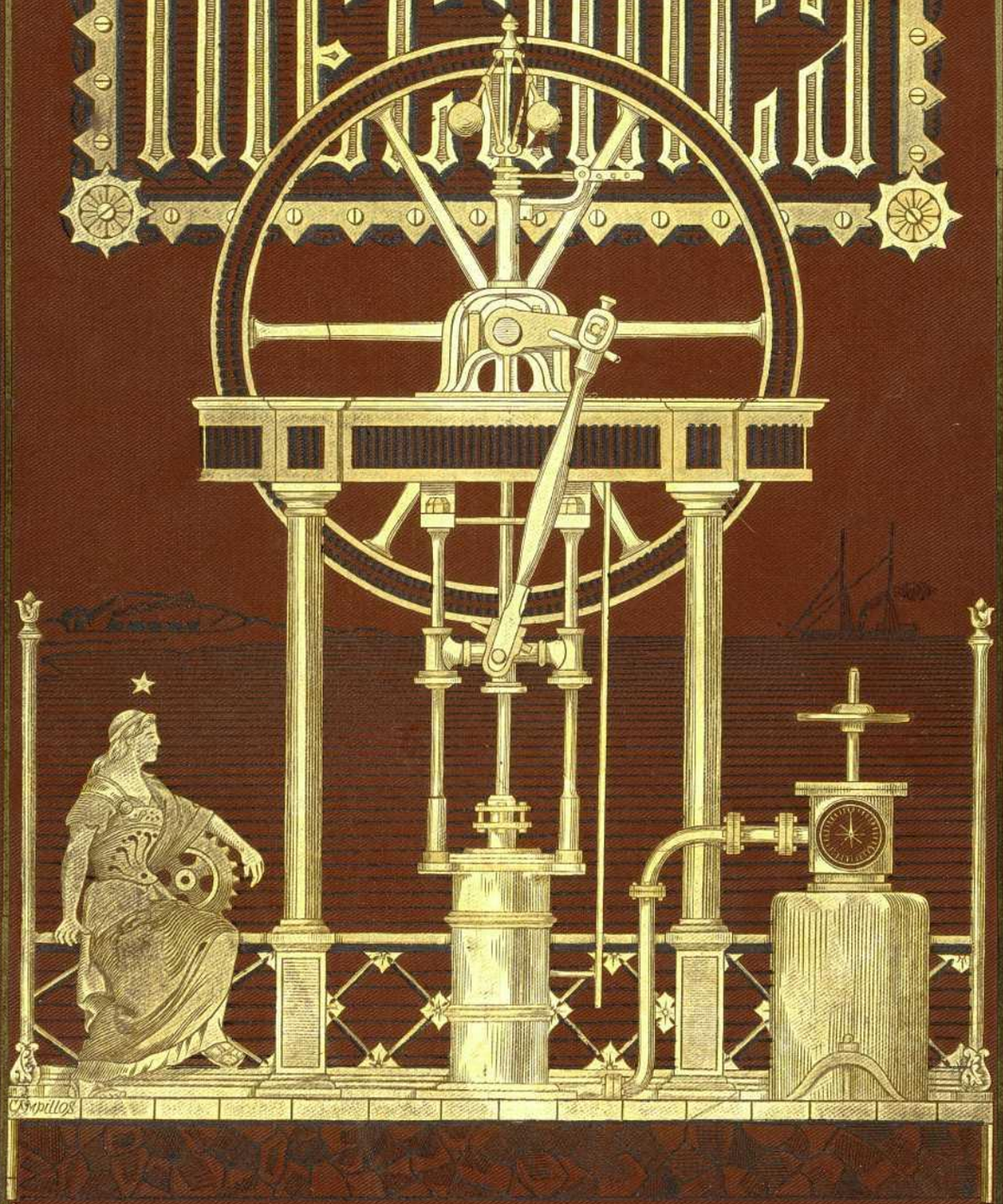
F. REULEAUX

CINÉMATIQUE



1645

TRATADO GENERAL

DE MECÁNICA

BIBLIOTECA PROVINCIAL DE BURGOS

TRATADO GENERAL
DE
MECÁNICA
PARA USO DE INGENIEROS, CONSTRUCTORES, MAQUINISTAS, ARQUITECTOS, &,&

COMPRENDE LAS OBRAS
CINEMÁTICA Y CONSTRUCTOR
DE
V. F. REULEAUX

CATEDRÁTICO DE LA ESCUELA POLITÉCNICA Y DIRECTOR DE LA ACADEMIA INDUSTRIAL DE BERLIN, COMISIONADO IMPERIAL EN LAS EXPOSICIONES INTERNACIONALES DE SYDNEY, MELBURNA, FILADELFIA, &, &

TRADUCCION DE LAS ÚLTIMAS EDICIONES ALEMANAS

AUMENTADA CON LA

MECÁNICA PRÁCTICA Y APLICADA

MÁS MODERNA Y UNIVERSALMENTE ADOPTADA EN LAS NACIONES INDUSTRIALES,

PUBLICADA BAJO LA DIRECCION DE

D. FRANCISCO NACENTE Y SOLER

AUTOR DE VARIAS OBRAS CIENTÍFICAS, EX-PRESIDENTE DEL «CENTRO INDUSTRIAL DE CATALUÑA,» PRESIDENTE HONORARIO DEL «FOMENTO INDUSTRIAL» DE BARCELONA

ILUSTRADA CON **7.000** Á **8.000** FIGURAS DE MAQUINARIA COMPRENDIDAS EN MÁS DE **800 LÁMINAS** GRABADAS PRIMOROSAMENTE EN LA PIEDRA É IMPRESAS CON SUMO ESMERO

ENTRADA
22 JUNIO. 87
REGISTRO FÓLS.

TOMO PRIMERO

BIBLIOTECA PROVINCIAL DE BURGOS

BARCELONA

J. NACENTE, EDITOR
PASEO DE GRACIA, 149

ENTRADA
22 JUNIO. 87
REGISTRO FÓLS.

Esta obra es propiedad del Editor, quien se reserva todos los derechos de propiedad literaria y artística de la misma, y perseguirá al amparo de las leyes á todo aquel que la reimprima ó que reproduzca sus láminas fraudulentamente.

Imprenta y Litografia de J. Nacente.—Paseo de Gracia, 149.

PRÓLOGO

Con esta publicacion nos proponemos reunir en un cuerpo de obra los mejores trabajos que se han dado á luz sobre la *Mecánica*.

De los numerosos tratados relativos á la construccion de máquinas que se han publicado en Alemania, el *Constructor* de *Reuleaux* es quizás el que ha alcanzado un éxito más rápido y lisonjero. En pocos años se han agotado numerosas ediciones de esta obra eminente. Creemos prestar un verdadero servicio á los maquinistas, constructores é ingenieros españoles proporcionándoles el medio de consultar la obra del docto catedrático y de sacar partido de gran número de datos que inútilmente buscarian en la mayor parte de las obras de igual género publicadas en España y en el Extranjero. Tales son por ejemplo, por no citar más que algunos, los cálculos de los resortes de toda clase, de los filetes de tornillos, de los cilindros de prensas hidráulicas, de las cadenas de hierro, de los cables de trasmision, etcétera, etcétera (1).

Las dos obras de *Reuleaux* presentan bajo todos conceptos una superioridad incontestable sobre todos los tratados análogos, la cual se debe al empleo del método tan fecundo de las *relaciones* para la determinacion de los diversos órganos de una máquina.

---

(1) Aun sin contar los datos y noticias de suma importancia que abarca la *Cinemática*, obra del mismo autor que como veremos ha comenzado á producir una verdadera revolucion en el terreno científico de la *Mecánica*, y que está destinada á ser la obra de consulta de cuantos en adelante quieran ponerse á la altura del movimiento científico de la construccion y gobierno de las máquinas.

La Cinemática del mismo autor debe en verdad considerarse como una ciencia enteramente nueva, eminentemente á propósito para facilitar la inteligencia de las máquinas existentes, y dirigir al inventor en sus investigaciones y al constructor en sus estudios prácticos. El objeto que se propuso el sábio *Reuleaux* está perfectamente desarrollado en la Introduccion, á donde remitimos á nuestros lectores; y desde luego podemos limitarnos á cortas indicaciones muy sumarias que den una somera idea de la importancia y novedad de ese gran trabajo científico.

Hasta ahora en los diversos tratados de enseñanza de la *Cinemática* se habian contentado en general los autores con examinar los mecanismos en la forma que los ofrecia la tradicion y el invento, sin pretender analizarlos ni investigar el modo de formar y combinar cada uno de ellos. Con ayuda del cálculo se han podido así conseguir ciertos resultados de indiscutible utilidad, pero nunca se habia logrado constituir una verdadera ciencia. Conociendo lo insuficiente é imperfecto de los métodos admitidos por el uso, el catedrático *Reuleaux* intentó determinar las leyes que rigen la formacion de los mecanismos, y de sus estudios sacó datos y conclusiones de la mayor significacion y trascendencia. Partiendo del principio de que en las máquinas los cuerpos móviles se hallan, á causa de otros cuerpos con que están en contacto, en la imposibilidad de efectuar movimientos diferentes de los que se desean, llegó á la concepcion fundamental del acoplo de elementos, constituido por el acoplamiento de dos cuerpos de formas tales, que á cada instante no haya más que un movimiento posible para cada uno de ellos con relacion al otro. Los acoplos de elementos por la combinacion de cierto número de los mismos entre sí, producen la cadena cinemática, que cuando está en trabazones forzosas, ó es desmodrómica, viene á ser un mecanismo con la mera fijacion de uno cualquiera de esos miembros. Finalmente, si en un mecanismo ó série de mecanismos combinados uno de los miembros es solicitado por una fuerza susceptible de hacerle mudar de posicion, se efectua un trabajo mecánico con movimientos determinados, y entonces se tiene en presencia una máquina. Segun ello, la máquina se compone de uno ó varios mecanismos, cada uno de los cuales puede reducirse á una cadena cinemática, formada á su vez de acoplos de elementos.

Esa descomposicion de la máquina ó ese análisis cinemático es sencillo y fácil de comprender, siendo á la par fecundísimo en estremo.

Los principios fundamentales relativos á los acoplos de elementos y á las cadenas cinemáticas, constituyen el objeto de los cinco primeros capítulos, uno de los cuales, el cuarto contiene conclusiones enteramente nuevas sobre los elementos dúctiles. Hasta hoy los órganos de tension, tales como cuerdas, cadenas, correas, etc., eran admitidos á figurar en las máquinas, en tanto que por regla general quedaban olvidados los fluidos (líquidos y gaseosos). Ahora bien, tales fluidos, órganos de presion, forman precisamente la contraparte de los órganos de tension que acaban de mencionarse, y por lo tanto parece natural abarcarlos, como estos últimos, en el estudio de los mecanismos. Notabilísimos son los resultados que proporciona ese modo de tratamiento de los fluidos.

El capítulo VI indica á rasgos generales los orígenes y perfeccionamientos sucesivos de la máquina considerada como producto del ingenio humano, á la vez que da á conocer la

ley de su desarrollo y sus causas determinantes. Es una suscinta y acabada historia de la *Mecánica*.

El capítulo VII está consagrado á la exposicion de un sistema de notacion cinemática muy á propósito para facilitar notablemente el uso del análisis. Ese sistema que se recomienda por su gran sencillez relativa, es el fruto de muchos años de estudio y reflexion; y el ilustre *Reuleaux* espresa en la introduccion el deseo de que se evite modificar arbitrariamente los símbolos de elementos, los cuales se han elegido con el mayor cuidado, y de manera que se adaptasen lo más convenientemente posible á los principales idiomas europeos.

Los capítulos VIII á XII están dedicados al análisis cinemático de los mecanismos, órganos de máquinas y máquinas completas. El análisis de los mecanismos conduce á consecuencias de suma importancia. Así por ejemplo, en la série de las máquinas y bombas examinadas en el capítulo IX, permite ese análisis conocer que más de treinta máquinas rotativas se derivan de la misma cadena cinemática que la máquina de vapor ordinaria, por más que las formas constructivas presenten entre sí muy marcadas diferencias. El capítulo XII, relativo al análisis de las máquinas completas, conduce á conclusiones muy interesantes sobre la naturaleza, uso y direccion de las máquinas; y termina con la exposicion de las ideas del autor sobre el papel que la máquina representa bajo el punto de vista social y económico.

El último capítulo se consagra á la síntesis cinemática ó sea al estudio sintético de acoplos de elementos, de cadenas cinemáticas, de mecanismos y de máquinas. Demostrando que existen procedimientos científicos que permiten formar nuevos mecanismos y nuevas máquinas, el Autor no pretende quitar todo el valor á los inventos, sino que más bien quiere poner á disposicion del inventor nuevos medios de estudio muy valiosos y fomentar así su actividad intelectual, á la par que proporciona abundantísimos y provechosos datos al que ha de gobernar máquinas ó corregir mecanismos defectuosos.

A la *Cinemática* sigue el *Constructor*, que completa los estudios teórica y prácticamente de la nueva ciencia, dividiéndose en cuatro partes principales, cada una de las cuales se distingue por su gran sencillez y claridad, á pesar de resolver decididamente los problemas más árduos y abstrusos de la *Mecánica*.

La primera parte comprende la resistencia de los materiales, y lleva la ventaja de dar en forma sencillísima todas las fórmulas cuyo empleo pueda ofrecer alguna utilidad á la práctica. El uso de tales fórmulas se encuentra singularmente fácil, merced á la disposicion de tablas adoptadas por el Autor y en las que las fórmulas se encuentran acompañadas de figuras y observaciones que espresan claramente las condiciones en que son aplicables dichas fórmulas. Tambien en este punto se ha distinguido el profesor Reuleaux sobre todos los que han tratado de esa parte de la ciencia, presentándose de una manera digna de elogio y admiracion.

La segunda parte está completamente dedicada á la exposicion de los principios de la grafostática, con numerosos ejemplos de aplicacion á la construccion de máquinas, edificios, puentes, etc. Ese método tan sencillo que no se ha reunido en cuerpo de doctrina sino de unos doce años á esta parte, constituye hoy una de las bases de la enseñanza oficial y

particular en las escuelas industriales de Alemania y Suiza. Las incontestables ventajas que presenta en la mayoria de los casos sobre los demás métodos, han hecho que se adoptara en todas las naciones más adelantadas, y no cabe duda que en España será apreciada en lo mucho que vale y reportará notorios adelantos.

