Sanchez y Sabras

Curso de Aritmética

A.V.

R [illegible]

297

Angel Valtierra

Burgos

~~Apfarana~~

Cuaderno
de
Aritmética

CURSO

DE

ARITMÉTICA

Angel Valtierra

CURSO
DE
ARITMÉTICA

POR

EUSEBIO SÁNCHEZ RAMOS

Y

TEODORO SABRÁS CAUSAPÉ

CATEDRÁTICOS NUMERARIOS

DE LOS INSTITUTOS DE SEVILLA Y GRANADA

6.ª EDICIÓN CORREGIDA Y AUMENTADA

GRANADA
Imprenta de Vázquez y Prieto
Calle del Señor, 15
1917

Angel

Prólogo de la tercera edición

«Pocas son las reformas que hemos introducido en esta edición. Atendiendo a indicaciones muy atinadas de algún compañero nuestro, incluímos la teoría del mínimo común múltiplo, fundado en el máximo común divisor, ya que por descomposición de los números en factores simples no es posible formarle sin gran trabajo, cuando los factores primos no son números muy pequeños. También hemos completado las demostraciones de las reglas de las raíces cuadrada y cúbica suponiendo el número determinado, con lo cual el profesor podrá elegir de las dos demostraciones la que le parezca más conveniente. Hemos quitado todos los ejemplos de operaciones de números concretos del antiguo sistema de pesas, medidas y monedas de Castilla, que es ya hora de que pasen a la Historia, y en cambio hemos ampliado el capítulo que trata del sistema métrico decimal, incluyendo muchas noticias históricas de su adopción y dando la nueva definición del litro, adoptada por la Comisión internacional de pesas y medidas. Es claro que los alumnos no tendrán necesidad de aprender para decirlas en el examen las noticias a que nos referimos; pero leyéndolas se formarán una idea de la importancia que tiene el sistema métrico y de los delicados trabajos científicos que se han llevado y se están llevando a cabo para perfeccionarle. Hemos agregado también en esta edición algunas cuestiones relativas a fondos públicos y la regla de aligación, que habiamos suprimido en la segunda edición».

En esta sexta edición conservamos todo lo dicho en la cuarta, con tan insignificantes variaciones, que no tenemos necesidad de enumerarlas.

NOMENCLATURA ESCOLÀSTICA

DE LAS

PROPOSICIONES MATEMÁTICAS

Axioma es una proposición evidente por sí misma, y que, por consiguiente, no necesita demostración.

Teorema es una verdad demostrable. El teorema consta de un *enunciado* y una *demostración*. El enunciado es la proposición que se anuncia como verdadera; tiene dos partes: una *hipótesis* o *suposición*, que afirma lo que se supone cierto; y una *tesis* o *conclusión*, cuya verdad se ha de probar. La demostración es el raciocinio que se hace para patentizar la verdad de la tesis.

Un teorema es recíproco de otro, cuando tiene por hipótesis la conclusión, y por conclusión la hipótesis de este otro; y contrario cuando tiene una hipótesis y una conclusión contraria a las de este otro.

Lema es un teorema de poca importancia por sí mismo, pero necesario para demostrar otros más importantes.

Corolario es un teorema cuya verdad se deduce inmediatamente de un teorema conocido.

Postulado es un teorema que no se puede demostrar, y que por tanto debe admitirse como axioma en la formación de la Ciencia.

Escolio es una advertencia o nota que se hace sobre uno o muchos teoremas relativos al mismo asunto, o que forman una teoría.

Problema es una cuestión en que nos proponemos determinar una o muchas cosas desconocidas o *incógnitas,* por medio de otras conocidas o *datos.*

La proposición en que se declara el objeto del problema se llama *enunciado:* el procedimiento para determinar las incógnitas de modo que satisfagan al enunciado, se llama *resolución:* el resultado obtenido después de resolverle, se llama *solución.*

ALFABETO GRIEGO

Figura.	Nombre	Figura.	Nombre.	Figura.	Nombre
Α α	Alfa.	Ι ι	Iota.	Ρ ρ	Rho.
Β β ϐ	Beta.	Κ ϰ	Kappa.	Σ σ ς	Sigma.
Γ γ	Gamma.	Λ λ	Lambda.	Τ τ	Tau.
Δ δ	Delta.	Μ μ	Mu.	Υ υ	Upsilon.
Ε ε	Epsilon.	Ν ν	Nu.	Φ φ	Phi.
Ζ ζ	Deseta.	Ξ ξ	Xi.	Χ χ	Ji (chi)
Η η	Eta.	Ο ο	Omicron.	Ψ ψ	Psi.
Θ θ	Theta.	Π π	Pi.	Ω ω	Omega.

PRELIMINARES

1. Varias cosas que tienen uno o muchos caracteres comunes, se dicen *homogéneas* por relación a dichos caracteres comunes, y si tienen otros caracteres diferentes, *hetereogéneas* por relación a éstos.

Dos dados, uno de plomo y otro de marfil, son homogéneos por relación a su figura, y hetereogéneos por la materia de que están construidos. Pueden, además, ser iguales o distintos, el peso o el tamaño, por ejemplo.

Si varias cosas tienen todos sus caracteres comunes, se dicen *idénticas*.

2. Varias cosas, por relación a sus caracteres comunes, o en cuanto son homogéneas, forman un conjnnto que se puede considerar obtenido por la repetición de cualquiera de ellas. La cosa repetida se llama *unidad*, el conjunto formado por la repetición de la unidad constituye una *pluralidad*. La expresión determinada de *cuantas veces* se ha repetido la *unidad* se llama *número*.

El número es, pues, una pluralidad determinada de cosas u objetos homogéneos; cualquiera de las cosas u objetos, es la unidad.

3. Como la unidad generatriz del número puede ser un objeto cualquiera, podemos hacer abstracción de la naturaleza de la unidad y expresar solamente *cuantas veces* está repetida para formar el número.

El número que expresa la naturaleza de la unidad generatriz se llama *concreto*, y el que no la expresa *abstracto*.

4. Por lo que hasta ahora llevamos dicho, se comprende que el número es un conjunto de partes separables unas de otras, o disgregables, es decir, que el número es *discreto*.

5. La unidad puede ser un todo formando un individuo que no se puede descomponer en partes sin destruirle; esto sucede si, por ejemplo, la unidad es un hombre, un árbol, etc. Pero

también puede ser una cosa descomponible en partes iguales y homogéneas: esto sucederá si la unidad es una distancia, un peso, etcétera.

En el primer caso, la unidad se impone en la formación del número: así, para numerar un conjunto de árboles, tomamos por unidad un árbol. Lo que podremos hacer, si la distribución de los árboles lo permite, es tomar por unidad una colección de árboles, una fila, por ejemplo, si están distribuídos en filas.

La unidad compuesta de varias unidades, se llama unidad compuesta, o *colectiva*.

En el segundo caso, es decir, cuando la unidad se puede descomponer en partes homogéneas, queda completamente libre la elección de su tamaño, resultando tanto mayor el número, cuanto menor es la unidad elegida.

6. El concepto de tamaño, o limitación de los seres finitos, constituye su *magnitud;* el carácter esencial de la magnitud es ser susceptible de aumento y disminución. Las palabras *magnitud* y *cantidad* se suelen emplear como sinónimas; pero es mejor aplicar el nombre de cantidad solamente a las magnitudes determinables, o numerables por medio de una unidad de su misma naturaleza y excluir las magnitudes que no sean determinables, como, por ejemplo, las facultades intelectuales, afectos, etc.

7. La cantidad es *continua,* es decir, que se puede descomponer en partes homogéneas, tan pequeñas como se quiera, e inversamente se puede formar una cantidad por la repetición sucesiva de una parte cualquiera. De un modo más general. la cantidad puede aumentar o disminuir por grados insensibles.

8. Cuando se *determina* o *mide* una cantidad fija, o como suele llamarse *constante,* por medio de una *unidad* de su misma naturaleza, *constante* también, puede suceder: 1.º Que la cantidad contenga un número *exacto* de veces a la unidad, y entonces se origina un número formado por una pluralidad de unidades y se llama *número* entero. 2.º Que la cantidad no contenga exactamente a la unidad, pero sí a una de las *partes alícuotas* que resultan de dividirla en cierto número de partes iguales, y entonces se origina un número que se llama *fraccionario.* 3.º Que la cantidad no contenga exactamente a la unidad ni a ninguna de sus partes alícuotas, y entonces se origina el número *inconmensurable.*

En los dos primeros casos, la unidad y la cantidad son *conmensurables* entre sí, o tienen una *medida común,* que es, o la unidad misma, o una de sus partes alícuotas: los números que expresan la relación de la cantidad a la unidad, o sea la medida de la cantidad, son conmensurables. En el tercer caso la unidad y la cantidad, son *inconmensurables* entre sí, puesto que ninguna parte alícuota de la unidad está exactamente contenida en la cantidad, Más adelante encontraremos ejemplos de números inconmensurables, y veremos que no se pueden expresar exactamente, pero sí con toda la aproximación que se quiera.

9. No se deben confundir las cantidades inconmensurables con las inmensurables, pues las primeras no se pueden medir con la unidad elegida, pero se pueden medir con otras unidades, y las inmensurables no se pueden medir con ninguna unidad.

10. *La ciencia de la cantidad en general se llama Matemática.*

La ciencia de los números en general ha recibido distintos nombres, Aritmología y Algoritmia. La parte elemental en que nos ocuparemos nosotros, se llama Aritmética.

11. Se llama *igualdad* la relación que existe entre dos cantidades homogéneas idénticas, o entre los números que las miden.

La igualdad se expresa colocando el signo =, que se lee *igual a,* entre las cantidades o números iguales.

Así, si las cantidades representadas por los símbolos, A y B, son iguales, escribiremos, A = B, y leeremos A, *igual a* B.

Todo lo que antecede al signo = se llama *primer miembro* de la igualdad, y lo que le sigue, *segundo miembro.*

Se llama *desigualdad* la relación que existe entre dos cantidades homogéneas, tales que una de ellas es mayor que la otra, o entre los números que las miden.

Para expresar la desigualdad, se emplea uno de los signos > y <, que se leen repectivamente, *mayor que* y *menor que,* colocados entre las cantidades que se comparan.

Así, si las cantidades, A y B, que se comparan, son tales que A, es mayor que B, escribiremos, A > B, y leeremos, A *mayor que* B Si A, fuese menor que B, la desigualdad sería, A < B.

Lo mismo que en las igualdades, todo lo que hay escrito antes del signo > o <, se llama *primer miembro,* y todo lo que hay después *segundo miembro* de la desigualdad.

Es evidente que en una igualdad se puede cambiar el orden de los miembros; así se tiene, A = B, también es cierto que, B = A.

En una desigualdad se puede cambiar el orden de los miembros, pero cambiando el signo de la deisgualdad: así, si A > B, se tendrá, B < A.

Cantidades equivalentes son las cantidades concretas que tienen el mismo valor y referidos a la misma unidad se expresarían con el mismo número.

12. Entre cantidades *hetereogéneas* no existe igualdad, pero puede existir equivalencia, es decir, igualdad en los valores, ya sea ésta natural, ya sea convencional (1).

13. Los axiomas fundamentales de la Matemática son verdades conocidas por el sentido común, y apenas se necesita enumerarlos.

Una cosa es idéntica a ella misma. Dos cosas iguales a una tercera, son iguales entre si, o más generalmente: *si entre muchas cosas la primera es igual a la segunda, ésta a la tercera y asi sucesivamente, dos cualesquiera de estas cosas serán iguales. El todo es mayor que una de sus partes, etc.*

14. Dividiremos la Aritmética en dos partes: la primera tratará de los números *abstractos,* y la segunda de los *concretos,* considerando esta última como una simple aplicación de la primera.

La primera parte la dividiremos en dos secciones: cálculo aritmético y comparación aritmética; y el cálculo aritmético en tres libros, que tratarán, respectivamente, de los números enteros, de los fraccionarios y de los inconmensurables.

(1) El trabajo necesario para elevar un kilogramo de agua destilada de la temperatura cero grados a un grado, que es aproximadamente 425 kilográmetros, se llama equivalente mecánico del calor, y es igual a lo que los físicos llaman una caloria: luego cierta cantidad de trabajo tendrá su equivalente en calor, y recíprocamente; esta es, pues, una equivalencia natural. La equivalencia entre una mercancía y su coste es convencional entre el comprador y el vendedor: depende de muchas circunstancias ajenas, a veces, a uno y otro.

PRIMERA PARTE

ARITMÉTICA DE LOS NÚMEROS ABSTRACTOS

SECCIÓN PRIMERA

CÁLCULO ARITMÉTICO

LIBRO PRIMERO

Los números enteros

CAPÍTULO I

LA NUMERACIÓN

15. *La numeración es la parte de la Aritmética que se ocupa en la formación y expresión de los números.*

Los números enteros se forman por medio de la unidad, que se va repitiendo y agregándose a sí misma. Si a cualquier número, ya formado, se le agrega la unidad, se formará el número siguiente: como esta operación se puede verificar siempre, por grande que sea el número, la serie natural de los números es indefinida.

16. De aquí la necesidad de un medio convencional y sistemático para poder expresar los números; este medio convencional comprende dos partes: una,/la *numeración verbal* o expresión de los números por medio de palabras, y otra, la *numeración escrita* o expresión de los números por medio de signos/

Nosotros expondremos el sistema de numeración decimal, que es el adoptado por todos.

17. La unidad se expresa por la palabra *uno,* y se llama el número *uno;* la reunión de uno y uno se llama *dos;* la de dos y

uno, *tres;* la de tres y uno, *cuatro;* la de cuatro y uno, *cinco;* la de cinco y uno, *seis;* la de seis y uno *siete;* la de siete y uno, *ocho;* la de ocho y uno, *nueve;* la de nueve y uno, *diez.*

La reunión de diez unidades se considera como una nueva unidad, que se dice de *segundo orden* o *decena* (la unidad simple se dice también de *primer orden),* la decena es una unidad colectiva, y se puede contar por decenas como se ha contado por unidades.

Así, la reunión de dos decenas se llama *veinte;* la de tres, *treinta;* la de cuatro, *cuarenta;* y, sucesivamente, *cincuenta, sesenta, setenta, ochenta* y *noventa.*

La reunión de diez decenas forma el número *ciento,* que se considera como una nueva unidad, que se llama *centena* o unidad, de *tercer orden,* y se cuenta por centenas, como por decenas y unidades. La reunión de dos centenas es *doscientos,* la de tres *trescientos,* y, sucesivamente, *cuatrocientos, quinientos, seiscientos, setecientos, ochocientos* y *novecientos.*

La reunión de diez centenas forma el número *mil,* que se considera como una nueva unidad, que se llama *millar,* o unidad de *cuarto orden.* Se cuenta por millares, como por las anteriores unidades. Así tendremos los números: *dos mil, tres mil... nueve mil, diez mil.* El número diez mil se considera como una nueva unidad, que se llama decena de millar, o unidad de *quinto orden,* con lo cual se cuentan los números *veinte mil, treinta mil... noventa mil* y *cien mil.* El número cien mil forma una nueva unidad, la *centena de millar,* o unidad de *sexto orden,* y con ella se cuentan los números, *doscientos mil, trescientos mil... novecientos mil.*

La reunión de diez centenas de millar, forma un *millón,* que es la unidad de *séptimo orden.*

Con los millones se forman, como con las unidades simples, decenas, centenas, millares, decenas de millar y centenas de millar, todas ellas de millón; y son los órdenes *octavo, noveno...* y *duodécimo* de unidades, y se cuenta con ellas como con los órdenes anteriores.

Mil millares de millón, o sea un millón de millones, se llama *billón.* El billón es la unidad de orden *décimo tercio,* y se forman con ella decenas, centenas, millares, decenas de millar y centenas de millar de billón, con las que se cuenta como con las anteriores.

Un millón de billones forma el *trillón,* y así sucesivamente.

18. Desde diez hasta veinte se cuentan los números intermedios agregando a la palabra diez las de los nueve primeros números, y diciendo por consiguiente: diez y uno, *once* (1); diez y dos, *doce;* diez y tres, *trece;* diez y cuatro, *catorce;* diez y cinco, *quince;* diez y seis, diez y siete, diez y ocho, diez y nueve. Desde veinte hasta treinta se cuentan los números intermedios añadiendo a la palabra veinte, los nombres de los nueve primeros números; así se contará; veintiuno, veintidós.. veintinueve. Del mismo modo se cuenta de treinta a cuarenta, de cuarenta a cincuenta... de noventa a ciento.

Desde ciento a doscientos se cuentan los números intermedios agregando a la palabra ciento los nombres de los noventa y nueve primeros números, y se dirá: ciento uno, ciento dos .. ciento diez, ciento veinte... ciento noventa y nueve. Del mismo modo se contará entre doscientos y trescientos y así sucesivamente hasta novecientos noventa y nueve.

Entre mil y dos mil se contará agregando a la palabra mil los nombres de los novecientos noventa y nueve primeros números, y lo mismo entre dos mil y tres mil, y así sucesivamente hasta llegar a nueve mil novecientos noventa y nueve.

De modo análogo se cuentan los números intermedios entre diez mil y veinte mil, entre veinte mil y treinta mil... entre cien mil y doscientos mil, y así sucesivamente.

19. De todo lo expuesto se deduce que diez unidades simples o de primer orden forman una decena o unidad de segundo orden: diez decenas forman una centena o unidad de tercer orden, y siempre diez unidades de un orden forman la del inmediato superior.

En virtud de esto se llama *base* del sistema de numeración decimal el número diez, que expresa cuantas unidades de un orden se necesitan para formar la del orden inmediato superior.

Debemos observar que las unidades de cada orden en un número son menos de diez, y por consiguiente, nueve a lo sumo: además, en un número pueden faltar ciertos órdenes de unidades, que serán precisamente las que no se nombran. Así, el número trescientos siete contiene centenas y unidades, pero carece de decenas.

También conviene observar que se cuenta por unidades, de-

---

(1) El uso ha sustituído las palabras diez y uno, diez y dos, etc., por las once, doce, trece, catorce y quince, por evitar la cacofonía de las primeras.

cenas y centenas simples, o de millar, o de millón, o de millar de millón, etc., de suerte que de tres en tres órdenes se forma una unidad que podemos considerar como *principal*.

20. Para la escritura de los números se han adoptado los signos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

que representan, respectivamente, los nueve primeros números, y se llaman *cifras significativas* del sistema. Como hemos visto que en todo número las unidades de cada orden son menos de diez, las cifras anteriores servirán para expresar cuantas unidades de cada orden contiene un número. Para expresar la falta de unidades de cualquier orden se usa el signo 0 que se llama *cero* y también *cifra no significativa*, para distinguirla de las demás. El cero, por consiguiente, no tiene valor.

21. Se conviene en qué: *toda cifra escrita a la izquierda de otra, representa unidades de orden inmediato superior o diez veces mayores:* de este modo el primer lugar de la derecha corresponde a las unidades, el segundo (contando hacia la izquierda), a las decenas, o unidades de segundo orden; el tercero, a las centenas, o unidades, de tercer orden, y, en general, cada orden de unidades ocupa el lugar marcado por su número de orden.

De aquí resulta que cada cifra tiene dos valores: uno *absoluto*, que, como su nombre indica, es invariable y depende de su figura, y otro *relativo* que es accidental y depende del lugar que ocupa en el número.

De esto se deduce que las unidades de diferentes órdenes se escribirán por medio de la unidad seguida de un número conveniente de ceros. Así,

1, 10, 100, 1000, 10000...

serán los números *uno, diez, ciento, mil, diez mil...*

22. Para escribir un número cuyo enunciado o expresión verbal conocemos, consideraremos tres casos: 1.° *Que el número sea inferior a mil.* 2.° *Que sea superior a mil e inferior a un millón.* 3.° *Que sea mayor que un millón.*

1.° Si el número que se quiere escribir es inferior a mil, se *escribirán primero sus centenas, a la derecha de éstas las decenas y a la derecha de las decenas las unidades*. Así, para escribir el número *trescientos veintisiete* escribiremos primero un 3, por ser tres las centenas; a su derecha un 2, por ser dos las decenas; y a la derecha de éstas un 7, por ser siete las unidades, de modo que escribiremos 327.

Si el número carece de decenas o unidades, se ocuparán sus lugares con ceros; si no llegase a ciento, o a diez, bastarían dos, o una cifra para escribirle.

2.° Si el número que se quiere escribir es mayor que mil y menor que un millón, se supondrá formado por dos grupos de unidades *principales:* uno de unidades simples, y otro de millares; *se escribirá el grupo de millares, que a lo sumo tendrá tres cifras* (unidades, decenas y centenas de millar), *como se ha dicho en el caso anterior, y a su derecha, dejando un pequeño hueco, o separándole por una coma, escrita en la parte superior el grupo de unidades, que también tendrá a lo sumo tres cifras* (unidades, decenas y centenas simples). Por ejemplo, el número *doscientos cuarenta y cinco mil setecientos treinta y nueve* se escribirá:

245 739 ó 245'739

Si faltan algunos órdenes de unidades, se ocuparán sus lugares con ceros, cuya situación es muy fácil de determinar en cada grupo. Así, el número *doscientos cuarenta mil treinta y nueve,* se escribirá:

240'039

3.° Si el número es mayor que un millón, se tendrá presente que los dos grupos de tres cifras de la derecha corresponden a los dos órdenes principales, unidades y millares; los dos siguientes, a la izquierda, unidades y millares de millón; los otros dos más a la izquierda, unidades y millares de billón, y así sucesivamente. Por consiguiente, *para escribir un número mayor que un millón, se escriben primero los grupos de millares y unidades más elevados; a la derecha de éstos los grupos de millares y unidades siguientes descendiendo, y así hasta llegar a los grupos de millares y unidades simples.*

Cuando el número sea muy grande, conviene escribir a la derecha y a la parte superior de la cifra de unidades de millón un 1 pequeñito; en el mismo lugar y a la derecha de las unidades de billón un 2, etc., y separar por comas cada grupo de millares del de unidades, o sea los grupos de tres cifras.

Sea, por ejemplo, el número: *doce billones, doscientos cincuenta y seis mil cuatrocientos diez y siete millones, sete-*

cientas veintitrés mil doscientas ochenta y siete unidades, se escribirá:

$$12\,{}^{2}\,256'417\,{}^{1}\,723'287$$

Si faltasen algunos órdenes de unidades, se ocuparán sus lugares con ceros: el número *setecientos dos mil siete millones, veinticuatro unidades,* se escribirá:

$$702'007\,{}^{1}\,000'024$$

Conviene observar que si se escriben ceros a la izquierda de un número, éste no varía, porque todas sus cifras conservan los mismos valores absolutos y relativos.

Así, por ejemplo:

$$0'012'416 \text{ y } 12'416$$

tienen el mismo valor.

Pero si se añaden ceros a la derecha de un número, o se suprimen en otro que los tenga, cambian los valores relativos de sus cifras, sufriendo los números variaciones que explicaremos más adelante.

23. *Para leer un número cualquiera, se divide en grupos de seis cifras, poniendo a la izquierda del primero un* 1, *como hemos indicado para la escritura; a la izquierda del segundo un* 2, *etc.: se divide cada uno de estos grupos en dos de tres cifras por medio de comas; se comienza la lectura por los grupos superiores, leyendo sus centenas, decenas y unidades, añadiendo las palabras mil a los situados a la izquierda de cada coma, y las palabras millones, billones, etc., a la terminación de los grupos que tienen a su derecha un* 1, *un* 2, *etc.* Así el número

$$4\,{}^{2}\,324'610\,{}^{1}\,012'685$$

se leerá: *cuatro billones, trescientos veinticuatro mil seiscientos diez millones, doce mil seiscientas ochenta y cinco unidades.*

La base de un sistema de numeración puede ser un número cualquiera distinto de la unidad: los principios establecidos para la numeración de base *diez* subsisten siempre y pueden efectuarse operaciones con números escritos en los sistemas *binario, ternario,* etc.

CAPÍTULO II

LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES

I. La adición

24. *Se da el nombre de operación al acto por el cual se verifica una transformación en un objeto, o combinación de objetos.*

Las operaciones matemáticas pueden ser de *cálculo, construcción, combinatorias,* etc. Por ahora nos limitaremos a las operaciones del cálculo, que son: *las que tienen por objeto hallar uno o muchos números, que se llaman resultado, por medio de otros que se llaman datos.*

Dos o más operaciones combinadas forman una operación compuesta: *cuando una operación indicada se considera como dato para someterle a otra operación ulterior, se encierra la operación indicada en un paréntesis.*

Las operaciones fundamentales del cálculo aritmético son: *adición, substracción, multiplicación* y *división.* potenciación radicación

La adición y multiplicación son operaciones de composición; la substracción y división de descomposición.

Una operación es *inversa* de otra cuando tiene por datos el resultado y uno de los datos de la primera, y por resultado el otro dato. Más adelante veremos que la substracción es inversa de la adición, y la división, en su acepción más general, inversa de la multiplicación.

La adición y substracción también se dicen operaciones de *primer grado*, y la multiplicación y división de ***segundo grado.***

25. *La adición es una operación que tiene por objeto reunir en un solo número las unidades de otros varios* (1).

Los datos de la adición se llaman *sumandos,* el resultado *suma* y la práctica de la operación *sumar.*

Se indica la operación escribiendo un signo +, que se lee *más,*

---

(1) Damos una definición que solo comprende la adición de números enteros, pero iremos generalizando cada operación a medida que sea necesario, teniendo presente que una operación generalizada contiene la operación particular; pero como puede perder algunas de sus propiedades, se deben revisar éstas, para conservar solamente las que correspondan a la operación generalizada.

entre cada dos sumandos, y separando los datos del resultado por el signo =.

Así, siendo los sumandos 4, 7 y 3, escribiremos:

$$4+7+3=14.$$

26. El procedimiento primitivo de la adición es añadir al primer sumando las unidades del segundo, *contándolas* una a una, como se ha explicado en la numeración; al resultado que se obtenga se añaden las del tercer sumando, contadas del mismo modo, y así sucesivamente, hasta el último sumando.

Este procedimiento no es bueno mas que cuando los sumandos son de una cifra o *dígitos* (1), y se llega a hacer de memoria cuando se tiene alguna práctica en la operación; pero para considerar más de dos sumandos, se necesita aprender la *tabla de sumar,* que contiene todas las sumas posibles de dos números dígitos.

Antes de formarla debemos tener presente, que si uno de los sumandos es *cero, la suma es igual al otro sumando;* propiedad que se deduce inmediatamente de la definición de la operación.

Esto supuesto, escribamos en una línea horizontal el cero y los nueve primeros números, debajo, correspondiéndose con los

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

(1) Se llaman dígitos los números de una cifra, porque se pueden contar con los dedos.

de la primera línea, los mismos números aumentados cada uno en una unidad, y se tendrá la suma de los números de la primera línea, con 1; debajo se escriben los números de la segunda línea aumentados en una unidad, y se formará una tercera línea, que contiene los de la primera aumentados en dos unidades; se sigue del mismo modo hasta formar la décima línea, que contendrá la suma de los números de la primera con 9.

De lo dicho resulta que cada línea horizontal contiene la suma de los números de la primera línea con el número que la comienza; y cada línea vertical contiene la suma del número que la comienza con los números de la primera vertical.

La suma $5 + 7$, por ejemplo, estará en la vertical que comienza por 5 y en la horizontal que comienza por 7; será por consiguiente, el número 12, común a las dos líneas.

27. Pasemos ya al caso general de la adición, que consiste en sumar números cualesquiera; está fundado en las siguientes propiedades de la adición:

1.ª *Una suma no se altera, aunque se altere el orden de los sumandos.* Porque la suma es el conjunto de unidades que contienen los sumandos, y no varía este número de unidades con el orden de los sumandos.

2.ª *Dos o más sumandos se pueden sustituir por su suma efectuada.* Para esto basta suponer que se colocan los primeros (1.ª), y que, por consiguiente, por ellos comienza la suma.

Es claro, que *inversamente se puede suponer cualquier sumando descompuesto en dos o más partes, que sumadas compongan el sumando.*

28. En virtud de estas propiedades, para sumar números cualesquiera, se les puede suponer descompuestos, cada uno de ellos, en unidades, decenas, centenas, millares, etc. Suponer después alterado el orden de estos nuevos sumandos y sumar unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etcétera, y reunir los resultados en un solo número.

Para hacer más fácil la aplicación práctica del principio anterior, seguiremos la siguiente:

Regla: *Para sumar números cualesquiera se escriben los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc.; se traza una raya debajo de los sumandos y se suman los números de cada columna, comenzando por la derecha; si la suma no llega a diez, se escribe debajo de la raya, correspondiéndose con la columna sumada, y si llega* *o pasa de diez, se escribe la cifra de las unidades, de la suma y se reservan las decenas para agregarlas a la siguiente columna de la izquierda. El número que así resulte será la suma pedida.*

Sea sumar los números 14675, 8344, 24803, 586, se escribirán en columna del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 14675 \\ 8344 \\ 24803 \\ 586 \\ \hline 48408 \end{array}$$

La columna de las unidades da por suma parcial 18; escribimos, por consiguiente un 8, que es la cifra de las unidades, y reservamos una decena para sumarla con las decenas (1).

La columna de las decenas da 19 y 1 de la suma anterior 20, escribiremos el 0 y reservaremos el 2, que expresa centenas, para sumarle con las centenas, del mismo modo, de la suma de las centenas, que es 24, sólo escribimos el 4. De la suma de los millares que es 18, escribimos el 8; y, por último, escribiremos el 4, que es la suma de las decenas de millar.

La suma buscada será, pues, 48408.

29. Es fácil observar que si no sumásemos las columnas procediendo de derecha a izquierda, no se podría escribir de una sola vez el resultado, sino en el caso de ser todas las sumas parciales inferiores a 10.

La suma de las unidades más elevadas se escribirá completa, aunque sea igual o mayor que 10, porque ya no se tienen que reservar las decenas que resulten para agregarlas a otra suma parcial.

30. *Prueba de una operación es otra operación que tiene por objeto comprobar la exactitud del resultado obtenido en la primera.*

Si la prueba y la operación están conformes, tendremos *casi*

---

(1) Cuando se sume cada columna, conviene al seguirla con la pluma, nombrar solamente las sumas parciales que se obtengan, sin nombrar los sumandos. Así, no diremos 5 y 4 son 9 y 3 son 12 y 6, 18; sino 5, 9, 12, 18. De este modo se hace más rápidamente la operación y hasta se evitan equivocaciones.

certeza de que la operación está bien hecha por ser bastante difícil cometer los mismos errores en la operación y en la prueba: si no están conformes, habrá equivocación en la prueba o en la operación, y se deben repetir ambas con todo cuidado hasta que resulten conformes.

La prueba más sencilla de la adición consiste en repetir la operación sumando de abajo a arriba, si la primera vez se ha sumado de arriba a abajo.

También se puede comprobar la suma dividiendo los sumandos en grupos, que se suman separadamente, y sumando después las sumas parciales obtenidas.

Este procedimiento se suele emplear como operación y no como prueba, cuando los sumandos son muchos.

31. *Para* sumar sumas *indicadas, se forma una suma indicada con todos los sumandos de las sumas parciales* (1)

Sean las sumas $5+7+3$ y $4+9$.

Si formamos la suma $5+7+3+4+9$, compuesta de los sumandos de ambas sumas, podemos sustituir los sumandos 5, 7 y 3 y los 4 y 9 por su suma efectuada (27, 2.ª propiedad); luego podremos escribir,

$$(5+7+3)+(4+9)=5+7+3+4+9.$$

32. *Si varios sumandos aumentan en números cualesquiera, la suma aumenta en la suma de los aumentos de los sumandos.*

Sea la suma $5+7+3$, y supongamos que el primer sumando aumente en 4 y el tercero en 9 unidades, se tendrá:

$$(5+4)+7+(3+9),$$

que se podrá escribir (31) sin los paréntesis, y será:

$$5+4+7+3+9,$$

sustituyendo ahora los sumandos 5, 7 y 3 por su suma, y los 4 y 9 por la suya (27, 2.ª propiedad), se tendrá finalmente,

$$(5+7+3)+(4+9),$$

que demuestra la propiedad enunciada, puesto que la suma $5+7+3$ ha aumentado en $4+9$.

---

(1) Es evidente que también se pueden efectuar las sumas parciales y sumarlas después.

En particular, *si sólo aumenta un sumando, la suma aumenta en el mismo número que el sumando.*

33. *Si se suman miembro a miembro varias igualdades, el resultado es una igualdad* (1).

$2+5=7$
$9=4+5$

Es evidente que constando del mismo número de unidades los dos miembros de cada igualdad, las dos sumas efectuadas constarán también del mismo número de unidades.

$2+5+9=$
$7+4+5$

De las igualdades $3+9=12$ y $4+5=2+7$, obtendremos:

$$3+9+4+5=12+2+7.$$

Como caso particular resulta *que si a los dos miembros de una igualdad se les aumenta en el mismo número, los resultados forman una igualdad.*

$12>9$
$18>15$
$12+18>9+15$

34. *Si se suman miembro a miembro varias desigualdades que se verifican en un mismo sentido* (todas del signo $>$ o todas del signo $<$), *el resultado es una desigualdad que tiene lugar en el mismo sentido que las propuestas.*

Si tenemos $12>9$ y $18>15$, la suma $12+18$ se compone de dos grupos de unidades mayores, respectivamente, que los de la suma $9+15$ de los segundos miembros, luego es evidente que se tendra:

$$12+18>9+15.$$

$12>9$
$6=2+4$
$12+6>9+2+4$

Si sumamos una desigualdad con una igualdad, el resultado es una desigualdad en el mismo sentido, o del mismo signo que la propuesta.

Si a los dos miembros de la desigualdad $12>9$ les agregamos los de la igualdad $7=7$, se formarán las sumas $12+7$ y $9+7$, y como es evidente que la primera tiene más unidades que la segunda, se tendrá:

$$12+7>9+7.$$

II. La substracción

35. *La substracción es una operación que tiene por objeto, dados dos números, averiguar en cuántas unidades el mayor excede al menor.*

El mayor de los números dados se llama *minuendo,* y el me-

(1) Sumar miembro a miembro, se dice también sumar ordenadamente.

nor *substraendo*, el resultado *resto* o *diferencia* y la práctica de la operación *restar*.

Se indica la substracción escribiendo el minuendo, después el signo —, que se lee *menos*, y a continuación el substraendo, separando los datos del resultado por el signo =.

Así: siendo 7 el minuendo y 4 el substraendo, escribiremos:

$$7 - 4 = 3.$$

36. De la definición de la substracción se deduce: *que la suma del substraendo y del resto es igual al minuendo*, y por consiguiente podemos dar también la siguiente definición: *substracción es una operación que tiene por objeto, dados la suma y uno de los sumandos, hallar el otro.*

La substracción es, pues, una operación *inversa* de la adición. No puede la adición tener otra operación inversa que la substracción, porque el orden de los sumandos no altera la suma.

Si de la igualdad, $8+4=12$, resulta: $12-8=4$; de la igualdad, $4+8=12$, resultará análogamente, $12-4=8$; lo cual prueba que la misma operación hay que efectuar para hallar el primero o el segundo sumando, cuando se conoce la suma y uno cualquiera de ellos.

37. El procedimiento elemental primitivo de la substracción es restar del minuendo las unidades del substraendo, *descontándola una a una.*

Este procedimiento es practicable cuando el substraendo es un número dígito.

Si el substraendo es dígito y el minuendo le excede en menos de 10 unidades, se puede hallar el resto por medio de la tabla de sumar (26). Sea, por ejemplo, restar 8 del número 15. Si recorremos descendiendo la línea vertical que comienza por 8 hasta encontrar el número 15, vemos que se halla en la línea horizontal que comienza por 7; luego la suma de los números 7 y 8 es 15; entonces si 15 es el minuendo y 8 el substraendo, el resto será 7.

Aunque el minuendo sea un número cualquiera, si el substraendo es dígito, se adquiere pronto suficiente práctica para hacer mentalmente la substracción, por lo cual pasaremos a ocuparnos del caso general

38. La substracción de dos números cualesquiera se funda en que es una operación inversa de la adición, y en el siguiente principio:

El resto de dos números no varía cuando se aumentan ambos en igual número de unidades.

Sea, por ejemplo: $7 - 4 = 3$, de donde $7 = 4 + 3$.

Si aumentamos los dos miembros de la última igualdad en 5 unidades, se tendrá:

$$7 + 5 = 4 + 3 + 5$$

que se puede escribir (27, 2.ª propiedad)

$$7 + 5 = (4 + 5) + 3;$$

de donde, considerando las sumas $(7 + 5)$ y $(4 + 5)$ como minuendo y substraendo, se tendrá, en virtud de la definición de substracción,

$$(7 + 5) - (4 + 5) = 3;$$

como se quería demostrar.

Para restar números cualesquiera, supondremos descompuestos el minuendo y el substraendo en sus diferentes órdenes de unidades, y restaremos de las unidades de cada orden del minuendo las correspondientes del substraendo.

Está fundado este procedimiento en que, siendo el minuendo la suma de substraendo y resto, cada uno de sus órdenes de unidades debe provenir de la suma de los correspondientes en substraendo y resto.

Puede ocurrir que alguna de las cifras del minuendo sea menor que la correspondiente del substraendo: porque ya vimos (28) que cuando la suma parcial de las unidades de algún orden era mayor que 10, sólo se escribía la cifra de las unidades y se reservaba la de las decenas para agregarla a la suma siguiente; luego es claro que, de la cifra de las unidades de una suma parcial no se puede restar ninguno de los dos sumandos cuya suma era de dos cifras.

En este caso, para poder efectuar la substracción parcial correspondiente, se agregan a la cifra del minuendo 10 unidades de su orden, rebajando luego una unidad la cifra del orden siguiente en el minuendo, para que haya compensación.

El principio demostrado arriba, permite modificar este procedimiento. Cuando una substracción parcial no es posible, se añaden 10 unidades de su orden a la cifra del minuendo; pero en vez de suponer rebajada en una unidad la cifra siguiente del minuendo, se supone aumentada en dicha unidad la cifra siguiente del substraendo, y como el minuendo y substraendo han aumentado en números iguales, el resto no varía.

39. De estos razonamientos se deduce la siguiente:

Regla. *Para restar dos números cualesquiera, se escribe el substraendo debajo del minuendo, de modo que se correspondan las unidades de todos los órdenes: se traza debajo de ambos una raya; se resta de cada cifra del minuendo la correspondiente del substraendo, comenzando por la derecha, y se escriben los resultados debajo de la raya, de modo que se correspondan con las cifras restadas. Si alguna cifra del substraendo no se puede restar de la correspondiente del minuendo, se añaden a ésta 10 unidades y en la siguiente substracción parcial se añade una unidad a la cifra del substraendo.* El número que así se forme es el resto que se busca.

Ejemplo: Restar los números 16427 y 9546, se escribirán del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 16427 \\ 9546 \\ \hline 6881 \end{array}$$

De la cifra 7 del minuendo se resta la 6 del substraendo y escribiremos debajo la diferencia 1, que será la cifra de las unidades del resto. De la cifra 2, decenas del minuendo, no se puede restar la cifra 4, decenas del substraendo; añadiendo a aquélla 10 serán 12, y restando 4, quedan 8; escribiremos, pues, un 8, que será la cifra de las decenas del resto.

Para compensar el aumento de 10 decenas que ha recibido el minuendo, aumentaremos el substraendo en una centena: por consiguiente, la cifra de las centenas, en vez de 5 será 6, que no se puede restar de 4, que es la cifra de las centenas del minuendo; entonces se restará de 14, y la diferencia 8, que es la cifra de las centenas del resto, la escribiremos en el lugar que le corresponde. Por compensación la cifra 9 de los millares del substraendo se aumenta en una unidad, y será 10, y restando de 16 millares que quedan en el minuendo, la diferencia 6 es la cifra de los millares del resto, y se escribirá en el lugar que le corresponde. Luego el resto total será 6881.

40. La prueba más sencilla de la substracción consiste en sumar el substraendo y el resto, y la suma debe ser igual al minuendo.

También se puede comprobar restando del minuendo el resto, y la diferencia debe ser igual al substraendo.

Debe advertirse que ninguna de estas dos pruebas exigen escribir nada nuevo.

Secc. 5 41. *Para restar de un número una suma indicada, se resta del número dado el primer sumando; del resto que resulte, el segundo, y así sucesivamente hasta restar el último.*

Sea el número 48, del cual queremos restar la suma.

$$4 + 5 + 9 = 18.$$

Es evidente que:

$$48 - (4 + 5 + 9) = 48 - 18,$$

también es evidente que al mismo resultado se llegará restando del número 48, de una vez las 18 unidades, o restándolas sucesivamente por los grupos parciales contenidos en los sumandos 4, 5 y 9, cuya suma es 18. Entonces tendremos:

$$48 - (4 + 5 + 9) = 48 - 4 - 5 - 9.$$

42. *Para restar de un número una diferencia indicada, se suma con el número el substraendo de la diferencia y se resta del resultado el minuendo de dicha diferencia.*

Sea el número 20 del cual queremos restar la diferencia 24— 13, siendo 20 el minuendo y 24 — 13 el substraendo: como a los dos números los podemos aumentar el mismo número de unidades sin que el resto varíe (38), aumentando a ambos en 13 unidades, tendremos:

$$20 - (24 - 13) = (20 + 13) - (24 - 13 + 13)$$
$$= 20 + 13 - 24,$$

como se quería demostrar. se da

~~Para sumar con una diferencia~~ indicada un número, se suma este número ~~con el minuendo de la diferencia, y del~~ resultado se resta el substraendo.

$$\text{Así: } (8 - 5) + 3 = (8 + 3) - 5.$$

Para restar de una diferencia indicada un número, se suma éste con el substraendo de la diferencia y el resultado se resta del minuendo.

$$\text{Así: } (8 - 5) - 2 = 8 - (5 + 2).$$

43. *(Para hallar el resultado de una operación compuesta de adiciones y substracciones, reuniremos en una suma todos los sumandos: en otra todos los substraendos, y restaremos de la primera suma la segunda.*

Si queremos efectuar la operación compuesta

$$4+9-5+6-3-2$$

vemos que el resultado debe formarse reuniendo todas las unidades de los sumandos y descontando después las de los súbstraendos: luego tendremos:

$$4+9-5+6-3-2=4+9+6-5-3-2;$$

pero si restamos la suma $5+3+2$ de las unidades contenidas en los substraendos, se obtiene el mismo resultado que si restamos primero 5, después 3 y luego 2 (40): por consiguiente se tendrá finalmente:

$$4+9-5+6-3-2=(4+9+6)-(5+3+2).$$

Escolio. De lo dicho en este párrafo y los anteriores se deduce: que si un paréntesis precedido del signo —, o sea un substraendo, contiene operaciones indicadas de sumar o restar, o ambas, *se pueden sacar los términos del paréntesis cambiando los signos* + en — y los — en +, entendiéndose que si en el primer término interior al paréntesis no lleva signo, se debe suponer que tiene el signo +: si el paréntesis estuviera precedido del signo +, puede suprimirse aquél conservando todos los signos.

$$\text{Así:}\quad 45-(4+7-8)=45-4-7+8.$$
$$45+(4+7-8)=45+4+7-8.$$

Es claro que recíprocamente, para introducir dentro de un paréntesis, precedido del signo + o — varios términos enlazados con los signos + y —, se deben escribir con sus signos en el primer caso y cambiándoles en el segundo.

44. *(Si se restan miembro a miembro dos igualdades, los restos forman una igualdad.*

Sean las dos igualdades $3+9=12$, y $4+5=2+7$, decimos que: $(3+9)-(4+5)=12-(2+7)$.

(Los restos $(3+9)-(4+5)$ y $12-(2+7)$ son iguales, porque sumados con los substraendos iguales, deben dar el minuendo

$$(4+5) \text{ y } (2+7),$$

producen los minuendos, $3+9$ y 12, que por hipótesis son iguales.

En particular resulta: que de los dos miembros de una igualdad se puede restar un *mismo número,* y el resultado será una igualdad.

12 > 9
7 = 7
12-7>9-7

45. *Si de los dos miembros de una desigualdad se resta un mismo número, los restos forman una desigualdad en el mismo sentido, o del mismo signo que la propuesta.*

Sea la desigualdad $12 > 9$: si de los dos miembros restamos el número 7, los restos $12-7$ y $9-7$, sumados con un mismo número, el 7, dan sumas desiguales; y como uno de los sumandos es común y el otro diferente, la suma mayor tiene que ser la producida por el mayor de los sumandos diferentes; luego se tendrá:

$$12-7>9-7.$$

menor 7.

46. *Si se restan miembro a miembro dos desigualdades de signos contrarios, los restos forman una desigualdad del mismo signo que la de los minuendos.*

Sean las dos desigualdades.

$$21>17 \text{ y } 9<13,$$

decimos que:

$$21-9>17-13.$$

De la definición de la substracción se deduce que:

$$(21-9)+9=21 \text{ y } (17-13)+13=17,$$

pero siendo la suma 21 mayor que 17, y el sumando, 9, de la primera, menor que el sumando, 13, de la segunda, el otro sumando, $21-9$, de la primera, tiene que ser necesariamente mayor que el sumando, $17-13$, de la segunda.

47. Escolio I. La suma de cero con cualquier número es el mismo número: por consiguiente, si restamos *cero* de cualquier número, la diferencia es *el mismo número:* y si dos *números son iguales,* su diferencia es *cero.*

Escolio II. Hemos supuesto siempre que el minuendo es mayor que el substraendo; pero si quisiéramos efectuar una diferencia cuando el substraendo es mayor que el minuendo, la operación sería aritméticamente imposible. En el Algebra interpretaremos el resultado por medio de las cantidades y números negativos.

III. La multiplicación

48. *La multiplicación es una operación que tiene por objeto repetir un número, que se llama multiplicando, tantas veces por sumando como unidades tiene otro, que se llama multiplicador.*

El resultado de la multiplicación se llama *producto* y el multiplicando y multiplicador reciben también el nombre de *factores* del producto.

Se indica la multiplicación escribiendo el multiplicando; a continuación el signo × o . , que se lee *multiplicado por*, y después el multiplicador, separando los datos del resultado por medio del signo =.

De la definición de la multiplicación se deduce: que se puede efectuar la operación como una suma. Así:

$$12 \times 3 = 12 + 12 + 12$$

$$12 \times 3 = 12 + 12 + 12,$$

$$12 \times 3 = 12 + 12 + 12$$

$$12 \times 3 = 12 + 12 + 12$$

de donde, $$12 \times 3 = 36,$$

De la definición de la multiplicación se deduce también: *que el producto es tantas veces mayor que el multiplicando, como unidades tiene el multiplicador.*

En términos más generales podremos definir la operación diciendo *la multiplicación es una operación que tiene por objeto, dados dos números que se llaman multiplicando y multiplicador, hallar un tercer número, que se llama producto, que esté formado con respecto al multiplicando como el multiplicador está formado con respecto a la unidad* (1).

Si el multiplicador *es la unidad*, el producto es *igual al multiplicando;* porque sólo entra una vez por sumando. Si el multiplicando *es igual a la unidad*, el producto *es igual al multiplicador;* porque el sumando que se repite tantas veces como unidades tiene el multiplicador es igual a la unidad. Si el multiplicador *es cero*, el producto también *es cero;* porque no se puede tomar el multiplicando ninguna vez por sumando. Si el multiplicando *es cero*, el producto *es cero;* porque el sumando que se repite es cero.

Si el multiplicador tiene muchas unidades, es muy penoso formar el producto por medio de la suma, como en el ejemplo

---

(1) Más adelante veremos que esta última definición es la única aplicable a los números que no son enteros.

anterior por lo cual, para el estudio de esta operación, consideramos tres casos:

1.º *Multiplicar dos números dígitos*
2.º *Multiplicar un número de varias cifras por un dígito.*
3.º *Multiplicar dos números de varias cifras.*

49. PRIMER CASO. *Multiplicación de dos números dígitos.* El producto de dos números dígitos se halla por la *tabla de multiplicar*, que es un cuadro que contiene todos los productos posibles de dos números dígitos.

Para formar dicha tabla, se escriben en una línea horizontal los nueve primeros números; debajo se escriben las sumas de cada uno de ellos consigo mismo, y se tendrán los productos de los nueve primeros números por 2; sumando los números correspondientes de estas dos líneas, se formará una tercera línea que contiene los nueve primeros números tres veces, o sea sus productos por 3; sumando los números correspondientes a la primera y la tercera líneas, se obtiene una cuarta línea, que contendrá los números de la primera cuatro veces, y por tanto será su producto por cuatro; continuando del mismo modo, sumando cada línea que se obtenga con la primera hasta formar la novena, resultarán líneas que contendrán sucesivamente los productos de los nueve primeros números por 5, 6, 7, 8 y 9,

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

De lo dicho se infiere que cada línea horizontal contiene los productos de los nueve primeros números por el que comienza la línea, siendo este último el multiplicador, y cada línea vertical contiene los productos del número que la comienza por los nueve primeros números, siendo aquél el multiplicando.

