion de sus factores.

Método 1°.

Hágase $\frac{h+jx+kx^2+lx^3+mx^4+nx^5+px^6+qx^7+ \&c.}{(a+x^2)\times(b+x^2)\times \&c. \times(c+ex+x^2)\times(f+gx+x^2)\times \&c.}$

$$= \frac{A+Bx}{a+x^2} + \frac{C+Ex}{b+x^2} + \&c. + \frac{F+Gx}{c+ex+x^2} + \frac{H+Kx}{f+gx+x^2}$$

$+$ &c. siendo A, B, C, E, F, G, H, K, &c. cantidades constantes que se han de determinar. Redúzcanse dichas fracciones á una comun denominacion; y hechas las demas operaciones que se explicaron en el Método primero de la Proposicion antecedente, se determinarán los valores de las referidas cantidades constantes: luego será

$$\frac{h+ix+kx^2+lx^3+mx^4+nx^5+px^6+qx^7+\&c.}{(a+x^2)\times(b+x^2)\times\&c.\times(c+ex+x^2)\times(f+gx+x^2)\times\&c.}\times dx$$

$$=\frac{Adx}{a+x^2}+\frac{Bxdx}{a+x^2}+\frac{Cdx}{b+x^2}+\frac{Exdx}{b+x^2}+\&c.$$

$$+\frac{Fdx}{c+ex+x^2}+\frac{Gxdx}{c+ex+x^2}+\frac{Hdx}{f+gx+x^2}+\frac{Kxdx}{f+gx+x^2}$$

+ &c. por consiguiente se tendrá la integral de la fraccion racional propuesta, tomando la suma de las integrales de cada una de las fracciones separadas del segundo miembro de la equacion antecedente segun los métodos enseñados (131, 323, 336): y así $S.\frac{Adx}{a+x^2}=\frac{A}{a}\times S.\frac{adx}{a+x^2}=\frac{A}{a}\times u$, siendo u un arco del círculo, cuyo radio es igual á $\sqrt{a}$; $S.\frac{Bxdx}{a+x^2}=\frac{B}{2}\times L.(a+x^2)$; $S.\frac{Fdx}{c+ex+x^2}=F\times S.\frac{dz}{z^2+a^2}$, siendo $x+\frac{e}{2}=z$, $a^2=c-\frac{1}{4}e^2$; $S.\frac{Gxdx}{c+ex+x^2}=G\times S.\frac{zdz-\frac{1}{2}edz}{z^2+a^2}=G\times S.\frac{zdz}{z^2+a^2}$ $-\frac{1}{2}eG\times S.\frac{dz}{z^2+a^2}$, haciendo las mismas substituciones anteriores. Adviértase que siendo el trinomio del segundo grado x^2+ex+c irreducible (sup.), será $c > \frac{1}{4}e^2$.

Método 2°.

Hágase como antes

$$\frac{h+jx+kx^2+lx^3+mx^4+nx^5+px^6+qx^7+\&c.}{(a+x^2)\times(b+x^2)\times\&c.\times(c+ex+x^2)\times(f+gx+x^2)\times\&c.} =$$

$$\frac{A+Bx}{a+x^2}+\frac{C+Ex}{b+x^2}+\&c.+\frac{F+Gx}{c+ex+x^2}+\frac{H+Kx}{f+gx+x^2}+$$

&c. Si se pide ahora hallar el valor de las constantes A y B, supóngase $\frac{C+Ex}{b+x^2}+\&c.+\frac{F+Gx}{c+ex+x^2}$ $+\frac{H+Kx}{f+gx+x^2}+\&c.=\frac{N}{M}$, representando N el numerador de todas las fracciones del primer miembro reducidas á un comun denominador, y M el producto de sus denominadores; por consiguiente N y M serán funciones racionales y enteras de la x. Tambien para abreviar el cálculo, supóngase Z igual al factor que multiplica dx en el numerador de la fraccion racional propuesta, y Y igual al denominador de la misma fraccion: será pues $\frac{Z}{Y}$

$$\frac{A+Bx}{a+x^2}+\frac{N}{M}=\frac{M\times(A+Bx)+N\times(a+x^2)}{M\times(a+x^2)},$$ de donde

$Z = M\times(A+Bx) + N\times(a+x^2)$, y $N = \frac{Z-M\times(A+Bx)}{a+x^2}$; pero N es funcion racional y entera de la x: luego lo será tambien su igual $\frac{Z-M\times(A+Bx)}{a+x^2}$, y por consiguiente el numerador se podrá partir por $a+x^2$, ó bien será $a+x^2$ factor del numerador: luego se tendrá el mismo numerador $Z-M\times(A+Bx)=o$, si en él se substituye así $+\sqrt{-a}$ como $-\sqrt{-a}$ en lugar de la x; y hechas dichas substituciones, resultarán dos equaciones con las dos indeterminadas A y B, cuyos valores se determinarán por los métodos enseñados. Del mismo modo se hallarán los valores de las constantes C y E de la fraccion $\frac{C+Ex}{b+x^2}$, esto es, se tendrá $Z-M\times(C+Ex)=o$, siendo $x=\sqrt{-b}$, $x=-\sqrt{-b}$: y así discúrrase de las demas constantes. Hallados los valores de las A, B, C, E, &c. se hallará la integral de la fraccion racional propuesta segun se ha manifestado en el Método primero. Que es &c.

EXEMPLO.

343. Se propone integrar la fraccion racional $\frac{4+2x+x^2+x^3}{(1+x^2)\times(3-2x+x^2)}\times dx$.

Hágase $\frac{4+2x+x^2+x^3}{(1+x^2)\times(3-2x+x^2)}=\frac{A+Bx}{1+x^2}+\frac{C+Ex}{3-2x+x^2}$.
Consta por el Método 2°. de la Proposicion anterior que en general es $Z-M\times(A+Bx)=o$, suponiendo $a+x^2=o$, de donde $x=\pm\sqrt{-a}$: con que en el caso presente será (A) $4+2x+x^2+x^3-(3-2x+x^2)\times(A+Bx)=o$, suponiendo $1+x^2=o$, ó bien $x=\pm\sqrt{-1}$, cuyos valores nombro n, $-n$ para facilitar el cálculo. De la equacion A resulta ser $A+Bx=\frac{4+2x+x^2+x^3}{3-2x+x^2}$; y substituidos en esta sucesivamente los dos valores n y $-n$ de la x, se tendrán las dos equaciones siguientes:

$A+Bn=\frac{4+2n+n^2+n^3}{3-2n+n^2}$,

$A-Bn=\frac{4-2n+n^2-n^3}{3+2n+n^2}$:

y sumando la primera con la segunda, será

$2A=\frac{4+2n+n^2+n^3}{3-2n+n^2}+\frac{4-2n+n^2-n^3}{3+2n+n^2}=$

$\frac{2\times(4+n^2)\times(3+n^2)+4n\times(2n+n^3)}{(3+n^2)^2-4n^2}$: y restando la segunda equacion de la primera, se tendrá

$2Bn=\frac{4+2n+n^2+n^3}{3-2n+n^2}-\frac{4-2n+n^2-n^3}{3+2n+n^2}=$

$\frac{4n\times(4+n^2)+2\times(3+n^2)\times(2n+n^3)}{(3+n^2)^2-4n^2}$, y partiendo por $2n$, será $B=\frac{2\times(4+n^2)+(3+n^2)\times(2+n^2)}{(3+n^2)^2-4n^2}$.

En las dos equaciones anteriores que expresan los valores de A y B, substitúyase $\sqrt{-1}$ en lugar de n; y hechas las correspondientes operaciones se hallará ser $A=\frac{1}{2}$, $B=1$. Ahora para determinar los valores de C y E, se formará la equacion (B) $4+2x+x^2+x^3-(1+x^2)\times(C+Ex)=o$, suponiendo $3-2x+x^2=o$, ó bien $x=1\pm\sqrt{-2}$ $=1\pm n$ para facilitar el cálculo. De la equacion B resulta ser $C+Ex=\frac{4+2x+x^2+x^3}{1+x^2}$; y substituyendo en ésta sucesivamente los dos valores $1+n$, $1-n$ en lugar de la x, se tendrán las dos equaciones, esto es,

$$C+(1+n)\times E=\frac{8+7n+4n^2+n^3}{2+2n+n^2},$$

$$C+(1-n)\times E=\frac{8-7n+4n^2-n^3}{2-2n+n^2};$$

restando la segunda equacion de la primera, se tendrá

$$2nE=\frac{8+7n+4n^2+n^3}{2+2n+n^2}-\frac{8-7n+4n^2-n^3}{2-2n+n^2}$$

$$=\frac{-4n\times(8+4n^2)+2\times(7n+n^3)\times(2+n^2)}{(2+n^2)^2-4n^2};$$

y partiendo ambos miembros por $2n$, será

$E = \frac{-2\times(8+4n^2)+(7+n^2)\times(2+n^2)}{(2+n^2)^2-4n^2}$: luego substituyendo en esta expresion en lugar de n^2 su valor -2, se tendrá $E=o$; y por medio de qualquiera de las dos equaciones anteriores se hallará ser $C=\frac{5}{2}$. Por tanto será $\frac{4+2x+x^2+x^3}{(1+x^2)\times(3-2x+x^2)} = \frac{\frac{1}{2}+x}{1+x^2}+\frac{\frac{5}{2}}{3-2x+x^2}$; y multiplicando ambos miembros por dx se tendrá $\frac{4+2x+x^2+x^3}{(1+x^2)\times(3-2x+x^2)}\times dx = \frac{\frac{1}{2}dx}{1+x^2}+\frac{xdx}{1+x^2}+\frac{\frac{5}{2}dx}{3-2x+x^2} = \frac{\frac{1}{2}dx}{1+x^2}+\frac{xdx}{1+x^2} + \frac{\frac{5}{2}dz}{z^2+2}$, hecha la substitucion $x-1=z$: luego integrando será $S.\frac{4+2x+x^2+x^3}{(1+x^2)\times(3-2x+x^2)}\times dx = \frac{1}{2}\times u+\frac{1}{2}\times L.(1+x^2)+\frac{5}{4}\times v$, siendo u un arco del círculo que tiene el radio 1 y la tangente x, y v un arco del círculo que tiene el radio $\sqrt{2}$, y la tangente z ó bien $x-1$.

PROPOSICION VIII.

344. Hallar la integral de la fraccion racional $\frac{h+ix+kx^2+lx^3+ \&c.}{(a+x)^m\times(b+x)^n\times(c+x)^p\times\&c.}\times dx$, en la qual el denominador está compuesto de binomios del primer

grado elevados á qualesquiera potestades enteras y positivas, y el exponente de la x en el numerador es menor que la suma de los exponentes m, n, p, &c. de los binomios del denominador.

Método 1°.

Supóngase $\frac{h + jx + kx^2 + lx^3 + \&c.}{(a+x)^m \times (b+x)^n \times (c+x)^p \times \&c.} =$

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Ex^3 \ldots\ldots + Gx^{m-1}}{(a+x)^m}$$
$$+ \frac{A' + B'x + C'x^2 + E'x^3 \ldots\ldots + G'x^{n-1}}{(b+x)^n}$$
$$+ \frac{A'' + B''x + C''x^2 + E''x^3 \ldots\ldots + G''x^{p-1}}{(c+x)^p}$$
$+ \&c.$

Redúzcanse estas fracciones á un comun denominador; y hechas las demas operaciones que se han explicado en el Método primero de la Proposicion VI. se determinarán los valores de las cantidades constantes A, B, C, E, G, &c. determinadas éstas, se tendrá la integral de la fraccion racional propuesta, tomando la suma de las integrales de las fracciones separadas $\frac{Adx}{(a+x)^m} + \frac{Bxdx}{(a+x)^m} + \frac{Cx^2dx}{(a+x)^m}$ + &c. cuyas integrales se tendrán (330) en parte algébricamente, y en parte por los logaritmos, *Método 2°.*

Supóngase $\frac{h+jx+kx^2+lx^3+\&c.}{(a+x)^m\times(b+x)^n\times(c+x)^p\times\&c.}=$

$$\frac{P}{(a+x)^m}+\frac{Q}{(a+x)^{m-1}}+\frac{R}{(a+x)^{m-2}}\cdots\cdots+\frac{T}{a+x}$$
$$+\frac{P'}{(b+x)^n}+\frac{Q'}{(b+x)^{n-1}}+\frac{R'}{(b+x)^{n-2}}\cdots\cdots+\frac{T'}{b+x}$$
$$+\frac{P''}{(c+x)^p}+\frac{Q''}{(c+x)^{p-1}}+\frac{R''}{(c+x)^{p-2}}\cdots\cdots+\frac{T''}{c+x}$$
$+\&c.$

en cuya expresion los numeradores P, Q, R, T, &c. son cantidades que se han de determinar. Supóngase ahora la suma de las fracciones de las colunas horizontales segunda, tercera, &c. igual á $\frac{N}{M}$, representando N el numerador de todas ellas reducidas á un comun denominador, y M el producto de sus denominadores; por consiguiente N y M serán funciones racionales y enteras de la x: luego se tendrá la equacion $\frac{h+jx+kx^2+lx^3+\&c.}{(a+x)^m\times(b+x)^n\times(c+x)^p\times\&c.}$

$$=\frac{P}{(a+x)^m}+\frac{Q}{(a+x)^{m-1}}+\frac{R}{(a+x)^{m-2}}\cdots\cdots+\frac{T}{a+x}+\frac{N}{M}$$

$$=\frac{PM+QM\times(a+x)+RM\times(a+x)^2+\&c.+TM\times(a+x)^{m-1}+N\times(a+x)^m}{M\times(a+x)^m}$$

de donde $h+jx+kx^2+lx^3+$ &c. $=$
$PM+QM\times(a+x)+RM\times(a+x)^2+$ &c. $+TM\times(a+x)^{m-1}+N\times(a+x)^m$,
y en conseqüencia se tendrá
$$N=\frac{h+jx+kx^2+lx^3+\&c.-PM-QM\times(a+x)-RM\times(a+x)^2-\&c.-TM\times(a+x)^{m-1}}{(a+x)^m};$$

pero N es funcion racional y entera de la x: luego el numerador del segundo miembro se podrá partir por los factores del denominador, esto es, por $a+x$, $(a+x)^2$, &c. ó bien estos serán factores de dicho numerador. Por tanto si en el mismo numerador (*A*) $h+jx+kx^2+lx^3+$ &c. $-PM-QM\times(a+x)-RM\times(a+x)^2-$ &c. $-TM\times(a+x)^{m-1}$ se substituye $-a$ en lugar de la x, se tendrá $h+jx+kx^2+lx^3+$ &c. $-PM$ $=o$, de donde resulta $P=\frac{h+jx+kx^2+lx^3+\&c.}{M}=$ $\frac{h+jx+kx^2+lx^3+\&c.}{(b+x)^n\times(c+x)^p\times\&c.}=\frac{h-ja+ka^2-la^3+\&c.}{(b-a)^n\times(c-a)^p\times\&c.}$. Determinado el valor de la constante P, se hallará él de Q con el método siguiente. En la fórmula (*A*) substitúyanse el valor de P, y $(b+x)^n\times(c+x)^p\times$ &c. en lugar de M; pártase dicha fórmula por $a+x$, y se tendrá $\frac{h+jx+kx^2+lx^3+\&c.-PM}{a+x}-QM=o$, de donde $Q=\frac{h+jx+kx^2+lx^3+\&c.-PM}{(a+x)\times M}$, y por medio de esta equacion se determinará el valor de la constante Q. Asimismo el valor de la constante R se hallará por la equacion

$R = \frac{h + jx + kx^2 + lx^3 + \&c. - PM - QM \times (a+x)}{(a+x)^2 \times M}$, si en ella se substituyen los valores de P, Q, M, despues se parte el numerador por $(a+x)^2$, y en el quociente partido por M se substituye $-a$ en lugar de la x. Del mismo modo se determinarán los valores de las demas constantes: luego &c.

EXEMPLO.

345. Se propone integrar la fraccion racional $\frac{2 - 5x + x^2 - 4x^3 - 7x^4}{(3+x)^2 \times (-2+x)^3} \times dx$.

Por lo dicho será en el caso propuesto

$$\frac{2 - 5x + x^2 - 4x^3 - 7x^4}{(3+x)^2 \times (-2+x)^3} = \frac{P}{(3+x)^2} + \frac{Q}{3+x} + \frac{P'}{(-2+x)^3}$$

$$+ \frac{Q'}{(-2+x)^2} + \frac{R'}{-2+x} = \frac{P}{(3+x)^2} + \frac{Q}{3+x} + \frac{N}{M}$$ siendo $M = (-2+x)^3$, y P, Q cantidades constantes que se han de determinar: luego reduciendo se tendrá $2 - 5x + x^2 - 4x^3 - 7x^4 = PM + QM \times (3+x) + N \times (3+x)^2$; por consiguiente $N = \frac{2 - 5x + x^2 - 4x^3 - 7x^4 - PM - QM \times (3+x)}{(3+x)^2}$, la qual fraccion será funcion racional y entera de la x: luego

si se substituye -3 en lugar de la x, será el numerador de dicha fraccion igual á cero; y tambien si se parte el mismo numerador por $3+x$, su quociente será igual á cero. En el primer caso se tendrá $2-5x+x^2-4x^3-7x^4-PM=0$, de donde $P=\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4}{M}=\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4}{(-2+x)^3}=$ $\frac{433}{125}$; y en el segundo caso será

$$\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4-PM-QM\times(3+x)}{3+x}=0,$$

por consiguiente

$$QM=\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4-\frac{433}{125}\times(-2+x)^3}{3+x}$$

$$=\frac{-875x^4-933x^3+2723x^2-5821x+3714}{125\times(3+x)}$$

$$=\frac{-875x^3+1692x^2-2353x+1238}{125},$$

y $Q=\frac{-875x^3+1692x^2-2353x+1238}{125\times(-2+x)^3}=-\frac{47150}{15625}=$ $-\frac{1886}{625}$, substituyendo -3 en lugar de la x: luego quedan determinadas las cantidades P, Q. Ahora si se pide hallar las fracciones pertenecientes al factor $(-2+x)^3$, se hará $\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4}{(3+x)^2\times(-2+x)^3}=$ $\frac{P'}{(-2+x)^3}+\frac{Q'}{(-2+x)^2}+\frac{R'}{-2+x}+\frac{N}{M}$, siendo en este caso $M=(3+x)^2$, y P', Q', R' cantidades constantes que se han de determinar: luego reduciendo se tendrá $2-5x+x^2-4x^3-7x^4=P'M+Q'M\times(-2+x)+R'M\times(-2+x)^2+N\times(-2+x)^3$, de donde resulta ser

$$N=\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4-P'M-Q'M\times(-2+x)-R'M\times(-2+x)^2}{(-2+x)^3}:$$

luego si se substituye 2 en lugar de la x, será el numerador de la fraccion anterior igual á cero; y tambien si se parte el mismo numerador por $-2+x$, $(-2+x)^2$, sus quocientes serán iguales á cero. En el primer caso se tendrá

$2-5x+x^2-4x^3-7x^4-P'M=o$, de donde $P'=\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4}{(3+x)^2}=-\frac{148}{25}$: en el segundo caso será

$$\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4-P'M-Q'M\times(-2+x)-R'M\times(-2+x)^2}{-2+x}=o,$$

y por consiguiente $Q'M=\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4-P'M}{-2+x}$

$$=\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4+\frac{148}{25}\times(3+x)^2}{-2+x}$$

$$=\frac{-175x^4-100x^3+173x^2+763x+1382}{25\times(-2+x)}=$$

$$-\frac{175x^3+450x^2+727x+691}{25}=-\frac{1069}{5};\ \text{y}\ Q'=-\frac{1069}{5\times M}=$$

$-\frac{1069}{5\times25}$: y finalmente en el caso tercero será $\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4-P'M-Q'M\times(-2+x)-R'M\times(-2+x)^2}{(-2+x)^2}=0$ ∴ de donde $R'M=\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4-P'M-Q'M\times(-2+x)}{(-2+x)^2}$

$$=\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4+\frac{148}{25}\times(3+x)^2+\frac{1069}{5\times25}\times(3+x)^2\times(-2+x)}{(-2+x)^2}$$

$$=\frac{-875x^4+569x^3+5141x^2+608x-12332}{125\times(-2+x)^2}=$$

$-\frac{875x^2+2931x+3083}{125}=-\frac{12445}{125}=-\frac{2489}{25}$, y $R'=-\frac{2489}{25M}=-\frac{2489}{25\times25}$. Por tanto será

$$\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4}{(3+x)^2\times(-2+x)^3}\times dx=\frac{433}{125}\times\frac{dx}{(3+x)^2}-\frac{1886}{625}\times\frac{dx}{3+x}-\frac{148}{25}\times\frac{dx}{(-2+x)^3}-\frac{1069}{125}\times\frac{dx}{(-2+x)^2}-\frac{2489}{25\times25}\times\frac{dx}{-2+x}$$; é integrando será $S.\frac{2-5x+x^2-4x^3-7x^4}{(3+x)^2\times(-2+x)^3}\times dx=-\frac{433}{125}\times\frac{1}{3+x}-\frac{1886}{625}\times L.(3+x)+\frac{74}{25}\times\frac{1}{(-2+x)^2}+\frac{1069}{125}\times\frac{1}{-2+x}-\frac{2489}{25\times25}\times L.(-2+x)$.

PROPOSICION IX.

346. Hallar la integral de la fraccion racional $\frac{h+jx+kx^2+lx^3+\&c.}{(a+x^2)^n\times(b+ex+x^2)^m\times\&c.}\times dx$, en la qual el deno-

minador está compuesto de factores binomios ó trinomios irreducibles del segundo grado elevados á potestades enteras y positivas, y el exponente mayor de la x en el numerador es menor que el duplo de la suma de los exponentes n, m, &c.

Método 1°.

Represente $\frac{Z}{Y} \times dx$ la fraccion racional propuesta, y supóngase $\frac{Z}{Y} =$

$$\frac{A + Bx + Cx^2 + Ex^3 \ldots\ldots + Gx^{n-1}}{(a + x^2)^n}$$

$$+ \frac{A' + B'x + C'x^2 + E'x^3 \ldots\ldots + G'x^{m-1}}{(b + ex + x^2)^m}$$

$+$ &c.

Redúzcanse estas fracciones á un comun denominador; y hechas las demas operaciones que se han explicado en el Método primero de la Proposicion VI, se tendrán los valores de las cantidades constantes A, B, C, &c. determinadas éstas, se tendrá la integral de la fraccion racional propuesta, tomando la suma de las integrales de las fracciones separadas $\frac{Adx}{(a+x^2)^n} + \frac{Bxdx}{(a+x^2)^n} +$ &c. $\frac{A'dx}{(b+ex+x^2)^m}$ $+ \frac{B'xdx}{(b+ex+x^2)^m} +$ &c. cuyas integrales se tendrán por los Métodos enseñados (336).

Método 2°.

Represente $\frac{Z}{Y} \times dx$ la fraccion racional propuesta, y supóngase $\frac{Z}{Y} =$

$$\frac{A+Bx}{(a+x^2)^n} + \frac{C+Ex}{(a+x^2)^{n-1}} + \frac{F+Gx}{(a+x^2)^{n-2}} \cdots + \frac{H+Kx}{a+x^2}$$
$$+ \frac{A'+B'x}{(b+ex+x^2)^m} + \frac{C'+E'x}{(b+ex+x^2)^{m-1}} + \frac{F'+G'x}{(b+ex+x^2)^{m-2}} \cdots + \frac{H'+K'x}{b+ex+x^2}$$
$+$ &c.

en cuya expresion las cantidades A, B, C, &c. son constantes que se han de determinar. Supóngase ahora la suma de las fracciones de las colunas horizontales segunda, &c. igual á $\frac{N}{M}$, representando N el numerador de todas ellas reducidas á un comun denominador, y M el producto de sus denominadores; por consiguiente N y M serán funciones racionales y enteras de la x: luego se tendrá la equacion $\frac{Z}{Y} = \frac{A+Bx}{(a+x^2)^n} + \frac{C+Ex}{(a+x^2)^{n-1}} + \frac{F+Gx}{(a+x^2)^{n-2}}$ $\cdots + \frac{H+Kx}{a+x^2} + \frac{N}{M}$, de donde resulta ser

$$Z = M \times (A+Bx) + M \times (C+Ex) \times (a+x^2)$$
$$+ M \times (F+Gx) \times (a+x^2)^2 \cdots + M \times (H+Kx) \times$$

$(a+x^2)^{n-1}+N\times(a+x^2)^n$, y por consiguiente $N=$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} Z-M\times(A+Bx)-M\times(C+Ex)\times(a+x^2) \\ -M\times(F+Gx)\times(a+x^2)^2 \ldots -M\times(H+Kx)\times(a+x^2)^{n-1}\end{array}\right\}}{(a+x^2)^n}$$

cuyo numerador se podrá partir por los factores del denominador, pues que N es funcion racional y entera de la x: luego suponiendo $a+x^2=o$, ó bien $x=\pm\sqrt{-a}$, en el numerador de dicha fraccion, se tendrá $Z-M\times(A+Bx)=o$, $A+Bx=\frac{Z}{M}$, de donde resultan dos equaciones, substituyendo sucesivamente $\sqrt{-a}$ y $-\sqrt{-a}$ en lugar de la x, por las quales se determinarán los valores de las constantes A y B. Hallados los valores de A y B, se determinarán los de C y E del modo siguiente. Substitúyanse los valores de A y B en el numerador $Z-M\times(A+Bx)-M\times(C+Ex)\times(a+x^2)-M\times(F+Gx)\times(a+x^2)^2\ldots-M\times(H+Kx)\times(a+x^2)^{n-1}$ de la referida fraccion; pártase el mismo numerador por $a+x^2$, y se tendrá $\frac{Z-M\times(A+Bx)}{a+x^2}-M\times(C+Ex)=o$ en la suposicion de ser $a+x^2=o$, ó bien $x=\pm\sqrt{-a}$. De la equacion anterior resulta $M\times(C+Ex)=\frac{Z-M\times(A+Bx)}{a+x^2}$; y si en ésta se substituyen sucesivamente $\sqrt{-a}$ y $-\sqrt{-a}$ en lugar de la x, se tendrán dos equaciones; por las quales se determinarán los valores de las constantes C y E. Ahora si en el referido numerador se substituyen los valores de A, B, C, E, y se parte despues por $(a+x^2)^2$, se tendrá $\frac{Z-M\times(A+Bx)-M\times(C+Ex)\times(a+x^2)}{(a+x^2)^2}$ $-M\times(F+Gx)=o$ en la suposicion de ser $x=\pm\sqrt{-a}$. De la equacion anterior resulta ser

$$M\times(F+Gx)=\frac{Z-M\times(A+Bx)-M\times(C+Ex)\times(a+x^2)}{(a+x^2)^2},$$

y si en esta se substituyen sucesivamente $\sqrt{-a}$ y $-\sqrt{-a}$ en lugar de la x, se tendrán dos equaciones, por las quales se determinarán los valores de F y G. Con el mismo método se hallarán los valores de las demas constantes &c. H y K: y aun con el mismo método arriba expresado se determinarán los valores de A', B', &c. H' y K'; y así sucesivamente: luego &c.

PROPOSICION X.

347. Hallar la integral de la fraccion racional

$$\frac{(h+jx+kx^2+lx^3+\&c.)\times dx}{(a+x)\times\&c.\times(c+x^2)\times\&c.\times(e+fx+x^2)\times\&c.\times(g+x)^m\times\&c.\times(p+x^2)^n\times\&c.\times(b+qx+x^2)^r\times\&c.}$$

en la qual el denominador está compuesto de factores binomios simples, de binomios ó trinomios irreducibles del segundo grado, de potestades enteras de binomios simples, y de binomios ó trinómios irreducibles del segundo grado, y el exponente mayor de la x en el numerador es menor que el exponente mayor de la x en el denominador, hecha la multiplicacion de sus factores.

Represente $\frac{Z}{Y} \times dx$ la fraccion racional propuesta, y hágase $(A)\ \frac{Z}{Y} = \frac{A}{a+x} + \&c. + \frac{C+Ex}{c+x^2}$ $+ \&c. + \frac{F+Gx}{e+fx+x^2} + \&c. + \frac{H}{(g+x)^m} + \frac{K}{(g+x)^{m-1}} \ldots\ldots$ $+ \frac{L}{g+x} + \&c. + \frac{M+Nx}{(p+x^2)^n} + \frac{O+Px}{(p+x^2)^{n-1}} \ldots\ldots + \frac{Q+Rx}{p+x^2}$ $+ \&c. + \frac{S+Tx}{(b+qx+x^2)^r} + \frac{V+Bx}{(b+qx+x^2)^{r-1}} \ldots\ldots\ldots$ $+ \frac{U+Jx}{b+qx+x^2} + \&c.$ Ahora las constantes A, &c. se determinarán por la Proposicion VI; las C, E, &c. F, G, &c. por la Proposicion VII; las H, K, ... L, &c. por la Proposicion VIII; y finalmente se hallarán los valores de las demas constantes M, N, &c. por la Proposicion IX: luego se multiplicará la equacion A por dx, y se integrarán los términos del segundo miembro por las mismas Proposiciones, con lo que se tendrá la integral de la fraccion racional propuesta. Que es &c.

ESCOLIO.

348. Si el denominador Q de la fraccion racional $\frac{Pdx}{Q}$ no se puede resolver en los referidos factores, se hallarán estos por aproxîmacion, y se tendrá próxîmamente la integral de qualquiera fraccion; aproxîmacion que sirve con bastante exâctitud para la práctica.

PROPOSICION XI.

349. Hallar la integral de la fórmula $y^m dy \times (2ry-y^2)^{\frac{n}{2}}$, en quien los números m y n son enteros, positivos ó negativos.

Hágase $y=\frac{2r^3}{z^2+r^2}$; y se tendrán las equaciones, $y^m=\frac{2^m r^{3m}}{(z^2+r^2)^m}$, $dy=-\frac{4r^3zdz}{(z^2+r^2)^2}$, $(2ry-y^2)^{\frac{n}{2}}=\frac{2^n r^{2n} \times z^n}{(z^2+r^2)^n}$: luego será $y^m dy \times (2ry-y^2)^{\frac{n}{2}}=-2^{m+n+2} \times r^{3m+2n+3} \times \frac{z^{n+1} dz}{(z^2+r^2)^{m+n+2}}$, cuya integral se tiene por lo demostrado (192, 194): luego &c.

PROPOSICION XII.

350. Hallar la integral de la fórmula $y^m dy \times (y^2 \pm 2ry)^{\frac{n}{2}}$, en quien los exponentes m y n son enteros, positivos ó negativos.

Hágase $\sqrt{(y^2 \pm 2ry)} = y \pm x$; y se tendrán las equaciones, $y = \pm \frac{x^2}{2\times(r-x)}$, $y^m = \pm \frac{x^{2m}}{2^m \times (r-x)^m}$,

$dy = \pm \frac{1}{2} \times \frac{(2rx-x^2)\times dx}{(r-x)^2}$, $(y^2 \pm 2ry)^{\frac{n}{2}} = \pm \frac{(2rx-x^2)^n}{2^n \times (r-x)^n}$: luego será la diferencial propuesta $y^m dy \times (y^2 \pm 2ry)^{\frac{n}{2}} = \pm \frac{1}{2^{m+n+1}} \times \frac{x^{2m} dx \times (2rx-x^2)^{n+1}}{(r-x)^{m+n+2}}$.

Ahora si el exponente n es número entero y positivo, se elevará el binomio $2rx - x^2$ á la potestad $n+1$, y los términos de la serie finita que resulta se multiplicarán por $x^{2m} dx$, y se partirá cada uno de ellos por $(r-x)^{m+n+2}$; con lo que se podrán integrar por el método dado (329, 332): y si el exponente $n+1$ es número entero y negativo, la diferencial transformada será una fraccion racional que se integrará como se ha manifestado (344). Que es &c.

PROPOSICION XIII.

351. Hallar la integral de la fórmula $x^n dx \times$

$(a + 2bx \mp x^2)^{\frac{m}{2}}$, en cuya expresion se suponen los exponentes, n entero y positivo, y m entero positivo ó negativo.

Hágase $x \mp b = z$; y se tendrán las equaciones, $x = z \pm b$, $x^n = (z \pm b)^n$, $dx = dz$, $a + 2bx \mp x^2$ $= a \pm b^2 \mp z^2$, $(a + 2bx \mp x^2)^{\frac{m}{2}} = (a \pm b^2 \mp z^2)^{\frac{m}{2}}$: luego la diferencial propuesta será igual á la expresion $(z \pm b)^n dz \times (a \pm b^2 \mp z^2)^{\frac{m}{2}} =$ $z^n dz \times (a \pm b^2 \mp z^2)^{\frac{m}{2}} \pm nbz^{n-1} dz \times (a \pm b^2 \mp z^2)^{\frac{m}{2}}$ + &c. la qual serie es finita en la suposicion que sea n número entero y positivo, y los términos de la misma serie se integran por lo demostrado (192, 194, 186). Que es &c.

PROPOSICION XIV.

352. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dx \times (a + 2bx + x^2)^{\frac{m}{2}}}{x^n}$, en quien son los exponentes, n número entero y positivo, y m entero positivo ó negativo.

Hágase $x + b = z$; y se tendrán las equaciones, $x = z - b$, $dx = dz$, $x^2 + 2bx + a = z^2 + a - b^2$

$=z^2+g$, llamada $g=a-b^2$, $(x^2+2bx+a)^{\frac{m}{2}}$ $=(z^2+g)^{\frac{m}{2}}$, $x^n=(z-b)^n$: luego la diferencial propuesta $\frac{dx\times(a+2bx+x^2)^{\frac{m}{2}}}{x^n}$ será igual á (A) $\frac{dz\times(z^2+g)^{\frac{m}{2}}}{(z-b)^n}$. Supóngase ahora $\sqrt{(z^2+g)}=z+t$; y se tendrán las equaciones, $z=\frac{g-t^2}{2t}$, $dz=-\frac{dt\times(g+t^2)}{2t^2}$, $\sqrt{(z^2+g)}=\frac{g+t^2}{2t}$, $(z^2+g)^{\frac{m}{2}}$ $=\frac{(g+t^2)^m}{2^m t^m}$, $z-b=\frac{g-2bt-t^2}{2t}$, $(z-b)^n=\frac{(g-2bt-t^2)^n}{2^n t^n}$: luego la fórmula ($A$) se transformará en la $-\frac{dt\times(g+t^2)}{2t^2}\times\frac{(g+t^2)^m}{2^m t^m}:\frac{(g-2bt-t^2)^n}{2^n t^n}=-\frac{1}{2^{m-n+1}}\times$ $\frac{dt\times(g+t^2)^{m+1}}{t^{m+2-n}\times(g-2bt-t^2)^n}$, cuya integral se tiene por lo demostrado (344, 346): luego del mismo modo se integrará la diferencial propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XV.

353. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dx\times(a+2bx-x^2)^{\frac{m}{2}}}{x^n}$, en quien son los exponentes,

n número entero y positivo, y m entero positivo ó negativo.

Hágase $x-b=z$; y se tendrán las equaciones, $x=z+b$, $dx=dz$, $a+2bx-x^2=a+b^2-z^2$ $=f^2-z^2$, llamada $f^2=a+b^2$, $(a+2bx-x^2)^{\frac{m}{2}}$ $=(f^2-z^2)^{\frac{m}{2}}$, $x^n=(z+b)^n$: luego la diferencial propuesta será igual á la (A) $\frac{dz\times(f^2-z^2)^{\frac{m}{2}}}{(z+b)^n}$. Supóngase ahora $\sqrt{(f^2-z^2)}=f-zt$; y se tendrán las equaciones, $z=\frac{2ft}{1+t^2}$, $dz=\frac{2fdt\times(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$, $\sqrt{(f^2-z^2)}=f\times\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $(f^2-z^2)^{\frac{m}{2}}=\frac{f^m\times(1-t^2)^m}{(1+t^2)^m}$, $z+b=\frac{b+2ft+bt^2}{1+t^2}$, $(z+b)^n=\frac{(b+2ft+bt^2)^n}{(1+t^2)^n}$: luego la fórmula (A) se transformará en la $\frac{2fdt\times(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\times\frac{f^m\times(1-t^2)^m}{(1+t^2)^m}:\frac{(b+2ft+bt^2)^n}{(1+t^2)^n}$ igual á $2f^{m+1}\times\frac{dt\times(1-t^2)^{m+1}}{(1+t^2)^{m+2-n}\times(b+2ft+bt^2)^n}$, cuya fraccion racional se integra segun el método dado (344, 346): luego del mismo modo se tendrá la integral de la fórmula diferencial propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XVI.

354. La fórmula $z^q dz \times (a+bz^p+cz^{2p})^{\frac{m}{2}}$ se integra por los logaritmos, ó por los arcos circulares, si es $\frac{q-p+1}{p}$ número entero positivo ó negativo, ó bien cero.

Hágase $z^p=x$; y se tendrán las equaciones, $z=x^{\frac{1}{p}}$, $z^{2p}=x^2$, $z^q=x^{\frac{q}{p}}$, $dz=\frac{1}{p}\times x^{\frac{1}{p}-1}dx$: luego se tendrá $z^q dz\times(a+bz^p+cz^{2p})^{\frac{m}{2}}=\frac{1}{p}\times x^{\frac{q-p+1}{p}}dx\times(a+bx+cx^2)^{\frac{m}{2}}$; pero ésta se integra por lo demostrado (351....353) en la suposicion que sea $\frac{q-p+1}{p}$ número entero positivo ó negativo, ó bien cero: luego del mismo modo se integrará la fórmula diferencial propuesta. Que es &c.

COROLARIO.

355. Si se supone $\frac{q-p+1}{p}=\pm n$, en cuya expresion es n número entero, se tendrá $q=\pm np+p-1$, de modo que siendo $p=2$, resultará q número impar, positivo ó negativo: en conseqüen-

cia la fórmula diferencial $z^q dz \times (a+bz^2+cz^4)^{\frac{m}{2}}$ se integrará por los logaritmos ó por los arcos circulares, si el exponente q es número entero é impar, positivo ó negativo. Si son las cantidades $n=0$, $p=2$, será $q=1$: luego la fórmula $z\,dz \times (a+bz^2+cz^4)^{\frac{m}{2}}$ se integrará como se ha dicho antes.

PROPOSICION XVII.

355. Hallar la integral de la fórmula $\frac{u^{\frac{1}{2}}du}{\sqrt{(b^2-u^2)}}$.

Hágase $u=\frac{b^2}{z}$; y se tendrán las equaciones, $u^{\frac{1}{2}}=bz^{-\frac{1}{2}}$, $du=-b^2z^{-2}dz$, $u^2=b^4z^{-2}$. Substitúyanse estos valores en la diferencial propuesta, y se tendrá $\frac{u^{\frac{1}{2}}du}{\sqrt{(b^2-u^2)}}=-\frac{b^2dz}{z^{\frac{3}{2}}\times\sqrt{(z^2-b^2)}}=$ $-\frac{z^2dz+b^2dz}{z^{\frac{3}{2}}\times\sqrt{(z^2-b^2)}}+\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}}=-\frac{dz+b^2z^{-2}dz}{\sqrt{(z-b^2z^{-1})}}$ $+\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}}$; pero $S.\frac{dz+b^2z^{-2}dz}{\sqrt{(z-b^2z^{-1})}}=2\sqrt{(z-b^2z^{-1})}$, y $S.\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{(z^2-b^2)}}=\frac{2s}{\sqrt{b}}$ (224), siendo s un arco de la Hipérbola equilátera, cuya equacion es $y^2=x^2-b^2$, y $bz=2x^2-b^2$: luego se tendrá $S.\frac{u^{\frac{1}{2}}du}{\sqrt{(b^2-u^2)}}=$

$-2\sqrt{(z-b^2z^{-1})}+\frac{2s}{\sqrt{b}}=-2\sqrt{(\frac{b^2}{u}-u)}+\frac{2s}{\sqrt{b}}$, siendo s un arco de la Hipérbola equilátera, que tiene sus exes iguales á $2b$, y la abscisa x tomada desde el centro igual á $\sqrt{\frac{bz+b^2}{2}}$ ó bien á $\frac{b}{\sqrt{2}}\times\sqrt{\frac{b+u}{u}}$. Que es &c.

PROPOSICION XVIII.

357. Hallar la integral de la fórmula $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(x^2+b^2)}}$.

Diferénciese la expresion $x^q\times(x^2+b^2)^m$, y se tendrá $D.x^q\times(x^2+b^2)^m=qx^{q-1}dx\times(x^2+b^2)^m+2mx^{q+1}dx\times(x^2+b^2)^{m-1}$: luego será $x^{q+1}dx\times(x^2+b^2)^{m-1}=D.\frac{x^q\times(x^2+b^2)^m}{2m}-\frac{q}{2m}\times x^{q-1}dx\times(x^2+b^2)^m$; é integrando se tendrá $S.x^{q+1}dx\times(x^2+b^2)^{m-1}=\frac{x^q\times(x^2+b^2)^m}{2m}-\frac{q}{2m}\times S.x^{q-1}dx\times(x^2+b^2)^m$. Ahora si se suponen $q=-\frac{1}{2}$, $m=\frac{1}{2}$, será $S.\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(x^2+b^2)}}=x^{-\frac{1}{2}}\times(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}S.x^{-\frac{3}{2}}dx\times(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$, cuya integral se tiene por lo demostrado (224): luego se integrará del mismo modo la diferencial propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XIX.

358. Hallar la integral de la fórmula $x^{\frac{1}{2}}dx \times \sqrt{(x^2+b^2)}$.

Diferénciese la expresion $x^q \times (x^2+b^2)^m$, y se tendrá $D.x^q \times (x^2+b^2)^m = qx^{q-1}dx \times (x^2+b^2)^m + 2mx^{q+1}dx \times (x^2+b^2)^{m-1}$; pero es $qx^{q-1}dx \times (x^2+b^2)^m = qb^2x^{q-1}dx \times (x^2+b^2)^{m-1} + qx^{q+1}dx \times (x^2+b^2)^{m-1}$: luego será $D.x^q \times (x^2+b^2)^m = qb^2x^{q-1}dx \times (x^2+b^2)^{m-1} + (2m+q) \times x^{q+1}dx \times (x^2+b^2)^{m-1}$; é integrando será $x^q \times (x^2+b^2)^m = qb^2 \times S.x^{q-1}dx \times (x^2+b^2)^{m-1} + (2m+q) \times S.x^{q+1}dx \times (x^2+b^2)^{m-1}$, de donde $S.x^{q+1}dx \times (x^2+b^2)^{m-1} = \frac{x^q \times (x^2+b^2)^m}{2m+q} - \frac{qb^2}{2m+q} \times S.x^{q-1}dx \times (x^2+b^2)^{m-1}$.

Ahora si se suponen $q=-\frac{1}{2}$, y $m=\frac{3}{2}$, se tendrá $S.x^{\frac{1}{2}}dx \times \sqrt{(x^2+b^2)} = \frac{2}{5} \times x^{-\frac{1}{2}} \times (x^2+b^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{b^2}{5} \times S.x^{-\frac{3}{2}}dx \times (x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$; pero ésta se integra por lo demostrado (224): luego se integrará del mismo modo la fórmula diferencial propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XX.

359. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{(b^2-x^2)}}$.

Es evidente que es $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \surd(b^2 - x^2)} = \frac{bdx - xdx + xdx}{bx^{\frac{1}{2}} \surd(b^2 - x^2)}$

$= \frac{(b+x) \times dx}{bx^{\frac{1}{2}} \times \surd(b^2 - x^2)} - \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{b\surd(b^2 - x^2)}$. La integral de

$\frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\surd(b^2 - x^2)}$ se determina por el método dado (356);

y la integral de $\frac{(b+x) \times dx}{bx^{\frac{1}{2}} \times \surd(b^2 - x^2)}$ se halla de este

modo. Hágase $b + x = z$; y se tendrán las equaciones, $dx = dz$, $x = z - b$, $x^{\frac{1}{2}} = \surd(z - b)$, $\surd(b - x)$ $= \surd(2b - z)$: luego será $\frac{(b+x) \times dx}{bx^{\frac{1}{2}} \times \surd(b^2 - x^2)}$ ó bien

$\frac{dx\surd(b+x)}{bx^{\frac{1}{2}} \times \surd(b-x)} = \frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{b\surd(z-b) \times \surd(2b-z)} =$

$\frac{z^{\frac{1}{2}} dz}{b \times \surd(-2b^2 + 3bz - z^2)}$, cuya integral se ha determinado (225): luego &c.

PROPOSICION XXI.

360. Hallar la integral de la fórmula

$\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \surd(x^2 - b^2)}$.

Hágase $x = \frac{b^2}{z}$; y se tendrán las equaciones,

$dx = -\frac{b^2 dz}{z^2}$, $x^{\frac{1}{2}} = \frac{b}{z^{\frac{1}{2}}}$, $\sqrt{(x^2 - b^2)} = \sqrt{(\frac{b^4}{z^2} - b^2)}$

$= \frac{b}{z} \times \sqrt{(b^2 - z^2)}$: luego será $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{(x^2 - b^2)}} =$

$-\frac{b^2 dz}{z^2} : \frac{b}{z^{\frac{1}{2}}} \times \frac{b}{z} \times \sqrt{(b^2 - z^2)} = -\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{(b^2 - z^2)}}$, cuya integral se tiene por lo demostrado (359): luego se integrará del mismo modo la fórmula diferencial propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXII.

361. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{(x^2 + b^2)}}$.

Hágase $\sqrt{(x^2 + b^2)} = y - x$; y se tendrán las equaciones, $x^2 + b^2 = y^2 - 2xy + x^2$, $x = \frac{y^2 - b^2}{2y}$, $\sqrt{(x^2 + b^2)} = y - x = \frac{y^2 + b^2}{2y}$, $dx = \frac{(y^2 + b^2) \times dy}{2y^2}$, $x^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{(y^2 - b^2)}}{\sqrt{2y}}$: luego será $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{(x^2 + b^2)}} =$

$\frac{(y^2 + b^2) \times dy}{2y^2} : \frac{y^2 + b^2}{2y} \times \frac{\sqrt{(y^2 - b^2)}}{\sqrt{2y}} = \sqrt{2} \times \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{(y^2 - b^2)}}$, cuya integral se ha hallado (360): luego se tendrá del mismo modo la integral de la diferencial propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXIII.

362. Hallar las integrales de las fórmulas $\frac{dx}{x\surd(a+bx^3)}$, $\frac{dx\surd(a+bx^3)}{x}$.

Hágase $\surd(a+bx^3)=z$; y se tendrán las equaciones $a+bx^3=z^2$, $x^3=\frac{z^2-a}{b}$, $x^2dx=\frac{2zdz}{3b}$: luego será $\frac{dx}{x\surd(a+bx^3)}=\frac{x^2dx}{x^3\surd(a+bx^3)}=\frac{2zdz}{3b}:\frac{z^2-a}{b}\times z=\frac{\frac{2}{3}dz}{z^2-a}$, cuya integral se tiene por lo demostrado (338, 131): luego se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula propuesta. Con el mismo método se hallará que la fórmula $\frac{dx\surd(a+bx^3)}{x}$ se transforma en la $\frac{\frac{2}{3}z^2dz}{z^2-a}$, cuya integral se tiene por lo demostrado (192). Que es &c.

PROPOSICION XXIV.

363. Hallar la integral de la fórmula $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\surd(b^2\pm px-x^2)}$.

Hágase $x=\frac{b^2}{z}$; y se tendrán las equaciones,

$$dx = -\frac{b^2 dz}{z^2},\ x^{\frac{1}{2}} = \frac{b}{z^{\frac{1}{2}}},\ \sqrt{(b^2 \pm px - x^2)} =$$

$$\sqrt{(b^2 \pm \frac{pb^2}{z} - \frac{b^4}{z^2})} = \frac{b}{z} \times \sqrt{(z^2 \pm pz - b^2)}:$$

luego la diferencial propuesta $\frac{x^{\frac{1}{2}}\, dx}{\sqrt{(b^2 \pm px - x^2)}}$ se transformará en la $\frac{b}{z^{\frac{1}{2}}} \times -\frac{b^2 dz}{z^2} : \frac{b}{z} \times \sqrt{(z^2 \pm pz - b^2)} =$

$$-\frac{b^2 dz}{z^{\frac{3}{2}} \times \sqrt{(z^2 \pm pz - b^2)}} = -\frac{b^2 z^{-2} dz}{\sqrt{(z \pm p - b^2 z^{-1})}} =$$

$$-\frac{b^2 z^{-2} dz + dz}{\sqrt{(z \pm p - b^2 z^{-1})}} + \frac{dz}{\sqrt{(z \pm p - b^2 z^{-1})}} =$$

$-\frac{b^2 z^{-2} dz + dz}{\sqrt{(z \pm p - b^2 z^{-1})}} + \frac{z^{\frac{1}{2}}\, dz}{\sqrt{(z^2 \pm pz - b^2)}}$; pero la integral de $-\frac{b^2 z^{-2} dz + dz}{\sqrt{(z \pm p - b^2 z^{-1})}}$ es igual á $-2\sqrt{(z \pm p - b^2 z^{-1})}$ ó bien á $-2 \times \frac{\sqrt{(z^2 \pm pz - b^2)}}{\sqrt{z}}$; y la integral de $\frac{z^{\frac{1}{2}}\, dz}{\sqrt{(z^2 \pm pz - b^2)}}$ se tiene por lo demostrado (224): luego se tendrá la integral de la diferencial propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXV.

364. Hallar la integral de la fórmula

$$\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{(b^2 \pm px - x^2)}}.$$

Resuélvase el trinomio $b^2 \pm px - x^2$ en sus factores, y se tendrá $b^2 \pm px - x^2 =$

$$(\pm\frac{p}{2} + \surd(\tfrac{1}{4}p^2 + b^2) - x) \times (\mp\tfrac{1}{2}p + \surd(\tfrac{1}{4}p^2 + b^2) + x);$$

y haciendo las substituciones $\pm\tfrac{1}{2}p + \surd(\tfrac{1}{4}p^2 + b^2) = a$, $b = \mp\tfrac{1}{2}p + \surd(\tfrac{1}{4}p^2 + b^2)$, será $b^2 \pm px - x^2 = (a - x) \times (b + x)$: luego la diferencial propuesta

$$\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \surd(b^2 \pm px - x^2)} \text{ será igual á } \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \surd(a-x) \times \surd(b+x)} =$$

$$\frac{dx \times (b+x) - xdx}{bx^{\frac{1}{2}} \times \surd((a-x)\times(b+x))} = \frac{dx \times (b+x)}{bx^{\frac{1}{2}} \times \surd((a-x)\times(b+x))} -$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}\, dx}{b\surd((a-x)\times(b+x))} = \frac{dx\surd(b+x)}{bx^{\frac{1}{2}} \times \surd(a-x)} - \frac{x^{\frac{1}{2}}\, dx}{b \times \surd(b^2 \pm px - x^2)};$$

pero la integral de esta última expresion se ha determinado en la Proposicion anterior: luego solo resta integrar la otra $\frac{dx\surd(b+x)}{bx^{\frac{1}{2}} \times \surd(a-x)}$; para lo qual supóngase $b + x = z$; y se tendrán las equaciones, $dx = dz$, $a - x = a + b - z$, $x^{\frac{1}{2}} = \surd(z - b)$; luego

será $$\frac{dx \times \surd(b+x)}{bx^{\frac{1}{2}} \times \surd(a-x)} = \frac{z^{\frac{1}{2}}\, dz}{b\surd(z-b) \times \surd(a+b-z)} =$$

$$\frac{z^{\frac{1}{2}}\, dz}{b \times \surd(-b \times (a+b) + (a+2b) \times z - z^2)},$$ cuya integral se tiene por lo demostrado (225). Por tanto consta

de la integral de la fórmula propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXVI.

365. Hallar la integral de la fórmula

$$\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(x^2\pm px-b^2)}}.$$

Hágase $x=\frac{b^2}{z}$; y se tendrán las equaciones, $dx=-\frac{b^2dz}{z^2}$, $x^{\frac{1}{2}}=\frac{b}{z^{\frac{1}{2}}}$, $x^2=\frac{b^4}{z^2}$: luego la diferencial propuesta se transformará en la $-\frac{b^2dz}{z^2}$: $\frac{b}{z^{\frac{1}{2}}}\times\sqrt{(\frac{b^4}{z^2}\pm\frac{pb^2}{z}-b^2)}$ que es igual á

$$-\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(b^2\pm pz-z^2)}},$$ cuya integral se tiene por lo demostrado (364): luego se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXVII.

366. Hallar la integral de la fórmula

$$\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(x^2\pm px+b^2)}}.$$

1°. Si es $b^2=\frac{1}{4}p^2$, el trinomio $x^2\pm px+b^2$ será un quadrado, cuya raiz es $x\pm\frac{1}{2}p$, ó bien $\frac{1}{2}p\pm x$. Hágase $x^{\frac{1}{2}}=z$; y se tendrán las equaciones, $x = z^2$, $dx = 2zdz$: luego será $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \surd(x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2)}$

$$= \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times (x \pm \frac{1}{2}p)} = \frac{2zdz}{z \times (z^2 \pm \frac{1}{2}p)} = \frac{2dz}{z^2 \pm \frac{1}{2}p}:$$

asimismo será $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \surd(x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2)} = \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times (\frac{1}{2}p \pm x)}$

$= \frac{2zdz}{z \times (\frac{1}{2}p \pm z^2)} = \frac{2dz}{(\frac{1}{2}p \pm z^2)}$; pero las integrales de las fracciones $\frac{dz}{z^2 \pm \frac{1}{2}p}$, $\frac{dz}{\frac{1}{2}p \pm z^2}$ se tienen ó por los arcos circulares, ó por los logaritmos (131, 338): luego se tendrá del mismo modo la integral de la diferencial propuesta en la suposicion que sea $b^2 = \frac{1}{4}p^2$.

2°. *Si es* $b^2 > \frac{1}{4}p^2$; hágase $x \pm \frac{1}{2}p = z$, y se tendrán las equaciones, $dx = dz$, $x = z \mp \frac{1}{2}p$, $x^{\frac{1}{2}} = \surd(z \mp \frac{1}{2}p)$, $x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2 = z^2$, $x^2 \pm px + b^2 = z^2 + b^2 - \frac{1}{4}p^2 = z^2 + q^2$, hecha la substitucion $b^2 - \frac{1}{4}p^2 = q^2$ por facilidad del cálculo: luego será $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \surd(x^2 \pm px + b^2)} =$

$\frac{dz}{\surd(z \mp \frac{1}{2}p) \times \surd(z^2 + q^2)}$. Hágase ahora $\surd(z^2 + q^2) = y - z$; y se tendrán las equaciones, $z^2 + q^2 = y^2 - 2yz + z^2$, $q^2 = y^2 - 2yz$, de donde resulta

$z=\frac{y^2-q^2}{2y}$: luego $dz=\frac{dy\times(y^2+q^2)}{2y^2}$, $z\mp\frac{1}{2}p=\frac{y^2-q^2}{2y}$ $\mp\frac{1}{2}p=\frac{y^2\mp py-q^2}{2y}$, $\surd(z^2+q^2)=y-z=y$ $-\frac{y^2-q^2}{2y}=\frac{y^2+q^2}{2y}$: y hechas estas substituciones, se tendrá la referida fórmula transformada

$$\frac{dz}{\surd(z\mp\frac{1}{2}p)\times\surd(z^2+q^2)}=\frac{dy\times(y^2+q^2)}{2y^2}:\frac{\surd(y^2\mp py-q^2)}{\surd 2y}\times\frac{y^2+q^2}{2y}=\surd 2\times\frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}\times\surd(y^2\mp py-q^2)},$$

cuya integral se tiene por lo demostrado (365): luego se integrará del mismo modo la fórmula diferencial propuesta en la suposicion de ser $b^2>\frac{1}{4}p^2$.

3°. Y finalmente si es $b^2<\frac{1}{4}p^2$, y la diferencial propuesta es $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\times\surd(x^2+px+b^2)}$, resuélvase el trinomio x^2+px+b^2 en sus factores $x+\frac{1}{2}p+q$, $x+\frac{1}{2}p-q$, siendo $q=\surd(\frac{1}{4}p^2-b^2)$; y será la diferencial $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\times\surd(x^2+px+b^2)}=$ $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\times\surd(x+\frac{1}{2}p+q)\times\surd(x+\frac{1}{2}p-q)}$. Hágase $x+\frac{1}{2}p$ $-q=z$; y se tendrán las equaciones, $dx=dz$, $x=z+q-\frac{1}{2}p$, $x^{\frac{1}{2}}=\surd(z+q-\frac{1}{2}p)$, $\surd(x+q+\frac{1}{2}p)=$ $\surd(z+2q)$, $\surd(x+\frac{1}{2}p-q)=\surd z$: luego la diferencial propuesta $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(x^2+px+b^2)}}$ ó bien $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(x+\frac{1}{2}p+q)}\times\sqrt{(x+\frac{1}{2}p-q)}}$ se transformará por medio de dichas substituciones en la $\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(z^2+(3q-\frac{1}{2}p)\times z-q\times(p-2q))}}$; y por ser $\frac{1}{2}p>q$, esta diferencial transformada tiene la misma forma que la de la Proposicion anterior. Tambien se reduce á la dicha forma la diferencial $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(x^2-px+b^2)}}$, esto es, se transforma en la diferencial $\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(z^2+(\frac{1}{2}p-3q)\times z-q\times(p-2q))}}$ por medio de la substitucion $x+q-\frac{1}{2}p=z$. Por tanto se tendrá tambien la integral de la fórmula diferencial propuesta en la suposicion que sea $b^2<\frac{1}{4}p^2$. Que es &c.

PROPOSICION XXVIII.

367. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(-b^2+px-x^2)}}$.

Resuélvase el trinomio $-b^2+px-x^2$ en sus factores $x-\frac{1}{2}p+h$, $-x+\frac{1}{2}p+h$, substituyendo

h en lugar de $\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - b^2)}$, cuyos factores son reales, si es $\frac{1}{2}p > b$: luego será la diferencial propuesta $\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{(-b^2 + px - x^2)}} =$

$$\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{(x - \frac{1}{2}p + h)} \times \sqrt{(-x + \frac{1}{2}p + h)}}.$$ Hágase $-x + \frac{1}{2}p + h = z$; y se tendrán las equaciones $dx = -dz$, $x = \frac{1}{2}p + h - z$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\frac{1}{2}p + h - z)}$, $\sqrt{(x - \frac{1}{2}p + h)} = \sqrt{(2h - z)}$: luego será

$$\frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{(-\frac{1}{2}p + h + x)} \times \sqrt{(-x + \frac{1}{2}p + h)}} =$$

$$-\frac{dz}{z^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{(\frac{1}{2}p + h - z)} \times \sqrt{(2h - z)}} =$$

$$= \frac{dz}{z^{\frac{1}{2}} \times \sqrt{(ph + 2h^2 - (3h + \frac{1}{2}p) \times z + z^2)}},$$ la qual se integra por lo demostrado en la Proposicion antecedente: luego se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula diferencial propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXIX.

368. Hallar la integral de la fórmula $\frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{(x^2 \pm px + b^2)}}$.

1.° Si es $b^2 = \frac{1}{4}p^2$, el trinomio $x^2 \pm px + b^2$ será un quadrado que tiene la raiz $x \pm \frac{1}{2}p$, ó bien

$\frac{1}{2}p \pm x$. Hágase $x^{\frac{1}{2}} = z$, y se tendrán las equaciones $x = z^2$, $dx = 2zdz$: luego la diferencial $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2)}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x \pm \frac{1}{2}p} = \frac{2z^2dz}{z^2 \pm \frac{1}{2}p}$: asimismo $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2)}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\frac{1}{2}p \pm x} = \frac{2z^2dz}{\frac{1}{2}p \pm z^2}$; pero se ha demostrado (192) que las diferenciales $\frac{z^2dz}{z^2 \pm \frac{1}{2}p}$, $\frac{z^2dz}{\frac{1}{2}p \pm z^2}$ se integran ó por los arcos circulares, ó por los logaritmos: luego se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula propuesta en la suposicion que sea $b^2 = \frac{1}{4}p^2$.

2°. Si es $b^2 > \frac{1}{4}p^2$, hágase $x \pm \frac{1}{2}p = z$; y se tendrán las equaciones, $dx = dz$, $x^2 \pm px + b^2 = z^2 + b^2 - \frac{1}{4}p^2 = z^2 + q^2$, substituyendo q^2 en lugar de $b^2 - \frac{1}{4}p^2$: luego será $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(x^2 \pm px + b^2)}} = \frac{dz\sqrt{(z \mp \frac{1}{2}p)}}{\sqrt{(z^2 + q^2)}} = \frac{dz \times (z \mp \frac{1}{2}p)}{\sqrt{(z \mp \frac{1}{2}p)} \times \sqrt{(z^2 + q^2)}}$. Hágase ahora $\sqrt{(z^2 + q^2)} = y - z$; y se hallarán las equaciones, $z = \frac{y^2 - q^2}{2y}$, $dz = \frac{(y^2 + q^2) \times dy}{2y^2}$, $\sqrt{(z^2 + q^2)} = \frac{y^2 + q^2}{2y}$, $\sqrt{(z \mp \frac{1}{2}p)} = \frac{\sqrt{(y^2 \mp py - q^2)}}{\sqrt{2y}}$: luego será $\frac{dz \times (z \mp \frac{1}{2}p)}{\sqrt{(z \mp \frac{1}{2}p)} \times \sqrt{(z^2 + q^2)}} = \frac{dy \times (y^2 \mp py - q^2)}{y\sqrt{2y} \times \sqrt{(y^2 \mp py - q^2)}}$

$$=\frac{y^{\frac{1}{2}}dy}{\sqrt{2}\times\sqrt{(y^2\mp py-q^2)}}\mp\frac{pdy}{\sqrt{2}\times y^{\frac{1}{2}}\sqrt{(y^2\mp py-q^2)}}$$

$$-\frac{q^2dy}{\sqrt{2}\times y^{\frac{3}{2}}\sqrt{(y^2\mp py-q^2)}}.$$ La primera y segunda de estas tres diferenciales se integran por lo demostrado (224, 365), y la tercera se transforma por medio de la substitucion $y=\frac{b^2}{t}$ en la diferencial $\frac{qt^{\frac{1}{2}}dt}{b\sqrt{2}\times\sqrt{(\frac{b^4}{q^2}\mp\frac{pb^2}{q^2}\times t-t^2)}}$, la qual se integra por el método dado (363). Por tanto se tendrá la integral de la fórmula diferencial propuesta en la suposicion que sea $b^2>\frac{1}{4}p^2$.

3°. Y finalmente si es $b^2<\frac{1}{4}p^2$, los factores del trinomio $x^2\pm px+b^2$ serán reales, y se tendrá $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(x^2\pm px+b^2)}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(x\pm\frac{1}{2}p-h)}\times\sqrt{(x\pm\frac{1}{2}p+h)}}$ supuesta $h=\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-b^2)}$. Si el trinomio es x^2+px+b^2, hágase $x+\frac{1}{2}p-h=z$, y se tendrán las equaciones, $dx=dz$, $x=z+h-\frac{1}{2}p$, $x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{(z+h-\frac{1}{2}p)}$, $\sqrt{(x+\frac{1}{2}p-h)}=z^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{(x+\frac{1}{2}p+h)}=\sqrt{(z+2h)}$: luego será $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(x+\frac{1}{2}p-h)}\times\sqrt{(x+\frac{1}{2}p+h)}}=$

$$\frac{dz\sqrt{(z+h-\frac{1}{2}p)}}{z^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(z+2h)}}=\frac{dz\times(z+h-\frac{1}{2}p)}{z^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(z+2h)}\times\sqrt{(z+h-\frac{1}{2}p)}}=$$

$$\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{(z+2h)}\times\sqrt{(z+h-\frac{1}{2}p)}}+\frac{(h-\frac{1}{2}p)\times dz}{z^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(z+2h)}\times\sqrt{(z+h-\frac{1}{2}p)}}$$

$$=\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{(z^2+(3h-\frac{1}{2}p)\times z-h\times(p-2h))}}$$

$$+\frac{(h-\frac{1}{2}p)\times dz}{z^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(z^2+(3h-\frac{1}{2}p)\times z-h\times(p-2h))}};$$ y por ser $\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-b^2)}=h$, será $\frac{1}{2}p>h$, y $p>2h$: luego las dos diferenciales transformadas se integrarán por lo demostrado (224, 365), y en conseqüencia se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(x^2+px+b^2)}}$ en la suposicion que sea $b^2<\frac{1}{4}p^2$. En fin si el trinomio es x^2-px+b^2, la diferencial $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2}p-h)}\times\sqrt{(x-\frac{1}{2}p+h)}}$ se transforma por la substitucion $x-\frac{1}{2}p+h=z$ en las

$$\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{(z^2+(\frac{1}{2}p-3h)\times z-h\times(p-2h))}}$$

$$+\frac{(\frac{1}{2}p-h)\times dz}{z^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{(z^2+(\frac{1}{2}p-3h)\times z-h\times(p-2h))}},$$ las quales se integran del mismo modo que las antecedentes. Por tanto se tendrá tambien la integral de la diferencial $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(x^2-px+b^2)}}$ en la suposicion que sea $b^2<\frac{1}{4}p^2$. Que es &c.

PROPOSICION XXX.

369. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dz\sqrt{(a+bz^2)}}{\sqrt{(f+gz^2)}}$.

Hágase $a+bz^2=x$; y se tendrán las equaciones $z^2=\frac{x-a}{b}$, $z=\frac{\sqrt{(x-a)}}{\sqrt{b}}$, $dz=\frac{dx}{2\sqrt{b}\times\sqrt{(x-a)}}$, $\sqrt{(f+gz^2)}=\frac{\sqrt{(bf-ga+gx)}}{\sqrt{b}}$: luego será $\frac{dz\times\sqrt{(a+bz^2)}}{\sqrt{(f+gz^2)}}$ $=\frac{dx\sqrt{x}}{2\sqrt{b}\times\sqrt{(x-a)}}:\frac{\sqrt{(bf-ga+gx)}}{\sqrt{b}}=$ $\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2\sqrt{(gx^2+(bf-2ag)\times x+ga^2-abf)}}$; pero esta diferencial se integra por lo demostrado (368, 363, 225): luego se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXXI.

370. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dz\sqrt{(a+bz^2)}}{z^2\times\sqrt{(f+gz^2)}}$.

Hágase $z=\frac{1}{x}$; y se tendrán las equaciones $dz=-\frac{dx}{x^2}$, $z^2=\frac{1}{x^2}$, $\sqrt{(a+bz^2)}=\sqrt{(a+\frac{b}{x^2})}=\frac{1}{x}\times\sqrt{(ax^2+b)}$, $\sqrt{(f+gz^2)}=\sqrt{(f+\frac{g}{x^2})}=\frac{1}{x}\times\sqrt{(fx^2+g)}$: luego será $\frac{dz\times\sqrt{(a+bz^2)}}{z^2\times\sqrt{(f+gz^2)}}=-\frac{dx}{x^2}\times$

$\frac{\sqrt{(ax^2+b)}}{x} : \frac{1}{x^2} \times \frac{\sqrt{(fx^2+g)}}{x} = -\frac{dx\times\sqrt{(ax^2+b)}}{\sqrt{(fx^2+g)}}$, la qual se integra por lo demostrado en la Proposicion antecedente: luego se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXXII.

371. Hallar la integral de la fórmula

$$\frac{dz}{z^2\times\sqrt{(a+bz^2)}\times\sqrt{(f+gz^2)}}.$$

Hágase $x = \frac{\sqrt{(a+bz^2)}}{z}$, y será $x^2 = \frac{a+bz^2}{z^2} = \frac{a}{z^2} + b$; de donde resulta $z^2 = \frac{a}{x^2-b}$; por consiguiente se tendrán las equaciones, $z = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(x^2-b)}}$, $dz = \frac{\sqrt{a}\times -xdx}{(x^2-b)^{\frac{3}{2}}}$, $\sqrt{(a+bz^2)} = \sqrt{(a+\frac{ab}{x^2-b})} = \frac{\sqrt{a}\times x}{\sqrt{(x^2-b)}}$, $\sqrt{(f+gz^2)} = \sqrt{(f+\frac{ag}{x^2-b})} = \frac{\sqrt{(fx^2-bf+ag)}}{\sqrt{(x^2-b)}}$: luego será la fórmula diferencial propuesta $\frac{dz}{z^2\times\sqrt{(a+bz^2)}\times\sqrt{(f+gz^2)}}$ $= \frac{\sqrt{a}\times -xdx}{(x^2-b)^{\frac{3}{2}}} : \frac{a}{x^2-b} \times \frac{x\sqrt{a}}{\sqrt{(x^2-b)}} \times \frac{\sqrt{(fx^2-bf+ag)}}{\sqrt{(x^2-b)}} =$ $-\frac{dx\sqrt{(x^2-b)}}{a\times\sqrt{(fx^2-bf+ag)}}$, cuya integral se tiene por lo demostrado (369): luego del mismo modo se tendrá la integral de la fórmula propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXXIII.

372. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dz}{\surd(a+bz^2)\times\surd(f+gz^2)}$.