La seccion tercera comprende la determinacion de los órganos de máquinas propiamente dichos, fundada en el método de los números proporcionales. Las dimensiones de las diversas partes de cada órgano se hallan inscritas en las figuras de las láminas correspondientes, figuras representadas como funcionando en un módulo especial, que para cada caso ha sido determinado en vista de los resultados del exámen de gran número de órganos del mismo género y reconocidos por se ejecucion satisfactoria.

Finalmente, la cuarta parte encierra una série de tablas que reproducen en cómoda forma diversos elementos de cálculo que el constructor y el maquinista necesitan á cada instante, tales como trazados de curvas, superficies, volúmenes, potencias, raices, números recíprocos, líneas trigonométricas, etcétera.

Debemos repetir que las esplicaciones de la obra van aclaradas con la profusion de figuras y trazados que se representan en las láminas, hechas con toda exactitud sobre escala rigurosamente determinada, y con un lujo y precision de detalles que no se encuentran en ninguno de los tratados del mismo género publicados hasta el dia. Esas láminas, lo decimos con orgullo, están destinadas á prestar señalados servicios á todos los que por cualquier motivo tengan que consultarlas, para deducir los datos relativos á las numerosas cuestiones que se refieren á la construccion de las máquinas y otras obras importantes ó al exacto conocimiento de los mecanismos y marcha de ellos.

Algo debemos advertir tocante á la novedad de ciertas palabras del original que no tienen equivalencia en español por referirse á cosas desconocidas en nuestro idioma. Esto se comprende desde el momento en que se trata de una ciencia nueva, que no se concreta á los preceptos que más ó ménos rutinariamente venian enseñándose, y como por fuerza trata de cosas nuevas, éstas se han de designar con un nombre, evitando en lo posible las perífrasis y los rodeos de palabras que harian ininteligible á veces la esplicacion del Autor. Pero tendremos mucho cuidado en esplicar con notas al pié de las páginas aquellas palabras de nueva acepcion que tengamos necesidad de adoptar para espresar los conceptos del Autor con toda la exactitud posible.

En verdad esperamos que el público juzgará esta publicacion digna de favorable acogida lo mismo por sus condiciones científicas y artísticas que por las económicas y materiales.

INTRODUCCION

Las siguientes consideraciones tienen por objeto descubrir los diversos aspectos bajo los cuales se ostentan en general las máquinas, para llegar á establecer las leyes á que están sujetas sus numerosas variedades. Por esa razon se han intitulado: *Principios fundamentales de una teoria general de las máquinas.*

En realidad la ciencia que se propone el estudio completo de la composicion de las máquinas, la *Cinemática*, puede dividirse en dos partes esencialmente distintas, la primera de las cuales es puramente teórica, á la vez que la segunda abraza las aplicaciones. La parte teórica es la que constituye el objeto de este tratado; y se opupa en primera línea de establecer los principios propiamente tales, que son comunes á todas las aplicaciones, y se aparta esencialmente en gran número de puntos, de la via por regla general seguida hasta el dia.

Desde el momento en que se trata de estudios puramente teóricos, parece á primera vista que los teóricos son los únicos de quienes pueda escitarse el interés; pero cumple notar que entre la teoria y la práctica no hay en realidad antagonismos, como suele admitirse tácitamente. No hay duda que puede hacerse una cosa teórica que no sea práctica, y vice-versa, una cosa práctica que no tenga ningun carácter científico; más esto no sucede por necesidad; sino que muy al contrario en el dominio de la actividad humana, supuesto libremente abierto á la ciencia, lo que es práctico en realidad, se encuentra por fuerza conforme con la teoria, con la condicion, por supuesto, de que ésta sea exacta.

El axioma tan en boga de tal antagonismo no se aplica realmente más que á la lucha del *empirismo* con la *teoria*. Nunca cesará esa lucha, pero es fuerza confesar que de dia en dia se presenta más favorable á la teoria, á medida que ésta se desarrolla. Por tanto, los procedimientos teóricos no pueden ser indiferentes al práctico instruido y amigo del progreso, siendo lástima que pierda el tiempo guardando mayor ó menor reserva contra la ciencia. Más como en definitiva las cuestiones teóricas que se tratan en esta obra, son de índole tal, que entran profundamente en la materia, espero que al lado de los teóricos propiamente dichos, se hallarán verdaderos prácticos, dispuestos á lanzarse por la nueva senda, y me creo en la obligacion de dar cuenta á éstos, lo mismo que á los primeros, de las razones que me han inducido á prescindir de los métodos en uso y reemplazarlos por otros nuevos.

Al intentar establecer la teoria de la composicion de

las máquinas sobre nuevas bases estaba muy empapado de la idea de que semejante trabajo no hubiera merecido darse á la publicidad, como no ofreciese una verdadera utilidad para la inteligencia de las máquinas. Este resultado, lo digo sin modestia, creo haberlo conseguido, y con tal conviccion lo presento á mis lectores. Dudar no cabe que puede sacarse de las máquinas tanto mayor partido cuanto mejor se comprenda y se haya penetrado en el estudio de su constitucion íntima. Más para ello es muy evidente que no podria bastar el ofrecer bajo nueva forma y en órden diferente las nociones desde mucho tiempo adquiridas, ó establecer una nueva clasificacion y una distinta nomenclatura en vez de las antiguas. Mejoras de ese género darian quizás por resultado una enseñanza más fácil ó elegante; pero bajo el punto de vista práctico no tendrian más que una importancia secundaria, y de consiguiente podrian los interesados contentarse aun por mucho tiempo con la antigua teoria.

Verdaderamente la nueva teoria para merecer que sea el objeto de un interés más general, debe permitir que se obtengan resultados realmente nuevos y hacer posible la solucion de problemas que hasta ahora no habian podido resolverse de una manera racional con los procedimientos conocidos. En suma, aquí se trata de dar, si es posible, á la cinemática una forma científica y no solo práctica.

A decir verdad la cinemática hasta hoy se ha tratado de una manera científica en cierto sentido, siempre que algunas de sus partes entraban de lleno en el dominio de las matemáticas. Pero ese carácter científico que se encuentra en algunas cuestiones aisladas, no existe para todo el conjunto ni constituye la esencia propia del sistema de enseñanza, amen de que cumple confesar que lo que hay en ella de metódico, pertenece á las ciencias matemáticas y mecánicas, más nó á la cinemática propiamente tal. Porque esta ciencia en su conjunto, en sus principios esenciales, en sus reglas, ha permanecido hasta aquí envuelta en oscuridades, y solo accidentalmente, por decirlo así, la luz la ha inundado en algunos puntos aislados. Se la puede comparar á un árbol que ha crecido en el interior de oscura torre y ha lanzado sus ramas en todas las direcciones posibles; allí donde han estado sometidas á la accion del aire y de la luz, las ramas se han cubierto de flores y frutos, en tanto que el tronco no presenta más que ramificaciones raquíticas y retoños aislados.

Los trabajos matemáticos á que acabamos de aludir, tienen por objeto estudiar con todo el caudal de una vasta ciencia las propiedades de los mecanismos dados, y en esta via han acumulado ricos materiales que no solamente conservan para lo venidero toda su utilidad, sino que además están destinados á aumentar de valia. Por lo que toca á la parte hasta aquí inexplorada de la cinemática, parte que sin disputa es la más profunda é importante, está caracterizada por las cuestiones siguientes: ¿Cómo se ha llegado á los mecanismos y á sus elementos? ¿Cuál es la ley que debe observarse en el procedimiento que sirve para combinar un mecanismo? ¿Existe realmente esa ley, ó se deben en cambio tomar como punto de partida los resultados dados por el invento? ¿Se reduciria en este caso el problema científico al análisis de tales resultados, no quedando desde entonces más que un simple procedimiento descriptivo ó histórico?

Ese último sistema es el que, por decirlo así, se ha usado esclusivamente hasta hoy, y apenas si se encuentran algunos indicios de las investigaciones destinadas á penetrar *detrás del escenario*. De ahí la situacion verdaderamente singular de que en el estudio de la composicion de las máquinas, se llegan á utilizar los medios más desarrollados para ilustrar resultados del invento ó sea productos del ingenio humano, sin tener conocimiento alguno de los procedimientos que la inteligencia ha tenido que poner por obra para alcanzar dichos resultados. Con esa falta de homogeneidad, que cuando ménos nos asombra, y que seguramente no se toleraria en cualquier otra rama del dominio de las ciencias exactas, se quiere considerar el invento como una especie de adivinacion, como la consecuencia de una inspiracion de lo alto. En esa idea que no siempre se anuncia, pero que á lo ménos se sobreentiende, está basada la especie particular de respeto que se siente por todo inventor de una máquina. En el caso en que se trata simplemente de aprender ó de enseñar el resultado de un invento, se ha tomado la costumbre de pasar enteramente por alto la marcha seguida por el pensamiento, para darle orígen entrando inmediatamente, como se dice, *in medias res*.

Supongamos, por ejemplo, que queremos estudiar por los métodos usuales hasta ahora la disposicion tan conocida del guiaje en línea recta, que *Watt* imaginó para su máquina de vapor, ó las disposiciones del mismo género de *Evans*, de *Reichenbach*, etc. Cuando hayamos determinado la clase á que corresponden esos mecanismos, no nos faltará más que hallar las leyes del movimiento á que obedecen, fijar las mejores reglas para su construccion y en rigor investigar el grado de parentesco que entre ellas exista. Tocante á la cuestion de saber como ha llegado cada inventor á su mecanismo ó dispositivo especial, no tendremos que resolverla, sea cual fuere el interés que nos ofrezca. Si á

veces nos ocurre intentar sorprender al génio en el laboratorio de sus pensamientos, más bien es por impulso de la curiosidad que por verdadero espíritu de investigacion y estudio. Parece pues en vista de lo que antecede, que podríamos dar en esta senda un paso adelante de importancia capital. Probémoslo:

En su correspondencia nos dejó *Watt* algunas indicaciones sobre la marcha del pensamiento que cabalmente le indujo al mecanismo de que se trata. En particular, en una carta á su hijo, que lleva la fecha del mes de Noviembre de 1808 se espresa así tocante al asunto: «La idea tomó nacimiento de la siguiente manera: hallando en el empleo de las dobles cadenas ó de los arcos dentados con cremalleras muy poca cosa satisfactoria para pasar del movimiento rectilíneo del piston al movimiento angular de balancin, se me ocurrió averiguar si seria posible realizar dicha trasformacion recurriendo á movimientos en torno de ejes de rotacion, y al cabo de algun tiempo encontré que si AB y CD (fig. 1) son dos radios iguales movibles alrededor de los centros B y C y están reunidos con una biela AD, esos radios girando en cierto ángulo tienen con respecto á las líneas horizontales que pasan por sus centros, iguales traslaciones en sentido contrario, á la vez que el punto E describe una línea sensiblemente recta. Conocí además que en caso de ser necesario hacer el radio CD igual á la mitad solamente de AB, subsistiria la misma propiedad, si bien con la condicion de tomar el punto E más cerca del punto D. Así me encontré inducido al dispositivo (ó mecanismo) que más adelante ha recibido el nombre de paralelógramo. Por más que no tenga un amor exagerado á la gloria, debo confesar que estoy más orgulloso del invento de este dispositivo que de cualquier otro de mis descubrimientos en mecánica.»

Por interesante que esta carta sea, debemos conocer, examinándola con más detencion, que no responde á nuestras esperanzas, como hubo de suceder con el autor mismo de la cuestion. Verdad es que nos da á conocer los motivos y algunos de los resultados definitivos de las investigaciones de *Watt*, más no nos proporciona ningun indicio de una marcha metódica. Cumple ademas observar que esa descripcion es posterior de veinte y cuatro años á dicho invento, y que por lo tanto es el doble producto de la reflexion y de la memoria, lo cual forzosamente le quita el carácter que habria presentado, de haberla hecho inmediatamente despues.

Watt se muestra mucho más esplícito en una carta que escribió en 1784 á su sócio *Boulton*, para comunicarle la primera idea de su mecanismo. «Estoy sobre nueva pista, escribió. Tengo la idea de un método cuya aplicacion debe dar por resultado obligar un vástago de piston á moverse verticalmente en los dos sentidos, con la condicion de sujetarlo simplemente al balancin con una pieza de hierro, sin cadenas, sin deslizamientos ni frotes perniciosos, sin sectores ni otras piezas pesadas. Merced á esa disposicion, si responde completamente á mis esperanzas, será posible economizar unos cinco piés sobre la altura del cuerpo de una máquina de ocho piés de trayectoria, reduccion que considero de una muy grande importancia. Esa disposicion puede además utilizarse para todas las máquinas, tanto si son de doble efecto como sencillo. He comenzado por ejecutar un pequeño modelo de prueba, en virtud del cual no se puede todavia construir..... sin embargo, os ruego que nada digas de todo esto, hasta que haya acabado la especificacion de mi privilegio (1).»

Si se examina en detalle el privilegio á que se acaba de aludir, no se le encuentran ménos de seis métodos especificados para la guia ó guiaje en línea recta, entre los cuales figuran los que antes ha indicado *Watt* como viciosos, tales como las deslizaderas (ó deslizamientos), las cabezas de balancin en forma de sectores, etcétera. Dos de esos métodos corresponden á dos formas que puede tomar nuestro mecanismo. Una cosa verdaderamente digna de observacion es que de los seis métodos el que está basado en el empleo de una palanca oscilante, es precisamente el dispositivo de guiaje en línea recta de *Reichenbach*. No puede dudarse que *Watt* no supo aprovecharse de ese mecanismo, y que aun más adelante acabó por escapársele por completo; lo que se esplica perfectamente, si se quiere reflexionar que en aquella época el elegante mecanismo que hoy conocemos, no podia realizarse sino por combinacion de pesadas piezas de madera y barras de hierro forjado bruto.

La conclusion de lo que precede es que no encontramos en un pensador como *Watt* las aclaraciones que buscábamos. No obstante, importa notar que en el inventor un pensamiento es siempre el desarrollo de otro pensamiento; que de esta sucesion resulta una verdadera escala de progresion, que indispensablemente él ha de subir, de suerte, que en realidad no avanza sino paso á paso ni llega al fin más que á fuerza de trabajo y continuada lucha. Pero el resultado obtenido proporciona al inventor tanta más consideracion cuanto más vírgen es el terreno en que ha operado. Respecto á una inspiracion del momento, al rayo de luz de la inteligencia, no puede esperarse descubrimiento alguno. En la carta de *Watt* antes citada, el miembro de la frase «y al cabo de algun tiempo encontré,» indica claramente que el resultado apetecido no se obtuvo sino á fuerza de trabajo asíduo y prolongado del pensa-

miento, como acontece casi siempre en las gloriosas elucubraciones del ingenio humano.