El producto 5×7, por ejemplo, estará en la línea vertical que comienza por 5 y en la horizontal que comienza por 7; será, pues, el número 35, común a las dos líneas.

50. Segundo caso. *Multiplicación de un número de varias cifras por un dígito.*

Supongamos que se trata de multiplicar 6527 por 4.

Según la definición de la operación, se debe repetir 6527 cuatro veces por sumando; luego se podrá hacer del modo siguiente:

$$\begin{array}{r} 6527 \\ 6527 \\ 6527 \\ 6527 \\ \hline 26108 \end{array}$$

De aquí se deduce: que cada cifra del multiplicando se repite 4 veces, ó multiplica por 4; luego podremos evitar las sumas formando los productos de cada cifra, o *productos parciales*, por la tabla de multiplicar.

Sabemos también, que las decenas de cada suma parcial se agregan a la suma siguiente: en consecuencia, comenzaremos la operación por la derecha del multiplicando; escribiremos solamente la cifra de las unidades de cada producto parcial, y reservaremos la de las decenas para agregarla al producto siguiente.

En la práctica se procederá del modo que se indica en la siguiente regla, fundada en los principios anteriores.

Para multiplicar un número de varias cifras por otro de una sola, se escribe el multiplicador correspondiéndose con la cifra de las unidades del multiplicando y debajo de ambos una raya para separarlos del producto: se multiplica cada cifra del multiplicando por el multiplicador, comenzando por la derecha; se escriben las unidades de cada producto parcial debajo de la cifra correspondiente en el multiplicando y se añaden las decenas que resulten al producto siguiente. El número así formado será el producto pedido.

436 × 5 = 6u × 5 + 3d × 5 + 4c × 5 = 30u + 15d + 20c = 0u + 3d + 5d + 1c + 0c + 2um = 0u + 8d + 1c + 2um = 2180

En el ejemplo anterior tendremos:

$$\begin{array}{r} 6527 \\ 4 \\ \hline 26108 \end{array}$$

La cifra, 8, del producto, resulta de multiplicar, 7, por 4, que son 28; se escribe, 8, en el sitio de las unidades y se reservan las 2 decenas. Después 2×4 son 8, y las 2 decenas reservadas, 10, se escribe, el 0, en el lugar de las decenas y se reserva el 1, que expresa centenas, para agregarle al producto siguiente. En seguida, $5 \times 4 = 20$, y 1, del producto anterior, 21; se escribe el 1, y se reserva el 2. Por último, $6 \times 4 = 24$, y 2, del producto anterior, 26, que se escribe ocupando el lugar de los millares.

51. Tercer caso. *Multiplicación de dos números de varias cifras.*

La regla general se obtiene considerando antes el producto de un número cualquiera por la unidad, u otra cifra significativa seguida de ceros.

71: 1.° *Para multiplicar un número por la unidad seguida de ceros, basta escribir a la derecha del número tantos ceros como siguen a la unidad.*

En efecto: sea multiplicar 6823 por 100. El multiplicando expresa 6823 unidades simples, o de primer orden; pero si escribimos dos ceros a su derecha se formará el número 682300, que se puede leer 6823 centenas, es decir, 6823 unidades 100 veces mayores que las unidades simples; luego el número, 682300, será 100 veces mayor que el propuesto.

12×20 No está demás advertir, que cada una de sus cifras ha conservado su valor absoluto, pero ha adquirido un valor relativo 100 veces mayor.

2.° *Para multiplicar un entero cualquiera por una cifra significativa seguida de ceros, se multiplica el número por la cifra y se agregan a la derecha del producto tantos ceros como siguen a la cifra significativa.*

Sea, multiplicar 6823 por 400. Para efectuar la operación se debe tomar 6823, cuatrocientas veces por sumando, y esto se consigue, formando 100 grupos de 4 sumandos cada uno; pero un grupo de 4 sumandos es $6823 \times 4 = 27292$, luego debemos repetir 100 veces este último número y el producto será (primero) 2729200.

Consideremos ya el caso general, y sea multiplicar 6823 por 435: tendremos que repetir 6823, cuatrocientas treinta y cinco veces por sumando; lo cual equivale a formar tres grupos, uno de 400, otro de 30 y otro de 5 sumandos, o sea a multiplicar 6823, por 400, por 30 y por 5, y sumar los productos.

La práctica de la operación se funda en los principios anteriores, y se hace por la siguiente:

Regla. *Para multiplicar dos números cualesquiera se escribe el multiplicando y después el multiplicador, de modo que se correspondan sus diversos órdenes de unidades, y debajo de ambos se traza una raya para separarlos de los productos; se multiplica todo el multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador* (como se dijo en el 2.º caso), *se escribe la primera cifra de la derecha de cada producto parcial debajo del multiplicador correspondiente, se suman los productos parciales que hayan resultado, y la suma será el producto total.*

$$\begin{array}{r} 6823 \\ 435 \\ \hline 34115 \\ 20469 \\ 27292 \\ \hline 2968005 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 6823 \\ 435 \\ \hline 27292 \\ 20469 \\ 34115 \\ \hline 2968005 \end{array}$$

Los productos del multiplicando por las cifras, 4 y 3, del multiplicador, que expresan centenas y decenas, respectivamente, debían estar seguidos de dos y un cero, pero no hay necesidad de escribirlos, sujetándose a la regla dada arriba, porque las cifras de los productos ocupan los lugares que les corresponden y los ceros no alteran la suma.

En el multiplicando se debe proceder de derecha a izquierda; en el multiplicador se puede proceder de izquierda a derecha y aun en cualquier orden; pero la costumbre es proceder como en el multiplicando.

52. *El producto de dos factores no varía tomando el multiplicador por multiplicando, y al contrario.*

Sea el producto 4×3; sabemos que este producto significa, que 4, se ha de repetir 3 veces. Ahora, si descomponemos el 4, en sus unidades, y escribimos un cuadro que tenga 3 líneas horizontales de 4 unidades cada una, es evidente que este cuadro contendrá tantas unidades como $4 + 4 + 4$, que es el producto de 4×3.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Si en vez de considerar el cuadro por líneas horizontales, sumamos por verticales, como son 4 líneas de 3 unidades cada una, es decir, $3 + 3 + 3 + 3$, el resultado será el producto 3×4, luego se tendrá finalmente.

$$4 \times 3 = 3 \times 4.$$

53. De aquí se deduce la prueba de la multiplicación, que consiste en repetir la operación tomando el multiplicando por multiplicador, y al contrario.

El mismo teorema permite también elegir como multiplicador el número menor, o el que tenga menos cifras significativas, y justifica la denominación de *factores* que se da al multiplicando y multiplicador reunidos.

Lección Bien 54 *Si se multiplican, miembro a miembro, dos igualdades, los productos forman una igualdad.*

Porque siendo los multiplicandos y los multiplicadores iguales, se forman los dos productos por medio de sumandos iguales repetidos las mismas veces.

Como caso particular resulta: que los dos miembros de una igualdad se pueden multiplicar por un *mismo número* y los productos serán iguales.

55 *Si se multiplican, miembro a miembro, una desigualdad y una igualdad, los productos forman una desigualdad del mismo signo que la propuesta.*

Sean, la desigualdad, $12 > 9$ y la igualdad, $7 = 7$. En los productos 12×7 y 9×7, entran los sumandos, 12 y 9, siete veces cada uno; luego el primer producto será el mayor, porque el sumando 12, es mayor que 9, y se tendrá:

$$12 \times 7 > 9 \times 7.$$

Este teorema se puede enunciar diciendo: *Si se multiplican por un mismo número los dos miembros de una desigualdad, los productos forman una desigualdad del mismo signo que la propuesta.*

56. *Si se multiplican miembro a miembro dos desigualdades del mismo signo, los productos formarán una desigualdad del mismo signo que las propuestas.*

Sean las desigualdades, $12 > 9$ y $7 > 5$. Los productos serán,

12×7 y 9×5; pero en el producto 12×7, está contenido 12 más de 5 veces, que son las que 9 está contenido en el producto 9×5; luego hay dos motivos para que 12×7 sea mayor que 9×5: uno, que el sumando 12 es mayor que 9, y otro, que está repetido más veces: entonces se tendrá:

$$12 \times 7 > 9 \times 5.$$

57. *El producto de dos números tiene tantas cifras como entre los dos factores, o una menos.*

Sean los dos números 4379 y 821. Por estar comprendido el 821 entre 100 y 1000, tendremos (54):

$$4372 \times 821 < 4372 \times 1000$$
$$4372 \times 821 > 4372 \times 100;$$

pero el producto 4372×1000 se obtiene agregando a 4372 tres ceros, luego tiene tantas cifras como entre los números 4372 y 821 y el producto 4372×100 una cifra menos; luego el de los números propuestos, que es intermedio entre estos dos, tendrá necesariamente tantas cifras como uno de ellos.

58. *Para multiplicar una suma indicada por un número, se multiplican todos ~~los sumandos y se suman los productos~~* (1).

Sea multiplicar la suma $4 + 5 + 6$ por 3. Multiplicar por 3 es repetir 3 veces por sumando, luego tendremos:

$$(4 + 5 + 6) \times 3 = (4 + 5 + 6) + (4 + 5 + 6) + (4 + 5 + 6)$$
$$= (4 + 4 + 4) + (5 + 5 + 5) + (6 + 6 + 6) = 4 \times 3 + 5 \times 3 + 6 \times 3$$

Conviene observar, que como el producto no se altera aunque se altere el orden de los factores, también se tendrá:

$$3 \times (4 + 5 + 6) = 3 \times 4 + 3 \times 5 + 3 \times 6$$

59. *Para multiplicar una diferencia indicada por un número, se multiplican el minuendo y el substraendo y ~~se restan los productos~~.*

---

(1) Si tenemos que efectuar una operación compuesta, podemos, si así nos conviene, reducir los datos y operar después de simplificados: ahora, por ejemplo, podríamos efectuar la suma y multiplicar el resultado por el número; pero conviene estudiar las operaciones compuestas porque, aparte de su importancia, tienen aplicaciones ulteriores de que no se puede prescindir.

Sea multiplicar la diferencia $12-7$ por 4. Tenemos:

$$12-7=5. \quad \text{de donde,} \quad 12=7+5$$

y multiplicando por 4 los dos miembros de la última igualdad,

$$12\times 4=(7+5)\,4\ \text{(1)}$$

pero (58),

$$(7+5)\,4=7\times 4+5\times 4,$$

luego también,

$$12\times 4=7\times 4+5\times 4,$$

restando de ambos miembros 7×4, resulta:

$$12\times 4-7\times 4=5\times 4,$$

y poniendo en vez de 5 su igual, la diferencia $12-7$, resultará finalmente:

$$12\times 4-7\times 4=(12-7)\,4.$$

Conviene observar, como en el número anterior, que también se tendrá:

$$4\,(12-7)=4\times 12-4\times 7.$$

60. En virtud de los dos teoremas anteriores, *si varios sumandos, o un sumando y un substraendo tienen un factor común, se pueden encerrar en un paréntesis, prescindiendo del factor común, que se colocará fuera como multiplicador.* Así:

$$4\times 3+5\times 3+6\times 3=(4+5+6)\,3$$
$$12\times 7-9\times 7=(12-9)\,7.$$

ler

61. *Para multiplicar dos sumas indicadas, se multiplican todos los sumandos de la primera por cada uno de los de la segunda y se suman los productos.*

Sean las dos sumas $5+4+7$ y $2+6$. Efectuando la primera tendremos:

$$(5+4+7)\,(2+6)=16\,(2+6)$$
$$=\cancel{16\times 2+16\times 6},$$

poniendo ahora en vez de 16 su igual $5+4+7$, se tendrá:

$$(5+4+7)\,(2+6)=(5+4+7)\,2+(5+4+7)\,6$$

(1) En lo sucesivo, siempre que un factor esté encerrado en un paréntesis, prescindiremos del signo de multiplicar.

Ram

y efectuando las operaciones indicadas en el segundo miembro, resultará finalmente:

$$\cancel{(5+4+7)(2+6)}=5\times2+4\times2+7\times2+5\times6+4\times6+7\times6.$$

Producto de varios factores

62. Para indicar que un producto de dos números se ha de multiplicar por un tercer factor, lo que resulte por otro y así sucesivamente, se escriben los factores por su orden en una línea horizontal separándolos por medio del signo $\times$ o un. .

Así: $12\times3\times5\times6$, o bien $12.3.5.6$, significa que se debe multiplicar 12 por 3, el producto que resulte por 5 y lo que resulte por 6.

63. *Un producto de varios factores no se altera, aunque se cambie el orden de sus factores.*

Para demostrar este teorema, antepondremos los siguientes lemas:

LEMA PRIMERO. *Un producto de varios factores no se altera cuando se permutan los dos últimos factores.*

Sea el producto, $3.5.4.2$, decimos que es igual a, $3\ 5.2.4$, que es el producto que resulta cambiando el orden de los dos últimos factores.

Para efectuar un producto, se comienza multiplicando los dos primeros factores, luego por ser, $15=3.5$, tendremos:

$$3\ 5\ 4\ 2=15.4.2.$$

Pero, $$15\ 4=15.+15+15+15,$$

y multiplicando ambos miembros por 2,

$$15\ 4.2=15.2+15\ 2+15\ 2+15.2,$$

el segundo miembro se compone de, 15. 2, repetido 4 veces: luego será 15. 2. 4, y como es igual al primer miembro,

$$15.4.2=15.2.4.$$

o sustituyendo 15 por su igual, 3.5,

$$3.5.4.2.=3.5.2.4.$$

LEMA SEGUNDO. *Un producto de varios factores no se altera cuando se permutan dos factores consecutivos.*

Sea el producto, 3 . 5 . 4 . 2 . 8 . 7. Si queremos permutar los factores, 4 y 2, prescindiremos de los factores, 8 y 7, y tendremos (Lema primero):

$$3 . 5 . 4 . 2 = 3 . 5 . 2 . 4;$$

y multiplicando los dos miembros de esta igualdad, primero por 8 y luego por 7, se tendrá:

$$3 . 5 . 4 . 2 . 8 . 7 . = 3 . 5 . 2 . 4 . 8 . 7 \text{ (1)}.$$

De estos dos lemas se deduce fácilmente el teorema general.

Supongamos que en el producto, 3 . 5 . 4 . 2 . 8 . 7, se quiere que el 4, ocupe el primer lugar. Permutándole sucesivamente con los que le anteceden, formaríamos los productos iguales al propuesto.

$$3 . 4 . 5 . 2 . 8 . 7 \quad \text{y} \quad 4 . 3 . 5 . 2 . 8 . 7.$$

Del mismo modo haríamos ocupar el segundo lugar a otro factor, al 7, por ejemplo, y así de los demás.

64 / *Para multiplicar un número por un producto de varios factores, se forma un producto que contenga el número y los demás factores del primer producto.*

Sea, multiplicar el número 12, por el producto, 4 . 7 . 5; la operación se indica así: 12 (4 . 7 . 5 .); pero considerando efectuado el producto, 4 . 7 . 5, se puede cambiar el orden y tendremos:

$$12 (4 . 7 . 5) = (4 . 7 . 5) 12.$$

En el segundo miembro es inútil el paréntesis, porque para efectuar la operación, se multiplica, 4 por 7, lo que resulta, por 5 y el producto obtenido, por 12; suprimiendo, pues, el paréntesis, resulta:

$$12 (4 . 7 . 5) = 4 . 7 . 5 . 12 = 12 . 4 . 7 . 5.$$

65. *En un producto indicado se pueden sustituir dos o más factores, por su producto efectuado.*

Sea el producto, 4 . 7 . 5 . 12. Si queremos sustituir los factores 4 y 12, por su producto efectuado, los colocaremos los primeros, y se tendrá:

$$4 . 7 . 5 . 12 = 48 . 7 . 5$$

(1) Si los factores que se quieren permutar son los dos primeros, también es cierto el teorema, puesto que 3 . 5 = 5 . 3, y no tendríamos más que multiplicar ambos miembros sucesivamente por 4, 2, 8 y 7.

. nº 5 del nº 64
Es inútil el paréntesis pues no se alterará el resultado suprimiéndolo, porque siempre habrá que tomar el producto 240 de los cuatro primeros factores y multiplicarlo en seguida por 4.

Si se quiere, el último producto se puede dejar así:

$$(4 . 12)\, 7 . 5.$$

66. *Para multiplicar un producto por un número, se multiplica uno cualquiera de los factores.*

En efecto; sea multiplicar el producto, 4 . 7 . 5, por el número 12, tendremos:

$$(4 . 7 . 5)\, 12 = 4 . 7 . 5 . 12;$$

pero los factores, 7 y 12, por ejemplo, se pueden sustituir por su producto efectuado (64); luego,

$$4 . 7 . 5 . 12 = 4 . (7 . 12)\, 5;$$

o bien $$(4 . 7 . 5)\; 12 = 4 . (7 . 12)\, 5.$$

67. *Para multiplicar dos productos de varios factores, se forma un solo producto que contenga todos los factores.*

Sea multiplicar el producto, 4 . 5 . 9, por, 7 . 8. Efectuando el primer producto se tendrá:

$$(4 . 5 . 9)\,(7 . 8) = 180\,(7 . 8) = 180 . 7 . 8 \text{ (Núm. 63)},$$

y poniendo en vez de, 180, su igual, 4 . 5 . 9, se tendrá finalmente

$$(4 . 5 . 9)\,(7 . 8) = (4 . 5 . 9)\, 7 . 8 = 4 . 5 . 9 . 7 . 8.$$

68 De los teoremas anteriores se deduce, que un producto de varios factores se puede efectuar de muchos modos, que podrán servir de comprobación unos a otros.

Así: $$4 . 5 . 9 . 7 = 20 . 9 . 7 = 20 . 63 = 1260$$
$$4 . 5 . 9 . 7 = 45 . 4 . 7 = 180 . 7 = 1260, \text{ etc.}$$

De estos modos se elige el que la práctica sugiera como más breve.

69 Los teoremas anteriores permiten simplificar la operación de multiplicar cuando uno o los dos factores terminan en ceros.

Sea, por ejemplo, multiplicar, 127000, por, 6400; como se tiene $127000 = 127 \times 1000$, y $6400 = 64 \times 100$; se tendrá: $127000 \times 6400 = 127 \times 1000 \times 64 \times 100$, o bien (64), $127000 \times 6400 = 127 \times 64 \times 100000$.

La última forma permite efectuar el producto de los números propuestos, *multiplicando los números que resultan prescindiendo de los ceros y agregando a la derecha del producto tantos ceros como tienen entre los dos factores.*

Así:

$$
\begin{array}{r}
127000 \\
6400 \\
\hline
508 \\
762 \\
\hline
812800000
\end{array}
$$

Si sólo uno de los factores termina en ceros, *se multiplican los números, prescindiendo de los ceros y se agregan éstos a la derecha del producto.*

70. En virtud de los teoremas sobre producto de varios factores, es evidente: *que el producto que resulta de multiplicar miembro a miembro tres o más igualdades es una igualdad, y el producto de tres o más desigualdades del mismo signo, o con alguna igualdad, es una desigualdad del mismo signo que las propuestas:* quedando así generalizados los teoremas de los números 53, 54 y 55.

IV. Las potencias

71. *Se llama potencia de un número el producto que resulta de varios factores iguales a dicho número.*

Grado de la potencia es el número ordinal que indica cuántos factores la producen. Se clasifican por grados: en *segunda potencia* o *cuadrado,* cuando los factores son dos; *tercera potencia* o *cubo,* cuando son tres; *cuarta potencia,* cuando son cuatro, y así sucesivamente.

Todo número se considera como su *primera potencia.*

La operación de formar potencias recibe el nombre de *elevación a potencia o potenciación,* y el número que se eleva recibe diversos nombres, *base, raiz, dignando.* El último nombre es el menos usado, a pesar de ser el más apropiado, porque no tiene otra aplicación en las Matemáticas.

Una potencia se indica escribiendo a la derecha y en la parte superior del dignando, o base, otro número de menor tamaño, que expresa las unidades de su grado, y se llama exponente.

Exponente es el número que con sus unidades indica las veces que se ha de repetir como factor el número dado o base. Así en 5^3 el número 3 indica que 5 se ha de repetir como factor 3 veces

Asi, la cuarta potencia de 5, se indica, 5^4, y se lee, 5 elevado a la cuarta potencia.

El exponente de la primera potencia es la unidad y no se escribe.

72. De la definición de potencia se deduce:

1.° *Que las potencias de la unidad son la unidad.*

2.° *Que las potencias de* 10, *son la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente.*

Así: $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10000$, etc.

73. *Si se elevan a una misma potencia los dos miembros de una igualdad, el resultado es otra igualdad.*

Es un caso particular del teorema número 70 sobre el producto de igualdades.

74. *Si se elevan a una misma potencia los dos miembros de una desigualdad, el resultado es otra desigualdad del mismo signo que la primera.*

Es un caso particular del producto de desigualdades del mismo signo (70).

75. *El producto de dos potencias de un mismo número es otra potencia de dicho número cuyo exponente es la suma de los exponentes.*

Sea multiplicar, 5^4, por 5^3. En, 5^4, entra el factor, 5, cuatro veces, y en, 5^3, entra tres veces, luego en el producto, $5^4 \times 5^3$, entrará, cuatro veces, más tres veces, y se tendrá:

$$5^4 \times 5^3 = 5^{4+3} \quad (1).$$

76. *Para elevar una potencia a otra potencia, se multiplican los exponentes, dejando la misma base ó dignando.*

Sea elevar al cubo: 5^4. El factor, 5^4, se debe repetir tres veces: luego se tendrá:

$$(5^4)^3 = 5^4 \times 5^4 \times 5^4 = 5^{4+4+4},$$

o bien, por ser, $4+4+4 = 4 \cdot 3$,

$$(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3}.$$

77. *Para elevar un producto a una potencia, se elevan todos sus factores a dicha potencia.*

Sea elevar al cubo el producto, $5 \times 2 \times 7$, se tendrá:

$$(5 \cdot 2 \cdot 7)^3 = (5 \cdot 2 \cdot 7)(5 \cdot 2 \cdot 7)(5 \cdot 2 \cdot 7);$$

(1) El teorema es cierto, aunque sean tres o más las potencias que se multiplican. Así:

$$5^4 \times 5^3 \times 5^6 = 5^{4+3} \times 5^6 = 5^{4+3+6}$$

pero en virtud de los teoremas números 62 y siguientes, el segundo miembro es igual a,

$$5.5.5.2.2.2.7.7.7, \text{ o sea, a } 5^3.2^3.7^3,$$

luego se tendrá: $(5.2.7)^3 = 5^3.2^3.7^3$.

Si los factores estuvieran elevados a alguna potencia, el teorema se verificaría lo mismo. Así:

$$(5^2.2.7^4)^3 = (5^2)^3 2^3 (7^4)^3,$$

y como el segundo miembro es igual a $5^{2 \cdot 3} 2^3 . 7^{4 \cdot 3}$ (75), también se tiene, $(5^2.2.7^4)^3 = 5^{2 \cdot 3} 2^3 . 7^{4 \cdot 3}$.

V. La división

1ª Mi 78. (*La división es una operación que tiene por objeto hallar cuantas veces, un número dado, que se llama dividendo, contiene a otro número, también dado, que se llama divisor*) (El número de veces que el dividendo contiene al divisor se llama *cociente*. Al dividendo y divisor se les suele llamar también *términos de la división.*)

La división se indica con el signo : , que se lee *dividido por*, colocado entre el dividendo y el divisor.

Si el dividendo es 12 y el divisor, 4, escribiremos, 12 : 4.

Se indica también la división escribiendo el divisor debajo del dividendo y separándolos por una raya horizontal Así: $\frac{12}{4}$.

La división es una resta abreviada por tanto

79. 2ª ~~De la definición de la división, se deduce que~~ se puede efectuar por substracciones sucesivas.)

Sea dividir, 22, por, 4.

$$\begin{array}{r} 22 \\ 4 \\ \hline 18 \\ 4 \\ \hline 14 \\ 4 \\ \hline 10 \\ 4 \\ \hline 6 \\ 4 \\ \hline 2 \end{array}$$

Restando, 4 de 22, quedan, 18; restando, 4 de 18, quedan 14; restando, 4 de 14, quedan 10; restando, 4 de 10, quedan 6; y por último, restando, 4 de 6, quedan 2. Como este último resto es menor que 4, no se pueden efectuar más substracciones.

Hemos hecho, 5 substracciones; entonces el dividendo, 22, contiene al divisor, 4, cinco veces; luego el cociente es 5. El último resto recibe el nombre de *resto* o *resíduo* de la división.

Como al resíduo se llega cuando ya no se puede restar el divisor, deducimos que el carácter del *resto* o *resíduo* es ser menor que el divisor.

2ª tambiem se puede definir tratandose de enteros diciendo que dividir es hacer a un numero tantas veces menor como unidades tiene otro.

El anterior análisis demuestra que si toma cinco veces por sumando el divisor, 4, o lo que es lo mismo, si se multiplica, 4 por 5, y al producto se agrega el resíduo, 2, el resultado será igual al dividendo, 22.

De suerte: *que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, más el resíduo.*

No se necesita modificar este enunciado cuando el resíduo sea cero (como hubiera sucedido, por ejemplo, si el dividendo, en vez de 22, hubiese sido, 20); pero entonces, como el sumando cero no altera la suma, se verificará en este caso: *que el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente.*

Cuando el resíduo es cero, la división se dice *exacta;* cuando no es cero inexacta Definición general

La división ~~exacta~~ se puede definir diciendo: *que es una operación que tiene por objeto, dados un producto y uno de los factores, hallar el otro* (1).

Un número se dice *divisible* por otro cuando el cociente de su división es exacto, como el dividendo resulta entonces de multiplicar el divisor por el cociente, se llama también, *múltiplo.* El número que divide a otro exactamente se dice, respecto a este otro, *divisor, submúltiplo, factor* y *parte alícuota.*

Los múltiplos que resultan de multiplicar por 2, 3, 4, etcétera, se llaman, *duplo, triplo, cuádruplo,* etc.

Cuando los divisores son, 2, 3, 4, etc., los cocientes se llaman, *mitad, tercio, cuarto,* etc.

80. Al efectuar la división por substracciones vemos que, si es exacta, *el divisor hace el papel de multiplicando y el cociente de multiplicador.* Pero se pueden invertir los papeles de uno y otro; según esto, la división exacta se puede definir diciendo: *que tiene por objeto dividir un número en tantas partes iguales como unidades tiene otro;* cada una de estas partes es igual al *cociente;* luego éste hace el papel de *multiplicando.* ~~Definición general~~

La división ~~exacta (2)~~ es una operación ~~inversa de la multipli-~~ que tiene por objeto

~~dados dos factores hallar el otro.~~

$8 \times 6 = 48. \quad 48 : 6 = 8. \quad 48 : 8 = 6$

(1) Más adelante verémos que esta definición es aplicable a todos los casos de la división, aunque no se trate de números enteros. No la hemos tomado como punto de partida, porque en este capítulo no podemos ocuparnos del cociente completo de la división, que en general es fraccionario; y el producto del cociente entero por el divisor en la división inexacta es menor que el dividendo.

(2) Refiriéndose al cociente completo, la división siempre es una operación inversa de la multiplicación.

cación, puesto que se halla un factor cuando se conocen el producto y el otro factor.

La observación que acabamos de hacer sobre el cambio de papeles de divisor y cociente, nos hace presumir que la multiplicación no tiene más que *una operación inversa;* pero el teorema que dice que el producto no se altera cuando se toma el multiplicando por multiplicador y éste por multiplicando, lo demuestra.

Si de la operación directa,

$$4 \times 8 = 32, \text{ se deduce la inversa } 32 : 4 = 8$$

como se tiene,

$$4 \times 8 = 8 \times 4 = 32\text{; también se tendrá: } \quad 32 : 8 = 4$$

81. De la definición de la división se deduce:

$6 : 1 = 6$ 1.° *Si el divisor es igual a la unidad, el cociente es igual al dividendo.*

$6 : 6 = 1$ 2.° *Si el divisor es igual al dividendo, el cociente es igual a la unidad.*

$0 : 6 = 0$

$6 : 0 = 0$ 3.° *Si el dividendo es cero, el cociente también es cero* (1).

Supondremos en todo este capítulo que el dividendo es igual o mayor que el divisor, pues en el caso contrario no le contendría una vez cuando menos.

82. Cuando el dividendo contiene al divisor muchas veces, la división no se efectúa por substracciones del modo indicado en el número 78; para evitar aquel procedimiento, que sería muy largo, estudiaremos en la operación los casos siguientes:

$30 : 6 = 15$ 1.° *Que el divisor y el cociente tengan una sola cifra.*

$30 : 15 = 2$ 2.° *Que el divisor tenga varias cifras y el cociente una sola.*

3.° *Que el divisor y el cociente tengan varias cifras.*

$3\,42\,42$ 83. PRIMER CASO. *Que el divisor y el cociente tengan una sola cifra.*
En este caso el divisor multiplicado por 10, o sea seguido de un cero, debe ser mayor que el dividendo; luego este número tiene que ser inferior a 90, que es el producto del mayor número de una cifra por 10.

Sea, dividir, 48 por 6. El cociente es menor que 10, porque, $6 \times 10 = 60$. Ahora bien; si en la tabla de multiplicar (48) recorre-

(1) En el Algebra estudiaremos los casos en que el divisor, o el dividendo y el divisor a un tiempo, son iguales a cero.

mos, descendiendo, la línea vertical, que comienza por 6, encontraremos en la octava línea horizontal el número, 48, que por la formación de la tabla sabemos que es el producto, 6 × 8, luego el cociente de la división, será, 8.

Si

Si tenemos que dividir, 53, por 6, descendiendo en la vertical que comienza por 6, vemos que, 53, está comprendido entre, 48 y 54, que son los productos de 6, por 8 y por 9; luego la división es inexacta, el cociente es, 8 y el resto es, 5, porque este número es la diferencia entre, 53 y 48.

Esta operación se llega a efectuar mentalmente al cabo de cierta práctica.

84. SEGUNDO CASO. *Que el divisor tenga varias cifras y el cociente una sola.*

Para que el cociente tenga una sola cifra, se necesita que, añadiendo un cero al divisor, el resultado sea mayor que el dividendo.

Sea dividir, 2537, por, 692. El número 6920, producto del divisor por 10, es mayor que el dividendo, 2537; luego el cociente será menor que, 10, y por consiguiente no tendrá mas que una cifra.

El dividendo es igual o mayor que el producto del divisor por el cociente; luego también será igual o mayor que el producto de la cifra de orden más elevado en el divisor, por el cociente entonces si dividimos, 2537, que es el dividendo, por 6 centenas que es el número de unidades de orden más elevado en el divisor, el cociente que se obtenga será *igual o mayor* que el verdadero.

El producto de, 600, por una cifra de unidades termina en dos ceros, es decir, es un número exacto de centenas; luego debe estar contenido en las centenas del dividendo, y por tanto, para hallar la cifra del cociente, bastará dividir, 2500, por 600, o sea, 25 centenas por, 6 centenas, esta división da el mismo cociente que, 25 unidades por, 6 unidades; porque es evidente que, 25 centenas contienen a, 6 centenas, las mismas veces que, 25 unidades, a, 6 unidades. Ahora, por lo dicho en el caso anterior, sabemos hallar el cociente de 25, entre 6, que es, 4; como este cociente puede ser mayor que el verdadero, para comprobarle se multiplica el divisor, 692, por 4, y resulta el producto, 2768, que no se puede restar del dividendo, que es, 2537; entonces la cifra 4, es grande.

Rebajando una unidad, el cociente será, 3; el producto de, 692, por 3, es, 2076, que ya es menor que el dividendo, 2537; luego la cifra, 3, es buena. El resíduo de esta división, es 461, y se halla restando, 2076, de, 2537.

De lo expuesto se deduce la siguiente:

REGLA. *Para dividir dos números de varias cifras, cuando el cociente tiene una sola cifra, se dividen, por la cifra de orden más elevado en el divisor, las unidades de igual orden del dividendo* (la primera o las dos primeras cifras de la izquierda), *y se obtiene un cociente igual o mayor que el verdadero. Se multiplica el cociente obtenido por el divisor, y si el producto se puede restar del dividendo, se hace la substracción, y el resto será el resíduo de la división: si el producto del divisor por la cifra del cociente es mayor que el dividendo, se rebaja el cociente una unidad; si todavía fuese mayor dicho producto, se rebaja nuevamente otra unidad, y así se continúa rebajando, hasta que el producto del divisor por el cociente sea menor que el dividendo, y la substracción se pueda efectuar.*

Se acostumbra a escribir los datos y el resultado de la operación del modo siguiente (1).

$$\begin{array}{r|l} 2537 & 692 \\ 2076 & \overline{3} \\ \hline 461 & \end{array}$$

85. Ordinariamente se efectúan la multiplicación y la substracción al mismo tiempo; para esto se agrega a cada cifra del dividendo tantas veces, 10, como se necesite para poder efectuar la substracción del producto parcial correspondiente, y al obtener el producto parcial siguiente se le añaden, para que haya compensación, otras tantas unidades.

En el ejemplo anterior tendremos:

$$\begin{array}{r|l} 2537 & 692 \\ 461 & \overline{3} \end{array}$$

Diremos: 3 por 2 son 6, a 7, va 1, que escribiremos; 3 por 9 son 27, que no se puede restar de 3; añadiremos a esta cifra, 30, para que de la suma, que es, 33, se pueda restar 27, y diremos, de 27

(1) El conjunto de las dos líneas que separa el dividendo y divisor y el divisor y el cociente, se llama *caja de división*.

a 33, van 6; escribiremos el 6, y para compensar el aumento de 30 decenas, que ha recibido el dividendo, que es un minuendo, tendremos que añadir 3 centenas al producto parcial siguiente, que expresa centenas, y diremos: 3 por 6 son 18 y 3 son 21, a 25, van 4; y escribiendo esta cifra, el resíduo que queda es 461.

86. La cifra del cociente no se debe escribir sin tener seguridad de que es buena, y por tanto se deben efectuar los productos y substracciones parciales mentalmente, pero teniendo presente que la última substracción se ha de poder hacer sin añadir nada al dividendo.

Por evitar la operación mental completa se suele comenzar por la izquierda.

En nuestro ejemplo podremos decir: 25 entre 6 a 4; 4 por 6 son 24, a 25, va 1: con el 3 siguiente, 13; 4 por 9 son 36, que no se puede restar de 13, luego la cifra 4 es grande. Rebajándola una unidad, diremos: 25 entre 6 a 3: 3 por 6 son 18, a 25 van 7, que son centenas, o 70 decenas, y como el producto parcial siguiente no puede llegar a 30 decenas (por ser 3 la cifra del cociente), la cifra, 3, no puede ser grande. La cifra, 4, era grande y, 3, no lo es; luego esta cifra es buena.

Esta operación mental se llama *tanteo;* se puede suspender y dar por buena la cifra del cociente (si la inmediata superior es grande), cuando en una substracción parcial se obtenga un resto igual o mayor que la cifra tanteada (1).

87. TERCER CASO. *Que el divisor y el cociente tengan varias cifras.* Se sabe que el cociente tiene varias cifras, cuando el dividendo es igual o mayor que el divisor seguido de un cero, porque entonces el cociente será igual o mayor que 10, y por consiguiente tendrá dos cifras, cuando menos.

Sea el dividendo 224617, y el divisor, 583. Se ve inmediatamente que el dividendo es mayor, que, 5830; luego el cociente es mayor que, 10, y por consiguiente tendrá varias cifras.

---

(1) Si la cifra tanteada es un 3, por ejemplo, y se llega al resto, 3, colocándonos en el caso más desfavorable, que es que todas las cifras siguientes en el dividendo sean ceros y en el divisor nueves, el producto, $9 \times 3 = 27$ se podrá restar de 30, y volverá a dejar el resto 3; luego la cifra, 3, no puede ser grande.

Si añadimos ahora a la derecha del divisor dos y tres ceros sucesivamente tendremos:

$$224617 > 58300, \quad \text{y} \quad 224617 < 583000$$

lo que patentiza que el cociente es mayor que, 100, y menor que, 1000; tendrá, pues, tres cifras, que serán *centenas, decenas* y *unidades.*

La primera de las dos desigualdades anteriores nos hace ver que el dividendo es mayor que, 583 centenas: para que se verifique, se necesita y basta que las 2246 centenas del dividendo formen un número igual o mayor que, 583 centenas; porque si fuese menor para igualar a, 583 centenas, habría que añadirle cuando menos, una centena, y basta aumentarle en 17 unidades, para que forme un número mayor que, 583 centenas, o, 58300 unidades.

La segunda de las dos desigualdades indica que el dividendo es menor que, 5830 centenas, y se verifica, con más motivo, si prescindimos de las, 17 unidades del dividendo, y se tendrá, $224600 < 583000$.

De estas consideraciones se deduce: *que si separamos de la izquierda del dividendo un número de cifras suficiente para formar un número que contenga al divisor, pero sin llegar a contenerlo 10 veces, el orden marcado por la cifra de la derecha en la parte separada del dividendo, es el mismo que el de la cifra de orden superior en el cociente.*

88. *Si separamos de la izquierda del dividendo tantas cifras como se necesitan para contener al divisor, pero sin llegar a contenerlo 10 veces, el cociente del número así formado, por el divisor, es la cifra de orden superior del cociente.*

Sea el dividendo, 224617 y el divisor, 583. Separaremos de la izquierda del dividendo el número, 2246, que contiene al divisor, pero menos de 10 veces; como la cifra de la derecha expresa centenas, la cifra de orden superior del cociente también expresa centenas (86). Si dividimos, 2246, por 583 (por la regla 83), se halla el cociente, 3, y vamos a demostrar que esta cifra es la de las centenas del cociente pedido.

El producto de, 583, por, 3, se puede restar de, 2246; luego del mismo modo se podrá restar el producto de, 583 unidades, por, 3 centenas de, 2246 centenas, y con más motivo de, 2246 centenas, más, 17 unidades, o sea de todo el dividendo; luego el cociente es, cuando menos, igual a, 300.

El producto de, 583, por, 4, es mayor que, 2246, y del mismo modo, 583, por, 4 centenas, es mayor que, 2246 centenas; luego dicho producto excede a este número, cuando menos en una centena; entonces es también mayor que, 2246 centenas, más 17 unidades, que es todo el dividendo; luego el cociente no llega a, 400.

De lo cual resulta que, estando comprendido el cociente entre, 300 y 400, su cifra de las centenas es necesariamente un 3. Conforme con el enunciado.

89. Pasemos ya a efectuar la división de, 224617, por, 583. Dispongamos la operación como en el segundo caso (83):

224617	583
1749	385
49717	
4664	
3077	
2915	
162	

Si separamos de la izquierda del dividendo el número, 2246, y le dividimos por, 583, hallamos, el cociente 3, que será la cifra de las centenas del cociente (87).

Multipliquemos ahora; 583, por, 3 centenas, y el producto expresará centenas; luego restando este número de las centenas del dividendo, la diferencia, que es, 497, también expresará centenas; y si le añadimos las 17 unidades del dividendo, el número, 49717, es el exceso del dividendo sobre el producto del divisor por, 300.

El dividendo, según ésto, se compone de, 300 veces el divisor, más, 49717; de suerte que para concluir de determinar el cociente necesitamos hallar cuántas veces, 49717, contiene a, 583, o sea dividir, 49717, por, 583.

Aplicando los razonamientos anteriores, se deduce que para dividir estos números se debe separar de la izquierda del dividendo el número 4971, y como expresa decenas, si le dividemos por, 583, el cociente, 8, será la cifra de las decenas; multiplicándola por el divisor, y restando el producto, 4664 decenas, de 4971, el resto será, 307 decenas.

Añadiendo a este número las 7 unidades del dividendo, se obtienen, 3077 unidades, que serán el exceso de 49717, sobre 80 veces el divisor; el problema queda ya reducido a hallar el cociente de, 3077, por, 583.

Hecha la división, resulta que el cociente, 5, es la cifra de las unidades: multiplicándola por el divisor y restando el producto de, 3077, queda un resto de, 162 unidades.

Resumiendo lo que hemos dicho, resulta que el dividendo contiene al divisor, 300 más 80, más cinco veces, o sea, 385 veces, y además un exceso de 162 unidades; luego el cociente será, 385, y el resto, 162.

Los números, 2246, 4971 y 3077, que han sido los dividendos para determinar cada una de las cifras del cociente, se llaman *dividendos parciales;* cada una de las operaciones de dividir, *división parcial,* y los números, 497, 307 y 162, son los restos de las divisiones parciales; el último también se llama *residuo.*

$$\begin{array}{r|l} 224617 & 583 \\ \cline{2-2} 4971 & \\ 3077 & 385 \\ 162 & \end{array}$$

La multiplicación y substracción, que se efectúan en cada división parcial pueden hacerse al mismo tiempo, según se indicó (84).

A la derecha de cada resto hemos escrito antes todas las cifras no consideradas aún en el dividendo; pero no hace falta escribir más que la siguiente, por ser la que con el resto forma el dividendo parcial.

De estas consideraciones deducimos la siguiente:

REGLA. *Para dividir dos números, cuando el cociente tiene varias cifras, se separan de la izquierda del dividendo las cifras, que se necesiten para contener al divisor, sin llegar a contenerlo 10 veces* (tantas cifras como tiene el divisor, o una más si, consideradas como unidades simples, forman un número menor que el divisor): *el número formado será el primer dividendo parcial; se divide por el divisor y se tendrá la cifra más elevada del cociente; se multiplica esta cifra por el divisor y el producto se resta del dividendo parcial; a la derecha del resto se escribe la cifra siguiente del dividendo y se obtendrá el segundo dividendo parcial; se divide por el divisor y se tendrá la segunda cifra del cociente, que se escribe a la derecha de la primera; se multiplica esta cifra por el divisor y el producto se resta del segundo dividendo parcial; con el* *segundo resto se procede como con el primero, continuando la operación hasta obtener la última cifra del cociente y el último resto, que en el caso de ser la división exacta es cero.*

El divisor excede a cada resto, cuando menos, en una unidad: luego añadiendo una cifra a la derecha de cada resto, resulta un dividendo parcial que necesariamente es menor que 10 veces el divisor: pero puede suceder que sea también menor que una vez el divisor, y entonces se escribe, *cero,* en el cociente y se forma el siguiente dividendo parcial, añadiendo al precedente la cifra que sigue en el dividendo

90. Si el divisor no tiene más que una cifra se abrevia la división haciendo las operaciones mentalmente, sin escribir los restos y dividendos parciales, pero colocando las cifras del cociente en los lugares que les correspondan.

Sea dividir, 43169 entre 8 Dispondremos la operación del modo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 43169 & 8 \\ \cline{2-2} 1 & 5396 \end{array}$$

Diremos: 43 entre 8 a 5 y sobran 3; 31 entre 8 a 3 y sobran 7, 76 entre 8 a 9 y sobran 4; 49 entre 8 a 6 y sobra 1.

91. La *prueba* de la división consiste en multiplicar el cociente por el divisor y sumar el resíduo con el producto, y el resultado debe ser igual al dividendo (78).

Si el resíduo es cero, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente: luego cuando la división es exacta, también se puede comprobar tomando el cociente por divisor, y debe resultar para cociente el divisor primitivo.

92. El número de cifras del cociente es igual al de dividendos parciales; el primer dividendo parcial se forma tomando de la izquierda del dividendo tantas cifras como se necesiten para contener al divisor, pero menos de 10 veces, y cada uno de los demás dividendos, añadiendo a cada resto una de las cifras que quedaron a la derecha del primer dividendo parcial; luego el número de cifras del cociente es *una más* que las que quedan a la derecha del primer dividendo parcial.

Ahora; si el primer dividendo parcial tiene tantas cifras como el divisor, a su derecha quedan tantas cifras como indique la diferencia entre los números de cifras del dividendo y divisor: en este caso el cociente tiene una cifra más que dicha diferencia.

Si el primer dividendo parcial tiene una cifra más que el divisor, el número de cifras que quedan a su derecha es igual a la diferencia antes citada menos una, y como el cociente tiene una cifra más, tendrá tantas como dicha diferencia.

Resumiendo lo dicho: *El número de cifras del cociente es igual a la diferencia de los números de cifras del dividendo y divisor, o una más.*

93. *La división se puede abreviar, cuando el dividendo y el divisor terminan en ceros, suprimiendo de la derecha de ambos el mismo número de ceros y dividiendo los números que quedan; pero añadiendo al resíduo tantos ceros como se han suprimido de la derecha del dividendo y del divisor.*

Sea, dividir 24700 por 1600. Los números que nos proponemos dividir son iguales a 247 centenas y 16 centenas; pero es evidente que las mismas veces contiene 247 centenas a 16 centenas, que 247 unidades a 16 unidades, y como en este último caso el cociente es 15 unidades, también lo será en el primero.

En la primera división, el producto del divisor, 16 centenas, por el cociente, 15 unidades, expresa centenas; luego el resto, 7, expresará también centenas o, será, 700; es decir, que el resto es el mismo que resulta de dividir los números, 247 y 16, pero seguidos de los dos ceros que se habían suprimido.

También se puede abreviar la división *aunque sólo termine en ceros el divisor: en este caso se separan los ceros del divisor y de la derecha del dividendo otras tantas cifras; se dividen los números que quedan a la izquierda, y a la derecha del resíduo se agregan las cifras separadas de la derecha del dividendo.*

Sea, dividir los números 24785 y 1600. Si se tratara, como en el ejemplo anterior, de dividir 24700 por 1600, el cociente sería 15 y el resto 700; pero el número, 24785, excede a, 24700, en menos de 100 unidades, o sea de una centena; luego no llega a contener al divisor, 1600, o sea, 16 centenas, una vez más que 24700; entonces el cociente es el mismo que si el dividendo terminase en dos ceros: pero el resíduo, en vez de ser 700, tendrá evidentemente 85 unidades más, y por consiguiente será 785. Conforme con el enunciado.

94. Un caso particular que ocurre muy a menudo, es la división de un número por la unidad seguida de ceros.

Si separamos de la derecha del dividendo tantas cifras como ceros siguen a la unidad, el número que queda a la izquierda *será el cociente;* porque entonces el divisor es 1: el resto será el número formado *por las cifras separadas.* Luego si el dividendo *termina en tantos ceros como siguen a la unidad, la división será exacta.*

EJEMPLOS: El cociente de 28671 por 100 es 286, y el resto 71.

El cociente de 28600 por 100 es 286, y el resto cero.

95 En algunas aplicaciones de la división conviene considerar el cociente aumentado en una unidad, a lo cual se llama *forzar la unidad*, y al cociente aumentado se le llama *cociente por exceso*. Cuando se habla de este cociente y del ordinario, este último recibe el nombre de *cociente por defecto.*

El producto del divisor por el cociente por exceso, es mayor que el dividendo; la diferencia entre dicho producto y el dividendo, tomando éste por substraendo, recibe el nombre de *resto por exceso, o resto substractivo;* el resto ordinario se llama entonces *resto por defecto* o *aditivo.*

Si representamos por D, el dividendo, por d, el divisor por c, el cociente por defecto y por r, el resto aditivo, el cociente por exceso será $c+1$, y si designamos por r', el resto substractivo, se tendrá según las condiciones establecidas (1).

$$D = d \, . \, c + r, \qquad \text{y} \qquad D = d\,(c+1) - r'.$$

96. TEOREMA. *La suma de los restos aditivo y substractivo es igual al divisor.*

Adoptando la notación del número anterior, tenemos:

$$D = d \, . \, c + r, \qquad \text{y} \qquad D = d\,(c+1) - r'.$$

Puesto que estas igualdades tienen el mismo primer miembro, los segundos miembros serán iguales, y tendremos:

$$d \, . \, c + r = d\,(c+1) - r',$$

y efectuando la multiplicación indicada en el segundo miembro,

$$d \, . \, c + r = d \, . \, c + d - r',$$

(1) Representaremos los números por letras siempre que sea necesario para la mayor claridad en las demostraciones, pero no abusaremos de esta notación en la Aritmética.

restando de ambos miembros $d \cdot c$ y sumando r', resultará:

$$r + r' = d,$$

igualdad que demuestra el teorema.

97. *Si se dividen miembro a miembro dos igualdades, los cocientes y restos serán iguales* (1). $8 = 5 + 3 \quad (8 : 6 = (5+3) : (2+4))$

Es una consecuencia inmediata de la definición de la división.