Hágase $x=\frac{\surd(f+gz^2)}{\surd(a+bz^2)}$; y se tendrán las equaciones, $x^2=\frac{f+gz^2}{a+bz^2}$, $ax^2+bx^2z^2=f+gz^2$, $(bx^2-g)\times z^2=f-ax^2$, $z^2=\frac{f-ax^2}{bx^2-g}$, $z=\frac{\surd(f-ax^2)}{\surd(bx^2-g)}$, $dz=-\frac{axdx}{\surd(f-ax^2)\times\surd(bx^2-g)}-\frac{b\surd(f-ax^2)\times xdx}{(bx^2-g)^{\frac{3}{2}}}$, $\surd(a+bz^2)=\surd(a+\frac{bf-abx^2}{bx^2-g})=\frac{\surd(bf-ag)}{\surd(bx^2-g)}$, $\surd(f+gz^2)=\surd(f+\frac{gf-agx^2}{bx^2-g})=\frac{x\surd(bf-ag)}{\surd(bx^2-g)}$: luego será $\frac{dz}{\surd(a+bz^2)\times\surd(f+gz^2)}=\frac{a}{ag-bf}\times\frac{dx\surd(bx^2-g)}{\surd(f-ax^2)}+\frac{b}{ag-bf}\times\frac{dx\surd(f-ax^2)}{\surd(bx^2-g)}$, cuyas integrales se tienen por lo demostrado (369): luego se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXXIV.

373. Hallar la integral de la fórmula $\frac{z^2dz}{\surd(a+bz^2)\times\surd(f+gz^2)}$.

Si se multiplican el numerador y denominador de la diferencial $\frac{dz\sqrt{(a+bz^2)}}{\sqrt{(f+gz^2)}}$ por $\sqrt{(a+bz^2)}$, se tendrá $\frac{dz\times\sqrt{(a+bz^2)}}{\sqrt{(f+gz^2)}} = \frac{dz\times(a+bz^2)}{\sqrt{(a+bz^2)}\times\sqrt{(f+gz^2)}} = \frac{adz}{\sqrt{(a+bz^2)}\times\sqrt{(f+gz^2)}} + \frac{bz^2dz}{\sqrt{(a+bz^2)}\times\sqrt{(f+gz^2)}}$, de donde resulta ser $\frac{z^2dz}{\sqrt{(a+bz^2)}\times\sqrt{(f+gz^2)}} = \frac{dz\times\sqrt{(a+bz^2)}}{b\sqrt{(f+gz^2)}} - \frac{adz}{b\sqrt{(a+bz^2)}\times\sqrt{(f+gz^2)}}$; pero las integrales de estas dos diferenciales se tienen por lo demostrado (369, 372): luego se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXXV.

374. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dz\sqrt{(a+bz^2)}\times\sqrt{(f+gz^2)}}{z^2}$.

Multiplíquense el numerador y denominador de la diferencial propuesta por $\sqrt{(a+bz^2)}$; y se tendrá $\frac{dz\sqrt{(a+bz^2)}\times\sqrt{(f+gz^2)}}{z^2} = \frac{dz\times(a+bz^2)\times\sqrt{(f+gz^2)}}{z^2\sqrt{(a+bz^2)}} = \frac{adz\times\sqrt{(f+gz^2)}}{z^2\times\sqrt{(a+bz^2)}} + \frac{bdz\times\sqrt{(f+gz^2)}}{\sqrt{(a+bz^2)}}$; pero las integrales de estas dos fórmulas diferenciales se tienen por lo demostrado (370, 369): luego se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXXVI.

375. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dz}{\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}}$.

Si el trinomio $a+bz^2+cz^4$ se puede resolver en dos factores binomios reales del segundo grado, como $(f+gz^2)\times(h+kz^2)$, se tendrá la integral de la diferencial propuesta por el método dado (372). Pero si dicho trinomio no se puede resolver en los referidos dos factores, lo que sucede quando sea $a>\frac{b^2}{4c}$, hágase $z^2+\frac{b}{2c}=x^2$, y se tendrán las equaciones $z=\sqrt{(x^2-\frac{b}{2c})}$, $dz=\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-\frac{b}{2c})}}$, $z^4+\frac{bz^2}{c}+\frac{b^2}{4c^2}=x^4$; $cz^4+bz^2+a=cx^4+a-\frac{b^2}{4c}$: luego la diferencial propuesta se transformará en la (*A*) $\frac{xdx}{\sqrt{(x^2-f)}\times\sqrt{(cx^4+cg)}}$, suponiendo $\frac{b}{2c}=f$, $a-\frac{b^2}{4c}=cg$ para facilitar el cálculo. Hágase ahora $x^2+\sqrt{(g+x^4)}=y^2$; y se tendrán las equaciones $\sqrt{(g+x^4)}=y^2-x^2$, $g+x^4=y^4-2y^2x^2+x^4$, $g=y^4-2y^2x^2$,

$x^2 = \frac{y^4 - g}{2y^2} = \frac{1}{2}y^2 - \frac{g}{2y^2}$, $x\,dx = \frac{1}{2}y\,dy + \frac{g\,dy}{2y^3} = \frac{(y^4+g)\times dy}{2y^3}$, $x^2 - f = \frac{y^4-g}{2y^2} - f = \frac{y^4 - 2fy^2 - g}{2y^2} = \frac{(y^2 - f + \sqrt{(f^2+g)})\times(y^2 - f - \sqrt{(f^2+g)})}{2y^2}$, $g + x^4 = g + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}g + \frac{g^2}{4y^4} = \frac{1}{4}y^4 + \frac{2g}{4} + \frac{g^2}{4y^4}$, $\sqrt{(g+x^4)} = \frac{y^4+g}{2y^2}$: luego la diferencial A se transformará en la $\frac{(y^4+g)\times dy}{2y^3} : \frac{\sqrt{(y^2-f+\sqrt{(f^2+g)})}\times\sqrt{(y^2-f-\sqrt{(f^2+g)})}}{y\sqrt{2}} \times \frac{(y^4+g)\times\sqrt{c}}{2y^2} = \frac{\sqrt{2}\times dy}{\sqrt{c}\times\sqrt{(y^2-f+\sqrt{(f^2+g)})}\times\sqrt{(y^2-f-\sqrt{(f^2+g)})}}$; pero la integral de esta diferencial se tiene por lo demostrado (372): luego se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXXVII.

376. Hallar la integral de la fórmula $\frac{z^2 dz}{\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}}$.

Si el trinomio $a + bz^2 + cz^4$ se puede resolver en dos factores binomios reales del segundo grado, se tendrá la integral de la fórmula propuesta por el método dado (373); y si no se puede resolver en dichos factores, háganse las mismas dos substituciones que se hicieron en la Proposicion antecedente; y por la primera se tendrá

$\frac{z^2 dz}{\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}} = \frac{xdx\sqrt{(x^2-f)}}{\sqrt{(cg+cx^4)}}$, y por la segunda será $\frac{xdx\sqrt{(x^2-f)}}{\sqrt{(cg+cx^4)}} = \frac{dy\sqrt{(-f+\sqrt{\frac{a}{c}}+y^2)}\times\sqrt{(-f-\sqrt{\frac{a}{c}}+y^2)}}{y^2\times\sqrt{2c}}$;

pero esta diferencial se integra por el método dado (374): luego se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XXXVIII.

377. Hallar la integral de la fórmula $\frac{z^q dz}{\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}}$, en cuya expresion es q número entero, ó bien cero.

Si q es número impar, positivo ó negativo, consta (355) de la integral de la diferencial propuesta: y si es q número par y positivo, diferénciese la expresion $z^p\times\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}$, y se tendrá

$$D.z^p\times\sqrt{(a+bz^2+cz^4)} = \frac{paz^{p-1}dz+(p+1)\times bz^{p+1}dz+(p+2)\times cz^{p+3}dz}{\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}},$$

de donde resulta la equacion (A)

$$\frac{z^{p+3}dz}{\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}} = \frac{D.z^p\times\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}}{(p+2)\times c} - \frac{b\times(p+1)\times z^{p+1}dz}{(p+2)\times c\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}}$$

$- \frac{paz^{p-1}dz}{(p+2)\times c\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}}$. Si en esta equacion general se hace $p=1$, la integral de $\frac{z^4 dz}{\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}}$

dependerá de las integrales de $\frac{z^2 dz}{\surd(a+bz^2+cz^4)}$, $\frac{dz}{\surd(a+bz^2+cz^4)}$; si se supone $p=3$, la integral de $\frac{z^6 dz}{\surd(a+bz^2+cz^4)}$ dependerá de las integrales de $\frac{z^4 dz}{\surd(a+bz^2+cz^4)}$, $\frac{z^2 dz}{\surd(a+bz^2+cz^4)}$; y así sucesivamente con el mismo órden. Por tanto la integral de la fórmula propuesta, en quien q es número par y positivo depende de las integrales de $\frac{z^2 dz}{\surd(a+bz^2+cz^4)}$, $\frac{dz}{\surd(a+bz^2+cz^4)}$, las quales se tienen por lo demostrado (376, 375).

En fin si q es número negativo y par, por medio de la equacion A se tendrá la equacion general $\frac{z^{p-1} dz}{\surd(a+bz^2+cz^4)} = \frac{D:z^p \times \surd(a+bz^2+cz^4)}{pa}$ $- \frac{(p+1)\times bz^{p+1} dz}{pa\surd(a+bz^2+cz^4)} - \frac{(p+2)\times cz^{p+3} dz}{pa\surd(a+bz^2+cz^4)}$. Si en esta equacion se hace $p=-1$, la integral de $\frac{dz}{z^2\surd(a+bz^2+cz^4)}$ dependerá de las integrales de $\frac{dz}{\surd(a+bz^2+cz^4)}$, $\frac{z^2 dz}{\surd(a+bz^2+cz^4)}$; si se supone $p=-3$, la integral de $\frac{dz}{z^4\surd(a+bz^2+cz^4)}$ dependerá de las integrales de $\frac{dz}{z^2\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}}$, $\frac{dz}{\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}}$: y así sucesivamente con el mismo órden. Por tanto la integral de la fórmula propuesta, en quien q es número par y negativo, depende también de las integrales de $\frac{dz}{\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}}$, $\frac{z^2dz}{\sqrt{(a+bz^2+cz^4)}}$, las quales se tienen por lo demostrado (375, 376). Que es &c.

PROPOSICION XXXIX.

378. Hallar la integral de la fórmula $\frac{z^m dz\sqrt{(a+bz^2)}}{\sqrt{(f+gz^2)}}$, en quien el exponente m es número entero, positivo ó negativo.

Multiplíquense los términos de la fraccion propuesta por $\sqrt{(a+bz^2)}$; y se tendrá la equacion $\frac{z^m dz\sqrt{(a+bz^2)}}{\sqrt{(f+gz^2)}} = \frac{az^m dz}{\sqrt{(a+bz^2)}\times\sqrt{(f+gz^2)}} + \frac{bz^{m+2}dz}{\sqrt{(a+bz^2)}\times\sqrt{(f+gz^2)}}$; pero las integrales de estas dos fórmulas diferenciales se tienen por lo demostrado (377): luego se tendrá del mismo modo la integral de la diferencial propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XL.

379. Hallar la integral de la fórmula $z^m dz\times$

$\sqrt{}(a+bz^2+cz^4)$, en quien es m número entero, positivo ó negativo.

Multiplíquese y pártase la fórmula propuesta por $\sqrt{}(a+bz^2+cz^4)$; y se tendrá la equacion

$$z^m dz \times \sqrt{}(a+bz^2+cz^4) = \frac{az^m dz}{\sqrt{}(a+bz^2+cz^4)}$$

$$+\frac{bz^{m+2}dz}{\sqrt{}(a+bz^2+cz^4)}+\frac{cz^{m+4}dz}{\sqrt{}(a+bz^2+cz^4)},$$ cuyas integrales se tienen por lo demostrado (377). Que es &c.

PROPOSICION XLI.

380. Hallar las integrales de las fórmulas

$$z^m dz \times (a+bz^2+cz^4)^{\frac{n}{2}}, \quad \frac{z^m dz \times (a+bz^2)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{}(f+gz^2)},$$

$z^m dz \times (a+bz^2)^{\frac{n}{2}} \times (f+gz^2)^{\frac{q}{2}}$, en cuyas expresiones son los números n y q impares y positivos, y m entero, positivo ó negativo.

Hágase $n=2p+1$, y se tendrá la equacion

$$z^m dz \times (a+bz^2+cz^4)^{\frac{n}{2}} = z^m dz \times (a+bz^2+cz^4)^{\frac{2p+1}{2}}$$

$$= z^m dz \times (a+bz^2+cz^4)^p \times (a+bz^2+cz^4)^{\frac{1}{2}}:$$

luego si se eleva el trinomio $a+bz^2+cz^4$ á la potestad entera y positiva p, y los términos de la serie finita que resulta se multiplican por

$z^m dz \sqrt{(a+bz^2+cz^4)}$, cada uno de estos productos se integrará por lo demostrado (379): luego se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula $z^m dz \times (a+bz^2+cz^4)^{\frac{n}{2}}$. Con el mismo método se hallará (378) la integral de la segunda fórmula propuesta que resulta igual á $z^m dz \times (a+bz^2)^p \times \frac{(a+bz^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(f+gz^2)}}$. Finalmente con el referido método se hallará (379) la integral de la tercera fórmula que es igual á $z^m dz \times (a+bz^2)^p \times (f+gz^2)^r \times \sqrt{(a+bz^2)} \times \sqrt{(f+gz^2)}$, hecha la substitucion $q=2r+1$. Que es &c.

PROPOSICION XLII.

381. Hallar la integral de la fórmula $\frac{z^m dz}{(a+bz^2+cz^4)^{\frac{n}{2}}}$, en cuya expresion es n número impar y positivo, y m es número entero, positivo ó negativo.

1°. Si es m número par y positivo, y además $m>n+1$, ó $m=n\pm1$, hágase $\frac{a+bz^2+cz^4}{z^2}=x^2$; y se tendrán las equaciones $z^4+\frac{b-x^2}{c}\times z^2=-\frac{a}{c}$,

$z^2 = \frac{-b+x^2}{2c} + \sqrt{(\frac{(b-x^2)^2}{4c^2} - \frac{a}{c})}$, $z\,d\,z = \frac{x\,dx}{2c}$ $- x\,dx \times (b-x^2) : 4c^2 \times \sqrt{(\frac{(b-x^2)^2}{4c^2} - \frac{a}{c})}$: luego será $\frac{z^m dz}{(a+bz^2+cz^4)^{\frac{n}{2}}} = \frac{z^{m-n-1} \times z dz \times z^n}{x^n \times z^n}$ igual á la cantidad (A) $\left(\frac{dx}{2cx^{n-1}} - dx \times (b-x^2) : 4c^2\, x^{n-1} \times \sqrt{(\frac{(b-x^2)^2}{4c^2} - \frac{a}{c})}\right)$ multiplicada por (B)

$\left(\frac{-b+x^2}{2c} + \sqrt{(\frac{(b-x^2)^2}{4c^2} - \frac{a}{c})}\right)^{\frac{m-n-1}{2}}$; pero siendo m y $n+1$ números pares, y además $m > n+1$, el exponente $\frac{m-n-1}{2}$ es número entero y positivo: luego elevando la cantidad B á la potestad $\frac{m-n-1}{2}$, y multiplicando sus términos por la cantidad A, en la suma de las integrales (377, 379, 380) de estos productos se tendrá la de la fórmula propuesta en la suposicion de $m > n+1$; pero si es $m = n+1$, el factor B queda igual á la unidad, y la integral (377) del factor A dará la integral de la fórmula; y si es $m = n-1$, se tendrá la integral por lo dicho (377).

2°. Si es m número par y positivo, y además $m < n+1$, ó bien si es m número par y negativo;

hágase $z = \frac{1}{y}$: luego por las correspondientes substituciones y reduciones se tendrá $\frac{z^m dz}{(a+bz^2+cz^4)^{\frac{n}{2}}} = - \frac{y^{-m+2n-2} dy}{(ay^4+by^2+c)^{\frac{n}{2}}}$. Consta por lo demostrado en el caso anterior que esta fórmula se integra, quando sea $-m+2n-2$ mayor ó igual á $n+1$, de donde resulta ser m menor ó igual á $n-3$, y con mas razon m menor que $n \pm 1$: luego si es m número par y positivo, y además $m < n+1$, se tendrá la integral de la fórmula propuesta. En fin si es m número par y negativo, la fórmula transformada se integrará del mismo modo por el caso anterior.

3°. Y finalmente si m es número impar, positivo ó negativo, la fórmula propuesta se integrará por lo demostrado (355). Que es &c.

PROPOSICION XLIII.

382. Hallar las integrales de las fórmulas $\frac{z^m dz \times (a+bz^2)^{\frac{n}{2}}}{(f+gz^2)^{\frac{p}{2}}}$, $\frac{z^m dz}{(a+bz^2)^{\frac{n}{2}} \times (f+gz^2)^{\frac{p}{2}}}$, en cu-

yas expresiones son los números n y p impares y positivos, y el exponente m entero, positivo ó negativo.

Sea $n+p=2q$, y será $n=2q-p$: luego se tendrá

$$\frac{z^m dz\times(a+bz^2)^{\frac{n}{2}}}{(f+gz^2)^{\frac{p}{2}}}=\frac{z^m dz\times(a+bz^2)^q}{(a+bz^2)^{\frac{p}{2}}\times(f+gz^2)^{\frac{p}{2}}},$$

cuya integral se tiene por lo demostrado (381). Asimismo si es $n<p$, y se supone $n=p-2q$, será

$$\frac{z^m dz}{(a+bz^2)^{\frac{n}{2}}\times(f+gz^2)^{\frac{p}{2}}}=\frac{z^m dz}{(a+bz^2)^{-q}\times(a+bz^2)^{\frac{p}{2}}\times(f+gz^2)^{\frac{p}{2}}}=$$

$$\frac{z^m dz\times(a+bz^2)^q}{(a+bz^2)^{\frac{p}{2}}\times(f+gz^2)^{\frac{p}{2}}}$$: luego &c.

PROPOSICION XLIV.

383. Hallar las integrales de las fórmulas $x^{\frac{m}{2}}dx\times(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}$, $x^{\frac{m}{2}}dx\times(a+bx)^{\frac{n}{2}}\times(f+gx)^{\frac{p}{2}}$, en cuyas expresiones son los números m, n, p impares, positivos ó negativos.

Hágase $x=z^2$; y haciendo las correspondientes substituciones en las fórmulas propuestas, serán éstas respectivamente iguales á las $2z^{m+1}dz\times$

$(a+bz^2+cz^4)^{\frac{n}{2}}$, $2z^{m+1}dz\times(a+bz^2)^{\frac{n}{2}}\times$

$(f+gz^2)^{\frac{p}{2}}$, cuyas integrales se han determinado (380, 381, 382). Que es &c.

PROPOSICION XLV.

384. Hallar las integrales de las fórmulas $x^m dx\times$

$(a+bx)^{\frac{n}{2}}\times(c+ex+fx^2)^{\frac{p}{2}}$, $x^m dx\times(a+bx)^{\frac{n}{2}}\times$

$(f+gx)^{\frac{p}{2}}\times(c+ex)^{\frac{q}{2}}$, en cuyas expresiones son los números n, p, q impares, positivos ó negativos, y el número m entero y positivo.

Supóngase $a+bx=az$, de donde $x=\frac{a\times(z-1)}{b}$ $=h\times(z-1)$, llamada $h=\frac{a}{b}$ para facilitar el cálculo: luego haciendo las correspondientes substituciones en las fórmulas propuestas, resultarán éstas respectivamente iguales á las diferenciales $a^{\frac{n}{2}}h^{m+1}\times$

$(z-1)^m z^{\frac{n}{2}}dz\times(c-eh+fh^2+(eh-2fh^2)\times z+fh^2z^2)^{\frac{p}{2}}$,

$a^{\frac{n}{2}}h^{m+1}\times(z-1)^m\times z^{\frac{n}{2}}dz\times(f-gh+ghz)^{\frac{p}{2}}\times$

$(c - eh + ehz)^{\frac{q}{2}}$, cuyas integrales se tienen por lo demostrado (383). Que es &c.

COROLARIO I.

385. Si es $n = p = q$, las fórmulas propuestas tendrán la fórma (A) $x^m dx \times (g + hx + kx^2 + lx^3)^{\frac{p}{2}}$, en cuya expresion se contiene la fórmula diferencial $x^m dx \times \sqrt{(g + hx + kx^2 + lx^3)}$.

COROLARIO II.

386. Si en la fórmula antecedente A se supone $m = 1$, $p = -1$, ó bien $m = o$, $p = -1$, resultarán las fórmulas $x\,dx : \sqrt{(g + hx + kx^2 + lx^3)}$, $dx : \sqrt{(g + hx + kx^2 + lx^3)}$, en las que se contienen las diferenciales $\frac{x\,dx}{\sqrt{(g + lx^3)}}$, $\frac{dx}{\sqrt{(g + lx^3)}}$, siendo $h = o$, $k = o$.

PROPOSICION XLVI.

387. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dx}{x^m \times \sqrt{(g + lx^3)}}$, en quien el exponente m es número entero y positivo.

Diferénciese la expresion $\frac{\sqrt{(g + lx^3)}}{x^r}$; y se tendrá

$D.\frac{\sqrt{(g+lx^3)}}{x^p}=\frac{\frac{3}{2}l\,dx}{x^{p-2}\times\sqrt{(g+lx^3)}}-\frac{p\,dx\sqrt{(g+lx^3)}}{x^{p+1}}$: luego multiplicando los términos de esta última fraccion por $\sqrt{(g+lx^3)}$, será $D.\frac{\sqrt{(g+lx^3)}}{x^p}=$ $\frac{(\frac{3}{2}l-pl)\times dx}{x^{p-2}\times\sqrt{(g+lx^3)}}-\frac{pg\times dx}{x^{p+1}\times\sqrt{(g+lx^3)}}$, de donde resulta $\frac{dx}{x^{p+1}\times\sqrt{(g+lx^3)}}=-D.\frac{\sqrt{(g+lx^3)}}{pgx^p}+\frac{\frac{3}{2}l-pl}{pg}\times$ $\frac{dx}{x^{p-2}\times\sqrt{(g+lx^3)}}$: luego la integral de $dx:x^{p+1}\times$ $\sqrt{(g+lx^3)}$ depende de la integral de (A) $dx:x^{p-2}\times$ $\sqrt{(g+lx^3)}$, y por igual razon la integral de A depende de la integral de $dx:x^{p-5}\times\sqrt{(g+lx^3)}$; y así sucesivamente con el mismo órden. Por tanto si $p+1$, ó bien m es igual á qualquier término de la serie 3, 6, 9, 12, &c. la integral de la fórmula propuesta dependerá últimamente de la integral (386) de $\frac{dx}{\sqrt{(g+lx^3)}}$; y si m es igual á qualquier término de la serie 2, 5, 8, 11, &c. dependerá últimamente de la integral (386) de $\frac{x\,dx}{\sqrt{(g+lx^3)}}$; en fin si m es igual á qualquier término de la serie 4, 7, 10, 13, &c. dependerá últimamente de la integral (362) de $\frac{dx}{x\sqrt{(g+lx^3)}}$. Que es &c.

PROPOSICION XLVII.

388. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dx\sqrt{(g+lx^3)}}{x^m}$, en quien el exponente m es número entero y positivo.

Multiplíquense el numerador y denominador de la diferencial propuesta por $\sqrt{(g+lx^3)}$; y será dicha diferencial igual á $\frac{gdx}{x^m \times \sqrt{(g+lx^3)}} + \frac{ldx}{x^{m-3} \times \sqrt{(g+lx^3)}}$; pero las integrales de estas dos diferenciales se tienen por lo demostrado (387, 386, 326): luego se tendrá del mismo modo la integral de la fórmula propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XLVIII.

389. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dx \times (g+lx^3)^{\frac{n}{2}}}{x^m}$, en quien el exponente n es número positivo é impar, y el exponente m es entero y positivo.

Multiplíquense el numerador y denominador de la diferencial propuesta por $(g+lx^3)^{\frac{1}{2}}$; y se tendrá dicha diferencial igual á $\frac{dx \times (g+lx^3)^{\frac{n+1}{2}}}{x^m \times \sqrt{(g+lx^3)}}$, en quien el exponente $\frac{n+1}{2}$ será número entero y positivo, por ser n número impar y positivo: luego elevando el binomio $g+lx^3$ á la potestad entera y positiva $\frac{n+1}{2}$, y multiplicando los términos que resultan por $dx : x^m \times \surd(g+lx^3)$, se tendrá la integral de cada uno de ellos por lo demostrado (387, 385); por consiguiente la integral de la fórmula propuesta. Que es &c.

PROPOSICION XLIX.

390. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dx}{x^m \times (g+lx^3)^{\frac{n}{2}}}$; en cuya expresion se supone el número n impar y positivo, y el número m es entero, positivo ó negativo.

Hállese la diferencial de la cantidad $\frac{1}{x^{m+2} \times (g+lx^3)^{\frac{n-2}{2}}}$; y resultará dicha diferencial igual á $\frac{-(m+2) \times dx}{x^{m+3} \times (g+lx^3)^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{3 \times (n-2) \times ldx}{2x^m \times (g+lx^3)^{\frac{n}{2}}}$, de donde deriva la equacion (A) $\frac{dx}{x^m \times (g+lx^3)^{\frac{n}{2}}} =$

$$= \frac{2}{3 \times (n-2) \times l} \times D. \frac{1}{x^{m+2} \times (g+lx^3)^{\frac{n-2}{2}}}$$

$$-\frac{2\times(m+2)\times dx}{3\times(n-2)\times lx^{m+3}\times(g+lx^3)^{\frac{n-2}{2}}}(B).$$ Si es $n=3$, la integral de la fórmula B se tiene por lo demostrado (387, 385), y por consiguiente la de la fórmula A: si es $n=5$, la integral de la fórmula B se tiene por el caso anterior, y por consiguiente la de la fórmula A; y así sucesivamente con el mismo órden. Que es &c.

PROPOSICION L.

391. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dx\times(g+lx^3)^{\frac{n}{2}}}{x^{m+2+\frac{3}{2}n}}$, en cuya expresion son los números, n impar, positivo ó negativo, y m entero, positivo ó negativo.

Hágase $x=\frac{1}{y}$; y se tendrán las equaciones $dx=-\frac{dy}{y^2}$, $(g+lx^3)^{\frac{n}{2}}=(g+\frac{l}{y^3})^{\frac{n}{2}}=\frac{(gy^3+l)^{\frac{n}{2}}}{y^{\frac{3}{2}n}}$, $x^{m+2+\frac{3}{2}n}=\frac{1}{y^{m+2+\frac{3}{2}n}}$: luego la fórmula propuesta se transformará en la diferencial

$-y^m dy\times(gy^3+l)^{\frac{n}{2}}$, cuya integral se tiene por lo demostrado (385, 390). Que es &c.

COROLARIO.

392. Si se supone $2m+4=p$ número par, positivo ó negativo, la fórmula $\frac{dx\times(g+lx^3)^{\frac{n}{2}}}{x^{\frac{p+3n}{2}}}$ se integrará con el mismo método expresado (391).

PROPOSICION LI.

393. Hallar la integral de las fórmulas

$$\frac{dx\times(f+gx)^{\frac{m}{2}}\times(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}{x^{p+2+\frac{m+2n}{2}}},$$

$$\frac{dx\times(f+gx)^{\frac{m}{2}}\times(a+bx)^{\frac{q}{2}}\times(c+ex)^{\frac{n}{2}}}{x^{p+2+\frac{m+q+n}{2}}},$$

en cuyas expresiones son los números, p entero y positivo, y m, n, q impares, positivos ó negativos.

Hágase $x=\frac{1}{y}$; y las fórmulas propuestas se transformarán en las respectivas diferenciales $-y^p dy\times(fy+g)^{\frac{m}{2}}\times(c+by+ay^2)^{\frac{n}{2}}$, $-y^p dy\times(fy+g)^{\frac{m}{2}}\times(ay+b)^{\frac{q}{2}}\times(cy+e)^{\frac{n}{2}}$, cuyas integrales se tienen por lo demostrado (384). Que es &c.

COROLARIO I.

394. Si se supone $2p+4=r$ número positivo y par, y no menor que 4, las fórmulas

$$\frac{dx(f+gx)^{\frac{m}{2}}\times(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}{x^{\frac{r+m+2n}{2}}},$$

$$\frac{dx\times(f+gx)^{\frac{m}{2}}\times(a+bx)^{\frac{q}{2}}\times(c+ex)^{\frac{n}{2}}}{x^{\frac{r+m+q+n}{2}}}$$ se integrarán con el mismo método expresado antes (393).

COROLARIO II.

395. En la suposicion antecedente de la r, las fórmulas $(A)\ \dfrac{dx\times(f+gx)^{\frac{m}{2}}\times(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}}{(h+kx)^{\frac{r+m+2n}{2}}}$,

$(B)\ \dfrac{dx\times(f+gx)^{\frac{m}{2}}\times(a+bx)^{\frac{q}{2}}\times(c+ex)^{\frac{n}{2}}}{(h+kx)^{\frac{r+m+q+n}{2}}}$ se reducirán á las anteriores (394) por medio de la substitucion $h+kx=ky$, y en conseqüencia se integrarán del mismo modo.

COROLARIO III.

396. Si en la fórmula anterior B se supone $t=r+m+q+n$, de modo que tenga la forma $\frac{dx\times(a+bx)^{\frac{q}{2}}\times(c+ex)^{\frac{n}{2}}\times(f+gx)^{\frac{m}{2}}}{(h+kx)^{\frac{t}{2}}}$; ésta se integrará, con tal que sea $t-m-q-n$ número positivo, y no menor que 4: pues, siendo $t=r+m+q+n$, será $t-m-q-n=r$; pero r es número positivo y par, y no menor que 4: luego $t-m-q-n$ deberá tener las mismas condiciones. Discúrrase del mismo modo respecto á la fórmula anterior A, con tal que se tome el duplo de la cantidad n.

PROPOSICION LII.

397. Hallar la integral de la fórmula $\frac{dx\times(g+lx^3)^{\frac{n}{2}}}{(a+bx)^{m+2+\frac{3}{2}n}}$, en quien son los números, n impar, positivo ó negativo, y m entero y positivo.

Siendo, pues, $g+lx^3=l\times(\frac{g}{l}+x^3)$, será $g+lx^3=l\times(x+c)\times(x^2-cx+c^2)$, llamada $\frac{g}{l}=c^3$ para facilitar el cálculo: luego la fórmula propuesta será igual á

$$\frac{l^{\frac{n}{2}} \times dx \times (x+c)^{\frac{n}{2}} \times (x^2 - cx + c^2)^{\frac{n}{2}}}{(a+bx)^{m+2+\frac{3}{2}n}}$$, y ésta se reducirá á la fórmula demostrada (393) por la substitucion $a+bx=by$: luego se integrará del mismo modo la diferencial propuesta. Que es &c.

COROLARIO.

398. Si se supone $2m+4=r$ número par y positivo, la fórmula $\frac{dx \times (g+lx^3)^{\frac{n}{2}}}{(a+bx)^{\frac{r+3n}{2}}}$, se integrará con el método expresado en la Proposicion anterior.

PROPOSICION LIII.

399. Hallar la integral de la fórmula $\frac{x^m dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}} \times (f+gx+hx^2)^{\frac{p}{2}}}$, en quien se suponen, m entero y positivo, n y p impares, positivos ó negativos, y $bh=cg$.

Hágase $x+\frac{b}{2c}=x+\frac{g}{2h}=z$; y se tendrán las equaciones, $x=z-\frac{b}{2c}$, $x=z-\frac{g}{2h}$, $dx=dz$,

$a+bx+cx^2=cz^2+a-\frac{b^2}{4c}$, $f+gx+hx^2=hz^2$ $+f-\frac{g^2}{4h}$: luego la fórmula propuesta se transformará en la (A) $\dfrac{(z-\frac{b}{2c})^m \times dz}{(cz^2+a-\frac{b^2}{4c})^{\frac{n}{2}} \times (hz^2+f-\frac{g^2}{4h})^{\frac{p}{2}}}$; y elevando el binomio $z-\frac{b}{2c}$ á la potestad entera y positiva m, y multiplicando sus términos por la dz partida por el denominador de la diferencial A, se tendrá ésta igual á la suma de los términos que resultan, cuyas integrales se tienen por lo demostrado (382, 380); por consiguiente en la suma de las mismas integrales se tendrá la de la propuesta. Que es &c.

PROPOSICION LIV.

400. Hallar la integral de la fórmula $\dfrac{dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}} \times (f+gx+hx^2)^{\frac{p}{2}}}$, en quien se suponen los números n y p impares, y $\frac{n+p}{2}$ número entero y positivo.