«Pensando en ello contínuamente,» respondió *Newton* cuando le preguntaban como habia llegado á descubrir la ley de gravitacion. La misma idea se encuentra resumida bajo una forma elocuente en este aforismo de *Gœthe: ¿Qué es el invento? El fin de una série de investigaciones.*

A decir verdad el encadenamiento de los diferentes pensamientos nos queda oculto casi por completo, y por tanto, debemos entregarnos á un trabajo interior para procurar reconstituirlo. El conjunto se nos presenta en cierto modo como una imágen lijeramente bosquejada ó medio destruida, sobre la cual el artista mismo no ha podido darnos más noticias que las que nosotros podemos procurarnos sin él. Y en efecto, esa comparacion es justa en más de un concepto. En cada nuevo terreno de la creacion intelectual la manera de operar del inventor es análoga á la del artista. Con lijero paso salva el génio el andamiaje aéreo de raciocinios que ha edificado él mismo á cada nuevo punto de apoyo. Rara vez puede pedirse cuenta de sus rasgos al artista ó de sus combinaciones al inventor. «No teneis que oler mis cuadros, decia *Rembrant*, los colores son malsanos.»

Observaciones análogas á las que pueden hacerse sobre un caso aislado son aplicables á la historia de los inventos durante un largo período, en el que tienden todos los esfuerzos del espíritu humano á la produccion de una cosa nueva. Así por ejemplo, el invento de la máquina de vapor se prolonga durante casi un siglo, sin hacer otros progresos que los correspondientes al desarrollo necesario de otros conocimientos científicos.

En la escuela de Galileo, cuyo descubrimiento de las leyes de la caida de los cuerpos rasgó como un rayo de luz las nubes de la escolástica difundidas por todos los conocimientos, fué donde tuvo orígen á principios del siglo XVII la ciencia de la observacion de la naturaleza, á cuyo progreso se encuentra íntimamente ligado el invento de la máquina de vapor. No por casualidad da esa ciencia sus primeros pasos en un pais donde el arte habia alcanzado ya un desarrollo tan notable: arte y ciencia trabajan ambos á dos en un suelo feraz. Se podria casi creer que los altivos habitantes de Pisa no dieron á su famosa torre la inclinacion que tiene, sino para facilitar los esperimentos de Galileo sobre la caida de los cuerpos. En 1643 uno de los discípulos de *Galileo, Torricelli*, en quien la madurez del juicio se habia anticipado al número de años, descubre que el aire es pesado. Ese descubrimiento es al punto combatido con ardor por los partidarios del principio del horror al vacio, y en general lo impugna todo el partido de la vieja ciencia, que se siente directamente amenazado. El centro de las discusiones y estudios sobre el asunto pasa de Toscana á Francia por los años 1646 cuando *Pascal* vuelve á suscitar la cuestion y llega al poco tiempo á aceptar el nuevo principio. En 1648 provoca el esperimento de la medida barométrica en la cumbre del Puy-de-Dome; y como este esperimento era decisivo, las campanes de Munster y Osnabruk anunciaron á la vez la celebracion de la paz y el triunfo de la ciencia nueva.

A partir de aquel momento la línea geográfica sobre la cual se mueve el centro de los nuevos esfuerzos, se dirige al Norte y penetra en Alemania por el pais del Gran Elector. Las tropas de *Tilly* tomando Magdeburgo á saco no habian logrado aniquilar la vida intelectual. En 1650 el burgomaestre de esta ciudad, *Otto de Guericke*, introduce un nuevo elemento en la cuestion de física á la órden del dia, el de la fuerza que puede ejercer la presion atmosférica. Por medio de la bomba de aire y otros aparatos de esperimentacion, demuestra la existencia de esa fuerza de una manera científica á la vez que popular. Entonces comienza por doquiera la investigacion de los procedimientos susceptibles de dar un vacio artificial y hacer así disponible la inmensa fuerza contenida en la atmósfera. Durante mucho tiempo no se alcanza el menor resultado satisfactorio, y hasta 1696 no encuentra *Papin* en Marburgo la solucion del problema, *fundada en la condensacion del vapor de agua en un cilindro armado de piston ó émbolo.* Se habia descubierto la máquina de vapor. *Papin* que con un espíritu de investigacion estraordinario por estremo, habia ido en busca del problema por las vias más diferentes, hizo á la par una série de otros descubrimientos dignos de llamar la atencion: es el verdadero inventor de la máquina de vapor. Con todo, la disposicion que él propuso era muy imperfecta y nada práctica; la idea era excelente, pero tambien era indispensable que saliese del círculo de la enseñanza y de las disertaciones latinas para entrar en la vida real. De carácter tímido é irresoluto, *Papin* no logró realizar esa trasformacion. Su primer gran cilindro de vapor que quedó sin acabar, se alza hoy como un monumento en el patio del museo de Cassel. Sin embargo, pasando su idea el estrecho penetró en Inglaterra, donde no tardó á entrar en el círculo de las aplicaciones. En 1705 dos obreros, *Newcomen* y *Caweli* presentan la máquina de vapor en estado de aparato utilizable, disponiéndola para la elevacion de las aguas, y no tardan en hacer de ella varias aplicaciones á las minas.

El espíritu de inventiva cae luego en un período de

marasmo, pareciendo en cierto modo haber quedado postrado por los esfuerzos de los últimos años. Pero no debe perderse de vista que ese paro es igualmente la consecuencia de faltarle al instrumento intelectual ciertos elementos para seguir su marcha adelante. Las nociones sobre el calórico, el auxiliar indispensable, son aun muy incompletas; ni siquiera se sabe medirlo. Forzoso es pues, ante todo, que el termómetro reciba los perfeccionamientos que reclama y que la teoria del calor llegue á suficiente grado de adelanto.

A fines de este largo período de preparacion, por los años 1763 aparece en el mundo científico el poderoso génio de *Watt*. Introduce en la máquina de vapor una série completa de innovaciones ó inventos cinemáticos, y le eleva de ese modo en un espacio de tiempo relativamente muy corto á un alto grado de perfeccion, á la vez que enriquece muy notoriamente el dominio de la ciencia que á ella se refiere. A contar de aquel momento el uso de la máquina se propaga con rapidez, mil cerebros y miles de brazos trabajan en mejorarla, hasta el dia en que llegó á grado tal de perfeccion, que pudo considerarse como formando parte del dominio comun de la humanidad entera.

En ese rápido bosquejo he dejado enteramente á un lado todo lo que, segun la espresion de *Humboldt*, constituye «la desagradable querella sobre el derecho de prioridad.» A consecuencia de una exposicion tan sumaria como la que acabamos de hacer, podria casi creerse en un desarrollo de las ideas enteramente espontáneas, si ciertos progresos vivamente acentuados no hicieran sentir la intervencion de facultades sobresalientes ni nos diesen sin cesar nuevas pruebas del papel importante que el génio desempeña en las evoluciones del humano ingénio. En realidad, por doquiera vemos que una idea procede de otra idea, como la hoja del boton y el fruto de la flor; ó en otros términos, las ideas presentan exactamente el mismo encadenamiento que los diversos grados de cada creacion en la naturaleza.

Con lo que precede creo haber demostrado que cada invento encierra una sucesion lógica de pensamientos, la que es más ó ménos fácil poner en evidencia á *posteriori*. Cuanto ménos alcanzamos su razon, tanto más admiramos al inventor; y éste igualmente merece tanta mayor gratitud cuanto ménos perfeccionados eran los procedimientos y medios auxiliares de que podia disponer. Hoy que los trabajos técnicos se hallan secundados en tan grande medida por la aplicacion de los procedimientos científicos, no es raro ver realizar progresos que de una manera absoluta tiene verdadera importancia, pero que distan mucho de producir el efecto que habrian producido algunos años antes. Todo nos parece ya ser en estremo natural y sencillo y no exigir para comprenderlo y efectuarlo más que facultades de mediocre valor. Más la grandeza relativa á donde solo llega el que está dotado de facultades especiales, permite tambien adelantar mucho más que en otros tiempos, y ahí está la esplicacion del desenvolvimiento de la actividad febril que se nota en el dominio técnico. Como podria creerse, no es ese desenvolvimiento el resultado de un aumento de la facultad de produccion intelectual en la humana especie; dimana únicamente en realidad del perfeccionamiento y propagacion de los instrumentos de la inteligencia. A la manera que los útiles de los nuevos talleres mecánicos, tales instrumentos se han multiplicado y presentan hoy las más variadas formas, por mucho que los que las usan son los mismos que antes.

Volvamos ahora á nuestro objeto y examinemos más de cerca bajo el punto de vista histórico lo que se ha hecho hasta ahora para la cinemática teórica. Pero no ha de temer el lector que vayamos á sacudir el polvo de vetustos pergaminos para llegar á establecer el fundamento de una ciencia sobre áridos datos y bases. Trátase aquí simplemente de investigar los orígenes de la idea del asunto que nos ocupa, y esa sutil materia puede estraerse de los viejos libros sin turbar el reposo de los gusanos que los roen.

En los primeros tiempos cada máquina era considerada como un todo compuesto de partes que le eran propias.

Salvo raras escepciones los ojos del espíritu no distinguian todavia en las máquinas los grupos de piezas que designamos hoy con el nombre de mecanismos. Un molino era un molino, y un bocarte un bocarte: nada más. Por esa razon en los antiguos tratados se encuentra cada máquina descrita enteramente del principio hasta el fin. Así por ejemplo, en 1588 *Ramelli* en las descripciones que da de las diferentes bombas puestas en movimiento con ruedas hidráulicas, parte siempre, para cada una de ellas, del canal superior de la rueda para no detenerse hasta el tubo de evacuacion de la bomba. En aquella época se tenia sin duda apróximadamente la nocion de las ruedas hidráulicas, puesto que con frecuencia se las encontraba instaladas; pero la nocion de bomba faltaba todavia por completo, y de consiguiente la palabra para espresarla (2). Esto se esplica porque en realidad el pensamiento necesita que sobre un asunto dado haya hecho progresos que lo pongan en el caso de distinguir lo que hay de general y lo que es propio en el asunto: es la primera distincion entre el pensamiento científico y el pensamiento ordinario.

El primer tratado en que hay varios ejemplos de mecanismos aislados de las máquinas, es el de *Leupold*, que se publicó en 1724. Considera estos mecanismos en sí propios y no se ocupa de sus diferentes usos más que de una manera accesoria. La idea está allí únicamente en gérmen, y su desarrollo incompleto se esplica por la circunstancia de que las máquinas no constituian en aquella época una rama especial de la enseñanza; entraban todavia en el círculo de la física tomada en su sentido más lato. Pero á partir de la fundacion de la primera escuela politécnica, la de Paris, en 1794, vemos al punto consumarse sistemáticamente la separacion ya preparada entre la enseñanza de los mecanismos de movimento y el de la mecánica general.

Dicha separacion se halla íntimamente ligada á los nombres ilustres de *Monge* y *Carnot*. La nueva rama de enseñanza, considerada primero como una subdivision de la geometria descriptiva, fué separándose despues poco á poco. Las indicaciones dadas por *Monge* fueron aprovechadas por *Hachette*, que estaba encargado de dicha enseñanza en la escuela pilitécnica, y que en 1806 escribió un programa cuyo cuadro llenaron en 1808 *Lanz* y *Betancourt* en su *Ensayo sobre la composicion* de las máquinas. *Monge* habia designado con el nombre de «elementos de las máquinas» los *mecanismos idóneos para producir la trasformacion del movimiento*, y la clasificacion de los mecanismos que habia propuesto, se fundaba en las combinaciones posibles de los cuatro géneros de movimientos considerados como fundamentales, á saber: los *movimientos rectilíneos* ó *circulares*, *contínuos* ó *alternativos*. Suprimiendo las repeticiones se llegaba así á 10 clases, que contenian los mecanismos correspondientes á la trasformacion de estos movimientos:

Rectilíneo contínuo en { rectilíneo contínuo; — alternativo; circular contínuo; — alternativo }

Circular contínuo en { rectilíneo alternativo; circular contínuo; — alternativo }

Rectilíneo alternativo en { rectilíneo alternativo; circular — }

Circular alternativo en circular alternativo.

Ese sistema es en rigor susceptible de cierta estension; en la edicion segunda del tratado de *Lanz* y *Betancourt*, que apareció en 1819, dicha estension se encuentra en efecto realizada por la adicion á los cuatro movimientos primitivos, del movimiento alternativo ó contínuo sobre una curva. Así se llega á 21 clases en vez de 10, pero nada cambia en principio. Hasta entonces es el mismo sistema el que con modificaciones de escasa importancia quedó en uso y adquirió por consiguiente la sancion de una larga esperiencia. *Hachette* mismo que colaboró en la obra de *Lanz* (a), la adoptó sin reserva alguna en su *tratado elemental de las máquinas* que vió la luz pública por vez primera en 1811. En su *tratado completo de mecánica* publicado en 1818, *Borgnis* se muestra mucho ménos satisfecho de ese sistema, y puede decirse que lo deja á un lado. Como sus predecesores, sale al encuentro del problema de una manera general, y propone una division de máquinas en seis clases: los *receptores*, los *comunicadores*, los *modificadores*, los *soportes*, los *reguladores* y los *operadores*. No adopta la trasformacion del movimiento como principio fundamental y casi no recurre á él sino para establecer subdivisiones. Cumple añadir que no se ha considerado el sistema de *Borgnis* como opuesto al de *Monge;* pues la division que propusiera, se conceptuaba como una simple clasificacion establecida con la mira de la enseñanza general de las máquinas, y apropiada más ó ménos bien á tal objeto.

Algunos de los términos del sistema de *Borgnis* han quedado en el lenguaje científico; como son los de *receptor*, *trasmision* y *operador* que merced á los brillantes trabajos de *Coriolis* (3) y de *Poncelet* (4), han venida á ser verdaderos fundamentos, casi podria decirse artículos de fé de la mecánica moderna. A riesgo de incurrir en el reproche de heregia creo de mi deber hacer notar aquí que puede darse una modificacion á esas consideraciones. Perdone el venerable *Nestor* de la mecánica aplicada (b) mi escepticismo: *Amicus Plato, sed magis amica veritas*. Más adelante hallaremos el medio de someterlas á profundo exámen. Pero por depronto conste la evidencia de que esos elementos de doctrina no pueden salir del dominio de la ciencia de los mecanismos, en razon de la importancia de su papel con relacion á los movimientos de los órganos de máquinas.