98. *Si los dos miembros de una desigualdad se dividen por números iguales, al mayor dividendo corresponde en general mayor cociente, y si los cocientes son iguales, mayor resto.* $9 > 4 \mid 9 : 3 > 4 : 3$

Es evidente, por la definición de la división, que cuando se trata de un mismo divisor, o divisores iguales, el mayor dividendo, contiene en general, más veces al divisor: pero si esto no sucediese, decimos que, cuando menos, el resto correspondiente al mayor dividendo será mayor.

En efecto: siendo el dividendo igual al producto del divisor por el cociente, más el resto, si los factores del producto son guales, la mayor suma corresponderá al mayor de los sumandos desiguales, es decir, el mayor dividendo al mayor de los restos.

99. *Si se dividen miembro a miembro dos desigualdades de signos contrarios, el resultado es una desigualdad del mismo signo que la de los dividendos.*

Sean las desigualdades,

$$40 > 32, \quad \text{y} \quad 10 < 16.$$

decimos que,

$$40 : 10 > 32 : 6.$$

Si los divisores fuesen iguales, el primer cociente sería mayor que el segundo por tener mayor dividendo, y si los dividendos fuesen iguales, el primer cociente sería también mayor que el segundo, por corresponder al menor divisor; luego *a fortiori* el primer cociente será mayor que el segundo.

---

(1) Cuando podamos referirnos la definición general do la división, esta proposición es: *Si se dividen miembro a miembro dos igualdades, los cocientes son iguales.* La misma observación se puede hacer sobre el teorema siguiente del texto.

Si las diferencias entre los dividendos y entre los divisores son tan pequeñas que no alcanzan a los cocientes enteros, y éstos son iguales, el mayor resto corresponderá al cociente del mayor dividendo por el menor divisor. Se razona como en el párrafo anterior.

Teoremas relativos a la división

100. *Para dividir un producto por uno de sus factores, basta suprimirle.*

Sea, dividir el producto, 8 . 7 . 3, por su factor, 7. El cociente será, 8 . 3, porque el producto, 8 . 7 . 3, se puede considerar como el resultado de multiplicar 7, por 8 . 3 (63); es decir, que tendremos:

$$8 \cdot 7 \cdot 3 = 7\,(8 \cdot 3),$$

igualdad que demuestra el enunciado.

101. *Para dividir un producto, por un divisor exacto de uno de sus factores, basta dividir dicho factor por el divisor.*

Sea, dividir el producto, 8 . 30 . 4, por el número 5, que es divisor de 30. Si descomponemos el 30, en los factores 6 y 5, puesto que los factores 6 y 5, se pueden sustituir por su producto efectuado (64), se podrá inversamente sustituir por sus factores, y tendremos:

$$8 \cdot 30 \cdot 4 = 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4.$$

y dividiendo por 5 los dos miembros de la igualdad, como el cociente del segundo miembro es 8 . 6 . 4, resultará:

$$(8 \cdot 30 \cdot 4) : 5 = 8 \cdot 6 \cdot 4.$$

102. *Para dividir un número por un producto de varios factores, se divide el número por el primer factor, el cociente que resulte por el segundo, el cociente que resulte por el tercero, y así sucesivamente hasta dividir por el último.*

Pueden suceder dos casos:

1.° *Supongamos que la división sea exacta.*

Sea dividir 360, por el producto, $9 + 4 = 36$. Siendo 10 el cociente de 360 por 36, tendremos:

$$360 = 36 \times 10$$

o poniendo, en vez de 36, su igual 9×4,

$$360 = 9 \cdot 4 \cdot 10,$$

dividiendo los dos miembros de la igualdad por 9, se tendrá (100):

$$360 : 9 = 4 \times 10,$$

dividiendo nuevamente por 4, resultará:

$$(360 : 9) : 4 = 10.$$

Es decir, el mismo cociente que cuando se dividió el número, 360, directamente por 36, que era el producto, 9×4.

2.° *Supongamos que la división no sea exacta:*

Sea, dividir 378, por el producto, $9 \times 4 = 36$. Siendo 10 el cociente por defecto, el cociente por exceso será, $10 + 1$, y como el dividendo de una división inexacta es mayor que el producto del divisor por el cociente por defecto y menor que el divisor por el cociente por exceso, tendremos la doble desigualdad (1):

$$36 \,.\, 10 < 378 < 36\,(10 + 1),$$

o poniendo en vez de 36 su igual, 9×4,

Razon

$$9 \,.\, 4 \,.\, 10 < 378 < 9 \,.\, 4\,(10 + 1).$$

Si se dividen por 9 y por 4, el primero y el tercer miembro, los cocientes exactos son, 10 y $10 + 1$; pero el segundo miembro es intermedio entre ambos; luego dividido por 9 y por 4, dará un cociente que no es menor que 10 (98) y no puede llegar a $10 + 1$; luego será 10.

En el primer caso que hemos considerado, los restos son iguales a cero.

En el segundo caso, los restos, generalmente no son iguales porque cuando se divide sucesivamente por los factores, el resto final es *menor que el último factor,* y cuando se divide por el producto efectuado, el resto es *menor que el producto,* pero puede ser *igual o mayor que alguno o que todos los factores.*

En nuestro ejemplo: dividiendo 378 por 36, el resto es 18 y dividiendo primero por 9 y después el cociente 42 por 4, el resto es 2.

103. *El cociente* de dos potencias *de un número es otra potencia del mismo número, cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.*

Sea, dividir 5^7 por 5^4, decimos que el cociente es 5^{7-4}.

(1) La doble desigualdad que se verifica en el mismo sentido se llama *limitación*.

De la regla del producto de dos potencias (74) se deduce:

$$5^7 = 5^4 \times 5^{7-4},$$

y dividiendo los dos miembros de esta igualdad por 5^4, resulta:

$$5^7 : 5^4 = 5^{7-4}.$$

Si los exponentes de las potencias son iguales, la aplicación de la regla conduce a considerar cantidades con exponente cero. Así:

$$5^7 : 5^7 = 5^{7-7} = 5^0.$$

Por otra parte, el cociente de dividir un número por sí mismo es la unidad; luego se debe admitir que la potencia de grado cero, o con exponente cero de cualquier número, es la unidad. En particular, se tendrá $10^0 = 1$. Resultado que está conforme con el enunciado en el número 71, donde se dijo que las potencias de 10 son la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente de la potencia.

104. *Si el dividendo y el divisor se multiplican por un mismo número, el cociente no varía, y el resto queda multiplicado por dicho número.*

Sean, D, el dividendo d, el divisor, c, el cociente y r, el resto; se tendrá:

$$D = d \,.\, c + r,$$

Si multiplicamos los dos miembros de esta igualdad por un número cualquiera, n, resulta:

$$D \,.\, n = (d \,.\, c + r)\, n,$$

pero para multiplicar la suma, $d \,.\, c + r$, por n, hay que multiplicar por n, los dos sumandos, $d \,.\, c$ y r, y para multiplicar el producto, $d \,.\, c$, basta multiplicar uno de los factores, que aquí es d, por hipótesis; luego tendremos:

$$D \,.\, n = (d \,.\, n)\, c + r \,.\, n.$$

En la división de $D \,.\, n$, por $d \,.\, n$, el cociente es c, y el resto será, $r \,.\, n$, siempre que este número sea menor que el divisor, $d \,.\, n$; pero por ser, $r < d$, también será:

$$r \,.\, n < d \,.\, n;$$

luego el cociente no ha variado y el resto queda multiplicado por n.

VI. La numeración romana

103. El sistema de numeración que hemos expuesto se llama decimal, porque su base es 10; se debe a los árabes y está en uso en Europa desde hace algunos siglos; es muy perfecto, no sólo por la facilidad que ofrece para enunciar, escribir y leer los números, sino por lo bien que se presta a las operaciones del cálculo aritmético.

Podríamos adoptar por base del sistema de numeración otro número cualquiera y modificar los principios de la numeración y establecer la teoría de las operaciones y propiedades de los números con arreglo a dicha base; así como estudiar el modo de transformar un número escrito en un sistema a otro cualquiera; pero siendo ésta una obra muy elemental, no creemos necesario hacer aquí dicho estudio

De lo único que diremos algo es de la numeración llamada romana, por no haber desaparecido totalmente.

En la numeración romana se representan los números por varias letras, cuyos valores indicamos a continuación:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000.

Con estas letras las unidades se escriben así:

I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	IX,
1	2	3	4	5	6	7	8	9.

Las decenas,

X,	XX,	XXX,	XL,	L,	LX,	LXX,	LXXX,	XC.
10	20	30	40	50	60	70	80	90.

Las centenas,

C,	CC,	CCC,	CD,	D,	DC,	DCC,	DCCC,	CM.
100	200	300	400	500	600	700	800	900.

Los millares,

M,	MM.	MMM.
1000	2000	3000.

Para escribir un número en la numeración romana, se hacen los convenios siguientes:

1.º *Una letra escrita a la derecha de otra, le añade su valor si es igual o menor que la otra.*

Así:

II = 2, III = 3, VI = 6, VII = 7, VIII = 8,
XX = 20, XXI = 21, XXV = 25, XXXIII = 33...

Se debe advertir que las letras, I, X, C y M, se pueden repetir hasta tres veces seguidas y no se pueden repetir las V, L y D.

2.º *Una letra escrita a la izquierda de otra de más valor, le resta el suyo.*

3º Una letra escrita en medio de dos mayores se resta de la de la izquierda de la menor

Así:

IV = 4, IX = 9, XL = 40, XC = 90, CD = 400.

También se debe saber, para aplicar esta regla, que la I, sólo se puede colocar a la izquierda de la V y de la X; la X, sólo se puede colocar a la izquierda de la L y de la C; la C se puede colocar a la izquierda de la D y de la M. Las letras, V, L y D, no se pueden colocar a la izquierda de otras de más valor.

En virtud de estos principios, una decena, por ejemplo, del 41 al 50, se escribe así:

XLI, XLII, XLIII, XLIV, XLV, XLVI, XLVII,
XLVIII, XLIX y L

y de ninguna manera se escribirá VL, para representar 45, ni IL para representar 49.

3.º ***Los números se escriben comenzando por las unidades de orden superior y siguiendo los demás órdenes descendiendo.***

Ejemplos:

1.º Escribir en la numeración romana el número 546.

Se escribe primero una D, que vale 500; después XL, que vale 40 y por último VI, que vale 6.

Luego tendremos:

546 = DXLVI.

2.º Escribir en la numeración romana el número 2728.

Se escribe primero, MM, que vale 2000; después, DCC, que vale 700; luego XX, que vale 20; y por último, VIII, que vale 8, resultando,

2728 = MMDCCXXVIII.

Si el número pasa de 3000, *se escriben los millares como si* *fuesen unidades, se coloca encima una raya y a la derecha se escriben las centenas, decenas y unidades, como se ha explicado antes.*

Ejemplos:

1.° Escribir en caracteres romanos el número, 135417, será:

$\overline{\mathrm{CXXXV}}\mathrm{CDXVII}$.

2.° Escribir el número, 2186512, será:

$\overline{\mathrm{MMCLXXXVI}}\mathrm{DXII}$.

Si el número pasara de 3000000 *se escriben los millones, como si fuesen unidades, luego dos rayas encima, después los millares y una raya encima, y por último las unidades.*

Ejemplo:

Escribir el número, 52233536, será:

$\overline{\overline{\mathrm{LII}}\mathrm{CCXXXIII}}\mathrm{DXXXVI}$.

4.° *Los números escritos en la numeración romana, se leen comenzando por las unidades de orden superior y siguiendo los demás órdenes descendiendo.*

Ejemplos:

1.° Leer el número MDCCCXCIX, será:
la M, *mil;* la D y las CCC, *ochocientos;* la XC, *noventa* y la IX, *nueve;* luego el número es: *mil ochocientos noventa y nueve.*

2.° Leer el número, $\overline{\mathrm{IV}}\mathrm{DCXXXIV}$.

$\overline{\mathrm{IV}}$, se lee *cuatro mil;* DC, *seiscientos;* XXX, *treinta;* y IV, *cuatro;* luego este número es: *cuatro mil seiscientos treinta y cuatro.*

Conviene conocer la notación siguiente, aunque es menos usual y más complicada que la anterior.

Los signos IↃ, IↃↃ, IↃↃↃ,... representan los números 500, 5000, 50000,...: y los CIↃ, CCIↃↃ, CCCIↃↃↃ... son los números 1000, 10000, 100000,...

En virtud de esto el número 1899 se escribirá:

CIↃIↃCCCXCIX.

Lección 14

Divisibilidad: Se llama divisibilidad el conjunto de condiciones que debe reunir un número para que sea exactamente divisible por otro número tomado como divisor:

Múltiplo. Se llama un número múltiplo de otro cuando lo contiene un número exacto de veces.
Divisor. Un número es divisor de otro cuando está contenido un número exacto de veces.

CAPÍTULO III

LAS PROPIEDADES ELEMENTALES DE LOS NÚMEROS ENTEROS

I. Teoría de la divisibilidad

106. Los múltiplos de un número se obtienen multiplicándole por 1, 2, 3, 4, 5... y así sucesivamente: luego la serie de los *múltiplos de un número* es ilimitada. El producto de cualquier número por cero es cero; de aquí que se considere el *cero como múltiplo de todos los números.*

Todo número entero es el mayor divisor de sí mismo, y la unidad es divisor de todo número entero; luego el *numero de divisores de cualquier entero es limitado,* porque el menor es la unidad y el mayor el mismo número.

1º (Cuando un número es divisible, o múltiplo de otros varios, se dice, un *múltiplo común* de éstos)

2º (Cuando varios números son divisibles por un mismo número, este se llama *divisor común.*)

(Para indicar que un número es múltiplo, o divisible por otro, escribiremos, siguiendo la notación de Leibnitz, un punto encima del submúltiplo o divisor.

Así: $20 = \dot{5}$; $b = \dot{a}$, indican que 20 es un múltiplo de 5 y b un múltiplo de a.

107. TEOREMA. [*Si un número es divisor común de otros varios, es divisor de su suma.*]

Sea el número 5, divisor común de 20, 30 y 35, tendremos las igualdades:

$$20 = 5 \times 4,$$
$$30 = 5 \times 6,$$
$$35 = 5 \times 7,$$

Sumando ordenadamente,

$$20 + 30 + 35 = 5 \,.\, 4 + 5 \,.\, 6 + 5 \,.\, 7, = 5 \times (4+6+7) = 5 \times 17 = \dot{5}$$

y sacando a 5 como factor común en el segundo miembro,

$$20 + 30 + 35 = 5\,(4 + 6 + 7) = 5 \,.\, 17,$$

que se podrá escribir,

$$20 + 30 + 35 = \dot{5}.$$

1º Un número se llama múltiplo común de otros varios si los contiene exactamente.
2º Se llama un número divisor común de otros varios si está contenido en ellos un número exacto de veces.

108. Corolario. *Si un número es divisor de otro, es divisor de sus múltiplos.*

Si el número, 5, es divisor de 20, dividirá a cualquier múltiplo de 20 (107), porque los múltiplos de 20 son sumas de sumandos iguales a 20.

109. Teorema. *Si un número es divisor de otros dos, es divisor de su diferencia.*

Sea el número 5, divisor de 35 y de 20, tendremos:

$$35 = 5 \,.\, 7,$$
$$20 = 5 \,.\, 4,$$

restando ordenadamente y sacando en el segundo miembro 5 como factor común.

$$35 - 20 = 5\,(7 - 4) = 5 \,.\, 3,$$

que se podrá escribir, $= \dot{5}$ $\quad 35 - 20 = \dot{5}.$

2

8+7=15

110. Corolario. *Si en una suma de dos sumandos un número es divisor de uno de ellos y del otro no, tampoco es divisor de la suma.*

Si la suma fuese divisible por el número, considerándola como un minuendo y al sumando divisible como substraendo, el minuendo y el substraendo tendrán un divisor común; luego también lo tendría el resto (108), lo cual es contra la hipótesis.

15
−8
7

111. Teorema. *Si un número es divisor, o factor de otros dos, lo es del resto de su división.*

Sea, D, el dividendo, d, el divisor, c, el cociente r, el resto y n, un factor común a D y d, tendremos:

$$\mathrm{D} = d \,.\, c + r,$$

y restando, $d \,.\, c$, de los dos miembros de esta igualdad:

$\mathrm{D} - d \times c = d \times c - d \times c + r = r$ $\quad \mathrm{D} - d \times c = r,$

por tener d, el divisor n, le tiene también su múltiplo $d \,.\, c$; luego n, es un divisor común al minuendo y substraendo de la diferencia, D — $d \,.\, c$; luego será divisor del resto r (109).

112. Teorema. *Si un número es factor común del divisor y de resto de una división, es factor del dividendo.*

Siguiendo la notación de antes, tendremos:

$$\mathrm{D} = d \,.\, c + r.$$

Todo factor de d, es ~~factor de su múltiplo~~ $d \,.\, c$; luego si n, es un factor ~~común de d, y r,~~ también lo será de, $d \,.\, c$ y r; luego será ~~factor de~~ su suma, $d \,.\, c + r$ ~~(108), que es~~ igual a D.

Siendo n factor de d debe ser también de su múltiplo d × c, y siendo de d × c y r debe ser también de la suma D.

113. De estos dos teoremas resulta el siguiente importante.

Corolario. *Todos los factores comunes del dividendo y divisor son factores del resto; luego serán factores comunes del divisor y del resto.* Recíprocamente: *todos los factores comunes del divisor y del resto son factores del dividendo; luego serán factores comunes del dividendo y del divisor.*

114. Otra consecuencia importante se deduce del teorema (111).

Si el dividendo y divisor se dividen por uno de sus factores, el cociente no varía y el resto queda dividido por dicho factor.

Adoptando la notación del número 110, tendremos, como allí, la igualdad:

$$D - d \, . \, c = r,$$

suponiendo ahora que n sea el factor común por quien se divide, y que por ser exactos los cocientes de D, d, y r, por n, tengamos las igualdades:

$$D = D' \, . \, n; \; d = d' \, . \, n; \; r = r' \, . \, n,$$

sustituyendo estos valores en la primera, resultará:

$$D' \, . \, n - d' \, . \, n \, . \, c = r' \, . \, n,$$

sacando n, como factor común en el primer miembro,

$$n \, (D' - d' \, . \, c) = r' \, . \, n,$$

y suprimiendo el factor común n,

$$D' - d' \, . \, c = r',$$

o bien sumando a los dos miembros de la igualdad, $d' \, . \, c$,

$$D' = d' \, . \, c + r',$$

que demuestra el enunciado.

Angel

II. Caracteres de divisibilidad

por 2, 5, 9, 3 y 11

115. Hay casos en que es muy fácil conocer si un número es divisor de otro sin practicar la división, y por la utilidad que resulta para las aplicaciones deduciremos las reglas para conocer

si los referidos números son divisores de otros, o hallaremos sus *caracteres de divisibilidad.*

Se ha visto (93) que para dividir un número por la unidad seguida de ceros, se separan de la derecha del dividendo tantas cifras como ceros siguen a la unidad; lo que queda a la izquierda es el cociente, y lo que queda a la derecha el resto. Para que la división sea exacta, se necesita que las cifras separadas a la derecha sean todas ceros.

De aquí deducimos: *que un número es divisible por la unidad seguida de ceros, cuando termina en tantos ceros, lo menos como siguen a la unidad.*

Como la unidad seguida de ceros es una potencia de 10, cuyo exponente es igual al número de ceros que siguen a la unidad, la regla anterior se puede enunciar así:

Potencia de 10 *Un número es divisible por una potencia de* 10 *cuando termina en tantos ceros, por lo menos, como unidades tiene el exponente de la potencia.*

116. El número, 10, es igual al producto, 2×5; por consiguiente, como 2 y 5, son divisores de 10, lo serán de sus múltiplos (108); *luego todo número terminado en cero es divisible por* 2 *y por* 5.

Sea ahora cualquier número, 2457; descomponiéndole en decenas y unidades, se tendrá:

$$2457 = 2450 + 7.$$

El primer sumando del segundo miembro es divisible por 2 y por 5; luego para que lo sea ~~la suma~~ se necesita y basta que lo sea el otro ~~sumando (107 y 110)~~.

~~De~~ aquí deducimos: *que un número es divisible por* 2 *ó por* 5; *cuando la cifra de las unidades es divisible por* 2 *ó por* 5 (1).

Las cifras 2, 4, 6 y 8, divisibles por 2, se llaman cifras pares, y los números terminados en cero, o cifra par, se llaman números pares.

En virtud de esto se puede enunciar así los caracteres de divisibilidad por 2 y 5.

Por 2 117. *Un número es divisible por* 2, ~~*cuando es par, o sea*~~ *cuando termina en cero, o cifra par.*

---

(1) No hay que modificar esta regla cuando el número termine en cero, porque ya hemos dicho (105) que cero es múltiplo o divisible por todos los números.

Por 5 *Un número es divisible por* 5, *cuando termina en cero o en* 5.

118. Si elevamos a la potencia m, los dos miembros de la igualdad, $10 = 2 \times 5$, tendremos:

$$10^m = 2^m \times 5^m.$$

Si de la derecha de un número separamos m cifras, la parte que queda a la izquierda terminará en m ceros, y por consiguiente será un múltiplo de 10^m (115), luego también lo será de, $2^m \times 5^m$.

Si el número formado por las m *cifras de la derecha es múltiplo de* 2^m *o de* 5^m, *también lo será el número propuesto; y no lo será en el caso contrario* (107 y 110).

En particular, para que un número sea divisible por 4 (que es igual a 2^2), *se necesita y basta que termine en dos ceros, o las dos cifras de la derecha formen un múltiplo de* 4.

Para que un número sea divisible por 25 (que es 5^2), *se necesita y basta que termine en dos ceros, o las dos cifras de la derecha formen un múltiplo de* 25.

119. LEMA. *La unidad seguida de ceros es un múltiplo de* 9 *más* 1.

Dividamos por 9, la unidad seguida de cualquier número de ceros o tomemos por dividendos sucesivos 10, 100, 1000, 10000...

$$\begin{array}{r|l} 10000\ldots & 9 \\ \cline{2-2} 10 & 111\ldots \\ 10 & \\ 10\ldots & \end{array}$$

y siempre hallaremos por cociente 1 y por resto 1.

En virtud de esto podemos escribir la igualdad,

$$10000\ldots = \dot{9} + 1.$$

120. LEMA. *Toda cifra significativa seguida de ceros es un múltiplo de* 9, *más dicha cifra.*

Sea, 4000, la cifra seguida de ceros, se tendrá:

$$4000 = 1000 \times 4 = (\dot{9} + 1)\,4,$$

y efectuando la multiplicación indicada por el paréntesis

$$4000 = \dot{9} \times 4 + 4,$$

pero, $\dot{9} \times 4$, es también un múltiplo de 9 (108); luego se podrá escribir:

$$4000 = \dot{9} + 4.$$

121. Sea ya un número cualquiera, 54726; descomponiéndole en sus diversos órdenes de unidades, se tendrá:

$$54726 = 50000 + 4000 + 700 + 20 + 6,$$

y en virtud del lema anterior, tendremos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} 50000 &= \dot{9} + 5, \\ 4000 &= \dot{9} + 4, \\ 700 &= \dot{9} + 7, \\ 20 &= \dot{9} + 2, \\ 6 &= \phantom{\dot{9} +} 6, \end{aligned}$$

$54726 = (\dot{9}+5) + (\dot{9}+4) + (\dot{9}+7) + (\dot{9}+2) + 6 = \dot{9}+5+\dot{9}+4+\dot{9}+7+\dot{9}+2+6 =$

Como la suma de los múltiplos de 9 es un múltiplo de 9 (107), si sumamos ordenadamente las igualdades anteriores, resultará,

$\dot{9}+\dot{9}+\dot{9}+\dot{9}+5+4+7+2+6 = \dot{9}+(5+4+7+2+6)$

$$54726 = \dot{9} + (5 + 4 + 7 + 2 + 6).$$

Considerando el segundo miembro como la suma de los dos sumandos uno el $\dot{9}$ y otro el paréntesis, $(5 + 4 + 7 + 2 + 6)$ se compone dicha suma de dos partes, una de las cuales es divisible por 9; luego para que la suma sea también divisible por 9, se necesita y basta que el sumando $(5 + 4 + 7 + 2 + 6)$, sea divisible por 9 (107 y 110).

El paréntesis encierra la suma de los valores absolutos de las cifras del número; luego: *para que un número sea divisible por* 9, *se necesita y basta que la suma de los valores absolutos de sus cifras sea un múltiplo de* 9.

122. Por ser 9 un múltiplo de 3, todo múltiplo de 9 lo es de 3 (108), de consiguiente: *para que un número sea divisible por* 3, *se necesita y basta que la suma de los valores absolutos de sus cifras sea un múltiplo de* 3.

Así teníamos: $54726 = \dot{9} + (5 + 4 + 7 + 2 + 6)$, de donde deduciremos.

$$54726 = \dot{3} + (5 + 4 - 7 + 2 + 6).$$

123. Lema. *La unidad seguida de un número par de ceros es un múltiplo de* 11 *más* 1: *la unidad seguida de un número impar de ceros es un múltiplo de* 11 *menos* 1.

Dividiremos por 11, la unidad seguida de un número par e impar de ceros; considerando por consiguiente los dividendos, 10, 100, 1000, 10000.

$$\begin{array}{r|l} 100000\ldots & 11 \\ \cline{2-2} 100 & \\ 10 & 09090 \end{array}$$

se observa desde luego que los cocientes son, 0,9,0,9... y los restos, 1,10,1,10... siendo 1 los restos que corresponden a los dividendos formados por la unidad seguida de un número par de ceros, y 10 los que corresponden a la unidad seguida de un número impar de ceros.

Pero si el dividendo es la unidad seguida de un número impar de ceros, podemos forzar la unidad en el cociente y el resto *substractivo* será, — 1 (97); luego en virtud de esto, tendremos igualdades de la forma:

$$10000 = \dot{\overline{11}} + 1, \qquad 100000 = \dot{\overline{11}} - 1.$$

124. Lema. *Toda cifra significativa seguida de un número par de ceros es un múltiplo de* 11 *más el valor absoluto de dicha cifra; toda cifra significativa seguida de un número impar de ceros es un múltiplo de* 11, *menos el valor absoluto de dicha cifra.*

1.° Sea 40000, la cifra seguida de un número par de ceros, se tendrá:

$$40000 = 10000 \times 4 = (\dot{\overline{11}} + 1)\, 4,$$

y efectuando la multiplicación indicada,

$$40000 = \dot{\overline{11}} \times 4 + 4,$$

o bien, por, ser $\dot{\overline{11}} \times 4$ un múltiplo de 11.

$$40000 = \dot{\overline{11}} + 4.$$

2.° Sea, 4000, la cifra significativa seguida de un número impar de ceros, se tendrá:

$$4000 = 1000 \times 4 = (\dot{\overline{11}} - 1)\, 4,$$

efectuando la multiplicación y teniendo presente $\dot{\overline{11}} \times 4$ es un múltiplo de 11

$$40000 = \dot{\overline{11}} - 4,$$

125. Sea un número cualquiera, 46837; descomponiéndole en sus diversos órdenes de unidades, se tendrá:

$$\begin{aligned} 4000 &= \dot{\overline{11}} + 4, \\ 6000 &= \dot{\overline{11}} - 6, \\ 800 &= \dot{\overline{11}} + 8, \\ 30 &= \dot{\overline{11}} - 3, \\ 7 &= \qquad 7, \end{aligned}$$

Sumando ordenadamente y teniendo presente que la suma de los múltiplos de 11 es múltiplo de 11, resulta:

$$46837 = \dot{\overline{11}} + (4 + 8 + 7) - (6 + 3)$$

Como el primer paréntesis encierra la suma de las cifras que ocupan lugares impares en el número, y el segundo la suma de las que ocupan lugares pares, si representamos la primera suma por I y la segunda por P, podemos escribir así la anterior igualdad:

$$46837 = \dot{\overline{11}} + (I - P),$$

y considerando en el segundo miembro la suma de dos sumandos, uno el $\dot{\overline{11}}$ y otro (I — P), si este segundo es divisible por 11, también lo será la suma (107).

Luego: *para que un número sea divisible por* 11, *se necesita y basta que la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar impar, menos la suma de los valores absolutos de las cifras de lugar par, sea un múltiplo de* 11 (1).

Puede suceder que la suma de las cifras de lugar par sea mayor que la de las cifras de lugar impar, y entonces no se puede efectuar la substracción, I — P.

En este caso del primer sumando, que es un múltiplo de 11, se toman tantas veces 11 unidades, como se necesiten para que, suma-

(1) No se debe olvidar, por si la diferencia de ambas sumas es cero, *que cero es múltiplo de todos los números.* (106).

das con I, den una suma mayor que P, con lo cual el $\overline{11}$ no dejará de serlo y se podrá efectuar la substracción.

Así: $$829389 = \dot{\overline{11}} + (2 + 3 + 9) - (8 + 9 + 8),$$

como la primera suma es 14 y la segunda 25, no se puede efectuar la substracción y necesitamos tomar del $\dot{\overline{11}}$, una vez 11 y tendremos:

$$829389 = \dot{\overline{11}} + (14 + 11) - 25 = \dot{\overline{11}}.$$

126. Los caracteres de divisibilidad que hemos hallado son muy útiles por ser muy sencillos, y el método que hemos seguido para hallar el de 9 y 11 se puede aplicar a cualquier número; pero es más fácil hacer las divisiones directamente que aplicar los caracteres de divisibilidad que se hallarían (1).

III. Máximo común divisor

Máximo común divisor de dos números

127. Dos números tienen siempre la unidad por divisor *común:* si no tienen más divisor común que la unidad, se llaman *primos entre sí.*

1ª Cuando dos números tienen varios divisores comunes, el mayor de todos se llama *máximo común divisor:* se suele representar por la notación *m. c. d.*

Los números 8 y 12 tienen los divisores comunes 1, 2 y 4; luego 4 será el *m. c. d.*

2ª 128. TEOREMA. *Si un número es divisible por otro, el menor es el* m. c. d. *de ambos.*

Sea el número 130, divisible por 26: decimos que 26 es el *m. c. d.* de 130 y 26.

En efecto: puesto que 26 es divisor de sí mismo y, por hipótesis, también de 130, es un divisor común a los dos números; pero 26 no puede tener otro divisor mayor que el mismo; luego será el *m. c. d.* de los dos números propuestos.

---

(1) Si estudiásemos otros sistemas de numeración distintos del decimal, veríamos que los caracteres análogos a los que hemos estudiado, serían los de los factores de la base y sus potencias, y los de la base más y menos la unidad y sus factores.

129. Teorema. *El* m. c. d. *de dos números es el mismo que el del menor y el resto de su división.*

Sean los números 420 y 156: si hacemos la división, se halla 2 de cociente y 108 de resto. Hemos visto (113) que todos los factores comunes al dividendo y al divisor son factores comunes al divisor y al resto, y recíprocamente que todos los factores comunes al divisor y al resto, son factores comunes al dividendo y al divisor; luego los números 420 y 156 *(dividendo* y *divisor)* por una parte, y los números 156 y 108 *(divisor* y *resto)* por otra, admiten la misma serie de divisores comunes, y como uno de ellos será el mayor de todos, *admiten el mismo máximo común divisor.*

130. En virtud del teorema anterior, la investigación del *m. c. d.* de dos números queda reducida a la de otros dos más pequeños, porque el divisor y el resto son respectivamente menores que el dividendo y el divisor.

En nuestro ejemplo, después de dividir, 420 por 156, la operación queda reducida a hallar el *m. c. d.* de 156 y 108 Haciendo la división de estos dos números se halla el cociente, 1, y el resto, 48; luego el *m. c. d.* de 156 y 108 es el mismo que el de 108 y 48 (129). Dividiendo 108 por 48, se obtiene el cociente, 2, y el resto, 12: entonces la operación estará ya reducida a hallar el *m. c. d.* de 48 y 12, que será el mismo que el 108 y 48: pero 48 es divisible por 12; luego el 12 es el *m. c. d.* de estos últimos números, y retrocediendo en la serie de operaciones efectuadas, se ve que en virtud del teorema (129) el *m. c. d.* de 420 y 156 es 12. De estos razonamientos se deduce la siguiente:

Regla. *Para hallar el* m. c d. *de dos números se divide el mayor por el menor; si la división es exacta, el menor es el* m. c. d.; *en el caso contrario se divide el menor por el resto que se halle, este primer resto por el segundo, y así sucesivamente hasta llegar a un resto cero; el último divisor será el máximo común divisor pedido.*

La operación se dispone como se indica en el siguiente cuadro:

	2	1	2	4
420	156	108	48	12
108	48	12	0	

Conviene escribir los cocientes encima de los divisores correspondientes, para que no se confundan con los restos, 131 Las divisiones que se practican terminan necesariamente, porque siendo cada resto menor que el divisor correspondiente, los restos irán disminuyendo: y aún en el caso más desfavorable se llega al resto 1, que necesariamente divide al resto anterior.

132. TEOREMA. *Todo divisor común a dos números divide exactamente a su* m. c. d.

Todo divisor común a dos números divide al resto de su división (111) y aplicando este teorema a las divisiones sucesivas que se hacen para hallar el *m. c. d.*, se ve que, siendo este número el penúltimo resto, tiene necesariamente dicho divisor.

Refiriéndonos al ejemplo anterior, sea, 3, el divisor común a 420 y 156, dividirá al resto, 108; dividiendo a 156 y 108, dividirá al resto 48, y dividiendo a 108 y 48, dividirá al resto 12, que es el máximo común divisor.

Recíprocamente, como los dos números son múltiplos de su *m. c. d.*, todo divisor del *m c. d.* divide a los dos números.

De esto se deduce que, si queremos hallar todos los divisores comunes a dos números, tenemos que hallar todos los divisores de su máximo común divisor.

133. TEOREMA. *Si dos números se multiplican o dividen por otro, su* m. c. d. *queda multiplicado o dividido por este otro.*

Multiplicando o dividiendo dos números por otro, el resto de su división queda multiplicado o dividido por este otro (104 y 114). Apliquemos este teorema a las divisiones sucesivas que se hacen para hallar el *m. c. d.*, y sea 3 el número por el cual se multiplican o dividen los números dados, que supondremos son 420 y 156 Puesto que el dividendo, 420, y el divisor 156, se multiplican o dividen por, 3, el resto, 108, quedará multiplicado o dividido por, 3; en la segunda división, el dividendo, 156, y el divisor, 108, están multiplicados o divididos por, 3; luego el resto, 48 quedará multiplicado o dividido por, 3; por último, el dividendo, 108, y el divisor, 48, están multiplicados o divididos por, 3; luego el resto, 12, quedará multiplicado o dividido por 3. Lo cual demuestra el teorema, porque, 12, es el *m. c. d.* de 420 y 156.

134. En virtud de este teorema se puede simplificar la operación de hallar el máximo común divisor de dos números, suprimiendo los factores comunes que se vean a primera vista y se puedan suprimir por una división muy fácil.

Si tuviéramos que hallar el *m. c. d.* de 42000 y 15600, se podría suprimir el factor, 100, hallar el *m. c. d.* de 420 y 156, que es, 12, y multiplicarle después por 100 El máximo común divisor de 42000 y 15600 será, pues, 1200.

135. Corolario. *Si dos números se dividen por su máximo común divisor, los cocientes son primos entre sí.*

El máximo común divisor quedará dividido por sí mismo (133); luego será la unidad, lo cual demuestra el enunciado.

136. Teorema. *Si un número divide a un producto de dos factores y es primo con uno de ellos, es divisor del otro factor.*

Sea, P, el producto de los dos factores A y B; N, un número que divide a, P, y es primo con, A, decimos que es divisor de B.

Por ser, A y N, dos números primos entre sí, se tendrá:

$$\left.\begin{matrix} A \\ N \end{matrix}\right\} m.\,c\,d. = 1.$$

Si multiplicamos los números, A y N, por B, su *m. c. d.* quedará multiplicado por B (133), y tendremos:

m. c. d.

$$\left.\begin{matrix} A \times B \\ N \times B \end{matrix}\right\} m.\,c.\,d. = 1 \times B = B$$

N, divide al producto, $A \times B$, porque este producto es igual a P; también divide, N, al producto, $N \times B$, porque es uno de sus factores; luego dividirá al máximo común divisor de estos productos (132), que es B, lo cual demuestra el teorema.

Máximo común divisor de varios números

Si no tienen otro que

137. Varios números tienen siempre la unidad ~~por divisor co~~mún: si no tien~~en otro~~, se dicen *primos entre sí*. Cuando, tomados de dos en dos, no tienen más divisor común que la unidad, se dicen *primos entre sí dos a dos.*

Si varios números tienen más de un divisor común, el mayor se llama *máximo común divisor* de varios números.

138. Teorema. *El máximo común divisor de varios números no se altera sustituyendo dos de ellos por su máximo común divisor.* Sean varios números, A, B, C, D, y sea, *d,* el máximo común divisor de dos de ellos, A y B, por ejemplo: *decimos que el máximo común divisor de los números* A, B, C, D, *es el mismo que el de los números, d,* C, D.

Por ser, ***d,*** el máximo común divisor de A y B, todos los divisores comunes de, A y B, son divisores de ***d*** (132); luego todos los divisores comunes a los números A, B, C, D, son divisores de los números, ***d,*** C, D; recíprocamente, todos los divisores de, ***d,*** son divisores de, A y B; luego todos los divisores comunes a los números, ***d,*** C, D, son divisores de los números, A, B, C, D; entonces las dos líneas de números:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ & d & C & D \end{array}$$

tienen los mismos divisores comunes, y por tanto tendrán el mismo máximo común divisor.

139. Del teorema anterior se deduce la siguiente:

Regla. *Para hallar el* m. c. d. *de varios números se halla el de dos de ellos, después el del máximo común divisor hallado y otro de los números dados, continuando del mismo modo hasta considerar el último de los números.*

La operación se puede indicar como está en el adjunto cuadro:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ & \underbrace{\;}_{d} & C & D \\ & & \underbrace{\;}_{d'} & D \\ & & & \underbrace{\;}_{d''} \end{array}$$

d, es el máximo común divisor de A y B: la segunda línea de números tendrá el mismo *m. c. d.* que la primera. El máximo común divisor de, ***d*** y C, es ***d'***; luego, ***d'*** y D tienen el mismo *m. c. d.* que los números de la segunda línea. El máximo común divisor de, ***d'*** y D, es, d'', luego también lo será de ***d***, C, D, y por consiguiente de los números propuestos, A, B, C, D.

Se puede comenzar la operación por dos números cualesquiera; pero, generalmente, se llega más pronto al resultado comenzando por los menores.

Ejemplo: Hallar el *m. c. d.* de 330, 462, 770 y 1155

El *m. c. d.* de 330 y 462 es 66; el *m. c. d.* de 66 y 770 es 22: y por último, el *m. c. d.* de 22 y 1155 es 11: luego este número será el máximo común divisor que se buscaba.

El cuadro de los resultados es el siguiente:

$$\begin{array}{cccc} 330 & 462 & 770 & 1155 \\ \multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{66}} & 770 & 1155 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{22}} & 1115 \\ \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{11}} \end{array}$$

140. TEOREMA. *Si varios números se multiplican o dividen por otro, su máximo común divisor queda multiplicado o dividido por este otro.*

Refiriéndonos al cuadro del número anterior se tendrá que si A, B, C, D, se multiplican por un número, N, el *m. c. d.* de A y B, quedará multiplicado por N (133), y será: *d*N; luego los números de la segunda línea estarán multiplicados por N, y el *m. c. d.* de *d*N y CN, será: *d'*N y por tanto los números de la tercera línea estarán multiplicados por N, y lo mismo sucederá con su *m. c. d.;* que será: *d"*N que demuestra una parte del teorema, y cambiando las palabras ***multiplicado por,*** en ***dividido por,*** se demuestra la otra parte.

141. COROLARIO. *Si varios números se dividen por su* m. c. d , *los cocientes son primos entre sí.*

Se demuestran como el teorema (135).

142. TEOREMA. *Todo divisor común a varios números divide exactamente a su* m. c. d.

Adoptando la notación del número anterior, tendremos que todo divisor común de A, B, C, D, es divisor de ***d,*** C, D (138); del mismo modo todo divisor común de ***d,*** C, D, lo es de ***d',*** D, y por consiguiente de ***d",*** que es el máximo común divisor.

RECÍPROCAMENTE. Todo divisor del *m. c. d.* de varios números es divisor de los números (108), porque todos son múltiplos de su *m. c. d.*

IV. Mínimo común múltiplo

143 Un número divisible por otros varios es un múltiplo *común* de todos ellos.

~~Se sabe que los~~ múltiplos de un número se forman multipli-

Se llama múltiplo común de varios números el que los contiene a todos exactamente cándole por 1, 2, 3, 4...: luego el menor de todos los múltiplos de un número es el mismo número (1). Entre los múltiplos comunes a varios números hay uno menor que todos los demás, y se llama *mínimo común múltiplo,* cuyo valor es, por lo menos, tan grande como el mayor de los números. El mínimo común múltiplo se suele designar por la notación *m. c. m.*

144. TEOREMA. *El mínimo común múltiplo de dos números es el producto que se obtiene multiplicando uno de ellos, por el cociente de dividir el otro por su máximo común divisor.*

Sean, A y B, dos números; d, su máximo común divisor, a y b, los cocientes de dividir, A y B, por d. Tendremos las igualdades,

$$A = da, \qquad \text{y} \qquad B = db, \text{(2)}$$

Designemos, por M, un múltiplo cualquiera de A, tendrá la forma $M = Aq$, siendo q, un número entero, y poniendo en vez de A, su igual da,

$$M = daq.$$

Si M, ha de ser también múltiplo de B, o de su igual db, el cociente de M, o de su igual, daq, por db, ha de ser exacto.

Para dividir, daq, por el producto db, se divide primero por d (101), y el cociente que resulte por b. Para dividir daq, por d, basta suprimir el factor, d, luego el cociente será, aq, y por consiguiente, aq, tiene que ser divisible por b; pero b, es primo con a (135), luego b, tiene que ser divisor de q (136); y designando por q' el cociente se tendrá:

$$q = bq'.$$

Sustituyendo este valor en la igualdad, $M = daq$, resultará:

$$M = abdq'$$

de cuya igualdad se deduce: que todo múltiplo comun de dos números, A y B, es un producto de cuatro factores que son: el máximo común divisor de dichos números, los cocientes de dividirlos por dicho *m. c. d.* y un factor indeterminado.

---

(1) Se prescinde de que cero sea múltiplo de todos los números.

(2) En lo sucesivo, cuando representemos los números por letras y haya que indicar que se multiplican, prescindiremos, según es costumbre, del signo de multiplicar.

El menor de todos los múltiplos corresponde al menor valor que se puede atribuir al factor indeterminado, q'; y como éste ha de ser entero, haremos; $q' = 1$.

En virtud de esto designando por m, el mínimo común múltiplo, tendremos:

$$m = abd.$$

O poniendo en vez de ad, su igual A; o en vez de bd, su igual B,

$$m = \mathrm{A}b, \quad \text{o bien} \quad m = \mathrm{B}a,$$

como se quería demostrar.

Ejemplo. Sean los números, 420 y 156, su máximo común divisor es 12, y el cociente de dividir 156 por 12, es 13, entonces el mínimo común múltiplo será:

$$420 \times 13 = 5460$$

145. Teorema. *Todo múltiplo de dos números es múltiplo de su mínimo común múltiplo y recíprocamente.*

En efecto: si d, es el máximo común divisor de dos números, A y B, y los cocientes de dividirlos por él son a y b, todo múltiplo de A y B, se puede poner bajo la forma

$$\mathrm{M} = abdq',$$

que demuestra el teorema, pues es evidente que el producto indicado en el segundo miembro de esta igualdad es múltiplo del mínimo común múltiplo, abd, de A y B.

146. Para dividir un producto por un divisor de uno de sus factores, basta dividir dicho factor por el divisor (100), luego se tendrá:

$$(\mathrm{AB}) : d = a\mathrm{B} = b\mathrm{A},$$

de donde se deduce que,

$$m = (\mathrm{AB}) : d,$$

cuya igualdad se puede enunciar del modo siguiente:

Teorema. *El mínimo común múltiplo de dos números es igual al cociente de dividir su producto por su máximo común divisor.*

147. Teorema. *El producto de dos números es igual al producto de su máximo común divisor por su mínimo común múltiplo.*

En efecto: de la igualdad, $m = (\mathrm{AB}) : d$, se deduce,

$$md = \mathrm{AB},$$

que demuestra el teorema.

148. Corolarios 1.° *Si el mayor de dos números es múltiplo del menor, aquél será el mínimo común múltiplo de ambos números.*

Porque en esta hipótesis, el menor es el máximo común divisor (128), y si en la igualdad $md = AB$, hacemos, por ejemplo, $d = B$, resultará: $m = A$.

2.° *Si dos números son primos entre sí, su mínimo común múltiplo es su producto.*

Porque si dos números son primos entre sí, su máximo común divisor es la unidad, y haciendo $d = 1$, en la igualdad, $md = AB$, resulta, $m = AB$.

149. Teorema. *Si dos números se multiplican o dividen por otro su mínimo común múltiplo, queda multiplicado o dividido por este otro.*

Sean, A y B, los dos números, y N, el número por el cual se multiplican, como el máximo común divisor queda también multiplicado (133), se tendrá:

$$\left.\begin{matrix} AN \\ BN \end{matrix}\right\} \text{m. c. d.} = dN,$$

luego los cocientes de dividir, AN y BN, por su máximo común divisor, continuarán siendo, a y b; entonces la expresión del nuevo mínimo común múltiplo será: ANb, o BNa; o $abdN$, iguales, todas, a mN, siendo m, el mínimo común múltiplo de A y B, lo cual demuestra una parte del teorema.

Del mismo modo se demuestra la otra.

150. Teorema. *Los cocientes de dividir el mínimo común múltiplo de dos números por cada uno de ellos, son primos entre sí.*

Puesto que siendo, m, igual a Ab y a Ba, los cocientes de dividir por A y B, son respectivamente b y a, que son números primos entre sí.

Mínimo común múltiplo de varios números

151. *El mínimo común múltiplo de* varios *dos números no se altera, sustituyendo dos de ellos por su mínimo común múltiplo.*

Sean los números A, B, C, D, y m, el mínimo común múltiplo de dos de ellos, A y B; decimos que el mínimo común múltiplo de A, B, C, D, es el mismo que el de, m, C, D. Por ser m, el mínimo común múltiplo de A y B, todos los múltiplos comunes de estos números serán múltiplos de m (145); luego todos los múltiplos comunes de A, B, C, D, lo serán de m, C, D. Recíprocamente, todos los múltiplos de m, son múltiplos comunes de A y B; y por consiguiente, todos los múltiplos comunes de m, C, D, lo son de A, B, C, D, según lo cual las dos líneas de números,

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D, \\ & m & C & D, \end{array}$$

tienen los mismos múltiplos comunes y en particular, el mismo mínimo común múltiplo.

152. Del teorema anterior se deduce la siguiente:

Regla. *Para hallar el mínimo común múltiplo de varios números se halla el de dos de ellos, después el del mínimo común múltiplo hallado y otro de los números, continuando así hasta operar con el último.*

La operación se puede indicar del modo siguiente:

$$\begin{array}{c} \underbrace{A\quad B}\quad C\quad D \\ \underbrace{m\quad\ C}\quad D \\ \underbrace{m'\quad\ D} \\ m'' \end{array}$$

m, es el *m. c. m.* de A y B; m' el de m y C, y m'' el de m' y D, y por consiguiente el de A, B, C, D.

Ejemplo. Hallar el mínimo común múltiplo de 114, 154, 170 y 195.

El máximo común divisor de 114 y 154 es 2, y el cociente de dividir 154 por 2, es 77; luego el mínimo común múltiplo de 114 y 154 es: $114 \times 77 = 8778$. Según la notación anterior,

$$m = 8778.$$

El *m. c. d.* de 170 y 8778 es 2, y el cociente de dividir 170 por 2, es 85; luego el *m. c. m.* de 170 y 8778 será: $8778 \times 85 = 746130$, siguiendo la notación de arriba,

$$m' = 746130.$$

El *m. c. d.* de 195 y 746130 es 15, el cociente de dividir 195 por 15, es 13; el *m. c. m.* será, pues,

$$746130 \times 13 = 9699690, \quad \text{o sea,} \quad m'' = 9699690.$$

153. Teorema. *Todos los múltiplos comunes de varios números son múltiplos de su mínimo común múltiplo y recíprocamente.*

La demostración no es más que la repetición de los razonamientos hechos en el número 142.

154. Teorema. *Si varios números se multiplican o dividen por otro, su mínimo común múltiplo queda multiplicado o dividido por este otro.*

Se demuestra como su análogo del máximo común divisor (140).