Es evidente que la fórmula propuesta es igual

$$\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{n+p}{2}}} : \left(\frac{f+gx+hx^2}{a+bx+cx^2}\right)^{\frac{p}{2}}$$; pero $\frac{hx^2+gx+f}{cx^2+bx+a}$

$$= \frac{h}{c} + \frac{(g-\frac{bh}{c})\times x+f-\frac{ah}{c}}{cx^2+bx+a}$$: luego dicha fórmula será tambien igual á (A) $\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{n+p}{2}}}$:

$$\left(\frac{h}{c} + \frac{(g-\frac{bh}{c})\times x+f-\frac{ah}{c}}{cx^2+bx+a}\right)^{\frac{p}{2}}$$. Hágase ahora

$$\frac{cx^2+bx+a}{(g-\frac{bh}{c})\times x+f-\frac{ah}{c}} = \frac{2cz}{g-\frac{bh}{c}}$$, de donde resultan las equaciones, es á saber, $x = -\frac{b}{2c} + z$

$$+\sqrt{\left(\frac{b^2}{4c^2}-\frac{a}{c}+\left(\frac{2f-\frac{2ah}{c}}{g-\frac{bh}{c}}-\frac{b}{c}\right)\times z+z^2\right)} =$$

$-\frac{b}{2c}+z+\sqrt{(k+2lz+z^2)}$ llamada $k=\frac{b^2}{4c^2}-\frac{a}{c}$,

y $2l = \frac{2f-\frac{2ah}{c}}{g-\frac{bh}{c}} - \frac{b}{c}$, $dx = dz + \frac{ldz+zdz}{\sqrt{(k+2lz+z^2)}} =$

$\frac{(l+z+\sqrt{(k+2lz+z^2)})\times dz}{\sqrt{(k+2lz+z^2)}}$, $(g-\frac{bh}{c})\times x+f-\frac{ah}{c}=$
$(g-\frac{bh}{c})\times-\frac{b}{2c}+f-\frac{ah}{c}+(g-\frac{bh}{c})\times z+(g-\frac{bh}{c})\times$
$\sqrt{(k+2lz+z^2)}=(g-\frac{bh}{c})\times l+(g-\frac{bh}{c})\times z$
$+(g-\frac{bh}{c})\times\sqrt{(k+2lz+z^2)}$, cx^2+bx+a

$$=\frac{2cz\times\left((g-\frac{bh}{c})\times x+f-\frac{ah}{c}\right)}{g-\frac{bh}{c}}=2cz\times$$

$$\left(x+\frac{f-\frac{ah}{c}}{g-\frac{bh}{c}}\right)=2cz\times(l+z+\sqrt{(k+2lz+z^2)}):$$

luego será la fórmula A igual á $\frac{(l+z+\sqrt{(k+2lz+z^2)})\times dz}{\sqrt{(k+2lz+z^2)}}$:

$$2^{\frac{n+p}{2}}c^{\frac{n+p}{2}}z^{\frac{n+p}{2}}\times(l+z+\sqrt{(k+2lz+z^2)})^{\frac{n+p}{2}}\times$$

$$\left(\frac{h}{c}+\frac{g-\frac{bh}{c}}{2cz}\right)^{\frac{p}{2}}, \text{ esto es, igual á}$$

$$(B)\ \frac{dz}{2^{\frac{n}{2}}c^{\frac{n}{2}}\times z^{\frac{n}{2}}(2hz+g-\frac{bh}{c})^{\frac{p}{2}}\times(l+z+\sqrt{(k+2lz+z^2)})^{\frac{n+p}{2}-1}\times\sqrt{(k+2lz+z^2)}}.$$

Si en esta expresion es $\frac{n+p}{2}=1$, la fórmula que resulta se integra por lo demostrado (393), qualquiera que sea el número p positivo ó negativo; pero si es $\frac{n+p}{2} > 1$, la fórmula (B) se multiplicará y partirá por $(l+z-\surd(k+2lz+z^2))^{\frac{n+p}{2}-1}$, de modo que tenga la forma

$$(C)\ \frac{dz\times(l+z-\surd(k+2lz+z^2))^{\frac{n+p}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}c^{\frac{n}{2}}\times(l^2-k)^{\frac{n+p}{2}-1}\times z^{\frac{n}{2}}\times(2hz+g-\frac{bh}{c})^{\frac{p}{2}}\times\surd(k+2lz+z^2)}.$$

Ahora si se supone $\frac{n+p}{2}=2$, la fórmula C será igual á

$$\frac{ldz}{2^{\frac{n}{2}}c^{\frac{n}{2}}\times(l^2-k)\times z^{\frac{n}{2}}\times(2hz+g-\frac{bh}{c})^{\frac{p}{2}}\times\surd(k+2lz+z^2)}$$
$$+\frac{dz}{2^{\frac{n}{2}}c^{\frac{n}{2}}\times(l^2-k)\times z^{\frac{n}{2}-1}\times(2hz+g-\frac{bh}{c})^{\frac{p}{2}}\times\surd(k+2lz+z^2)}$$
$$-\frac{dz}{2^{\frac{n}{2}}c^{\frac{n}{2}}\times(l^2-k)\times z^{\frac{n}{2}}\times(2hz+g-\frac{bh}{c})^{\frac{p}{2}}},$$

cuyas tres diferenciales se integran por lo demostrado (393, 383). Discúrrase del mismo modo, si $\frac{n+p}{2}$ es qualquiera otro número entero y positivo. Que es &c.

PROPOSICION LV.

401. Hallar la integral de la fórmula $x^n dx \times (a+bx+cx^2)^{\frac{m}{3}}$, en cuya expresion se suponen los números, n entero y positivo, y m entero, positivo ó negativo, y que no se pueda partir por 3.

Hágase $a+bx+cx^2=cy^3$; y se tendrán las equaciones, $x^2+\frac{b}{c}\times x=y^3-\frac{a}{c}$, $x=-\frac{b}{2c}+\sqrt{(y^3-\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2})}=-\frac{b}{2c}+\sqrt{(y^3+g^3)}$ llamada $-\frac{a}{c}+\frac{b^2}{4c^2}=g^3$ para facilitar el cálculo, $dx=\frac{3y^2dy}{2\sqrt{(y^3+g^3)}}$, $(a+bx+cx^2)^{\frac{m}{3}}=c^{\frac{m}{3}}\times y^m$: luego la fórmula propuesta se transformará en la

$$(A)\ \frac{\left(-\frac{b}{2c}+\sqrt{(y^3+g^3)}\right)^n\times 3c^{\frac{m}{3}}y^{m+2}dy}{2\sqrt{(y^3+g^3)}}$$

; y elevando el binomio á la potestad entera y positiva n, y haciendo la correspondiente multiplicacion, las diferenciales que resultan se tendrán por lo demostrado (387, 385): luego &c.

COROLARIO.

402. Si en la fórmula de la Proposicion ante-

cedente es $b=o$, la fórmula transformada A resultará igual á $(y^3+g^3)^{\frac{n-1}{2}} \times \frac{3}{2}c^{\frac{m}{3}} \times y^{m+2}dy$, cuya expresion se integrará por lo demostrado (385, 389, 390), aunque n sea entero y negativo: luego se integrará del mismo modo la fórmula $x^n dx \times (a+cx^2)^{\frac{m}{3}}$. Adviértase que en el referido caso de $b=o$, será $g^3 = -\frac{a}{c}$.

PROPOSICION LVI.

403. Hallar la integral de la fórmula $x^n dx \times (a+bx+cx^2)^{\frac{m}{4}}$, en cuya expresion son los números, n entero y positivo, y m impar, positivo ó negativo.

Hágase $a+bx+cx^2 = cy^2$; y se tendrán las equaciones, $x^2 + \frac{b}{c} \times x = y^2 - \frac{a}{c}$, $x = -\frac{b}{2c} + \sqrt{(y^2 - \frac{a}{c} + \frac{b^2}{4c^2})} = -\frac{b}{2c} + \sqrt{(y^2+g^2)}$ supuesta $g^2 = -\frac{a}{c} + \frac{b^2}{4c^2}$ para facilitar el cálculo, $dx = \frac{ydy}{\sqrt{(y^2+g^2)}}$, $(a+bx+cx^2)^{\frac{m}{4}} = c^{\frac{m}{4}} y^{\frac{m}{2}}$: luego la fórmula propuesta se transformará en la (A)

$\left(-\frac{b}{2c}+\sqrt{(y^2+g^2)}\right)^n \times \frac{c^{\frac{m}{4}} y^{\frac{m+2}{2}} dy}{\sqrt{(y^2+g^2)}}$; y elevando el binomio á la potestad entera y positiva n, y haciendo la correspondiente multiplicacion, las diferenciales que resultan se integrarán por lo demostrado (383): luego se integrará del mismo modo la fórmula propuesta. Que es &c.

COROLARIO.

404. Si en la fórmula de la Proposicion antecedente es $b=o$, la diferencial transformada A resulta igual á $(y^2+g^2)^{\frac{n-1}{2}} \times c^{\frac{m}{4}} y^{\frac{m+2}{2}} dy$, en quien $g^2=-\frac{a}{c}$, cuya diferencial se integrará por lo demostrado, aunque sea n número entero y negativo (383).

PROPOSICION LVII.

405. Hallar la integral de la fórmula $x^n dx \times (a+bx+cx^2)^{\frac{m}{6}}$, en cuya expresion se suponen los números, n entero y positivo, y m positivo ó negativo, con tal que no sea par ni divisible por 3.

Hágase $a+bx+cx^2=cy^3$, de donde resultan las equaciones, $x^2 + \frac{b}{c} \times x = y^3 - \frac{a}{c}$, $x = -\frac{b}{2c} + \sqrt{(y^3 - \frac{a}{c} + \frac{b^2}{4c^2})} = -\frac{b}{2c} + \sqrt{(y^3 + g^3)}$ supuesta $g^3 = -\frac{a}{c} + \frac{b^2}{4c^2}$, $dx = \frac{3y^2 dy}{2\sqrt{(y^3+g^3)}}$, $(a + bx + cx^2)^{\frac{m}{6}} = c^{\frac{m}{6}} \times y^{\frac{m}{2}}$: luego la diferencial propuesta se transformará en la (A)

$$\left(-\frac{b}{2c} + \sqrt{(y^3+g^3)}\right)^n \times \frac{3c^{\frac{m}{6}}\, y^{\frac{m+4}{2}}\, dy}{2\sqrt{(y^3+g^3)}};$$

y elevando el binomio á la potestad entera y positiva n, y haciendo la multiplicacion correspondiente, las diferenciales que resultan se integrarán por lo demostrado (391): luego se integrará del mismo modo la fórmula propuesta. Que es &c.

COROLARIO.

406. Si en la fórmula de la Proposicion antecedente es $b = 0$, la fórmula transformada A resultará igual á $\frac{3}{2} c^{\frac{m}{6}}\, y^{\frac{m+4}{4}}\, dy \times (y^3 - \frac{a}{c})^{\frac{n-1}{2}}$, cuya integral se tiene por lo demostrado (391), si el número n es par, positivo ó negativo; y siendo el número n impar, dicha integral se tendrá algébricamente, ó por las quadraturas del círculo y de la Hipérbola.

LIBRO TERCERO.

NOCIONES GENERALES.

407. Equaciones homogeneas se llaman las que tienen la misma suma de los exponentes de las variables en todos los términos. Dichas equaciones son de los grados primero, segundo, tercero, &c. si las dichas sumas son respectivamente uno, dos, tres, &c. como $(ax+by)\times dx+(cx+ey)\times dy=o$, $(ax^2+bxy+cy^2)\times dx+(ex^2+fxy+gy^2)\times dy=o$, $(ax^3+bx^2y+cxy^2+ey^3)\times dx+(fx^3+gx^2y+hxy^2+ky^3)\times dy=o$, &c.

408. Si las diferenciales é integrales de las cantidades dadas por las variables x, y, z, &c. se toman, de modo que en ellas se supongan, la x variable, y las demas constantes, se notarán dichas diferenciales é integrales con las letras d', D', S'; y si se suponen, la y variable y las demas constantes, se señalarán con las letras d'', D'', S''; y así sucesivamente.

PROPOSICION I.

409. Transformar qualquiera equacion homogenea de dos ó tres variables en otra que tenga una de sus variables separada de las demas.

Supóngase que la equacion $Xdx + Ydy = o$ es homogenea, y que en ella las cantidades X, Y están dadas por las variables x, y; y hecha la substitucion $y = \frac{xz}{a}$, es evidente que en todos los términos de la equacion transformada la variable x tendrá un mismo exponente, y por esta potestad de la x se podrá partir la misma equacion. Por tanto las cantidades X, Y se transformarán en otras M, N, que no contienen la x, de modo que será $Mdx + Ndy = o$; pero $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$: luego será $Mdx + \frac{Nxdz + Nzdx}{a} = o$, de donde resulta la equacion $-\frac{dx}{x} = \frac{Ndz}{aM + Nz}$, que contiene las variable x, z con separacion. Con el mismo método se hallará que, si una equacion homogenea contiene tres variables, como x, y, z, por medio de las substituciones $y = \frac{xu}{a}$, $z = \frac{xt}{a}$, se logrará separar una de las variables x de las otras dos u, t. Que es &c.

ESCOLIO.

410. Adviértase que el referido método del Sabio G. Manfredi se aplica con utilidad á las

equaciones homogeneas que contienen mayor número de variables. Asimismo adviértase que el mismo método es útil para separar las variables aun en aquellas equaciones que contienen términos irracionales, con tal que la suma de los exponentes en cada uno de ellos sea siempre la misma. En fin es de advertir que sucede algunas veces poderse transformar una equacion que no es homogenea en otra homogenea por medio de la substitucion $y = z^h$, en quien el exponente h es una cantidad constante que se ha de determinar: por exemplo, los dos términos $y^n x^m dx$, $y^q x^p dx$, que contienen la dx, se harán homogeneos por la substitucion $y = z^h$, si se supone $h = \frac{m-p}{q-n}$; y así los dos términos $y^n x^m dx$, $y^l x^r dy$ se harán homogeneos por dicha substitucion, si se supone $h = \frac{m-r+1}{l-n+1}$. Por tanto una equacion diferencial que contiene las dx, dy lineales, se podrá reducir á homogenea por la substitucion $y = z^h$, si hecha la comparacion del primer término de aquella con todos los demas resulta constante el valor de la h.

EXEMPLO I.

411. Sea la equacion homogenea $x^q dx = y^q dy - y^r x^{q-r} dx$.

Hágase $y = \frac{zx}{a}$; y por medio de esta substitucion se transformará la equacion propuesta en la $x^q dx = \frac{z^q x^q}{a^q} \times \frac{zdx + xdz}{a} - \frac{z^r x^r}{a^r} \times x^{q-r} dx$; y partiendo por x^q, se tendrá $dx = z^q \times \frac{zdx + xdz}{a^{q+1}} - \frac{z^r dx}{a^r}$, de donde resulta ser $-\frac{z^q x dz}{a^{q+1}} = \left(\frac{z^{q+1}}{a^{q+1}} - \frac{z^r}{a^r} - 1\right) \times dx$; por consiguiente será $\frac{dx}{x} = -\frac{z^q dz}{a^{q+1}} : \left(\frac{z^{q+1}}{a^{q+1}} - \frac{z^r}{a^r} - 1\right)$, equacion que tiene sus variables separadas.

EXEMPLO II.

412. Sea la equacion homogenea $axdx + by^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx + cxdy = o$.

Hágase $y = \frac{zx}{a}$; y por medio de esta substitucion se transformará la equacion propuesta en la $axdx + \frac{bz^{\frac{1}{2}} x dx}{\sqrt{a}} + cx \times \frac{zdx + xdz}{a} = o$, y partiendo por x, será $adx + \frac{bz^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{a}} + c \times \frac{zdx + xdz}{a} = o$, y $\left(a + \frac{bz^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}} + \frac{cz}{a}\right) \times dx = -\frac{cxdz}{a}$; por consiguiente se tendrá $\frac{dx}{x} = -\frac{cdz}{a} : \left(\frac{cz}{a} + \frac{bz^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}} + a\right)$, equacion que tiene sus variables separadas.

EXEMPLO III.

413. Se pide hallar, si la equacion $y^2x^3dx + y^5x^2dx + y^4x^3dy = o$ se puede transformar en otra que sea homogenea.

Compárese el término primero de la equacion propuesta con el segundo, y se tendrá $h = \frac{3-2}{5-2} = \frac{1}{3}$; asimismo comparando el término primero con el tercero, será $h = \frac{3-3+1}{4-2+1} = \frac{1}{3}$: luego por medio de la substitucion $y = z^h = z^{\frac{1}{3}}$, se reducirá la equacion propuesta á homogenea, de modo que la equacion que se busca será $z^{\frac{2}{3}}x^3dx + z^{\frac{5}{3}}x^2dx + z^{\frac{4}{3}}x^3 \times \frac{1}{3}z^{-\frac{2}{3}}dz = o$.

EXEMPLO IV.

414. Sea la equacion homogenea $aydz + bxdy + czdx = o$, que contiene las tres variables x, y, z.

Háganse las substituciones $y = \frac{xu}{a}$, $z = \frac{xt}{a}$; y por medio de ellas se transformará la equacion propuesta en la $\frac{axudz}{a} + bxdy + \frac{cxtdx}{a} = o$: luego partiendo esta equacion por x, y multiplicándola por a, se tendrá $audz + bady + ctdx = o$; pero $dy = \frac{xdu + udx}{a}$, $dz = \frac{xdt + tdx}{a}$: luego será $u \times (xdt + tdx) + b \times (xdu + udx) + ctdx = o$, de donde resulta $-\frac{dx}{x} = \frac{udt + bdu}{ut + bu + ct}$, equacion que tiene la variable x separada de las otras dos u, t.

PROPOSICION II.

415. Transformar la equacion $(a + bxy + cx^2y^2 + \&c.) \times dx + (fx^2 + gx^3y + hx^4y^2 + \&c.) \times dy = o$ en otra homogenea.

Hágase $y = z^{-1}$; y por medio de esta substitucion se transformará la diferencial propuesta en la $(a + bxz^{-1} + cx^2z^{-2} + \&c.) \times dx + (fx^2 + gx^3z^{-1} + hx^4z^{-2} + \&c.) \times - z^{-2}dz = o$; y multiplicando por z^{-2}, se tendrá la equacion homogenea $(a + bxz^{-1} + cx^2z^{-2} + \&c.) \times dx + (fx^2z^{-2} + gx^3z^{-3} + hx^4z^{-4} + \&c.) \times - dz = o$. Que es &c.

PROPOSICION III.

416. Hallar la integral del trinomio diferencial $axdy + hydx + fxdx = o$.

1°. Si es $a = h$, el trinomio propuesto será igual á $a \times (xdy + ydx) + fxdx = o$, cuya integral (70, 71) es $a \times xy + \frac{1}{2} fx^2 = A$ constante. Y si es $a = -h$, dicho trinomio será igual á $a \times (x\,dy - y\,dx) = -fx\,dx$; y partiendo ambos miembros por x^2, se tendrá $a \times \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = -\frac{f\,dx}{x}$: luego integrando (74, 87) será $\frac{ay}{x} = -f \times L.x$.

2°. Si las cantidades a y h son desiguales, multiplíquese el trinomio propuesto por x^q, en quien q es cantidad constante que se ha de determinar; y se tendrá $ax^{q+1}dy + hyx^q dx + fx^{q+1}dx = o$. Supóngase ahora que $gx^{q+1}y$ es la integral de los dos primeros términos; y diferenciando la dicha suposicion, será la expresion $gx^{q+1}dy + g \times (q+1) \times yx^q dx$ idéntica á la $ax^{q+1}dy + hyx^q dx$, lo qual sucede si se suponen las cantidades $g = a$, $g \times (q+1) = h$, de donde resulta $q = \frac{h}{a} - 1$. Por tanto será $x^{\frac{h}{a}-1}$ el factor, por cuyo medio se logra la integral del trinomio propuesto, de suerte que ésta será igual á $ax^{\frac{h}{a}}y + \frac{af}{h+a} \times x^{\frac{h}{a}+1} = A$ constante. Que es &c.

COROLARIO I.

417. Si el trinomio propuesto es $ax\,dy + hy\,dx$

$+ f y\,dy = o$, se hallará con el mismo método que $y^{\frac{a}{h}-1}$ es el factor correspondiente para lograr la integral de dicho trinomio, cuya integral es igual á $h y^{\frac{a}{h}} x + \frac{fh}{a+h} \times y^{\frac{a+h}{h}} = A$ constante.

COROLARIO II.

418. Asimismo si se multiplica el trinomio diferencial $a x\,dy + h y\,dx + f x^r dx = o$ por $x^{\frac{h}{a}-1}$, será tambien $a x^{\frac{h}{a}} dy + h x^{\frac{h}{a}-1} y\,dx + f x^{\frac{h}{a}-1+r} dx = o$, cuya integral es $a x^{\frac{h}{a}} y + \frac{af}{h+ar} \times x^{\frac{h+ar}{a}} = A$ constante. Finalmente si se multiplica el trinomio diferencial $a x\,dy + h y\,dx + f y^r dy = o$ por $y^{\frac{a}{h}-1}$, se hallará que su integral es $h y^{\frac{a}{h}} x + \frac{fh}{a+hr} \times y^{\frac{a+hr}{h}} = A$ constante.

ESCOLIO.

419. El referido método de multiplicar las diferenciales propuestas por un factor variable es utilísimo para lograr las integrales de las mismas

diferenciales; pero sucede las mas veces que no se pueden dar reglas acerca de la forma que han de tener los tales factores respecto á las equaciones diferenciales de fórmulas generales, aunque éstas puedan tener uno ó mas factores para el efecto de su integracion. El exercicio y la industria contribuirán á la invencion de los factores que se necesitan para los casos particulares.

PROPOSICION IV.

420. Hallar la integral del trinomio diferencial $aydy + hydx + gxdx = o$.

Supóngase $y = \frac{xz}{a}$; y la diferencial propuesta se transformará en la $zx \times \frac{zdx + xdz}{a} + h \times \frac{xzdx}{a} + gxdx = o$, que se reduce á la $-\frac{dx}{x} = \frac{zdz}{z^2 + hz + ag}$, equacion que tiene sus variables separadas, y que se integra por lo demostrado (87, 336). Que es &c.

PROPOSICION V.

421. Hallar la integral de la equacion homogenea del primer grado $(ax + by) \times dx + (cx + ey) \times dy = o$.

Método 1°.

Hágase $x = \frac{yz}{a}$; y por medio de las correspondientes substituciones en la diferencial propuesta se tendrá la equacion $(yz + by) \times \frac{ydz + zdy}{a} + \left(\frac{cyz}{a} + ey\right) \times dy = o$, de donde resulta $(az + ab) \times (ydz + zdy) + (caz + ea^2) \times dy = o$, ó bien $(z + b) \times ydz + (z^2 + (b + c) \times z + ae) \times dy = o$: luego será $-\frac{dy}{y} = \frac{zdz + bdz}{z^2 + (b+c) \times z + ae}$, equacion que tiene sus variables separadas, y que se integra por los métodos dados (87, 338, 342).

Método 2°.

Supóngase que la integral de la diferencial propuesta es $(x + Ay)^m \times (x + By)^n = M$, en quien las A, B, m, n son cantidades constantes que se han de determinar, y M expresa la constante que se debe añadir á toda integral: luego será $m \times L.(x + Ay) + n \times L.(x + By) = L.M$; y diferenciando se tendrá $\frac{mdx + mAdy}{x + Ay} + \frac{ndx + nBdy}{x + By} = o$; y reduciendo á una comun denominacion, será $((m+n) \times x + (mB + nA) \times y) \times dx + ((mA + nB) \times x + (m+n) \times ABy) \times dy = o$.

Compárense ahora los términos de esta equacion con los correspondientes en la propuesta; y se tendrán las equaciones $m+n=a$, $mB+nA=b$, $mA+nB=c$, $(m+n)\times AB=e$; de donde resulta ser $A=\frac{b+c+r}{2a}$, $B=\frac{b+c-r}{2a}$, $m=\frac{-ab+ac+ar}{2r}$, $n=\frac{ab-ac+ar}{2r}$, llamada $r=\sqrt{((b+c)^2-4ae)}$. Por tanto si en la equacion $(x+Ay)^m\times(x+By)^n=M$ se substituyen los valores hallados de las cantidades A, B, m, n, se tendrá la integral de la equacion homogenea del primer grado $(ax+by)\times dx+(cx+ey)\times dy=0$.

Adviértase que si es $(b+c)^2=4ae$, será $r=0$, y en conseqüencia $A=B=\frac{b+c}{2a}$: luego en dicho caso la integral que se busca será $M=(x+Ay)^m\times(x+By)^n=(x+Ay)^{m+n}=(x+\frac{b+c}{2a}\times y)^a$.

Asimismo adviértase que si es $(b+c)^2<4ae$, será imaginario el valor de la r, y en conseqüencia él de las cantidades A, B, m, n. En este caso para facilitar el cálculo llámense $f=\frac{b+c}{2a}$, $q=\frac{\sqrt{(4ae-(b+c)^2)}}{2a}$, $p=\frac{-b+c}{2}$; y será $M=$

$$(x+fy+qy\sqrt{-1})^{\frac{p}{2q\sqrt{-1}}+\frac{a}{2}}\times(x+fy-qy\sqrt{-1})^{\frac{-p}{2q\sqrt{-1}}+\frac{a}{2}}$$

$$=(x+fy+qy\sqrt{-1})^{\frac{a}{2}}\times\left(\frac{x}{y}+f+q\sqrt{-1}\right)^{\frac{p}{2q\sqrt{-1}}}\times$$

$$(x+fy-qy\sqrt{-1})^{\frac{a}{2}}\times\left(\frac{x}{y}+f-q\sqrt{-1}\right)^{-\frac{p}{2q\sqrt{-1}}}=$$

$$\left((x+fy)^2+q^2y^2\right)^{\frac{a}{2}}\times\left(\frac{x}{y}+f+q\sqrt{-1}\right)^{\frac{p}{2q\sqrt{-1}}}\times$$

$\left(\frac{x}{y}+f\text{-}q\sqrt{\text{-}1}\right)^{-\frac{p}{2q\sqrt{-1}}}$. Hágase $\left(\frac{x}{y}+f\text{-}q\sqrt{\text{-}1}\right)^{-\frac{p}{2q\sqrt{-1}}}\times$ $\left(\frac{x}{y}+f+q\sqrt{-1}\right)^{\frac{p}{2q\sqrt{-1}}}=Y$; y para facilitar el cálculo supóngase $\frac{x}{y}+f=z$: luego se tendrá $-\frac{p}{2q\sqrt{-1}}\times L.(z-q\sqrt{-1})+\frac{p}{2q\sqrt{-1}}\times L.(z+q\sqrt{-1})$ $=L.Y$; y diferenciando será $\frac{dY}{Y}=-\frac{p}{2q\sqrt{-1}}\times$ $\times\frac{dz}{z-q\sqrt{-1}}+\frac{p}{2q\sqrt{-1}}\times\frac{dz}{z+q\sqrt{-1}}=-\frac{pdz}{z^2+q^2}$: luego integrando será $L.Y=-\frac{p}{q^2}\times u$, siendo u un arco del círculo, que tiene el radio q, y la tangente z; por consiguiente $Y=e^{-\frac{pu}{q^2}}$, en quien es $L.e=1$. Por tanto si es $(b+c)^2<4ae$, la integral de la equacion homogenea propuesta será $\left((x+fy)^2+q^2y^2\right)^{\frac{a}{2}}\times$ $e^{-\frac{pu}{q^2}}$. Que es &c.

ESCOLIO.

422. El referido método segundo del Sabio J. Bernoulli se aplica con utilidad á las demas equaciones homogeneas, como se verá en lo sucesivo. Entre tanto obsérvese el modo de determinar los valores de las cantidades constantes A, B, m, n por medio de las referidas quatro equaciones,

1ª. $m+n=a$, 3ª. $mA+nB=c$,

2ª. $mB+nA=b$, 4ª. $(m+n)\times AB=e$;

es á saber, si se suma la segunda equacion con la tercera, se tendrá $m\times(A+B)+n\times(A+B)=b+c$; pero $m+n=a$ por la primera: luego será $A+B=\frac{b+c}{a}$: asimismo si se parte la equacion quarta por la primera, será $AB=\frac{e}{a}$. Por tanto quedan demostradas las dos equaciones $A+B=\frac{b+c}{a}$, $AB=\frac{e}{a}$: luego si se forma la equacion $t^2-\frac{b+c}{a}\times t+\frac{e}{a}=o$, sus dos raices darán los valores de las cantidades A, B; y determinadas éstas, fácilmente se hallarán los valores de los exponentes m, n por las equaciones primera y segunda.

PROPOSICION VI.

423. Hallar la integral de la equacion $(ax+b+cy)\times dy+(fx+g+hy)\times dx=o$.

Método 1°.

1°. Si es $a=h$, la diferencial propuesta se reducirá á $a\times(ydx+xdy)+fxdx+gdx+bdy+cydy=o$; é integrando se tendrá $a\times yx+\frac{1}{2}fx^2+gx+by+\frac{1}{2}cy^2=A$ constante, equacion general á las Secciones Cónicas.

2°. Si es $fc=ah$, hágase $y=z+Bx$, en quien B es cantidad constante que se ha de determinar; y por medio de dicha substitucion se transformará la diferencial propuesta en la (A)

$$\left\{\begin{matrix} ax+b+cz \\ +cBx \end{matrix}\right\}\times(dz+Bdx)+\left\{\begin{matrix} fx+g+hz \\ +hBx \end{matrix}\right\}\times dx=o;$$

pero $fc=ah$, y $\frac{f}{h}=\frac{a}{c}$: luego si se supone $B=-\frac{f}{h}=-\frac{a}{c}$, la equacion A se reducirá á $(b+cz)\times(dz-\frac{adx}{c})+(g+hz)\times dx=o$, de donde resulta $dx=\frac{(b+cz)\times dz}{(a-h)\times z+\frac{ab}{c}-g}$, cuya integral se tiene por lo demostrado (329).

3°. Si es $fb=ag$, hágase $fx+g+hy=zy$; y se tendrán las equaciones, $x=\frac{zy-hy-g}{f}$, $dx=\frac{zdy+ydz-hdy}{f}$, $ax+b+cy=\frac{azy-ahy-ag}{f}+b+cy$ $=\frac{azy-ahy+fcy}{f}$: luego por medio de estas substituciones, la equacion propuesta se transformará en la $\frac{(azy-ahy+cfy)}{f}\times dy+zy\times\frac{zdy+ydz-hdy}{f}=0$, de donde resulta $(az-ah+cf)\times dy+z^2dy$ $+zydz-hzdy=0$, y por consiguiente $-\frac{dy}{y}=\frac{zdz}{z^2+(a-h)\times z-ah+cf}$, cuya integral se tiene por lo demostrado (87, 336).

4°. Si es $cg=bh$, hágase $ax+b+cy=xz$; y se tendrán las equaciones, $y=\frac{xz-ax-b}{c}$, $dy=\frac{xdz+zdx-adx}{c}$: luego por medio de estas substituciones la fórmula propuesta quedará reducida á $xz\times\frac{xdz+zdx-adx}{c}+(fx+g+\frac{hxz-ahx-bh}{c})\times dx=0$: de donde resulta la equacion siguiente
$z\times(xdz+zdx-adx)+(fc+hz-ah)\times dx=0$; por consiguiente $-\frac{dx}{x}=\frac{zdz}{z^2+(h-a)\times z+fc-ah}$, cuya

integral se tiene por lo demostrado (87, 336).

5°. En los demas casos háganse las substituciones $x=z+A$, $y=u+B$; y por medio de ellas se transformará la diferencial propuesta en la (A)

$$\left\{\begin{matrix} az+aA+cu \\ +b \\ +cB \end{matrix}\right\}\times du+\left\{\begin{matrix} fz+fA+hu \\ +g \\ +hB \end{matrix}\right\}\times dz=o;$$

y por ser A y B cantidades constantes que se han de determinar, se podrá suponer $aA+b+cB=o$, $fA+g+hB=o$, de donde $A=\frac{cg-bh}{ah-fc}$, $B=\frac{ag-fb}{fc-ah}$: luego suponiendo estos valores, la fórmula transformada A quedará reducida á $(az+cu)\times du+(fz+hu)\times dz=o$, equacion homogenea, cuya integral se ha determinado (421).

Método 2°.

Supóngase que la integral que se busca es $(x+B+Cy)^m\times(x+G+Hy)^n=M$, en quien las cantidades B, C, G, H, m, n son constantes que se han de determinar: luego será $m\times L.(x+B+Cy)+n\times L.(x+G+Hy)=L.M$; y diferenciando esta expresion, se tendrá $m\times\frac{dx+Cdy}{x+B+Cy}+n\times\frac{dx+Hdy}{x+G+Hy}=o$, de donde resulta la equacion siguiente,

$$((mC+nH)\times x+mCG+(m+n)\times CHy)\times dy+((m+n)\times x+mG+(mH+nC)\times y)\times dx=o.$$
$$+nBH \qquad\qquad\qquad\qquad +nB$$

Compárense ahora los términos de esta equacion con los correspondientes en la propuesta; y se tendrán las equaciones,

1ª. $mC+nH=a$ 4ª. $m+n=f$
2ª. $mCG+nHB=b$ 5ª. $mG+nB=g$
3ª. $(m+n)\times CH=c$ 6ª. $mH+nC=h$,

y por medio de estas equaciones se hallará ser,

$H=\frac{r-q}{2f}$, $C=\frac{r+q}{2f}$, $m=\frac{f}{2}-\frac{fh-af}{2q}$,

$n=\frac{f}{2}-\frac{af-fh}{2q}$, $B=\frac{2bf-gr-gq}{f\times(a-h-q)}$,

en fin $G=\frac{2bf-gr+gq}{f\times(q-h+a)}$, en quienes son $r=a+h$, $q=\sqrt{((a+h)^2-4cf)}$ para facilitar el cálculo. Por tanto si se substituyen los valores hallados de B, C, G, H, m, n en la referida fórmula $(x+B+Cy)^m\times(x+G+Hy)^n=M$, se tendrá la integral de la equacion diferencial propuesta. Adviértase que si es $(a+h)^2=4fc$, será $q=o$, y en conseqüencia $B=G=\frac{2bf-gr}{fa-fh}$, $C=H=\frac{r}{2f}$: luego en dicha suposicion la integral de la fórmula propuesta será $M=(x+B+Cy)^m\times(x+G+Hy)^n=$ $(x+B+Cy)^{m+n}=(x+\frac{2bf-gr}{fa-fh}+\frac{r}{2f}\times y)^f$. Asimismo adviértase que si es $(a+h)^2 < 4fc$, será imaginario el valor de q; y en este caso se hará uso del método expuesto en la Proposicion antecedente, para determinar la integral de la fórmula diferencial propuesta. Que es &c.

ESCOLIO.

424. El método que se ha seguido para determinar los valores de las cantidades H, C, &c. por medio de las referidas seis equaciones, es el siguiente; es á saber, si se suma la primera equacion con la sexta, se tendrá $m \times (C+H) + n \times (C+H) = a+h$; pero $m+n=f$ por la quarta: luego será $C+H=\frac{a+h}{f}$: asimismo si se parte la tercera equacion por la quarta, se tendrá $CH=\frac{c}{f}$: luego si se forma la equacion $t^2 - \frac{a+h}{f} \times t + \frac{c}{f} = o$, sus dos raices darán los valores de las cantidades H, C; y determinadas éstas, se hallarán los valores de los exponentes m, n por las equaciones primera y quarta; y sucesivamente los de B, G por las equaciones segunda y quinta.

PROPOSICION VII.

425. Hallar la integral de la equacion homogenea del segundo grado $(fx^2+gxy+hy^2)\times dx=(ax^2+bxy+cy^2)\times dy$, como tambien de las de superior grado, que no tienen términos irracionales.

Método 1°.

Supóngase que la integral de la equacion diferencial propuesta es $(x+Ay)^m\times(x+By)^n\times(x+Cy)^p=M$, en quien A, B, C, m, n, p son constantes que se han de determinar; y diferenciando dicha integral se tendrá

$$m\times\frac{dx+Ady}{x+Ay}+n\times\frac{dx+Bdy}{x+By}+p\times\frac{dx+Cdy}{x+Cy}=o,$$

de donde resulta

$$\left\{\begin{array}{c} mx^2+mBxy+mBCy^2 \\ +nx^2+mCxy+nACy^2 \\ +px^2+nAxy+pABy^2 \\ +nCxy \\ +pAxy \\ +pBxy \end{array}\right\}\times dx+\left\{\begin{array}{c} mAx^2+mABxy+mABCy^2 \\ +nBx^2+mACxy+nABCy^2 \\ +pCx^2+nABxy+pABCy^2 \\ +nBCxy \\ +pACxy \\ +pBCxy \end{array}\right\}\times dy=o,$$

equacion idéntica á la propuesta. Compárense los correspondientes términos de dichas dos equaciones, y se tendrán las siguientes igualaciones; es á saber, 1ª. $m+n+p=f$,

2ª. $mB+mC+nA+nC+pA+pB=g$,

3ª. $mBC+nAC+pAB=h$,

4ª. $mA+nB+pC=-a$,

5ª. $mAB+mAC+nAB+nBC+pAC+pBC=-b$,

6ª. $(m+n+p)\times ABC=-c$.