La obra de *Borgnis* está hoy completamente desechada; sus clasificaciones de las máquinas y de sus órganos nos han traido poco provecho. Para el lector no representan mucho más en su mayor parte que una obra mnemónica algo ordenada. Y sin embargo, como demostraremos más adelante, algunas ideas del autor ocultaban más de lo que se ha propuesto.

Por los años 1830 se efectuó en la enseñanza de los mecanismos una revolucion de una importancia tanto más considerable cuanto más las bases filosóficas del

---

(a) De esa obra se hizo en 1840 una tercera edicion que no difiere de la segunda sino en un corto número de adiciones y el mayor lujo de la impresion.

(b) El general *Poncelet* murió despues de publicada esa observacion por vez primera en la edicion original.

nuevo sistema eran el resultado de un profundo exámen crítico. Eso produjo la obra del gran físico *Ampere* en su *Ensayo sobre la filosofia de las ciencias*. En su sistema de clasificacion *Ampere* asigna á la ciencia creada por *Monge* y *Carnot* el puesto de una ciencia de tercer órden é intenta fijar exactamente los límites de su dominio. En esto se aproxima al *ensayo* de *Lanz*, y entre otras cosas dice: «Esta ciencia debe por consiguiente definir una máquina, no como se hace en general: *un instrumento con cuyo auxilio puede cambiarse la direccion é intensidad de una fuerza dada*, sino: *un instrumento con cuyo auxilio puede cambiarse la direccion y velocidad de un movimiento dado.*» Segun él, en el estudio de los problemas que suscita el juego de ciertas máquinas, es ventajoso dejar á un lado enteramente las fuerzas, y añade: «A esta ciencia, en la que los movimientos se consideran en sí mismos tales como los observamos en los cuerpos que nos circundan y especialmente en los aparatos llamados máquinas, he dado el nombre de *cinemática* (de κινεμα movimiento.)» Más tarde aconsejó tratar esa ciencia en libros de enseñanza, que anuncia destinados á ser de grande utilidad. Por lo demás, no entró en mayores detalles respecto de esa cuestion.

La escitacion de *Ampere* fué rica en consecuencias; en Francia la cinemática no tardó á enseñarse como ciencia especial en gran número de cátedras y á tener su literatura propia. El nombre propuesto por *Ampere*, despues de encontrar en Francia una interesante acogida, acabó por ser igualmente más ó ménos familiar en las otras naciones (5). No obstante, se ha de confesar que no hemos llegado á conseguir toda la claridad deseable por lo que toca á los límites de esa ciencia y á la direccion real que debe recibir.

El primer tratado consagrado á la nueva ciencia, fué el de *Willis*, que apareció en 1841 con el título de *Principios del mecanismo*. Esa notable obra trata con lucidez un gran número de cuestiones de cinemática aplicada y abunda en reflexiones sobre su conexion íntima. El sistema desarrollado en ella se diferencia del de *Monge*, A *Willis* le parece que el sistema indicado en el *Ensayo de Lanz*, «*á pesar de su apariencia de sencillez científica*,» casi no constituye en realidad más que una *clasificacion popular*. Hace además constar que *Lanz* y *Betancourt* están en contradicion con la definicion dada por *Ampere*, puesto que introducen en el dominio de los mecanismos las ruedas hidráulicas, los molinos de viento, etc. Él es de opinion que no se deben admitir como *mecanismos puros*, sino aquellos que están compuestos de cuerpos sólidos. Para tales mecanismos hace resaltar la importante propiedad que ofrecen de determinar, no como dice *Monge*, los movimientos verdaderos en celeridad y direccion, sino simplemente las *relaciones* de esos dos elementos, para los movimientos que se producen en las máquinas. Segun que de esas dos *relaciones* queden constantes ambas ó variables, ó bien constante la una y variable la otra, el mecanismo debe entrar, segun su parecer, en una de las tres solas clases que admite, y que no consienten más que algunas subdivisiones fundadas en los modos de trasmision que se emplean.

De las observaciones de *Willis*, que en general ostentan las huellas de un espíritu de investigacion ingenioso y profundo, hay cierto número que son perfectamente juntas, mientras que otras en cambio son más que discutibles, como por ejemplo, las que le indujeron á escluir las ruedas hidráulicas y máquinas análogas. Punto es ese al cual tendremos que volver. Más sea lo que fuere, lo que importa notar es que la clasificacion de *Willis* no echó ninguna raiz en su propia pátria, y que en revancha se ha vuelto poco á poco á la senda trazada por el sistema de *Lanz*, en la cual aun hoy se sigue marchando tranquilamente.

La innovacion propuesta por *Ampere* dió igualmente magníficos resultados en Italia. *Giulio*, con su *Cinemática applicata alle arti* dotó á las escuelas técnicas de su nacion de un libro instructivo de gran valor. Ese tratado que apareció por vez primera en 1847 con un título algo diferente, liga de una manera ingeniosa la cinemática á la mecánica; pero en todo cuanto se refiere á las materias tratadas, reproduce casi fielmente á *Willis*, no sin intentar, empero, el reincorporar las máquinas hidráulicas suprimidas por ese último, lo cual no consiguió realizar sino de una manera bastante imperfecta. A través de todas las páginas de ese libro se siente el soplo de un espíritu muy sutil, tanto más digno de notarse cuanto que la obra iba dirigida á lectores que no tenian sino conocimientos elementales de matemáticas. Así es que la espresion matemática en su rigor y lenguaje adecuado debia con frecuencia reemplazarse con circunloquios, procedimiento que supone en el autor una inteligencia más profunda que la que exijen varias obras ricas en fórmulas, que atraen la vista por la ostentacion del aparato analítico.

En 1849 *Laboulaye* en su Cinemática emprendió igualmente la tarea de responder al deseo espresado por *Ampere*, procurando formular en cuerpo de doctrina la ciencia de los mecanismos.

No admite lo que *Willis*, de que en un tratado completo de cinemática deba limitarse el estudio á los mecanismos formados de cuerpos sólidos; oponia tambien que no es posible escluir de la cinemática las fuerzas

de una manera tan categórica como lo hiciera *Ampare*. Y partiendo de consideraciones nuevas sienta que todos los elementos de máquinas pueden dividirse en tres clases que designa con los nombres de *sistema palanca, sistema torno y sistema plano*. Todo cuerpo móvil entra respectivamente en una de esas tres clases, segun presente uno, dos, tres (ó más) puntos fijos ó inmutables. Esos sistemas son en verdad insuficientes para resolver la cuestion, conforme nos reservamos demostrarlo á su tiempo. Así se aplica que su autor no haya hecho de ellos ningun uso verdaderamente perentorio, quizá por el temor de no conseguir resultados suficientes; y en suma, para todas las aplicaciones de la cinemática recurre al sistema de *Lanz*, completándolo con subdivisiones adecuadas. Y tan adelante va en esa senda, que pretende estatuir á *priori* la clasificacion de *Monge* y demostrar que debe considerarse como la base verdadera y esencial de toda la cinemática. Con este ensayo filosófico *Laboulaye* no ha contribuido á los progresos de la cinemática científica, puesto que veda á sus adeptos toda investigacion ulterior, en tanto ménos en cuanto que su demostracion se presenta bajo una forma al parecer concluyente. Establecer á *priori* la clasificacion de *Monge* es á lo sumo aplicable á un sistema en que no se considerase más que el movimiento *del punto;* pero no tiene ningun valor para los movimientos *del cuerpo*, ó sea de un conjunto de puntos. Con todo, á pesar de esa imperfeccion el libro de *Laboulaye* ha prestado incontestables servicios, contribuyendo á difundir un gran número de conocimientos útiles. Para la parte práctica el autor conforme lo declara el mismo, se apoyó en los trabajos del sabio *Willis*, cuyos errores á veces reprodujo.

Morin intentó igualmente reunir las principales nociones de la cinemática en un pequeño tratado destinado á la enseñanza elemental que se publicó por primera vez en 1851 y que en la segunda edicion se tituló: *Nociones geométricas sobre los movimientos*. Este libro que fué redactado con gran rectitud de sentido, carece de pretensiones y encierra algunas ideas excelentes que pueden servir de consejo; pero en su totalidad permanece adicto al sistema de *Monge*.

En Alemania, durante todo el período que acabamos de examinar, no consta, por decirlo así, ninguna tentativa de desarrollo de la cinemática teórica. *Weisbach*, en una memoria titulada *Modificaciones del movimiento* y publicada en la Enciclopedia de *Hulsse* el año 1841, se ciñe estrictamente al sistema de *Lanz*; su actividad científica tan notable, como sabemos habia tomado muy opuesta direccion. Parece que debian esperarse algunas ideas nuevas de *Redtenbacher*, que se ha ocupado particularmente de mecanismos. Con su espíritu eminentemente filosófico conocia tambien muy á fondo la insuficiencia del sistema de *Monge;* pero arrastrado muy léjos primero por la creacion de su propio sistema de construccion científica de las máquinas y en segundo lugar por sus trabajos sobre la mecánica física, dió de mano á la cinemática, sin haber introducido en ella la menor novedad. Convencido de la imposibilidad de llegar á constituir un verdadero sistema científico de los mecanismos, fué de parecer que bastaba clasificarlos segun su utilidad práctica y que despues no faltaba sino someterlos á operaciones matemáticas. Ese nihilismo se trasluce en todas las líneas de su estimable tratado: Los *mecanismos de movimiento*, publicado en 1857, donde describe y trata teóricamente los mecanismos de la coleccion de modelos de *Carlsruhe*. Como ese tratado á pesar de la falta de todo sistema, ha tenido gran éxito, debe deducirse que entre nuestro público técnico hay una viva necesidad de esclarecimientos teóricos sobre el asunto que nos ocupa.

En el ínterin se habia realizado en Francia dentro de los dominios de la geometria un progreso de suma trascendencia para la cinemática. *Chasles*, y sobre todo *Poinsot*, habian vuelto á estudiar, llegando pronto á desarrollarlo, el modo de consideracion geométrica del movimiento de los cuerpos sólidos ideado por *Euler* en el siglo anterior. La *teoria de la rotacion de los cuerpos, de Poinsot*, y su *teoria de los conos circulares rodantes*, dieron notable y vivo impulso al empleo del modo de representacion geométrica en la ciencia de los mecanismos. Las proposiciones de *Euler* que hasta entonces casi no se habian enseñado sino accesoriamente á guisa de consideraciones teóricas interesantes, no tardaron á ser entre las manos de los cinemáticos franceses los elementos primeros y fundamentales de la enseñanza. El resultado de su introduccion en el estudio de la cinemática fué infundir como nuevo soplo de vida á esa ciencia que habia quedado algo inerte. Bajo la influencia de ese impulso viéronse aparecer sucesivamente los *Elementos de geometria aplicada á la trasformacion del movimiento*, por *Girault*, en 1858, la *Cinemática*, de *Belanger* en 1864, y aquel mismo año el *Tratado de mecanismos*, de *Haton:* los dos primeros tratados se ocupan principalmente de la parte geométrica, es decir teórica, y la tercera se distingue en especial por sus ensayos de aplicacion de la teoria á los mecanismos. A pesar de sus cualidades é importancia incontestables, las tres obras, apenas entran en el dominio de las aplicaciones, caen en las antiguas dificultades de la clasificacion. Queriendo apartarse del *antiguo sistema* de *Monge*, cuya insuficiencia se ostenta de un

modo harto claro á la luz de las nuevas consideraciones, mal que les pese quedan en parte hundidas en él. Cada uno de ellas presenta un modo de clasificacion diferente de las otras dos, y oscila á su manera entre los sistemas de *Monge* y *Willis*. *Girault* y *Belanger* toman ambos como base de sus divisiones principales la *trasformacion del movimiento*, si bien las establecen de una manera enteramente distinta: tocante á las subdivisiones están determinadas por la variedad de los medios de trasmision, encontrándose en *Belanger* las relaciones de las velocidades de *Willis*. *Haton* comienza por hacer constar las imperfecciones del antiguo sistema, y al efecto observa que, por ejemplo, se veria obligado á buscar los engranajes en casi todas las veinte y una clases que admite, si supusiera estas clases debidamente establecidas; y luego cambiando de táctica propone tomar los órganos de trasmision como base de la clasificacion. Así se ve inducido á crear nueve clases, cuyas seis primeras son: los *galetes*, las *deslizaderas*, los *escéntricos*, los *engranajes*, las *bielas*, y las *cuerdas;* las tres últimas clases llevan la fatal designacion comun de *aparatos accesorios*. Luego, hay un tercio de la cuestion que, por decirlo así, debiera ser tratado en forma de notas al pié de las páginas.

Esa escuela enteramente nueva cuyas otras producciones paso en silencio, no ha conducido, pues, en definitiva, á un concepto comun de la cinemática aplicada. De ahí el estado de incertidumbre que se ha manifestado principalmente en Francia. Los que se inclinaban á dar á la cinemática un carácter puramente científico, se mostraban convencidos de que nada debia hacerse en el terreno de las aplicaciones; cayendo así en el nihilismo de *Redtenbacher*. A eso conviene atribuir el orígen de la separacion que no tardó en presentarse entre la *cinemática pura* y la *cinemática aplicada*. A ese nuevo órden de ideas pertenece el tratado de *Cinemática pura*, de *Resal*, que apareció en 1862 y que demuestra que en esta senda es muy difícil impedir la difusion de los problemas de la cinemática en los de la mecánica pura.

A la par de ese libro debemos mencionar aquí, como fruto de esa misma incertidumbre, una ciencia particular que se intentó constituir estos últimos años con el nombre de *automática* y cuyo objeto estriba en establecer la teoria de los métodos que permitan realizar con mecanismos, relaciones de movimientos imaginados ó determinados en forma de espresiones matemáticas. Esa tentativa debida al ingeniero *E. Stamm* tornaba en definitiva á la separacion, ya propuesta de la ciencia pura y de la ciencia aplicada, y en realidad se traducia en la publicacion de un *Ensayo sobre la automática pura*, el año 1863. *Stamm* prestó esenciales servicios á la cinemática de las máquinas selfactinas de hilar, es decir, á un género particular de aplicaciones de la cinemática facilitando singularmente el estudio de la tecnologia de las hilanderias. Pero su separacion de la automática no debe considerarse como práctica, ya que en verdad la automática no puede tener existencia propia: no es en definitiva más que una aplicacion del *método sintético* con empleo de principios cinemáticos, y por ese motivo se encuentra atada de una manera indisoluble á la cinemática propiamente dicha.