Teorema. *Si se divide por varios números el mínimo común múltiplo de todos ellos, los cocientes obtenidos serán primos entre sí.*

Sean los números A, B, C y D; m su *m. c. m* y llamando a, b, c, y d, respectivamente a los cocientes de dividir m, por A, B, C y D, podremos escribir: 7

$$m = Aa = Bb = Cc = Dd$$

Si los números a, b, c y d, no fuesen primos entre sí, tendrían un divisor común que designaríamos por n y dividiendo los números anteriores por él, se verificaría:

$$\frac{m}{n} = A.\frac{a}{n} = B.\frac{b}{n} = C.\frac{c}{n} = D.\frac{d}{n}$$

es decir que se tendría la siguiente igualdad:

$$m:n = \dot{A} = \dot{B} = \dot{C} = \dot{D}$$

que prueba que m no sería el *m. c. m.*, lo cual es contrario a la hipótesis.

V. Teoría de los números primos

Teoremas sobre los números primos

155. Todo número es divisible por sí mismo y por la unidad; número *primo* es el que no tiene otros divisores; los números 2, 3, 7, son números primos.

Si un número primo no es divisor de otro cualquiera, es *primo con él:* porque los dos únicos divisores comunes que podrían tener son la unidad y el número primo, y este último por hipótesis, no es divisor común.

Los números primos son primos entre sí dos a dos: pero evidentemente la recíproca no es cierta. Por ejemplo, 8 y 9, son primos entre sí y no lo son separadamente.

156. *Todo número que no es primo admite un divisor primo.*

Sea N, un número que no es primo, admitirá un divisor, N', por ejemplo, y tendremos, designando por, q, el cociente de N por N', $N = N' \times q$. Si N' es un número primo, el teorema está demostrado: si no lo es, admitirá un divisor; sea N″, este divisor y q', el cociente que se obtiene, de donde; $N' = N'' \times q'$; si N″, es número primo, el teorema está demostrado, porque, N″, es divisor también de N. por ser este número múltiplo de N′. Si N″, no es primo, admitirá un divisor N‴, que también será divisor de N; pero los divisores obtenidos van disminuyendo, y como su número no es ilimitado, porque todos son enteros mayores que la unidad, se llegará necesariamente a un número primo, que será divisor de N.

157. *Dos números que no son primos entre sí, admiten un factor primo común.*

Porque si no son primos entre sí, su *m. c. d.* es distinto de la unidad, y es un número primo, o admite un factor primo (156).

158. *La serie de números primos es ilimitada.*

Admitamos que no lo sea y que p, sea el mayor de todos los números primos.

Si formamos el producto de todos los números primos hasta p, tendremos:

$$1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 \ldots . p = N.$$

Si añadimos a este número una unidad, se tendrá:

$$1 . 2 . 3 . 5 . 7 . 11 \ldots . p + 1 = N + 1.$$

Si el número, $N+1$, es primo, el teorema está demostrado, porque, $N+1 > p$; si $N+1$ no es primo, admitirá un factor primo, que no puede ser ninguno de los números primos, hasta p inclusive, porque si lo fuera, la diferencia,

$$(N+1) - N$$

que es 1, admitiría también dicho factor (108). Entonces el factor primo de $N+1$ tiene que ser mayor que p, y por consiguiente, no es p el mayor de todos los números primos.

159. Para formar una tabla de números primos, comprendidos entre 1 y un límite dado, 100 por ejemplo, se escriben los números por su orden natural hasta el límite dado.

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10	**11**	12	**13**	14	15
16	**17**	18	**19**	20	21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40	**41**	42	**43**	44	45
46	**47**	48	49	50	51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70	**71**	72	**73**	74	75
76	77	78	**79**	80	81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100.					

Los números 1 y 2 evidentemente son primos.

Se *tachan* los números de *dos en dos,* a partir del 2, y todos los números tachados serán múltiplos de 2; luego no serán primos.

El primer número *no tachado* es 3, que será número primo, porque no es divisible por 2, único número inferior a él además de la unidad.

Se tachan en seguida, contándolos de *tres en tres,* a partir del 3, y los números tachados serán múltiplos de 3.

El primer número que queda sin tachar es 5; luego será primo, porque no admite los factores primos inferiores a él, que son 2 y 3.

Se tachan ahora, contándolos de *cinco en cinco,* a partir del 5, y los números tachados serán múltiplos de 5. El primer número no tachado es 7, que por consiguiente será número primo.

A partir del 7, se cuentan de *siete en siete,* y los números tachados serán múltiplos de 7.

Se continuará del mismo modo hasta que sólo queden números primos en la tabla.

Se puede observar que cuando tachamos los múltiplos de 3, ya estaban tachados los que a la vez son múltiplos de 2; cuando se tachan los múltiplos de 5, están ya tachados los que han sido múltiplos de 2 y 3; cuando se tachan los múltiplos de 7, ya están tachados los que a la vez lo son de 2, 3 ó 5, y así de los demás.

Decimos: *que cuando se tachan los múltiplos de un número primo cualquiera, el primero, que no estaba tachado antes, es el cuadrado del número primo.*

Supongamos, para fijar ideas, que se trata del 13; los múltiplos de 13, inferiores a 13×13, admiten un factor inferior a 13; entonces, o ese factor es primo o admite un factor primo, que también será inferior a 13; luego en ambos casos se habrá tachado antes el múltiplo de que se trata.

Si la tabla de números primos no ha de llegar más que hasta 100, el último número primo cuyos múltiplos se tachan es 7, porque el cuadrado 11 es 121 (1).

160. Si se tiene una tabla de números primos (2), se averigua

---

(1) En la práctica de la formación de una tabla de números primos, solo se escriben los impares y el 2, pero los teoremas anteriores se demuestran más sencillamente escribiendo todos los números.

(2) En las tablas de logaritmos de Sánchez Ramos, cuarta edición, hay una tabla, la XXIV, de los números primos inferiores a 6968.

inmediatamente si un número dado, inferior al mayor de la tabla, es primo; pero si se trata de un número a que no alcance la tabla, se necesita efectuar algunas operaciones, fundadas en el siguiente:

161. Teorema. *Todo número, que no es divisible por ningún número primo cuyo cuadrado no le exceda, es número primo.*

Sea el número N, que no es divisible por ningún número primo cuyo cuadrado no le exceda, y admitamos que es divisible por un número primo, p, cuyo cuadrado, $p \times p > N$, tendremos: $N = p \times q$, siendo q, un cociente entero, pero menor que p; luego evidentemente,

$$N > q \times q.$$

es decir, que N es mayor que el cuadrado de q, luego N admitirá un factor primo igual o menor que q, lo cual es contra la hipótesis.

Entonces no podemos admitir que N tenga un divisor primo cuyo cuadrado le exceda, y por consiguiente será número primo.

162. Escolio. Se conoce que se llega a un número primo cuyo cuadrado excede a N, en que cuando esto sucede el *cociente es menor que el divisor.*

163. Teorema. *Si un número primo divide a un producto de varios factores, divide, cuando menos, a uno de ellos.*

1.° Supongamos que los factores son dos, a y b, y sea p, el número primo que divide a su producto ab. Si p divide a a, el teorema es cierto, y si no divide al factor a, es primo con él; luego dividirá a b (136).

2.° Supongamos que los factores son varios a, b, c y d, y sea p el número primo que divide al producto, $abcd$: este producto se puede considerar compuesto de los factores, a y bcd, y escribirse así: $a\,(bcd)$; si p divide a a, el teorema está demostrado; si no, es primo con él y dividirá a bcd (136); el producto bcd se puede escribir así $b\,(cd)$; si p divide a b, el teorema está demostrado; si no, es primo con b y dividirá al producto, cd; luego dividirá a uno, cuando menos, de su factores (1.°)

164. Corolario 1.° *Si un número primo divide a una potencia de otro número, divide también al número.*

Sea 5 un divisor de 30^4, será divisor del producto $30 \times 30 \times 30 \times 30$, que es igual a 30^4; luego dividirá a cualquiera de los factores.

Si un numero es primo con un numero es primo con las potencias de de otro numero

Corolario 2.° *Si dos números son primos entre sí, sus potencias también lo son.*

Sean 8 y 15 dos números primos entre sí; dos potencias suyas 8^4 y 15^3, por ejemplo, serán números primos entre sí, porque si admitieran un divisor primo (163), también sería divisor de 8 y 15 (1.°)

165. Teorema. *Si un número es primo con cada uno de los factores de un producto, es primo con el producto, recíprocamente: si un número es primo con un producto, es primo con cada uno de sus factores.*

Sea $P = abc$ y N, un número primo con cada uno de los factores $a, b, c,$ del producto, decimos que será primo con P. En efecto; si P y N admitieran un divisor primo común (157), este divisor lo sería también de uno, cuando menos, de los factores a, b, c (163), lo que es contra la hipótesis.

Recíprocamente, si N es primo con P, lo será con sus factores, a, b, c, porque si uno de ellos, a, por ejemplo, admitiera un factor primo común con N, P, que es un múltiplo de a, también le admitiría (108), contra la hipótesis.

166. Teorema. *Si un número es divisible por varios primos entre sí dos a dos, es divisible por su producto.*

Sea N un número divisible por a, b y c, que suponemos son números primos entre sí dos a dos. Efectuemos la división de N por a, y sea q el cociente, tendremos:

$$N = aq,$$

N es divisible por b: luego su igual, el producto aq, también debe serlo; pero b es primo con a; entonces será divisor de q (136), y llamando q' al cociente de la división, se tendrá: $q = bq'$, y sustituyendo en la igualdad anterior este valor de q, se tiene:

$$N = abq'.$$

N es divisible por c, su igualdad abq' también lo será, pero a y b son primos con c; luego su producto, ab, es primo con c (165), entonces c es divisor de q' (136), y llamando q'' al cociente, se tendrá $q' = cq''$, y sustituyendo q' por su valor en la anterior igualdad, resulta:

$$N = abcq'',$$

que demuestra el teorema.

167. Corolario. *Si un número es divisible por varios números primos, es divisible por su producto.*

Porque los números primos son primos entre sí dos a dos. Un número divisible por 2 y por 3 lo es por 6. En virtud de esto, un número es divisible por 6 *cuando es par y la suma de sus cifras es un múltiplo de* 3.

Descomposición de un número en factores primos

168. Teorema. *Todo número que no es primo, es un producto de factores primos.*

Sea N. un número que no es primo, admitirá un divisor primo (156); si designamos por a el divisor primo y por N' el cociente, tendremos: $N = aN'$, Si N' es primo, el teorema está demostrado; si no lo es, admitirá un divisor primo; designando por b el divisor primo y por N'' el cociente, se tendrá: $N' = bN''$; sustituyendo el valor de N' en la anterior igualdad, resulta, $N = abN''$; si N'' es primo, el teorema está demostrado; si no lo es, admitirá un divisor primo, c, quedará un cociente, N''', de donde, $N'' = cN'''$, y sustituyendo en la anterior igualdad $N = abcN'''$. Si N''' es primo, el teorema está demostrado, si no lo es, admitirá un divisor primo y continuaremos las operaciones del mismo modo hasta llegar a un cociente primo. Esto tiene que suceder necesariamente, porque los cocientes, N', N'', N'''... son enteros y van disminuyendo.

169. Nada de lo dicho en el teorema anterior indica que entre los factores primos del número N no puedan algunos ser iguales.

Así, $540 = 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5$, que se puede escribir de un modo más sencillo, porque $2 . 2 = 2^2$ y $3 . 3 . 3 = 3^3$ de modo que $540 = 2^2 . 3^3 . 5$.

Descomponer un número en sus factores primos es hallar un producto de números primos que sea igual al número dado.

170. Teorema. *Un número cualquiera no admite más que una descomposición en factores primos.*

Supongamos que el número, N, admita dos descomposiciones en factores primos y se tenga a la vez, $N = abcd$ y $N = a'b'c'd'e'$. Por ser el mismo el primer miembro de estas igualdades, los segundos miembros serán iguales, de modo que:

$$abcd = a'b'c'd'e'$$

a es un factor del primer miembro, luego debe dividir también al segundo; pero siendo a un número primo, debe dividir a uno de los factores del segundo miembro (163), y como estos son también números primos, cada uno no es divisible más que por sí mismo; luego a debe ser igual a uno de los factores del segundo miembro. Supongamos $a = a'$, y dividamos el primer miembro, por a y el segundo por a' (99), y resultará la igualdad,

$$bcd = b'c'd'e'.$$

Se puede repetir el razonamiento anterior para el factor b, y se hallará $b = b'$. Después para c, y hallaremos $c = c'$ y sucesivamente $d = d'$, $1 = e'$.

Si en el primer miembro estuviese repetido algún factor, su igual en el segundo miembro estaría repetido las mismas veces, porque en el razonamiento que hemos hecho para demostrar el teorema no excluye el caso de que a y b, por ejemplo, sean iguales entre sí, en cuyo caso también lo serán a', y b'.

De suerte, *que dos productos de factores primos iguales a un número dado, tienen iguales factores y repetidos las mismas veces, es decir, que son idénticos.*

171. Apliquemos ya los teoremas anteriores a la descomposición de un número en factores primos.

Sea el número 3300.

Por ser un número terminado en cero, es divisible por 2 y se tendrá:

$$3300 = 2 . 1650.$$

Si el cociente 1650 fuese el número primo, estaría hecha la descomposición; pero como no lo es, le dividiremos por su factor primo, 2, y resulta,

$$1650 = 2 . 825,$$

y sustituyendo en la igualdad anterior el valor de 1650,

$$3300 = 2 . 2 . 825.$$

El número 825 admite el factor 3, porque la suma de sus cifras es 15, o sea un múltiplo de 3, y tendremos:

$$825 = 3 . 275,$$

cuyo valor sustituido en la anterior igualdad da

$$3300 = 2 . 2 . 3 . 275.$$

A su vez, 275, es divisible por 5; porque termina en 5, de donde:

$$275 = 5 . 55,$$

y poniendo este valor de 275 en la anterior igualdad,

$$3300 = 2 . 2 . 3 . 5 . 55,$$

55 es divisible por 5, y el cociente 11 es ya número primo.

$$55 = 5 . 11,$$

sustituyendo en el valor anterior de 3300 se tiene finalmente:

$$3300 = 2 . 2 . 3 . 5 . 5 . 11.$$

Como los factores 2 y 5 están repetidos, se puede escribir más sencillamente.

$$3300 = 2^2 . 3 . 5^2 . 11.$$

Debemos advertir que como un número no admite dos descomposiciones distintas en factores primos, se puede proceder dividiendo el número y los cocientes que resultan por cualquiera de sus factores primos, pero lo más fácil y cómodo es dividir siempre por el menor factor primo (1). De lo expuesto se deduce la siguiente:

REGLA. *Para hallar los factores primos de un número se le divide por su menor factor primo, distinto de* 1; *el cociente que resulte de esta división, se divide por su menor factor primo, y se continúa operando del mismo modo con los cocientes sucesivos hasta llegar al cociente* 1. *El producto de todos los divisores empleados será igual al número dado.*

3300	2
1650	2
825	3
275	5
55	5
11	11
1	

La operación se dispone como se indica arriba, escribiendo

(1) En los ejemplos que se ponen en las clases, los números suelen tener divisores primos fáciles de obtener; pero cuando no admiten los divisores primos 2, 3, 5 y 11, la operación es larga si no se dispone de tablas donde estén hechas las operaciones, o indicado el menor divisor primo. Las tablas de Burckhardt tienen los números primos y divisores de todos los números del 1.º 2.º y 3.er millón. Estas tablas han sido continuadas por Glaisher y por Dase: el primero halló los números primos y divisores de los 4.º, 5.º y 6.º millón, y el segundo los de los 7.º, 8.º y 9.º millón.

los cocientes debajo de los dividendos, y los divisores a la derecha de sus dividendos, de los cuales están separados por una raya vertical.

En las divisiones, cuando los divisores son muy pequeños, se emplea la nomenclatura de los números partitivos. Así, se dice la mitad de 3 es 1, la mitad de 13 es 6, la mitad de 10 es 5 y la de 0 es 0.

172. *Cuando un número es potencia de cierto grado de otro número, los exponentes de sus factores primos son los múltiplos del exponente que indica el grado de la potencia.*

Sea el número $N = 3300^3$, siendo $3300 = 2^2 . 3 . 5^2 . 11$, se tendrá:

$$N = (2^2 . 3 . 5^2 . 11)^3,$$

y aplicando al segundo miembro la regla de la potencia de un producto (75),

$$N = 2^{2 \cdot 3} 3^3 . 5^{2 \cdot 3} . 11^{3}.$$

173. Recíprocamente. *Si los exponentes de los factores primos de un número admiten un divisor común, el número es una potencia cuyo exponente es igual al divisor común.*

Sea $N = 2^6 . 3^3 . 5^6 . 11^3$, cuyos exponentes admiten el factor común 3, se tendrá:

$$N = 2^{2 \cdot 3} 3^{3} . 5^{2 \cdot 3} . 11^3,$$

cuyo segundo miembro proviene de elevar al cubo $2^2 . 3 . 5^2 . 11$ (75), entonces se tendrá:

$$N = (2^2 . 3 . 5^2 . 11)^3.$$

Como consecuencia de esto, resulta: que la condición necesaria y suficiente para que un número sea *cuadrado perfecto* es que los exponentes de sus factores primos *sean pares;* y para que sea *cubo perfecto,* que sean múltiplos de *tres.*

Formación de todos los divisores de un número

174. Teorema *Para que un número sea divisible por otro se necesita y basta que el dividendo contenga todos los factores primos del divisor con un exponente, cuando menos, igual al que tienen en el divisor.*

Sea N un múltiplo de N' y *q* el cociente de la división, se tendrá:

$$N = N' q.$$

Esta igualdad exige que todos los factores primos del segundo miembro entren con iguales exponentes en el primero (170); luego los factores primos no comunes a N' y q, tendrán en estos números el mismo exponente que en N: y los factores primos comunes a N' y q, tendrán en q, un exponente igual a la diferencia de los que tengan en N y N' (103), de lo cual se deduce, que todos los factores primos de N', los contiene N, con un exponente igual o mayor que en N'.

EJEMPLO: Sea $N = 2^4 . 3^2 . 5 . 7 . 11$, $N' = 2^3 . 3^2 . 11$.

El cociente se obtiene dividiendo sucesivamente por los factores del divisor (102), aplicando a cada uno la regla de división de potencias (103), y se hallará:

$$q = 2 . 5 . 7.$$

175. El teorema que acabamos de demostrar se aplica a la determinación de todos los divisores de un número dado.

Sea el número,

$$360 = 2^3 . 3^2 . 5.$$

Este número no admite otros divisores primos que 2, 3 y 5, con exponentes, a lo sumo, iguales a 3, 2 y 1, respectivamente; luego si formamos las líneas,

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & \\ 1 & 5 & & \end{array}$$

o bien,

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & \\ 1 & 5 & & \end{array}$$

y multiplicamos los números de la primera línea por los de la segunda, como si fueran términos de dos sumas, y los productos que nos resulten por los de la tercera, todos los números obtenidos serán divisores del número 360.

El primero de estos productos es la unidad, y el último será 8 . 9 . 5, que es igual a 360.

La operación se dispone en un cuadro del modo siguiente:

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 & 24 \\ 9 & 18 & 36 & 72 \\ \hline 5 & 10 & 20 & 40 \\ 15 & 30 & 60 & 120 \\ 45 & 90 & 180 & 360 \end{array}$$

Composición del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo por los factores primos

176. *El máximo común divisor de dos o más números es el producto de los factores primos comunes, afectados de los menores exponentes.*

El producto de los factores primos comunes afectados de los menores exponentes es divisor de los números propuestos (174), porque sólo contiene los factores comunes con un exponente, a lo más, igual al que tienen en dichos números. Es el mayor de todos los divisores comunes, porque si tuviese algún factor no común a todos los números, dejaría de ser divisor de todos; y si alguno de los factores comunes no estuviese afectado del menor exponente, también dejaría de ser divisor común.

EJEMPLO: Sean los números

$$360 = 2^3 . 3^2 . 5;\ 420 = 2^2 . 3 . 5 . 7;\ 1980 = 2^2 . 3^2 . 5 . 11.$$

El *m. c. d.* será $2^2 . 3 . 5 = 60$; porque los factores comunes son 2, 3 y 5, y los menores exponentes de que están afectados son 2, 1 y 1.

117. *El mínimo común múltiplo de dos o más números es el producto de todos sus factores primos, afectados de los mayores exponentes.*

El producto de todos los factores primos afectados de los mayores exponentes es múltiplo de los números propuestos (174), porque contiene todos sus factores primos con un exponente, cuando menos, igual al que tienen en los números. Es el menor de todos los múltiplos comunes, porque para ser múltiplo no se le puede quitar ningún factor, ni rebajar ningún exponente.

EJEMPLO: Sean los números

$$360 = 2^3 . 3^2 . 5;\ 420 = 2^2 . 3 . 5 . 7;\ 1980 = 2^2 . 3^2 . 5 . 11.$$

El *m. c. m.* será $2^3 . 3^2 . 5 . 7 . 11 = 27720$, porque contiene todos los factores de los números dados, con los mayores exponentes de que están afectados (1).

---

(1) El método de hallar el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo por los factores primos es muy expedito cuando los factores son pequeños; pero en el caso contrario, habrá que recurrir en el *m. c. d.* al método expuesto en los números 127 y siguientes y en el *m. c. m.* al expuesto en los números 143 y siguientes.

Para resolver este problema sirven las tablas citadas en la nota del núm. 171. Para números inferiores a 8358 sirve la pequeña tabla XXIII de las Tablas de logaritmos de Sanchez Ramos. Contiene la citada tabla los números compuestos hasta 8357, no divisibles por 2, 3, 5 u 11, con indicación, para cada número, de su menor factor primo.

LIBRO II

Los números fraccionarios

CAPÍTULO I

LA NUMERACIÓN, PROPIEDADES Y TRANSFORMACIONES DE LOS FRACCIONARIOS

I. La numeración de los fraccionarios

178. Hemos dicho (8) que cuando se trata de medir una cantidad por medio de otra de su misma naturaleza que se toma por unidad, puede suceder que la cantidad no contenga exactamente a la unidad, pero sí a una parte alicuota suya, y el número que entonces resulta es *fraccionario.*

Número fraccionario ~~es, pues,~~ un conjunto de partes iguales de la unidad. Cada una de las partes iguales de la unidad se llama *unidad fraccionaria.* Las unidades fraccionarias reciben los nombres de *medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos* y *décimos,* según que resulten de dividir la unidad entera en 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 partes respectivamente. Pero en general, se designa la unidad fraccionaria enunciando el número de partes en que se divide la unidad entera y añadiendo la terminación *avos.* se pasa de diez ~~Así, cuando la unidad se divide en 27 partes, se llaman *veintisiete avos.*~~

El número fraccionario se suele llamar también *fracción* y *quebrado.* De la definición de número fraccionario se deduce, que para su expresión se necesitan dos números; uno, que se llama *numerador,* indica cuántas unidades fraccionarias le forman, y otro, que se llama *denominador,* indica en cuántas partes se divide la unidad.

El numerador y denominador se suelen llamar términos del quebrado.

Para escribir un número fraccionario se escribe el numerador y debajo el denominador, separándolos por una raya horizontal. Así, $\dfrac{12}{17}$ es un quebrado, formado, por 12 unidades iguales a un *diez y siete avo* cada una.

Para leer un quebrado, se lee el numerador y después el denominador, añadiendo la terminación avos. Así, $\dfrac{12}{17}$, si pasa de diez se lee, *doce diez y siete avos.* Si el denominador es menor que 10, se lee el numerador y después el denominador como partitivo. Así $\dfrac{3}{4}$, se lee *tres cuartos.*

179. Si el denominador de un quebrado es la unidad, la unidad fraccionaria es igual a la unidad entera; luego el valor del quebrado es igual al numerador.

Así $\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{5}{1}$, son quebrados iguales a 3 y a 5 unidades respectivamente.

Luego: *todo número entero se puede considerar o escribir como un fraccionario, cuyo numerador es el entero y cuyo denominador es la unidad.*

180. Si con un mismo denominador formamos una serie de quebrados, de numeradores crecientes, por ejemplo:

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{6}{3},\ \frac{7}{3}\dots$$

es evidente que el valor de la unidad fraccionaria se conserva constantemente igual a $\dfrac{1}{3}$, pero que el número de unidades fraccionarias crece con los numeradores, y que, por consiguiente, los quebrados anteriores forman una serie creciente. Luego; *cuando se conserva constante el denominador, los quebrados aumentan, o disminuyen, cuando aumenta o disminuye su numerador.*

Si con un mismo numerador formamos una serie de quebrados de denominadores crecientes, por ejemplo:

$$\frac{3}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{3}{6},\ \frac{3}{7}\dots$$

es evidente que aumentando el número de partes en que se divide la unidad, el valor de cada parte disminuye; pero la serie anterior está formada con quebrados que, por tener el mismo numerador, cada uno comprende tres unidades fraccionarias, cuyo valor va disminuyendo; luego forman una serie decreciente. *Entonces, cuando se conserva constante el numerador, los quebrados disminuyen, o aumentan, cuando aumenta o disminuye el denominador.*

Si el numerador y denominador son iguales, el quebrado es igual a la unidad.

Si el numerador es mayor que el denominador, el quebrado es mayor que la unidad, y si el numerador es menor que el denominador, el quebrado es menor que la unidad.

Estas propiedades son consecuencia inmediata de la definición de quebrado y de lo demostrado anteriormente.

Se suele llamar *quebrado propio, o fracción pura,* al que es menor que la unidad, y *quebrados impropios* a los demás.

II. Las propiedades y transformaciones de los números fraccionarios

181. *Si se multiplica el numerador de un quebrado por un número entero o se divide por uno de sus factores, el quebrado queda multiplicado o dividido por dicho número.*

1.º Sea el quebrado, $\frac{8}{12}$: si multiplicamos su numerador por 4, se formará el quebrado, $\frac{8 \times 4}{12}$; como el valor de la unidad fraccionaria continúa siendo $\frac{1}{12}$, y el número de unidades fraccionarias es cuatro veces mayor, el quebrado se habrá hecho cuatro veces mayor o habrá quedado multiplicado por 4.

2.º Si dividimos el numerador por su factor 4, se formará el quebrado, $\frac{8:4}{12}$. El valor de la unidad fraccionaria es $\frac{1}{12}$, como en el quebrado primitivo; pero ahora el número de unidades fraccionarias es cuatro veces menor, luego el quebrado se habrá hecho cuatro veces menor o habrá quedado dividido por 4.

182. *Si se multiplica el denominador de un quebrado por un número entero o se divide por uno de sus factores, el quebrado queda dividido o multiplicado por dicho número.*

1.º Sea el quebrado, $\frac{8}{12}$: si multiplicamos su denominador por 4, se formará el quebrado, $\frac{8}{12 \times 4}$: ahora de las unidades fraccionarias, $\frac{1}{12 \times 4}$, se necesitan cuatro veces más para formar una unidad entera, que de las unidades fraccionarias, $\frac{1}{12}$; luego aquéllas son cuatro veces menores que éstas, y como los dos quebrados, $\frac{8}{12}$ y $\frac{8}{12 \times 4}$, están formados por el mismo número de unidades fraccionarias, el segundo será cuatro veces menor que el primero, o será igual al primero dividido por 4.

2.º Si dividimos el denominador por su factor, 4, se formará el quebrado, $\frac{8}{12:4}$, y como en este la unidad fraccionaria es cuatro veces mayor que en $\frac{8}{12}$, y en ambos quebrados hay el mismo número de unidades fraccionarias, el quebrado, $\frac{8}{12:4}$, es cuatro veces mayor que $\frac{8}{12}$, o será igual al producto de $\frac{8}{12}$, por 4.

183. Escolio 1.º *Para multiplicar un quebrado por un entero se multiplica el numerador por el entero, dejando el mismo denominador: y si el entero es factor del denominador, se puede dividir el denominador por el entero, dejando el mismo numerador.*

Para dividir un quebrado por un entero se multiplica el denominador por el entero, dejando el mismo numerador; y si el entero es factor del numerador, se puede dividir el numerador por el entero, dejando el mismo denominador.

184. Escolio 2.° *Como caso particular conviene notar, que el producto de un quebrado por su denominador es igual a su numerador.* Porque para hacer la multiplicación, podemos dividir el denominador por sí mismo y quedará por denominador la unidad.

Así, $\frac{4}{9} \times 9 = \frac{4}{9:9} = \frac{4}{1} = 4.$

185. *Si los dos términos de un quebrado se multiplican por un número entero, o se dividen por un factor común a ambos, el quebrado no varía.*

1.° Sea el quebrado, $\frac{8}{12}$: si multiplicamos por 4 el numerador, se tendrá: $\frac{8 \times 4}{12}$, que es cuatro veces mayor que el propuesto, y multiplicando el denominador de este último por 4, se forma el quebrado, $\frac{8 \times 4}{12 \times 4}$, que es cuatro veces menor que $\frac{8 \times 4}{12}$, y por consiguiente será igual a $\frac{8}{12}$.

2.° Si dividimos el numerador del quebrado, $\frac{8}{12}$, por 4, se tendrá: $\frac{8:4}{12}$, que es cuatro veces menor que el propuesto, y dividiendo el denominador de éste por 4, resultará: $\frac{8:4}{12:4}$, que es cuatro veces mayor que $\frac{8:4}{12}$, y por consiguiente, será igual a $\frac{8}{12}$.

Lección 23

186. *Todo número entero se puede poner bajo la forma de una fracción de denominador dado,*

Sea un número cualquiera 8, por ejemplo, el que se quiere reducir a la forma fraccionaria de un denominador dado, 5, por ejemplo:

A todo número entero, se le puede suponer por denominador la unidad (179); luego tendremos:

$$8 = \frac{8}{1}.$$

pero si multiplicamos por 5 los dos términos del quebrado, $\frac{8}{1}$, el quebrado no varía (185); luego:

$$\frac{8}{1}=\frac{8\times 5}{5}, \text{ o bien, } 8=\frac{8\times 5}{5},$$

187. Se llama *número mixto* un número compuesto de un entero y una fracción menor que la unidad.

Así: $12+\frac{5}{7}$, es un número mixto. Generalmente se suprime el signo $+$ y sólo se escribe, $12\frac{5}{7}$.

Una expresión compuesta de un entero y una fracción se puede transformar en un quebrado equivalente; para esto se multiplica el entero por el denominador de la fracción y al producto se añade el numerador, poniendo el resultado por numerador y dejando por denominador el mismo de la fracción.

Sea: $12\frac{5}{7}$. El entero, 12, reducido a séptimos, es, $\frac{12\times 7}{7}$ (187); luego el número de *séptimos* contenidos en el entero, es 12×7, y como en el mixto hay además otros 5 séptimos, el número total de séptimos será: $12\times 7+5$, y tendremos:

$$12\frac{5}{7}=\frac{12\times 7+5}{7}=\frac{89}{7}.$$

188. *Para reducir un quebrado mayor que la unidad a número mixto, se divide el numerador por el denominador: el cociente será la parte entera, y la fracción será, un quebrado, cuyo numerador es el resto y el denominador el divisor.*

Sea el quebrado, $\frac{89}{7}$. Como cada unidad contiene 7 *séptimos,* el número de unidades contenidas en $\frac{89}{7}$, es igual al número de veces que 89 séptimos contiene a 7 séptimos, o sea el número de veces que 89 contiene a 7. Dividiendo 89 por 7 se halla el cociente 12 y el resto 5; luego 89 séptimos contiene 12 veces a 7 séptimos, y quedan además otros 5 séptimos; entonces, 89 séptimos es igual a 12 unidades y 5 séptimos, se tendrá, pues:

$$\frac{89}{7} = 12\frac{5}{7}.$$

Si el cociente del numerador por el denominador fuese exacto, el quebrado sería igual a un número entero. De aquí se deduce que: *para que un quebrado sea equivalente a un número entero, se necesita que el numerador del quebrado sea divisible por el denominador*

189. Sabemos, que si una división es inexacta, el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el resíduo. Ahora bien: si formamos un quebrado, cuyo numerador sea el resíduo y cuyo denominador sea el divisor, y le multiplicamos por el divisor, dará de producto el resíduo (184), que es su numerador: luego este quebrado, unido al cociente entero, formará un número mixto que, multiplicado por el divisor reproducirá el dividendo.

En virtud de esto, si llamamos cociente completo de la división al número mixto formado por el cociente entero y una fracción, cuyo numerador sea el resto y el denominador el divisor, podremos adoptar para definición de la división la siguiente: *división es una operación que tiene por objeto, dados un producto y uno de los factores hallar el otro.* Esta definición general sólo la pudimos aplicar al caso de la división exacta (78) en la teoría de los números enteros.

190. *Un quebrado cualquiera se puede considerar como un cociente de su numerador por su denominador;* porque si multiplicamos el quebrado por el denominador, el producto es el numerador.

Podremos, por consiguiente, considerar divisiones, en que el dividendo *sea menor que el divisor,* y enunciar como propiedades de la división todas las propiedades de las fracciones, sin más que cambiar las palabras *numerador, denominador* y *quebrado,* o *fracción* en las de *dividendo, divisor* y *cociente.*

Por ejemplo: la propiedad, núm. 181 será: *si se multiplica el dividendo por un número entero o se divide por uno de sus factores, el cociente queda multiplicado o dividido por dicho número.*

Simplificación de las fracciones

191. Hemos visto (185), que una fracción no varía si se multiplican sus dos términos por un mismo número, o se dividen por un factor común a ambos; luego hay muchas fracciones iguales y que tienen términos distintos, y por consiguiente podemos proponernos hallar cuál es, entre todas las fracciones iguales, la de términos menores.

$\frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ La fracción de términos menores entre todas las iguales se llama *fracción irreducible*; la operación de convertir una fracción en otra igual e irreducible se llama *simplificación de una fracción*.

192. *Si una fracción tiene su numerador y denominador primos entre sí, toda fracción igual a ella tendrá sus términos equimúltiplos de los de la primera* (1).

Sea la fracción, $\frac{2}{3}$, cuyos términos son primos entre sí, igual a $\frac{a}{b}$ Si multiplicamos ambas fracciones por b, los productos serán (192), $\frac{2 \times b}{3}$ y $\frac{a \times b}{b}$ fracciones todavía iguales: pero, $\frac{a \times b}{b} = a$, luego tendremos: $\frac{2 \times b}{3} = a$, como el segundo miembro de esta igualdad es un número entero, el primero también lo será; luego el producto $2 \times b$ será divisible por 3; pero 2 y 3 son primos entre sí; luego b será divisible por 3 (136), y llamando c al cociente de la división tendremos:

$$b = 3 \times c,$$

sustituyendo este valor de b en la igualdad anterior:

$$\frac{2 \times 3 \times c}{3} = a. \quad \text{o bien} \quad 2 \times c = a,$$

luego los números, a y b, son los productos de 2 y 3, por un mismo número, c, o son equimúltiplos de 2 y 3.

---

(1) Dos números son equimúltiplos de otros dos, cuando resultan de multiplicar éstos por un mismo número. Así, 24 y 33, son equimúltiplos de 8 y 11, porque son respectivamente, 8×3 y 11×3.

193. *Toda fracción cuyos términos son primos entre sí es irreducible.*
Porque cualquiera otra igual a ella tendrá sus términos mayores (192).

Recíprocamente: *Los términos de una fracción irreducible son primos entre sí.* Porque si no lo fueran, dividiéndolos por su máximo común divisor se obtendría otra fracción irreducible igual a la primera y de términos menores; luego la primera no sería irreducible, lo que es contra la hipótesis.

método general

194. De lo expuesto en los números anteriores se deduce: *que para simplificar una fracción basta hallar el máximo común divisor de sus dos términos y dividirlos por él.*

Porque siendo los cocientes que se obtienen primos entre sí (135), la fracción que resulta será irreducible.

Ejemplo: Simplificar la fracción, $\frac{1890}{2970}$. El *m. c. d.* de sus dos términos es 280, y los cocientes de dividir, 1890 y 2970 por 270, son respectivamente, 7 y 11; luego tendremos:

$$\frac{1890}{2970} = \frac{7}{11}.$$

por partes

También se puede simplificar una fracción dividiendo sus dos términos por los factores comunes que se aperciban a primera vista.

Así: los términos de la fracción $\frac{1890}{2970}$ tienen el factor común 10: suprimiéndole, resultará: $\frac{189}{297}$. Los dos términos tienen todavía el factor común 9: suprimiéndole, queda, $\frac{21}{33}$, y suprimiendo ahora el factor común 3, resultará, $\frac{7}{11}$; luego tendremos:

$$\frac{1890}{2970} = \frac{189}{297} = \frac{21}{33} = \frac{7}{11}.$$

Si no se viera, a primera vista, que la fracción, $\frac{7}{11}$, es irreducible, hallaríamos el *m. c. d.* de sus dos términos y dividiríamos por él para acabar la simplificación.

195. Para formar las fracciones iguales a una fracción irreducible dada, se multiplican sus dos términos por la serie natural de los números enteros.

Dos fracciones irreducibles iguales, tienen sus términos iguales.

Porque los términos de cada una tienen que ser al mismo tiempo múltiplos y divisores de los de la otra (192).

Reducción de fracciones a un común denominador

196. *Reducir fracciones a un común denominador, es transformarlas en otras iguales y que tengan todas el mismo denominador.*

Supondremos que las fracciones que se trata de reducir a un común denominador, son irreducibles; si no lo son, se comienza por simplificarlas.

197. Como el denominador de una fracción igual a otra irreducible es múltiplo del de ésta (192), el denominador común de varias fracciones iguales a otras irreducibles *deberá ser múltiplo de todos los denominadores de las fracciones irreducibles*; y para que los valores de las fracciones no se alteren, se tendrá que multiplicar el numerador y denominador de cada una por el mismo número.

Si además queremos que el denominador común sea el menor posible, deberá ser igual al mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones irreducibles.

198. De estas consideraciones se deduce la siguiente:

Regla. *Para reducir al mínimo denominador común varias fracciones, después de simplificadas, se multiplican los dos términos de cada una por el cociente de dividir por su denominador, el mínimo común múltiplo de los denominadores.*

Ejemplo: Sean las fracciones irreducibles,

$$\frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{8}{15}, \frac{9}{20}, \frac{29}{53}$$

El mínimo común múltiplo de los denominadores se puede hallar descomponiéndolos en factores simples y formando el producto de las mayores potencias de todos los factores (177).

Metodo m. c. m

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8} \cdot \frac{2\times 8}{3\times 8} = \frac{16}{24}, \frac{5\times 4}{6\times 4} = \frac{20}{24} \cdot \frac{7\times 3}{8\times 3} = \frac{21}{24}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3 = 3 \\ 6 = 2\times 3 \\ 8 = 2^3 \end{array}\right\} m.c.m = 2^3\times 3 = 24$$

Así: $8 = 2^3$ $12 = 2^2 \times 3$; $15 = 3 \times 5$,
$20 = 2^2 \times 5$; $63 = 3^2 \times 7$,
luego el mínimo común múltiplo será:

$$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520.$$

Dividiéndole por los denominadores, 8, 12, 15, 20 y 63, se hallan los cocientes (100)

$$3^2 \times 5 \times 7 = 315;\ 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210;$$
$$2^3 \times 3 \times 7 = 168;\ 2 \times 3^2 \times 7 = 126,\ \text{y}\ 2^3 \times 5 = 40$$

y multiplicando respectivamente por estos números los dos términos de las fracciones propuestas se tendrá:

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \times 315}{8 \times 315} = \frac{1575}{2520},\quad \frac{7}{12} = \frac{7 \times 210}{12 \times 210} = \frac{1470}{2520},$$
$$\frac{8}{15} = \frac{8 \times 168}{15 \times 168} = \frac{1344}{2520},\quad \frac{9}{20} = \frac{9 \times 126}{20 \times 126} = \frac{1134}{2520},$$
$$\frac{29}{63} = \frac{29 \times 40}{63 \times 40} = \frac{1160}{2520}.$$

199. Otra regla para reducir fracciones a un común denominador. *Para reducir varias fracciones a un común denominador, se comienza por simplificarlas, si no son irreducibles, y se multiplican los dos términos de cada fracción por el producto de los denominadores de las demás.*

Las fracciones que así se formen serán iguales a las propuestas, porque resultan de multiplicar los dos términos de cada una por el producto de los denominadores de las demás, y tendrán todas por denominador común el producto de los denominadores.

Ejemplo: Sean las fracciones irreducibles,

$$\frac{5}{8},\ \frac{7}{12},\ \frac{29}{63},$$

serán iguales a las fracciones,

$$\frac{5 \times 12 \times 63}{8 \times 12 \times 63},\ \frac{7 \times 8 \times 63}{12 \times 8 \times 63},\ \frac{29 \times 8 \times 12}{63 \times 8 \times 12},$$

y efectuando las multiplicaciones, resultará:

$$\frac{3780}{6048},\ \frac{3528}{6048},\ \frac{2784}{6048}.$$

CAPÍTULO II

LAS FRACCIONES DECIMALES

200. 1ª La unidad se puede dividir en 10, 100, 1000... partes iguales que reciben los nombres de *décimas, centésimas, milésimas*... Todas ellas se llaman unidades *fraccionales decimales;* siendo de *primer orden* las décimas; de *segundo orden*, las centésimas; de *tercero* las milésimas, etc. ~~De estas~~ definiciones se deduce que una unidad tiene 10 décimas; una décima, 10 centésimas; una centésima, 10 milésimas, y en general *una unidad decimal cualquiera vale* 10 *unidades del orden siguiente.*

nº decim. *Número decimal es ~~un número~~ formado por varias unidades y partes decimales de la unidad: o sólo por unidades decimales.* El número decimal tiene menos de 10 unidades de cada orden, porque 10 unidades de un orden forman una del orden inmediatamente mayor.

201. En los números decimales se pueden considerar como unidades principales las *milésimas*, las *millonésimas*, las *milmillonésimas*, etc.

Para pasar de una unidad principal a la siguiente, se necesitan tres órdenes de unidades decimales que expresan centenas, decenas y unidades, de la unidad principal, así:

las,

décimas, centésimas, y milésimas,

son,

centenas, decenas y unidades de milésimas;

las,

diezmilésimas, cien milésimas, y millonésimas,

son,

centenas decenas y unidades de millonésimas.

En virtud de esto, se puede expresar un número decimal, enunciando primero su parte entera, si la tiene, y después la parte decimal, procediendo por grupos de unidades principales, de superior a inferior.

Ejemplo:

Expresar el número formado por:

seis unidades,	*parte entera;*
cinco décimas, *ocho centésimas,* *siete milésimas,*	*grupo decimal.*

Será: *Seis unidades y quinientas ochenta y siete milésimas.*

Si el grupo inferior de unidades decimales sólo contiene centenas y decenas de la unidad principal, se enuncia como un número de decenas y unidades con la denominación de su última orden decimal.

Ejemplo:

Expresar el número formado por:

cuatro décimas, *cinco milésimas,*	*primer grupo decimal,*
siete diezmilésimas, *ocho cienmilèsimas,*	*segundo grupo decimal.*

Será: *cuatrocientas cinco milésimas y setenta y ocho cienmilésimas.*

Si el último grupo de unidades decimales solo contiene centenas de la unidad principal, se enuncia como unidades de su último orden decimal.

Ejemplo:

Expresar el número formado por:

treinta y siete unidades,	*parte entera,*
cuatro centésimas, *siete milésimas,*	*primer grupo decimal,*
ocho diezmilésimas, *cuatro cienmilésimas,*	*segundo grupo decimal,*
nueve diezmillonésimas,	*tercer grupo decimal.*

Será: *treinta y siete unidades cuarenta y siete milésimas ochocientas cuarenta millonésimas y nueve diezmillonésimas.*

Princ. 202. Para escribir los números decimales se conviene en que el *primer lugar,* a la derecha de las unidades, le ocupen las *décimas;* el *segundo,* las *centésimas;* el *tercero,* las *milésimas;* el *cuarto,* las *diezmilésimas;* y así sucesivamente: para distinguir donde termina la parte entera y comienza la decimal se separan las unidades de las décimas por una coma. Si el decimal no tiene parte entera, se ocupa el lugar de las unidades con un cero.

Escrit. 203. Para escribir un número decimal, cuyo enunciado o expresión verbal se conoce, *se escribe la parte entera o un cero si no la tiene, después la coma, y a la derecha de ésta, el grupo correspondiente a las décimas, centésimas y milésimas; a la derecha de éste, el correspondiente a las diezmilésimas, cienmilésimas y millonésimas; y así sucesivamente hasta llegar al último orden de unidades decimales*

El último grupo de unidades decimales, podrá ser de una o dos cifras, lo cual se conocerá en el enunciado.

Ejemplos:

1.º Escribir el número *cuarenta y una unidades quinientas veintiocho milésimas y veintisiete millonésimas.*

Se escribirá, primero, el número 41, que es la parte entera, a su derecha una coma, luego 528, que es el grupo de milésimas, y por último, 027, que es el grupo de millonésimas, y se tendrá:

41,528027.

2.º Escribir el número *treinta y siete milésimas doscientas cinco millonésimas y doce cienmillonésimas.*

Como este número no tiene parte entera, se escribe un cero y después la coma, a la derecha de ésta, 037, que es el grupo de las milésimas, a la derecha de éste, 205, que es el grupo de las millonésimas y a la derecha de éste, 12, que es el grupo de las cienmillonésimas, y resultará:

0,03720512

Lect. 204. *Para leer un número decimal se lee primero la parte entera, si la tiene, después el grupo correspondiente a las milésimas, luego el de las millonésimas y así sucesivamente hasta el último grupo*

Ejemplos:

1.º Leer el número: 49,21531.

Será: *cuarenta y nueve unidades doscientas quince milésimas y treinta y una cienmilésimas.*

2.º Leer el número: 0,00002713.

Será: *veintisiete millonésimas y trece cienmillonésimas.*

205. Un número decimal se puede enunciar como si fuese entero, dándole la denominación correspondiente a su última cifra decimal: en este caso, *se escribe como si fuese entero y se separan, de su derecha, tantas cifras decimales, como correspondan a la denominación de la última.*

Ejemplo:

Escribir el número: *dos millones cuatrocientas quince mil diez y siete diezmilésimas.*

Se escribe el número 2415017 y se separan cuatro decimales, por expresar diezmilésimas la última; por consiguiente resultará:

241,5017.

206. *Un número decimal se puede leer como si fuese entero, dándole la denominación que corresponda a su última cifra decimal.*

Ejemplo:

Leer el número 0,0472161.

Por ser de diezmillonésimas la última cifra leeremos: *cuatrocientas setenta y dos mil ciento sesenta y una diezmillonésimas.*

207. Otro modo hay de enunciar, escribir y leer los números decimales: para expresarlos verbalmente se enuncia la parte entera y después la decimal, como si fuese entera, añadiendo la denominación correpondiente a su última cifra decimal; para escribirlos, se escribe la parte entera, luego la coma y después la decimal, haciendo que la última cifra ocupe el lugar que le corresponde por la denominación que se le da: para leerlos, se hace lo mismo que para enunciarlos.

208. *Todo número decimal es una fracción, cuyo denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tienen el número, y cuyo numerador es el decimal sin la coma.*

En efecto, sea el número, 24.2307. Hemos visto que este número se puede leer como un número entero dándole la denominación de su última cifra decimal, y será: 242307 *diezmilésimas;* luego esta lectura es la de un quebrado, cuyo *numerador* es 242307 y cuyo *denominador* es 10000, y tendremos:

$$24{,}2307 = \frac{242307}{10000}$$

209. En virtud de esto, todas las propiedades de los quebrados son aplicables a los números decimales; por esta razón se les llama también *fracciones decimales,* y a las demás fracciones, para distinguirlas de éstas, *fracciones ordinarias.*

Aunque podríamos dar a las fracciones decimales la forma de fracciones ordinarias, les conservaremos la forma entera y estudiaremos algunas otras propiedades importantes que les corresponden.

210. *Uua fracción decimal no cambia de valor cuando se añaden o suprimen ceros de su derecha.* (1).

Sea el número, 32,45. Añadiendo dos ceros a su derecha, tendremos: 32,4500; que es igual al anterior, porque se compone, como el primero, de 32 *unidades* y 45 *centésimas;* pues la parte añadida no tiene valor ninguno, ni hacer variar el valor relativo de las demás cifras.

Del mismo modo se demuestra que la fracción decimal no varía suprimiendo ceros de su derecha, si los ~~tiene~~.