Si se suma la segunda equacion con la quarta, se tendrá $m\times(A+B+C)+n\times(A+B+C)+p\times(A+B+C)=g-a$; pero $m+n+p=f$ por la primera: luego será $A+B+C=\frac{g-a}{f}$; asimismo si se suma la referida tercera equacion con la quinta, se tendrá $m\times(AB+AC+BC)+n\times(AB+BC+AC)+p\times(CA+BC+AB)=h-b$: luego será $AB+BC+AC=\frac{h-b}{f}$: y finalmente si se parte la sexta equacion por la primera, será $ABC=-\frac{c}{f}$. Por tanto se ha demostrado ser $A+B+C=\frac{g-a}{f}$, $AB+BC+AC=\frac{h-b}{f}$, y $ABC=-\frac{c}{f}$: luego si se forma la equacion $t^3-\frac{g-a}{f}\times t^2+\frac{h-b}{f}\times t+\frac{c}{f}=0$, sus tres raices darán los valores de las cantidades A, B, C; y determinadas éstas, se hallarán los valores de los exponentes m, n, p por las equaciones primera, tercera y quarta. Si la equacion homogenea es del tercer grado, se supondrá su integral $(x+Ay)^m \times (x+By)^n \times (x+Cy)^p \times (x+Ey)^q = M$, de modo que siempre el número de los factores binomios exceda en una unidad al grado de la equacion propuesta; y con el mismo método anteriormente expuesto se hallará la equacion del quarto grado, cuyas raices son los valores de las constantes A, B, C, E; y determinadas éstas, se hallarán fácilmente los valores de los exponentes m, n, p, q. Argúyase del mismo modo respecto á las equaciones homogeneas de superior grado.

Método 2°.

Divídase la equacion propuesta en las dos siguientes, en quienes t es cantidad variable; es á saber,

$$dx+(ax^2+bxy+cy^2)\times dt=o,$$
$$dy+(fx^2+gxy+hy^2)\times dt=o;$$

multiplíquense la primera de estas por m, y la segunda por n, siendo m y n cantidades constantes que se han de determinar, y despues añádase la primera á la segunda: por lo que resulta la equacion (A)

$$mdx+ndy+((ma+nf)\times x^2+(mb+ng)\times xy+(mc+nh)\times y^2)\times dt=o.$$

Es evidente que se tendrá la integral de esta fórmula, si se supone la cantidad $(ma+nf)\times x^2$ $+(mb+ng)\times xy+(mc+nh)\times y^2$ multíplice del quadrado de la $mx+ny$; para cuyo efecto se deben establecer las equaciones (B) $ma+nf=m^2R$, $mb+ng=2mnR$, $mc+nh=n^2R$: luego la fórmula A se transformará en la $Rdt=-\frac{mdx+ndy}{(mx+ny)^2}$, cuya integral es $Rt=\frac{1}{M}+\frac{1}{mx+ny}$, en quien $\frac{1}{M}$ es la constante añadida á la integral; y será $\frac{1}{M}=-\frac{1}{mk+nl}$, si suponiendo $t=o$, las cantidades x, y son respectivamente iguales á las k, l. Por tanto será (C) $Rt=\frac{1}{mx+ny}-\frac{1}{mk+nl}$. Ahora para determinar los valores de las cantidades m y n, es de advertir que de las tres equaciones B supuestas anteriormente resultan las dos siguientes, esto es,

1ª. $\frac{ma+nf}{m}=\frac{mb+ng}{2n}$, ó bien $bm^2+(g-2a)\times mn-2fn^2=o$; de donde resulta ser $n=\frac{g-2a}{4f}\times m\pm m\sqrt{\left(\left(\frac{2a-g}{4f}\right)^2+\frac{b}{2f}\right)}$, si se señala un valor á la m; y si se da á la n, será $m=\frac{2a-g}{2b}\times n\pm n\times\sqrt{\left(\left(\frac{g-2a}{2b}\right)^2+\frac{2f}{b}\right)}$.

2ª. $\frac{mb+ng}{2m}=\frac{mc+nh}{n}$, ó bien $2cm^2+(2h-b)\times mn-gn^2=o$; de donde resulta ser $n=\frac{2h-b}{2g}\times m\pm m\sqrt{\left((\frac{b-2h}{2g})^2+\frac{2c}{g}\right)}$, si se señala el valor á la m; y si se da á la n, será $m=\frac{b-2h}{4c}\times n\pm n\sqrt{\left((\frac{2h-b}{4c})^2+\frac{g}{2c}\right)}$. Y si de la primera equacion multiplicada por $2c$ se resta la segunda multiplicada por b, se tendrá la

3ª. $(2cg-4ca-2bh+b^2)\times mn+(bg-4cf)\times n^2=o$, ó bien $pm+qn=o$, si se llaman p, q los respectivos coeficientes para abreviar el cálculo: luego multiplicando la tercera equacion por bm, y la primera por p, y restando despues esta de aquella, resultará la equacion

4ª. $(-gp+2ap+bq)\times mn+2fpn^2=o$, ó bien $rm+2fpn=o$: y si de la equacion tercera multiplicada por r se resta la quarta multiplicada por p, se tendrá la equacion $(gr-2fp^2)\times n=o$, de donde $qr=2fp^2$; por consiguiente deberá subsistir esta igualacion entre los coeficientes de la equacion propuesta, para que se le pueda aplicar el método expuesto: y si subsistiendo dicha igualacion, se señala un valor constante á la m, por exemplo, en la primera ó en la segunda equacion, tendrá n dos valores que denoto con n y n', y en conseqüencia R tendrá tambien dos valores que expreso por R y R'. Por tanto de la equacion C resultarán las dos siguientes,

$$Rt=\frac{1}{mx+ny}-\frac{1}{mk+nl}, \text{ó bien } mx+ny=\frac{mk+nl}{Rt\times(mk+nl)+1},$$

$$R't=\frac{1}{mx+n'y}-\frac{1}{mk+n'l}, \text{ó bien } mx+n'y=\frac{mk+n'l}{R't\times(mk+n'l)+1};$$

ahora si se resta la segunda equacion de la primera, se hallará y dada por t; y si la segunda multiplicada por n se resta de la primera multiplicada por n', se hallará x dada por t: es á saber,

$$(n-n')\times y=\frac{mk+nl}{Rt\times(mk+nl)+1}-\frac{mk+n'l}{R't\times(mk+n'l)+1},$$

$$(mn'-mn)\times x=n'\times\frac{mk+nl}{Rt\times(mk+nl)+1}-n\times\frac{mk+n'l}{R't\times(mk+n'l)+1}.$$

Si es $n=n'$, lo que sucede quando sea $\sqrt{\left(\left(\frac{2a-g}{4f}\right)^2+\frac{b}{2f}\right)}=o$, faltan las dos equaciones anteriores; en este caso supóngase $\sqrt{\left(\left(\frac{2a-g}{4f}\right)^2+\frac{b}{2f}\right)}=du$, y se tendrá $n=\frac{g-2a}{4f}\times m+mdu$, $n'=\frac{g-2a}{4f}\times m-mdu$: luego serán, $n-n'=2mdu$, $mk+nl=i+mldu$, $mk+n'l=i-mldu$, si se llama $i=mk+\frac{gl-2al}{4f}\times m$

para facilitar el cálculo, $R=j+\frac{fdu}{m}$, $R'=j-\frac{fdu}{m}$, si se llama $j=\frac{a+\frac{1}{4}(g-2a)}{m}$; y haciendo estas substituciones y las operaciones correspondientes en las dos equaciones anteriores, se hallarán los valores de y, x dados por t.

Con el mismo método se hallarán las integrales de las equaciones homogeneas de los grados tercero, quarto; &c. pero en estos casos se necesitan dos ó mas igualaciones entre los coeficientes de dichas equaciones, para que se puedan hallar sus integrales por el método expuesto. Que es &c.

ESCOLIO.

246. Respecto al referido método segundo es de advertir que para evitar coeficientes y exponentes infinitos, ó iguales á la fraccion $\frac{0}{0}$, será útil considerar la n dada, y hallar los dos valores de la m por n. En general adviértase

1°. que las equaciones que resultan satisfacen siempre á las integrales de las diferenciales propuestas; pero puede suceder que por otros métodos se determinen equaciones mas generales, de modo que éstas sean las integrales completas de las mismas diferenciales:

2°. que si las referidas equaciones integrales contienen cantidades imaginarias, no se puede argüir que es imposible hallar las integrales de las diferenciales propuestas: pues sucede que por otros métodos se descubran equaciones reales.

PROPOSICION VIII.

427. Hallar la integral del trinomio $aMdx + bNy^{n+1}dx + gy^n dy = o$, en quien las cantidades a, b, g, n pueden ser positivas ó negativas, y las M y N están dadas por x.

Método 1°.

1°. Si en el trinomio propuesto es $n = -1$, se tendrá $aMdx + bNdx = -\frac{gdy}{y}$, cuya integral es $a \times S.Mdx + b \times S.Ndx = -g \times L.y$.

2°. Si es $M = N$ en el trinomio propuesto, se tendrá la equacion $Mdx \times (a + by^{n+1}) = -gy^n dy$; y partiendo ambos miembros por $a + by^{n+1}$, será $Mdx = -\frac{gy^n dy}{a+by^{n+1}} = -\frac{g}{b\times(n+1)} \times \frac{y^n dy}{a+by^{n+1}}$: luego integrando se tendrá $S.Mdx = -\frac{g}{b\times(n+1)} \times L.(a+by^{n+1})$.

3°. Si las cantidades M y N son desiguales, multiplíquese el trinomio propuesto por la cantidad P que se supone dada por x; y se tendrá la equacion $aMPdx+bNPy^{n+1}dx+gPy^{n}dy=o$. Ahora supóngase que la integral de los dos últimos términos es $(B)\ APy^{n+1}$, en quien A es cantidad constante que se ha de determinar; y compárese la diferencial de la fórmula B, esto es, $A\times(n+1)\times Py^{n}dy+A\times y^{n+1}dP$ con los referidos términos: luego serán, $A=\frac{g}{n+1}$, $AdP=bNPdx$, de donde resulta $\frac{dP}{P}=\frac{bNdx}{A}=\frac{b\times(n+1)}{g}\times Ndx$, cuya integral es $L.P=\frac{b\times(n+1)}{g}\times S.Ndx=\frac{b\times(n+1)}{g}\times L.e\times S.Ndx$, suponiendo $L.e=1$; por consiguiente será $P=e^{\frac{b\times(n+1)\times S.Ndx}{g}}$; pero la integral del trinomio propuesto, ó bien de $aMPdx+bNPy^{n+1}dx+gPy^{n}dy=o$ es $a\times S.MPdx+APy^{n+1}=o$, de donde $y^{n+1}=-\frac{a\times S.MPdx}{AP}$: luego substituyendo en esta expresion los valores hallados de A, P, se tendrá el valor de y^{n+1} por la integral de la funcion de la otra variable x.

Método 2º.

Supóngase $y=zt$; y por medio de esta substitucion se transformará el trinomio propuesto en (A) $aMdx + bNz^{n+1}t^{n+1}dx + gz^{n+1}t^{n}dt + gz^{n}t^{n+1}dz = o$. Ahora por ser las cantidades z, t indeterminadas, se podrá suponer $bNz^{n+1}t^{n+1}dx + gz^{n}t^{n+1}dz = o$, de donde resulta la equacion $-\frac{bNdx}{g} = \frac{dz}{z}$; é integrando será $L.z = -\frac{S.bNdx}{g} = -\frac{S.bNdx}{g} \times L.e$, ó bien (B) $z = e^{\frac{-S.bNdx}{g}}$. Y si de la equacion A se restan los dos términos que se han supuesto iguales á cero, se tendrá $aMdx + gz^{n+1}t^{n}dt = o$, de donde resulta ser $-\frac{a}{g} \times Mz^{-n-1}dx = t^{n}dt$; é integrando esta expresion será $-\frac{a}{g} \times S.Mz^{-n-1}dx = \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{y^{n+1}}{(n+1) \times z^{n+1}}$, ó bien $y^{n+1} = -\frac{a \times (n+1)}{g} \times z^{n+1} \times S.Mz^{-n-1}dx$, en quien se ha de substituir el valor de z dado por x en la equacion anterior B: luego &c.

Método 3°.

El trinomio propuesto dispóngase de esta suerte $aMdx + y^{n+1} \times (bNdx + \frac{gdy}{y}) = o$, y hágase (A) $bNdx = \frac{gdz}{z}$: luego dicho trinomio se transformará en $(B)\, aMdx + gy^{n+1} \times (\frac{dz}{z} + \frac{dy}{y})$. Hágase ahora $\frac{dz}{z} + \frac{dy}{y} = \frac{dt}{t}$, de donde $zy = t$; y por medio de estas substituciones la equacion B se transformará en $aMdx + \frac{g \times t^{n+1}}{z^{n+1}} \times \frac{dt}{t} = o$; por consiguiente será $-\frac{aMz^{n+1}dx}{g} = t^n dt$, é integrando se tendrá $-\frac{a \times (n+1)}{g} \times S.Mz^{n+1}dx = t^{n+1} = z^{n+1} \times y^{n+1}$, en cuya expresion se debe substituir el valor de z dado por x que se hallará por la fórmula A: luego &c.

COROLARIO I.

428. Es evidente que el trinomio $aMy^r dx + bNy^{m+1}dx + gy^m dy = o$ se reduce á él de la Proposicion antecedente: pues si se parte por y^r, se tendrá $aMdx + bNy^{m+1-r}dx + gy^{m-r}dy = o$. Dígase lo mismo respecto al trinomio $aMy^r dx + bNy^{m+1}dx + gPy^m dy = o$, en quien la cantidad P está dada por x, porque partiéndole por Py^r, será $\frac{aMdx}{P} + \frac{bNy^{m+1-r}dx}{P} + gy^{m-r}dy = o$.

COROLARIO II.

429. Por tanto en el trinomio general $aMdx + bNy^q dx + gy^p dy = o$ se separarán las variables en los tres casos, es á saber, 1°. $q = o$ y $p = -1$; 2°. $M = N$; 3°. $q = p + 1$.

ESCOLIO.

430. Adviértase que el método segundo del Sabio J. Bernoulli es útil en aquellas equaciones, que se pueden acomodar á la forma del trinomio de la Proposicion antecedente; y que el método tercero que su Autor el docto Conde S. Riccati llama de la demediada separacion, tiene mucho uso para la separacion de las variables en las equaciones diferenciales.

PROPOSICION IX.

431. Hallar las integrales de las equaciones

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz + \&c. + (ex + fy + gz + \&c.) \times dt + T\,dt = o,$$
$$a'dx + b'dy + c'dz + \&c. + (e'x + f'y + g'z + \&c.) \times dt + T'dt = o,$$
$$a''dx + b''dy + c''dz + \&c. + (e''x + f''y + g''z + \&c.) \times dt + T''dt = o,$$

si se supone el número de ellas igual á él de las variables x, y, z, &c.

Multiplíquense las equaciones propuestas respectivamente por las m, m', m'', &c. que son can-

tidades constantes que se han de determinar; y despues súmense todas: con lo que se tendrá la equacion (A) $(ma + m'a' + m''a'' + \&c.) \times dx$
$+ (mb + m'b' + m''b'' + \&c.) \times dy$
$+ (mc + m'c' + m''c'' + \&c.) \times dz + \&c.$
$+ ((me + m'e' + \&c.) \times x + (mf + m'f' + m''f'' + \&c.) \times y$
$+ (mg + m'g' + m''g'' + \&c.) \times z + \&c.) \times dt$
$+ (mT + m'T' + m''T'' + \&c.) \times dt = o$. Ahora si se suponen las equaciones (B)
$me + m'e' + m''e'' + \&c. = R \times (ma + m'a' + m''a'' + \&c.)$,
$mf + m'f' + m''f'' + \&c. = R \times (mb + m'b' + m''b'' + \&c.)$,
$mg + m'g' + m''g'' + \&c. = R \times (mc + m'c' + m''c'' + \&c.)$,
y así sucesivamente, es evidente que si se llama v la integral de $(ma + m'a' + m''a'' + \&c.) \times dx$
$+ (mb + m'b' + m''b'' + \&c.) \times dy$
$+ (mc + m'c' + m''c'' + \&c.) \times dz + \&c.$ la equacion A tendrá la forma $dv + Rvdt + (mT + m'T' + m''T'' + \&c.) \times dt = o$, cuya integral se ha determinado (427). Por medio de las equaciones B se tendrán los valores de m, m', m'', &c. y de R, exceptuado el valor de una de las m que será arbitrario. Que es &c.

PROPOSICION X.

432. Hallar la integral del trinomio (A) $ax^m dx + by^2 x^n dx = dy$, si es $m = -n - 2$, ó bien

$m = \frac{(2g \pm 1) \times -n - 4g}{2g \mp 1}$, en cuya expresion es g qualquiera número entero y positivo.

1°. Si es $m = -n + 2$, el trinomio A se reducirá á $ax^{-n-2}dx + bx^n y^2 dx = dy$. Supóngase ahora $y = z^{-n-1}$; y por medio de esta substitucion se transformará la equacion anterior en la equacion homogenea $ax^{-n-2}dx + bx^n z^{-2n-2}dx = -(n+1) \times z^{-n-2}dz$, en quien se hará la separacion de variables segun el método dado (409), suponiendo $z = \frac{xt}{a}$; por cuya substitucion dicha equacion homogenea se transformará en la siguiente $x^{-n-2}dx + ba^{2n+1}x^{-n-2}t^{-2n-2}dx = -(n+1) \times a^n (x^{-n-1}t^{-n-2}dt + x^{-n-2}t^{-n-1}dx)$, de donde resulta la equacion $-\frac{dx}{x} = \frac{(n+1) \times a^n t^n dt}{t^{2n+2} + (n+1) \times a^n t^{n+1} + a^{2n+1}b}$, que tiene sus variables separadas; y hecha $t^{n+1} = a^n v$, será $-\frac{dx}{x} = \frac{dv}{v^2 + (n+1) \times v + ab}$, cuya integral se tiene por lo demostrado (87, 336).

2°. Si es $m = n$, el trinomio propuesto se reduce á $ax^m dx + by^2 x^m dx = dy$; y partiendo ambos miembros por $a + by^2$, se tendrá la equacion $x^m dx = \frac{dy}{a + by^2}$, que tiene las variables separadas, y se integra por lo demostrado (71, 131, 338).

3°. Por lo demas, hágase $y = Ax^p + x^r t$; y por medio de esta substitucion se transformará el trinomio propuesto (A) $ax^m dx + bx^n y^2 dx = dy$ en la equacion siguiente

$$\left.\begin{array}{l} ax^m dx + bA^2 x^{2p+n} dx + 2bAx^{n+p+r} t dx + bx^{2r+n} t^2 dx \\ \quad - pAx^{p-1} dx - rx^{r-1} t dx \end{array}\right\} = x^r dt.$$

Y respecto á que las cantidades p, A, r son indeterminadas, supónganse $p = -n-1$, $A = -\frac{n+1}{b}$, $r = -2n-2$, para que se desvanezcan las colunas segunda y tercera de la equacion anterior; con cuya operacion quedará dicha equacion reducida á $ax^m dx + bx^{-3n-4} t^2 dx = x^{-2n-2} dt$, y partiéndola por x^{-2n-2}, se tendrá la equacion (B) $ax^{m+2n+2} dx + bx^{-n-2} t^2 dx = dt$. Ahora en el trinomio propuesto hágase $y = \frac{1}{z}$, y se tendrá la equacion $-bx^n dx - ax^m z^2 dx = dz$, que se transformará por medio de la substitucion $z = Bx^q + x^h u$ en la

$$\left.\begin{array}{l} -bx^n dx - aB^2 x^{m+2q} dx - 2aBx^{m+q+h} u dx - ax^{m+2h} u^2 dx \\ \quad -qBx^{q-1} dx - hx^{h-1} u dx \end{array}\right\} = x^h du.$$

En esta equacion se desvanecen las colunas segunda y tercera, si se suponen las indeterminadas $q = -m-1$, $B = \frac{m+1}{a}$, $h = -2m-2$; y hechas estas suposiciones, la dicha equacion se reduce á

$-bx^n dx - ax^{-3m-4}u^2 dx = x^{-2m-2} du$; y si ésta se parte por x^{-2m-2}, se tendrá el trinomio $(C) -bx^{2m+2+n} dx - ax^{-m-2}u^2 dx = du$. Por tanto el trinomio (A) $ax^m dx + bx^n y^2 dx = dy$ se ha transformado en los dos trinomios (B) $ax^{m+2n+2} dx + bx^{-n-2}t^2 dx = dt$, $(C) - bx^{2m+2+n} dx - ax^{-m-2}u^2 dx = du$, que tienen la misma forma del trinomio A. Argúyase ahora de este modo: por el caso segundo se separan las variables en el trinomio A, si se supone $m = n$; por consiguiente se separarán las variables en los trinomios B, C, si se suponen $m + 2n + 2 = -n - 2$, $2m + n + 2 = -m - 2$, de donde resultan $m = -3n - 4$, $m = \frac{-n-4}{3}$: luego se separarán las variables en el trinomio A, si son $m = -3n - 4$, ó $m = \frac{-n-4}{3}$. Si en el trinomio A se separan las variables, siendo $m = \frac{-n-4}{3}$; en los trinomios B, C se separarán las variables, si se suponen $m + 2n + 2 = \frac{n+2-4}{3}$, $2m + n + 2 = \frac{m+2-4}{3}$, de donde resulta ser $m = \frac{-5n-8}{3}$, $m = \frac{-3n-8}{5}$: luego se separarán las variables en el trinomio A, si son $m = \frac{-5n-8}{3}$, ó bien $m = \frac{-3n-8}{5}$. Si en el trinomio A se separan las variables en la suposicion de $m = \frac{-3n-8}{5}$, en los trinomios B, C se separarán igualmente, si se suponen $m + 2n + 2 = \frac{3n+6-8}{5}$, $2m + n + 2 = \frac{3m+6-8}{5}$, de donde resulta ser $m = \frac{-7n-12}{5}$, $m = \frac{-5n-12}{7}$: luego se hará la separacion en A, siendo $m = \frac{-7n-12}{5}$, ó bien $m = \frac{-5n-12}{7}$: y así continuando con el mismo raciocinio, se hallará que en el trinomio A se separan las variables, si es m igual á qualquier término de las dos series siguientes,

$$n,\ -3n-4,\ \frac{-5n-8}{3},\ \frac{-7n-12}{5},\ \frac{-9n-16}{7},\ \&c.$$

$$n,\ \frac{-n-4}{3},\ \frac{-3n-8}{5},\ \frac{-5n-12}{7},\ \frac{-7n-16}{9},\ \&c.$$

pero el término general de estas series es $\frac{(2g \pm 1) \times -n-4g}{2g \mp 1}$, si se supone g qualquiera número entero y positivo: luego se hará la separacion de las variables en el trinomio propuesto, y éste se integrará, si el exponente m tiene qualquiera de los infinitos valores contenidos en la fórmula $\frac{(2g \pm 1) \times -n-4g}{2g \mp 1}$. Que es &c.

COROLARIO I.

433. Si es $g=\infty$, se tendrá $m=\frac{-2gn-4g}{2g}=$ $-n-2$; y en este caso se separarán las variables del trinomio propuesto por el caso primero de la Proposicion antecedente.

COROLARIO II.

434. Si en el trinomio propuesto es $n=0$, será $m=-\frac{4g}{2g+1}$.

ESCOLIO.

435. El referido método tercero del Conde S. Riccati consiste, en que se suponga una de las variables, como y, igual á Ax^p+z, en quien las cantidades A y p son constantes que se han de determinar; y si es menester, se puede suponer $y=Ax^p$ $+Bx^m+$ &c. $+G$, en quien las cantidades A, B, &c. p, m, &c. y G son constantes que se han de determinar oportunamente en la equacion transformada dada por las variables x, z, de modo que en ella se destruyan los términos que impiden la separacion de las mismas variables. Por lo demas, el referido método es útil particularmente en aque-

llas equaciones que faltan de radicales, y por su medio se logra frequentemente la separacion de las variables; ó bien se llega á unas equaciones, en las que facilmente se pueden separar las variables.

PROPOSICION XI.

436. Hallar la integral de la equacion $(ax^2+bxy+cy^2+ex+fy+g)\times dx$ $+(hy^2+kxy+ix^2+ly+mx+n)\times dy=o$ en las suposiciones siguientes.

Método 1°.

1°. Si son las cantidades $b=2i$, $2c=k$, y $f=m$, se tendrá que las integrales de los términos $bxydx+ix^2dy$, $cy^2dx+kxydy$, $fydx+mxdy$ son respectivamente ix^2y, cy^2x, mxy: luego la integral de la equacion propuesta será $\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{3}hy^3+ix^2y+cy^2x+\frac{1}{2}ex^2+\frac{1}{2}ly^2+mxy+gx+ny$ $=A$ constante.

2°. Si las cantidades e, f, g, l, m, n son iguales á cero, la equacion que resulta es homogenea, y se integra por lo demostrado (425).

3.° Si las cantidades b, f, h, i, m, n son iguales á cero, la equacion propuesta se reduce á $ax^2dx+cy^2dx+exdx+gdx+kxydy+lydy=o$; y suponiendo $y^2=t$, se tendrá $ax^2dx+exdx$

$+g\,dx+ct\,dx=-\frac{kx+l}{2}\times dt$, cuya integral se ha demostrado (428).

4°. Si las cantidades a, c, f, g, k, m son iguales á cero, la equacion propuesta se reduce á $bxy\,dx+ex\,dx+hy^2dy+ix^2\,dy+ly\,dy+ndy=o$, y suponiendo $x^2=t$, se tendrá $hy^2\,dy+ly\,dy+ndy+it\,dy=-\frac{by+e}{2}\times dt$, cuya integral se ha determinado (428).

5°. Si las cantidades c, h, k, l son iguales á cero, la equacion propuesta se reduce á $ax^2\,dx+bxy\,dx+ex\,dx+fy\,dx+g\,dx+ix^2\,dy+mx\,dy+n\,dy=o$, de donde resulta ser $ax^2\,dx+ex\,dx+g\,dx+(bx+f)\times y\,dx=-(ix^2+mx+n)\times dy$, cuya integral se ha determinado (428).

6°. Si las cantidades a, b, e, i son iguales á cero, la equacion propuesta se reduce á $cy^2\,dx+fy\,dx+g\,dx+hy^2\,dy+kxy\,dy+ly\,dy+mx\,dy+n\,dy=o$, de donde resulta ser $hy^2\,dy+ly\,dy+n\,dy+(ky+m)\times x\,dy=-(cy^2+fy+g)\times dx$, cuya integral se ha determinado (428).

7°. Tambien si la equacion propuesta se transforma por medio de las substituciones $x=z+A$, $y=u+B$, en quienes A y B son cantidades constantes que se han de determinar, resultará otra equacion (A)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} az^2+bzu+cu^2+2aAz+bAu+aA^2 \\ +bBz+2cBu+bAB \\ +ez+fu+cB^2 \\ +eA \\ +fB \\ +g \end{array}\right\}\times dz \\ \left.\begin{array}{r} +hu^2+kzu+iz^2+2hBu+kBz+hB^2 \\ +kAu+2iAz+kAB \\ +lu+mz+iA^2 \\ +lB \\ +mA \\ +n \end{array}\right\}\times du \end{array}\right\}=0$$

que tiene su forma semejante á la equacion propuesta; pero ésta se integra en las referidas seis suposiciones: luego la equacion transformada A se integrará del mismo modo baxo las mismas suposiciones. La primera suposicion aplicada á la equacion transformada, para que ésta se pueda integrar, da los mismos resultados, esto es, $b=2i$, $2c=k$, y $f=m$; por consiguiente las referidas substituciones son inútiles para tener otras condiciones. La segunda suposicion aplicada á la equacion transformada subministra seis equaciones, esto es, $2aA+bB+e=0$, $2hB+kA+l=0$, $bA+2cB+f=0$,

$kB+2iA+m=0$, $aA^2+bAB+cB^2+eA+fB+g=0$, $hB^2+kAB+iA^2+lB+mA+n=0$; y por las dos primeras resulta ser $A=\frac{lb-2eh}{4ah-bk}$, $B=\frac{ek-2al}{4ah-bk}$, cuyos valores substituidos en las demas equaciones darán quatro condiciones, de modo que si se verifican en la equacion diferencial propuesta, ésta se podrá transformar en una equacion homogenea. La tercera suposicion aplicada á la equacion transformada da las condiciones $b=0$, $h=0$, $i=0$, $B=-\frac{f}{2c}=-\frac{m}{k}=-\frac{n}{l}$, quedando la cantidad A indeterminada que se puede hacer igual á cero: luego si la equacion diferencial propuesta tiene las dichas condiciones, por la substitucion $y=u-\frac{f}{2c}$ se transformará en la $(ax^2+ex-\frac{f^2}{4c}+g)\times dx+cu^2dx+(kx+l)\times udu=0$. La quarta suposicion aplicada á la equacion transformada da las condiciones $a=0$, $c=0$, $k=0$, y $A=-\frac{m}{2i}=-\frac{f}{b}=-\frac{g}{e}$, quedando la cantidad B indeterminada que se puede hacer igual á cero: luego se determinará la integral de la equacion diferencial propuesta por medio de la substitucion $x=z-\frac{m}{2i}$, con tal que tenga las referidas condiciones. Las suposiciones quinta y sexta aplicadas á la equacion transformada dan las mismas condiciones. Y finalmente si la equacion diferencial dada se transforma por medio de la substitucion $y = Ax + z + B$, en quien A y B son cantidades constantes que se han de determinar; con el mismo método se logrará tener otras condiciones distintas de las anteriores para el efecto de integrar la diferencial propuesta.

Método 2°.

Divídase la equacion propuesta en las dos siguientes, en quienes t es cantidad variable; es á saber,

$$-dx + (hy^2 + kxy + ix^2 + ly + mx + n) \times dt = o,$$
$$dy + (ax^2 + bxy + cy^2 + ex + fy + g) \times dt = o;$$

multiplíquense, la primera de estas por p, y la segunda por q, siendo p y q cantidades constantes que se han de determinar; y despues añádase la primera equacion á la segunda; por lo que resulta la equacion siguiente (B)

$$((pi+qa)\times x^2 + (pk+qb)\times xy + (ph+qc)\times y^2 + (pl+qf)\times y + (pm+qe)\times x + pn + qg)\times dt$$
$$-pdx + qdy = o:$$

luego será (A)

$$-dt = \frac{-pdx + qdy}{(pi+qa)\times x^2 + (pk+qb)\times xy + (ph+qc)\times y^2 + (pl+qf)\times y + (pm+qe)\times x + pn + qg}.$$

Es evidente que se tendrá la integral de esta fórmula, si se supone el divisor del segundo miembro multíplice del quadrado de $-px+qy+r$, en quien q es cantidad constante que se ha de determinar; y para el dicho efecto se deben establecer las siguientes equaciones (C)

$$pi+qa=p^2R,\ pk+qb=-2pqR,\ ph+qc=q^2R,$$
$$pl+qf=2qrR,\ pm+qe=-2prR,\ pn+qg=r^2R.$$

Por tanto por medio de estas suposiciones la equacion A resultará ser $-R\,dt=\frac{-pdx+qdy}{(-px+qy+r)^2}$, cuya integral es $-Rt=\frac{1}{M}-\frac{1}{-px+qy+r}$, en quien $\frac{1}{M}$ es la cantidad constante añadida á la integral, de modo que, si suponiendo $t=o$, las cantidades x, y son respectivamente iguales á j, $ñ$, será $\frac{1}{M}=\frac{1}{-pj+qñ+r}$: luego se tendrá ($D$) $Rt=\frac{1}{-px+qy+r}-\frac{1}{-pj+qñ+r}$. Ahora para determinar los valores de las cantidades p, q, r, adviértase que de las equaciones C resultan las siguientes,

$$\frac{pi+qa}{p}=-\frac{pk+qb}{2q},\ \text{ó bien } 1^a.\ 2aq^2+(2i+b)\times pq+kp^2=o,$$
$$-\frac{pk+qb}{2p}=\frac{ph+qc}{q},\ \ldots\ 2^a.\ bq^2+(k+2c)\times pq+2hp^2=o,$$
$$\frac{ph+qc}{q}=\frac{pl+qf}{2r},\ \ldots\ 3^a.\ fq^2+lpq-2hpr-2cqr=o,$$

$$\frac{pl+qf}{q}=-\frac{pm+qe}{p}, \therefore 4^{a}.\ eq^2+(m+f)\times pq+lp^2=0,$$

$$-\frac{pm+qe}{2p}=\frac{pn+qg}{r}, \therefore 5^{a}.\ 2gpq+2np^2+mrp+erq=0.$$

Por tanto si se supone, por exemplo, la cantidad p dada, por medio de qualquiera de las equaciones anteriores primera, segunda ó quarta, se determinarán dos valores de la q, que llamo q, q'; y si estos valores se substituyen en la equacion tercera, se determinarán dos valores de la cantidad r, que llamo r, r': en fin si dichos dos valores de q se substituyen en la primera, por exemplo, de las equaciones C, se tendrán dos valores de la R, que llamo R, R'. Ahora por medio de las cinco equaciones anteriores se hallarán las condiciones que han de tener los coeficientes de la equacion diferencial propuesta, para que ésta se pueda integrar segun el método expresado. Luego por tener las cantidades q, r, R dos valores como se ha manifestado antes, resultarán de la referida equacion D las dos siguientes, esto es,

$$Rt=\frac{1}{-px+qy+r}-\frac{1}{-jp+\tilde{n}q+r}, \text{ ó bien } -px+qy+r=\frac{-jp+\tilde{n}q+r}{Rt\times(-jp+\tilde{n}q+r)+1},$$

$$R't=\frac{1}{-px+q'y+r'}-\frac{1}{-jp+\tilde{n}q'+r'}, -px+q'y+r'=\frac{-jp+\tilde{n}q'+r'}{R't\times(-jp+\tilde{n}q'+r')+1}:$$

ahora si se resta la segunda equacion de la primera, se hallará la y dada por la t; y si la segunda multiplicada por q se resta de la primera multiplicada por q', se tendrá la x dada por la t. Que es &c.

PROPOSICION XII.

437. Hallar la integral de la fórmula $ax^m dx + nx^{-1} y dx + cy^2 dx + dy = o$, si se supone $m = \frac{\pm 2n - 4g}{2g \mp 1}$, en quien g es qualquiera número entero y positivo.

Multiplíquese la diferencial propuesta por x^n; y se tendrá (A) $ax^{m+n}dx + bx^{n-1}ydx + cx^n y^2 dx + x^n dy = o$. Supóngase $x^n y = z$; y por medio de esta substitucion la equacion A se transformará en la $ax^{m+n} dx + cx^{-n} z^2 dx + dz = o$, que se integra por lo demostrado (432), si es $m + n = \frac{(2g \pm 1) \times n - 4g}{2g \mp 1}$, de donde resulta ser $m = \frac{\pm 2n - 4g}{2g \mp 1}$. Que es &c.