El exámen de la literatura peculiar al asunto que nos ocupa, está terminado, y solo nos queda resumir nuestras observaciones. Por un lado hemos hecho constar la confusion poco satisfactoria en las tentativas de formar un solo y mismo dominio de ideas. Cuantos autores tantos sistemas, ningun punto de reposo; siempre tanteos é investigaciones, y finalmente cuando se ha movilizado toda la materia científica posible, la ciencia, cuyos contornos han sido sumariamente esbozados por *Ampere*, parece querer dividirse en dos y hasta en cuatro ciencias distintas, como si pudiera compararse á uno de esos infusorios que se reproducen por division. Por otro lado, empero, hemos podido hacer esta observacion bastante consoladora de que las consideraciones emitidas han presentado cada vez más rigor y sutileza, al propio tiempo que el número de los métodos de investigacion y el de los mecanismos sujetos al exámen aumentaban sucesivamente en grandes proporciones. En definitiva, los dos aspectos de la cuestion, el de la teoria y el de las aplicaciones, á la par que se desarrollaban paralelamente, conservaron existencia distinta: no se logró amalgamarlos, hacerlos pasar del uno al otro. En cuanto á la causa de semejante estado de cosas casi no puede buscarse más que en los *sistemas*, porque en la práctica de las máquinas las aplicaciones, y hasta los mecanismos, continuaron desenvolviéndose tranquilamente con el invento y los perfeccionamientos, sin inquietarse por las consideraciones teóricas que sucesivamente han dominado. Efectivamente, las teorias formuladas hasta aquí no han contribuido á ese desenvolvimiento más que en un solo punto de vista, el de las formas de ejecucion, como por ejemplo, en los métodos de endentaduras de los engranajes, etc.; *más ninguna de ellas ha dado mecanismos nuevos*. Circunstancia es esa sobre la cual no se llamará demasiado la atencion y que puede servirnos para esplicar la persistencia con que, á pesar de todas las promesas de las nuevas teorias, los mecánicos cada vez que trataban de resolver una cuestion teórica, volvian siempre al antiguo sistema de *Monge*, que parece tan natural: es un hecho

este que está bastante demostrado con la lectura de los diversos periódicos técnicos de todos los paises.

Con lo que precede creo haber demostrado la insuficiencia de la cinemática teórica, tal como en la actualidad se enseña, y por consiguiente la necesidad de una reforma. Ahora se presenta la cuestion de saber en qué consiste, propiamente hablando, la imperfeccion del género de consideraciones admitidas hasta el dia en la enseñanza de esa ciencia.

En primer lugar la clasificacion de *Monge*, por natural que parezca, no responde al estado real de las cosas. Si sucediese con esa clasificacion lo que sucede con las de *Lineo* y *Cuvier* respecto á los reinos de la naturaleza orgánica, habria podido como éstas tomar sólido arraigo; y en el fondo la tenacidad con que se ha sostenido hasta aquí, se esplica por ese vago sentimiento de que ha de estar fundada en análogos motivos. Más esa analogia no existe realmente; pues aun suponiendo que se tratase tan solo de formar clases para los mecanismos, la clasificacion fundada en las trasformaciones de movimientos no puede utilizarse, como quiera que conduciria á repeticiones sin fin. Casi todos los mecanismos deberian buscarse en dos clases á lo ménos, la mayor parte en cuatro ó seis, y algunos hasta diez y hasta quince, por tener cada uno de ellos que introducirse forzosamente en cada una de las clases que corresponden á los diversos géneros de trasformacion de movimiento, para los cuales puede realmente utilizarse en la práctica. En *Willis*, el investigador tan severo para sí mismo, al lado del sentimiento muy marcado de la necesidad de una clasificacion racional, se descubre cierta desconfianza relativa á la elasticidad de las bases de su sistema, de suerte que su clasificacion no produce la impresion de una cosa convincente en absoluto. Como para ser consecuente consigo mismo se mantiene fiel al principio de las relaciones de movimiento, se ve obligado á tratar unos en pos de otros, los mecanismos de género más diversos. Además, como cada uno de esos mecanismos considerado separadamente puede corresponder á varios movimientos relativos, le es tambien imposible evitar las repeticiones. De igual manera podrian formularse las objecciones á que dan motivo las clasificaciones de *Laboulaye*, *Girault*, *Belanger*, *Haton*, etc.; objeciones que podrian presentarse lo mismo contra el conjunto que contra cada sistema considerado en particular, ya que es muy evidente que una ciencia que merezca realmente ese nombre, no puede dejarse formar caprichosamente de seis á ocho maneras distintas.

De ahí resulta que la razon de la imperfeccion de los sistemas propuestos no reside en la clasificacion misma y debe irse á buscar más arriba. Conforme he indicado antes, depende de la circunstancias de que nunca en las investigaciones se sube bastante á los orígenes de las ideas, no se sigue lo suficiente su marcha hasta las conclusiones, y se ha comenzado á clasificar sin haber antes procurado darse clara cuenta del objeto de la clasificacion. En una ciencia que se está formando, no es admisible que de buenas á primeras se entre *in medias res;* pues una ciencia tal, exige cabalmente que como, en las matemáticas, la ciencia maestra por excelencia, se comience por remontarse á los principios más sencillos, á los que están basados en axiomas. Si no se procura primero descubrir qué principios son esos, no es posible llegar al fin. Así lo demuestra claramente el exámen de algunos puntos del método ordinario.

Así por ejemplo, hasta hoy se juzgaba conveniente comenzar trasformando un movimiento rectilíneo en otro de igual naturaleza, más sin preguntarse de donde dimanaba el primer movimiento rectilíneo, por qué razones existia y de que manera podia conseguirse. Para citar un caso particular, *Hachette* y *Lanz*, por ejemplo, empezaban el estudio de los mecanismos por el exámen de las *poleas* llamadas *fijas*. Segun ellos el movimiento rectilíneo de la hebra que se desarrolla, se trasforma en un movimiento semejante al de la hebra que se arrolla. ¿Por qué es rectilíneo el primer movimiento? No lo esplican. Más aun, ninguna necesidad hay de que ese movimiento sea rectilíneo, puesto que se puede tirar en todos sentidos de la hebra que se desarrolla, sin que cambie el mecanismo, con la sola condicion de conservar esa hebra una tension suficiente. Notemos ahora que el movimiento de la misma hebra se encuentra trasformado, primero en movimiento circular de los puntos de la polea y del cabo de cuerda que la rodea, y solamente despues el de la hebra que se arrolla. Por lo tanto, en este primer problema, ya no han sido los autores fieles á su sistema. Conviene añadir que el movimiento de la hebra que se arrolla, presenta es igual grado la indeterminacion que hemos señalado por lo que toca á la hebra. Como se vé pues, el primer ejemplo que analizamos encierra una infinidad de inexactitudes. Incidentalmente debemos advertir que en lo que atañe á las nociones teóricas que han de aplicarse á su solucion, el problema de las poleas fijas ofrece muy grandes complicaciones, como nos reservamos demostrarlo más adelante.

En general, para un mecanismo simple las nociones que permiten por sí solas llegar á él, pueden ser muy complicadas; y tambien puede suceder en ciertos casos lodo lo contrario. Pero, trátase de un mecanismo senci-

llo ó complicado, si se quiere comprender ó tratar el simple lado científico de la cuestion, es indispensable abarcar en tal trabajo toda la série de nociones que se refieren á dicho mecanismo, remontándose sucesivamente de cada nocion particular á otra más elevada que contenga la anterior, hasta llegar á principios verdaderamente generales. Por muchas que sean las dificultades que puedan encontrarse en ese género de trabajo, y por más que parezca de escasa utilidad á primera vista, no por ello es ménos indispensable, y precisamente por no haberse comprendido bien hasta hoy esa necesidad, los cinemáticos han visto naufragar unas en pos de otras todas sus reglas y teorias. Antes he señalado cuan ilógica era la manera de operar que habian adoptado y que consistia en tomar de las manos del inventor los mecanismos simples ó que parecian tales, ya se tratase de inventos debidos á personas conocidas, ya de aquellos cuya tradicion se pierde en la noche de los tiempos.

El exámen de esa tradicion, circundada de vagas oscuridades, es para el cinemático asunto de singulares consideraciones. Debo renunciar aquí á profundizar esa interesante cuestion, para la cual me reservo entrar ulteriormente en mayores detalles, limitándome por de pronto á presentar una sola observacion. Desde los tiempos históricos que nos permiten seguir las huellas de la constitucion de las máquinas, hasta su estado actual, vemos el uso en diversos lugares de aparatos distintos, y desde las máquinas verdaderamente complejas hasta los mecanismos más sencillos, que apenas merecen el nombre de máquinas. No podemos examinar en este momento cual es el criterio de la facilidad relativa que encontrará el inventor en cada uno de ellos; pero se puede consignar el hecho de que se produjeron en diferentes lugares é independientemente unos de otros. Los cilindros de que se servian en Asiria lo mismo que en Egipto los constructores para arrollar sus colosos de piedra, forman parte de esas máquinas primitivas. Los carros de madera y de metal empleados ya para el trasporte de fardos, ya para los combates, se encuentran en tiempos más remotos, entre los egipcios, babilonios, indios, etc.; las ruedas hidráulicas se usaban en la antigua Mesopotamia y en Egipto, pero lo mismo sucedia en China, las Indias y el Asia Central; las ruedas dentadas eran tambien conocidas de los griegos, así como los tornillos ó cócleas, las muflas ó garruchas; ciertos aparatos de palancas, etc. Algunos de esos mecanismos se trasmitieron de pueblo á pueblo, en tanto que otros se perfeccionaron progresivamente en el mismo suelo en que los encontramos. Todos eran el producto de la inteligencia humana, á la que se atribuia amenudo una inspiracion divina, como quiera que ciertos inventos eran considerados como dones de los dioses. En suma, eran *todos el resultado de una actividad del pensamiento que habia recorrido ciertos grados de desarrollo.* De ahí dimana que tambien hoy se ha de recurrir *á los procedimientos del pensamiento para la investigacion de los mecanismos,* y ese es el problema que ante todo debe intentar resolver la cinemática teórica. Mientras sea impotente para llegar á los elementos y mecanismos de las máquinas, sin recurrir á la historia de los inventos, no tiene el derecho de reivindicar el carácter de verdadera ciencia; en semejantes condiciones no es á decir verdad, más que un vulgar empirismo que á veces se ostenta haciendo alarde de ropajes prestados á ciencias estrañas. Más si por una determinacion rigurosa del camino que ha de recorrer, llega á proporcionar el medio de producir *movimientos de una especie determinada,* comienza á ser realmente una ciencia y puede desde entonces llegar con espontaneidad á una clasificacion de sus materias. Sentando enseguida la cuestion relativa á la trasformacion de un movimiento en otros, podrá la nueva ciencia decidir por sí sola si hay verdaderamente una base de clasificacion y qué valor puede esta base tener para ella. De una manera general encontrará en sí misma como ciencia verdadera sus propias leyes y no tendrá necesidad alguna de la intevencion de un Licurgo que se las importe de fuera.

Vamos á llegar ahora á otra série de conclusiones de suma importancia, que merecen llamar la atencion. Suponiendo que se han logrado determinar con exactitud los procedimientos del pensamiento que han conducido á la formacion de los mecanismos conocidos, es evidente que tales procedimientos deben permitir un mayor avance en la misma senda, es decir, deben ser susceptibles de procurar los medios en virtud de los cuales pueda llegarse á nuevos mecanismos, y por lo tanto hacer las veces del invento, dando á esa palabra la acepcion que hasta hoy ha tenido. Espero al hablar así, que no se querrá achacarme el querer espresar una vulgaridad. ¿Hé querido decir acaso que una vez dueño de la nueva receta, todo indivíduo de inteligencia ordinaria podria acomodarse á sus anchas en el asiento del génio y formular inventos á guisa de oráculo? Nó, solamente he querido espresar la idea de que en el dominio de los problemas de las máquinas es posible introducir esas mismas operaciones intelectuales que la ciencia utiliza en otros terrenos para realizar sus investigaciones. Antes he intentado demostrar que *inventar* es *pensar*. Luego, si en el asunto que nos ocupa logramos coordinar los procedimientos de la *reflexion*, habremos abierto con ello el camino para el invento.

Gœthe, cuya atencion se fijó muy especialmente en la manera de operarse la estension de nuestros círculos de ideas, resumió sus observaciones sobre este punto en esta noble sentencia: «Todo lo que llamamos inventar, descubrir, en el sentido más elevado, es la realizacion representativa de un sentimiento original de la verdad, que despues de desarrollarse largo tiempo en silencio, se manifiesta inopinadamente con la celeridad del rayo, dando nacimiento á una nocion fecunda.» *Schopenhauer*, el pensador que sorprendemos aquí como en otros muchos puntos en comunidad de ideas con *Gœthe*, se espresa sobre cuestiones de igual índole en los términos qua juzgamos conveniente reproducir: «Nuestros mejores pensamientos, los más ingeniosos y profundos, se presentan de repente á nuestra inteligencia como una inspiracion, y amenudo sucede que se ofrecen seguidamente en forma de sentencias significativas. Tales pensamientos son sin duda los resultados de *prolongada meditacion de que no se tiene conciencia*, y de un número infinito de datos ó nociones que á veces se remontan muy atrás y que en parte están olvidados. Con ménos frecuencia el modo de proceder de nuestros pensamientos y decisiones se muestra por completo á la superficie, es decir, forma un encadenamiento de opiniones claramente formuladas, á pesar de todos nuestros esfuerzos para dar cuenta de esos pensamientos y decisiones á nosotros mismos y á los demás; y en verdad la mayor parte de las veces se efectua en el fondo de nuestra alma, allá en sus más recónditos repliegues una madura meditacion, merced á la cual la impresion procedente del esterior, recibe del pensamiento nueva forma: en cierto modo se opera ese trabajo de un modo tan inconsciente como el de la trasformacion de los alimentos en jugos y sustancias á propósito para el sosten del cuerpo humano. Ocurre por lo tanto que amenudo nos encontramos impotentes para darnos cuenta de la procedencia de nuestros pensamientos más profundos, que son el resultado de la elucubracion que se realiza en la misteriosa oscuridad de nuestro espíritu: opiniones, ideas, conclusiones y pensamientos se elevan de sus profundidades de improviso y no sin causarnos á nosotros mismos cierta sorpresa. (6)»

Las opiniones que útilmente concurren á la concepcion de un mecanismo, son las que pueden considerarse como «claramente formuladas,» valiéndonos de una espresion tomada á la cita anterior, y son por consiguiente susceptibles de conducir al resultado que se busca, del mismo modo que en matemáticas las proposiciones muy claras y encadenadas permiten llegar á la solucion final. En otros términos, para el cinemático científicamente preparado, el invento de un mecanismo viene á ser un problema científico capaz de ser resuelto con métodos bien determinados ó claros, que no pueden presentar sino dificultades de aplicacion. El mecánico que se encuentre en condiciones de utilizar instrumentos tan poderosos, dejará naturalmente muy léjos detrás de él al que no sepa usarlos antes ni despues, de idéntica manera que el matemático creador se eleva muy por encima del que no conoce más que la práctica del álgebra, y por ende no tiene á su disposicion para sus trabajos más que las simples operaciones de esa ciencia, tales como se le han enseñado.