211 *Si en una fracción decimal se corre la coma* 1, 2, 3.., *lugares a la derecha o a la izquierda, queda multiplicada o dividida por* 10, 100, 1000..., *es decir, queda multiplicada o dividida por la unidad seguida de tantos ceros como lugares se ha corrido la coma.*

Sea la fracción, 385,2471. Si corremos la coma dos lugares a la derecha, tendremos: 38524,71. La primera fracción tiene 3852471 *diezmilésimas,* y la segunda, 3852471 *centésimas,* es decir, el mismo número de unidades decimales, pero cien veces mayores; luego será cien veces mayor, o sea el producto de la primera por 100.

Se debe observar que el valor relativo de cada una de las cifras se ha hecho cien veces mayor.

Si en la misma fracción corremos la coma dos lugares a la izquierda, se tendrá: 3,852471, es decir, 3852471 *millonésimas,* o sea el mismo número de unidades decimales que primitivamente, pero cien veces menores; luego la fracción habrá quedado dividida por 100.

Si no hubiese bastantes lugares a la derecha o a la izquierda para correr la coma, se suplen con un número suficiente de ceros. Así:

$$32{,}25 \times 10000 = 322500$$
$$32{,}25 : 10000 = 0{,}003225.$$

De lo expuesto se deduce que: *para multiplicar o dividir un número decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma a la derecha o a la izquierda tantos lugares como ceros siguen a la unidad.*

(1) Es claro que tampoco varía si se añaden o quitan ceros de la izquierda de su parte entera.

CAPÍTULO III

REDUCCIÓN DE LAS FRACCIONES ORDINARIAS A DECIMALES Y VICEVERSA

I. Reducción de las fracciones ordinarias a decimales

212. Si queremos convertir una fracción ordinaria irreducible en una fracción decimal equivalente, el denominador de la fracción decimal debe ser múltiplo del denominador de la fracción irreducible (192).

Como el denominador de la fracción decimal es la unidad seguida de ceros (208), y la unidad seguida de ceros es una potencia de 10, la podremos expresar en general por 10^n, siendo n el exponente de la potencia, igual al número de ceros que siguen a la unidad.

Sea, pues, $\frac{a}{b}$, una fracción irreducicible y, $\frac{x}{10^n}$, la fración decimal equivalente, tendremos:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{10^n},$$

y multiplicando las dos fracciones por 10^n,

$$\frac{a\,10^n}{b} = x. \qquad (1)$$

De esta igualdad se deduce que: *para convertir una fracción ordinaria en decimal equivalente, se multiplica el numerador de la fracción por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales se han de obtener; el producto se divide por el denominador, y el cociente que resulte será el numerador de la fracción decimal. Después, para obtener la fracción decimal, bastará separar de la derecha del cociente tantas cifras decimales como ceros se añadieron al numerador de la fracción ordinaria.*

No se necesita añadir los ceros al numerador de la fracción ordinaria al comenzar la división, sino que se obtendrá el cociente entero de la división de a por b, y a la derecha de las unidades se colocará la coma, escribiendo después los cocientes que se obtengan, añadiendo un cero a cada uno de los restos hasta terminar la operación.

Así, para convertir en decimal la fracción, $\frac{13}{16}$, tendremos:

$$\begin{array}{r|l} 130 & 16 \\ \cline{2-2} 20 & \\ 40 & 0{,}8125 \\ 80 & \\ 0 & \end{array}$$

213 Siendo irreducible la fracción, $\frac{a}{b}$ a y b, son primos entre sí; luego para que el cociente indicado en el primer miembro de la igualdad (1) sea un número entero, se necesita que 10^n sea un múltiplo de b (136). Ahora, como 10^n es igual a $2^n \times 5^n$; *para que una fracción irreducible se pueda convertir exactamente en decimal, se necesita que su denominador no contenga más factores primos que* 2 y 5.

Si el denominador de la fracción irreducible contiene algún factor primo distinto de 2 y 5, ninguna potencia de 10 podrá ser divisible por el denominador (174), y la fracción no se podrá reducir exactamente a decimal. En este caso se puede hallar el valor de la fracción con menor error de una unidad decimal dada, continuando la división hasta obtener en el cociente la cifra de dicho orden.

Ejemplo: Hallar con menor error de *una diezmilésima* el valor de la fracción, $\frac{5}{7}$, tendremos:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 7 \\ \cline{2-2} 10 & \\ 30 & 0{,}7142 \\ 20 & \\ 6 & \end{array}$$

El cociente, 0,7142, expresa con menos error de $\frac{1}{10000}$, por defecto, el valor de $\frac{5}{7}$; el número, 0,7142, expresará la fracción $\frac{5}{7}$, con un error por exceso, menor que $\frac{1}{10000}$.

214. En toda división inexacta se puede obtener el cociente con menor error de una unidad decimal dada, siguiendo el procedimiento que hemos expuesto en los párrafos anteriores. Porque el cociente se puede considerar como una fracción cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor (189).

Se debe advertir, *que como el dividendo y el divisor pueden no ser primos entre sí, algunas veces se llegará a cociente exacto aunque el divisor contenga factores primos distintos de* 2 y 5. Para esto bastará evidentemente que dichos factores primos sean también factores del dividendo.

Ejemplo: Hallar el cociente de los números 2583 y 72. Estos números son divisibles por 9 (121), y como el cociente de 72 entre 9 es 8 y este último número no tiene más factor primo que 2, aproximando el cociente con decimales se llegará al resto cero.

$$\begin{array}{r|l} 2583 & 72 \\ \cline{2-2} 423 & 35,875 \\ 630 & \\ 540 & \\ 360 & \\ 0 & \end{array}$$

215. *Si el denominador de una fracción irreducible no contiene más factores primos que,* 2 y 5, *la fracción decimal exacta a que se puede reducir tendrá tantas cifras decimales como unidades el mayor de los exponentes de dichos factores.*

Sea la fracción irreducible, $\frac{21}{2^3 \cdot 5}$. Multiplicando sus dos términos por 5^2, se tendrá:

$$\frac{21}{2^3 \cdot 5} = \frac{21 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{525}{1000} = 0,525.$$

216. Una fracción decimal de ilimitado número de cifras es *periódica* cuando a partir de cierto lugar un grupo de cifras se repite en el mismo orden, periódica e indefinidamente: el grupo de cifras repetidas se llama *período*. Si el período comienza en la primera decimal, la fracción se llama *periódica pura*, y si comienza en otra cifra decimal cualquiera, *periódica mixta:* en este último caso las cifras decimales anteriores al período se llaman parte *irregular* o no *periódica*.

50 | 7   5 | 6

La fracción, 0,341341341..., es una fracción periódica pura cuyo período es 341.

La fracción, 4,17215215215..., es una fracción periódica mixta cuyo período es 215, y cuya parte no periódica es 17.

Se pueden escribir abreviadamente las fracciones periódicas poniendo un solo período en un paréntesis.

Así, las fracciones anteriores serán 0,(341) y 4,17(215).

217. *Cuando una fracción ordinaria no se puede convertir exactamente en decimal, origina una fracción decimal periódica.*

En efecto sea: $\frac{a}{b}$ una fracción que no se puede reducir exactamente a decimal.

En la división que se practica para la reducción no se podrá llegar al resto cero, porque entonces la fracción se reduciría exactamente a decimal; pero los restos son todos menores que el divisor b, luego al cabo de cierto número de divisiones parciales, a lo sumo $b - 1$, se repitirá algún resto, y por consiguiente se repetirán los dividendos parciales y cocientes siguientes (1).

Ejemplo: Reducir a decimales las fracciones $\frac{129}{37}$ y $\frac{23}{44}$

$$\begin{array}{r|l} 129 & 37 \\ \hline 180 & 3,486486\,.. \\ 320 & \\ 240 & \\ 180 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 230 & 44 \\ \hline 100 & 0,522727... \\ 120 & \\ 320 & \\ 120 & \end{array}$$

de donde resulta $\frac{129}{37} = 3,(486)$ $\frac{23}{44} = 0,52(27)$.

---

(1) Si la operación no ha de prolongarse demasiado, conviene que los denominadores no tengan más factores primos distintos de 2 y 5, que los números 3, 7, 11, 13, 37, 41, 101 y 271. El motivo de esto es que:

$$9 = 3^2;\ 99 = 3^2 . 11;\ 999 = 3^3 . 37;\ 9999 = 3^2 . 11 . 101;$$
$$99999 = 3^2 . 41.271, \text{ y } 999999 = 3^3 . 7 . 11 . 13 . 37.$$

II. Reducción de las fracciones decimales a ordinarias

218. En la reducción de fracciones decimales a ordinarias consideraremos tres casos.

1.° *Que la decimal sea exacta.* 2.° *Que sea periódica pura.* 3.° *Que sea periódica mixta.*

219. PRIMER CASO. *Para reducir a ordinaria una fracción decimal exacta, se pone por numerador la fracción sin la coma y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene la fracción.*

Esta regla no es más que una consecuencia de lo que establecimos en el número 208.

Puesto que la fracción *generatriz de una decimal exacta tiene por denominador la unidad seguida de ceros, no contendrá en su denominador más factores primos que* 2 y 5. Si se puede simplificar, podrá perder uno de ellos y no puede perder los dos porque el numerador no termina en cero.

EJEMPLO: Reducir a ordinaria la fracción decimal 0,275.

Se tendrá: $0{,}275 = \frac{275}{1000} = \frac{55}{200} = \frac{11}{40}$.

220. SEGUNDO CASO. *Para reducir a ordinaria una fracción decimal periódica pura, menor que la unidad, se pone por numerador el período y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período.*

Sea la fracción periódica pura 0,(126). Designando por f, la *fracción generatriz* que la origina, tendremos:

$$f = 0{,}(126).$$

Si corremos la coma a la derecha del primer período habremos multiplicado por 1000, y tendremos:

$$1000\,f = 126{,}(126),$$

restando estas dos igualdades (1) resultará:

$$999\,f = 126,$$

y dividiendo por 999, quedará finalmente,

$$f = \frac{126}{999} \text{ o bien } 0{,}(126) = \frac{126}{999}.$$

(1) La parte decimal está en las dos fracciones compuesta de un número ilimitado de períodos y por consiguiente se puede suponer la misma.

Si la fracción decimal es mayor que la unidad, se convertirá en un número mixto cuya parte entera es la de la fracción decimal.

Así: $41,(243) = 41\frac{243}{999}$.

El denominador de la fracción generatriz de una periódica pura es primo con 10, *por ser un número compuesto de nueves: por consiguiente, aunque se pueda simplificar, continuará siendo primo con* 10.

Así: $0,(126) = \frac{126}{999} = \frac{14}{111}$.

221. Tercer caso. *Para reducir a ordinaria una fracción decimal periódica mixta menor que la unidad, se pone por numerador la parte no periódica, seguida del primer período menos la parte no periódica, y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período, seguidos de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.*

Sea la fracción periódica mixta 0,12(324). Designando por f la fracción generatriz, tendremos:

$$f = 0,12(324),$$

corriendo la coma a la derecha del período,

$$100000\,f = 12324,(324),$$

corriéndola a la derecha de la parte no periódica,

$$100\,f = 12,(324),$$

restando las dos últimas igualdades,

$$99900\,f = 12324 - 12,$$

y dividiendo por 99900.

$$f = \frac{12324 - 12}{99900}, \quad \text{o bien} \quad 0,12(324) = \frac{12324 - 12}{99900}.$$

Si la fracción decimal es mayor que la unidad, se convertirá en un número mixto que tendrá la misma parte entera que la fracción decimal.

Así, $26,40(101) = 26\frac{40101 - 40}{99900}$.

El *denominador de la fracción generatriz de una periódica mixta contiene los factores* 2 *y* 5 *y otros distintos:* por simplificación puede perder el 2 o el 5; pero no los dos a un tiempo, porque para esto se necesitaría que el numerador terminase en un cero cuando menos, y en este caso la última cifra del período y la de la parte no periódica serían iguales y el período comenzaría un lugar antes: tampoco puede el denominador perder por simplificación todos los factores, distintos de 2 y 5, porque en este caso después de simplificada la fracción no contendría en su denominador más factores primos que 2 y 5, o uno de ellos, y sería generatriz de una decimal exacta (213).

222. Los teoremas de los números 213 y 219 sobre las fracciones decimales exactas son recíprocos. Los teoremas de los números 220 y 221 también tienen sus recíprocos, que se demuestran fácilmente por un método llamado por reducción al absurdo.

223. Recíproco del teorema del número 220. *Si una fracción irreducible tiene su denominador primo con 10, es generatriz de una fracción decimal periódica pura.*

Si no originase una fracción decimal periódica pura, originaría una fracción decimal exacta, o periódica mixta. En el primer caso convertida otra vez en ordinaria, su denominador no contendría más factores primos que 2 y 5 (219), lo cual es contra la hipótesis. En el segundo caso convertida otra vez en ordinaria, su denominador contendría uno cuando menos, de los factores primos 2 y 5 y otros distintos (221), lo cual es también contra la hipótesis, luego si no puede originar una fracción decimal exacta, ni periódica mixta, originará una periódica pura, como se quería demostrar.

224. Recíproco del teorema del número 221. *Si una fracción irreducible tiene en su denominador los factores,* 2 y 5, *o uno de ellos y otros factores primos distintos, es generatriz de una fracción decimal periódica mixta.*

Porque si originase una fracción decimal exacta, o periódica pura convertida otra vez en ordinaria, su denominador, o no contendría más factores primos que 2 y 5, o sería primo con 10: ambas cosas contra la hipótesis, luego será generatriz de una fracción decimal periódica mixta (1).

---

(1) Se pueden demostrar directamente estos teoremas al tratar de la conversión de una fracción ordinaria en decimal y no lo hemos hecho por ser este libro muy elemental y las demostraciones algo complicadas.

CAPÍTULO IV

LAS OPERACIONES CON LAS FRACCIONES

I. La adición de las fracciones

225. *Sumar números fraccionarios es reunir en un solo número las unidades y partes de la unidad contenidas en otros varios que se llaman sumandos.*

El resultado se llama *suma*, y la operación se indica, como en los enteros, por el signo $+$.

226. *Para sumar quebrados del mismo denominador se suman los numeradores y a la suma se le pone el denominador común.*

Sean las fracciones, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ y $\frac{3}{7}$. La suma se compondrá de *tantos séptimos* como tienen entre los tres sumandos, y puesto que éstos tienen, 4, 5 y 3 *séptimos*, la suma tendrá: $4+5+3$ *séptimos*, entonces:

$$\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{3}{7}=\frac{4+5+3}{7}=\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}.$$

227. *Para sumar quebrados de distinto denominador, se reducen a un común denominador y se suman después como en el caso anterior.*

Sean las fracciones, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{9}$ y $\frac{7}{15}$. Reduciendo a un común denominador (198), tendremos:

$$\frac{3}{5}+\frac{4}{9}+\frac{7}{15}=\frac{27}{45}+\frac{20}{45}+\frac{21}{45}=\frac{20+27+21}{45}=\frac{68}{45}=1\frac{23}{45}.$$

228. *Para sumar números que contengan enteros y fracciones, se suman primero las fracciones y después los enteros, añadiendo a la suma de éstos las unidades que resulten de sumar las fracciones.*

Sumar los números, $\frac{4}{5}$, 3, $5\frac{4}{7}$ y $2\frac{1}{3}$. Tendremos:

$$\frac{4}{5}+\frac{4}{7}+\frac{1}{3}=\frac{84}{105}+\frac{60}{105}+\frac{35}{105}=\frac{84+60+35}{105}=\frac{179}{105}=1\frac{74}{105},$$

luego:

$$\frac{4}{5}+3+5\frac{4}{7}+2\frac{1}{3}=10+1\frac{74}{105}=11\frac{74}{105}.$$

229. *Para sumar fracciones decimales se escriben unas debajo de otras, de modo que se correspondan las comas, y se suman como si fuesen números enteros, y en la suma obtenida se coloca la coma correspondiéndose con las de los sumandos.*

En los números decimales se verifica como en los enteros, que 10 unidades de un orden forman una del orden inmediato superior; luego si suponemos los sumandos descompuestos en sus diferentes órdenes de unidades enteras y decimales, podremos sumar décimas con décimas, centésimas con centésimas, etc , unidades con unidades, decenas con decenas, etc., comenzando por la derecha y escribiendo las unidades de cada suma parcial debajo de las cifras que la han producido, y reservando las decenas para agregarlas a la suma siguiente.

Sea sumar las fracciones decimales 21,45, 1,3484 y 0,786. Escribiremos los sumandos del modo siguiente, correspondiéndose las comas:

$$\begin{array}{r} 21,45 \\ 1.3484 \\ 0,786 \\ \hline 23,5844 \end{array}$$

La suma de las 10 milésimas es 4: la escribiremos, porque no llega a 10; la de las milésimas es 14: escribimos 4 y reservamos, 1, para agregarla a la suma de las centésimas; la suma de las centésimas es 17 y 1, de la suma anterior, 18: escribimos el 8; la suma de las décimas es 14 y 1 de la suma anterior, 15, etc.

Si quisiéramos que todos los sumandos expresasen unidades decimales del mismo orden, completaríamos con ceros a su derecha los que tuvieran menos, pero es inútil esta operación.

230. Si ocurre sumar fracciones ordinarias con decimales. se reducen todas a ordinarias o a decimales para hacer la suma.

II. La substracción de las fracciones

231. *Restar números fraccionarios es disminuir un número dado, que se llama minuendo, en tantas unidades y partes de la unidad como tiene otro número dado que se llama substraendo, o bien, dados la suma de dos sumandos y uno de ellos hallar el otro.*

La operación se indica, como en los enteros, por el signo – y el resultado se llama *resto, exceso* o *diferencia.*

232. *Para restar quebrados del mismo denominador, se restan los numeradores y a la diferencia se le pone el denominador común.*

Sea restar las fracciones, $\frac{6}{7}$ y $\frac{2}{7}$. Según la definición, la operación es disminuir el número 6 *séptimos;* en 2 *séptimos;* luego quedarán 6 — 2 séptimos, y se tendrá:

$$\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{6-2}{7}=\frac{4}{7}.$$

233. *Para restar quebrados de distinto denominador, se reducen a un común denominador y se restan después como en el caso anterior.*

Sean las fracciones, $\frac{6}{7}$ y $\frac{3}{5}$. Reduciéndolas a un común denominador (200), se tendrá:

$$\frac{6}{7}-\frac{3}{5}=\frac{30}{35}-\frac{21}{35}=\frac{9}{35}.$$

234. *Para restar números mixtos, o números en los cuales entren enteros y fracciones, se restan primero las fracciones y después los enteros, reuniendo en un número mixto los resultados.*

Sea restar los números, $4\frac{3}{4}$ y $2\frac{2}{3}$. Tendremos:

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12},$$

de donde,

$$4\frac{3}{4}-2\frac{2}{3}=2\frac{1}{12}.$$

Si la fracción del substraendo es mayor que la del minuendo, se reduce a fracción una unidad del minuendo para que la subtracción pueda verificarse.

$$6\frac{2}{5}-3\frac{4}{5}=5\frac{7}{5}-3\frac{4}{5}=2\frac{3}{5}.$$

235. *Para restar fracciones decimales, se escriben una debajo de otra de modo que se correspondan las comas, se restan como si fuesen números enteros y en el resto se coloca la coma correspondiéndose con la de los datos.*

Sea restar los números 412,65 y 326,49. Tendremos:

Nota= Porque restar es dada la suma de dos numeros y uno de ellos hallar el otro: Ahora bien tenemos que restar unidades de unidades y decimas de decimas etc. ..para hallar las unidades y decimas que estan en la suma y del resto que estan contenidas en la suma ?

$$\begin{array}{r} 412,65 \\ 326,49 \\ \hline 86,16 \end{array}$$

De las cinco centésimas no se puede restar 9 centésimas, añadiremos a la cifra 5 diez unidades de su orden, y diremos, de 9 a 15 van 6; añadiremos una unidad a la cifra 4 de las décimas del substraendo y la restaremos de 6, etc.

Si el minuendo y el substraendo no tienen el mismo número de cifras decimales, se puede completar con ceros el que tenga menos cifras, o suponerle completado, y restar conforme hemos dicho.

Si tenemos que restar una fracción decimal de otra ordinaria o al contrario, se reducen ambas a decimales o a ordinarias para efectuar la operación.

III. La multiplicación de las fracciones

236. Para la multiplicación de números fraccionarios adoptaremos la definición general que ya enunciamos en el número 47, diciendo: *multiplicación es una operación que tiene por objeto, dados dos números, que se llaman multiplicando y multiplicador, hallar un tercer número, que se llama producto, que esté formado con respecto al multiplicando, como el multiplicador esta formado con respecto a la unidad.*

Para la multiplicación se emplea siempre el signo $\times$ y el multiplicando y multiplicador se llaman factores del producto.

237. *Para multiplicar dos fracciones, se multiplican los numeradores y el producto se parte por el de los denominadores.*

Sea multiplicar, $\frac{5}{8}$ por $\frac{4}{7}$. Puesto que el multiplicador es las 4 *séptimas* partes de la unidad, el producto deberá ser las 4 séptimas partes del multiplicando, según la definición; luego si supiéramos formar la séptima parte de $\frac{5}{8}$, no tendríamos más que multiplicarla por 4. Pero la séptima parte de un número se obtiene dividiéndole por 7, y como para dividir un quebrado por un entero, se multiplica su denominador por el entero, dejando el mismo numerador (183) la séptima parte de $\frac{5}{8}$ será $\frac{5}{8 \times 7}$. El producto de este número por 4, se obtiene multiplicando el numerador por 4 y dejando el mismo denominador (183) luego será $\frac{5 \times 4}{8 \times 7}$; entonces tendremos:

$$\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5 \times 4}{8 \times 7}.$$

238. Si el multiplicando o multiplicador fuesen enteros, para aplicar la regla anterior, se supone que el factor entero tiene por denominador la unidad; pero como el producto de un número por la unidad es el mismo número, resultará que *para multiplicar un entero por un quebrado, o un quebrado por un entero, se multiplica el entero por el numerador del quebrado, dejando el mismo denominador.*

Así: $\frac{5}{8} \times 7 = \frac{5 \times 7}{8}$, y, $7 \times \frac{5}{8} = \frac{7 \times 5}{8}$.

239. *Si uno, o los dos factores fuesen mixtos, se reducen a quebrados y se multiplican como éstos.*

EJEMPLOS:

1.º $4\frac{2}{3} \times 5\frac{3}{8} = \frac{14}{3} \times \frac{43}{8} = \frac{14 \times 43}{3 \times 8} = \frac{602}{24} = \frac{301}{12} = 25\frac{1}{12}$.

2.º $2\frac{3}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{13}{5} \times \frac{4}{9} = \frac{52}{45} = 1\frac{7}{45}$.

240 *Para multiplicar una fraccion decimal por un número entero, se prescinde de la coma en el número decimal y se multiplican como dos enteros, separando después en el producto tantas cifras decimales como haya en el multiplicando.*

Sea multiplicar la fracción, 27,354, por 26. El multiplicando se compone de 27354 *milésimas:* luego el producto será 26 veces 27354 milésimas. De donde se deduce que se debe multiplicar los números. 27354 y 26, y separar de la derecha tres decimales, para que el producto exprese milésimas, como el multiplicando; según se manifiesta en la operación adjunta:

$$\begin{array}{r} 27{,}354 \\ 26 \\ \hline 164\ 124 \\ 547\ 08 \\ \hline 711{,}204 \end{array}$$

241. *Para multiplicar dos fracciones decimales, se prescinde de las comas y se multiplican como números enteros, separando después en el producto tantas cifras decimales como tengan entre los dos factores.*

EJEMPLO: Multiplicar las fracciones, 3,114 y 2,31. El multiplicador, 2,31, es igual a la fracción ordinaria, $\frac{231}{100}$, luego el producto se podrá obtener hallando la *centésima* parte del multiplicando, que es 0,03114 (211), y multiplicándola después por 231, según la regla del número anterior; pero el multiplicando tiene ahora tantas cifras decimales como entre los dos factores; luego el producto estará formado conforme a la regla enunciada.

$$
\begin{array}{r}
0,03114 \\
231 \\
\hline
3114 \\
9342 \\
6\,228 \\
\hline
7,19334
\end{array}
$$

242. Si tenemos que multiplicar una fracción ordinaria por una decimal, o al contrario, se reducen ambas a ordinarias, o a decimales, y se efectúa la operación.

Conviene advertir que si alguna de las fracciones es periódica, efectuaremos el cálculo reduciéndola a fracción ordinaria, y si el resultado se ha de expresar en fracción decimal, haremos después la transformación inversa (1).

Producto de varios factores

243. Un producto de tres o más factores fraccionarios significa, que se debe de multiplicar el primero por el segundo, el producto que resulte por el tercero; y así sucesivamente hasta el último.

Así:

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{7}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{2\times 4}{3\times 5}\times\frac{7}{8}\times\frac{3}{7}=$$

$$=\frac{2\times 4\times 7}{3\times 5\times 8}\times\frac{3}{7}=\frac{2\times 4\times 7\times 3}{3\times 5\times 8\times 7}.$$

El numerador del producto es el producto de todos los numeradores, y el denominador, el producto de los denominadores.

Si alguno de los factores es mixto o decimal, se reduce a quebrado, y si es entero, se le supone por denominador la unidad.

244. Como el numerador y el denominador del producto de

(1) La multiplicación de fracciones periódicas se puede hacer bajo la forma decimal, sabiendo qué aproximación ha de tener el resultado; pero no creemos propio de un libro de segunda enseñanza, ni la teoría de errores y aproximaciones, ni las operaciones abreviadas.

varias fracciones son productos de números enteros, no varía su valor aunque se altere el orden de los factores, de donde resulta que:

245. *Un producto de varios factores fraccionarios no se altera aunque se cambie el orden de los factores.*

Todas las consecuencias que de este teorema dedujimos en la teoría de los enteros (62 a 67), son aplicables a los fraccionarios.

IV. Las potencias de las fracciones

246. *Se llama potencia de un fraccionario, el producto de varios factores iguales a dicho número fraccionario.*

Todas las definiciones de *grado, exponente,* etcétera, dadas en el número 70 en la teoría de números enteros, son aplicables a los fraccionarios.

247. *Para elevar una fracción a una potencia se elevan sus dos términos a dicha potencia.*

Sea, elevar al cubo la fracción, $\frac{3}{5}$. Tendremos por definición;

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5} = \frac{3^3}{5^3}$$

pero el segundo miembro, según la regla del número 243, es, $\frac{3 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 5} = \frac{3^3}{3^3}$; luego tendremos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3}.$$

248. *Para elevar un número mixto a una potencia, se reduce antes a quebrado y se efectúa la operación como en el caso anterior.*

Ejemplo: $\left(2\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{7}{3}\right)^4 = \frac{7^4}{3^4}.$

249. *Para elevar una fracción decimal a una potencia, se eleva como si fuera un número entero, prescindiendo de la coma, y se separan del resultado tantas cifras decimales como indique el producto del exponente por el número de cifras decimales de la fracción.*

Esta regla es una consecuencia de la multiplicación de fracciones decimales (241)

Ejemplo: Elevar al cubo, 2,71. Se forma el cubo de 271, que es 19902511, y separemos 6 cifras decimales del resultado, porque la fracción tiene 2 decimales y el exponente, 3, y el producto $2 \times 3 = 6$.

Luego, $2{,}71^3 = 19{,}902511$.

250. *Las potencias de una fracción irreducible son fracciones irreducibles.*

Si la fracción, $\frac{3}{5}$, es irreducible, los números 3 y 5, son primos entre sí. Una potencia cualquiera de $\frac{3}{5}$, la cuarta, por ejemplo, será: $\frac{3^4}{5^4}$, y como las potencias de los números primos entre sí, son también números primos entre sí (164), la fracción, $\frac{3^4}{5^4}$, será irreducible (193).

251. Los teoremas sobre producto de potencias, potencia de potencia y potencia de un producto que demostramos en los números 74 a 76, son aplicables a los fraccionarios, y no los demostramos aquí porque la demostración se hace como en la teoría de los números enteros.

$\frac{3}{5}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4}$

V. La división de las fracciones

252. Sabemos (78 y 189) *que la división en general es una operación que tiene por objeto, dados un producto y uno de los factores, hallar el otro.*

Los datos y el resultado reciben, como en los enteros, los nombres de *dividendo*, *divisor* y *cociente*, y el signo de operación es todavía : colocados entre el dividendo y el divisor.

253. De la definición de la división se deduce que es una operación inversa de la multiplicación; por tanto, si consideramos el divisor como un multiplicador, el cociente será el multiplicando, y entonces *el dividendo debe ser, respecto del cociente, lo que el divisor respecto de la unidad* (236).

Así, dividir el número, $\frac{5}{8}$ por $\frac{4}{7}$, es formar un número tal, que, $\frac{5}{8}$, sea sus cuatro séptimas partes.

254. *Para dividir dos fracciones, se multiplica el dividendo por la fracción divisor invertida.*

Sea, dividir, $\frac{5}{8}$ por $\frac{4}{7}$. Tendremos que formar un número cuyas, $\frac{4}{7}$, sea $\frac{5}{8}$. Ahora bien: $\frac{5}{8}$, es la séptima parte de $\frac{5 \times 7}{8}$, (183): luego este número será cuatro veces mayor que el cociente que buscamos; entonces para obtenerle bastará dividir por 4 la fracción, $\frac{5 \times 7}{8}$, lo cual se consigue multiplicando su denominador, por 4 (183).

El cociente será, pues, $\frac{5 \times 7}{7 \times 4}$, y tendremos:

$$\frac{5}{8} : \frac{4}{7} = \frac{5 \times 7}{8 \times 4}$$

conforme a la regla enunciada.

El producto del cociente por el divisor contiene en sus dos términos, como factores, el numerador y denominador del divisor; por consiguiente, suprimiéndolos, resultará el dividendo:

$$\frac{5 \times 7}{8 \times 4} \times \frac{4}{7} = \frac{5 \times 7 \times 4}{8 \times 4 \times 7} = \frac{5}{8}.$$

255. Si el dividendo es un número entero se le supone por denominador la unidad, y como el producto de la unidad por cualquier número es el mismo número, la regla anterior se puede enunciar así: *Para dividir un entero por una fracción, se multiplica el entero por el denominador de la fracción y el producto se parte por el numerador*.

EJEMPLO: $$8 : \frac{5}{11} = \frac{8 \times 11}{5} = \frac{88}{5} = 17\frac{3}{5}.$$

Si el divisor es entero, se le supone por denominador la unidad y se obtiene la regla conocida (183): *para dividir una fracción por un entero, se multiplica el denominador por el entero dejando el mismo numerador.*

256. *Cuando los términos del dividendo son divisibles por los del divisor, se puede efectuar la división de dos fracciones dividiendo los términos del dividendo por los del divisor.*

Si tenemos que dividir, $\frac{12}{25}$ por $\frac{4}{5}$, siendo $12 = 3 \times 4$ y $25 = 5 \times 5$, tendremos (254):

$$\frac{12}{25} : \frac{4}{5} = \frac{12 \times 5}{25 \times 4} = \frac{3 \times 4 \times 5}{5 \times 5 \times 4},$$

y suprimiendo en el numerador y denominador los factores, 4 y 5,

$$\frac{12}{25} : \frac{4}{5} = \frac{3}{5} = \frac{12 : 4}{25 : 5}.$$

257. *Si uno o los dos términos de la división son números mixtos, se reducen a quebrados y se dividen como éstos.*

Ejemplos:

1.° $4\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{14}{3} : \frac{3}{5} = \frac{14 \times 5}{3 \times 3} = \frac{70}{9} = 7\frac{7}{9}.$

2.° $2\frac{1}{8} : 5\frac{3}{7} = \frac{17}{8} : \frac{38}{7} = \frac{17 \times 7}{38 \times 8} = \frac{119}{304}.$

258. *Para dividir una fracción decimal por un número entero, se prescinde de la coma en el dividendo y se dividen como dos enteros, separando después en el cociente tantas cifras decimales como tiene el dividendo.*

Sea dividir el número decimal, 27,854 por 15. El problema es tomar la *quinceava* parte de 27854 *milésimas*. Entonces podremos dividir 27854 por 15 y separar tres cifras decimales en el cociente para que exprese milésimas. Se hará, pues, la operación del modo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 27{,}854 & 15 \\ \cline{2-2} 128 & \\ 85 & 1{,}856 \\ 104 & \\ 14 & \end{array}$$

El cociente pedido es 1,856 por *defecto,* con menos error de *una milésima.* El cociente completo se obtendría añadiendo al cociente anterior $\frac{14}{15}$ de milesima.

Se puede expresar el cociente con mayor aproximación añadiendo ceros a la derecha del dividendo o a la derecha del último resto, según la regla anterior, y de los restos sucesivos hasta obtener el número de cifras que se desea en cociente.

Ejemplo: Hallar con menos de una *milésima* de error el cociente de, 21,2, por 7;

$$\begin{array}{r|l} 21{,}2 & 7 \\ \cline{2-2} 20 & \\ 60 & 3{,}028 \\ 4 & \end{array}$$

El cociente se puede obtener por exceso añadiendo una unidad del último orden decimal al cociente por defecto. Así, en el primer ejemplo, el cociente por exceso es 1,857 y en el segundo 3,028.

Cuando el último resto es mayor que la mitad del divisor, la parte despreciada en el cociente por defecto vale más de *media unidad* del último orden decimal que se aprecia; por consiguiente, es más aproximado el cociente por exceso. De suerte que si queremos tener el cociente con menos error de media unidad decimal del último orden que se aprecia, tomaremos el cociente *por defecto cuando el resto sea menor que la mitad del divisor, y por exceso cuando sea mayor que dicha mitad.*

259. *Para dividir un entero o un decimal por otro decimal, se suprime la coma en el divisor y se multiplica el dividendo por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor, y quedará reducida la división a la de dos enteros, o de un decimal por un entero.*

Sea dividir, 41,217, por 13,4. El divisor es igual a la fracción ordinaria, $\frac{134}{10}$; luego se obtendrá el cociente multiplicando el dividendo por $\frac{10}{134}$ que es el divisor invertido (254).

Entonces, tendremos que multiplicar el dividendo 41,217 por 10 y dividirle por 134:

$$\begin{array}{r|l} 412{,}17 & 134 \\ \cline{2-2} 10{,}17 & \\ 79 & 3{,}07 \end{array}$$

El dividendo será, pues, 412,17, y la operación se efectuará como se indica, y el cociente será: 3,07.

Si se desea el cociente con mayor aproximación, se añade al dividendo suficiente número de ceros para obtenerla.

La observación hecha sobre los cocientes por defecto y por exceso en el caso anterior es aplicable a éste.

260. Si tenemos que dividir una fracción ordinaria por una decimal, o al contrario, se reducen ambas a ordinarias o a decimales.

Si el divisor es una fracción decimal periódica, conviene reducirla a ordinaria.

LIBRO III

Raíces de los números enteros, fraccionarios e inconmensurables

CAPÍTULO I

LAS RAÍCES EN GENERAL

I. Definiciones

261 *Cantidad o número variable es una cantidad o número que puede tomar diferentes valores.*

La cantidad puede ser una *variable continua;* para esto se necesita que no pueda pasar de un valor a otro sin pasar por todos los *valores intermedios.*

Si un punto se mueve en línea recta, su distancia al punto de partida es una cantidad que no puede pasar de un valor a otro sin pasar pór todos los intermedios: luego es una variable contínua. En cualquiera posición del punto móvil se puede medir su distancia al punto de partida por medio de una unidad lineal; pero es imposible medir las distancias de todas las posiciones del punto móvil al de partida, porque son infinitas; luego *el número variable que representa la distancia del punto móvil al de partida, no es continuo, sino discreto.*

Se puede decir, sin embargo, que cuando se mide una serie de valores, de una cantidad variable contínua, y cada dos valores se diferencian tan poco como se quiera, el número variable, que expresa dichos valores, tiende hacia la continuidad, sin lograr alcanzarla.

Como ejemplos de números variables discontínuos podemos citar las fracciones decimales periódicas.

Así, la fracción, 0,5555... es un número variable que pasa por los valores, 0,5; 0,55; 0,555, etc., que difieren del verdadero valor de la fracción periódica: el primero en menos de, 0,1; el segundo en menos de, 0,01; el tercero en menos de, 0,001, etc. En general, si se aprecian, n, cifras decimales, se comete un error menor que una unidad decimal del orden, *nésimo.*

262 *Límite de una cantidad o número variable es otra cantidad o número constante, a cuyo valor puede acercarse la variable indefinidamente. pero sin igualarle nunca.*

La fracción ordinaria generatriz de una fracción decimal periódica es límite de la fracción periódica, porque, bajo la forma decimal, por grande que sea el número de cifras decimales que consideremos, no consiguiremos nunca expresarla exactamente.

Así, la fracción periódica, 0,5555 .. tiene por límite, $\frac{5}{9}$, que es su fracción generatriz (231).

El límite de una variable continua puede ser superior o inferior a la variable.

El límite es *superior* a la variable, cuando todos sus valores son menores que el límite; para esto se necesita que la variable sea *creciente*. El límite es inferior, cuando todos los valores de la variable son mayor que el límite: para esto es necesario que la variable sea *decreciente.*

Cuando la variable es discontinua, puede tomar en muchos casos valores superiores e inferiores a su límite.

Ejemplo: La fracción, 0,5555... que tiene por límite, $\frac{5}{9}$, puede tomar los valores, 0.5; 0.55, 0,555, etc , inferiores al límite, y, 0,6; 0,56; 0,556, etc., superiores a su límite

Cuando una cantidad o número variable *disminuye indefinidamente,* pudiendo tomar valores menores que cualquiera cantidad o número dados, *por pequeños que sean, el límite de la variable es cero.*

La unidad fraccionaria, $\frac{1}{n}$, tiene por límite cero, cuando, n, crece indefinidamente.

La diferencia entre una variable y su límite tiene por límite cero; porque el valor de la variable puede acercarse indefinidamente al de su límite, según se deduce de la definición de límite dada arriba.

363. Hemos dicho (8) que cuando una cantidad no contiene exactamente a la unidad, ni a ninguna parte alícuota suya, el resultado de la comparación de la cantidad con la unidad se llama *número inconmensurable;* por consiguiente, los números inconmensurables no se pueden expresar exactamente ni por la uni-

dad entera ni por ninguna unidad fraccionaria, por lo cúal trataremos de hallar su expresión aproximada, para utilizarla en el cálculo.

La diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado de un número conmensurable o inconmensurable, se llama *error absoluto* del número. El error puede ser por defecto o por exceso, según que el valor aproximado sea menor o mayor que el valor exacto.

264. *Todo número inconmensurable se puede expresar por un número entero con un error, por defecto, o por exceso menor que la unidad.*

Sea el número inconmensurable, A: por grande que sea su valor, como la serie de los números,

$$0, 1, 2, 3, 4...$$

es ilimitada, se llegará a un número mayor que, A. Supongamos que, $m+1$, es el primer número mayor que, A: entonces el número, m, anterior a, $m+1$, será menor que, A, y tendremos:

$$m < A < m+1$$

Por estar, A, comprendido entre dos números que se diferencian en una unidad, difiere de cualquiera de ellos en menos de una unidad, siendo, m, su expresión aproximada por defecto, y, $m+1$, por exceso.

265. *Todo número inconmensurable se puede expresar por un número fraccionario con un error, por defecto o por exceso, menor que la unidad fraccionaria marcada por el denominador del quebrado.*

Sea el número inconmensurable, A, y sea, n, el denominador de la unidad fraccionaria de aproximación; si formamos la serie,

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}...,$$

cuyo denominador es constante y cuyos numeradores pueden crecer indefinidamente, se verificará que, a partir de cierto término, los números de esta serie serán mayores que, A: supongamos, pues, que, $\frac{m+1}{n}$, es el primer número mayor que, A, el término anterior, será, $\frac{m}{n}$, y tendremos:

$$\frac{m}{n} < A < \frac{m+1}{n}$$

La diferencia entre, $\frac{m+1}{n}$, y, $\frac{m}{n}$, es, $\frac{1}{n}$, y como, A, está comprendido entre ambos números, difiere de cualquiera de ellos en menos de, $\frac{1}{n}$. Luego, $\frac{m}{n}$, es una expresión aproximada de A, con menor error de, $\frac{1}{n}$, por defecto, y, $\frac{m+1}{n}$, otra expresión con menos error de, $\frac{1}{n}$ por exceso.

II. Teoremas fundamentales para la extracción de raíces

1° 266. *Se llama raiz del grado* n *de un número, otro número que, elevado a la potencia de grado* n, *reproduce el número dado.*

La operación que se efectúa para hallar las raíces de un número dado se llama 2 *extracción de raices.*

3 Por definición, el grado de una raiz es el mismo que el de la potencia a que se debe elevar para reproducir el número dado, y recibe el nombre de *índice.*

4 Las raices se clasifican por grados: en *raiz de segundo grado o raiz cuadrada, raiz de tercer grado o raiz cúbica, raiz de cuarto grado,* etc.

Por la definición de raiz se comprende que todo número es su raiz de *primer grado.*

5 La extracción de raices se indica por medio del signo, $\sqrt{\ }$, que se llama *radical,* escribiendo el número del cual se ha de extraer la raiz debajo de él, y en el ángulo que queda a la izquierda el índice. Así, la raiz del grado, n, del número, A, se escribirá, $\sqrt[n]{A}$, y se lee, raiz *n-ésima* de A, o *raiz del grado* n *de* A.

Cuando el índice es 2, o sea cuando se trata de una raiz cuadrada, se suprime.

Así, $\sqrt{A}$, es la raiz cuadrada de A.

267. -*Las raíces de cualquier grado de la unidad son la unidad.*

Se deduce de la definición de raiz, puesto que las potencias de cualquier grado de la unidad son la unidad.

268 Si un número entero se eleva a la potencia del grado *n*, el resultado es otro número entero que se dice *potencia perfecta*, del grado *n*. En este caso el número tiene *raiz del grado* n *exacta*. Por ejemplo, siendo, $3^4 = 81$, el número, 81, tiene por raiz de cuarto grado exacta el número, 3.

Pero se comprende fácilmente que no todos los números enteros tendrán raiz del grado *n* exacta, y llamaremos *raiz entera del grado* n *de un número entero, la raiz del grado* n *de la mayor potencia entera del grado* n, *contenida en dicho número.*

Asi, siendo, $3^4 = 81$, y, $4^4 = 256$, la raiz de cuarto grado *entera* de 145, será, 3, porque la mayor potencia de cuarto grado contenida en 145, es 81, y su raiz es, 3.

269. *La raiz de grado* n, *de un número entero es inconmensurable si su raiz entera no es exacta.*

En efecto; sea, $\sqrt[n]{A}$. Puesto que no es igual a ningún número entero, tendrá que ser, o fraccionaria o inconmensurable; pero si fuese fraccionaria, podríamos convertirla en un quebrado irreducible (192), y representándole por, $\frac{a}{b}$ tendríamos:

$$\sqrt[n]{A} = \frac{a}{b},$$

y como por definición, $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A$, y además, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, (247), se debiera tener:

$$A = \frac{a^n}{b^n},$$

pero las potencias de un quebrado irreducible son quebrados irreducibles (250); luego la igualdad anterior es absurda, porque un número entero no puede ser igual a un quebrado irreducible.

Entonces, puesto que, $\sqrt[n]{A}$, no puede ser fraccionaria será inconmensurable.

270. *Un quebrado irreducible tiene raiz del grado* n *exacta, cuando su numerador y denominador la tiene.*

Sea, $\sqrt[n]{\frac{A}{B}}$, siendo, $\frac{A}{B}$, un quebrado irreducible. La raiz no puede ser un número entero, porque las potencias de los números enteros son enteras, y por consiguiente no pueden ser iguales a ningún quebrado irreducible.

Ahora bien; si hacemos,

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{a}{b},$$

siendo, $\frac{a}{b}$, un quebrado irreducible y elevamos los dos miembros de la igualdad anterior a la potencia de grado n, tendremos (247):

$$\frac{A}{B} = \frac{a^n}{b^n},$$

y como las dos fracciones son irreducibles, se deberá tener, $A = a^n$, y, $B = b^n$, (195), de donde se deduce,

$$\sqrt[n]{A} = a, \sqrt[n]{B} = b$$

271. *Si los dos términos de un quebrado irreducible no son potencias perfectas del grado* n, *la raiz del grado* n *del quebrado es inconmensurable.*

Porque si la raiz fuese conmensurable, sería una fracción cuyo numerador y denominador serían las raices del numerador y denominador de la fracción dada (270) y por consiguiente sus términos tendrían que ser potencias perfectas del grado n, lo que es contra la hipótesis

272. *La raiz del grado* n *de un número inconmensurable es inconmensurable.*

Porque si la raiz fuese conmensurable (entera o fraccionaria), su potencia del grado n seria conmensurable, lo que es contra la hipótesis.

273. *Si de los dos miembros de una igualdad se extrae la raiz de grado,* n, *el resultado es una igualdad.*

Si se tiene, $A = B$, decimos que, $\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{B}$. Porque siendo, $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A$, y, $A = B$. también se verifica, $\left(\sqrt[n]{A}\right)^n = B$, cuya igualdad prueba que, $\sqrt[n]{A}$, es igual a. $\sqrt[n]{B}$.

274. *Si de los dos miembros de una desigualdad se extrae la raiz del grado* n, *el resultado es una desigualdad del mismo signo que la propuesta.*

Si tenemos, $A > B$, decimos que, $\sqrt[n]{A} > \sqrt[n]{B}$. Porque siendo, $A = \left(\sqrt[n]{A}\right)^n$, un producto de n factores iguales y, $\left(\sqrt[n]{B}\right)^n$, otro producto de n factores también iguales, para que el primer producto sea mayor que el segundo, se necesita que el factor, $\sqrt[n]{A}$, sea mayor que el factor, $\sqrt[n]{B}$.

275. *La raiz del grado* n *de un producto, es igual al producto de las raices del grado* n *de los factores.*

Decimos que, $\sqrt[n]{A \,.\, B \,.\, C} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C}$.

Si elevamos a la potencia del grado n el segundo miembro, tendremos:

$$\left(\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B} \cdot \sqrt[n]{C}\right)^n =$$

$$= \left(\sqrt[n]{A}\right)^n \left(\sqrt[n]{B}\right)^n \left(\sqrt[n]{C}\right)^n = A \,.\, B \,.\, C,$$

y extrayendo la raiz del grado n del primero y tercer miembro, resulta:

$$\sqrt[n]{A}\,.\sqrt[n]{B}\,.\sqrt[n]{C}=\sqrt[n]{A\,.\,B\,.\,C\,.}$$

276. *La raiz del grado* n *de un quebrado es igual a la raiz del grado* n *del numerador, partida por la raiz del grado* n *del denominador.*

Sea el quebrado, $\frac{A}{B} = C$, de donde, $A = B\,.\,C$. Extrayendo la raiz del grado n tendremos (274): $\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{B}\,.\sqrt[n]{C}$, *de donde*, $\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{C}$ y poniendo en vez de C, su igual, $\frac{A}{B}$ resultará:

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}.$$

CAPÍTULO II

LA RAIZ CUADRADA

I. Raiz cuadrada de un número con menor error de una unidad

4:

277. En la definición general de raiz de un grado cualquiera, hemos dicho *que raiz cuadrada de un número es otro número cuyo cuadrado es el propuesto*. Así, 8, es la raiz cuadrada, de 64. *Raiz cuadrada entera es la raiz cuadrada del mayor cuadrado entero contenido en un número*. Así, la raiz cuadrada entera de 70, es 8, porque el mayor cuadrado entero contenido, en, 70, es 64. *La diferencia entre un número y el cuadrado de su raiz*

cuadrada entera se llama resto de la raiz cuadrada. El resto de la raiz cuadrada de, 70, es, 6, porque la diferencia entre 70, y 64, que es, el cuadrado de la raiz cuadrada entera, es, 6.

278. *La raiz cuadrada entera de un número cualquiera* (entero, fraccionario e inconmensurable) *es la raiz cuadrada entera de su parte entera.*

Sea un número cualquiera, A, comprendido entre dos números enteros, N y $N + 1$, es decir, tal, que se tenga, $N < A < N + 1$ y sea, a, la raiz cuadrada entera de, N, tendremos:

$$a^2 \leqq N, \qquad \text{y} \qquad (a+1)^2 \geqq N+1,$$

de donde se deduce,

$$a^2 < A \qquad \text{y} \qquad (a+1)^2 > A,$$

luego la raiz entera de, A, es a, conforme queríamos demostrar.

En virtud de este teorema, *para extraer la raiz cuadrada entera de un número cualquiera con menor error de una unidad, bastará extraer la raiz cuadrada entera de su parte entera.* Por consiguiente, sólo nos ocuparemos ahora en las raices cuadradas de los números enteros.

Antes de comenzar la extracción de la raiz cuadrada entera de un número entero, demostraremos algunos teoremas necesarios para efectuar esta operación.