PROPOSICION XIII.

438. Hallar la integral de la equacion $adx \times (x^m + by)^2 + dy = o$, si se supone $m = \frac{-2g \mp 1}{2g \mp 1}$, en quien g es qualquiera número entero y positivo.

Hágase $y = -\frac{1}{b} \times x^m + z$; y por medio de esta substitucion se transformará la equacion propuesta en la $-\frac{m}{b} \times x^{m-1} dx + ab^2 z^2 dx + dz = o$, que se integra por lo demostrado (432), si es $m - 1 = -\frac{4g}{2g \mp 1}$, de donde resulta ser $m = \frac{-2g \mp 1}{2g \mp 1}$. Que es &c.

PROPOSICION XIV.

439. Hallar la integral de la equacion $-x^{2n+1}dx + ayx^n dx - bydy = o$.

Hágase $y = Ax^m + z$, en quien A y m son cantidades constantes que se han de determinar; y se tendrán las equaciones siguientes,

$y^2 = A^2 x^{2m} + 2Ax^m z + z^2$,

$ydy = mA^2 x^{2m-1} dx + mAzx^{m-1} dx + Ax^m dz + zdz$: luego por medio de estas substituciones la equacion propuesta se transformará en la

$$\left.\begin{array}{l} -x^{2n+1}dx + azx^n dx - bAx^m dz - bz dz \\ +aAx^{m+n}dx - mbAzx^{m-1}dx \\ -mbA^2 x^{2m-1} dx \end{array}\right\} = o.$$

Hágase $m = n+1$; y dicha equacion se reducirá á (B)

$$\left.\begin{array}{l} -x^{2n+1} dx + azx^n dx - bAx^{n+1} dz - bzdz \\ +aAx^{2n+1} dx - mbAzx^n dx \\ -mbA^2 x^{2n+1} dx \end{array}\right\} = o.$$

Supóngase ahora $-mbA^2 + aA - 1 = o$; y resuelta esta equacion, se hallará $A = \frac{a}{2b\times(n+1)}$ $\pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{4b^2\times(n+1)^2} - \frac{1}{b\times(n+1)}\right)}$: luego en esta suposicion de la cantidad A, la equacion B se reducirá á la $\frac{(a-(n+1)\times bA)}{b} \times z x^n dx - A x^{n+1} dz = z dz$; y ésta por la substitucion $x^{n+1} = y$, se transformará en la $\frac{(a-(n+1)\times bA)}{b\times(n+1)} \times z dy - A y dz = z dz$, cuya integral se tiene por lo demostrado (416). Que es &c.

PROPOSICION XV.

440. Transformar la equacion $(x^n dx + ay^m dy) \times X = (f x dy + c y dx) \times Z$ en otra que tenga las variables separadas, con tal que las cantidades X, Z estén dadas por las x, y de qualquier modo, el exponente m sea igual á $-\frac{nf+f+c}{c}$, y en cada término así de la cantidad X, como de la Z, el exponente de la x multiplicado por f menos el exponente de la y multiplicado por c sea siempre igual á una misma cantidad positiva ó negativa.

Dispóngase la equacion propuesta de este modo

$$(A)\ x^n dx + ay^m dy = \left(\frac{fdy}{y} + \frac{cdx}{x}\right) \times \frac{Z}{X} \times xy; \text{ y}$$

hágase $x^c y^f = z^p$, de donde resultan las equaciones

$x = z^{\frac{p}{c}} : y^{\frac{f}{c}}$, $\frac{fdy}{y} + \frac{cdx}{x} = \frac{pdz}{z}$: luego por medio de estas substituciones la equacion A se transformará en la

$$\frac{py^{\frac{f}{c}} z^{\frac{np+p-c}{c}} dz - fz^{\frac{np+p}{c}} y^{\frac{f-c}{c}} dy}{cy^{\frac{nf+2f}{c}}} + ay^m dy = \frac{pz^{\frac{p-c}{c}} dz}{y^{\frac{f-c}{c}}} \times \frac{Z}{X};$$

y reduciendo el primer miembro á una comun denominacion, y multiplicándolo por $y^{\frac{f-c}{c}}$, se tendrá la equacion

$$\frac{py^{\frac{f}{c}} z^{\frac{np+p-c}{c}} dz - fz^{\frac{np+p}{c}} y^{\frac{f-c}{c}} dy + acy^{m+\frac{nf+2f}{c}} dy}{cy^{\frac{nf+f+c}{c}}} =$$

$pz^{\frac{p-c}{c}} dz \times \frac{Z}{X}$; y por ser $m = -\frac{nf+f+c}{c}$, será $\frac{f-c}{c} = m + \frac{nf+2f}{c}$, y dicha equacion se podrá disponer de esta suerte (B)

$$\frac{\frac{f}{c} \times z^{\frac{np+p}{c}} - a}{y^{\frac{nf+c}{c}}} \times \left(\frac{\frac{p}{c} \times z^{\frac{np+p-c}{c}} dz}{\frac{f}{c} \times z^{\frac{np+p}{c}} - a} - \frac{dy}{y}\right) = pz^{\frac{p-c}{c}} dz \times \frac{Z}{X}.$$

Supóngase ahora $\dfrac{\left(\frac{f}{c}\times z^{\frac{np+p}{c}}-a\right)^{\frac{c}{f\times(n+1)}}}{y}=u^q$,
de donde resultan las dos equaciones siguientes,

$$\frac{\frac{p}{c}\times z^{\frac{np+p-c}{c}}dz}{\frac{f}{c}\times z^{\frac{np+p}{c}}-a}-\frac{dy}{y}=\frac{qdu}{u},$$

$y^{\frac{nf+c}{c}}=\dfrac{\left(\frac{f}{c}\times z^{\frac{np+p}{c}}-a\right)^{\frac{nf+c}{nf+f}}}{u^{\frac{nfq+cq}{c}}}$: luego por estas substituciones la equacion B se transformará en la (C)

$$qu^{\frac{nfq+cq-c}{c}}du=p\times\left(\frac{f}{c}\times z^{\frac{np+p}{c}}-a\right)^{\frac{c-f}{nf+f}}\times z^{\frac{p-c}{c}}dz\times\frac{Z}{X},$$

y hechas las cantidades $p=c$, $q=\frac{c}{nf+c}$, se tendrá $\frac{1}{nf+c}\times du=(\frac{f}{c}\times z^{n+1}-a)^{\frac{c-f}{nf+f}}\times dz\times\frac{Z}{X}$. Supóngase tambien que en alguno de los términos de la cantidad Z ó de la X se halla $x^r y^s$; y por ser

$$y=\frac{\left(\frac{f}{c}\times z^{\frac{np+p}{c}}-a\right)^{\frac{c}{f\times(n+1)}}}{u^q},\ x=\frac{z^{\frac{p}{c}}\times u^{\frac{fq}{c}}}{\left(\frac{c}{f}\times z^{\frac{np+p}{c}}-a\right)^{\frac{1}{n+1}}}$$

se tendrá $x^r y^s = \dfrac{z^{\frac{rp}{c}} \times u^{\frac{rfq-scq}{c}}}{(\frac{c}{f} \times z^{\frac{np+p}{c}} - a)^{\frac{rf-sc}{f\times(n+1)}}}$: luego si en todos los demas términos de las cantidades X, Z, que tienen diferentes exponentes r, s, resulta ser $rf - sc$ cantidad constante, tendrá la u en todos los términos de las cantidades X, Z un mismo exponente, y en consequencia la cantidad $\frac{Z}{X}$ se podrá resolver en dos factores, de modo que el uno contenga solo la z, y el otro la u: luego se separarán las variables en la equacion transformada C, y por consiguiente en la propuesta baxo las referidas suposiciones. Que es &c.

PROPOSICION XVI.

441. Transformar la equacion $y^q dx = cx^p dy \times (bx^l + ay^n x^r)^m$ en otra que tenga las variables separadas, si se supone $p = (lq - rq - mnl - l + r + n) : n$.

Hágase $ay^n = x^{l-r} z$; y se tendrán las equaciones $y = x^{\frac{l-r}{n}} z^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{n}}$, $dy = \left((l-r) \times z^{\frac{1}{n}} x^{\frac{l-r-n}{n}} dx + x^{\frac{l-r}{n}} z^{\frac{1-n}{n}} dz\right) : na^{\frac{1}{n}}$: luego por medio de estas substituciones se transformará la equacion propuesta en la (A)

$$\frac{z^{\frac{q}{n}}\,x^{\frac{lq-rq}{n}}\,dx}{a^{\frac{q}{n}}\,x^{ml}\times(z+b)^m}=\frac{c\times(l-r)\times z^{\frac{1}{n}}\,x^{p+\frac{l-r-n}{n}}\,dx+cx^{p+\frac{l-r}{n}}\,z^{\frac{1-n}{n}}\,dz}{n\,a^{\frac{1}{n}}},$$

y por ser $p=(lq-rq-mnl-l+r+n):n$, será $\frac{lq-rq}{n}-ml=p+\frac{l-r-n}{n}$: luego la equacion A se reducirá á $\frac{nz^{\frac{q}{n}}\,dx}{ca^{\frac{q-1}{n}}\times(z+b)^m}=(l-r)\times z^{\frac{1}{n}}\,dx+x\times z^{\frac{1-n}{n}}\,dz$, de donde resulta ser $\frac{dx}{x}=$ $(z^{-1}dz\times ca^{\frac{q-1}{n}}\times(z+b)^m):(nz^{\frac{q-1}{n}}+(r-l)\times ca^{\frac{q-1}{n}}\times(z+b)^m)$ equacion que tiene sus variables separadas. Que es &c.

PROPOSICION XVII.

442. Hallar la diferencial de la $S'.Mdx$, en la suposicion que la sola y sea variable en la funcion de las x, y expresada por M. *Fig.* 85.

Consta por lo demostrado (203) que $S'.Mdx$ expresa el area $AECB$ de una curva EC referida al exe, que tiene la abscisa $AB=x$, y la ordenada $BC=M$. Si se considera ahora que la sola y es variable en la ordenada M, resultará otra curva ec, y la diferencial $EecC$ de la superficie $AECB$ será $D''.S'.Mdx$ (408); pero el elemento $CcfF$ de dicha diferencial en la suposicion de la sola x variable es $d''M \times dx$ ó bien $dy \times \frac{d''M \times dx}{dy}$: luego integrando en la misma suposicion de la sola x variable será $D''.S'.Mdx = dy \times S'.\frac{d''M \times dx}{dy}$. Que es &c.

COROLARIO.

443. Se infiere que para tener la diferencial de de la $S'.Mdx$ en la suposicion de la sola y variable, se debe diferenciar la M en la suposicion de la sola y variable, el resultado partido por dy se ha de multiplicar por dx, se debe integrar este producto por la sola variable x, y finalmente esta integral se ha de multiplicar por dy.

EXEMPLO.

444. Se propone diferenciar la $S'.\frac{2}{3}x^2 dx \sqrt{(x^3+y^3)}$ en la suposicion de la sola y variable.

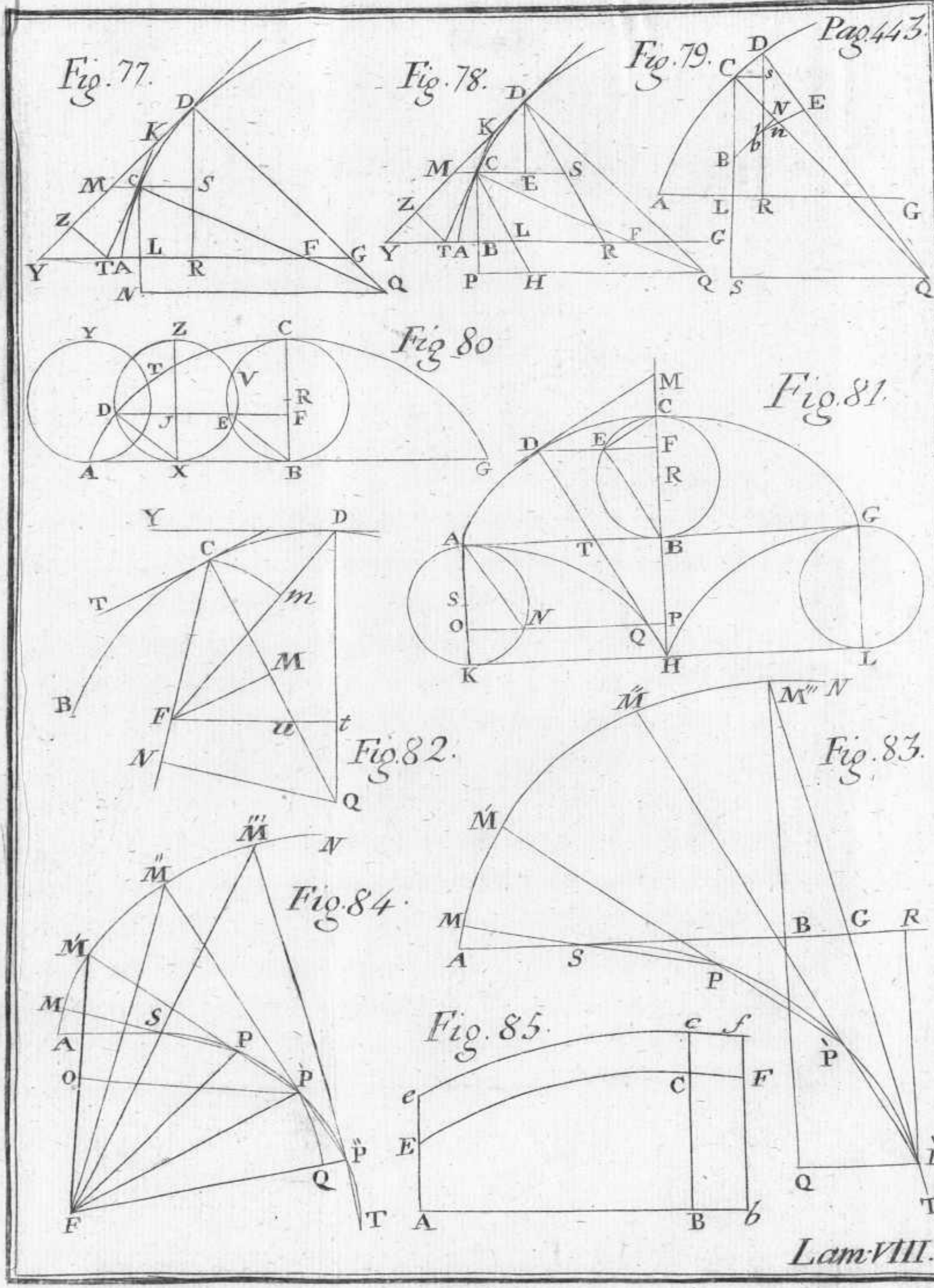
Compárese la expresion propuesta con la fórmula $S'.Mdx$, y se tendrá $M = \frac{2}{3}x^2 \sqrt{(x^3+y^3)}$: luego será $d''M = \frac{x^2y^2dy}{\sqrt{(x^3+y^3)}}$, y por consiguiente $\frac{d''M}{dy} = \frac{x^2y^2}{\sqrt{(x^3+y^3)}}$; pero $D''.S'.Mdx = dy \times$

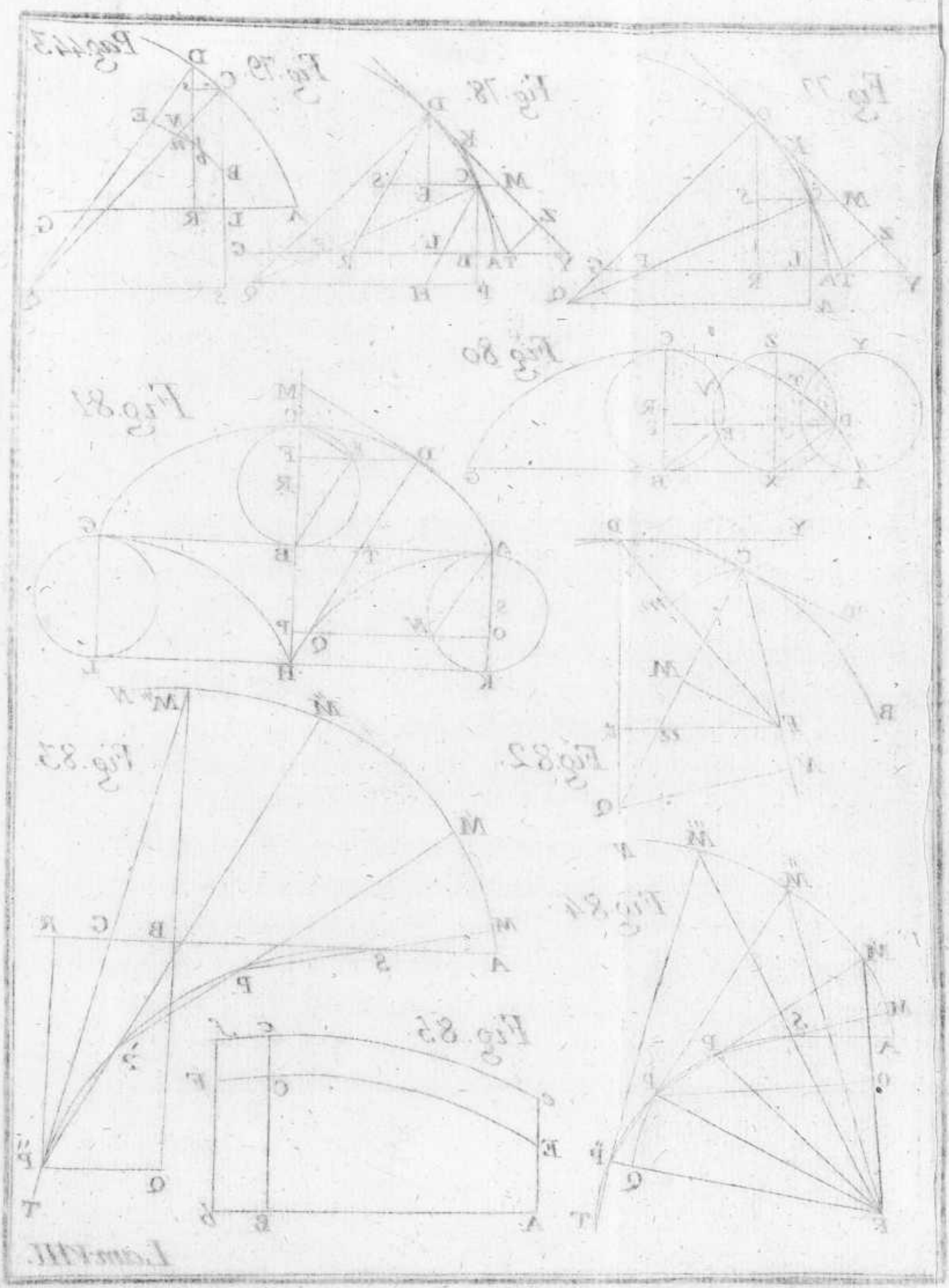
$\frac{S'.d''M \times dx}{dy}$: luego será $D''.S'.\frac{2}{3}x^2 dx \times \sqrt{(x^3+y^3)} = dy \times S'.\frac{d''M \times dx}{dy} = dy \times S''.\frac{x^2 y^2 dx}{\sqrt{(x^3+y^3)}} = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3+y^3)} \times y^2 dy$. Esta misma expresion resulta, si se integra la fórmula propuesta en la suposicion de la sola x variable, y la integral $\frac{4}{27} \times (x^3+y^3)^{\frac{3}{2}}$ se diferencia en la suposicion de la sola y variable.

PROPOSICION XVIII.

445. Si en la fórmula $Mdx + Ndy$, en quien las cantidades M y N están dadas por las variables y, x, y constantes, es $\frac{d''M}{dy} = \frac{d'N}{dx}$; hallar la integral de la misma fórmula.

Determínese la integral de Mdx en la suposicion de la x variable, y de la y constante; y se tendrá el valor de $S'.Mdx$; diferénciese este valor en la suposicion de las variables x, y, y lo que resulta réstese de la fórmula propuesta, con cuya operacion se tendrá Ydy en quien la Y está dada solamente por la variable y, y constantes: y digo que (A) $S'.Mdx + S.Ydy$ será la integral de la fórmula propuesta. Pues, diferenciando la integral A en la suposicion de las x, y variables, se tendrá


Pag. 443.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Lam. VIII.



$M dx + dy S'. \frac{d''M}{dy} \times dx + Y dy$; pero (sup.) $\frac{d''M}{dy}$ $= \frac{d'N}{dx}$, de donde $S'. \frac{d''M}{dy} \times dx = S. d'N = N + Z$, en quien la constante Z está dada solamente por y: luego la integral A tendrá por su diferencial $M dx + N dy + Z dy + Y dy$, que se reduce á la propuesta $M dx + N dy$, si se supone la constante $Z = -Y$. Que es &c.

EXEMPLO I.

446. Se propone la diferencial $dy \times L. x + \frac{y dx}{x}$ $+ \frac{b^2 dx}{b^2 + x^2} + a dy$.

Compárese la diferencial propuesta con la fórmula $M dx + N dy$; y se tendrán $M = \frac{y}{x} + \frac{b^2}{b^2 + x^2}$, $N = a + L. x$: luego resultarán las equaciones, $\frac{d''M}{dy} = \frac{dy}{x dy} = \frac{1}{x}$, $\frac{d'N}{dx} = \frac{dx}{x dx} = \frac{1}{x}$; por consiguiente en el caso propuesto se verifica la condicion $\frac{d''M}{dy} = \frac{d'N}{dx}$. Y por ser $M = \frac{y}{x} + \frac{b^2}{b^2 + x^2}$, será $S'. M dx = S'. \left(\frac{y dx}{x} + \frac{b^2 dx}{b^2 + x^2}\right) = y L. x + u$, en quien u (131) es un arco del círculo que tiene el radio b, y la tangente x; y diferenciando el valor hallado de la $S'.Mdx$ en la suposicion de las x, y variables, se tendrá $dy \times L.x + \frac{ydx}{x} + \frac{b^2dx}{b^2+x^2}$; y restando esta expresion de la propuesta diferencial, resultará ady, cuya integral es ay. Por tanto la integral de la diferencial propuesta será $yL.x+u+ay$, por corresponder este valor á la fórmula $S'.Mdx+S.Ydy$ en el presente caso.

EXEMPLO II.

447. Sea la diferencial $ax^2dx+2byxdy+by^2dx+y^3dy$.

Compárese la diferencial propuesta con la fórmula $Mdx+Ndy$; y se tendrán $M=ax^2+by^2$, $N=2byx+y^3$: luego resultarán las equaciones, $\frac{d''M}{dy}=\frac{2bydy}{dy}=2by$, $\frac{d'N}{dx}=\frac{2bydx}{dx}=2by$; por consiguiente se verifica la condicion $\frac{d''M}{dy}=\frac{d'N}{dx}$ en el caso propuesto. Determínese ahora el valor de $S'.Mdx$; y será $S'.Mdx=S'.(ax^2+by^2)\times dx$ $=\frac{1}{3}ax^3+by^2x$: luego diferenciando este valor en la suposicion de las x, y variables, se tendrá $ax^2dx+by^2dx+2byxdy$; y restando la diferencial hallada de la propuesta, queda el residuo

$y^3 dy$, cuya integral es $\frac{1}{4}y^4$. Por tanto será $\frac{1}{3}ax^3 + by^2x + \frac{1}{4}y^4$ la integral que se pedia.

PROPOSICION XIX.

448. Si en la fórmula $Mdx + Ndy + Pdz$, en quien las cantidades M, N, P están dadas por las variables x, y, z, son $\frac{d''M}{dy} = \frac{d'N}{dx}$, $\frac{d'''M}{dz} = \frac{d'P}{dx}$, $\frac{d'''N}{dz} = \frac{d''P}{dy}$; hallar la integral de la misma fórmula.

Determínese la integral de $Mdx + Ndy$ en la suposicion de la z constante; la cantidad que resulta diferénciese en la suposicion de las x, y, z variables; la diferencial hallada réstese de la fórmula propuesta; y el residuo dado por z intégrese: luego esta integral junta con la referida integral de $Mdx + Ndy$ será la que se pide. Que es &c.

EXEMPLO.

449. Sea la diferencial $\frac{ydx}{z} + \frac{xzdy + 3ay^2z^2dy}{z^2} - \frac{xydz}{z^2} + a^2dz$.

Compárese la diferencial propuesta con la fórmula $Mdx + Ndy + Pdz$, y se tendrán $M = \frac{y}{z}$, $N = \frac{xz + 3ay^2z^2}{z^2}$, $P = -\frac{xy}{z^2} + a^2$: luego serán, $\frac{d''M}{dy} =$

$\frac{dy}{zdy} = \frac{1}{z}$, $\frac{d'N}{dx} = \frac{zdx}{z^2dx} = \frac{1}{z}$, $\frac{d'''M}{dz} = -\frac{ydz}{z^2dz} = -\frac{y}{z^2}$,

$\frac{d'P}{dx} = -\frac{ydx}{z^2dx} = -\frac{y}{z^2}$, $\frac{d'''N}{dz} = -\frac{x}{z^2}$, $\frac{d''P}{dy} = -\frac{x}{z^2}$;

por consiguiente en el exemplo propuesto se verifican las tres condiciones de la Proposicion antecedente. Determínese ahora la integral de $Mdx + Ndy$, esto es, de $\frac{ydx}{z} + \frac{xz + 3ay^2z^2}{z^2} \times dy$ en la suposicion de la z constante; y se hallará ser la cantidad $\frac{yx}{z} + ay^3$, cuya diferencial en la suposicion de las y, x, z variables, es $\frac{ydx}{z} + \frac{zxdy - yxdz + 3ay^2z^2dy}{z^2}$; réstese esta expresion de la diferencial propuesta, y resultará a^2dz, cuya integral es a^2z. Por tanto la suma de las dos integrales halladas $\frac{yx}{z} + ay^3$, a^2z será la integral de la diferencial propuesta.

ESCOLIO.

450. Con el mismo método se hallarán las integrales de las diferenciales del primer grado compuestas de quatro ó mas variables, con tal que tengan las correspondientes condiciones; es á saber, si la fórmula $Mdx + Ndy + Pdz + Qdv$ contie-

ne las quatro variables x, y, z, v, y son $\frac{d''M}{dy} = \frac{d'N}{dx}$, $\frac{d'''M}{dz} = \frac{d'P}{dx}$, $\frac{d''''M}{dv} = \frac{d'Q}{dx}$, $\frac{d'''N}{dz} = \frac{d''P}{dy}$, $\frac{d''''N}{dv} = \frac{d''Q}{dy}$, $\frac{d''''P}{dv} = \frac{d'''Q}{dz}$; se integrará $Mdx + Ndy + Pdz$ en la suposicion de la v constante, se diferenciará la integral hallada en la suposicion de las x, y, z, v variables, se restará esta diferencial de la propuesta, y la integral del residuo dado por v se añadirá á la integral hallada antes de $Mdx + Ndy + Pdz$, con lo que se tendrá la integral que se busca. Argúyase del mismo modo respecto á las diferenciales compuestas de un número mayor de variables. Pero es de advertir que sucede raras veces que se verifiquen las condiciones necesarias que arriba se han expresado, para que las fórmulas diferenciales se puedan integrar, aunque se hallen sus integrales con otros métodos. En este caso se procurará multiplicar la fórmula diferencial propuesta por un factor compuesto de las variables x, y, z, &c. que entran en dicha diferencial, de suerte que se verifiquen las condiciones necesarias para tener las correspondientes integrales; pero hasta ahora no se han podido fixar reglas acerca de los dichos factores, y solo con el uso y la industria se pueden determinar en los casos particulares.

EXEMPLO.

451. Sea la equacion $(2x^2y-y^3)\times dx+(x^3-2xy^2)\times dy=o$.

Comparando la equacion propuesta con la fórmula $Mdx+Ndy=o$, se tendrán las equaciones, $M=2x^2y-y^3$, $N=x^3-2xy^2$: luego serán en el caso propuesto $\frac{d''M}{dy}=2x^2-3y^2$, $\frac{d'N}{dx}=3x^2-2y^2$, cuyas cantidades no son iguales. Ahora si se multiplica la equacion propuesta por el factor $2xy$, se tendrá (A) $(4x^3y^2-2xy^4)\times dx+(2x^4y-4x^2y^3)\times dy=o$: luego se tendrán las equaciones, $M=4x^3y^2-2xy^4$, $N=2x^4y-4x^2y^3$, $\frac{d''M}{dy}=8x^3y-8xy^3$, $\frac{d'N}{dx}=8yx^3-8y^3x$; por consiguiente $\frac{d''M}{dy}=\frac{d'N}{dx}$: y será $S'.Mdx=S'.(4x^3y^2-2xy^4)\times dx=x^4y^2-x^2y^4$; y diferenciando esta expresion en la suposicion de las x, y variables, será $4x^3y^2dx+2x^4ydy-2xy^4dx-4x^2y^3dy$, cuya cantidad restada de la diferencial A no da residuo alguno: luego $x^4y^2-x^2y^4=A$ constante será la integral de la diferencial propuesta.

LIBRO QUARTO.

PROPOSICION I.

452. Dada qualquiera equacion homogenea, que contiene dos variables, y sus diferenciales están elevadas á grados superiores, separar las dichas variables.

Si la equacion dada contiene las dos variables x, y, hágase $y = \frac{xz}{a}$; y por medio de esta substitucion tendrá la equacion propuesta en todos los términos la variable x elevada á una misma potestad: luego partiendo por esta potencia, resultará una equacion (B) dada por z, dx, dy, y constantes. Diferenciando ahora la dicha substitucion, será $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$; y haciendo la segunda substitucion $xdz = tdx$, se tendrá $dy = \frac{(t+z) \times dx}{a}$. Por tanto si en la equacion B se substituye esta expresion en lugar de la dy, la equacion que resulta tendrá en todos los términos la dx elevada á una misma potestad; y hecha la particion, se tendrá una equacion entre las variables finitas t, z: luego se determinará el valor de la variable t por la z, ó al contrario: y siendo por la segunda substitucion $xdz = tdx$, ó bien $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{t}$, será integrando $L.x = S.\frac{dz}{t}$; y por esta expresion se tendrá la variable x dada por la z; pero $y = \frac{xz}{a}$: luego se tendrá tambien el valor de la variable y por la z: luego &c.

EXEMPLO I.

453. Sea la equacion $y^2 dy^2 - 4xydxdy = 5x^2 \times dx^2$.

Hágase la primera substitucion $y = \frac{xz}{a}$; y la equacion propuesta se transformará en la $x^2 z^2 dy^2 - 4ax^2 zdxdy = 5a^2 x^2 dx^2$; y partiendo por x^2, será (B) $z^2 dy^2 - 4azdxdy = 5a^2 dx^2$. Diferénciese ahora la primera substitucion, y se tendrá $dy = \frac{xdz + zdx}{a}$: hágase la segunda substitucion (C) $xdz = tdx$, y será $dy = \frac{tdx + zdx}{a} = \frac{(t+z) \times dx}{a}$, cuyo valor substituido en la equacion B dará la $\frac{z^2 \times (t+z)^2 dx^2}{a^2} - 4z \times (t+z) \times dx^2 = 5a^2 dx^2$; y partiendo por dx^2, se tendrá $z^2 \times (t+z)^2 - 4a^2 z \times (t+z)$

$=5a^4$: añadiendo $4a^4$ á ambos miembros, será $z^2\times(t+z)^2-4a^2z\times(t+z)+4a^4=9a^4$; y extrayendo la raiz, será $z\times(t+z)-2a^2=\pm 3a^2$, de donde resultan dos valores de la t, esto es, $t=\frac{5a^2-z^2}{z}$, $t=-\frac{a^2+z^2}{z}$; pero por la substitucion C es $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{t}$: luego serán $\frac{dx}{x}=\frac{zdz}{5a^2-z^2}$, $\frac{dx}{x}=-\frac{zdz}{a^2+z^2}$. La integral de la primera de estas dos equaciones da $L.x=-L.\sqrt{(5a^2-z^2)}+2L.A$, de donde resulta $x=\frac{A^2}{\sqrt{(5a^2-z^2)}}$; pero por la substitucion primera es $z=\frac{ay}{x}$: luego será $x=A^2$: $\sqrt{\left(5a^2-\frac{a^2y^2}{x^2}\right)}=\frac{A^2x}{a\sqrt{(5x^2-y^2)}}$, de donde resulta ser $\sqrt{(5x^2-y^2)}=\frac{A^2}{a}$, $5x^2-y^2=\frac{A^4}{a^2}$, y $y^2=5x^2-\frac{A^4}{a^2}$ equacion á la Hipérbola. La integral de la segunda de las referidas equaciones da $L.x=-L.\sqrt{(a^2+z^2)}+2L.A$; por consiguiente $x=\frac{A^2}{\sqrt{(a^2+z^2)}}$; pero por la substitucion primera es $z=\frac{ay}{x}$: luego será $x=A^2:\sqrt{\left(a^2+\frac{a^2y^2}{x^2}\right)}=\frac{A^2x}{a\sqrt{(x^2+y^2)}}$, de donde resulta ser $\sqrt{(x^2+y^2)}=$

$\frac{A^2}{a}$, $x^2+y^2=\frac{A^4}{a^2}$, y $y^2=\frac{A^4}{a^2}-x^2$, equacion al círculo. Por tanto el complexô de la Hipérbola y del Círculo satisfacen completamente á la equacion propuesta.

EXEMPLO II.

454. Se propone la equacion diferencial $xdx^3-2ydxdy^2+3xdydx^2-6ydy^3=o$.

Hágase la substitucion primera $y=\frac{xz}{a}$; y la equacion propuesta se transformará en la $xdx^3-\frac{2xzdxdy^2}{a}+3xdydx^2-\frac{6xzdy^3}{a}=o$; y partiendo por x, será (B) $adx^3-2zdxdy^2+3adydx^2-6zdy^3=o$. Diferénciese ahora dicha substitucion, y se tendrá $dy=\frac{xdz+zdx}{a}=\frac{tdx+zdx}{a}$, por la segunda substitucion que se debe hacer, esto es, (C) $xdz=tdx$. Por tanto la equacion B se reducirá á la $a^4dx^3-2az\times(t+z)^2\times dx^3+3a^3\times(t+z)\times dx^3-6z\times(t+z)^3\times dx^3=o$; y partiendo por dx^3, se tendrá la equacion $a^4-2az\times(t+z)^2+3a^3\times(t+z)-6z\times(t+z)^3=o$, que se resuelve en los dos factores $a^3-2z\times(z+t)^2=o$, $a+3\times(z+t)=o$; por consiguiente serán $t=$

$=z\pm\sqrt{\frac{a^3}{2z}}$, $t=-\frac{1}{3}a-z$; pero $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{t}$ por la substitucion C: luego serán $\frac{dx}{x}=\frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{-z^{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}a^3}}$,

$\frac{dx}{x}=-\frac{dz}{\frac{1}{3}a+z}$, cuyas integrales $x=\frac{A^2}{(z^{\frac{3}{2}}\mp\sqrt{\frac{1}{2}a^3})^{\frac{2}{3}}}$,

$x=\frac{A^2}{\frac{1}{3}a+z}$; pero por la primera substitucion es

$z=\frac{ay}{x}$: luego se tendrán las equaciones dadas por las variables x, y, que satisfacen á la integral de la equacion propuesta.