No debe perderse de vista que el conocimiento profundo de los antiguos mecanismos es y debe ser más importante que la concepcion de mecanismos nuevos. Se tiene con efecto el derecho de sorpresa al contemplarse la exigua profundidad á que han penetrado en la constitucion de los mecanismos, métodos de investigacion usados hasta el dia, y como consecuencia el imperfecto conocimiento á que se ha llegado en la mayor parte de los mecanismos empleados. Bajo ese punto de vista una cinemática verdaderamente científica ha de ser por estremo útil al mecánico capaz, habituado á discurrir y tratar sériamente los problemas que ha de resolver. Dará en efecto esa ciencia por resultado allanar completamente las dificultades de su trabajo y por ende dispensarle de investigaciones profundas y á veces fatigosas, que sin ella exigirian las soluciones de tales problemas. Así tambien el tecnologista que hasta aquí apenas se ha servido de la cinemática, descubrirá en ella un poderoso auxiliar para la inteligencia de las antiguas máquinas y el juicio que deba formar de las nuevas. Profundizando esos dos géneros de aplicaciones se encontrará la garantia de que la ciencia trasformada podrá concurrir dignamente á un fin de la más notoria importancia, es decir, al movimiento progresivo de la teoria general de las máquinas y de sus aplicaciones.

Si ahora abarcamos de una sola mirada las diferentes partes de la descripcion que hemos intentado dar sobre el modo de las consideraciones hechas hasta hoy y sobre el ideal á que deben tender todos los esfuerzos, fácil es conocer que ese modo de coasideraciones se presenta en realidad como si no tuviese una unidad intrínseca, por mucho que se persista en considerar que esa unidad debe forzosamente existir en razon de ser científicos los procedimientos de investigacion empleados. Más sobre haber demostrado que eso no basta, se trata en primera línea de fijar las ideas fundamentales propias para el objeto de las investigaciones y que le son inherentes. Con todo, debemos reconocer al propio

tiempo que aquí se trata en realidad y sin ninguna duda, de un dominio de investigacion que atañe á las ciencias exactas. Hecha esa observacion es obvio que el procedimiento usado hasta ahora debe conceptuarse insuficiente y que no puede sostenerse por más tiempo, toda vez que no permite sacar conclusiones sino en límites muy estrechos y que no es capaz de dar bases bastante anchas para lo que existe. Por lo que toca á la trasformacion de la ciencia cuya necesidad queda así demostrada, es indispensable establecerla firmemente sobre principios á la vez lógicos, sencillos y claros. Lo que puede deducirse de la crítica de los sistemas actuales, todo lo que he pretendido desarrollar con ejemplos particulares y que en cierto modo he logrado condensar en las sentencias filosóficas últimamente citadas, todo ello puede, repetimos, bajo el punto de vista de la cuestion especial que nos ocupa, resumirse en esta sola frase. *La ciencia de las máquinas debe fundarse en la deduccion.* A tal objeto, se trata de dar al sistema de enseñanza de esa ciencia una forma tal, que esté basada en definitiva sobre corto número de verdades fundamentales que le sean propias. La riqueza de tal sistema debe estar completamente en relacion con el carácter severo y sencillo de esas verdades, al cual debe pedir todo su desarrollo. Cabalmente en ese punto es donde más fácilmente puede hacerse constar la pobreza del modo de concepcion usado hasta ahora. Si se hallase tan distante de lo que con razon hemos indicado como el ideal, no seria por haber empleado el método inductivo con preferencia al deductivo, lo cual aun no ofreciendo ciertamente ventaja alguna, podria en rigor defenderse. Nó, la verdadera causa de su inferioridad estriba precisamente en que no era metódico: no habia escogido ningun punto de partida claramente determinado para sus investigaciones, ó dicho con más exactitud, no habia encontrado ninguno, á pesar de sus asíduas investigaciones. Verdaderamente puede decirse que muchas veces se habia lanzado el grito retumbante de *Eureka,* y que merced al eco de ese grito se habia creido poderse abandonar á una dulce quietud y satisfaccion, creyendo, que se habia descubierto el verdadero punto de vista.

Toda ciencia exacta debe pasar una vez por semejante período de trasformaciones, y no puede tener la perspectiva de llegar realmente á la claridad hasta que su materia ha tomado una estension bastante para generalizar las consideraciones. La cinemática ha llegado precisamente á ese momento crítico. El número de mecanismos ha aumentado casi más allá de toda medida, lo propio que el de sus aplicaciones. Con los procedimientos enseñados hasta ahora se ha hecho casi imposible retener el hilo que pudiera servir de guia en el laberinto de todas esas producciones.

Por otro lado, no debe ocultarse que la trasformacion de la ciencia actual ha de encontrar muchas dificultades. A veces ni siquiera sabemos como se mueven las ideas, que nuestro espíritu ha tenido que percibir, dentro de los límites que nos han trazado la instruccion y el estudio. Por lo tanto, si nuevas ideas han de sustituir á las que tenemos por costumbre, se hace en cierto modo necesario expulsar estas últimas y vencer por ende la resistencia de poderosas fuerzas de cohesiones interiores que se oponen á dicha espulsion. Tales resistencias se deben á diversas causas, entre las cuales han de citarse la direccion de la enseñanza recibida en las escuelas, la literatura que á ésta se refiere, con toda la importancia que le dan su poderosa estension, el hábito tan difícil de adquirir y por consecuencia tan persistente. Por último, la dificultad real que resulta de no poderse limitar el método presentado aquí, á ser estudiado parcialmente *con amore* y por pasatiempo, sino que al contrario, debe comprenderse y abarcarse en todo su conjunto. Segun esto, el camino que he de recorrer para llegar á verdades de gran sencillez no puede ser muy corto. La necesidad de dejar escrupulosamente á un lado las preocupaciones existentes, la investigacion forzosamente harto lenta del sendero que más conviene entre todos los que se presentan á la vista, se oponen á un movimiento acelerado. Por todos esos motivos el contenido de los siguientes capítulos tiene ménos por objeto aumentar los conocimientos positivos del mecánico propiamente dicho, que ejercer una influencia sobre la manera de comprender lo que ya conoce y asegurarle así firmemente la posesion de tales conocimientos; pues, para concluir con *Gœthe: no se posee más que lo que se comprende.*

CINEMÁTICA

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

DE UNA

TEORIA GENERAL DE LAS MÁQUINAS

CAPÍTULO PRIMERO

CONSIDERACIONES GENERALES

§ 1

Límites del problema de las máquinas.

Para el vulgo falto de nociones mecánicas existe una diferencia esencial entre las máquinas y los agentes que constituyen en la naturaleza los orígenes de fuerza y de movimiento; más para el que posee los principios teóricos de la mecánica, no existe semejante distincion, ó por mejor decir, desaparece por completo desde el momento en que analiza más de cerca los fenómenos considerados, de suerte que en definitiva y bajo el punto de vista de la mecánica pura los problemas relativos á las máquinas van á colocarse en las mismas clases que aquellos que son originados por acciones mecánicas que se ejercen en la naturaleza. En unos y otros los movimientos y las fuerzas están sometidos á las mismas grandes leyes, que tomadas con toda la generalidad de que son susceptibles, están y deben estar por encima de todos los casos particulares. Para el mecánico teórico la máquina no es ya actualmente más que un ejemplo, un paradigma; él no admite ya los mismos desenvolvimientos que en otro tiempo, cuando se encontraba enfrente de un gran número de problemas nuevos no resueltos, y que por lo tanto el problema general de las máquinas se imponia como una de las principales cuestiones del estudio de la mecánica. El estudio de las máquinas está hoy subordinado á la mecánica teórica, y esa subordinacion está en verdad perfectamente justificada cuando no se trata sino de consideraciones puramente científicas. Más no sucede lo mismo, á nuestro entender, al que se coloca en el punto de vista de la práctica; pues en tal caso, en efecto, como el estudio de las máquinas bebe en gran número de otras fuentes y se enriquece con las teorias que le son propias, se encuentra que en realidad constituye un dominio de actividad especial, susceptible de numerosas subdivisiones. En tales circunstancias es evidente que no solo se tiene la posibilidad, sino más bien el deber de separar los problemas científicos, á los cuales puede dar orígen, de los de la mecánica general. Ante todo debemos hacer constar que el sentimiento de la posibilidad de semejante separacion ha existido siempre, no solo entre los prácticos dotados de sólida instruccion científica, sino tambien entre los teóricos bastante familiarizados con las máquinas, por más que por otro lado en la ciencia mecá-

nica se manifieste incontestablemente una tendencia cada dia más marcada á reducir las cuestiones relativas á las máquinas á simples problemas de mecánica pura. No cabe dudar que ese sentimiento tiene su razon de ser.

Ante todas cosas, por motivos sacados de la práctica nos parece deseable no pedir á la mecánica pura la solucion del problema que nos ocupa; pues en tal caso la construccion de las máquinas se hallaria bajo el concepto científico, apoyada en una base harto poco definida, demasiado elástica y harto movediza. Las nociones fundamentales de fuerza y movimiento están además realmente sujetas á interpretaciones bastante variables. Por efecto de la posicion que ocupan sobre la línea de separacion de la física y de la metafísica, se hallan naturalmente sometidas á las contínuas oscilaciones de las opiniones é ideas que llegan sucesivamente á predominar en el campo de las investigaciones matemáticas y filosóficas. Con facilidad se comprende que colocándose una incertidumbre de ese género y dentro del órden didáctico, en conexion directa con una teoria destinada á dar lugar á aplicaciones prácticas, no podria ménos que acarrear en las bases de la enseñanza un estado de oscilacion diametralmente opuesto al resultado que debe esperarse en semejante caso. Ejerceria su influencia en todas las definiciones, en todas las explicaciones que exigiesen remontarse á los principios; al profesor que comprende muy bien toda la importancia del rigor científico, le obligaria á valerse de desarrollos interminables, cuya inutilidad práctica conoceria y sentiria, ó á introducir restricciones ilógicas bajo las diferentes designaciones de «conveniencias técnicas,» de «disposiciones prácticas,» etc.; le obligaria, en suma, á contentarse con *reglas* allí en donde hubiese con mucho preferido atenerse rigurosamente al método científico que no admite más que *leyes*. Luego, esa generalizacion no es *práctica*, y además, debe considerarse como errónea bajo otro punto de vista, que es cabalmente aquel en que nos hemos colocado desde un principio para separar de las matemáticas generales la geometria, luego de ésta la geometria descriptiva, y siguiendo más adelante en esta senda para aislar de la mecánica y de la física la física cósmica, la hidráulica y la aereostática; en otros términos, es el punto de vista que ha determinado la subdivision de una ciencia de carácter *general* en otras ciencias *especiales subordinadas á la primera*.

Semejante division de una ciencia en varias ramas es legítima y está naturalmente indicada, cuando cada una de ellas puede en realidad quedar encerrada en un círculo de ideas claramente definido, y precisamente es fácil demostrar la posibilidad de separar los problemas relativos á las máquinas de los de la mecánica general. Entre esos dos géneros de problemas existe, en efecto, una línea de demarcacion que es siempre fácil indicar y caracterizar, por mucho que esa línea no siempre esté tan definida y clara como en los ejemplos citados. Para probarlo prescindamos de toda idea preconcebida, y sin fijarnos en ninguna teoria preexistente, salgamos de frente al exámen de dos soluciones de un solo y mismo problema de movimiento, alcanzadas la una por un *fenómeno natural*, y la otra por el empleo de una *máquina*.

Supongamos, por ejemplo, que se trata de un movimiento circular que deben realizar: 1.°, *el satélite de un planeta;* 2.°, *una rueda*.

En torno del planeta P (fig. 2) (a) gira por la accion de una causa cualquiera el satélite T, de modo que su centro describe con respecto al punto central de P, una circunferencia cuyo plano pasa por el mismo punto. Si todas las condiciones fuesen constantes, ese movimiento continuaria indefinidamente sin alteracion. Pero así que una fuerza perturbadora exterior Q_1, sensiblemente normal en el plano del círculo comienza á obrar sobre el satélite T, se modifica la trayectoria de este último. Para impedir que esto suceda, es necesario que otra fuerza exterior Q_2, precisamente igual y contraria á Q_1, obre tambien sobre T. Si Q_1 es igual á 1 kilóg., Q_1 debe tambien ser igual á 1 kilóg., si Q_1 se eleva á 100 quintales en virtud de la misma ley, Q_2 debe elevarse á 100 quintales igualmente. El grandor absoluto de Q_1 es por lo tanto indiferente, y el solo punto importante es la conservacion del equilibrio entre las fuerzas que obran sobre T y que tienden á turbar el movimiento. En la naturaleza el sosten de ese estado de equilibrio, que supone la preexistencia de causas de fuerza igualmente repartidas, es muy difícil de realizar, pues acaso los cuerpos celestes no dan un solo ejemplo de ello. Sin embargo, á pesar de las dificultades evidentes que se oponen á la realizacion de dicho estado, siempre nos será permitido admitirle como hipótesis. Por un procedimiento del todo diferente y mucho más sencillo que el de la naturaleza, llegamos al mismo objeto con una máquina. Para comunicar á los puntos de la rueda R (fig. 3) un movimiento circular, la armamos de un árbol compuesto de materia resistente y terminado en ambos estremos, A y B, por dos gorrones cilíndricos torneados, cuyos ejes geométricos coinciden

(a) Debemos advertir que todas las figuras que citamos en este tomo I, se refieren al *atlas* de láminas de la seccion teórica, ó sea el primero de los dos que acompañan esta publicacion. Si alguna vez hemos de referirnos al segundo *atlas*, lo indicaremos espresamente.

perfectamente; este árbol se coloca enseguida en un doble soporte L, clavado en el suelo de manera que los dos gorrones descansen en dos cavidades vaciadas y pulidas exactamente al mismo diámetro. Si en tales condiciones ponemos la rueda en movimiento con un manubrio, cada punto de esa rueda situado fuera del eje geométrico de las dos cavidades, describirá una circunferencia alrededor de un punto de ese eje.