279. *El cuadrado de la suma de dos números es igual al cuadrado del primero, más el duplo del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

Sean los números a y b, tendremos, por definición:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

pero aplicando al segundo miembro la regla de la multiplicación de dos sumas indicadas (60)), se tendrá:

$$(a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b,$$

y efectuando en el segundo miembro, según la regla (57), de multiplicar una suma por un número.

$$(a+b)a + (a+b)b = a \,.\, a + a \,.\, b + a \,.\, b + b \,.\, b =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2,$$

y por consiguiente,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLO: $(4+8)^2 = 4^2 + 2 \,.\, 4 \times 8 + 8^2$

280 Si los sumandos expresan, uno decenas y otro unidades, se tendrá: *El cuadrado de la suma de decenas y unidades es igual, al cuadrado de las decenas, más el duplo de las decenas por las unidades, más el cuadrado de las unidades.*

Sea el número, 347, que es igual a $340 + 7$, tendremos:

$$(340 + 7)^2 = 340^2 + 2 . 340 \times 7 + 7^2 =$$
$$= 115600 + 4760 + 49$$

Si en general representamos el número descompuesto en decenas y unidades por $d . 10 + u$, se tendrá:

$$(d . 10 + u)^2 = (d . 10)^2 + 2d . 10 . u + u^2,$$

y teniendo presente que $(d . 10)^2 = d^2 . 100$ (76),

$$(d . 10 + u)^2 = d^2 . 100 + 2d . 10 . u + u^2.$$

El cuadrado de decenas es un número que contiene siempre el factor, 100, y el duplo de decenas por unidades el factor, 10; luego el primero es siempre un *número exacto de centenas* y el segundo, un *número exacto de decenas.*

281. *La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es igual, al duplo del menor, más uno.*

Sean, a y $a + 1$, los dos números consecutivos, tendremos (279):

$$(a + 1)^2 = a^2 + 2a . 1 + 1^2 = a^2 + 2a + 1,$$

y restando, a^2, del primero y tercer miembro,

$$(a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1,$$

cuya igualdad demuestra el teorema.

282. *El resto de la raiz cuadráda entera de un número es menor que el doble de la raiz, más la unidad.*

Sea el número, N; a, su raiz cuadrada entera, y, R, el resto, tendremos:

$$N = a^2 + R,$$

pero siendo a^2, el mayor cuadrado entero contenido en, N, se tendrá: $N < (a + 1)^2$ y como, según lo dicho (281), $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$, se verificará también,

$$a^2 + R < a^2 + 2a + 1,$$

y restando, a^2, de los dos miembros resultará:

$$R < 2a + 1.$$

Conviene advertir que la raiz entera *a,* es la raiz *por defecto, con un error menor* que la unidad y, $a+1$, es la raiz *por exceso, con un error menor también que la unidad,* porque entre ambas raices está comprendida la raiz inconmensurable del número.

283. *Los cuadrados de la unidad seguida de ceros son la unidad seguida de doble número de ceros* (50, 1.°)

Asi: $10^2 = 100$; $100^2 = 10000$; $1000^2 = 1000000$...

De esto se deduce, que la raiz cuadrada entera de un número *menor* que 100, será *menor* que 10, y, por consiguiente, tendrá *una cifra;* la de un número *mayor* que 100 y *menor* que 10000, será *mayor* que 10 y *menor* que 100; luego tendrá dos cifras, etc.

En la extraccion de la raiz cuadrada entera consideraremos dos casos; 1.°, *que el número sea menor que* 100; 2.°, *que sea mayor que* 100.

284. Primer caso. *Extraer la raiz cuadrada entera de un número menor que* 100.

Escribamos la tabla de los cuadrados de los diez primeros números:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10,
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100,

Si se trata de hallar la raiz cuadrada de un número contenido en la segunda fila, el resultado será su correspondiente en la primera. Así, $\sqrt{64} = 8$. Si se trata de otro número cualquiera, 73, por ejemplo, la raiz entera será, 8, porque, 64, es el mayor cuadrado contenido en, 73, y el resto será, 9, por ser la diferencia entre, 64 y 73.

La raiz entera de que hablamos tiene un *error por defecto* menor que una unidad: añadiéndola una unidad, se tendrá la raiz con *un error por exceso* menor que una unidad.

Así: de la limitación, $64 < 73 < 81$, deducimos, extrayendo la raiz cuadrada.

$$8 < \sqrt{73} < 9.$$

285. Segundo caso. *Extraer la raiz cuadrada entera de un número mayor que* 100.

Consideremos en primer lugar un número mayor que 100 y menor que 10000, y tendrá por raiz cuadrada un número mayor que 10 y menor que 100, porque el cuadrado de 10 es 100, y el de 100 es 10000.

Sea, pues, el número 3216 Por tener dos cifras su raiz cuadrada, se compondrá de decenas y unidades; luego si, 3216, es cuadrado perfecto, contiene las tres partes que forman el cuadrado de su raiz, que son (280): el cuadrado de las decenas, el duplo de las decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades, y si 3216, no es cuadrado perfecto, contendrá además un resto, que será la diferencia entre dicho número y el cuadrado de su raiz entera.

Para hallar la cifra de las decenas de la raiz, debemos recordar que el cuadrado de las decenas es un número exacto de centenas (280); luego debe estar contenido en las centenas de 3216, o sea en, 3200: la raiz entera de 32, es 5 (283); entonces el cuadrado de 5, que es 25, se puede restar de 32, y, por consiguiente, el cuadrado de 50, que es 2500, se podrá restar de 3200, y, con más motivo, del número propuesto, 3216; luego la raiz pedida es mayor que 50. Por otra parte, siendo 5 la raiz entera de 32, este número será menor que el cuadrado de 6; luego 3200, será menor que el cuadrado de 60, y la diferencia será, *cuando menos,* una centena; entonces también, 3216, será menor que el cuadrado de 60, y por consiguiente, la raiz cuadrada que buscamos estará comprendida entre, 50 y 60; luego su cifra de decenas será, 5.

Lo dicho se resume en las limitaciones:

$$5 < \sqrt{32} < 6,$$

de donde, $$50 < \sqrt{3200} < 60,$$

y también, $$50 < \sqrt{3216} < 60.$$

De aquí se deduce: *que para hallar la cifra de las decenas de la raiz basta extraer la raiz cuadrada entera de las centenas del número.*

Restando de 3216, el cuadrado de las decenas de la raiz, que es, 2500, la diferencia, que es, 716, contendrá: *el duplo de las decenas de la raiz por las unidades, el cuadrado de las unidades*, y si el número dado no es cuadrado perfecto, *el resto de la raiz.* Como el duplo de las decenas por las unidades de la raiz es un número exacto de decenas (280), tiene que estar contenido en las 71 decenas de 716. Ahora, dividiendo 71 decenas, por 10 decenas, que es el duplo de las decenas de la raiz, *el cociente será la cifra de las unidades, o un* *número mayor;* porque en las 71 decenas de 716 puede haber decenas que hayan resultado del cuadrado de las unidades de la raiz y del resto, si le hay. El cociente de 71 entre 10, es, 7; pero como puede ser mayor que la cifra de las unidades, es preciso comprobarle: para esto se le une a la cifra de las decenas y se forma el número, 57; si el cuadrado de este número se puede restar de 3216, la cifra, 7, es buena, y si no será grande y se repetirá la comprobación, rebajándola una unidad. El cuadrado de 57 es, 3249, que no se puede restar de 3216: entonces la cifra 7, es grande; sustituyamos la cifra, 7, por la, 6, y veremos que, el cuadrado de 56, es, 3136, y como este número es menor que, 3216, la cifra, 6, es buena; efectuando la substracción, según está indicada a continuación, el resto será, 80.

$$\begin{array}{r|l} 32'16 & 56 \\ 50^2 .. \ 25 & \overline{} \\ \hline 7'16 & 10 \\ 56^2 .. \ 31'36 & \\ \hline 80 & \end{array}$$

El método de comprobación de la cifra de las unidades se puede simplificar, porque después de restar del número propuesto el cuadrado de las decenas de su raiz, sólo nos falta restar de la diferencia obtenida el duplo de las decenas por las unidades y el cuadrado de las unidades de la raiz, es decir, $2 \, . \, 50 \times 6 + 6^2$. Pero estos dos números se pueden restar de una vez, porque se tiene:

$$2 \, . \, 50 \times 6 + 6^2 = (2 \, . \, 50 + 6) \, 6 = (100 + 6) \, 6 = 106 \times 6.$$

Luego la cifra de las unidades se comprueba *sumándola con el duplo de las decenas de la raiz y multiplicando por ella, o sea escribiéndola a la derecha del divisor,* 10, *y multiplicando el resultado,* 106, *por dicha cifra.*

$$\begin{array}{r|l} 32'16 & 65 \\ 25 & \overline{} \\ \hline 71'6 & 106 \\ 63'6 & 6 \\ \hline 80 & \end{array}$$

Si el producto obtenido es grande, se repite la comprobación rebajando, de una en una unidad, el cociente, o sea la cifra de las unidades de la raiz.

De lo expuesto se deduce, *que para hallar la cifra de las unidades de la raiz* (cuando ya se ha hallado la cifra de las decenas y se ha restado su cuadrado del número dado) *se separa la cifra de la derecha del resto, y lo que queda a la izquierda se divide por el duplo de la cifra de las decenas de la raiz; el cociente será la cifra de las unidades o un número mayor:* para comprobarle se escribe a la derecha del divisor, y el número que se forma se multiplica por el cociente y el producto se resta del dividendo y la cifra separada; si la substracción no es posible, la cifra comprobada es grande y habrá que rebajarla, una o más unidades, hasta que el producto, formado según hemos dicho, se pueda restar del dividendo y la cifra separada (1).

286. Sea en general, N, un número cualquiera, cuya raiz cuadrada contenga decenas y unidades; si designamos por *d*, las decenas de la raiz, se tendrá:

$$\sqrt{N} \geqq d \,.\, 10, \qquad \text{y} \qquad \sqrt{N} < (d+1)\, 10;$$

elevando al cuadrado ambas desigualdades,

$$N \geqq d^2 \,.\, 100, \qquad \text{y} \qquad N < (d+1)^2\, 100,$$

y como 100, vale una centena, resultará, que el número de centenas contenidas en N, es igual o mayor que d^2, y menor que $(d+1)^2$, representando por C, dichas centenas, se tendrá:

$$C \geqq d^2, \qquad \text{y} \qquad C < (d+1)^2,$$

y extrayendo la raiz cuadrada,

$$\sqrt{C} \geqq d, \qquad \text{y} \qquad \sqrt{C} < d+1.$$

(1) Teniendo presente lo que hemos dicho en la división sobre el tanteo de la cifra del cociente (85), no necesitamos escribir la cifra de las unidades de la raiz hasta tener seguridad de que es buena; para esto, basta suponer que el dividendo es la diferencia que resulta después de restar el cuadrado de las decenas de la raiz, el divisor el duplo de las decenas sumado con la cifra de las unidades que se va a comprobar, y el cociente dicha cifra de unidades. Así, en el ejemplo del texto, para comprobar la cifra, 7, el dividendo será, 716: el divisor, 107 y el cociente, 7, y podremos hacer mentalmente la comprobación diciendo: 71 entre 10, a 7, y sobra 1, que con el 6, son 16, pero 7 por 7 son 49; luego la cifra 7, es grande. La comprobación de 6, se hace, siendo el dividendo el mismo, 716, el divisor, 106, y el cociente, 6.

De lo cual se infiere que: *las decenas de la raiz cuadrada de un número cualquiera, se obtienen extrayendo la raiz cuadrada de las centenas de dicho número.*

Designando ahora por u, las unidades de la raiz de N, y por R, el resto si le hay, se tiene:

$$N = (d \,.\, 10 + u)^2 + R = d^2 \,.\, 100 + 2d \,.\, 10 \; u + u^2 + R;$$

restando, $d^2 \,.\, 100$,

$$N - d^2 \,.\, 100 = 2d \,.\, 10 \; u + u^2 + R.$$

El número, $2d \,.\, 10 \,.\, u$, vale, $2 \,.\, d \,.\, u$, decenas, luego sumado con $u^2 + R$, puede contener más de $2du$ decenas; llamemos, pues, D, al número de decenas contenidas en el resto, $2d \,.\, 10 \; u + u^2 + R$, y se verificará:

$$D \overset{=}{>} 2du, \qquad \text{y por tanto,} \qquad \frac{D}{2d} \overset{=}{>} u,$$

de donde se deduce que: *si se extrae la raiz cuadrada de las centenas de un número y el cuadrado de la raiz obtenida se resta de dicho número y se dividen las decenas del resto por el doble de la raiz hallada, el cociente entero es la cifra de las unidades de la raiz del número o mayor que dicha cifra.*

Se comprueba el cociente elevando al cuadrado, $d \,.\, 10 + u$: si el resultado se puede restar de N, la cifra, u, es buena; si no, se le rebaja de unidad en unidad, hasta que se pueda hacer la substracción.

En vez de formar el cuadrado de $d \,.\, 10 + u$, para restarlo de N, se puede restar, $2d \,.\, 10 \,.\, u + u^2$, del resíduo obtenido cuando se restó el cuadrado de las decenas, y por ser,

$$2d \,.\, 10 \,.\, u + u^2 = (2d \,.\, 10 + u)u,$$

bastará, para formar esta expresión, escribir el cociente, u, a la derecha del divisor, $2d$, y multiplicar el resultado por u, conforme dijimos en el ejemplo analítico del número anterior (1).

287. Sea ya extraer la raiz cuadrada de un número cualquiera mayor que 10000; por ejemplo, 41624378.

---

(1) El profesor puede elegir, según la capacidad de sus alumnos, este ejemplo literal o uno numérico, para demostrar la regla de la raiz cuadrada.

Si suponemos la raiz cuadrada descompuesta en decenas y unidades, las decenas se obtendrán extrayendo la raiz cuadrada de las 416243 centenas del número propuesto Pero el número, 416243 es mayor que 100; por tanto su raiz cuadrada se compondrá de decenas y unidades; luego por igual razón que anteriormente hallaremos las decenas extrayendo la raiz cuadrada de las 4162 centenas del número 416243.

Como el número 4162 es mayor que 100, pero menor que 10000, se hallará su raiz cuadrada como en el ejemplo anterior.

La raiz cuadrada de 4162 es 64; por consiguiente, las decenas de la raiz de 416243 son 64; la diferencia entre el cuadrado de 64 decenas y 416243 es 6643; dividiendo, pues, este número por el duplo de 64 decenas, que son 128 decenas, y procediendo como hemos explicado anteriormente, se halla la cifra 5, que unida a las dos anteriores, forma el número 645, que serán las decenas de la raiz de 41624378: la diferencia entre este número y el cuadrado de las 645 decenas de su raiz es 21878; por consiguiente, dividiendo este número por el duplo de 645 decenas, que son 1290 decenas, y procediendo como anteriormente, se halla la cifra 1, que unida a las anteriores, forma el número 6451, que es la raiz cuadrada entera del número propuesto, con un error, por defecto, menor que la unidad, siendo 8977 el resto de la operación.

Las operaciones se disponen como están indicadas en el ejemplo siguiente:

41'62'43'78	6451
36	
56'2	124 × 4
496	
664'3	1285 × 5
6425	
2187'8	12901 × 1
12901	
8977	

De los razonamientos anteriores se deduce la siguiente:

REGLA: *Para extraer la raiz cuadrada de un número entero con menos de una unidad de error, se le divide en secciones de dos cifras, co-*

menzando por la derecha, de modo que la última sección que es la primera de la izquierda, puede tener una o dos cifras. Se extrae la raiz cuadrada de la primera sección de la izquierda, y se tendrá la primera cifra de la raiz: el cuadrado de esta cifra se resta de esta misma sección, y a la derecha del resto se baja la sección siguiente: del número que se obtenga se separa la cifra de la derecha, y lo que queda a la izquierda se divide por el duplo de la raiz hallada; el cociente se escribe a la derecha del divisor y se multiplica todo por el cociente y el producto que resulte se resta del dividendo y la cifra separada; si la substracción no es posible, la cifra del cociente es grande, y se le rebaja, de unidad en unidad, hasta que la substracción sea posible y se obtenga el segundo resto: entonces la cifra ensayada será la segunda de la raiz y se escribirá a la derecha de la primera. A la derecha del segundo resto se baja la tercera sección, se separa la cifra de la derecha y lo que queda a la izquierda se divide por el duplo del número formado por las dos cifras halladas de la raiz, y el cociente será la tercera cifra de la raiz o un número mayor, y se comprobará como anteriormente. Se continuará del mismo modo hasta bajar la última sección, que dará la última cifra de la raiz, y el resto de la operación, si el número propuesto no es cuadrado perfecto.

288. Cuando un dividendo no contenga al divisor correspondiente, la cifra de la raiz es cero y se pasará a determinar la cifra siguiente considerando este dividendo como un resto.

67'2 8'9 2,8 9	8203
3 2'8	
0 4 9'2 8'9	162 × 2
0 8 0	16403 × 3

La operación se simplifica efectuando, como en la división ordinaria, los productos y substracciones simultáneamente, como en el ejemplo anterior.

289. El número de cifras de la raiz es evidentemente igual al número de secciones; luego será *la mitad, o la mitad mas una* que las que tengan número.

290. No se puede conocer a primera vista si un número cualquiera tendrá raiz exacta; pero existen algunos caracteres, llamados de *exclusión,* por los cuales se conoce que un número dado no puede tener raiz exacta.

De la inspección de la tabla de cuadrados de los números digitos se deduce: *que ningún número terminado en* 2, 3, 7, u 8 *puede tener raiz cuadrada exacta,* porque ningún cuadrado termina en estas cifras.

Los cuadrados de los números terminados en ceros terminan en doble número de ceros, es decir, siempre en un número *par* de ceros; luego *ningún número terminado en ceros podrá tener raiz cuadrada exacta, si el número de ceros que le terminan es impar.*

Cuando se eleva al cuadrado un número terminado en 5, el duplo de las decenas por las unidades que siempre es un número exacto de decenas (280), contiene en este caso el producto de 2 por 5, luego será un número exacto de centenas, y por consiguiente el cuadrado terminará en 25.

$$\text{Así: } (d \,.\, 10 + 5) = d^2 \,.\, 100 + 2 \,.\, d \,.\, 10 \,.\, 5 + 5^2 =$$
$$= d^2 \,.\, 10 + d \,.\, 100 + 25.$$

Luego *ningún número terminado en* 5, *puede tener raiz cuadrada exacta si la cifra de las decenas no es un* 2.

291. *Si un número se descompone en factores primos y los exponentes de todos los factores son pares, tendrá raiz cuadrada exacta, y no la tendrá en el caso contrario* (172).

Cuando los exponentes de todos los factores son pares, la raiz cuadrada es el producto de los factores primos con exponentes mitades de los del número.

$$\text{Así:} \qquad \sqrt{2^4 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2} = 2^2 \,.\, 3 \,.\, 5.$$

292 La prueba de la raiz cuadrada consiste en elevar al cuadrado la raiz y sumar el resultado con el resto, debiendo obtenerse el número dado.

También se debe tener presente que si por miedo a ensayar alguna cifra grande, se pone en la raiz una cifra menor que la verdadera, el resto correspondiente será igual o mayor que el duplo de la raiz hallada más uno (282), y habrá que aumentar dicha cifra.

II. Raíz cuadrada de un número con menor error de una unidad fraccionaria dada

293. *Hallar la raiz cuadrada de un número entero, fraccionario o inconmensurable, con menos error de* $\frac{1}{n}$ *es hallar el mayor número de* n *ésimos contenidos en su raiz cuadrada.*

Así, si designamos por N, un número cualquiera (entero, fraccionario o inconmensurable), y por x, el mayor número de *n-ésimos* contenidos en su raiz cuadrada, se debe verificar:

$$\frac{x}{n} < \sqrt{N} < \frac{x+1}{n},$$

elevando al cuadrado los tres miembros,

$$\frac{x^2}{n^2} < N < \frac{(x+1)^2}{n^2},$$

multiplicando por n^2 resultará,

$$x^2 < N \cdot n^2 < (x+1)^2,$$

de donde se deduce que x^2, es el mayor cuadrado entero contenido en $N \cdot n^2$, y por consiguiente x, será la raiz cuadrada entera, de la parte entera, del producto $N \cdot n^2$ (278).

Luego: *para extraer la raiz cuadrada de un número,* N, *entero, fraccionario o inconmensurable, con menor error de* $\frac{1}{n}$, *se extrae la raiz cuadrada entera de la parte entera del producto* $N \cdot n^2$, *y se divide el resultado por* n.

EJEMPLOS:

1.° Hallar la raíz cuadrada de 23 con menos error de $\frac{1}{100}$.

Como el cuadrado de 100 es 10000, se hallará la raiz cuadrada entera de 230000 y se dividirá por 100. La raiz entera de 230000 es 479; entonces la raiz de 23, con menos error de $\frac{1}{100}$ será, $\frac{479}{100} = 4'79$:

2.° Hallar la raiz cuadrada de $\frac{3}{5}$, con menos de $\frac{1}{61}$ de error.

El cuadrado de 61, es 3721, luego tendremos que hallar la raiz entera de la parte entera de,

$$\frac{3 \times 3721}{5} = \frac{11163}{5} = 2232\frac{3}{5}.$$

La raiz entera de 2232, es 47; luego, $\frac{47}{61}$ es la raiz cuadrada de $\frac{3}{5}$ con menor error de $\frac{1}{61}$.

294. *Conviene advertir que generalmente se piden las raices aproximadas de los números con un error menor que* $\frac{1}{10^n}$ *o sea con* n *cifras decimales exactas; y por consiguiente la regla anterior está reducida a multiplicar los números por* 10^{2n}*, extraer la raiz entera de la parte entera, del producto y separar* n *cifras decimales en la raiz.*

La operación de multiplicar un número por 10^{2n}, se hace: si el número es entero, añadiendo $2n$ ceros; si es decimal de número limitado o ilimitado de cifras, corriendo la coma $2n$ lugares: y si es fracción ordinaria, añadiendo al numerador, $2n$ ceros y hallando el cociente entero que resulta de dividir por el denominador.

EJEMPLOS:

1.° Hallar con menos error de 0,001, la raiz cuadrada del número inconmensurable, $\pi = 3{,}14159265...$

Corriendo la coma 6 lugares a la derecha resulta el número, 3141592,65... y extrayendo la raiz cuadrada de la parte entera se obtiene, 1772; luego, 1,772, será la raiz con menos error de 0,001.

2.° Hallar con menos error de 0,01, la raiz cuadrada de $\frac{22}{7}$.

Se multiplica 22 por 10000 y se halla la raiz de la parte entera del quebrado, $\frac{220000}{7} = 31428{,}5...$ La raiz de 31428 es 177, luego la raiz pedida será, 1,77.

295. *La raiz cuadrada de un quebrado es igual a la raiz cuadrada del numerador partida por la del denominador.*

Es un caso particular del teorema (276).

Así:
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

296. *Para que un quebrado irreducible tenga raiz cuadrada exacta, se necesita que su numerador y denominador sean cuadrados perfectos* (270).

Así:
$$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}.$$

297. *Para que una fracción decimal tenga raiz cuadrada exacta, se necesita y basta que el número de cifras decimales sea par y que, prescindiendo de la coma, el número que resulte sea cuadrado perfecto.*

Así: $$\sqrt{10{,}5625} = 3{,}25$$

Porque el numerador 105625 y el denominador 10000, son cuadrados perfectos.

CAPÍTULO III

LA RAIZ CÚBICA

I. Raíz cúbica de un número con menos error de una unidad

298. *Raiz cúbica de un número es otro número cuyo cubo es el propuesto.* Así, 3 es la raiz cúbica de 27, porque el cubo de 3 es 27. *Raiz cúbica entera es la raiz cúbica del mayor cubo entero contenido en un número.*

La diferencia entre un número y el cubo de su raiz cúbica entera se llama resto de la raiz cúbica.

299. *La raiz cúbica entera de un número cualquiera* (entero, fraccionario o inconmensurable) *es la raiz cúbica entera de su parte entera.*

La misma demostración que en la raiz cuadrada.

En virtud de este teorema sólo nos ocuparemos, por ahora en las raices cúbicas de los números enteros.

300. *El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primero, más el triplo del cuadrado del primero por el segundo, más el triplo del primero por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.*

Sean los números, a y b, tendremos:

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b),$$

pero, según reglas conocidas:

$$(a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$

y por ser $2a^2b+a^2b=3a^2b$ y $ab^2+2ab^2=3ab^2$, tendremos finalmente: $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

EJEMPLO: $(4+8)^3 = 4^3+3 \cdot 4^2 \times 8+3 \cdot 4 \times 8^2+8^3$.

301. Si los sumandos expresan, uno decenas y otro unidades, se tendrá: *El cubo de la suma de decenas y unidades es igual al cubo de las decenas, más el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades, más el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, más el cubo de unidades.*

Así:

$$347^3 = (340 + 7)^3 = 340^3 + 3 . 340^2 . 7 + 3 . 340 . 7^2 + 7^3 .$$

En general,

$$(d . 10 + u)^3 = d^3 . 1000 + 3d^2 . 100u + 3d . 10u^2 + u^3 .$$

El cubo de decenas tiene el factor 1000, y, por consiguiente, es un *número exacto de millares,* y el triplo del cuadrado de decenas por unidades es un *número exacto de centenas.*

302. *La diferencia de los cubos de dos números consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor, más el triplo del menor, más uno.*

Sean, a y $a + 1$, los dos números consecutivos, tendremos:

$$(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 . 1 + 3a . 1^2 + 1^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1,$$

y restando a^3, del primero y tercer miembro:

$$(a + 1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1.$$

303 *El resto de la raíz cúbica entera de un número es menor que el triplo del cuadrado de la raíz más el triplo de la raíz, más la unidad.*

Sea el número N, a, su raíz cúbica entera, y R, el resto tendremos: $N = a^3 + R$: pero siendo a^3, el mayor cubo contenido, en N, se tendrá: $N < (a + 1)^3$, y como, $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, se debe verificar, $a^3 + R < a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, y restando a^3 de los dos miembros, $R < 3a^2 + 3a + 1$.

Los números, a y $a + 1$ son las raíces cúbicas por *defecto* y por *exceso* de N, con menor error cada una de ellas de una unidad.

304. *Los cubos de la unidad seguida de ceros son la unidad seguida de triplo número de ceros.*

Así:

$$10^3 = 1000;\ 100^3 = 1000000;\ 1000^3 = 1000000000...$$

De esto se deduce que la raíz cúbica de un número *menor* que 1000, será *menor* que 10 y por consiguiente, tendrá una *cifra;* la de un número *mayor* que 1000 y *menor* que 1000000, será *mayor* que 10 y *menor* que 100: luego tendrá dos cifras, etc.

En la extracción de la raiz cúbica entera consideraremos dos casos: 1.°, que el número sea menor que 1000; 2.°, que sea mayor que 1000.

305. PRIMER CASO. *Extraer la raiz cúbica entera de un número menor que* 1000.

La tabla de los cubos de los 10 primeros números es:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000.

Si se trata de hallar la raiz cúbica de un número contenido en la segunda fila, el resultado será su correspondiente en la primera. Así: $\sqrt[3]{729} = 9$. Si se trata de otro número cualquiera, 814, por ejemplo, la raiz entera será 9, porque 729, es el mayor cubo contenido en 814. El resto será la diferencia entre 814 y 729, es decir, 85.

306. SEGUNDO CASO. *Extraer la raiz cúbica entera de un número mayor que* 1000.

Consideremos primero un número mayor que 1000 y menor que 1000000; su raíz cúbica tendrá dos cifras, porque estará comprendida entre 10 y 100.

Sea, pues, el número, 76423. Como la raiz de este número se compone de decenas y unidades, si, 76423 es cubo perfecto, se compondrá de las cuatro partes enunciadas (301), y si no es cubo perfecto, contendrá además un resto, que será la diferencia entre dicho número y el cubo de su raíz cúbica entera.

Para hallar las cifras de las decenas de la raíz, recordaremos que el cubo de las decenas es un número exacto de millares (301); luego debe estar contenido en los millares de 76423, o sea en 76000: la raíz cúbica entera de 76 es 4 (305); entonces el cubo de 4, que es 64, se puede restar de 76, y por tanto el cubo de 40, que es 64000, se puede restar de 76000, y con más motivo del número 76423; luego la raiz pedida es mayor que 40. Por otra parte, siendo 4 la raiz entera de 76, este número será menor que el cubo de 5; luego 76000, será menor que el cubo de 50 y la diferencia será, *cuando menos,* un millar; entonces también el número, 76423, será menor que el cubo de 50, y, por consiguiente, la raíz cúbica que buscamos estará comprendida entre 40 y 50, de donde se deduce que la cifra de las decenas de la raíz es 4.

Es decir, que se verifican las limitaciones siguientes:

$$4 < \sqrt[3]{76} < 5, \quad \text{de donde} \quad 40 < \sqrt[3]{76000} < 50$$

$$\text{y también} \quad 40 < \sqrt[3]{76423} < 50.$$

En virtud de esto: *para hallar la cifra de las decenas de la raíz cúbica, se extrae la raíz cúbica entera de los millares del número.*

Restando de, 76423, el cubo de las decenas de la raíz que es 64000, la diferencia, que es 12423, contendrá: *el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades de la raíz, el triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades, el cubo de las unidades,* y si el número no es cubo perfecto, *el resto de la raíz.* Como el triplo del cuadrado de las decenas por las unidades de la raíz es un número exacto de centenas (301) tiene que estar contenido en las 124 centenas de 12423. Ahora, dividiendo, 124 centenas por 48 centenas, que es el triplo del cuadrado de las decenas de la raíz, *el cociente será la cifra de las unidades o un número mayor,* porque en las 124 centenas de 12423, puede haber centenas que hayan resultado del triplo de las decenas por el cuadrado de las unidades de la raíz, del cubo de unidades y del resto si le hay. Efectuando la división de 124 entre 48, el cociente es 2, y como puede ser mayor que la cifra de las unidades, tenemos que comprobarle: *para esto se une a la cifra de las decenas y se forma el número* 42: *si el cubo de este número se puede restar de* 76423, *la cifra* 2, *es buena, si no será grande y se repetirá la comprobación, rebajándola una unidad.* El cubo de 42 es 74088, y como este número es menor que 76423, la cifra 2 es buena; efectuando la substracción según se indica a continuación, el resto será 2335:

$$\begin{array}{r|l} 76'423 & 42 \\ 40^3 \ldots 64 & \\ \cline{1-1} 124'24 & 4800 = 3 \,.\, 40^2 \\ 42^3 \ldots 740'88 & \\ \cline{1-1} 23'35 & \end{array}$$

307 Sea, N. un número y d, las decenas de su raiz cúbica, se tendrá:

$$\sqrt[3]{N} \geqq d \,.\, 10, \qquad y \qquad \sqrt[3]{N} < (d+1)\,10,$$

y elevando al cubo,

$$N \geqq d^3 \,.\, 1000, \qquad y \qquad N < (d+1)^3\, 1000,$$

pero, por ser 1000 un millar, resulta que el número de millares contenido en N, es igual o mayor que d^3, y menor que $(d+1)^3$, representándole por M, se tiene:

$$M \geqq d^3, \qquad y \qquad M < (d+1)^3,$$

y también $$\sqrt[3]{M} \geqq d, \qquad y \qquad \sqrt[3]{M} < d+1,$$

Luego: *Las decenas de la raiz cúbica de un número se obtienen extrayendo la raiz cúbica de los millares de dicho número.*

Representemos por u, las unidades de la raiz cúbica de N, y por R, el resto si le hay, y se verifica:

$$N = (d \,.\, 10 + u)^3 + R = d^3 \,.\, 1000 + 3d^2 \,.\, 100 \,.\, u + 3d \;\; 10 \,.\, u^2 + u^3$$

y si restamos, $d^3 \,.\, 1000$,

$$N - d^3 \,.\, 1000 = 3d^2 \,.\, 100 \,.\, u + 3d \,.\, 10 \,.\, u^2 + u^3 + R.$$

El número, $3d^2 \,.\, 100 \,.\, u$, es ignal a $3d^2 \,.\, u$ centenas; sumado con $3d \,.\, 10 \,.\, u^2 + u^3 + R$, puede contener nuevas centenas y por consiguiente un número mayor que $3d^2 \,.\, u$, de modo que si designamos por C, el número de centenas contenidas en, $3d^2 \,.\, 10 \,.\, u + 3d \,.\, 10 \,.\, u^2 + u^3 + R$, se verifica,

$$C \geqq 3d^2 \,.\, u \qquad \text{y por tanto,} \qquad \frac{C}{3d^2 \,.\, u} \geqq u.$$

Entonces: *si se extrae la raiz cúbica de los millares de un número, y se dividen las centenas del resto por el triplo del cuadrado de la raiz hallada, el cociente entero es igual o mayor que la cifra de las unidades de la raiz.*

Para comprobarlo, se eleva al cubo $d \,.\, 10 + u$; si el resultado se puede restar de N, la cifra, u, es buena; en el caso contrario se la rebaja, de unidad en unidad, hasta que se pueda hacer la substracción.

308 Pasemos ya a la extracción de la raiz cúbica de un número mayor que 1000000: por ejemplo, hallar la raiz cúbica de 386671608.

Si suponemos la raiz cúbica descompuesta en decenas y unidades, las decenas se obtendrán extrayendo la raiz cúbica de los 386671 millares del número propuesto. Pero el número, 386671, es mayor que 1000 y menor que 1000000; por tanto, su raiz cúbica se compondrá de decenas y unidades, que se determinarán como en el ejemplo anterior.

La raiz cúbica de 386671, es 72; por consiguiente, las decenas de la raiz de 386671608 son 72: la diferencia entre el cubo de 72 decenas y el número 386671608 es 13423608; por consiguiente, dividiendo este número por el triplo del cuadrado de 72 decenas, que es 1555200, se obtendrá el cociente, 8, que se comprobará escribiéndole a la derecha de 72, formando el número, 728, y elevándole al cubo: como el resultado es 385828352, número menor que el propuesto, la cifra, 8, es buena, la raiz entera por defecto es 728 y el resto es 843256.

Las operaciones se disponen del modo siguiente:

			728
		72	728
386'6 71'6 08	728	72	
343			5824
		144	1456
43 6'71	$147 = 3 \quad 7^2$	504	5096
373 2 48			
		5184	529984
13 4 23 6'08	$15552 = 3 \cdot 72^2$	72	728
385 8 28 3 52			
		10368	4239872
8 43 2 56		36288	1059968
			3709888
		373248	
			385828352

De todo lo expuesto se deduce la siguiente:

Regla. *Para extraer la raiz cúbica de un número entero con menor error de una unidad, se le divide en secciones de tres cifras, comenzando por la derecha, de suerte que la último sección o sea la primera de la izquierda, puede tener una, dos o tres cifras. Se extrae la raíz cúbica de la primera sección de la izquierda y se tendrá la primera cifra de la raiz: el cubo de esta cifra se resta de dicha sección y a la derecha del resto se baja* *la sección siguiente; del número que se obtenga se separan las dos cifras de la derecha; y lo que queda a la izquierda se divide por el triplo del cuadrado de la raiz hallada; el cociente se une a la primera cifra de la raiz y el número que se forme se eleva al cubo, y si el resultado se puede restar del número formado por las dos primeras secciones de la izquierda, el cociente será la segunda cifra de la raiz y se escribirá a la derecha de la primera; si el cubo formado no se puede restar de las dos primeras secciones de la izquierda, se rebaja el cociente, de unidad en unidad, hasta que dicha substracción sea posible. Después de restar el cubo del número formado por las dos primeras cifras de la raiz de las dos primeras secciones de la izquierda, a la derecha del resto se baja la sección siguiente, se separan las dos cifras de la derecha y lo que queda a la izquierda se divide por el triplo del cuadrado del número formado por las dos cifras halladas de la raiz; el cociente será la tercera cifra de la raiz, o un número mayor, y se comprobará como anteriormente. Se continuará del mismo modo hasta bajar la última sección, que dará la última cifra de la raiz y el resto de la operación si el número no es cubo perfecto.*

309. Cuando un dividendo no contenga al divisor correspondiente, la cifra de la raiz es cero y se pasará a determinar la cifra siguiente, considerando este dividendo como un resto.

El número de cifras de la raiz es igual al número de secciones, luego será el *tercio* o *el tercio más una*, que las que tenga el número.

310. *Si un número se descompone en factores primos, y los exponentes de dichos factores son todos múltiplos de* 3, *el número tendrá raiz cúbica exacta y no la tendrá en el caso contrario.*

Cuando los exponentes de los factores primos son múltiplos de 3, *la raiz cúbica es el producto de los factores con exponentes iguales a la tercera parte de los que tienen en el número.*

Así: $\sqrt[3]{2^3 . 3^6 . 5^3} = 2 . 3^2 . 5.$

II. Raiz cúbica de un número con menor error de una unidad fraccionaria dada

311. *Hallar la raiz cúbica de un número entero, fraccionario o inconmensurable, con menor error de* $\frac{1}{n}$, *es hallar el mayor número de* n-ésimos *contenidos en su raiz cúbica.*

Así, si designamos por N, un número cualquiera (entero, fraccionario o inconmensurable) y por x, el mayor número de *n ésimos* contenidos en su raiz cúbica, se debe verificar:

$\frac{x}{n} < \sqrt[3]{N} < \frac{x+1}{n}$, elevando al cubo los tres miembros,

$\frac{x^3}{n^3} < N < \frac{(x+1)^3}{n^3}$ multiplicando por n^3 resultará:

$x^3 < N \cdot n^3 < (x+1)^3$, de donde se deduce que, x^3 es el mayor cubo entero contenido en $N \cdot n^3$ y, por consiguiente, x, la raiz cúbica de la parte entera de $N \cdot n^3$ (298).

Luego: *para extraer la raiz cúbica de un número* N, *entero, fraccionario o inconmensurable, con menor error de* $\frac{1}{n}$, *se extrae la raiz cúbica entera de la parte entera del producto* $N \cdot n^3$ *y se divide el resultado por* n.

Ejemplo: Hallar la raiz cúbica de $\frac{3}{5}$, con menos de $\frac{1}{12}$ de error.

El cubo de 12 es 1728; luego tendremos que hallar la raiz cúbica entera de la parte entera de, $\frac{3 \times 1728}{5} = \frac{5184}{5} = 1036\ \frac{4}{5}$.

La raiz cúbica entera de 1036, es 10: luego $\frac{10}{12}$ es la raiz cúbica de $\frac{3}{5}$, con menos error de $\frac{1}{12}$.

312. *Si se pide la raiz cúbica con un error menor que* $\frac{1}{10^n}$, *se tendrá que multiplicar el número por* 10^{3n}, *extraer la raiz cúbica entera, de la parte entera, del producto y separar* n *cifras decimales en la raiz.*

EJEMPLOS:

1.° Hallar, con menos de 0,001 de error la raiz cúbica del número inconmensurable, $\pi = 3,141592653589...$

Corriendo la coma nueve lugares a la derecha resulta el número, 3141592653,589... y extrayendo la raiz cúbica de la parte entera se obtiene 1464; luego 1,464 es la raiz cúbica pedida, con menos error de 0,001.

2.° Hallar la raiz cúbica de 2, con menos error de 0,0001 Se multiplica 2 por la unidad seguida de 12 ceros, se halla la raiz cúbica del producto, y se separan 4 decimales. El resultado es 1,2599.

313. *La raiz cúbica de un quebrado es igual a la raiz cúbica del numerador partida por la raiz cúbica del denominador.*

Es un caso particular del teorema número 276.

Así:
$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

314 *Para que un quebrado irreducible tenga raiz cúbica exacta, se necesita que su numerador y su denominador sean cubos perfectos* (246).

Así:
$$\sqrt[3]{\frac{125}{512}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{512}} = \frac{5}{8}.$$

315. En particular: *Para que una fracción decimal tenga raiz cúbica exacta, se necesita y basta que el número de cifras decimales sea múltiplo de tres y que, prescindiendo de la coma, el número que resulte sea cubo perfecto.*

Así:
$$\sqrt[3]{34,328125} = 3,25.$$

Porque el numerador, 34328125, y el denominador, 1000000, son cubos perfectos.

SECCIÓN SEGUNDA

COMPARACIÓN ARITMÉTICA

CAPÍTULO I

LAS RAZONES GEOMÉTRICAS

316. La *comparación* de dos números se puede hacer *por diferencia, por cociente y por raiz.*

(*Razón de dos números es el resultado de su comparación por diferencia, por cociente o por raiz.*) Si los números son, a y b, la razón podrá ser: $a - b$; $\frac{a}{b}$: o $\sqrt[b]{a}$.

ya

(La razón por diferencia recibe el nombre de ***aritmética,*** y la razón por cociente, de ***geométrica.***) o por raiz

Sólo nos ocuparemos en las razones geométricas, por ser las únicas que tienen importancia por sus aplicaciones.

317. La razón geométrica tiene la forma de un quebrado o cociente indicado, en que el numerador o dividendo se llama (***antecedente,*** el denominador o divisor, ***consecuente,*** y ambos juntos, ***términos de la razón.*** Se escribe bajo una de las formas $\frac{a}{b}$ o $a : b$, y se lee: *a es geométricamente á b,* o simplemente, *a es á b.*)

Aunque las razones geométricas tienen la misma forma que las fracciones o cocientes, son expresiones mucho más generales, porque sus términos pueden ser enteros, fraccionarios o inconmensurables. Por consiguiente, aunque tienen las mismas propiedades que las fracciones, se necesita demostrar nuevamente, cuando menos, los fundamentales, porque los razonamientos que hacíamos en la teoría de los quebrados, suponían que los términos de las fracciones eran enteros.

Razón geométrica es el cociente

318 Si designamos por q, el valor de la razón, $\frac{a}{b}$, de la igualdad, $\frac{a}{b} = q$. se deduce, según la definición de la razón, $a = bq$. es decir: *el antecedente es igual al producto del consecuente por la razón.*

319. *Una razón no varía si se multiplican o dividen sus dos términos por un número cualquiera.*

Sea la razón, $\frac{a}{b} = q$, de donde se deduce:

$$a = bq.$$

Si multiplicamos por un número cualquiera, n, los dos miembros de esta igualdad, resulta:

$$an = bnq.$$

y dividiendo ambos miembros por bn.

$$\frac{an}{bn} = q = \frac{a}{b}.$$

Si en vez de multiplicar, dividimos por n la igualdad, $a = bq$. resultará:

$$a : n = (b : n)\, q$$

de donde,

$$\frac{a : n}{b : n} = q = \frac{a}{b}.$$

En virtud de esto, las razones geométricas se pueden *simplificar* y se pueden reducir al mismo *consecuente* (denominador) como las fracciones (1).

320. *Cuando dos o más razones tienen el mismo consecuente, se suman y restan como las fracciones.*

Sean las razones, $\frac{a}{b} = q$; $\frac{a'}{b} = q'$, de donde,

$$a = bq, \quad \text{y} \quad a' = bq'$$

sumando miembro a miembro,

$$a + a' = b\,(q + q'),$$

y dividiendo ambos miembros por b,

$$\frac{a + a'}{b} = q + q' = \frac{a}{b} + \frac{a'}{b}.$$

---

(1) Como se han demostrado estas propiedades se puede demostrar que: Si el antecedente de una razón se multiplica o divide por un número cualquiera, la razón queda multiplicada o dividida por dicho número. Si el consecuente de una razón se multiplica o divide por un número cualquiera, la razón queda dividida o multiplicada por dicho número. Los alumnos pueden hacer las demostraciones, como ejercicios.

Del mismo modo se demuestra el teorema de la substracción.

321. *El producto de dos o más razones es igual a la razón del producto de los antecedentes a los consecuentes.*

Sean las razones, $\frac{a}{b} = q, \frac{a'}{b'} = q', \frac{a''}{b''} = q''$, tendremos:

$$a = bq, \quad a' = b'q', \quad a'' = b''q'',$$

multiplicando miembro a miembro, resulta:

$$aa'a'' = bb'b''qq'q'',$$

y dividiendo por $bb'b''$,

$$\frac{aa'a''}{bb'b''} = qq'q'' = \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} \times \frac{a''}{b''}.$$

Del mismo modo se demostraría para mayor número de razones.

322. *Dos razones son inversas cuando el antecedente de cada una es consecuente en la otra.* Así, $\frac{a}{b}$ y $\frac{b}{a}$, son dos razones inversas.

El producto de dos razones inversas es la unidad.

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1.$$

323. *Para elevar una razón a una potencia, se elevan sus dos términos a dicha potencia.*

Es un caso particular del teorema número 321. Así:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

324. *Para dividir dos razones se multiplica la razón dividiendo por la inversa del divisor, o también se dividen término a término.*

Si tenemos, $\frac{a}{b} = q$, y $\frac{a'}{b'} = q'$,

de donde $a = bq$, y $a' = b'q'$

multiplicando el primer miembro de la primera igualdad por el

$\frac{a}{b} = \frac{bq}{b'q'}$; $\frac{a}{b} \times \frac{b'}{b'} = \frac{bq}{b'q'} \times \frac{b'}{b'}$

segundo de la segunda, y el segundo de la primera por el primero de la segunda, resulta:

$$ab'q' = a'bq.$$

y dividiendo ambos miembros por $a'bq'$

$$\frac{ab'}{a'b} = \frac{q}{q'} = \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'}.$$

También se tiene (319); $\frac{ab'}{a'b} = \frac{ab' : a'b'}{a'b : a'b'} = \frac{a : a'}{b : b'}$: o bien por ser, $\frac{ab'}{a'b} = \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'}$, se tendrá: $\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{a : a'}{b : b'}$.

325. *Para extraer una raiz de una razón, se extrae dicha raiz de sus dos términos.*

Es decir que tendremos: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

porque las potencias de grado n de los dos miembros son iguales.

CAPÍTULO II

LAS PROPORCIONES GEOMÉTRICAS

326. *Proporción geométrica es la igualdad de dos razones geométricas.*

La proporción geométrica se llama simplemente *proporción.*

Se escribe la proporción bajo una de las dos formas,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \text{o} \quad a : b : : c : d,$$

nosotros adoptaremos la primera por ser más cómoda. La proporción anterior se lee, ~~a, partido~~ por b, igual a c, partido por d, o mejor, a, es a b, como c, es a d.

El primero y el tercer término se llaman *antecedentes;* el segundo y cuarto, *consecuentes,* por serlo así en las razones que forman la proporción. El primero y último término se llaman *extremos,* y el segundo y el tercero, *medios.* Uno cualquiera de los cuatro se llama cuarta *proporcional* entre los otros tres términos.

327. Teorema fundamental.—*En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, reduciendo al mismo consecuente, $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, y como las razones son iguales y sus consecuentes también lo son, se tiene que verificar, $ad = bc$.

En virtud de esta propiedad se puede hallar un término cualquiera de una proporción cuando se conocen los otros tres.

Dividiendo por a los dos miembros de la igualdad anterior, se tiene: $d = \frac{bc}{a}$. Luego *un extremo es igual al producto de los medios partido por el otro extremo.*

Dividiendo por b los dos miembros de dicha igualdad, se tiene: $c = \frac{ad}{b}$. Luego *un medio es igual al producto de los extremos partido por el otro medio.*

Ejemplo:
$$\frac{4}{\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{7}{x}$$

Se tendrá:
$$x = \frac{7 \times \left(\frac{2}{5}\right)}{4} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}.$$

328. Recíproco del teorema fundamental.—*Si el producto de dos números es igual al producto de otros dos, con los cuatro se puede formar una proporción, tomando por extremos los factores de uno de los productos, y por medios los del otro.*

Si tenemos, $ad = bc$, dividiendo por bd (un factor de cada producto), los dos miembros de la igualdad, resulta, $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$, y suprimiendo en cada razón el factor común de los dos términos, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

329. En virtud de estas propiedades, una proporción se puede

escribir de todos los modos que no alteren la igualdad de los productos de medios extremos Luego se puede *cambiar entre sí los medios, o los extremos,* y poner *los medios por extremos y los extremos por medios.* Resulta de esto, que una proporción se puede escribir de los *ocho* modos siguientes:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};\quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d};\quad \frac{d}{b}=\frac{c}{a};\quad \frac{d}{c}=\frac{b}{a};$$

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c};\quad \frac{b}{d}=\frac{a}{c};\quad \frac{c}{a}=\frac{d}{b};\quad \frac{c}{d}=\frac{a}{b}.$$

330. *Si dos proporciones tienen una razón común con las otras dos, se puede formar una proporción.*

Sean las proporciones, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, y, $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$, dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí, luego,

$$\frac{c}{d}=\frac{e}{f}.$$

331. *Si dos proporciones tienen iguales antecedentes, o iguales consecuentes, con los otros cuatro términos se puede formar proporción.*

Sean las proporciones, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, y, $\frac{a}{e}=\frac{c}{f}$, cambiando de lugar los medios (329).