ESCOLIO.

455. Adviértase que muchas veces es útil la substitucion $y=z^l$, en quien l es cantidad constante que se ha de determinar, para transformar las equaciones que no son homogeneas en otras homogeneas: por exemplo, los dos términos $x^m y^n dx^e dy^f$, $x^p y^q dx^g dy^h$, en quienes $e+f=g+h$, se harán homogeneos por la substitucion $y=z^l$, si se supone $l=\frac{m-p+h-f}{q-n+h-f}$: luego una equacion diferencial que contiene las dx, dy elevadas á qualesquiera potestades, se podrá reducir á homogenea por la subs-

titucion $y=z^l$, si hecha la comparacion del primer término de aquella con todos los demas resulta constante el valor del exponente l.

PROPOSICION II.

456. Separar las variables en la equacion $Mx = aN$, en quien las cantidades M, N están dadas por las diferenciales dy, dx elevadas á qualquiera grado, con tal que la suma de sus exponentes sea una misma en todos los términos.

Hágase $dy=\frac{tdx}{a}$; y hecha esta substitucion en la equacion propuesta, resultará otra equacion, que tendrá en todos sus términos la dx elevada á una misma potestad; y partiéndola por esta potencia de la dx, se tendrá una equacion finita entre las variables t, x, de donde resultará el valor de t por x, ó al contrario; pero $dy=\frac{tdx}{a}$, y $y=S.\frac{tdx}{a}$: luego se determinará la variable y por la x ó por la t. Que es &c.

EXEMPLO I.

457. Se propone la equacion $xdxdy^2=a\times(dx^3+dy^3)$.

Hágase $dy=\frac{tdx}{a}$; y la equacion propuesta se transformará en la $\frac{xdx \times t^2 dx^2}{a^2} = a \times (dx^3 + \frac{t^3 dx^3}{a^3})$: luego partiendo por dx^3, y reduciendo, se tendrá $xt^2 = a^3 + t^3$; por consiguiente será $x = \frac{a^3+t^3}{t^2}$; y diferenciando esta expresion, será $dx = -\frac{2a^3 dt}{t^3} + dt$; pero $dy = \frac{tdx}{a}$: luego será $dy = -\frac{2a^2 dt}{t^2} + \frac{tdt}{a}$; é integrando se tendrá $y = \frac{2a^2}{t} + \frac{t^2}{2a} + A$ constante.

EXEMPLO II.

458. Sea la equacion $x\, dx^{\frac{1}{2}}\, dy^{\frac{1}{2}} = a \times (dx + dy)$.

Hágase $dy = \frac{tdx}{a}$; y por medio de esta substitucion la equacion propuesta se transformará en la $\frac{xt^{\frac{1}{2}} dx}{a^{\frac{1}{2}}} = a \times (dx + \frac{tdx}{a})$; luego partiendo por dx, y reduciendo, será $\frac{xt^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = a + t$; por consiguiente se tendrá $x = \frac{a^{\frac{1}{2}} \times (a+t)}{t^{\frac{1}{2}}}$; y diferenciando esta expresion será $dx = \sqrt{a} \times \frac{t^{\frac{1}{2}} dt - at^{-\frac{1}{2}} dt}{2t}$; pero $dy =$

$\frac{tdx}{a}$: luego se tendrá $dy = \frac{1}{2\sqrt{a}} \times (t^{\frac{1}{2}} dt - at^{-\frac{1}{2}} dt)$, é integrando será $\frac{1}{2\sqrt{a}} \times (\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} a t^{\frac{1}{2}}) = y + A$ constante.

PROPOSICION III.

459. Separar las variables en la equacion $x = yM + aN$, en quien las cantidades M, N están dadas por las dx, dy, de modo que no tengan ninguna dimension.

Hágase $x = S.tdy$, y por consiguiente será $dx = tdy$: luego por medio de estas substituciones la equacion propuesta tendrá la forma (A) $S.tdy = yP + aQ$, en quien las cantidades P, Q estarán dadas por la variable t. Diferénciese ahora la equacion A, y será $tdy = ydP + Pdy + adQ$, de donde resulta el trinomio $adQ + ydP = (t - P) \times dy$, cuyas variables y, t se pueden separar (428); pero $x = S.tdy$: luego se tendrán separadas las variables x, y. Que es &c.

EXEMPLO I.

460. Sea la equacion $x = \frac{ydx}{dy} + \frac{adx^2}{dy^2}$.

Hágase $x = S.\frac{tdy}{a}$; y se tendrán las equaciones

$dx = \frac{tdy}{a}$, $t = \frac{adx}{dy}$, $t^2 = \frac{a^2dx^2}{dy^2}$: luego por medio de estas substituciones la equacion diferencial propuesta se transformará en la $S. tdy = yt + t^2$; y diferenciando esta equacion será $tdy = ydt + tdy + 2tdt$, ó bien $o = ydt + 2tdt$, de donde resultan las dos equaciones $-\frac{1}{2}y = t$, y $dt = o$, cuya integral es $t = A$ constante. Si se substituye ahora el primer valor hallado de la t en la equacion $x = S.\frac{tdy}{a}$, se tendrá $x = S. -\frac{ydy}{2a} = A - \frac{y^2}{4a}$ equacion á la Parábola Apoloniana; pero $x = \frac{ydx}{dy} + \frac{adx^2}{dy^2}$: luego será $A - \frac{y^2}{4a} = -\frac{y^2}{2a} + \frac{y^2}{4a} = -\frac{y^2}{4a}$; por consiguiente será la constante $A = o$, de modo que el primer valor hallado de la t dará la equacion $x = -\frac{y^2}{4a}$. El segundo valor de la t, esto es $t = A$, introducido en la equacion $x = S.\frac{tdy}{a}$ da $x = S.\frac{Ady}{a} = \frac{Ay}{a} + B$ constante; pero $x = \frac{ydx}{dy} + \frac{adx^2}{dy^2}$: luego será $\frac{Ay}{a} + B = \frac{Ay}{a} + \frac{A^2}{a}$; por consiguiente será $B = \frac{A^2}{a}$, de suerte que el segundo valor de la t dará la equacion $x = \frac{Ay + A^2}{a}$, que pertenece á la linea recta.

EXEMPLO II.

461. Se propone la equacion $x = -\frac{ydx}{dy} + \frac{adx^2}{dy^2} - b$.

Hágase $x = S.\frac{tdy}{a}$; y se tendrán las equaciones $dx = \frac{tdy}{a}$, $\frac{dx}{dy} = \frac{t}{a}$: luego por medio de estas substituciones la equacion propuesta se transformará en la $S.t\,dy = -yt + t^2 - ab$; y diferenciando esta expresion se tendrá $t\,dy = -y\,dt - t\,dy + 2t\,dt$, ó bien $2t\,dy + y\,dt - 2t\,dt = o$, cuya integral (416) es $2t^{\frac{1}{2}}y - \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} = 2Aa^{\frac{1}{2}}$ constante, de donde resulta $y = \frac{2}{3}t + \frac{A\sqrt{a}}{\sqrt{t}}$. Diferenciando ahora, se tendrá $dy = \frac{2}{3}dt - \frac{1}{2}A\sqrt{a} \times t^{-\frac{3}{2}}dt$; pero $x = S.\frac{tdy}{a}$: luego será $x = S.\left(\frac{2tdt}{3a} - \frac{Adt}{2\sqrt{a} \times \sqrt{t}}\right) = \frac{t^2}{3a} - \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{a}} + B$ constante; pero $x = \frac{-yt + t^2}{a} - b = -\frac{2t^2}{3a} - \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{a}} + \frac{t^2}{a} - b$: luego será $\frac{t^2}{3a} - \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{a}} + B = \frac{t^2}{3a} - \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{a}} - b$; de donde resulta ser $B = -b$, y el valor de la $x = \frac{t^2}{3a} - \frac{A\sqrt{t}}{\sqrt{a}} - b$.

ESCOLIO.

462. El referido método del Sabio Abate V. Riccati se puede aplicar con mucha utilidad á otros distintos casos con tal que la x sea lineal, como se manifiesta en los dos Exemplos siguientes.

EXEMPLO I.

463. Sea la equacion $x = \frac{ydx}{dy} + y^m \times M$, en quien se supone la M dada de qualquier modo por dx, dy, y constantes.

Hágase $x = S.tdy$: luego por medio de las correspondientes substituciones la equacion propuesta se transformará en la $S.tdy = yt + y^m \times N$; en quien la N quedará dada por la t, y constantes; y diferenciando, se tendrá $tdy = ydt + tdy + y^m dN + mNy^{m-1}dy$, de donde resulta ser $-\frac{dt}{Ny^{m-1}} = \frac{mdy}{y} + \frac{dN}{N}$. Hágase ahora $y^m N = z$, y será $y^{m-1} = z^{\frac{m-1}{m}} : N^{\frac{m-1}{m}}$: luego se tendrá $-\frac{dt \times N^{\frac{m-1}{m}}}{N \times z^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{dz}{z}$, y por consiguiente $-\frac{dt}{N^{\frac{1}{m}}} = \frac{dz}{z^{\frac{1}{m}}}$, equacion que tiene sus variables separadas.

EXEMPLO II.

464. Se propone la equacion $x = \frac{ydx}{dy} + \frac{ay^2dx^2}{dy^2} + \frac{by^3dx^3}{dy^3} + \frac{cy^4dx^4}{dy^4} + \&c.$

Hágase $x = S.tdy$; y por medio de las correspondientes substituciones la equacion propuesta se transformará en la $(A)\ S.tdy = yt + ay^2t^2 + by^3t^3 + cy^4t^4 + \&c.$ Asimismo hágase $yt = z$, de donde resulta $ydt + tdy = dz$, $S.tdy = z - S.ydt = z - S.\frac{zdt}{t}$, $y^2t^2 = z^2$, $y^3t^3 = z^3$, &c. luego por medio de estas substituciones la equacion A se reducirá á $z - S.\frac{zdt}{t} = z + az^2 + bz^3 + cz^4 + \&c.$ ó bien $-S.\frac{zdt}{t} = az^2 + bz^3 + cz^4 + \&c.$ y diferenciando, será $-\frac{zdt}{t} = 2azdz + 3bz^2dz + 4cz^3dz + \&c.$ de donde resulta ser $-\frac{dt}{t} = 2adz + 3bzdz + 4cz^2dz + \&c.$ é integrando será $A - L.t = 2az + \frac{3}{2}bz^2 + \frac{4}{3}cz^3 + \&c.$

PROPOSICION IV.

465. Hallar la integral de $Rdy^q = (T + Vx^p) \times (mxdy + ydx)^q$, en cuya expresion se suponen las T, R dadas por y, y $V = f^p T y^{mp} : \left(\frac{S.R^{\frac{1}{q}} y^{m-1} dy}{T^{\frac{1}{q}}}\right)^p$.

Hágase $mxdy + ydx = tzdy$, en quien la variable z se debe determinar sucesivamente por la y; y multiplicando la dicha suposicion por y^{m-1}, se tendrá $my^{m-1}xdy + y^m dx = tzy^{m-1}dy$, cuya integral es $xy^m = S.tzy^{m-1}dy$, de donde resulta $x = \frac{1}{y^m} \times S.tzy^{m-1}dy$: luego substituyendo estos valores en la diferencial propuesta, se tendrá $Rdy^q = \left(T + \frac{V}{y^{mp}} \times (S.tzy^{m-1}dy)^p\right) \times t^q z^q dy^q$; por consiguiente será (A) $R - t^q T z^q = t^q z^q \times \frac{V}{y^{mp}} \times (S.tzy^{m-1}dy)^p$. Supóngase ahora $\frac{R}{a^q} = Tz^q$, de donde resulta el valor de la z dado por y, esto es, $z = \frac{R^{\frac{1}{q}}}{aT^{\frac{1}{q}}}$; y substituyendo dicho valor en la equacion A, se tendrá $\frac{a^q - t^q}{a^q} \times R = \frac{t^q RV}{a^q T y^{mp}} \times \frac{1}{a^p} \times$

$\left(S.\frac{tR^{\frac{1}{q}}y^{m-1}dy}{T^{\frac{1}{q}}}\right)^p$, ó bien $\frac{(a^q-t^q)^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{q}{p}}}\times\frac{T^{\frac{1}{p}}y^m}{V^{\frac{1}{p}}}=$ $\frac{1}{a}\times S.\frac{tR^{\frac{1}{q}}y^{m-1}dy}{T^{\frac{1}{q}}}$: luego diferenciando esta expresion será $\frac{T^{\frac{1}{p}}y^m}{V^{\frac{1}{p}}}\times D.\frac{(a^q-t^q)^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{q}{p}}}+\frac{(a^q-t^q)^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{q}{p}}}\times$ $D.\frac{T^{\frac{1}{p}}y^m}{V^{\frac{1}{p}}}=\frac{tR^{\frac{1}{q}}y^{m-1}dy}{aT^{\frac{1}{q}}}$, de donde resulta la equacion (B) $\frac{T^{\frac{1}{p}}y^m}{V^{\frac{1}{p}}}\times D.\frac{(a^q-t^q)^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{q}{p}}}=\frac{tR^{\frac{1}{q}}y^{m-1}dy}{aT^{\frac{1}{q}}}$ $-\frac{(a^q-t^q)^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{q}{p}}}\times D.\frac{T^{\frac{1}{p}}y^m}{V^{\frac{1}{p}}}$: y siendo (sup.) $V=$ $f^pTy^{mp}:\left(S.\frac{R^{\frac{1}{q}}y^{m-1}dy}{T^{\frac{1}{q}}}\right)^p$, se tendrá $S.\frac{R^{\frac{1}{q}}y^{m-1}dy}{T^{\frac{1}{q}}}$ $=\frac{fT^{\frac{1}{p}}y^m}{V^{\frac{1}{p}}}$, y diferenciando esta expresion, será

$\frac{R^{\frac{1}{q}}y^{m-1}dy}{T^{\frac{1}{q}}}=f\times D.\frac{T^{\frac{1}{p}}y^m}{V^{\frac{1}{p}}}$: luego substituyendo el valor de esta diferencial, y él de V en la equacion B, se tendrá

$$S.\frac{R^{\frac{1}{q}}y^{m-1}dy}{fT^{\frac{1}{q}}}\times D.\frac{(a^q-t^q)^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{q}{p}}}=\left(\frac{t}{a}-\frac{(a^q-t^q)^{\frac{1}{p}}}{ft^{\frac{q}{p}}}\right)\times\frac{R^{\frac{1}{q}}y^{m-1}dy}{T^{\frac{1}{q}}},$$

de donde resulta ser la (C) $D.\frac{(a^q-t^q)^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{q}{p}}}$ partida por $\frac{t}{a}-\frac{(a^q-t^q)^{\frac{1}{p}}}{ft^{\frac{q}{p}}}$ igual á la $\frac{fR^{\frac{1}{q}}y^{m-1}dy}{T^{\frac{1}{q}}}$ partida por $S.\frac{R^{\frac{1}{q}}y^{m-1}dy}{T^{\frac{1}{q}}}$, equacion que tiene las variables separadas, y el segundo miembro de ella presenta una diferencial logarítmica. Supóngase para facilitar el cálculo $\frac{(a^q-t^q)^{\frac{1}{p}}}{t^{\frac{q}{p}}}=\frac{u}{a}$; por consiguiente será $t=\frac{a^{\frac{p+q}{q}}}{(a^p+u^p)^{\frac{1}{q}}}$: luego substituyendo el valor de t en la equacion C, é integrando, se tendrá $S. \frac{du \times (a^p + u^p)^{\frac{1}{q}}}{fa^{\frac{p+q}{q}} - u \times (a^p + u^p)^{\frac{1}{q}}} = L.\ S.\ \frac{R^{\frac{1}{q}} y^{m-1} dy}{T^{\frac{1}{q}}}$ $+ L.\ A$ constante, esto es, el valor de u dado por y, ó al contrario; pero $x = y^{-m} \times S. tzy^{m-1} dy$: luego substituyendo en esta expresion los valores de t, z, será $x = y^{-m} \times S. \frac{a^{\frac{p}{q}} R^{\frac{1}{q}} y^{m-1} dy}{T^{\frac{1}{q}} \times (a^p + u^p)^{\frac{1}{q}}}$. Que es &c.

PROPOSICION V.

466. Transformar una equacion diferencial de qualquier grado, que tiene los elementos dx, dy variables, en otra que tenga constante alguno de los mismos elementos multiplicado ó no por una de las variables, ó bien que tenga constante alguna funcion de las variables, y sus elementos.

1°. Si en la diferencial propuesta debe ser constante, por exemplo, el elemento dy, se quitarán de dicha diferencial todos los términos que contienen d^2y, d^3y, &c. y si debe ser constante el elemento d^2y, se quitarán todos los términos que contienen d^3y, &c. con lo que se tendrá la equacion que se pide. Discúrrase del mismo modo en los demas casos.

2°. Si en la diferencial propuesta se ha de suponer constante, por exemplo, el elemento yd^2y; diferénciese esta expresion, y se tendrá (A) $dyd^2y + yd^3y = o$, de donde resulta ser $d^3y = -\frac{dyd^2y}{y}$. Por tanto si la diferencial propuesta es del tercer órden, se deberá substituir en ella el valor hallado de d^3y; y si dicha diferencial es del quarto órden, se deberá diferenciar la fórmula A, y determinar el valor de d^4y que se substituirá en la dicha diferencial; y así sucesivamente por medio de estas substituciones se tendrá la equacion que se pide. Argúyase del mismo modo en los demas casos. Que es &c.

EXEMPLO I.

467. Se propone la equacion $axd^2y + 2adydx + ayd^2x + 2bdx^2 + 2bxd^2x = o$, cuyos elementos dy, dx son variables; y se pide transformarla en otra que tenga el elemento dx constante.

Quítense de la equacion propuesta los términos $ayd^2x + 2bxd^2x$ que contienen d^2x; y se tendrá la equacion $axd^2y + 2adydx + 2bdx^2 = o$, que tiene el elemento dx constante, como se pedia. Es evidente que la integral de $axd^2y + adydx$ es

$axdy$, y que la integral de $adydx+2bdx^2=(ady+2bdx)\times dx$ es $aydx+2bxdx$: luego la integral de la diferencial propuesta será $axdy+aydx+2bxdx+Cdx=o$, en quien Cdx es la constante añadida á dicha integral; é integrando de nuevo, se tendrá $axy+bx^2+Cx=A$ constante.

Asimismo si se pide la equacion que tiene el elemento dy constante; se ha de quitar de la equacion propuesta el término axd^2y, y resultará la equacion $2adydx+ayd^2x+2bdx^2+2bxd^2x=o$, que tiene el elemento dy constante.

EXEMPLO II.

468. Sea la equacion $2Xx^3dy^3=dy^3+dx^2dy-xdyd^2x+xdxd^2y=o$, en quien la X es una funcion de la variable x; y se pida transformarla en otra que tenga el elemento xdy constante.

Diferénciese dicho elemento constante xdy, y se tendrá $dydx+xd^2y=o$, de donde resulta ser $d^2y=-\frac{dydx}{x}$. Substitúyase ahora el valor hallado de d^2y en la equacion propuesta; y se tendrá la equacion $2Xx^3dy^3=dy^3+dx^2dy-xdyd^2x-dydx^2$, ó bien $2Xx^3dy^3=dy^3-xdyd^2x$, que tiene el elemento xdy constante. Es evidente que si se multiplica la equacion anterior por $\frac{dx}{x^3 dy^3}$, se tendrá la $2Xdx = \frac{dx}{x^3} - \frac{dxd^2x}{x^2dy^2}$; é integrando en la misma suposicion de la xdy constante, resultará $S.2Xdx = -\frac{1}{2x^2} - \frac{dx^2}{2x^2dy^2} + A$ constante.

EXEMPLO III.

469. Se propone la equacion $y^2 dy d^2 y + y dy^3 - a^2 dx d^2 x + y dy dx^2 + y^2 dx d^2 x = o$, que tiene sus elementos variables; y se pide transformarla en otra que tenga constante el elemento $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ igual á la diferencial de un arco s de qualquiera curba referida al exe.

Siendo, pues, $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ constante, lo será tambien su quadrado $dx^2 + dy^2$; y diferenciando esta expresion, se tendrá $2dxd^2x + 2dyd^2y = o$, de donde resulta ser $dyd^2y = -dxd^2x$. Por tanto si se substituye el valor hallado de dyd^2y en la diferencial propuesta, será $-y^2dxd^2x + ydy^3 - a^2dxd^2x + ydydx^2 + y^2dxd^2x = o$; por consiguiente se tendrá $-a^2dxd^2x + ydy \times (dy^2 + dx^2) = -a^2dxd^2x + ydyds^2 = o$.

EXEMPLO IV.

470. Se pide transformar la equacion $2x^2yd^2y$

$+2x^2 dy^2 + 8yxdxdy + 2xy^2 d^2x + 2y^2 dx^2 + abxd^2y + 2abdxdy + abyd^2x = o$ en otra que tenga el elemento $xdy + ydx$ constante.

Diferénciese la expresion $xdy + ydx$; y se tendrá $dxdy + xd^2y + dydx + yd^2x = o$, de donde resulta ser $d^2x = \frac{-2dxdy - xd^2y}{y}$; luego substituyendo el valor hallado de d^2x en la equacion diferencial propuesta, será $2x^2yd^2y + 2x^2dy^2 + 8yxdxdy - 4xydxdy - 2x^2yd^2y + 2y^2dx^2 + abxd^2y + 2abdxdy - 2abdxdy - abxd^2y = o$, que se reduce á $2x^2dy^2 + 4xydxdy + 2y^2dx^2 = 2\times(xdy + ydx)^2 = o$, de donde resulta que la cantidad supuesta $xdy + ydx$ necesariamente es constante, y de consiguiente igual á cero: luego integrando será $xy = A$ constante, cuya equacion es la integral correspondiente á la diferencial propuesta.

ESCOLIO.

471. En la Proposicion antecedente se ha dado el método general para transformar las diferenciales, que no tienen ningun elemento constante, en otras que le tengan; y en los Exemplos anteriores se ha manifestado que semejantes transformaciones son útiles para integrar las fórmulas di-

ferenciales. Por tanto en los casos particulares se procurará hacer la eleccion de aquellos elementos constantes que reducen las diferenciales propuestas á otras mas simples, cuyas integrales se pueden hallar con mayor facilidad. Finalmente adviértase que, si una equacion diferencial se transforma sucesivamente en otras por las suposiciones de dx, dy, ydx, &c. constantes; y las integrales de las equaciones transformadas pertenecen á una misma curva, será señal que puede haberse llegado á la equacion diferencial propuesta, de modo que no se haya tomado ningun elemento constante.

PROPOSICION VI.

472. Transformar una equacion diferencial de qualquier grado, que tiene algun elemento constante, en otra que le tenga variable.

1°. Si la equacion propuesta es diferencial del segundo órden, y tiene, por exemplo, el elemento dx constante; hágase (A) $dy = tdx$, en quien tdx expresa el verdadero valor que puede derivar de dicha equacion. Diferénciese ahora la fórmula A así en la suposicion de la dx constante, como en la de la dx variable; y se tendrán las equaciones $d^2y = dtdx$, $d^2y = dtdx + td^2x = dtdx + \frac{dyd^2x}{dx}$; por consiguiente será $dtdx$ ó bien d^2y

en la suposicion de la dx constante igual á $d^2y - \frac{dyd^2x}{dx}$ en la suposicion de la dx variable: luego si en la equacion propuesta se substituye $d^2y - \frac{dyd^2x}{dx}$ en lugar de d^2y, se tendrá la equacion transformada, que contiene los elementos dx, dy variables, como se pide. Si la equacion propuesta es una diferencial del tercer órden, y el elemento constante, por exemplo, es d^2x; hágase (B) $d^2y = td^2x$, expresando td^2x el verdadero valor que puede derivar de la dicha equacion. Diferénciese ahora la fórmula B así en la suposicion de la d^2x constante, como en la de la d^2x variable; y se tendrán las equaciones $d^3y = dtd^2x$, $d^3y = dtd^2x + td^3x = dtd^2x + \frac{d^2y \times d^3x}{d^2x}$; por consiguiente será dtd^2x ó bien d^3y en la suposicion de d^2x constante igual á $d^3y - \frac{d^2yd^3x}{d^2x}$ en la suposicion de d^2x variable. Por tanto si en la equacion propuesta del tercer órden se substituye $d^3y - \frac{d^2yd^3x}{d^2x}$ en lugar de d^3y, se tendrá la equacion transformada, que contiene los elementos d^2x, d^2y variables, como se pide. Argúyase del mismo modo respecto á las equaciones de superior grado.

2°. Si la equacion diferencial propuesta es una diferencial del segundo órden, y contiene, por exemplo, el elemento constante $y\,dx$; se hará la substitucion $dy = t \times y\,dx$; y con el mismo método expresado en el caso anterior se hallará el valor de d^2y que se ha de substituir en la equacion propuesta: luego se tendrá la equacion transformada que no contiene ningun elemento constante. Se ha supuesto que la equacion propuesta contiene solamente la d^2y variable; pero si contiene tambien la d^2x, como puede suceder en el presente caso segundo, entonces se deberá diferenciar ante todas cosas la suposicion del elemento constante, y relativamente al referido elemento propuesto se tendrá $dy\,dx + y\,d^2x = o$, de donde resulta ser $d^2x = -\frac{dydx}{y}$: luego substituyendo el valor hallado de d^2x en la equacion propuesta, resultará una equacion que contiene la sola d^2y; y en esta equacion se harán las operaciones expresadas anteriormente. Discúrrase del mismo modo respecto á las diferenciales de superior grado. Que es &c.

EXEMPLO I.

473. Sea la equacion diferencial $dx^2 dy - dy^3$

$= b\,dx\,d^2y + x\,dx\,d^2y$, que tiene el elemento dx constante.

Por lo demostrado en el caso primero de la Proposicion antecedente se ha de substituir en la equacion propuesta la cantidad $d^2y - \frac{dy\,d^2x}{dx}$ en lugar de d^2y, para que la misma equacion tenga tambien variable el elemento dx; y hecha dicha substitucion, se tendrá la equacion $dx^2\,dy - dy^3 = b\,dx\,d^2y - b\,dy\,d^2x + x\,dx\,d^2y - x\,dy\,d^2x$, que tiene los elementos dx, dy variables.

Ahora si en la equacion anterior se supone dy constante, se tendrá $dx^2\,dy - dy^3 = -b\,dy\,d^2x - x\,dy\,d^2x$, ó bien $dx^2 + x\,d^2x + b\,d^2x - dy^2 = 0$, cuya integral es $x\,dx + b\,dx - y\,dy = C\,dy$ constante; é integrando de nuevo, será $\frac{1}{2}x^2 + bx - \frac{1}{2}y^2 = Cy + A$ constante, cuya equacion es la integral completa de la diferencial propuesta.

EXEMPLO II.

474. Se pide transformar la equacion diferencial $a^2d^2x + 2byx\,d^2x + 2by\,dx^2 + 3bx\,dx\,dy + 6y\,dy^2 - 3y^2x^{-1}\,dy\,dx = 0$ que tiene el elemento $x\,dy$ constante, en otra que tenga sus elementos variables.

Hágase $dx = t \times x\,dy$; y diferenciando esta expresion así en la suposicion de la $x\,dy$ constante, como tambien de la $x\,dy$ variable, se tendrá $d^2x = dt \times x\,dy$, $d^2x = dt \times x\,dy + t\,dx\,dy + t\,x\,d^2y$ $= dt \times x\,dy + \frac{dx^2\,dy}{x\,dy} + \frac{x\,dx\,d^2y}{x\,dy}$: luego será $dt \times x\,dy$ ó bien d^2x en la suposicion de la $x\,dy$ constante igual á $d^2x - \frac{dx^2 \times dy}{x\,dy} - \frac{x\,dx\,d^2y}{x\,dy}$ en la suposicion de la $x\,dy$ variable. Por tanto si en la equacion propuesta se substituye $d^2x - \frac{dx^2\,dy}{x\,dy} - \frac{x\,dx\,d^2y}{x\,dy}$ en lugar de d^2x, se tendrá $a^2\,d^2x - \frac{a^2\,dx^2\,dy}{x\,dy} - \frac{a^2\,x\,dx\,d^2y}{x\,dy}$ $+ 2byx\,d^2x - \frac{2byx\,dx^2\,dy}{x\,dy} - \frac{2bx^2\,y\,dx\,d^2y}{x\,dy} + 2by\,dx^2$ $+ 3bx\,dx\,dy + 6y\,dy^2 - 3y^2x^{-1}\,dy\,dx = o$, cuya equacion no tiene ningun elemento constante.

ESCOLIO.

475. Adviértase que si las diferenciales, que tienen algun elemento constante, no se pueden integrar, será útil transformarlas en otras que tengan todos los elementos variables, con el objeto de experimentar, si hecha en estas la suposicion de algun otro elemento constante resultan otras equaciones diferenciales que se puedan integrar.

PROPOSICION VII.

476. Transformar en diferenciales del primer órden las fórmulas $Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+2-n} = dx^m d^2 y$, $Px^m dy^{m+1} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m-n+1} = dx^{m-1} d^2 x$, en quienes la suma de los exponentes de la x y sus diferenciales es la misma en todos los términos, y las cantidades P, Q se suponen dadas por qualesquiera funciones de la variable finita y.

1°. La equacion $Px^m dy^{m+2} + Qx^{m-n} dx^n dy^{m+2-n} = dx^m d^2 y$ tiene el elemento dx constante, y la suma de los exponentes de x y dx es la misma en todos los términos. Hágase $x = e^u$; y se tendrán las equaciones $dx = e^u \times du$, $d^2 x = o = e^u \times (d^2 u + du^2)$; de donde resulta $d^2 u = - du^2$: luego hechas las correspondientes substituciones en la equacion propuesta, y partido el resultado por e^{mu}, se tendrá la (A) $P dy^{m+2} + Q du^n dy^{m+2-n} = du^m d^2 y$. Y finalmente hágase la substitucion $du = z dy$; y se tendrá la equacion $d^2 u = dz dy + z d^2 y = - du^2$, de donde resulta $d^2 y = - \frac{du^2}{z} - \frac{dz dy}{z} = - z dy^2 - \frac{dz \times dy}{z}$: luego por medio de estas substituciones la equacion A se transformará en la (B) $P\,dy + Qz^n\,dy = -z^{m+1}\,dy - z^{m-1}\,dz$, que contiene las solas diferenciales primeras.

2°. La equacion $Px^m\,dy^{m+1} + Qx^{m-n}\,dx^n\,dy^{m-n+1} = dx^{m-1}\,d^2x$ tiene la dy constante; y la suma de los exponentes de x, dx, y d^2x es la misma en todos los términos. Hágase $x = e^u$; y se tendrán las equaciones $dx = e^u \times du$, $d^2x = e^u \times (du^2 + d^2u)$: luego por medio de estas substituciones la equacion propuesta se transformará en la (C) $P\,dy^{m+1} + Q\,du^n \times dy^{m-n+1} = du^{m+1} + du^{m-1} \times d^2u$. Supóngase $du = z\,dy$, y diferenciando será $d^2u = dz\,dy$. Por tanto la equacion C se transformará por dichas substituciones en la (E) $P\,dy + Qz^n\,dy = z^{m+1}\,dy + z^{m-1}\,dz$, que contiene solo las diferenciales primeras. Que es &c.

ESCOLIO.

477 Adviértase que el referido método se extiende á las equaciones que están compuestas de un número mayor de términos, con tal que tengan las mismas condiciones. Y en general todas las equaciones de qualquier grado, que tienen las dichas condiciones, se reducen al grado próxîmo inferior por el método de la Proposicion antecedente; y así la equacion que contiene, por exemplo, d^3y se reduce á otra que tiene la d^2y: pero á

proporcion que se aumenta el grado de la equacion, el cálculo se hace siempre mas dilatado y dificultoso. Dígase lo mismo respecto de la fórmula contenida en la Proposicion siguiente.

EXEMPLO I.

478. Sea la equacion $ax^m dx^{-m} = y^n dy^{-m-2} d^2 y$.

Pártase dicha equacion por y^n, y se tendrá la $ax^m y^{-n} dx^{-m} = dy^{-m-2} d^2 y$, que tiene las condiciones expresadas en el caso primero de la Proposicion antecedente. Compárese ahora la fórmula de dicho caso con la equacion anterior, y se tendrán $P = ay^{-n}$, $Q = o$: luego substituyendo estos valores en la equacion general B, será $ay^{-n} dy = -z^{m+1} dy - z^{m-1} dz$ la equacion diferencial del primer órden, á que se reduce la propuesta.

EXEMPLO II.

479. Sea la equacion $ax^m dx^{-n+1} = y^n dy^{-n-1} d^2 y$.

Escríbanse y en lugar de x, y x en lugar de y en la equacion propuesta, para que se acomode á la forma del caso segundo de la Proposicion antecedente; con lo que se tendrá la equacion $ay^m dy^{-n+1} = x^n dx^{-n-1} d^2 x$; y partiéndola por x^n, será $ay^m x^{-n} dy^{-n+1} = dx^{-n-1} d^2 x$. Compárese ahora la fórmula de dicho caso con la equacion anterior, y se tendrán $P=ay^m$, $Q=o$, $m=-n$: luego substituyendo estos valores en la equacion general E, será $ay^m dy=z^{-n+1}dy+z^{-n-1}dz$ equacion diferencial del primer órden.

PROPOSICION VIII.

480. Transformar en una diferencial del primer órden la fórmula $ax^m y^{-m-1}dx^p dy^{2-p}+bx^n y^{-n-1}dx^q dy^{2-q}=d^2y$, en quien la dx es constante, y las variables x, y con sus diferenciales tienen en cada término una misma dimension.