Supongamos ahora que una fuerza lateral Q obra sobre la rueda: si admitimos que los materiales de que están formados la rueda, el árbol y el soporte son completamente rígidos, *en nada* se modificará el movimiento circular, sean cuales fueren el grandor y la direccion de la fuerza Q, sea constante ó variable, contínua ó intermitente. En tal caso aun el equilibrio se halla sostenido constantemente, si bien que por otros medios que en el ejemplo anterior. Así que la fuerza Q, comienza á obrar, se desarrollan en el interior de la rueda, del árbol y del soporte, fuerzas internas, ó fuerzas moleculares, que le son rigurosamente iguales en grandor y opuestas en direccion. Las acciones de las fuerzas son exactamente aquí por lo tanto las mismas que en el caso del satélite. La sola diferencia que debe notarse, consiste en que en el último caso *las fuerzas esteriores son completamente independientes una de otra*, mientras que aquí la accion de la fuerza esterior *da orígen* á la reaccion de las fuerzas moleculares.

No podemos en la construccion de nuestras máquinas emplear materiales completamente rígidos, puesto que no los hay en la naturaleza; pero cuando los que podemos emplear, se ponen en obra con dimensiones convenientes, no sufren en realidad bajo la accion de las fuerzas esteriores, más que deformaciones bastante exíguas para considerarlas enteramente despreciables: al constructor de máquinas toca determinar las formas y dimensiones que debe adoptar para conseguir ese resultado. Si prescindimos de esas deformaciones muy exíguas ó insignificantes, veremos que existe una solucion del problema por medio de la máquina y que esta solucion es *esencialmente diversa* de la que ofrecen los fenómenos naturales.

En el primer sistema que puede designarse con el nombre de *sistema cósmico*, á las fuerzas mecánicas esteriores, susceptibles de medida, se oponen siempre otras fuerzas exactamente de igual naturaleza, mientras que en el segundo, el *sistema maquinal* (7) las fuerzas que se oponen á las fuerzas esteriores, se hallaban en estado latente en el interior de los cuerpos que constituyen el sistema en cuestion, y únicamente las *acciones esteriores* son las que provocan su manifestacion en la medida rigurosamente necesaria.

La fuerza latente se manifiesta inmediatamente despues de comenzar á obrar la fuerza esterior; y luego si esta accion cesa, desaparece tambien al punto, no sin haber defendido enérgicamente contra las deformaciones el cuerpo que le sirve de morada. En otros términos, no existe indicio alguno de la existencia de las fuerzas interiores hasta que las esteriores las sacan, por decirlo así, del estado de sueño en que se encuentran dentro de los cuerpos. Por una especie de analogia, harto bien justificada, con la parte de la física que trata del calor, se ha dado en llamar *latentes* las fuerzas de esa especie que afianzan la conservacion de nuestro mundo material, por oposicion á las fuerzas *sensibles*, mensurables, que en virtud de la atraccion de las masas y de otras causas, ejercen una accion esterior en los cuerpos.

La diferencia entre ambos sistemas, el *cósmico* y el *maquinal*, consiste, pues, especialmente en que con el primero se encuentran fuerzas *sensibles* opuestas á otras fuerzas *sensibles* é *independientes*, en tanto que con el segundo, por el contrario, se tienen por un lado fuerzas *sensibles* y por el otro *fuerzas latentes*, que dependen de las primeras.

Esos dos sistemas tales como los hemos imaginado hasta aquí, se presentan con un grado de sencillez enteramente particular que no permiten quizá sacar conclusiones bastante generales. Por ese motivo nos parece útil estender nuestras consideraciones á un sistema cósmico constituido por un sistema planetario completo, es decir, un astro central con sus planetas y los satélites, que recorren trayectorias circulares y elípticas. Añadamos por otra parte á nuestra rueda otras ruedas, cuyos ejes estén ligados al primero con engranajes ú órganos semejantes, de manera que puedan comunicarse un movimiento de rotacion y que su conjunto constituya una verdadera máquina debidamente preparada y dispuesta para un fin cualquiera. Notemos ahora que en el sistema *cósmico* los movimientos relativos de los cuerpos, bajo el doble punto de vista de las trayectorias y de las *velocidades*, dependen enteramente de las fuerzas sensibles á que están sometidos, y que ni siquiera tales cuerpos obran unos sobre otros, como no sea por la intervencion de fuerzas de esa especie. En cambio en el sistema *maquinal* cumple en primer lugar tener presente que las *trayectorias* están completamente determinadas, y en segundo lugar, que la *velocidad* de un punto no puede cambiar sin promover una modificacion correspondiente á las velocidades de todos los demás puntos, de suerte que aquí las acciones perturbadoras exteriores carecen de influencia, lo cual depende en realidad de que son neutralizadas en todas partes por las acciones de las

fuerzas latentes. Estas últimas sirven además para trasmitir de cuerpo á cuerpo la accion de las fuerzas motrices. La distincion que antes hemos hecho entre ambos sistemas, debe, pues, considerarse como general en lo que incumbe á la naturaleza de las fuerzas que entran en accion.

Cumple, sin embargo, notar que los dos ejemplos escogidos son casos estremos; y por regla general los dos sistemas, el cósmico y el maquinal, no se presentan con caractéres tan categóricamente distintos. En los casos intermedios ofrecen puntos de contacto más ó ménos numerosos. Así por ejemplo, en las plantas puede descubrirse cierta analogía con el sistema maquinal en cuanto los movimientos de la savia se efectuan en canales ó tubos asaz resistentes y en direcciones perfectamente determinadas; pero esa analogía no es completa, porque las pequeñas ramas, las yemas, etc., se hallan sometidas por la accion de las fuerzas cósmicas á deformaciones variables entre límites muy estensos. Segun esto, es evidente que en el reino vegetal el fenómeno que más se aproxima al sistema maquinal es el de la circulacion de la savia por las células de un robusto tronco de árbol, pues solamente en este caso las deformaciones son bastante exiguas para poderlas considerar como despreciables. Así mismo existen ciertas máquinas que en su modo de accion ofrecen alguna analogía con nuestro sistema cósmico ó planetario. Tales son por ejemplo las ruedas hidráulicas primitivas, de trompa ó de erizo, que se utilizan todavía como motores para aserrar en ciertas comarcas montañosas, la corriente de agua motriz al tropezar con la rueda produce alrededor abundantes espumas, casi como lo haria una cascada natural.

Así pues, no existe entre ambos sistemas una línea de demarcacion claramente determinada: pero las diferencias son siempre bastante visibles y tanto más pronunciadas cuanto más se acerca cada uno de ellos en su género á la perfeccion. Merced á los perfeccionamientos sucesivos introducidos en la construccion de las ruedas hidráulicas se han visto desaparecer poco á poco aquellos hilos de agua que primitivamente se encontraban abandonados y sin guias á la accion de las fuerzas que los solicitaban, la rueda de erizo se ha encontrado finalmente sustituida por la turbina, máquina de movimiento regular, en la que el salto y la reduccion á polvo de las partículas de agua solo se producen en muy escasa medida. Los troncos de árboles de báscula de que se servian los ladrilleros y habitantes de la India para bajar cántaros á los pozos y subirlos una vez llenos se han trasformado en una máquina de balancin, con una bomba que funciona con movimiento suave y regular. Y así podríamos citar varios ejemplos de trasformaciones semejantes.

La libertad cósmica de los fenómenos naturales se encuentra trasformada en las máquinas en un sistema de leyes que son impotentes para conmover fuerzas esteriores de una naturaleza ordinaria. Por otra parte en el dominio indudable de las fuerzas naturales se puede igualmente hacer constar la accion de fuerzas latentes, como acontece, por ejemplo, cuando el agua de un rio al chocar con las rompientes de las rocas clavadas en la orilla ó con las piedras del fondo del cauce, da lugar á una série de hilos que saltan hácia atrás; y lo mismo sucede por lo que toca á las piedras meteóricas que la atmósfera terrestre desvia de improviso de sus trayectorias. De lo cual debe deducirse que la manifestacion de las fuerzas latentes bajo la accion de las fuerzas sensibles, no constituye el signo *esclusivo* y *característico* de la máquina misma, sino solamente un indicio capital del sistema que con ella presenta *analogía* y que por ese motivo hemos designado con el nombre de *maquinal*. Por lo tanto, aun nos falta establecer el conjunto de leyes á que debe satisfacer un sistema maquinal para darle el verdadero nombre de *máquina:* esa determinacion es indispensable para llegar á una nocion clara de esta última palabra.

Es un *principio* inherente á la esencia misma de la máquina el que los movimientos perturbadores deban evitarse por medio de las fuerzas latentes. En cuanto á la manera de aplicarle, depende esencialmente del resultado que se intenta conseguir en cada caso particular. Cuando construimos una máquina, tenemos por objeto crear un dispositivo susceptible de producir un trabajo mecánico determinado, consistente, por ejemplo, en desalojar un cuerpo ó cambiarle de forma, ó bien en los dos efectos reunidos. Para alcanzar ese resultado debemos realizar por mediacion de la máquina movimientos *perfectamente determinados*, y eso tan pronto como ponemos esa máquina en marcha aplicándole una fuerza motriz. Si en la rueda de la fig. 3, de que antes ha sido cuestion, suponemos que se da al disco R la forma de un tambor y que en ella se fija el estremo de una cuerda, obtendremos un aparato que podrá utilizarse para elevar pesos. Con un disco de asperon la misma rueda podrá servir como muela ó piedra de afilar, etc. Consideramos como perturbador todo movimiento que difiere del que se intenta conseguir, y procuramos evitar la produccion de todo movimiento de ese género, determinando debidamente los cuerpos en que deban desarrollarse las fuerzas latentes, lo cual viene á dar á los cuerpos que hacemos entrar en la composicion de la máquina, disposicion, formas y

resistencia tales que cada uno de los cuerpos móviles no pueda efectuar más que un movimiento *único* y precisamente *el que es necesario*. Si hacemos entonces obrar la fuerza mecánica natural de que disponemos, conseguimos el *movimiento fijo como objeto*. El procedimiento que seguimos es, por consiguiente, doble en realidad: *negativo* por la esclusion de la posibilidad de todo movimiento distinto del que se quiere obtener; *positivo* por la direccion dada á ese último movimiento. El resultado obtenido consiste en que la fuerza natural empleada realiza el trabajo mecánico deseado.

La ejecucion de una máquina puede ser más ó ménos perfecta, y es evidente que responde tanto más á lo que hemos conocido ser el verdadero objeto del establecimiento de las máquinas, cuanto más se aproxima á la perfeccion. A consecuencia de las consideraciones que acabamos de exponer nos es ahora posible dar una definicion de la máquina y propondremos la siguiente:

Una máquina es un agregado de cuerpos resistentes dispuestos de manera que obliguen las fuerzas mecánicas naturales á obrar produciendo movimientos determinados (8).

De lo que antecede resulta que los problemas relativos á las máquinas constituyen una categoria aparte claramente definida, y pueden muy bien separarse de los problemas de la mecánica general: esa es cabalmente la opinion que hemos emitido un poco más arriba.

En tanto que la mecánica general estudia los efectos producidos por el juego de las fuerzas mecánicas en las condiciones más generales, la teoria de las máquinas no se ocupa más que de movimientos determinados que por otra parte están limitados por el restringido círculo de los medios que se pueden emplear para obtenerlos. Saca sus leyes fundamentales de la misma fuente que la mecánica general, á la que está además subordinada en razon del carácter más general que la última presenta. Pero no puede ménos de existir como ciencia independiente, con un campo de estudio especial, y tiene desde entonces el deber de fundar en su dominio un sistema de clasificacion, y establecer sus leyes particulares: trabajo es este de una importancia bastante pronunciada para reclamar toda la actividad de un hombre especial. A mi parecer, seria de desear que los mecánicos que se ocupan de máquinas, entrasen en ese órden de ideas en vez de seguir la corriente opuesta que en estos últimos años se ha tomado en Alemania y mayormente en Francia. Conforme he advertido antes, de ahí proviene una verdadera absorcion de los problemas relativos á las máquinas; y los prácticos engañados en sus esperanzas, no han tardado en renunciar á un procedimiento que ningun auxilio les prestaba para el objeto especial que se proponen en sus investigaciones, el perfeccionamiento de las máquinas. Como especialistas tienen hasta cierto punto el derecho de exigir que la ciencia puesta á su disposicion esté completamente fundada con la mira de los problemas que estudian y para los cuales están dispuestos á no ahorrarse fatiga alguna; más se niegan á trasportar esos problemas á otro terreno, en el que están espuestos á carecer de sólida base, sin poder esperar por otra parte recoger ninguna ventaja real.

§ 2

La ciencia de las máquinas.

Merced á los progresos sucesivos realizados en la enseñanza politécnica el desarrollo didáctico de los principios mencionados en la definicion anterior de la máquina, ha acabado por tomar bajo el punto de vista científico una estension importante. Prescindiendo de las ciencias matemáticas y naturales que les sirven de fundamentos, pueden distinguirse hasta tres ó cuatro ciencias que están especialmente consagradas á las máquinas. Su objeto comun es *buscar las relaciones de causas y sus efectos en los fenómenos de la máquina*. Pueden en rigor comprenderse todas juntas bajo la designacion comun de *mecánica práctica*. Les doy aquí el nombre de ciencias, sin tener, empero, la pretension de quererlas clasificar, y limitándome á hacer notar que á veces se las designa como ciencias de segundo ó tercer órden. Hacen uso de métodos científicos, y tiene cada una un campo de investigaciones especial, en el que desarrollándose progresivamente, han alcanzado una verdadera independencia que ha acabado por otorgarles su separacion indispensable.

La primera de todas es la *ciencia de las máquinas*. (a) A esa denominacion hay la costumbre de añadirle diferentes epítetos, tales como *general* ó *descriptiva, especial, teórica*. La *ciencia general* considera la universalidad de las máquinas existentes y las trata en realidad bajo el punto de vista descriptivo; tiene por objeto enseñar *cuales son las máquinas existentes y de qué manera están formadas*, dando por consiguiente el medio de abarcar de una sola mirada el conjunto de los

(a) Esta denominacion es la traduccion literal de la palabra alemana *maschinenlehre*, que sirve para designar en Alemania la ciencia á que *Poncelet* dió el nombre de *Mecánica industrial*.

esfuerzos hechos para la creacion de las máquinas. El procedimiento que sigue es teleológico en la acepcion más completa de la palabra, puesto que en cada máquina procura demostrar el objeto de las disposiciones adoptadas. Sus clasificaciones se basan en principios tan generales como se puede. En razon del número escesivamente considerable de las máquinas existentes, no es hoy muy posible dar una descripcion completa y establecer por ende una ciencia de las máquinas verdaderamente general; se puede á lo más llegar á dividirlas en grupos.