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, y, $\frac{a}{c}=\frac{e}{f}$, de donde (330), $\frac{b}{d}=\frac{e}{f}$.

332. *En toda proporción, la suma o diferencia de los antecedentes, es a la suma o diferencia de los consecuentes, como un antecedente es a su consecuente.*

Sea la proporción, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Si llamamos q al valor de la razón, tendremos (318): $a=bq$, y, $c=dq$, sumando y restando ordenadamente, $a+c=(b+d)\,q$, y, $a-c=(b-d)\,q$, dividiendo la primera por $b+d$, y la segunda por $b-d$,

$$\frac{a+c}{b+d}=q=\frac{a}{b};\quad \frac{a-c}{b-d}=q=\frac{a}{b},$$

de éstas resulta también, $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$, y cambiando entre sí los medios, $\dfrac{a+c}{a-c}=\dfrac{b+d}{b-d}$.

El enunciado de esta última proporción es: *La suma de los antecedentes, es a su diferencia, como la suma de los consecuentes es a su diferencia.*

333. *En toda proporción, la suma o diferencia de los términos de la primera razón, es a la suma o diferencia de los de la segunda, como un antecedente es a otro, o como un consecuente es a otro.*

Sea la proporción, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$, cambiando entre sí los medios, se tendrá: $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$, y en virtud del teorema anterior $\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$, y, $\dfrac{a-b}{c-d}=\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$.

También se obtiene: $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$, de donde: *La suma de los dos términos de la primera razón, es a su diferencia, como la suma de los términos de la segunda razón, es a su diferencia.*

334. *Si se multiplican término a término varias proporciones, los productos forman una proporción.*

Sean las proporciones, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}, \dfrac{a'}{b'}=\dfrac{c'}{d'}, \dfrac{a''}{b''}=\dfrac{c''}{d''}$.

Multiplicando miembro a miembro resulta,

$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}\times\frac{a''}{b''}=\frac{c}{d}\times\frac{c'}{d'}\times\frac{c''}{d''},$$

y efectuando según la regla (321), $\dfrac{a\,a'\,a''}{b\,b'\,b''}=\dfrac{c\,c'\,c''}{d\,d'\,d''}$.

335. *Si los cuatro términos de una proporción se elevan a una misma potencia los resultados forman proporción,*

Sea la proporción, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$.

Elevando los dos miembros a la potencia n,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{c}{d}\right)^n \text{ de donde (323) } \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n}.$$

336. *Si se dividen término a término dos proporciones, los cocientes forman proporcion.*

Sean las proporciones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$.

Dividiendo miembro a miembro resulta,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} : \frac{c'}{d'}.$$

y efectuando según la regla (324), $\frac{a : c}{b : d} = \frac{a' : c'}{b' : d'}$.

337. *Si de los cuatro términos de una proporción se extrae la misma raiz, los resultados forman proporción.*

Sea la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Extrayendo de los dos miembros la raiz de grado n,

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{c}{d}},$$

y efectuando según la regla (325), $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{c}}$.

338. Se llama proporción *contínua* la que tiene los *términos medios iguales.*

Así: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, es una proporción contínua.

El teorema fundamental (327), en la proporción contínua es: *el cuadrado del término medio es igual al producto de los extremos.* Puesto que el producto de los medios es un cuadrado, tendremos, pues, $b^2 = ac$, y extrayendo la raiz cuadrada $b = \sqrt{ac}$; luego, *el término medio es igual a la raiz cuadrada del producto de los extremos.*

Los términos desiguales, a o c, se llaman *terceras proporcionales* entre b y c, o entre b y a; y el término, b, *media proporcional* entre a y c.

339. Por extensión, se llama *media proporcional* o *media geométrica* entre n cantidades o números, la raiz *n-ésima* de su producto. $3\times4\times5$ $\sqrt[3]{3\times4\times5}$

Se llama *media diferencial* o *media aritmética* entre n cantidades o números, la *n-ésima* parte de su suma.

Así, la media diferencial entre los números, 7,4 12,05; 8,04; 6,12, es,

$$\frac{7{,}4+12{,}05+8{,}04+6{,}12}{4}=\frac{33{,}61}{4}=8{,}4025.$$

Las medias aritméticas tienen muchas aplicaciones en las ciencias físicas y sociales.

Serie de razones iguales

340. Se llama *serie de razones iguales* la expresión de la igualdad de tres o más razones.

Así: $$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}\ldots$$

Razón de la serie es el valor común de todas las razones.

341. En toda serie de razones iguales: *la suma de los antecedentes, es a la de los consecuentes, como un antecedente, es a su consecuente.*

Sea la serie de razones iguales,

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}\ldots$$

y sea q, el valor de la razón, tendremos:

$$a=bq,\ a'=b'q,\ a''=b''q\ldots$$

sumando miembro a miembro,

$$a+a'+a''+\ldots=(b+b'+b''+\ldots)\,q,$$

y dividiendo por $b+b'+b''+\ldots$ *los dos miembros,*

$$\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots}=q=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots$$

342. PROBLEMA. *Dividir un número,* A, *en partes proporcionales a otros números dados,* a, b *y* c.

Sean x, y, z, las tres partes desconocidas en que se ha de dividir el número A.

Por ser proporcionales a a, b y c, se debe tener:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

de donde (341),

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c},$$

y por ser $x+y+z=A$,

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{A}{a+b+c}.$$

De las proporciones formadas por la última razón y cada una de las otras, se deduce (327),

$$x=a\times\frac{A}{a+b+c},\qquad y=b\times\frac{A}{a+b+c},$$

$$z=c\times\frac{A}{a+b+c}.$$

Estos resultados se pueden enunciar en la siguiente:

REGLA. *Para dividir un número.* A, *en partes proporcionales a otros varios* a; b, c .. *se divide el número* A *por la suma de los números* a, b. c... *a los cuales han de ser proporcionales las partes de* A, *y el cociente obtenido se multiplica por cada uno de dichos números. Los productos son las partes del número* A, *que nos proponemos hallar* (1).

---

(1) Debe observarse que este método no exige más que una división, y si a las partes x, y, z les diéramos la forma,

$$x=A\times\frac{a}{a+b+c},\qquad y=A\times\frac{b}{a+b+c}...$$

la regla resultaría de más fácil enunciado, pero de más difícil aplicación; porque las divisiones serían tantas como partes debe contener el número A.

SEGUNDA PARTE

APLICACIONES DE LA ARITMÉTICA

Ma

CAPÍTULO I

Numeración y propiedades de los concretos

343. Hemos dicho (3) que *número concreto es el que expresa la naturaleza de la unidad generatriz*. Así: 3 arrobas, 7 litros, etc., son números concretos.

Los concretos son *homogéneos* cuando expresan unidades de la misma naturaleza, por ejemplo: 6 varas, 12 varas, 9 pulgadas, etc ; son *heterogéneos* cuando expresan unidades de distinta naturaleza, por ejemplo: 4 pesetas, 3 arrobas, 2 tinteros, etc.

La unidad se impone en los números concretos cuando están formados por una plularidad de objetos iguales (5), si estos objetos no se pueden descomponer en partes sin destruirlos, pero en general la magnitud que se trata de medir es contínua y se puede elegir arbitrariamente la *unidad* o *talón* que ha de servir para todas las del mismo género. Además de la unidad principal dentro de cada género se consideran otras que sean *múltiplos y submúltiplos* suyos, para evitar la formación de números muy grandes o excesivamente pequeños, porque en uno y otro caso sería difícil formarse idea exacta de la cantidad medida, y además las operaciones del cálculo serían más complicadas.

Dentro de un mismo género, también adquirimos la noción de las unidades de distinto modo, según es su tamaño. Así: nos formamos idea de lo que es un kilómetro, recorriéndole a pie en una carretera, y de un decímetro o centímetro, mirando una escala que contenga estas medidas.

344. Las principales cantidades que se consideran en la Aritmética son de los géneros siguientes: de *longitud*, de *superficie*, de *volumen*, de *peso*, de *tiempo* y de *dinero* (1).

El conjunto ordenado de unidades relativas a estos géneros de cantidades se llama, sistema de pesas, medidas, monedas y cronométrico.

345. Para reconocer como bueno un sistema de pesas, medidas y monedas, debe llenar varias condiciones.

1.ª Debe ser *fijo* para que no se introduzcan errores con el transcurso del tiempo, que influirían no sólo en las transacciones comerciales, sino que impedirían formarse una idea de la exactitud de nuestros trabajos científicos a las generaciones futuras, como no nos la formamos nosotros, de muchos llevados a cabo por las generaciones pasadas.

2.ª *Deben relacionarse los múltiplos y submúltiplos de la unidad principal*, como se relacionan los diversos órdenes de unidades en nuestro sistema de numeración: con esto conseguiremos la brevedad en las operaciones numéricas.

3.ª *Deben relacionarse de una manera sencilla las unidades de los diversos géneros que comprende*, con lo cual se simplifican los cálculos en muchos problemas de las Matemáticas o sus aplicaciones.

4.ª Debe *ser* si es posible, *universal*, con lo cual se facilitarán las transacciones comerciales dentro de cada Estado y aun entre todas las naciones.

El *sistema métrico decimal*, cumple mejor que ninguno las condiciones anteriores.

El antiguo *sistema de pesas y medidas de Castilla*, no cumple las condiciones enunciadas arriba: porque los talones no son fijos; ni los múltiplos y submúltiplos de las unidades principales guardan relación con los órdenes de unidades del sistema de

---

(1) Los físicos han estudiado el problema de reducir al menor número posible las unidades fundamentales que sirven pera valuar todo género de magnitudes, midiendo directamente las de los géneros de unidades elegidas e indirectamente las demás. Hoy se puede considerar el problema casi resuelto, adoptando tres unidades principales y primitivas que son la de *longitud*, la de *tiempo*, y la de *masa;* pero podrían adoptarse la de *longitud*, la de *tiempo* y la de *fuerza*, o las dos primeras y la de *energía*.

Nosotros consideramos como unidades fundamentales la de *longitud*, la de *tiempo*, y la de *masa:* llamaremos a la unidad de *masa*, unidad de *peso*, porque así se hace generalmente confundiendo la masa con el peso, y sobre todo porque es más clara para los alumnos que no tienen conocimientos de mecánica. La unidad monetaria sirve para establecer el valor convencional de las cosas.

numeración; ni se pueden relacionar las unidades de diversos géneros con números sencillos; ni es universal, sino a lo sumo nacional.

a) Sistema métrico decimal

Es el sistema de pesas y medidas que tienen por base el metro y los múltiplos y submúltiplos se obtienen [illegible] la unidad principal por 10

346. En el sistema métrico decimal, la unidad principal de longitud se llama *metro* y es la *diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano que pasa por París.* suponiendo la medición hecha al nivel del mar. Se designa abreviadamente por el símbolo *m.*

La definición del metro no es exacta, porque el cuarto del meridiano terrestre es mayor que diez millones de metros: según *Clarke,* tiéne 10001869 metros; este número se rectificará con el tiempo, pues las dos últimas y quizás las tres cifras de la derecha son inexactas.

Pero aunque no sea exacta, la han tomado como punto de partida para la construcción de los metros prototipos, la Comisión internacional de Pesas y Medidas, auxiliada por el Comité ejecutivo, que presidía el general *Ibáñez.*

El metro que ha servido de *base* al sistema métrico pertenece a Francia, es el prototipo llamado de los *Archivos;* consiste en una regla de platino cuya longitud, de extremo a extremo, se creyó igual a la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano. En su determinación tomaron parte muchos sabios, principalmente *Delambre, Mechaín* y *Borda;* y entre los españoles *Ciscar.*

Se hizo la entrega oficial de este metro el 4 de mesidor del año VII de la República (22 de Junio de 1799).

Desde 1870, en que se organizó la Oficina internacional de Pesas y Medidas, hasta 1889, en que han terminado las principales operaciones relativas al *metro* y al *kilogramo,* se han llevado a cabo muchos trabajos en que los más importantes, por relación al metro, han sido construir 30 reglas de platino con un 10 por 100 de iridio, cuya sección transversal tiene la forma aproximada de una X, y cuya longitud es unos 102 centímetros: estas reglas tienen cerca de cada extremo tres pequeños trazos, muy próximos entre sí, a medio milímetro de distancia, y la longitud del metro es la distancia entre los dos trozos centrales.

De las treinta reglas se eligió para talón prototipo internacional la señalada con el número 6, cuya longitud se aproximaba más al metro de los Archivos; en todos los documentos de la Oficina internacional de Pesas y Medidas, se le designa con la letra gótica $\mathfrak{M}$.

La longitud de esta regla a cero grados es un metro, y designando por la letra griega μ, la millonésima de metro y por t, una temperatura cualquiera: la longitud, a esta temperatura, es:

$$\mathfrak{M} = 1^m + 8\mu,651\, t + 0\mu,001\, t^2.$$

En Septiembre de 1889 se celebró en París una conferencia general de la Convención internacional del Metro (presidida por *M. Des Cloizeaux* y en la que representó a España el general *Ibáñez)* en cuya conferencia se aprobaron los trabajos que durante veinte años se habían llevado a feliz término, y se hizo el sorteo de los talones prototipos en platino iridiado, adjudicándose a cada nación los que había comprado. Se acordó que los prototipos internacionales se depositasen en la cueva profunda del Observatorio de *Breteuil*, con todas las formalidades y precauciones que merecía el inmenso valor de las alhajas que se depositaban y de cuya custodia se hacia Francia responsable, y se leyó el acta levantada con este motivo en la última sesión de la conferencia, el día 28 de Septiembre.

Como resultado del sorteo, le correspondieron a España dos metros prototipos, en platino iridiado, señalados con los números 17 y 24.

La expresión de la longitud de estos metros a la temperatura t, es: Talón núm. $17 = 1^m + 0\mu,9 + 8\mu,653\, t + 0\mu,001\, t^2$.

Talón núm. $24 = 1^m + 1\mu,8 + 8\mu,670\, t + 0\mu,001\, t^2$.

La unidad principal de las medidas de peso o pesas, se llama kilogramo, *es el peso del agua destilada a 4 grados centígrados, que puede contener un cubo cuya arista es la décima parte de un metro:* se designa con el símbolo *kg*.

Tampoco esta definición es exacta, porque según trabajos hechos por la Comisión internacional de Pesas y Medidas, se ha visto que la unidad de peso es errónea probablemente 2 diezmilésimas de kilogramo.

Cuando se construyó el kilogramo prototipo de los Archivos, hace ya más de un siglo, se advertía que el peso del agua se había de reducir al vacío, y nada se advertía respecto de la latitud, y como el *peso* varía con la latitud, es prueba de que le consideraron como igual a la *masa*.

La Comisión internacional, define el kilogramo diciendo que *es la unidad de masa* y ha adoptado como prototipo internacional un kilogramo de platino iridiado que pesa exactamente igual que el de los Archivos.

Además del citado construyó otros 40 también de platino con 10 por 100 de iridio, que tienen la forma de un cilindro de igual altura que el diámetro de la base y cuyas aristas están ligeramente redondeadas.

El prototipo internacional se designa con la letra gótica $\mathfrak{K}$, y

está depositado con el metro en el Observatorio de *Breteuil* y los prototipos nacionales se sortearon cuando los metros y a España le correspondieron los que llevan los números 3 y 24.

Designando por *mg*, la millonésima parte del kilogramo (el miligramo) los pesos de los prototipos o talones españoles son:

Talón núm. $3 = 1^{\text{kg}} - 0^{\text{mg}}, 021.$

Talón núm. $24 = 1^{\text{kg}} - 0^{\text{mg}}, 191.$

La unidad principal de las medidas superficiales es el *metro cuadrado*, o sea, *un cuadrado cuyo lado es un metro:* se designa por el símbolo, m^2.

La unidad principal de las medidas de *volumen* es el *metro cúbico,* o sea, *un cubo cuyo lado es un metro:* se designa por el símbolo, m^3 (1).

La unidad principal de las medidas de capacidad es el *litro,* o sea, *la capacidad de un cubo que tenga por arista la décima parte del metro*: se designa por el símbolo, *l*.

A petición de *M. Broch,* la Comisión internacional ha adoptado una nueva definición del litro, diciendo que *es el volumen ocupado por la masa de un kilogramo de agua pura a su densidad máxima y bajo la presión de una atmósfera normal.*

Este litro será la *unidad de volumen* en los trabajos de gran precisión, según acuerdo de la Conferencia celebrada por la Comisión el 16 de Octubre de 1901. En todos los demás casos la unidad de volumen será el metro cúbico.

---

(1) Cubo es el espacio cerrado por seis cuadrados iguales que se llaman caras: los lados de los cuadrados se llaman aristas. Un dado de jugar tiene la forma de un cubo,

La unidad principal para medir el tiempo es el *día solar medio*, que es *aproximadamente el tiempo transcurrido entre dos pasos del sol por el meridiano o lo que tarda la tierra en verificar una rotación completa alrededor de su eje* (1).

La unidad principal monetaria es la *peseta*, moneda de plata que pesa 5 gramos.

347. Las unidades de cada género en el sistema métrico decimal se derivan de la unidad principal, multiplicándola y dividiéndola por *diez*. Los nombres de los múltiplos de la unidad principal en cada género de unidades se forman anteponiendo al nombre de dicha unidad principal (2) las palabras griegas *deca*, *hecto*, *kilo* y *miria*, que significan *diez*, *ciento*, *mil* y *diez mil*. Se designan por las abreviaturas

da. h. k. M. (3).

Los nombres de los submúltiplos o divisores de la unidad principal, se forman anteponiendo las palabras *deci*, *centi*, *mili* que significan *décima*, *centésima* y *milésima* parte, se designan por los símbolos,

d. c. m.

---

(1) La definición del texto no es exacta, porque el tiempo transcurrido entre dos pasos del sol por el meridiano es el día *solar verdadero*, que no puede servir de unidad por no ser medida fija. La definición del día solar medio se puede referir al *año trópico* o al *día sideral*. Los alumnos que quieran adquirir conocimientos sobre este asunto pueden consultar alguna obra de Geografía astronómica o Cosmografía: aquí nos limitaremos a decir que el *año trópico* es el intérvalo de tiempo transcurrido entre dos equinocios, que en su determinación se comete un error inferior a un minuto, y como se tienen observaciones aceptables desde hace más de un siglo, este error dividido por 100 es despreciable.

El año trópico se compone de 365,242256 *días solares medios*, o sea de 365 *días solares medios*; 5 *horas*, 48 *minutos*, 50,918 *segundos*.

(2) Los nombres de los múltiplos y submúltiplos de las unidades de peso se derivan del *gramo* y no del *kilogramo*, que es la unidad principal.

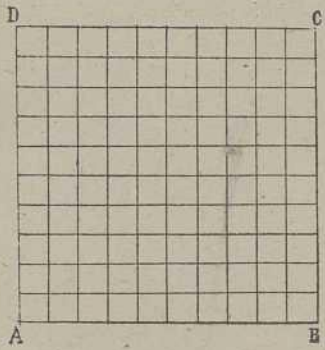
(3) La Comisión internacional adoptó solo letras minúsculas, y para distinguir *deci*, de *deca*, designó esta última con las letras, *da*. Para la palabra *miria* no adoptó abreviatura, y para *tonelada métrica* y *quintal métrico*, las letras *t*, y *q*, y además las letras griegas que citamos más adelante.

348. Las unidades de longitud son (1):

MÚLTIPLOS	Megámetro (*Meg. m*)	= 1000000 *m*	= 1000 *km*	Astronomía.
	Miriámetro (*Mm*)	= 10000	= 10 *km*	Geografía.
	Kilómetro (*km*)	= 1000	= 10 *hm*	Med. itineraria.
	Hectómetro (*hm*)	= 100	= 10 *dam*	Artillería.
	Decámetro (*dam*)	= 10	= 10 *m*	Agrimensura.
Unidad principal:	metro (*m*)	1	= 10 *dm*	
DIVISORES	decímetro (*dm*)	= 0,1	= 10 *cm*	Comercio.
	centímetro (*cm*)	= 0,01	= 10 *mm*	Industria.
	milímetro (*mm*)	= 0 001	= 1000 μ	Ciencia.
	micrón (μ)	= 0,000001	= 1000 $m\ \mu$	Metrología. Espectroscopia.
	mili-micrón $(m\ \mu)$	= 0,000000001		Microscopio.

349. Si, ABCD (Fig. 1.ª), representa un *metro cuadrado* y dividimos los lados en 10 partes iguales, cada parte representará un decímetro. Uniendo ahora los puntos de división de los lados opuestos, AD y BC, por medio de las rectas indicadas en

Fig. 1.ª



la figura, queda dividido, el metro cuadrado, en 10 *fajas de un metro de largas* y *un decímetro de altas:* si después se unen los puntos de división de los otros dos lados, AB y CD, cada faja queda dividida en 10 *decímetros cuadrados.* De suerte que el *metro* quedará dividido en $10 \times 10 = 100$ *decímetros cuadrados.*

Igualmente se verifica que cualquiera unidad superficial tiene 100 unidades del orden inmediato inferior:

(1) Las necesidades de la ciencia han motivado la adopción de múltiplos y submúltiplos superiores al miriámetro o inferiores al milímetro.

LAS UNIDADES SUPERFICIALES SON:

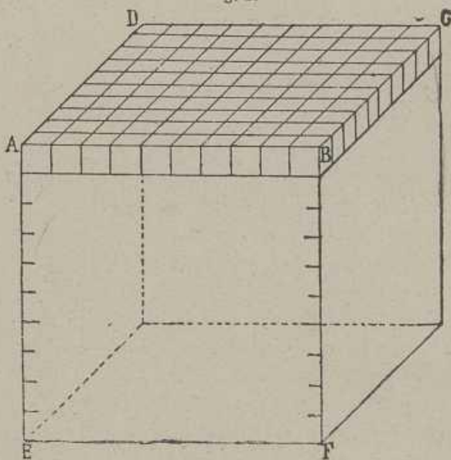
Múltiplos	Miriámetro cuadrado *(Mm 2)*	= 100000000 *m 2*	= 100 *km 2*	
	Kilómetro cuadrado *(km 2)*	= 1000000	= 100 *km 2*	
	Hectómetro cuadrado *(km 2)*	= 10000	= 100 *dam 2*	= 1 *ha*
	Decámetro cuadrado *(dam 2)*	= 100	= 100 *m 2*	= *a*
Unidad principal: metro cuadrado		= 1	= 100 *dm 2*	= *ca*
Divisores	Decímetro cuadrado *(dm 2)*	= 0,01	= 100 *cm 2*	
	Centímetro cuadrado *(cm 2)*	= 0,0001	= 100 *mm 2*	
	Milímetro cuadrado *(mm 2)*	= 0,000001		

350. El decámetro cuadrado también se llama *área* y se designa por la letra, *a;* el hectómetro cuadrado se llama entonces *hectárea (ha)* y el metro cuadrado *centiárea,* se designa por, *(ca).*

Estas unidades se emplean en la medición de las áreas de las propiedades rústicas, por lo cual se llaman *agrarias.*

351. Si, ABCDEF (Fig. 2.ª), representa un *metro cúbico* y la

Fig. 2.ª



cara superior, ABCD, que será un *metro cuadrado,* se divide en 100 *decímetros cuadrados* y para cada uno se construye un cubo cuya arista sea un *decímetro,* resultará una capa que contendrá 100 *decímetros cúbicos.* Si, AE, se divide en 10 partes iguales, cada una será de *un decímetro* y resulta que separada la primera capa de decímetros cúbicos, con lo que resta del metro cúbico, se podrian construir otras 9, iguales a ella: por lo cual el metro cúbico contiene, $100 \times 10 = 1000$, *decímetros cúbicos.*

Igualmente se verifica que cualquiera unidad cúbica contiene 1000 unidades del orden inferior inmediato (1).

Las unidades cúbicas son (2):

Unidad principal:	metro cúbico (m^3)	=	$1\ m^3$	$= 1000\ dm^3$
Divisores.	Decimetro cúbico (dm^3)	=	$0{,}001\ m_3$	$= 1000\ cm^3$
	Centímetro cúbico (cm^3)	=	$0{,}000001$	$= 1000\ mm^3$
	Milímetro cúbico ($mm3$)	=	$0{,}000000001$	

352. Las unidades de capacidad son:

Múltiplos.	Kilolitro (kl)	=	$1000\ l$	$= 10\ hl = km^3$
	Hectolitro (hl)	=	100	$= 10\ dal$
	Decalitro (dal)	=	10	$= 10\ l$
Unidad principal:	litro (l)	=	1	$= 10\ dl = 1\ dm^3$
Divisores.	Decilitro (dl)	=	0,1	$= 10\ cl$
	Centilitro (cl)	=	0,01	$= 10\ ml$
	Mililitro (ml)	=	0,001	$= 1000\ \lambda = 1\ cm^3$
	Microlitro λ	=	0,000001	$= 1\ mm^3$

353. Las unidades de peso son (3):

Múltiplos.	Tonelada métrica (t)	=	$1000\ kg$	$= 10\ q$
	Quintal métrico (q)	=	100	$= 100\ kg$
	Kilogramo (kg)	=	$1000\ g$	$= 10\ hg$
	Hectogramo (hg)	=	100	$= 10\ dag$
	Decagramo (dag)	=	10	$= 10\ g$
Unidad principal:	gramo (g)	=	1	$= 10\ dg$
Divisores.	Decigramo (dg)	=	0,1	$= 10\ cg$
	Centigramo (cg)	=	0,01	$= 10\ mg$
	Miligramo (mg)	=	0,001	$= 1000\ \gamma$
	Microgramo γ	=	0,000001	

354 Para medir las *longitudes* se emplean muchas medidas; las principales son:

Un *doble decímetro* de boj o de marfil, dividido en centímetros y milímetros: *dobles metros, metros* o *medios metros,* de metal o de madera con remates metálicos, o articulados para que se puedan plegar: *cintas métricas,* de metal o con trama metálica, o sin trama alguna, que se arrollan dentro de cajas apro-

---

(1) Es conveniente tener en la clase un decímetro cúbico cuyas caras estén divididas en centímetros cuadrados; además debe cerrarse a la altura de un centímetro, para que los alumnos se convenzan de que, conteniendo la capa separada cien centímetros, el decímetro cúbico contendrá mil.

(2) No se suelen emplear los múltiplos del metro cúbico.

(3) Los nombres de tonelada métrica y quintal métrico no siguen la regla de los múltiplos.

piadas y suelen tener de 5 a 50 metros de largas: *cadenas* de 10 metros con eslabones de dos decímetros, etc.

Las *áreas* y los *volúmenes* se miden con las unidades lineales, pero para hacerlo es preciso tener conocimientos de Geometría.

355. Las medidas más usuales para medir la capacidad son las siguientes:

Medio hectolitro, doble decalitro, decalitro, medio decalitro, doble litro, litro, medio litro, doble decilitro, decilitro, medio decilitro y *doble centilitro.*

Se construyen estas medidas en madera o metal, según el uso a que se destinen.

356. Las pesas más usuales son las siguientes:

Cincuenta kilogramos, veinte kilogramos, diez kilogramos, cinco kilogramos, dos kilogramos, un kilogramo, medio kilogramo, dos hectogramos, un hectogramo, medio hectogramo, dos decagramos, un decagramo, cinco gramos, dos gramos, un gramo, cinco decigramos, dos decigramos, un decigramo, cinco centigramos, dos centigramos, un centigramo, medio centigramo y *dos miligramos.*

357. Los dobles metros, metros y medios metros sólidos y las medidas de capacidad y peso que se hayan de emplear en el comercio, deben estar autorizadas con el sello del fiel contraste, según lo dispone el reglamento del 5 de Septiembre de 1895.

358. Las unidades de tiempo son:

El siglo, que vale	100 años.
El lustro	5 años.
El año bisiesto	366 días o 12 meses.
El año común	365 días o 12 meses.
El mes	28, ó 29 ó 30 ó 31 días.
El día	24 horas.
La hora	60 minutos.
El minuto	60 segundos.

Los meses de 31 días son Enero, Marzo, Mayo, Julio, Agosto, Octubre y Diciembre; los de 30 días, Abril, Junio, Septiembre y Noviembre. Febrero tiene 28 días los años comunes, y 29 los bisiestos (1).

(1) Son bisiestos los años divisibles por 4, excepto los terminados en dos ceros, si el número que queda a la izquierda suprimiendo los dos ceros no es divisible por 4. Así: 1700, 1800 y 1900 no son bisiestos, porque 17, 18 y 19 no son divisibles por 4; pero el año 2000 será bisiesto porque 20 es múltiplo de 4.

Hemos incluído en el sistema métrico decimal las unidades de tiempo, porque no se ha adoptado la división decimal del día.

Además de estas unidades hay la semana, que es un período de siete días.

Para medir el tiempo se emplean los relojes y los cronómetros.

359. *Monedas son los objetos que sirven para dar valor convencional a las cosas.*

Las monedas se acuñan en España con tres metales: *oro, plata* y *cobre* (1).

Ley o *título* de la pasta con que se acuña una moneda, es la cantidad de metal fino que contiene, expresada en milésimas del peso total de la pasta.

Talla o *pie* es el número de monedas que se pueden sacar de una barra cilíndrica del mismo diámetro que las monedas y de un kilogramo de peso.

La unidad principal monetaria es la *peseta*, moneda de plata que pesa 5 gramos.

MONEDAS DE ORO		
De	100	pesetas
De	50	»
De	80	»
De	10	»
De	5	»

MONEDAS DE PLATA						
Duro	5	pesetas	40	piezas en	kg.	— 25 g.
Doble peseta	2	»	100	»	»	— 10 »
Peseta	1	»	200	»	»	— 5 »
Media peseta	0,50	»	400	»	»	— 2 »
Doble décima	0,20	»	1000	»	»	— 1 »

MONEDAS DE COBRE						
Décima	0,10	pesetas	100	piezas en	kg.	— 10 g.
Media décima	0,05	»	200	»	»	— 5 »
Doble céntimo	0,02	»	500	»	»	— 2 »
Céntimo	0,01	»	1000	»	»	— 1 »

360. En el Congreso de electricistas celebrado en París en 1881, *Sir W. Thomsom (Lord Kelvin)*, propuso las unidades siguientes: *Unidad de longitud*, el *centímetro; unidad de masa*, el *gramo; unidad de tiempo*, el *segundo;* y para consignarle la notación o símbolo C G. S.; habiendo sido aprobada esta proposición.

(1) Se han acuñado monedas de 100 pesetas del Gobierno provisional en 1870 y en 1871, con el busto de D. Amadeo I. No se han acuñado monedas de oro de 50, ni de 20, ni de 5 pesetas. Por Real Orden de Marzo de 1871 se han acuñado monedas de oro de 25 pesetas de 124 piezas en kilogramo con el busto de D. Amadeo I. Pero ni éstas ni las de 100 pesetas han circulado apenas. En varias épocas se han acuñado monedas de 25 y de 10 pesetas con el busto de don Alfonso XII. En la época del Gobierno provisional se acuñó el sistema completo de monedas de plata y de cobre. En la época de D. Amadeo I no se acuñó moneda de cobre, y de las de plata solamente el duro. En la época de D. Alfonso XII se han acuñado todas las monedas de plata excepto la de 20 céntimos, y de las de cobre las de 10 y 5 céntimos. Actualmente se acuña muy poco oro y nada de cobre.

En la práctica, para expresar las unidades eléctricas ha resultado muy pequeña la unidad de longitud y muy grande la de masa, y se han adoptado estas otras:

Unidad de longitud: el *cuadrante de meridiano* o sea 10^9 *centímetros.*

Unidad de masa: 1,00000000001 *gramos.*

Unidad de tiempo: el *segundo.*

b) Sistema de pesas y medidas de Castilla

361. En el sistema de Castilla, las principales medidas, pesas y monedas, son:

Unidades de longitud. La *legua* $= 6666\frac{2}{3}$ varas, la *vara* = 3 pies, el *pie* = 12 pulgadas, la *pulgada* = 12 líneas y la *línea* = 12 puntos.

La *legua marina* = 3 millas, la *milla* $= 9\frac{7}{30}$ cables, el *cable* = 120 brazas, la *braza* = 6 pies; el *codo de ribera* = 2 pies y 9 líneas

El patrón o unidad principal de longitud es la vara de Burgos.

Unidades superficiales. Son cuadrados que tienen por lados las unidades lineales: por consiguiente, la razón de dos unidades superficiales de distinto orden es la de los cuadrados de las unidades lineales correspondientes. Así una vara cuadrada tiene 9 pies cuadrados, una pulgada cuadrada 144 líneas cuadradas, etcétera Además existen las siguientes unidades llamadas *agrarias.*

La fanega de tierra = 576 estadales cuadrados. La *aranzada* = 400 estadales cuadrados. El estadal cuadrado es un cuadrado cuyo lado es 4 varas, por consiguiente, tiene 16 varas cuadradas, o 144 pies cuadrados.

Uuidades de volumen. Son cubos cuyos lados son las unidades lineales: por consiguiente, la razón de dos unidades de volumen de distinto orden es la de los cubos de las unidades lineales correspondientes. Así, una vara cúbica tiene 27 pies cúbicos, un pie cúbico 1728 pulgadas cúbicas, etc.

Además se emplean distintas medidas cúbicas llamadas de capacidad para *áridos*, para *líquidos* y para *aceite.*

Medidas de capacidad para áridos. El *cahiz* = 12 fanegas, la *fanega* = 12 celemines, el *celemín* = 4 cuartillos.

La unidad principal es la media fanega de Avila.

Medidas de capacidad para líquidos. El *moyo* = 16 cántaras, la *cántara* = 8 azumbres, la *azumbre* = 4 cuartillos, el *cuartillo* = 4 copas.

La unidad principal es la cántara de Toledo.

Medidas de capacidad para el aceite. La *arroba* = 25 libras, la *libra* = 4 panillas.

Pesas. *La tonelada de peso* = 20 quintales, el *quintal* = 4 arrobas, la *arroba* = 25 libras, la *libra* = 16 onzas, la *onza* = 16 adarmes, el *adarme* = 3 tomines, el *tomín* = 12 granos.

La unidad principal es el *marco* (media libra del Consejo de Castilla).

Monedas del sistema antiguo (1).

De *oro*. La *onza* = 320 reales, la *media onza* = 160 reales, el *doblón* = 80 reales, la *doblilla* = 40 reales, el *escudito* = 20 reales, el *doblón* de a ciento = 100 reales.

De *plata*. El *duro* = 20 reales, el *medio duro* = 10 reales, la *peseta* = 4 reales, la *media peseta* = 2 reales, el *real*, que era la unidad principal.

De *cobre*. *Pieza de dos cuartos* = 8 maravedises, *pieza de un cuarto* = 4 maravedises, *pieza de un ochavo* = 2 maravedises. Posteriormente. *Pieza de medio real* = 0,50 de real, *pieza de cuartillo* = 0,25 de real, *décima de real* = 0,10 de real, y *media décima* = 0,05 de real.

362. Los números concretos del sistema métrico decimal se expresan por las iniciales de sus nombres, según hemos indicado en los números 347 y siguientes. Los concretos del sistema antiguo de Castilla se expresan, o con las iniciales, colocadas a continuación de los números, o con abreviaturas del nombre de las unidades que se quiere expresar (2).

---

(1) Hoy no circula ninguna de las monedas de cobre de este sistema, porque las ha recogido el Gobierno; tampoco circula la plata acuñada antes del año 1868, por la misma razón. En cuanto a las monedas de oro, tampoco circulan, porque el oro tiene por relación a la plata mayor valor que el monetario legal.

(2) Sólo a título de documento histórico incluímos en este libro el sistema de pesas, medidas y monedas de Castilla, pero no creemos que se debe incluir en el programa de examen.

II. Transformación de los números concretos

363 Los concretos se clasifican en números *incomplejos y complejos.*

Número incomplejo es el que consta de unidades de un sólo orden; por ejemplo: 4 *km;* 8 *dal.*

Número complejo es el que consta de unidades de distintos órdenes, pero el mismo género; por ejemplo:

$$4\,kg\ 6\,hg\ 5\,dag\ 4\,g\ 8\,dg. \qquad 8\,m^2\ 47\,dm^2\ 35\,cm^2.$$

En los números complejos, las unidades de *cada orden* deben ser *menos* que las que se necesitan para componer una unidad del *orden inmediato superior.*

364. Los números concretos pueden transformarse en otros equivalentes, ya sea del mismo sistema, ya sea de otro sistema. Las transformaciones en cada sistema comprenden los tres casos principales siguientes: 1.°, *convertir un número incomplejo en otro incomplejo;* 2.°, *convertir un complejo en un incomplejo;* 3.°, *convertir un incomplejo en un complejo.*

365. Primer caso. *Convertir un número incomplejo de distinto orden* (1).

Si a y b, son dos incomplejos, homogéneos equivalentes, que expresan unidades de distinto orden, siendo a, el número de unidades superiores, y m, las veces que la unidad superior contiene a la del inferior, se tendrá:

$$a \cdot m = b, \quad \text{de donde,} \quad a = \frac{b}{m}.$$

De la primera igualdad se deduce la siguiente:

Regla 1.ª *Para convertir un número incomplejo en otro incomplejo de orden inferior, se multiplica el número dado por el número de veces que la unidad superior contiene a la inferior.*

Ejemplos: 1.° Reducir 16 horas a minutos. Se multiplica el número 16 por 60 que son los minutos que tiene una hora, y el producto, 720, expresa los minutos que contienen 16 horas.

2.° Reducir 17 *hg* a gramos. Se multiplica 17 por 100, que son los gramos que vale un *hg*, el producto 1700 expresa los gramos equivalentes a 17 *hg*.

De la segunda de las igualdades se deduce la siguiente:

(1) Sólo pondremos ejemplos del sistema métrico decimal y cronométrico.

REGLA 2.ª *Para convertir un número incomplejo en otro incomplejo de orden superior, se divide el número dado por el número de veces que la unidad inferior está contenida en la superior.*

EJEMPLOS: 1.º Convertir 268 gramos en kilogramos. Se divide 268 por 1000, que es el número de gramos que tiene el kilogramo, y el cociente será el número de gramos que se pide.

$$268\ g = \frac{268}{1000}\ kg = 0{,}268\ kg.$$

2.º Convertir 26152 m en km. Dividiendo por 1000, que son los metros que tiene un km, o sea separando tres decimales, tendremos:

$$26152\ m = 26{,}152\ km.$$

366. 2.º CASO. *Convertir un complejo en incomplejo.*

Como un número complejo se compone de varios incomplejos de distintos órdenes, cuya suma es el complejo, es evidente que este problema tiene su fundamento en el problema del número anterior, cuya resolución habrá que repetir varias veces. De estas consideraciones se deducen las siguientes:

REGLA 1.ª *Para convertir un complejo en un incomplejo de su orden inferior, se convierten las unidades de orden superior en las del orden inmediato inferior, al resultado se le añaden las unidades que de este orden tenga el número complejo; se reduce esta suma al orden inmediato inferior, se agregan al resultado las unidades que haya de este orden y se continúa del mismo modo hasta haber operado con las unidades de orden inferior.*

EJEMPLOS: 1.º Convertir, 12 *días* 16 *hs* y 9 *m* en minutos. Se tendrá:

$$12\ d + 16\ h = (12 \times 24 + 16)\ h = 304\ h.$$

$$304\ h + 9\ m = (304 \times 60 + 9)\ m = 18249\ m.$$

2.º Convertir, 24 *ha* 78 *a* y 35 *ca* en centiáreas. Se tendrá:

$$24\ ha + 78\ a = (24 \times 100 + 78)\ a = 2478\ a.$$

$$2478\ a + 35\ ca = (2478 \times 100 + 35)\ ca = 247835\ ca.$$

Observación.—Cuando el número complejo es métrico decimal, no se necesita efectuar multiplicaciones. *Si el número métrico es un complejo de unidades de longitud, de capacidad o de peso, se colocan las unidades de diferentes órdenes, unas a continuación de otras, poniendo un cero en el lugar de cada orden intermedio que falte. Si el número métrico* *complejo expresa unidades de superficie o volumen, se procederá del mismo modo, pero teniendo presente que cada orden de unidades superficiales debe ocupar dos lugares; la falta de unidades de algún orden se debe suplir con dos ceros, y la carencia de decenas con uno; y cada orden de unidades de volumen debe ocupar tres lugares; la falta de unidades de algún orden se debe suplir con tres ceros, y la carencia de centenas, o centenas y decenas de algún orden, con uno o dos ceros.*

EJEMPLOS: 1.° Convertir, 1 km^2 24 hm^2 7 dam^2 y 20 m^2 en metros cuadrados.

Se tendrá:

$$1\ km^2 + 24\ hm^2 = (100 + 24)\ hm^2 = 124\ hm^2.$$

$$124\ hm^2 + 7\ dam^2 = (12400 + 7)\ dam^2 = 12407\ dam^2$$

$$12407\ dam^2 + 20\ m^2 = (1240700 + 20)\ m^2 = 1240720\ m^2$$

o de una vez, según la observación,

$$1\ km^2\ 24\ hm^2\ 7\ dam^2\ 20\ m^2 = 1240720\ m^2.$$

2.° Convertir 18 m^3 75 dm^3 y 6 cm^3, en centímetros cúbicos.

$$18\ m^3\ 75\ dm^3\ 6\ cm^3 = 18{,}075006\ m^3.$$

3.° Convertir 24 hm^3 125 m^3 y 14 cm^3, en centímetros cúbicos.

$$24\ hm^3\ 125\ m^3\ 14\ cm^3 = 24000125000014\ cm^3.$$

REGLA 2.ª *Para convertir un complejo en incomplejo de cualquier orden distinto del inferior, se convierte primero en el inferior, y el resultado se convierte en incomplejo del orden que se desea por la regla del problema anterior* (305, regla 2.ª),

Si el número es métrico, la conversión del incomplejo de orden inferior a otro orden está reducida a colocar la coma a la derecha de las unidades del orden pedido.

EJEMPLOS: 1.° Convertir 8 *horas*, 16 *minutos* y 3 *segundos* en horas. Se tendrá:

$$8\ horas + 16\ minutos = (8 \times 60 + 16)\ minutos = 496\ minutos;$$

$$496\ minutos + 3\ segundos =$$
$$= (496 \times 60 + 3)\ segundos = 29763\ segundos;$$

y como la hora tiene 3600 segundos,

$$29763 \ segundos = \frac{29763}{3600} \ horas.$$

2.º Convertir 16 *kl* 7 *hl* y 9 *l*, en hectolitros. Se tendrá:

$$16 \ kl \ 7 \ hl \ 9 \ l = 16709 \ l = 167{,}09 \ hl.$$

3.º Convertir, 24 hm^2 y 6 m^2 en hectómetros cuadrados:

$$24 \ hm^2 \ 6 \ m^2 = 240006 \ m^2 = 24{,}0006 \ hm^2$$

4.º Convertir, 1256 m^3 285 dm^3 y 75 cm^3 en metros cúbicos

$$1256 \ m^3 \ 285 \ dm^3 \ 75 \ cm^3 = 1256285075 \ cm^3 = \\ = 1256{,}285075 \ m^3.$$

367. TERCER CASO. *Convertir un incomplejo en un complejo.* Cuando un incomplejo, de un orden que no es el superior a todos, contiene más unidades que las necesarias para formar una del orden inmediato superior, se puede transformar en complejo de órdenes superiores. Para hallar las unidades del orden inmediato superior, se divide el incomplejo dado por el número de veces que la unidad inferior está contenida en la superior (365); el resto expresará unidades del orden dado, y el cociente unidades del orden inmediato superior. Con el cociente entero se procede como con el número dado, y así se continúa con los cocientes enteros sucesivos hasta llegar a un cociente del orden superior a todos, o a un cociente que no contenga ninguna unidad del orden inmediato superior. De todo esto se deduce la siguiente.

REGLA. *Para convertir un incomplejo en complejo de órdenes superiores, se reduce a su orden inmediato superior* (365, regla 2.ª), *el cociente entero al inmediato superior, y así sucesivamente hasta llegar a las unidades superiores, o a un cociente que no contenga ninguna unidad superior: el último cociente y los restos de las divisiones forman el complejo pedido.*

Observaciones.—*Si el incomplejo es métrico decimal de longitud, capacidad o peso, se separan sus cifras, de una en una, y se da a cada una la denominación que le corresponda. Si el incomplejo métrico decimal expresa unidades superficiales o de volumen, se separan sus cifras de dos en dos, o tres en tres, a derecha e izquierda de la coma, si el número no es entero, y se da a cada grupo de dos o tres cifras la denominación* *que le corresponda. Antes de hacer la transformación en las medidas superficiales, se añade un cero a la parte decimal, si el número de cifras no es par, y en las de volumen, uno o dos ceros, si el número de cifras decimales no es múltiplo de tres.*

EJEMPLOS: 1.° Convertir en complejo el incomplejo 102347 *segundos.*

La operación se dispone así:

102347 *segundos*	60		
		60	
423	1705 *minutos*		24
347	505	28 *horas*	
47 *segundos*	25 *minutos*	4 *horas*	1 *día*

luego, 102347 segundos = 1 *día* 4 *horas* 25 *minutos* y 47 *segundos.*

2.° Convertir en complejo, 5126007 *ca.*

Separando sus cifras en grupos de dos, a partir de la derecha, y teniendo presente que en las unidades agrarias no hay más que tres órdenes (350), resulta:

$$5126007\ ca = 512\ ha\ 60\ a\ 7\ ca$$

3.° Convertir en complejo 2636441,12 m^3. El número de cifras decimales debe ser múltiplo de tres, por tratarse de unidades de volumen; luego escribiremos 2636441,120 m^3 y aplicando la regla

$$2636441{,}120\ m^3 = 2\ hm^3\ 636\ dam^3\ 441\ m^3\ 120\ dm^3.$$

Si se trata de reducir un incomplejo a complejo de órdenes inferiores, el incomplejo deberá ser una fracción y la operación se llama *valuar una fracción.* De lo dicho en los casos anteriores se deduce la siguiente:

REGLA. *Para reducir un incomplejo a complejo de órdenes inferiores, o para valuar una fracción, se divide el numerador por el denominador y el cociente entero es el número de unidades del orden del incomplejo: se reduce el resto al orden inmediato inferior, el resultado se divide por el mismo denominador y el cociente entero expresará unidades del orden de su dividendo; con el resto se procede como con el anterior y así se continúa hasta llegar al último orden, o al que se haya marcado, si antes no se obtiene el resto cero.*

EJEMPLOS: 1.° Reducir a complejo $\frac{15}{11}$ del *día.*

La operación se dispone del modo siguiente:

15 *días*	11
4 »	1 *día* 8 *horas* 43 *minutos* 38,18 *segundos*
96 *horas*	
8 »	
480 *minutos*	
40	
7 »	
420 *segundos*	
90	
20	
90	
2	

Este cociente es el complejo equivalente a $\frac{15}{11}$ *días.*

2.° Reducir a incomplejo o complejo decimal $\frac{4}{7}\,m^2$:

$4\ m^2$	7
40	$0,(571428)\ m^2 = 57\ dm^2\ 14\ cm^2\ 28\ mm^2$
50	
10	
30	
20	
60	
4	

368 La transformación de concretos de un sistema a otro se efectúa con el auxilio de igualdades o equivalencias entre las unidades de ambos sistemas: y se funda en el siguiente:

TEOREMA. *Si se multiplican varias equivalencias tales que el segundo miembro de cada una sea homogéneo y del mismo orden que el primer miembro de la siguiente, el producto es una equivalencia cuyo primer miembro es homogéneo y del mismo orden que el primer miembro de la primera, y cuyo segundo miembro es homogéneo y del mismo orden que el segundo miembro de la última.*

Supongamos primero que las equivalencias son dos y que los subíndices, $m, n, p,$ marquen la especie de unidades a que se refieren los números A, B, D.

$$\begin{array}{l} A_m = B_n \\ C_n = D_p \end{array}$$

Multiplicando la primera equivalencia por C y la segunda por B; se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} (A \,.\, C)_m = (B \,.\, C)_n \\ (B \,.\, C)_n = (B \,.\, D)_p \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{de donde se deduce:} \\ (A \,.\, C)_m = (B \,.\, D)_p. \end{array}$$

Sea ahora cualquier número de equivalencias. Multiplicando como hemos dicho antes las dos primeras; la equivalencia obtenida por la tercera, lo que resulte por la cuarta y así sucesivamente hasta la última, llegaremos a la equivalencia.

$$\begin{aligned} A_m &= B_n \\ C_n &= D_p \\ E_p &= F_q \\ G_q &= H_r \end{aligned}$$

$$(A \,.\, C \,.\, E \,.\, G)_m = (B \,.\, D \,.\, F \,.\, H)_r\,,$$

conforme se quería demostrar.