Hágase la substitucion $x=e^u$, en quien la cantidad e expresa el número, cuyo logaritmo hiperbólico es la unidad: luego diferenciando será $dx=e^u\times du$; y diferenciando de nuevo en la suposicion de la dx constante, se tendrá $d^2x=o=e^u\times(du^2+d^2u)$; por consiguiente $d^2u=-du^2$. Asimismo hágase $y=e^u\times t$: luego diferenciando será $dy=e^u\times(tdu+dt)$, y diferenciando nuevamente, se tendrá $d^2y=e^u\times(tdu^2+2dtdu+td^2u+d^2t)=e^u\times(2dtdu+d^2t)$, por ser $d^2u=-du^2$. Por tanto si se substituyen los valores de las variables x, y, y de sus diferenciales en la fórmula propuesta, se tendrá la equacion (A) $at^{-m-1}du^p\times(tdu+dt)^{2-p}+bt^{-n-1}du^q\times(tdu+dt)^{2-q}=2dtdu+d^2t$. Y finalmente hágase la substitucion $du = z\,dt$, de donde resultan las equaciones $d^2u = -du^2 = dzdt + zd^2t$: luego será $d^2t = -zdt^2 - \frac{dzdt}{z}$. Por tanto si se substituyen los valores hallados de las diferenciales du y d^2t en la equacion A, se tendrá $at^{-m-1}z^p dt^p \times (ztdt + dt)^{2-p} + bt^{-n-1}z^q dt^q \times (zt\,dt + dt)^{2-q} = zdt^2 - \frac{dzdt}{z}$; y partiendo por dt, será $az^p t^{-m-1} dt \times (zt+1)^{2-p} + bz^q t^{-n-1} dt \times (zt+1)^{2-q} = zdt - \frac{dz}{z}$, equacion diferencial del primer órden. Que es &c.

PROPOSICION IX.

481. Transformar en una diferencial del primer órden la fórmula $ax^m dx^p = y^n dy^{p-2} d^2y$, en quien la dx es constante.

Hágase $x = e^{hu}$, en quien $L.e = 1$; y diferenciando será $dx = e^{hu} \times hdu$; por consiguiente $d^2x = e^{hu} \times (h^2du^2 + hd^2u)$; pero $d^2x = o$: luego será $d^2u = -hdu^2$. Asimismo hágase $y = e^{ku} \times t$; y se tendrán las equaciones, $dy = e^{ku} \times (dt + ktdu)$, $d^2y = e^{ku} \times (d^2t + ktd^2u + 2kdtdu + k^2tdu^2)$: luego substituyendo en esta el valor hallado de d^2u, será $d^2y = e^{ku} \times (d^2t + 2kdtdu + (k^2 - hk) \times tdu^2)$.

Por tanto la equacion propuesta por medio de las referidas substituciones se transformará en la (A) $ae^{(m+p)\times hu}\times h^p du^p = e^{(n+p-1)\times ku}\times t^n \times (dt+kt\,du)^{p-2}\times(d^2t+2kdtdu+(k^2-hk)\times tdu^2)$. Ahora si se supone $(m+p)\times h=(n+p-1)\times k$, ó bien $m+p=k$, y $h=n+p-1$, la equacion A se podrá partir por la cantidad exponencial, y hecha esta division se reducirá á (B) $a\times(n+p-1)^p\times du^p = t^n\times(dt+(m+p)\times t\,du)^{p-2}\times (d^2t+2\times(m+p)\times dtdu+(m+p)\times(m-n+1)\times tdu^2)$. En fin hágase la substitucion $du=z\,dt$; y diferenciando esta expresion, será $d^2u=dz\,dt+z\,d^2t$; pero $d^2u=-h\,du^2=(1-n-p)\times du^2$: luego será $(1-n-p)\times du^2=dz\,dt+z\,d^2t$, y por consiguiente $d^2t=(1-n-p)\times\frac{du^2}{z}-\frac{dzdt}{z}$, ó bien $d^2t=(1-n-p)\times z\,dt^2-\frac{dzdt}{z}$. Por tanto si se substituyen los valores de las diferenciales du y d^2t en la equacion B, se tendrá $a\times(n+p-1)^p\times z^p\,dt^p=t^n\times(dt+(m+p)\times z\,t\,dt)^{p-2}\times (-\frac{dzdt}{z}+(2m-n+p+1)\times zdt^2+(m+p)\times(m-n+1)\times z^2tdt^2)$; y partiendo esta equacion por dt^{p-1}, será (C) $a\times(n+p-1)^p\times z^p\,dt=t^n\times(1+(m+p)\times zt)^{p-2}\times (-\frac{dz}{z}+(2m-n+p+1)\times zdt+(m+p)\times(m-n+1)\times z^2tdt)$

equacion diferencial del primer órden. Que es &c.

ESCOLIO.

482. En la Proposicion antecedente se ha supuesto que es $(m+p)\times h=(n+p-1)\times k$: luego siendo $m+p=o$, será $n+p-1=o$, ó al contrario; por consiguiente la equacion anterior C quedará inútil. En estos casos la fórmula diferencial propuesta se convertirá en las $ax^m dx^{-m} = y^n dy^{-m-2} d^2y$, $ax^m dx^{-n+1} = y^n dy^{-n-1} d^2y$, que se han reducido antes (478, 479) á diferenciales del primer órden.

PROPOSICION X.

483. Reducir á diferencial primera qualquiera diferencial del segundo órden, que contiene la sola variable x, y sus funciones, y las diferenciales dy, d^2y mezcladas entre sí de qualquier modo, y elevadas á qualquiera potestad, y constante el elemento dx multiplicado ó no por la variable x, ó bien el elemento compuesto de x, dx, dy.

1°. Si la equacion propuesta contiene la sola variable x, y sus funciones, y las diferenciales de la otra variable, esto es, dy, d^2y, mezcladas de qualquier modo entre sí, y elevadas á qualquiera potestad, y el elemento dx constante; hágase la substitucion $dy = t\,dx$, y será $d^2y = dt\,dx$: luego por estas substituciones la equacion transformada se partirá por la correspondiente potencia de la dx, y quedará una equacion diferencial primera entre x, t, dx, dt. Argúyase del mismo modo, si el elemento constante está compuesto de la variable x y dx, como por exemplo $x\,dx$, con tal que en este caso se haga la substitucion $dy = t \times x\,dx$.

2°. Si el elemento constante está compuesto de x, dx, dy, cuya fórmula $P\,dx + Q\,dy$, en quien P y Q están dadas por la variable x; hágase $dy = t\,dx$; y diferenciando esta expresion, se tendrá $d^2y = dt\,dx + t\,d^2x$. Además, por ser $dy = t\,dx$, se tendrán las equaciones $Q\,dy = Q\,t\,dx$, $Q\,dy + P\,dx = P\,dx + Q\,t\,dx$; por consiguiente la diferencial de $P\,dx + Q\,t\,dx$ será igual á cero, esto es, $Q\,t\,d^2x + P\,d^2x + Q\,dx\,dt + t\,dx\,dQ + dx\,dP = o$, de donde resulta $d^2x = -\frac{Qdxdt + tdxdQ + dxdP}{Qt + P}$: luego por las referidas substituciones se despejarán de la equacion propuesta las dy, d^2y, y se tendrá entre t y x una equacion diferencial del primer órden. Que es &c.

ESCOLIO.

484. Se ha supuesto en la Proposicion antecedente que el elemento dx es constante en la equa-

cion dada: pues si le tiene variable, se reducirá á constante por el método dado (466). Dígase lo mismo respecto á las equaciones que tienen la dy constante, porque éstas se reducirán (472) á otras que tengan la dy variable y la dx constante. Por tanto es evidente que el método de la Proposicion antecedente se puede aplicar á las dichas equaciones, con tal que tengan la sola variable finita x y sus funciones: y en esta suposicion el referido método es útil para reducir una equacion diferencial de qualquier otro órden superior á otra del órden próxîmo inferior, como por exemplo una equacion que contiene la d^3y á otra que contenga la d^2y.

EXEMPLO I.

485. Sea la equacion diferencial $axdxdy + x^3d^2y + b^2dydx = o$, que tiene la sola variable finita x, y el elemento constante dx.

Hágase $dy = tdx$; y diferenciando esta equacion en la suposicion del elemento dx constante, se tendrá $d^2y = dtdx$: luego si se substituyen los valores de las diferenciales dy, d^2y en la equacion propuesta, será $atxdx^2 + x^3dtdx + b^2tdx^2 = o$; por consiguiente se tendrá $atxdx + x^3dt + b^2tdx = o$, que es una equacion diferencial del primer órden.

EXEMPLO II.

486. Se propone la equacion diferencial $2a^2dy^2 + 2ax\sqrt{(x^2+c^2)} \times d^2y - 8x^2dx^2 = 0$, que tiene el elemento constante xdx, y la sola variable finita x.

Hágase $dy = t \times xdx$; y diferenciando esta equacion en la suposicion del elemento xdx constante, se tendrá $d^2y = dt \times xdx$: luego substituyendo los valores de las diferenciales dy, d^2y en la equacion propuesta, será $2a^2t^2x^2dx^2 + 2ax^2\sqrt{(x^2+c^2)} \times dtdx - 8x^2dx^2 = 0$; de donde resulta la equacion $a^2t^2dx + ax\sqrt{(x^2+c^2)} \times dt - 4dx = 0$, que es una diferencial del primer órden.

EXEMPLO III.

487. Sea la equacion diferencial $dxd^2x + (X+1) \times dyd^2y = 0$, en quien la cantidad X expresa qualquiera funcion de la variable finita x, y el elemento constante es $adx + xdy$.

Hágase $dy = tdx$; y diferenciando esta expresion se tendrá $d^2y = dtdx + td^2x$: luego será el elemento constante $adx + xdy$ igual á $adx + txdx$, cuya diferencial es $ad^2x + txd^2x + tdx^2 + xdxdt = 0$, de donde resulta ser $d^2x = -\frac{tdx^2 + xdxdt}{a+tx}$;

pero es $d^2y = dtdx + td^2x$: luego será $d^2y = dtdx - \frac{t^2dx^2 + txdxdt}{a+tx} = \frac{adtdx - t^2dx^2}{a+tx}$; y substituyendo ahora los valores hallados de las diferenciales d^2x, d^2y, dy en la equacion propuesta, se tendrá $-\frac{tdx^3 + xdx^2dt}{a+tx} + (X+1) \times \frac{atdtdx^2 - t^3dx^3}{a+tx}$ $= o$, ó bien $-tdx + xdt + (X+1) \times (tdt - t^3dx)$ $= o$, equacion diferencial del primer órden.

EXEMPLO IV.

488. Se pide transformar la equacion diferencial del quarto órden $x^3d^4y + x^2dxd^3y + axdx^2d^2y + dx^3dy + dy^4 = o$ en otra del tercero.

Hágase $dy = tdx$: luego en la suposicion de la dx constante se tendrán las equaciones, $d^2y = dtdx$, $d^3y = d^2tdx$, $d^4y = d^3tdx$; y substituyendo estos valores en la equacion diferencial propuesta, resultará la $x^3d^3tdx + x^2d^2tdx^2 + axdtdx^3 + tdx^4 + t^4dx^4 = o$: luego partiendo por dx, se tendrá $x^3d^3t + x^2d^2tdx + axdtdx^2 + tdx^3 + t^4dx^3 = o$, equacion diferencial del tercer órden.

PROPOSICION XI.

489. Hallar la integral de la equacion $d^ny = xM + N$, en quien las cantidades M, N se supo-

nen dadas por $d^{n+1}y$, y por el elemento dx que se considera constante.

Hágase $d^{n+1}y = t\,dx^{n+1}$; é integrando será (*A*) $d^n y = dx^n \times S.\,t\,dx$: luego por medio de esta substitucion la equacion propuesta tendrá la forma $dx^n \times S.\,t\,dx = x\,dx^n \times P + dx^n \times Q$, en quien las cantidades P, Q están dadas por la t y constantes; y partiendo por dx^n, será $S.\,t\,dx = Px + Q$. Por tanto si se diferencia esta equacion, será $t\,dx = P\,dx + x\,dP + dQ$, ó bien $(t-P) \times dx = x\,dP + dQ$, en quien las variables t y x se pueden separar por lo demostrado (428). Ahora para determinar el valor de la y, intégrese la expresion *A*; y se tendrá $d^{n-1}y = dx^{n-1}\,S.\,(dx \times S.\,t\,dx)$; é integrando de nuevo esta expresion, será $d^{n-2}y = dx^{n-2} \times S.\,(dx \times S.\,dx \times S.\,t\,dx)$; y así continúese hasta determinar el valor de la y. Que es &c.

EXEMPLO I.

490. Se pide hallar la integral de la equacion $a\,d^4 y = \frac{x\,d^5 y}{dx} + b\,dx^4$.

Hágase $d^5 y = t\,dx^5$; é integrando esta expresion, será $d^4 y = dx^4 \times S.\,t\,dx$: luego si se substituyen los valores de $d^5 y$, $d^4 y$ en la equacion diferencial propuesta, se tendrá $a\,dx^4 \times S.\,t\,dx =$

$xt + bdx^4$; y partiendo por dx^4, será $a \times S.tdx = xt + b$: luego diferenciando esta equacion, se tendrá $atdx = xdt + tdx$, ó bien $(at - t) \times dx = xdt$, de donde resulta ser $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{(a-1) \times t}$, ó bien $(a-1) \times \frac{dx}{x} = \frac{dt}{t}$; é integrando será $(a-1) \times L.x + L.A = L.t$; por consiguiente $Ax^{a-1} = t$; pero $d^5y = tdx^5$: luego será $d^5y = Ax^{a-1}dx^5$, é integrando se tendrá $d^4y = dx^4 \times S.Ax^{a-1}dx = \frac{A}{a} \times x^a dx^4 + Bdx^4$. luego integrando sucesivamente se tendrán las equaciones, $d^3y = dx^3 \times S.(\frac{A}{a} \times x^a dx + Bdx) = \frac{A}{a \times (a+1)} \times x^{a+1}dx^3 + Bxdx^3 + Cdx^3$, $d^2y = dx^2 \times S.(\frac{A}{a \times (a+1)} \times x^{a+1}dx + Bxdx + Cdx) = \frac{A}{a \times (a+1) \times (a+2)} \times x^{a+2}dx^2 + \frac{1}{2}Bx^2dx^2 + Cxdx^2 + Edx^2$, $dy = dx \times S.(\frac{A}{a \times (a+1) \times (a+2)} \times x^{a+3}dx + \frac{1}{2}Bx^2dx + Cxdx + Edx)$ $= \frac{A}{a \times (a+1) \times (a+2) \times (a+3)} \times x^{a+3}dx + \frac{1}{2 \times 3}Bx^3dx + \frac{1}{2}Cx^2dx + Exdx + Fdx$, y finalmente $y = \frac{A}{a \times (a+1) \times (a+2) \times (a+3) \times (a+4)} \times x^{a+4} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} \times Bx^4$

$+\frac{1}{2\times3}\times Cx^3+\frac{1}{2}\times Ex^2+Fx+G$. En esta equacion se hallan las seis constantes A, B, C, E, F, G añadidas á las integrales, mientras la diferencial propuesta es del quinto órden: y para determinar una de dichas constantes, como la segunda B por la primera A ó por cantidades conocidas, se deberán substituir los valores hallados de d^5y, d^4y en la equacion propuesta; y hecha esta operacion, se tendrá $Ax^a dx^4+Ba\,dx^4=Ax^a dx^4+b\,dx^4$; por consiguiente deberá ser $Ba=b$, de donde $B=\frac{b}{a}$. Por tanto la integral de la equacion diferencial propuesta será $y=\frac{Ax^{a+4}}{a\times(a+1)\times(a+2)\times(a+3)\times(a+4)}$ $+\frac{bx^4}{2\times3\times4\times a}+\frac{Cx^3}{2\times3}+\frac{Ex^2}{2}+Fx+G$.

EXEMPLO II.

491. Sea la equacion diferencial $ad^4y=\frac{x^{\frac{1}{2}}d^5y^2}{dx^6}$ $+b\,dx^4$.

Hágase $d^5y=t\,dx^5$; é integrando esta expresion será $d^4y=dx^4\times S.\,t\,dx$: luego si se substituyen los valores de d^5y, d^4y en la equacion propuesta, se tendrá $a\,dx^4\times S.\,t\,dx=x t^2 dx^4$ $+b\,dx^4$; y partiendo por dx^4, será $a\times S.\,t\,dx=$

xt^2+b: luego diferenciando esta equacion, se tendrá $atdx=t^2dx+2xtdt$, ó bien $(at-t^2)\times dx=2xtdt$, de donde resulta ser $\frac{dx}{x}=\frac{2dt}{a-t}$, cuya integral es $L.x=-2L.(a-t)+L.A$: luego $t=a-\sqrt{A}\times x^{-\frac{1}{2}}$; pero $d^5y=tdx^5$: luego será $d^5y=adx^5-\sqrt{A}\times x^{-\frac{1}{2}}dx^5$; é integrando sucesivamente, se tendrán las equaciones, $d^4y=dx^4\times S.(adx-\sqrt{A}\times x^{-\frac{1}{2}}dx)=axdx^4-2\sqrt{A}\times x^{\frac{1}{2}}dx^4+Bdx^4$, $d^3y=dx^3\times S.(axdx-2\sqrt{A}\times x^{\frac{1}{2}}dx+Bdx)=\frac{1}{2}ax^2dx^3-\frac{2^2}{3}\sqrt{A}\times x^{\frac{3}{2}}dx^3+Bxdx^3+Cdx^3$, $d^2y=dx^2\times S.(\frac{1}{2}ax^2dx-\frac{2^2}{3}\sqrt{A}\times x^{\frac{3}{2}}dx+Bxdx+Cdx)=\frac{1}{2\times3}ax^3dx^2-\frac{2^3}{3\times5}\sqrt{A}\times x^{\frac{5}{2}}dx^2+\frac{1}{2}Bx^2dx^2+Cxdx^2+Edx^2$, $dy=dx\times S.(\frac{1}{2\times3}ax^3dx-\frac{2^3}{3\times5}\sqrt{A}\times x^{\frac{5}{2}}dx+\frac{1}{2}Bx^2dx+Cxdx+Edx)=\frac{1}{2\times3\times4}ax^4dx-\frac{2^4}{3\times5\times7}\sqrt{A}x^{\frac{7}{2}}dx+\frac{1}{2\times3}Bx^3dx+\frac{1}{2}Cx^2dx+Exdx+Fdx$, y finalmente $y=\frac{1}{2\times3\times4\times5}ax^5-\frac{2^5}{3\times5\times7\times9}\sqrt{A}\times x^{\frac{9}{2}}+\frac{1}{2\times3\times4}Bx^4+\frac{1}{2\times3}Cx^3+\frac{1}{2}Ex^2+Fx+G$. Ahora para determinar el valor de la constante B por la A ó por las cantidades conocidas, se han de substituir los valores hallados de las diferenciales d^5y, d^4y en la equacion propuesta; y hecha esta operacion, se tendrá $a^2xdx^4 - 2a\sqrt{A} \times x^{\frac{1}{2}}dx^4 + aBdx^4 = a^2xdx^4 - 2a\sqrt{A} \times x^{\frac{1}{2}}dx^4 + Adx^4 + bdx^4$: luego para que esta equacion sea idéntica, deberá ser $aB = A + b$, y por consiguiente $B = \frac{A+b}{a}$.

PROPOSICION XII.

492. **La equacion que contiene la d^ny de dimension lineal, y las $d^{n+1}y$, x y dx constante mezcladas entre sí de qualquier modo, y elevadas á qualquiera potestad, se reduce siempre á una equacion diferencial del primer órden.**

Supóngase $d^{n+1}y = tdx^{n+1}$; é integrando será $d^ny = dx^n \times S.tdx$: luego por medio de estas substituciones la equacion transformada se podrá partir por la dx, de modo que quedará en ella la $S.tdx$ de dimension lineal, y las variables x, t. Por tanto si se prepara oportunamente dicha equacion transformada, y se diferencia, se tendrá una equacion diferencial del primer órden. Que es &c.

EXEMPLO I.

493. Sea la equacion diferencial $d^7y = \frac{ax^4 dx^{23}}{d^8y^2} + \frac{bd^8y^2}{dx^9}$.

Hágase $d^8y = tdx^8$; é integrando esta expresion será $d^7y = dx^7 \times S.tdx$: luego si se substituyen los valores de d^7y, d^8y en la equacion diferencial propuesta, se tendrá $dx^7 \times S.tdx = \frac{ax^4 dx^{23}}{t^2 dx^{16}} + \frac{bt^2 dx^{16}}{dx^9}$, de donde resulta ser $S.tdx = ax^4 t^{-2} + bt^2$; y diferenciando esta equacion, será $tdx = 4ax^3 t^{-2} dx - 2ax^4 t^{-3} dt + 2btdt$, equacion diferencial del primer órden; y siendo además una equacion homogenea, se podrá determinar por el método dado (421) el valor de la variable t por la x: luego si se substituye dicho valor en la expresion $d^8y = tdx^8$, por las sucesivas integrales de ella se determinará últimamente el valor de la variable y por la x, como se ha manifestado en la Proposicion XI y sus Exemplos.

EXEMPLO II.

494. Sea la equacion diferencial $d^ny = \frac{axd^{n+1}y}{dx} + \frac{bx^2 d^{n+1}y^2}{dx^{n+2}} + \frac{cx^3 d^{n+1}y^3}{dx^{2n+3}} + \&c.$

Hágase $d^{n+1}y = t\,dx^{n+1}$; é integrando será $d^n y = dx^n \times S.t\,dx$: luego substituyendo los valores de $d^n y$, $d^{n+1}y$ en la equacion propuesta, se tendrá $dx^n \times S.t\,dx = axt\,dx^n + bx^2t^2dx^n + cx^3t^3dx^n +$ &c. y partiendo por dx^n, será $S.t\,dx = axt + bx^2t^2 + cx^3t^3 +$ &c. cuya diferencial es $t\,dx = a \times D.xt + b \times D.x^2t^2 + c \times D.x^3t^3 +$ &c. equacion diferencial del primer órden, que fácilmente por la substitucion $xt = z$ se reduce á otra, que tiene sus variables separadas; pues será $\frac{zdx}{x} = adz + 2bz\,dz + 3cz^2dz$ + &c. y partiendo por z, se tendrá $\frac{dx}{x} = \frac{adz}{z}$ $+ 2bdz + 3czdz +$ &c.

PROPOSICION XIII.

495. Toda equacion que contiene la $d^n y$ lineal, y además las cantidades $d^{n+1}y$, $d^{n+2}y$, mezcladas con las x, y dx constante, se reduce siempre á una equacion diferencial del segundo órden.

Hágase $d^{n+1}y = t\,dx^{n+1}$; y hecha esta substitucion, y la particion por dx^n, se hallará la $S.t\,dx$ igual á una cantidad compuesta de x, dx, t, dt: luego diferenciando se tendrá una equacion diferencial del segundo órden. Que es &c.

ESCOLIO.

496. El referido método del Sabio Abate V. Riccati se extiende á las equaciones, que contienen la $d^n y$ lineal, y las $d^{n+2} y$, $d^{n+3} y$, $d^{n+4} y$, &c. mezcladas con las x y dx constante, de modo que dichas equaciones se reducen á las diferenciales de los órdenes tercero, quarto, &c.

EXEMPLO I.

497. Sea la equacion diferencial $d^n y = \frac{x d^{n+1} y}{dx}$ $+ \frac{a d^{n+2} y}{dx^2}$.

Hágase $d^{n+1} y = t\, dx^{n+1}$, que tiene la integral $d^n y = dx^n \times S.\, t\, dx$, y la diferencial $d^{n+2} y = dt\, dx^{n+1}$: luego si se substituyen los valores de $d^n y$, $d^{n+1} y$, $d^{n+2} y$ en la equacion propuesta, se tendrá $dx^n \times S.\, t\, dx = x t\, dx^n + \frac{a dx^n dt}{dx}$; y partiendo por dx^n, será $S.t\, dx = xt + \frac{adt}{dx}$, cuya diferencial es $t\, dx = x\, dt + t\, dx + \frac{ad^2 t}{dx}$, que se reduce á $x\, dt = -\frac{ad^2 t}{dx}$, equacion diferencial del segundo órden, que fácilmente se reduce á una diferencial del primero: pues será $\frac{xdx}{a} = -\frac{d^2t}{dt}$; é integrando, se tendrá $\frac{x^2}{2a} \times L.e = -L.dt + L.Adx$ constante, en quien $L.e = 1$; por consiguiente será $e^{\frac{x^2}{2a}} = \frac{Adx}{dt}$, ó bien $dt = Adx : e^{\frac{x^2}{2a}}$.

EXEMPLO II.

498. Se propone la equacion diferencial $d^n y = \frac{xd^{n+1}y}{dx} + \frac{ad^{n+2}y^3}{dx^{2n+6}}$.

Hágase $d^{n+1}y = tdx^{n+1}$, que tiene la integral $d^n y = dx^n \times S.tdx$, y la diferencial $d^{n+2}y = dtdx^{n+1}$: luego si se substituyen los valores de $d^n y$, $d^{n+1}y$, $d^{n+2}y$ en la equacion propuesta, se tendrá $dx^n \times S.tdx = xtdx^n + \frac{adt^3dx^n}{dx^3}$, y partiendo por dx^n, será $S.tdx = xt + \frac{adt^3}{dx^3}$. Diferénciese ahora esta expresion, y se tendrá $tdx = xdt + tdx + \frac{3adt^2d^2t}{dx^3}$, de donde resulta $x = -\frac{3adtd^2t}{dx^3}$, ó bien $-xdx^3 = 3adtd^2t$, cuya integral es $\frac{3}{2}adt^2 = -\frac{1}{2}x^2dx^2 + \frac{1}{2}Adx^2$ constante, ó bien $3adt^2 = -x^2dx^2 + Adx^2$, equacion diferencial del segundo órden, que fácilmente se reduce á una diferencial primera : pues será $\sqrt{3a} \times dt = dx\sqrt{(A - x^2)}$, cuya integral se tiene por lo demostrado (120).

PROPOSICION XIV.

499. Hallar la integral de las equaciones diferenciales, que tienen la forma $x + y +$ &c. $+ (dx + dy + \&c.) \times \frac{V}{dt} + (d^2x + d^2y + \&c.) \times \frac{V}{dt^2} \ldots + (d^rx + d^ry + \&c.) \times \frac{V}{dt^r} + T = 0$, siendo su número igual al número de las variables x y, &c. en cuyas equaciones todos los términos pueden tener distintos coeficientes, dt es constante, V es funcion de t, y siempre es la misma en todos los términos y equaciones, y T es funcion de t, que puede ser distinta en las diferentes equaciones dadas.

Supóngase n el número de las referidas equaciones, ó de las variables x, y, &c. y háganse las substituciones,

$d^{r-1}x = z\,dt^{r-1}$	$d^{r-1}y = u\,dt^{r-1}$
$d^{r-2}x = z'dt^{r-2}$	$d^{r-2}y = u'dt^{r-2}$
$d^{r-3}x = z''dt^{r-3}$	$d^{r-3}y = u''dt^{r-3}$
&c.	&c.

luego las equaciones propuestas se transformarán en otras, cuyo número $n+n\times(r-1)$, que contendrán las variables x, y, &c. z, z', z'', &c. u, u', u'', &c. y sus diferenciales primeras. Ahora se multiplicarán las equaciones que han resultado por coeficientes indeterminados segun el método dado (425), y se harán las mismas operaciones para determinar las integrales. Que es &c.

EXEMPLO I.

500. Sean las dos equaciones diferenciales $d^2y + adydt + bd^2x + cdxdt + xdt^2 = o$, $d^2y + edydt + fd^2x + gdxdt + (hy+T)\times dt^2 = o$, en quien la T expresa qualquiera funcion de la variable t.

Háganse las substituciones $dy = zdt$, $dx = vdt$; y diferenciando estas equaciones en la suposicion de la dt constante, se tendrán $d^2y = dzdt$, $d^2x = dvdt$. Substitúyanse ahora los valores de las diferenciales dy, dx, d^2y, d^2x en las equaciones propuestas; y se tendrán las $dzdt + azdt^2 + bdvdt + cvdt^2 + xdt^2 = o$, $dzdt + ezdt^2 + fdvdt + gvdt^2 + (hy+T)\times dt^2 = o$; y partiéndolas por dt, resultarán las $dz + azdt + bdv + cvdt + xdt = o$, $dz + ezdt + fdv + gvdt + (hy+T)\times dt = o$, siendo por las referidas substituciones

$dy - z\,dt = o$, $dx - v\,dt = o$, cuyas quatro equaciones se podrán integrar por medio de los coeficientes indeterminados. Multiplíquense, pues, la primera por m, la tercera por n, y la quarta por p, y súmense todas; y se tendrá la equacion (A) $(m+1) \times dz + (bm+f) \times dv + n\,dy + p\,dx + (z \times (ma+e-n) + (mc+g-p) \times v + mx + hy + T) \times dt = o$. Supóngase ahora que la cantidad $(ma+e-n) \times z + (mc+g-p) \times v + mx + hy$ es multíplice de la $(m+1) \times z + (bm+f) \times v + ny + px$, de modo que sea ($B$) $(ma+e-n) \times z + (mc+g-p) \times v + mx + hy = (m+1) \times Rz + (bm+f) \times Rv + nRy + pRx$; y por la comparacion de sus respectivos términos se tendrán las quatro equaciones $ma+e-n = (m+1) \times R$, $mc+g-p = (bm+f) \times R$, $h = nR$, $m = pR$, que se reducirán á las tres siguientes (C) $ma+e-n = (m+1) \times \frac{h}{n}$, $mc+g-p = (bm+f) \times \frac{h}{n}$, $\frac{h}{n} = \frac{m}{p}$; y por medio de éstas se determinarán quatro valores de cada una de las cantidades m, n, p, y se llamarán por abreviar m, m', m'', m''', n, n', n'', n''', p, p', p'', p'''. Por tanto si se substituye en la equacion B en lugar de R su valor $\frac{h}{n}$, se tendrá $(ma+e-n) \times$

$z+(mc+g-p)\times v+mx+hy=\frac{h}{n}\times$ $(z\times(m+1)+(bm+f)\times v+ny+px)$; y haciendo (E) $(m+1)\times z+(bm+f)\times v+ny+px=u$, se tendrá $(m+1)\times dz+(bm+f)\times dv+ndy+pdx=du$: luego la equacion A se transformará en la (F) $du+\frac{h}{n}udt+Tdt=o$, cuya integral se tiene por lo demostrado. Es evidente que los otros tres valores de las cantidades m, n, p, darán las tres equaciones $du'+\frac{h}{n'}u'dt+Tdt=o$, $du''+\frac{h}{n''}u''dt+Tdt=o$, $du'''+\frac{h}{n'''}u'''dt+Tdt=o$, y las otras tres (G) $(m'+1)\times z+(bm'+f)\times v+n'y+p'x=u'$, $(m''+1)\times z+(bm''+f)\times v+n''y+p''x=u''$, $(m'''+1)\times z+(bm'''+f)\times v+n'''y+p'''x=u'''$. Por tanto por la equacion F y las tres siguientes se determinarán los valores de u por t, y por las equaciones E y G se determinarán del mismo modo los valores de z, v, x, y: luego se tienen los valores de las variables x, y por la t.

EXEMPLO II.

501. Se propone la equacion d^3y+ad^2ydt

$+ b\,dy\,dt^2 + cy\,dt^3 + T\,dt^3 = o$, en quien la cantidad T es qualquiera funcion de la t.

Háganse las substituciones $d^2 y = x\,dt^2$, $dy = z\,dt$: luego diferenciando estas equaciones en la suposicion de la dt constante, se tendrá $d^3 y = dx\,dt^2$, $d^2 y = dz\,dt$; pero por la primera substitucion es $d^2 y = x\,dt^2$: luego será $dz\,dt = x\,dt^2$, de donde resulta ser $dz = x\,dt$. Por tanto si en la equacion propuesta se substituyen los valores de las diferenciales $d^3 y$, $d^2 y$, dy, se tendrá la $dxdt^2 + ax\,dt^3 + bz\,dt^3 + cy\,dt^3 + T\,dt^3 = o$; y partiendo por dt^2, será $dx + (ax + bz + cy + T) \times dt = o$; pero $dy = z\,dt$, $dz = x\,dt$: luego valdrán las tres equaciones siguientes,

$dx + (ax + bz + cy + T) \times dt = o$,

$m\,dy - mz\,dt = o$, $n\,dz - nx\,dt = o$,

en quienes m y n son cantidades que se han de determinar. Súmense ahora las referidas tres equaciones, y se tendrá (A) $dx + m\,dy + n\,dz + (x \times (a-n) + (b-m) \times z + cy + T) \times dt = o$. Supóngase la cantidad $(a-n) \times x + (b-m) \times z + cy$ igual á un multíplice de la $x + my + nz$, esto es, $(a-n) \times x + (b-m) \times z + cy = Rx + Rmy + Rnz$; y esta equacion será efectivamente idéntica, si se establecen las tres equaciones, es á saber, $a - n = R$, $b - m = Rn$, $c = Rm$, de donde resultan las dos (B) $b-m=(a-n)\times n$, $c=(a-n)\times m$. Por tanto será $(a-n)\times x+(b-m)\times z+cy=(a-n)\times(x+my+nz)$. Hágase ahora ($C$) $x+my+nz=u$; y diferenciando esta equacion, se tendrá $dx+mdy+ndz=du$: luego introduciendo las u, du en la equacion A, resultará (E) $du+(a-n)\times udt+Tdt=o$, cuya integral se tiene por lo demostrado. Y respecto á que las cantidades m, n tienen tres valores que resultan de las equaciones B, la u tendrá igualmente tres valores; y se expresarán, por abreviar, con las letras m, m', m'', n, n', n'', u, u', u'': luego las equaciones C, E serán las siguientes,

$$\begin{array}{l|l} x+my+nz=u & du+(a-n)\times u\,dt+Tdt=o \\ x+m'y+n'z=u' & du'+(a-n')\times u'\,dt+Tdt=o \\ x+m''y+n''z=u'' & du''+(a-n'')\times u''dt+Tdt=o, \end{array}$$

de suerte que por medio de las segundas equaciones se determinarán los valores de u por t, y por las tres primeras se tendrán igualmente los valores de x, z, y; por consiguiente resultará el valor de y por t.

F I N.

de resultan las dos (B) $A - m = (a-n)\times n$, y $(a-m)\times n$. Por tanto será $(a-n)\times x + (b-m)\times z + cz = (a-n)\times(x+my+nz)$. Hágase ahora (C) $x+my+nz=u$; y diferenciando esta equacion, se tendrá $dx+mdy+ndz=du$; luego introduciendo las dx, du en la equacion A, resultará (B) $du+(a-n)\times u\,dt+T\,dt=o$, cuya integral se tiene por lo demostrado. Y respecto á que las cantidades m, n tienen tres valores que resultan de las equaciones B, la u tendrá igualmente tres valores; y se expresarán, por abreviar, con las letras m, m', m'', n, n', n'', u, u', u''; luego las equaciones C, E serán las siguientes:

$x+my+nz=u$	$du+(a-n)\times u\,dt+T\,dt=o$
$x+m'y+n'z=u'$	$du'+(a-n')\times u'\,dt+T\,dt=o$
$x+m''y+n''z=u''$	$du''+(a-n'')\times u''\,dt+T\,dt=o$,

de suerte que por medio de las segundas equaciones se determinarán los valores de u por t, y por las tres primeras se tendrán igualmente los valores de x, z, y; por consiguiente resultará el valor de t por s.

F I N.

GIANNINI
Curso
Matematico
.3.