Si A fuese un número desconocido, dividiendo los dos miembros de la equivalencia anterior por C . E . G, tendríamos:

$$A_m = \left(\frac{B \,.\, D \,.\, F \,.\, \cancel{G}}{C \,.\, E \,.\, \cancel{G}}\right)_r$$

de cuya igualdad se deduce la siguiente:

Regla. *Para transformar un concreto en otro equivalente de distinto sistema cuando ambos sistemas están ligados por equivalencias intermedias, se disponen éstas de modo que el primer miembro de la primera sea el número que se busca, que designaremos por,* x, *y el segundo el concreto conocido equivalente con él; y debajo de esta equivalencia las demás equivalencias dadas, dispuestas de modo que el primer miembro de cada una sea homogéneo y del mismo orden que el segundo miembro de la anterior* (1); *se multiplican miembro a miembro, el producto de los segundos miembros se divide por el producto de todos los factores del primero a excepción de* x, *y el cociente obtenido será el número desconocido que se busca* (2).

Cuando sólo se trata de pasar del sistema antiguo de Castilla al métrico decimal o viceversa, el problema es muy sencillo, porque para resolverle bastan dos equivalencias.

Las principales equivalencias entre los dos sistemas son (3).

---

(1) El segundo miembro de la última resultará homogéneo y del mismo orden que el primero de la primera.

(2) Esta regla se llama *conjunta;* y si tiene por objeto la conversión de monedas o valores comerciales se llama regla de *cambio* o de *arbitraje*.

(3) Ponemos estas equivalencias con las cifras decimales que se acostumbra y porque así son legales; pero advertimos que en casi todas son ilusorias las cifras desde la cuarta en adelante. Sólo merecen fe las relaciones determinadas entre las unidades (de longitud y masa) francesas, inglesas y rusas, con el metro y kilogramo, porque las ha hallado la Comisión internacional de pesas y medidas.

1 *legua*	=	5,572705 *km*	1 *km*	=	0,179446 *leguas*
1 *vara*	=	0,835905 *m*	1 *m*	=	1,196307 *varas*
1 *vara* 2	=	0,698737 *m* 2	1 *m* 2	=	1,431153 *varas* 2
1 *fanega*	=	0,643956 *ha*	1 *ha*	=	1,552901 *fanegas*
1 *vara* 3	=	0,584078 *m* 3	1 *m* 3	=	1,712100 *varas* 3
1 *cuartillo*	=	0,50416 *l*	1 *l*	=	1,983512 *cuartillos*
1 *fanega*	=	0,55501 *hl*	1 *hl*	=	1 801769 *fanegas*
1 *libra*	=	0,460093 *kg*	1 *kg*	=	2,173474 *libras*
1 *arroba*	=	11,502325 *kg*	1 *kg*	=	0,086939 *arrobas*

También se suelen emplear las siguientes equivalencias, aunque son menos aproximadas.

51 *m*	=	61 *varas;*	39 *km*	=	7 *leguas;*
7 *m* 2	=	10 *varas* 2;	9 *ha*	=	14 *fanegas;*
7 *m* 3	=	12 *varas* 3;	60 *l*	=	119 *cuartillos;*
5 *hl*	=	9 *fanegas;*	46 *kl*	=	4 *arrobas:*

Ejemplos: 1.º Convertir 165 *varas* en *metros.*

De las primeras equivalencias se deduce:

$$\left.\begin{aligned} x\ m &= 165\ varas \\ 1\ vr. &= 0{,}835905\ m \end{aligned}\right\} \text{de donde,} \quad \begin{aligned} x\ m &= 165 \times 0{,}835905\ m \\ &= 137{,}924\ m. \end{aligned}$$

Empleando las segundas equivalencias:

$$\left.\begin{aligned} x\ m &= 165\ vr. \\ 61\ vr. &= 51\ m \end{aligned}\right\} \text{de donde, } x\ m = \frac{165 \times 51}{61}\ m = 137{,}95\ m.$$

2.º Convertir 214 *fanegas* de tierra en *hectáreas.*

En virtud de las primeras equivalencias:

$$\begin{aligned} x\ ha &= 214\ faneg \\ 1\ faneg &= 0{,}643956\ ha \end{aligned}$$

de donde, $x\ ha = 214 \times 0{,}643956\ ha = 137{,}8066\ ha.$

Empleando las segundas equivalencias:

$$\begin{aligned} x\ ha &= 214\ faneg \\ 14\ faneg &= 9\ ha \end{aligned}$$

de donde, $$x\ ha = \frac{214 \times 9}{14}\ ha = 137{,}5414\ ha.$$

CAPÍTULO II

LAS OPERACIONES CON LOS NÚMEROS CONCRETOS

369 La definición general de la adición (225) es aplicable a los números concretos. De dicha definición se deduce que los sumandos deben ser *homogéneos.*

Para sumar números concretos se pueden reducir a incomplejos del mismo orden, sumarlos como abstractos y dar a la suma la denominación de los sumandos.

Ejemplos: 1.º Sumar 6 *ha* 12 *a* y 45 *ca*, con 9 *ha* 7 *a* y 2 *ca*.

6 *ha* 12 *a* 45 *ca* = 61245 *ca*
9 „ 7 „ 2 „ = 90702 „

151947 *ca* = 15 *ha* 19 *a* 47 *ca*.

2.º Sumar 4 *días* 16 *h* 28 *m*, con 9 *días* 21 *h* 19 *m*.

4 *días* 16 *h* 28 *m* = 6748 *m*.
9 „ 21 „ 19 „ = 14239 „

20987 *m*. = 14 *días* 13 *h* 47 *m*.

Los números complejos se pueden sumar también sin reducirlos a incomplejos, por la siguiente:

Regla. *Para sumar números complejos se escriben unos debajo de otros de modo que se correspondan las unidades de todos los órdenes, se suman separadamente las unidades de cada orden, comenzando por las del orden inferior y se deducen de cada suma parcial las unidades que contenga del orden inmediato superior para agregarlas a la suma de este orden.*

Ejemplo: Sumar los números siguientes:

8	*horas*	16	*minutos*	42	*segundos*
3	„	34	„	24	„
2	„	„	„	51	„
13	*horas*	51	*minutos*	56	*segundos*

370. La definición general de substracción (231) es aplicable a los números concretos, y supone que el minuendo y el substraendo son *homogéneos*.

Para restar números concretos se puede reducirlos a incomplejos del mismo orden, restarlos como los abstractos y dar a la diferencia la denominación común a minuendo y substraendo.

Ejemplos: 1.º Restar de

86 *kg* 4 *hg* y 5 *g*; 29 *kg* 6 *hg* 4 *dag* y 8 *g*.

86 *kg* 4 *hg* 0 *dag* 5 *g* = 86405 *g*
29 „ 6 „ 4 „ 8 „ = 29648 „

56757 *g* = 56 *kg* 7 *hg* 5 *dag* 7 *g*.

2.º Restar de

$$9 \textit{ días } 18 \textit{ horas } 39 \textit{ minutos } 5 \textit{ días } 20\ h\ 24\ m.$$

$$9 \textit{ días } 18\ h\ 39\ m = 14079\ m.$$
$$5 \text{ » } 20 \text{ » } 24 \text{ » } = 8424 \text{ »}$$

$$5655\ m. = 3 \textit{ días } 22\ h\ 15\ m.$$

Los números complejos se pueden restar sin reducirlos a incomplejos por la siguiente:

Regla. *Para restar números complejos se escribe el substraendo debajo del minuendo de modo que se correspondan las unidades de todos los órdenes: se resta de las unidades de cada orden del minuendo las correspondientes del substraendo, comenzando por las de orden inferior; si algún minuendo es menor que el substraendo correspondiente, se le añade una unidad del orden inmediato superior descompuesta en unidades de su orden, y en la substracción parcial siguiente se añade al substraendo una unidad para compensar la que se añadió al minuendo.*

Ejemplo: Restar los números siguientes:

8	*horas*	16	*minutos*	22	*segundos*
5	„	48	„	33	„
2	*horas*	27	*minutos*	49	*segundos*

371. La regla de las equivalencias, explicada en el número 334, nos proporciona medios de resolver multitud de cuestiones sencillas que se conocen con los nombres de multiplicación y división de concretos.

Las cuestiones a que nos referimos se reducen a tres problemas.

372. Problema. 1.º *Dado el valor de una unidad concreta por su equivalencia con un número concreto, expresado por otras unidades homogéneas o heterogéneas con aquéllas, hallar un número concreto homogéneo con estas últimas unidades, conociendo su equivalencia en unidades homogéneas con la primera* (1).

(1) Este problema es el llamado multiplicación de números concretos. Pierden la dificultad que ofrecían para los principiantes las operaciones con los números concretos, siendo éstos métrico decimales, como lo deben ser en lo sucesivo, pues todos debemos contribuir a desechar de una vez para siempre el antiguo sistema de pesas y medidas.

Se puede expresar de un modo general las equivalencias que resuelven este problema, con arreglo a lo dicho en el número 368, del modo siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x_m &= a_n \\ 1_n &= b_m \end{aligned}\right\} \text{ de donde, } x_m = \left(\frac{a\,.\,b}{1}\right)_m = (ab)_m$$

EJEMPLOS. 1.° Si un *franco* cuesta 1 *peseta* y 35 *céntimos*, ¿qué cantidad en pesetas necesitaremos para pagar 5859 *francos*?

x *ptas.* = 5859 *frs.*
1 *fr.* = 1,35 *ptas.*
x *ptas.* = 5859 × 1,35 *ptas.* =7909,65 *ptas.*

2.° Si una *libra esterlina* cuesta 30 *pesetas* y 10 *céntimos*, ¿cuánto costará 295 *libras esterlinas*? (1)

x *ptas.* = 295 *libras esterlinas*
1 *lib. ester.ª* = 30,10 *ptas.*
x *ptas.* = 295 × 30,10 *ptas.* = 8879,50 *ptas.*

3.° Un *hectolitro* de trigo cuesta 19 *pesetas* y 45 *céntimos*, ¿cuánto costarán 65 *hl* y 7 *dal*?

x *ptas.* = 65,7 *hectolitros*
1 *hectolitro* = 19,45 *ptas.*

de donde,

x *ptas.* = 65,7 × 19,45 *ptas.* = 1277,865 *ptas.*

4.° Un *metro* de tela cuesta 8 *pesetas* y 15 *céntimos*, ¿cuánto constarán 17 *metros* y 75 *centímetros*?

x *ptas.* = 17,75 *m.*
1 *m.* = 8,15 *ptas.*
x *ptas.* = 17,75 × 8,15 *ptas.* = 152,8125 *ptas.*

En este resultado sólo se necesitan dos cifras decimales, porque la menor parte monetaria de la peseta es el céntimo, por lo cual lo dejaremos reducido a 152 *ptas.* y 81 *cénts.*

Observación.—Cuando no se hayan de apreciar todas las cifras decimales se copian sólo las que se hayan de apreciar, tal como

---

(1) Nuestra moneda de plata no tiene en el extranjero todo su valor, principalmente porque en España no circula el oro; por este motivo, aunque los francos en plata tienen el mismo valor intrínseco que las pesetas, nuestra peseta vale menos de un franco. La libra esterlina (unidad monetaria de Inglaterra) debería valer 25 pesetas.

están si la parte despreciada vale *menos* de media unidad del último orden que queda y añadiendo a la última una unidad si vale *más*.

En el ejemplo anterior hemos formado, para resultado, 152,81 *ptas.;* pero si el decimal con más de dos cifras hubiese sido, 152,8174, hubiésemos dicho que los 17,75 *m* de tela costaban 152,82 *ptas.;* añadiendo una unidad a la cifra de las centésimas.

La regla práctica es: Si la primera cifra que se desprecia es *menor que* 5, se copian las otras cifras *como están*, y si es 5 o *mayor que* 5 se aumenta a la última cifra que se aprecia *una unidad*.

373. PROBLEMA 2.° *Dado el valor de una unidad concreta por su equivalencia con un número concreto, expresado por otras unidades, homogéneas o heterogéneas con ella, hallar un número concreto homogéneo con la primera unidad, conociendo su equivalencia en unidades homogéneas con las segundas* (1).

Se expresan de un modo general las equivalencias que resuelven este problema del modo siguiente (368):

$$\left.\begin{aligned} x_m &= a_n \\ b_n &= 1_m \end{aligned}\right\} \text{ de donde } x_m = \left(\frac{a\,.\,1}{b}\right)_m = \left(\frac{a}{b}\right)_{m.}$$

EJEMPLOS: 1.° ¿Cuántas *acciones* de una mina se podrán comprar con 8290 *pesetas*, costando una *acción* 165 *pesetas?*

$$\begin{aligned} \text{x } &\textit{acciones} = 8290 \textit{ pesetas} \\ 165 &\textit{ pesetas} = 1 \textit{ acción.} \end{aligned}$$

de donde x *acciones* $= \frac{8290}{165}$ *acciones* $= 50 \frac{40}{165}$ *acciones;* luego se podrán comprar 50 acciones y una participación de $\frac{40}{165}$ en otra acción, o reservarse el sobrante de 40 pesetas en metálico.

2.° Una fuente arroja 1 *metro cúbico* de agua en 48 *minutos*, ¿cuánta agua arrojará en 9 *horas* y 37 *minutos?*

$$\begin{aligned} \text{x } m^3 &= 9 \textit{ horas } 37 \textit{ mints.} \\ 48 \textit{ mints.} &= 1\, m^3 \end{aligned}$$

o bien,

$$\begin{aligned} \text{x } m^3 &= 577 \textit{ mints.} \\ 48 \textit{ mints.} &= 1\, m^3 \end{aligned}$$

$$\text{de donde, x } m^3 = \frac{577}{48} m^3 = 12{,}020833\, m^3.$$

(1) Este problema es el que se considera como una división de concretos homogéneos.

374. Problema 3.° *Dado el valor de un número concreto por su equivalencia con otro concreto, homogéneo o heterogéneo con él, hallar, en unidades homogéneas con uno de los dos concretos, el valor de una unidad homogénea con el otro* (1).

Se expresan de un modo general las equivalencias que resuelven este problema del modo siguiente (368):

$$\left.\begin{array}{l} x_m = 1_n \\ a_n = b_m \end{array}\right\} \text{ de donde, } x_m = \left(\frac{1\ .\ b}{a}\right)_m = \left(\frac{b}{a}\right)_m .$$

Ejemplos: 1.° Si por un solar de 2722 *metros cuadrados* se han pagado 37450 *pesetas*, ¿cuál es el valor del *pie cuadrado?*

$$x \textit{ pesetas} = 1\ m^2$$
$$2722\ m^2 = 37450 \textit{ pesetas.}$$

de donde, $x \textit{ pesetas} = \frac{37450}{2722} \textit{ pesetas} = 13{,}76 \textit{ pesetas}$, con menor error de ½ céntimo por exceso (2)

2.° Si un coche ha recorrido 105 *km* y 390 *m* en 9 *horas* y 45 *minutos*, ¿cuánto habrá recorrido por *hora?*

$$x\ km = 1 \textit{ hora}$$
$$9 \textit{ horas } 45 \textit{ minutos} = 105\ km\ 390\ m$$

o reduciendo a incomplejos de horas y kilómetros.

$$x\ km = 1 \textit{ hora}$$
$$\frac{585}{60} \textit{ hora} = 105{,}390\ km,$$

de donde,

$$x\ km = 105{,}390 : \frac{585}{60}\ km = 10{,}809\ km,$$

es decir, 10 *km* 809 *m*.

---

(1) Este problema es el que se considera como división de concretos heterogéneos.

(2) Cuando el resto es menor que la mitad del divisor, añadiéndole un cero forma un número que contiene menos de cinco veces al divisor, y si el resto es igual o mayor que el divisor, añadiéndole un cero contiene cinco o más veces al divisor; por lo cual si el resto es menor que el divisor se toma el cociente por *defecto*, y si es igual o mayor que el divisor, por *exceso*. En nuestro ejemplo, el resto correspondiente a los céntimos de peseta fué 2250, mayor que la mitad del divisor, 2722, por lo cual a la cifra, 5, de los céntimos la hemos añadido una unidad y en vez de 13'75 pesetas, hemos tomado 13'76 pesetas.

3.° Si por 2437 *pesetas* se cambian 2365 *francos*, ¿cuántos *francos* se cambian por una *peseta?*

$$x \textit{ francos} = 1 \textit{ peseta}$$
$$2487 \textit{ pesetas} = 2365 \textit{ francos}$$

de donde, $$x \textit{ francos} = \frac{2365}{2487} \textit{ francos} = 0{,}97 \textit{ francos}.$$

4.° Si por 5249 *pesetas* se han comprado 125 *hl* 4 *dal* y 8 *l* de vino, ¿a cómo cuesta el *hectolitro?*

$$x \textit{ pesetas} = 1 \textit{ hl}$$
$$125{,}48 \textit{ hl} = 5249 \textit{ pesetas}$$

de donde, $$x \textit{ pesetas} = \frac{5249}{125{,}48} = 41{,}83 \textit{ pesetas}.$$

CAPÍTULO III

COMPARACIÓN DE LOS NÚMEROS CONCRETOS

I. La proporcionalidad de los números concretos en general

375. *La relación de dos cantidades homogéneas es igual a la relación de los números que las miden, con una unidad arbitraria, homogénea con las cantidades.*

Sean, A y A', las cantidades; U, la unidad adoptada, y, a, a', los números que las miden con dicha unidad. Tendremos:

$$\frac{A}{U} = a, \quad \frac{A'}{U} = a',$$

de donde, $$A = Ua, \quad A' = Ua';$$

dividiendo miembro a miembro y suprimiendo el factor común, U, resulta:

$$\frac{A}{A'} = \frac{a}{a'}.$$

376. Dos magnitudes variables pueden depender una de otra de tal modo que a *cada valor* de una de ellas *corresponda un valor* y *sólo uno* de la otra.

Dos magnitudes, así enlazadas, *son directamente proporcionales cuando la razón de dos valores de la primera es igual a la razón de los valores correspondientes de la segunda,* Si, A y B, son dos magnitudes *directamente proporcionales* y, A_1, A_2 y B_1, B_2, dos pares de valores correspondientes, se tendrá por definición,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Si se miden las magnitudes, A y B, con unidades arbitrarias, pero homogéneas con ellas, y designamos por a_1, a_2 y b_1, b_2, los números que miden los valores correspondientes: de la proporción anterior, resultará (375):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \qquad [1]$$

y cambiando de lugar los medios en la proporción [1],

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \qquad [2]$$

377. De la proporción [2] se deduce: *que la relación de dos valores correspondientes o de los números que los miden, en dos cantidades directamente proporcionales, es constante* (1).

Como consecuencia de esta propiedad, *si multiplicamos un valor,* a_1, *por un número cualquiera, el correspondiente,* b_1, *quedará multiplicado por el mismo número.*

Porque si la razón, $\frac{a_1}{b_1}$ ha de permanecer constante, cuando se multiplique el antecedente, a_1, por un número m, el consecuente se debe multiplicar por el mismo número para que la razón no varíe. Así:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 m}{b_1 m}$$

378. Recíprocamente. *Si multiplicando un valor,* a_1, *por un número cualquiera,* m, *el correspondiente,* b_1, *queda multiplicado por el mismo número, las cantidades son directamente proporcionales* (2).

---

(1) En lo sucesivo llamaremos proporcionales a las cantidades directamente proporcionales.

(2) En la práctica, el multiplicador, m, es siempre entero y aún suele ser el número 2. Se puede demostrar que si el teorema es cierto cuando m es entero, también lo es cuando es fraccionario o inconmensurable.

Supongamos que $a_1 m = a_2$, y designemos por b_2, el valor correspondiente a a_2; tendremos en virtud de la hipótesis, $b_1 m = b_2$ y dividiendo ordenadamente las dos igualdades:

$$\frac{a_1 m}{b_1 m} = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{o} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

y cambiando de lugar los medios,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

379. La demostración de la proporcionalidad de las magnitudes pertenece a la ciencia en que se las estudia y no a la aritmética; pero en muchos casos el sentido común nos indica esta proporcionalidad ayudándonos de la regla que contiene el teorema del número 378.

Así: El camino recorrido por un cuerpo que se mueve con una velocidad constante es proporcional al tiempo que dura el movimiento. El valor de una partida de trigo es proporcional a la cantidad de trigo, etc.

380. *Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando la razón de dos valores de la primera magnitud es igual a la razón inversa de los valores correspondientes de la segunda.*

Si, A_1, A_2, son dos valores de la primera magnitud y, B_1 B_2, los correspondientes de la segunda, se tendrá:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_2}{B_1},$$

o bien, entre los números que los miden (375):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}. \qquad [3]$$

de donde se deduce,

$$a_1 b_1 = a_2 b_2. \qquad [4]$$

381. De la igualdad [4] se deduce: *que el producto de dos valores correspondientes o de los números que los miden, en dos cantidades inversamente proporcionales, es constante* (1).

(1) Entre las cantidades se tiene la igualdad $A_1 B_1 = A_2 B_2$, y midiéndolas con unidades U y V se tendrá $\frac{A_1}{U} \cdot \frac{B_1}{V} = \frac{A_2}{U} \cdot \frac{B_2}{V}$; o bien $a_1 b_1 = a_2 b_2$.

Como consecuencia de esta propiedad: *Si multiplicamos un valor,* a_1, *por un número cualquiera, el correspondiente,* b_1, *quedará dividido por el mismo número.*

En efecto: si el producto $a_1\, b_1$, ha de ser constante cuando a_1, se multiplique por m, el factor, b_1, habrá que dividirle por el mismo número para que el producto no varíe. Así:

$$a_1\, b_1 = (a_1\, m)\, \frac{b_1}{m}.$$

382. Recíprocamente. *Si multiplicando un valor,* a_1, *por un número cualquiera,* m, *el correspondiente* b_1 *queda dividido por el mismo número,* m, *las cantidades son inversamente proporcionales* (1).

Supongamos que, $a_1\, m = a_2$, y sea b_1, el valor correspondiente a a_1, tendremos: $\frac{b_1}{m} = b_2$, y multiplicando ordenadamente las dos igualdades,

$$a_1\, m\, \frac{b_1}{m} = a_2 b_2, \qquad \text{o} \qquad a_1 b_1 = a_2 b_2.$$

383. La proposición anterior se utiliza muchas veces para averiguar si dos magnitudes son inversamente proporcionales.

Así: El tiempo empleado, por un cuerpo que se mueve uniformemente, en recorrer una distancia dada, es inversamente proporcional a su velocidad. El tiempo necesario para que varios operarios concluyan una obra es inversamente proporcional al número de operarios, etc.

384. Cuando una magnitud, M, depende de otras varias, A, B, C, D, para saber con cuáles es directa y con cuáles inversamente proporcional, se supone que varía una de las magnitudes A, B, C, D, y que las demás permanecen constantes. A y M, serán directamente proporcionales si variando sólo A, la razón de dos valores suyos es igual a la de sus correspondientes de M; y serán inversamente proporcionales si la razón de dos valores de A, es igual a la razón inversa de los correspondientes de M.

---

(1) En la práctica, el multiplicador, m, suele ser el número 2. Pero se puede demostrar que si el teorema es cierto cuando m es entero, también lo es cuando m es fraccionario o inconmensurable.

385. Sea M, una magnitud directamente proporcional con A y B, e inversamente proporcional con C y D, y sean,

$$m_1\ a_1\ b_1\ c_1\ d_1$$
$$m_2\ a_2\ b_2\ c_2\ d_2$$

dos series de valores correspondientes (1).

Designemos por m', m'', m''', los valores que toma M cuando A, B, C, pasan sucesivamente de los valores a_1, b_1, q_1, a los valores a_2, b_2, c_2, tendremos, entre los valores correspondientes (376 y 380):

$$\left.\begin{array}{ccccc} m_1 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ m' & a_2 & b_1 & c_1 & d_1 \\ m'' & a_2 & b_2 & c_1 & d_1 \\ m''' & a_2 & b_2 & c_2 & d_1 \\ m_2 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{m_1}{m'}=\dfrac{a_1}{a_2}, \\ \dfrac{m'}{m''}=\dfrac{b_1}{b_2}, \\ \dfrac{m''}{m'''}=\dfrac{c_2}{c_1}, \\ \dfrac{m'''}{m_2}=\dfrac{d_2}{d_1}, \end{array}$$

y multiplicando ordenadamente y simplificando el primer miembro, $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{a_1}{a_2}\cdot\dfrac{b_1}{b_2}\cdot\dfrac{c_2}{c_1}\cdot\dfrac{d_2}{d_1}$.

Esta igualdad manifiesta: *que la razón de dos valores de una magnitud que depende de otras varias, es igual al producto de las razones directas de los valores correspondientes de las magnitudes con las que es directamente proporcional, multiplicado por el producto de las razones inversas de los valores correspondientes de las magnitudes con las que es inversamente proporcional.*

II. Reglas de tres simple y compuesta

Regla de tres simple

386. El problema de la regla de tres simple se puede enunciar del modo siguiente:

Conocidos dos valores correspondientes de dos cantidades directa o inversamente proporcionales, hallar el valor de una de ellas, correspondiente a un nuevo valor dado a la otra.

---

(1) Podemos desde luego suponer que son valores numéricos; pero la propiedad que vamos a demostrar tiene lugar también entre las magnitudes, sin referir a unidad alguna.

La regla de tres simple es *directa* cuando las cantidades a que se refiere la cuestión son directamente proporcionales, e *inversa* cuando son inversamente proporcionales.

387. Regla de tres directa. Si, A y B, son dos cantidades proporcionales, y a_1, b_1, dos valores correspondientes, nos proponemos hallar el valor x, de A, correspondiente al valor, b_2, de B. Se tendrá (375):

$$\frac{x}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}, \text{ de donde, } x = a_1 \times \frac{b_2}{b_1}.$$

Luego: *en la regla de tres simple directa el valor de la incógnita,* x, *se obtiene multiplicando el valor conocido del mismo género por la razón directa del nuevo valor de la otra cantidad al que antes tenía.*

Ejemplo: Si un cuerpo, que se mueve uniformemente, recorre en 48 minutos 17 kilómetros, ¿cuánto recorrerá en 2 horas y 26 minutos, suponiendo que lleva la misma velocidad?

En doble tiempo recorrerá doble espacio; luego el espacio recorrido y el tiempo tardado en recorrerle son directamente proporcionales (376); entonces tendremos, reduciendo a minutos las 2 horas y 26 minutos.

$$x\,km = 17\,km \times \frac{146}{48} = 51{,}708\,km.$$

388. Regla de tres inversa. Si, A y B, son dos cantidades inversamente proporcionales, y, a_1, b_1, dos valores correspondientes, nos proponemos hallar el valor, x, de A, correspondiente al valor, b_2, de B. Se tendrá (380):

$$\frac{x}{a_1} = \frac{b_1}{b_2}, \text{ de donde, } x = a_1 \times \frac{b_1}{b_2}.$$

Luego: *en la regla de tres simple inversa, el valor de la incógnita* x, *se obtiene multiplicando el valor conocido del mismo género por la razón inversa del nuevo valor de la otra cantidad al que tenía antes.*

Ejemplo: Si un tren, con la velocidad de 36 *km* por hora, ha tardado en recorrer cierta distancia 27 minutos, ¿cuánto tardará en recorrer la misma distancia cuando su velocidad sea 53 *km* por hora?

A doble velocidad corresponde la mitad del tiempo para recorrer la misma distancia; luego el tiempo y la velocidad son inversamente proporcionales (382); entonces tendremos:

$$x\,m = 27\,m \times \frac{36}{53} = 18\,m\;20{,}38\;seg.$$

Regla de tres compuesta

389. El problema de la regla de tres compuesta se puede enunciar del modo siguiente: *Si una cantidad* M, *depende de otras varias,* A, B, C, D, *y conocemos un valor* m_1, *de la primera, correspondiente a los valores,* a_1, b_1, c_1, d_1, *de las otras,* hallar un nuevo valor x, de M, que corresponda a los valores a_2, b_2, c_2, d_2, *de las otras unidades.*

Supongamos que la cantidad M, es directamente proporcional con A y B, e inversamente proporcional con C y D, tendremos (385):

$$\frac{x}{m_1} = \frac{a_2}{a_1} \times \frac{b_2}{b_1} \times \frac{c_1}{c_2} \times \frac{d_1}{d_2},$$

de donde,

$$x = m_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{b_2}{b_1} \times \frac{c_1}{c_2} \times \frac{d_1}{d_2}.$$

Luego: *en la regla de tres compuesta, el valor de la incógnita* x *se obtiene multiplicando el valor conocido del mismo género por las razones directas, de los nuevos valores a los antiguos, para las cantidades directamente proporcionales con la del mismo género que la incógnita, y por las razones inversas, de los valores nuevos a los antiguos, para las cantidades inversamente proporcionales con las del mismo género que la incógnita.*

Ejemplo: Si en 124 *horas*, 65 *obreros* han abierto una zanja de 845 *metros* de larga, 2m de ancha, 0,75m de profundidad, en un terreno cuya *resistencia* está representada por 4, siendo 3 el número que representa la *fuerza* de cada obrero, ¿cuántas *horas* tardarán 82 *obreros*, en abrir otra zanja de 1000m de larga, 250 m de ancha, 1m de profunda, siendo 3 la *resistencia* del terreno y 3,5 la *fuerza* de cada obrero?

Dispondremos el ejemplo del modo siguiente:

	i	d	d	d	d	i
Horas	*Obreros*	*Largo*	*Ancho*	*Profundo*	*Resistencia*	*Fuerza*
124	65	845	2	0,75	4	3
x	82	1000	2,50	1	3	3,5

Comparando con las horas cada una de las demás cantidades, se ve que el número de horas necesarias para abrir la zanja es inversamente proporcional al número de obreros y a la fuerza de cada uno, y directamente proporcional al largo, ancho y profundidad de la zanja y a la resistencia que opone el terreno; luego:

$$x\ hors. = 124 \times \frac{65}{82} \times \frac{1000}{845} \times \frac{2,50}{2} \times \frac{1}{0,75} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{3,5} =$$
$$= 124\ hrs.\ 38\ m.$$

con un error menor de medio minuto por exceso.

Al hacer las operaciones se deben suprimir los factores comunes del numerador y denominador, para simplificar todo lo posible el cálculo.

III. Reglas de interés y descuento

Regla de interés simple

390. Cuando se presta un capital durante cierto tiempo el prestamista se indemniza recibiendo además del capital prestado, una cierta cantidad que se llama *interés* o *renta.*

El interés se regula por comparación con un capital de 100 pesetas, que se supone prestado durante un año en las mismas condiciones que el capital que se considera. El interés de 100 pesetas en un año se llama *rédito* o *tanto por ciento. El interés es proporcional al capital prestado.*

Se puede admitir: que el interés es *proporcional al tiempo que dura el préstamo,* o sea que el capital es invariable durante este tiempo, y entonces se llama *interés simple:* o que por intervalos iguales (generalmente de un año) se acumulan al capital para producir a su vez otro interés, en este caso se llama *interés compuesto.*

En los casos de interés simple, generalmente el prestatario paga por intervalos iguales (de un año, de un semestre, etc.) el interés del capital que ha recibido y al terminar el tiempo estipulado devuelve también el capital.

Por ahora sólo nos ocuparemos en cuestiones de interés simple.

391. Designemos por c, el capital que se presta; por t, el tiempo que dura el préstamo: por i, el interés que produce, y por r, la renta, o tanto por 100, que es, como hemos dicho, el interés del capital 100 en un año.

Por ser el interés proporcional al capital y al tiempo, tendremos que resolver un problema de regla de tres compuesta, que dispondremos del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{ccc} r & 1 & 100 \\ i & t & c \end{array}\right\} \text{ de donde, (389) } i = r \times \frac{t}{1} \times \frac{c}{100},$$

o bien,

$$i = \frac{ctr}{100}. \qquad [I]$$

La *fórmula* [I] se ha obtenido en la hipótesis de que la unidad de tiempo es un año, por consiguiente, si el tiempo t se expresa en meses, se tendrá presente que cada mes es $\frac{1}{12}$ de año, y por tanto si $t = p$ meses, será,

$t = \frac{p}{12}$, luego la fórmula (1) se convertirá en,

$$i = \frac{c \,.\, \frac{p}{12} \,.\, r}{100} = \frac{cpr}{1200},$$

y si t se expresa en días, será, $\frac{p}{360}$, ó $\frac{p}{365}$, según que se admita, como se hace muchas veces en el comercio, que el año tiene 360 días ó 365, de donde,

$$i = \frac{cpr}{36000}, \quad \text{ó} \quad i = \frac{cpr}{36500}.$$

Ejemplo: Hallar el interés de un capital de 3428 *pesetas* al 6 por % (se lee al 6 por 100) en 7 *meses*.

Haremos: $c = 3428$; $t = \frac{7}{12}$ y $r = 6$, de donde,

$$i = \frac{3428 \times 7 \times 6}{1200} = 119{,}98 \textit{ pesetas}.$$

392. De la fórmula [I] se deduce multiplicando por 100 los dos miembros:

---

(1) Fórmula es una expresión donde están indicadas las operaciones que se deben efectuar para resolver un problema.

$$\left.\begin{array}{l} 100\,i = c\,t\,r \\ c = \dfrac{100\,i}{t\,r} \\ t = \dfrac{100\,i}{c\,r} \\ r = \dfrac{100\,i}{c\,t} \end{array}\right\}$$

y dividiendo sucesivamente por tr, cr y ct, se hallan otras tres fórmulas que sirven para resolver las cuestiones en que se trate de hallar el capital c, o el tiempo t, o el rédito r. El numerador $100i$, se cambiará en $1200i$, si el tiempo está expresado en meses, y en $36000i$, o en $36500i$, si está expresado en días.

Ejemplo: 1.º ¿Qué capital se habrá prestado al 5 por % para producir 340 *pesetas* en 80 *días?*

$$c = \frac{36000 \times 340}{80 \times 5} = 30600 \textit{ pesetas.}$$

2.º ¿Cuánto tiempo habrá estado prestado un capital de 3000 pesetas para producir al 6 ¼ por % un interés de 85 pesetas?

$$t = \frac{100 \times 85}{3000 \times 6\frac{1}{4}} = \frac{100 \times 85 \times 4}{3000 \times 25} = \frac{34}{75} \textit{ año.}$$

Si se supone el año de 360 días, esta fracción de año será 163 días aproximadamente, y si se supone el año de 365 días, será 165 días también aproximadamente.

393. Cuando el tiempo que dura el préstamo es un año, la fórmula [I] es más sencilla porque se hace $t = 1$, y se tendrá:

$$i = \frac{cr}{100}; \text{ de donde, } c = \frac{100\,i}{r}, \quad \text{y,} \quad r = \frac{100\,i}{c}.$$

En este caso es cuando el interés suele tomar el nombre de *renta*, sobre todo si se recibe o paga anualmente hasta la devolución del capital prestado.

Regla de descuento

394. *Pagaré es un documento de crédito por el cual una persona se obliga a pagar a otra cierta cantidad en una fecha, designada en el documento, que se llama su vencimiento.*

Letra de cambio es un documento de crédito por el cual una persona manda a otra que se sirva pagar a su orden o a una tercera persona, cierta cantidad en un plazo o fecha designado en el documento.

Valor nominal de una letra o pagaré, es el valor que está consignado en el documento *Valor actual* o *efectivo* es un valor variable que tiene antes de su vencimiento.

El valor actual es menor que el valor nominal, y la diferencia entre ambos valores se llama *descuento*.

Si el tenedor de un pagaré o de una letra quiere cobrarla antes de su vencimiento, tiene que pagar al que la toma el interés del valor nominal o del valor efectivo del documento. En el primer caso, el interés se llama *descuento comercial,* en el segundo, *descuento matemático* o *racional* (1).

Si designamos por, d, el descuento y v, el valor nominal, siendo r, el tanto por 100 y t, el tiempo que falta para el vencimiento, tendremos, según la fórmula [**I**] (391):

$$d = \frac{vtr}{100}.$$

Generalmente el tiempo se expresa en días, y suponiendo que sea igual a p, y el año de 360 días,

$$d = \frac{vpr}{36000}.$$

Ejemplo. ¿Qué descuento tiene una letra de 1247,32 *pesetas* que vence dentro de 35 *días* al 6 por %?

$$d = \frac{1247,60 \times 35 \times 6}{36000} = 7,28 \textit{ pesetas.}$$

Luego el tenedor de la letra deberá recibir 1340'32 pesetas, que es la diferencia entre 1247,60 *pesetas, valor nominal* y 7,28 *pesetas* que importa el descuento.

IV. Fondos públicos

395. *Se llaman fondos públicos los títulos de rentas sobre el Estado, debiendo éste satisfacer al que los posee el interés o renta que corresponda al capital que representan.*

---

(1) No explicamos más que el descuento comercial, porque es el único que está en uso, excepto cuando el plazo del vencimiento es más de un año, en cuyo caso se descuenta a interés compuesto el valor efectivo.

Valor nominal de un título de la Deuda es el que está consignado con el título; *valor efectivo* o cambio es el que tiene en el mercado, que se llama Bolsa, donde se compra o vende.

En España hay muchas clases de papel del Estado y nosotros ni hemos de enumerarlos, ni decir cuáles son las causas que influyen en el *alza* y *baja* de un valor; pero vamos a indicar cómo se resuelven los principales problemas que pueden ocurrir en la compra y venta, como si se hiciesen directamente, es decir, sin la intervención del agente o corredor de Bolsa.

En los problemas nos referimos al papel llamado 4 por % *interior*, cuyos títulos producen una renta que el Gobierno paga en pesetas.

PROBLEMAS: 1.º *Si* 100 *pesetas nominales producen* 4, *¿qué tanto por ciento* r, *producen* 100 *pesetas efectivas al* 72 *por* % *de cambio?*

El problema es hallar qué renta producen 100 pesetas, si 72 pesetas producen 4. Dispondremos la operación del modo siguiente:

$$\left.\begin{matrix} r \,.\,.\,.\,.\,.\, 100 \\ 4 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\, 72 \end{matrix}\right\}$$ y como entre la renta y el capital existe proporcionalidad directa, se tendrá (377):

$$r = 4 \times \frac{100}{72} = 5{,}555\ldots\ldots$$

2.º *Si* 100 *pesetas producen el tanto por ciento,* r, *¿qué producirá un capital de* c, *pesetas?*

Tendremos:

$$\left.\begin{matrix} r \,.\,.\,.\,.\,.\, 100 \\ x \,.\,.\,.\,.\,.\, c \end{matrix}\right\} \text{ de donde, } x = r \times \frac{c}{100}.$$

3.º *¿Qué capital nominal en títulos del* 4 *por* % *se puede adquirir con un capital de* c, *pesetas?*

Llamando, x, al valor nominal, y suponiendo el cambio a 72 por ciento, tendremos:

$$\left.\begin{matrix} x \,.\,.\,.\,.\,.\, 100 \\ c \,.\,.\,.\,.\,.\, 72 \end{matrix}\right\} \text{ de donde, } x = c \times \frac{100}{72}.$$

4.º *¿Qué capital en pesetas se necesita para comprar una cantidad determinada,* n, *de títulos del* 4 *por ciento al* 72 *por ciento de cambio?*

Tendremos:

$$\left.\begin{matrix} x \,.\,.\,.\,.\,.\, 72 \\ n \,.\,.\,.\,.\,.\, 100 \end{matrix}\right\} \text{ de donde, } x = n \times \frac{72}{100}.$$

En todos estos problemas hay que tener presente que la renta del 4 por % está sujeta a pagar un impuesto de 20 por %, es decir, que hay que rebajar la renta en la quinta parte de su valor.
es decir que pagan 3'20 %

V. Regla de compañía

396. *La regla de compañía es el procedimiento que se sigue para repartir entre varios socios la ganancia o pérdida de una sociedad que han fundado con un fin industrial o mercantil cualquiera.*

Las ganancias o pérdidas sociales se reparten entre los socios proporcionalmente, también, a los tiempos que están impuestos.

Si dos socios aportan los capitales, c y c', durante los tiempos, t y t', designando por, g y g', las ganancias o pérdidas que les corresponden, tendremos:

$$\left.\begin{matrix} g, c, t \\ g', c', t' \end{matrix}\right\} \text{ de donde, (385) } \frac{g}{g'} = \frac{c}{c'} \times \frac{t}{t'},$$

o bien,

$$\frac{g}{g'} = \frac{ct}{c'\,t'}.$$

Luego las ganancias o pérdidas de cada socio son proporcionales a los productos de los capitales por los tiempos.

Designando por G, la ganancia o pérdida social, por g, g', g'', las ganancias o pérdidas de los socios, por c, c', c'', los capitales, y por t, t', t'', los tiempos que están impuestos, tendremos que dividir G en partes proporcionales a los productos $ct, c't', c''t''$. El problema de dividir en número en partes proporcionales a otros números dados, le resolvimos en el número 342, y aplicando al caso actual la regla que hallamos entonces, tendremos:

$$g = ct \times \frac{G}{ct + c't' + c''t''} \qquad g' = c'\,t' \times \frac{G}{ct + c't' + c''t''}$$

$$g'' = c''t'' \times \frac{G}{ct + c't' + c''t''}$$

Si los tiempos o los capitales son iguales, las fórmulas se simplifican por la supresión de un factor común; pero se podrían obtener directamente en virtud de lo dicho en el número anterior.

Ejemplo: Tres personas se asocian para una empresa: la primera con 6000 *pesetas* durante 2 *meses*, la segunda con 5000 *pesetas* durante 16 *meses*, y la tercera con un capital de 7000 *pesetas* durante 9 *meses*. ¿Qué ganancia corresponde a cada socio, siendo la ganancia total 8000 pesetas?

$$1.^{\circ}\quad g = \frac{8000}{6000\times 2 + 5000\times\frac{16}{12} + 7000\times\frac{9}{12}}\times$$
$$\times 6000\times 2 = 4013{,}94\ \textit{ptas.}$$

$$2.^{\circ}\quad g' = \frac{8000}{6000\times 2 + 5000\times\frac{16}{12} + 7000 + \frac{9}{12}}\times$$
$$\times 5000\times\frac{16}{12} = 2229{,}96.$$

$$3.^{\circ}\quad g'' = \frac{8000}{6000\times 2 + 5000\times\frac{16}{12} + 7000\times\frac{9}{12}}\times$$
$$\times 7000\times\frac{9}{12} = 1756{,}10.$$

VI. Regla de aligación

397. *Regla de aligación* es el procedimiento que se sigue para resolver los dos problemas siguientes:

1.° *Dadas las cantidades de varias substancias que se mezclan y los precios de sus unidades, hallar la cantidad y precio de la mezcla.*

2.° *Dados los precios de la unidad de la mezcla y de las unidades de las substancias que se han de mezclar, hallar las cantidades que hay que mezclar.*

El primer problema se llama: *regla de aligación directa*, y el segundo: *regla de aligación inversa*.

En ambos problemas suponemos que las substancias que se mezclan no pierden su valor ni propiedades al mezclarse.

Regla de aligación directa

398. Designemos por c, c', c'', las cantidades que se mezclan, por p, p', p'', sus precios, y por C, la cantidad total de mezcla, y se tendrá:

$$C = c + c' + c'',$$

y el valor total de la mezcla será,

$$cp + c'p' + c''p'',$$

porque, cp, $c'p'$, $c''p''$, son los valores de las cantidades mezcladas.

Para obtener el precio de la mezcla, es decir, el valor de la unidad de mezcla, basta evidentemente dividir el valor total de la mezcla, por su cantidad: designando, pues, por P, dicho precio.

$$P = \frac{cp + c'p'' + c''p''}{c + c' + c''}.$$

De donde resulta la siguiente:

Regla. *Para hallar el precio de la mezcla se multiplica cada una de las cantidades mezcladas por su precio, se suman los productos, y el resultado se divide por la suma de las cantidades mezcladas.*

Ejemplo. Se mezclan 7 *kg.* de café moka, de 5,50 *pesetas* el kilogramo, con 10 de Puerto Rico de 5 *pts.*, y con 8 de caracolillo de 4,75 *pts.*, se desea saber el precio de la mezcla.

Se tendrá:

$$P = \frac{7 \times 5{,}50 + 10 \times 5 + 8 \times 4{,}75}{7 + 10 + 8}\ pts. = 5{,}06\ pts.$$

Regla de aligación inversa

399. Supongamos que son dos las substancias que se mezclan y que sus precios y el de la mezcla son respectivamente p, p''. P. Si el problema ha de ser posible, el precio de la mezcla ha de ser *intermedio* entre los de las substancias que se mezclan. Si $p > p'$, se debe tener:

$$p > P > p'.$$

En cada unidad de la substancia cuyo precio es p, se perderá, $p - P$, luego en c unidades se perderá $c\,(p - P)$; y en c' unidades de la substancia cuyo precio es p', se ganará: $c'(P - p')$; igualando lo que se pierde y lo que se gana se tendrá:

$$c\,(p - P) = c'\,(P - p'),$$

de la cual se deduce la proporción (327):

$$\frac{c}{c'} = \frac{P - p'}{p - P}$$

luego *las cantidades que se han de mezclar son inversamente proporcionales a las diferencias entre sus precios respectivos y el de la mezcla.*

El problema de la regla de aligación inversa es indeterminado porque no se halla más qus la relación entre las cantidades que se han de mezclar. Para hacerle determinado vamos a suponer que la suma de las cantidades mezcladas es igual a la unidad, es decir, que tendremos:

$$c + c' = 1.$$

Ahora de la proporción anterior se puede deducir, según la propiedad de las proporciones demostradas en el número 333.

$$\frac{c+c'}{p-p'} = \frac{c}{P-p'} = \frac{c'}{p-P},$$

y poniendo en vez de $c + c'$, su igual, 1

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{c}{p-p'} = \dfrac{1}{P-p'} \\ \dfrac{c'}{p-P} = \dfrac{1}{p-p'} \end{array}\right\} \text{ de donde } \left\{\begin{array}{l} c = \dfrac{P-p'}{p-p'} \\ c' = \dfrac{p-P}{p-p'} \end{array}\right.$$

Ejemplo: Se desean mezclar dos vinos: uno de 75 y otro de 60 *pesetas el hectolitro*. ¿Qué cantidad se debe mezclar de cada uno, para que el precio de la mezcla sea de 72 *pts*. por *hl?*

En cada *hl* entrarán:

$$c = \frac{72 - 60}{75 - 60}\, hl = 0{,}80\, hl.$$

$$c' = \frac{75 - 72}{75 - 60}\, hl = 0{,}20\, hl.$$

400. Si las substancias que se han de mezclar son más de dos aumenta la indeterminación del problema.

Para hallar una solución, *se opera primero con dos substancias que comprendan el precio de la mezcla* (éste siempre debe ser intermedio entre los precios superior e inferior), *después con otras dos, y así sucesivamente hasta operar con todas.*

La suma de las cantidades mezcladas será la cantidad total de mezcla. Se puede operar dos o más veces con cada substancia, cosa que hasta puede ser indispensable para resolver el problema.

EJEMPLO: Con trigos de 22,21 y 16 *pesetas* el *hectolitro*, se quiere obtener una mezcla de 20 *pts.* el *hl.* ¿Qué cantidad se debe mezclar de cada uno?

Operando primero con los trigos de 22 y 16 pesetas, en cada *hl* de la mezcla entrarán, según lo dicho en el caso anterior,

$$c = \frac{22 - 16}{22 - 16}\, hl = \frac{2}{3}\, hl = 67\, l, \text{ aproximadamente.}$$

$$c' = \frac{22 - 20}{22 - 16}\, hl = \frac{1}{3}\, hl = 33\, l, \text{ aproximadamente.}$$

Operando con los trigos de 21 y 16 pesetas, se tendrá:

$$c'' = \frac{20 - 16}{21 - 16}\, hl = \frac{4}{5}\, hl = 80\, l.$$

$$c'' = \frac{21 - 20}{21 - 16}\, hl = \frac{1}{5}\, hl = 20\, l.$$

En cada 2 *hectolitros* de mezcla entrarán: 67 *litros* del trigo de 22 *pesetas;* 80 *litros,* del de 21 *pesetas,* y 33 más 20 o sea 53 *litros* del trigo de 16 *pesetas.*

FIN DEL CURSO DE ARITMÉTICA

ÍNDICE

LIBRO SEGUNDO.—Los números fraccionarios

LIBRO TERCERO.—Raíces de los números enteros fraccionarios e inconmensurables

SEGUNDA PARTE.—Aplicaciones de la Aritmética

25
4
1000

250
4
10000


Pa Pa pa pa Pa Pa Pa

0.65
30

1950

.40

1140	600
5000	18
200	

3

30
1'1
30
30
330

Angel Valtierra