Por otra parte, para responder á una necesidad particular de la enseñanza ha nacido la ciencia de las máquinas, llamada especial, que no considera sino cierto número de clases y las trata con todos los desarrollos apetecibles. Las más de las veces esta ciencia especial es al propio tiempo *teórica*, es decir, que da igualmente la teoria de las máquinas que describe, con lo cual queremos significar que analiza las fuerzas sensibles que entran en juego en el funcionamiento de tales máquinas y los movimientos que de él resultan, para deducir las consecuencias relativas al mejor modo de utilizar dichas fuerzas.

La ciencia teórica de las máquinas, pues, se diferencia esencialmente de la ciencia descriptiva, en que considera las máquinas como *conocidas* y bajo el doble punto de sus disposiciones y del objeto que deben llenar, y en que se limita á enseñar las propiedades que deben tener para ejecutar sus funciones de la manera más conveniente. Segun esto, se ve que la *ciencia teórica de las máquinas* puede conceptuarse como equivalente de la *teoria de las máquinas*. Hoy en Alemania es en general muy estudiada y bien comprendida, porque se considera la *máquina misma* como el objeto y fin definitivo de esta ciencia. En cambio, la mayor parte de los autores en Francia consideran todavia las máquinas de un modo incidental y como meros ejemplos ó casos particulares de los principios de la *mecánica aplicada*. No se ve, pues, porque no han de tratarse con las máquinas las demás aplicaciones de la mecánica. Hasta en los casos en que intentando penetrar en el fondo del asunto se trata de la *aplicacion de la mecánica «á las máquinas,»* como lo hizo *Poncelet*, no se va en principio bastante adelante, ya que bajo este título debieran estudiarse todas las máquinas sin escepcion, y en realidad no sucede así. *Redtenbacher* fué el primero que hizo desaparecer la confusion que habia reinado hasta entonces, estableciendo sobre nuevas bases la enseñanza de la construccion de las máquinas, la cual tiene hoy en Alemania una vitalidad que falta todavia á la enseñanza francesa. Estableciendo la subdivision del estudio de las máquinas en diferentes ciencias aisladas ó en ramificaciones de una misma ciencia, *Redtenbacher* prestó un señalado servicio, cuya importancia, empero, no han comprendido siempre bien aquellos que le han seguido. El mérito incontestable de dicha innovacion esplica el éxito brillante que alcanzó este profesor desde un principio, y el efecto de atraccion que durante su vida ejerciera en Alemania sobre todos los jóvenes que se dedicaban al estudio de las máquinas.

La ciencia teórica de las máquinas se ocupa con preferencia de las máquinas motrices, es decir, de las máquinas de vapor, de las ruedas hidráulicas, turbinas, molinos de viento, etc., ó refiriéndonos á nuestra definicion, *de aquellas disposiciones especiales de las máquinas por mediacion de las cuales se recogen de la manera más ventajosa las fuerzas naturales*. No obstante, tambien estudia las máquinas de trabajo (operadores), que sin disputa entran igualmente en su dominio. Muchas veces se acostumbra atribuir esa parte de la ciencia de las máquinas á la *tecnologia mecánica;* pero esa atribucion no siempre se realiza, porque se ha de confesar que no es enteramente lógica. La tecnologia mecánica tiene efectivamente por objeto el estudio del tratamiento de las materias por procedimientos mecánicos que en gran número de casos no constituyen máquinas. Tiene, por consecuencia, su senda particular y debe dejarse guiar por consideraciones peculiares. Verdad es que tambien se ocupa de las máquinas, pero bajo un punto de vista enteramente distinto de aquel de donde se parte en la ciencia de las máquinas propiamente dicha. Luego, si hasta cierto punto puede comprenderse que entrambas ciencias reivindican el mismo objeto de enseñanza, no es ménos cierto que no hay ninguna necesidad de confundir una con otra.

Esa rama particular de la tecnologia que está aquí en cuestion, ó si se quiere, la *parte tecnológica de la ciencia especial de las máquinas*, se ocupa de la accion que las fuerzas naturales tienen sobre la materia que ha de trabajarse, en virtud de su manera de emplearla por mediacion de las máquinas; ó en otros términos, se ocupa de aquellas *disposiciones especiales de las máquinas por medio de las cuales dicha accion se trasmite en las condiciones más favorables*. En resúmen, la ciencia especial de las máquinas estudia teóricamente el *modo de recepcion y utilizacion de las fuerzas naturales por las máquinas consideradas como conocidas*.

La tercera ciencia que debe citarse es *la de la construccion de las máquinas*. Tambien á *Redtenbacher* se debe el haberse emancipado esta ciencia de la subordinacion harto poco justificada en que se hallaba

con respecto á la mecánica aplicada, y de haberse constituido en estado de ciencia independiente. Tiene por objeto el estudio de los medios propios que han de otorgarse á los cuerpos de que se componen las máquinas, la propiedad que en nuestra definicion hemos designado con el nombre de *resistencia*. Para concebir esa propiedad en su más lata acepcion es necesario considerarla bajo dos aspectos ya indicados; debe en efecto asegurar que los cuerpos mantengan su forma no solo contra la accion de las fuerzas sensibles, sino tambien contra la de las fuerzas latentes.

La ciencia de la construccion toma á la teoria de las máquinas los datos relativos á las fuerzas sensibles; fuerzas que, tales como, por ejemplo, la presion del vapor sobre el piston de una máquina motriz, la presion del agua en la circunferencia de una turbina, etc., ponen directamente en juego la resistencia de los cuerpos. Por lo que toca á las fuerzas latentes, trasmiten la accion de las primeras de cuerpo á cuerpo; por ejemplo, de un vástago de piston á una biela, de una rueda dentada á otra rueda dentada, etc., originando forzosamente *roces* y *desgastes*. Por lo tanto, hay aquí en realidad dos direcciones muy distintas, segun las cuales la ciencia de la construccion de las máquinas debe dirigir sus investigaciones. Además, como en los procedimientos que ofrece para la solucion de los problemas ha de tener en cuenta consideraciones *tecnológicas*, logra constituir una ciencia verdaderamente *técnica*. Esa doble direccion que resulta de las acciones distintas de las fuerzas sensibles y de las fuerzas latentes, que hago resaltar aquí como un principio capital, era realmente hasta ahora admitida en la práctica, si bien no estaba reconocida por la teoria; y como se vé, no es más que una simple consecuencia de los principios generales que hemos expuesto.

Finalmente, nuestra definicion contiene además una cuarta propiedad de las máquinas, que en principio no entra en el dominio de ninguna de las tres ciencias que acabamos de citar; esa propiedad depende de la disposicion especial de cada máquina en virtud de la cual no pueden producirse sino determinados movimientos. A decir verdad, la ciencia teórica de las máquinas se ocupa de los movimientos en cuanto están producidos por fuerzas y pueden por ende considerarse como efectos que resultan directamente de las acciones de tales fuerzas. Pero si en cambio se trata de los movimientos considerados en sí mismos, ó sea, en cuanto constituyen simples *cambios de posicion*, no los admite en sus estudios sino como elementos conocidos *á priori*. Por consiguiente, falta hacer todavia una série de investigaciones que precisamenie tienen por objeto determinar la *causa de la dependencia mútua de los cambios de posicion en las máquinas*. Si se tratan por separado los problemas referentes á ese nuevo órden de investigaciones, suponiendo conocidas las que abrazan las tres ciencias anteriores, se logran definir los contornos de un campo especial de estudios, para el cual pueden utilizarse los recursos que las matemáticas aplicadas y la mecánica proporcionan. La determinacion sistemática de las soluciones de estos problemas es el objeto de la ciencia que nos proponemos tratar y que constituye la cinemática ó la teoria de los mecanismos. Conforme acabamos de decir, esa ciencia se propone *el estudio de esas disposiciones especiales, en virtud de las que se hallan determinados los movimientos mútuos de cada máquina, en cuanto se consideran como simples cambios de posicion.*

Conviene aquí poner en claro la diferencia que existe entre esta limitacion de la cinemática y la que propuso *Ampere*, sin no obstante desarrollarla muy esplícitamente. Estriba sobre todo en que, á nuestro entender, la cinemática debe considerarse como una parte esencial, no de la mecánica general, como queria *Ampere*, sino de la ciencia de las máquinas. Por otra parte, á esa última opinion se han adherido más ó ménos los sucesores de *Ampere*, por mucho que en ninguuo de ellos se encuentra la espresion de *ciencia de las máquinas*. Esa manera de ver conduce forzosamente á subordinar el objeto de nuestras investigaciones á las leyes fundamentales que caracterizan el sistema *maquinal* en su comparacion con el sistema *cósmico*, y al propio tiempo á relacionar el empleo de la cinemática con el de las otras tres ciencias que antes hemos mencionado como especiales de las máquinas. Por consecuencia, en vez de ser la cinemática, como en opinion de *Ampere*, una ciencia aislada y basada únicamente en una idea abstracta, se desarrolla, al contrario, paralelamente á otras ciencias con las cuales está en conexion por la comunidad del objeto definitivo. En cambio, estamos completamente de acuerdo con *Ampere* sobre la conveniencia de limitar el objeto de la cinemática al estudio de los *cambios de posicion;* pero no juzgamos como él, que deba escluirse enteramente la consideracion de las acciones de las fuerzas; pues en cada caso particular suponemos resueltos los problemas relativos á dichas fuerzas y nos atenemos á las condiciones que resultan de tales soluciones, lo cual constituye una gran diferencia. Cabalmente en razon de la oscuridad del sistema de *Ampere*, sobre este punto sus sucesores se han encontrado forzosamente impelidos á insertar en sus tratados ciertos fragmentos de las otras tres ciencias, de los cuales no podian prescindir. Así por ejemplo, encontramos en la cinemática de *Haton* un

resúmen de la resistencia de los materiales; en la de *Laboulaye*, un capítulo sobre el mismo asunto y además cierto número de lecciones sobre el roce, etc.

Si resumimos brevemente las consideraciones anteriores, vemos que la *mecánica práctica* se divide en cuatro ciencias especiales:

Ciencia general de las máquinas,
Ciencia especial ó teoria de las máquinas,
Ciencia de la construccion de las máquinas,
Ciencia del movimiento de las máquinas ó teoria de los mecanismos.

La última ciencia tiene sin disputa para la enseñanza relativa á las máquinas una importancia tan considerable como las tres primeras, y aun en ciertos conceptos conviene que las preceda para trillarles el camino. Esa es la razon porque los tratados especiales de cada una de ellas encierran á veces ciertas nociones de cinemática. Las tres últimas ciencias reunidas dan una idea completa de las máquinas, cuya descripcion se limita á dar la primera al analizar su objeto. Tienen entre sí numerosos puntos de contacto, y solamente con la condicion de poseerlas todas por completo puede el mecánico hallarse en estado de resolver los diferentes problemas que se encuentran en la práctica de las máquinas.

§ 3

Solucion general del problema de las máquinas.

Sentemos ahora los principios generales que sirven de bases á los procedimientos cinemáticos y que nos deben permitir vislumbrar los problemas desde un punto de vista bastante elevado para que podamos fácilmente entrever su modo de solucion. En ese estudio tomaremos por guias las consideraciones generales que antes hemos desarrollado sobre el sietema maquinal. Los cuerpos por cuya intermision se ejercen los esfuerzos que tienen por efecto obligar los puntos móviles de una máquina á no efectuar más que ciertos movimientos determinados de antemano, son cuerpos que se supone dotados de una *resistencia* conveniente; y lo mismo sucede con los cuerpos á los cuales pertenecen los puntos en movimiento. En otros términos, en las máquinas los cuerpos en movimiento se hallan impedidos por otros cuerpos, *con los que están en contacto*, de ejecutar movimientos diferentes de los que se tienen á la mira. Por consiguiente, para que el problema pueda siempre resolverse, es esencial que ese contacto subsista sin ninguna interrupcion, lo cual implica ciertas propiedades para los cuerpos que deben tocarse. Con el propósito de estudiar más de cerca esas propiedades supondremos ante todo que los cuerpos sean perfectamente resistentes y no haremos caso alguno de sus masas; en otros términos, supondremos préviamente resueltas las cuestiones que se refieren á la teoria y construccion de las máquinas, de forma que no tengamos que considerar más que las propiedades meramente *geométricas*.

Esto sentado, para mantener en contacto de una manera contínua un cuerpo móvil A (fig. 4) de forma determinada, con un cuerpo B en reposo, conviene dar á este último una forma particular. Para hallar esa forma basta poner el cuerpo móvil A en todas las posiciones sucesivas que pueda ocupar respecto de B y trazar la envoltura ó cubierta de todas esas posiciones. Si por ejemplo el cuerpo A es un paralelipípedo una de cuyas caras debe estar constantemente en un mismo plano, el cuerpo B afectará la forma de un canal curvilíneo. La figura geométrica bajo la cual debe presentarse B, se llama la *envoltura* de la figura móvil A. El papel que B representa con respecto de A, puede igualmente desempeñarlo A con respecto á B, es decir, que A es tambien la forma envolvente ó la envoltura de B, ó al ménos pertenece por todos sus puntos que están en contacto con B, á la envoltura de A con relacion á B; luego hay aquí reciprocidad. Estas formas envolventes recíprocas pueden en gran número de casos realizarse materialmente. Si rodeamos un cuerpo en movimiento con una série de cuerpos inmóviles que lleven en sí mismos la forma envolvente del primero, y si disponemos las cosas de modo que ningun otro movimiento sea posible sin quitar los cuerpos fijos, claro está que el movimiento, si se produce alguno, no puede ser otro que el que se ha supuesto préviamente y que ha servido de base al trazado de la forma envoltura. Para formar la envoltura de un cuerpo móvil es necesario, como se ve, tener á lo ménos otro cuerpo. En el caso de tener que emplear varios porque el primero de ellos sin dejar de constituir nna envoltura del cuerpo móvil, no bastaria para impedir todos los movimientos distintos del que se tiene á la mira, nada se opone á que estos diferentes cuerpos se reunan de modo que formen uno solo. Así, por ejemplo, en los soportes en dos partes pueden imaginarse los coginetes superior é inferior como formando una sola pieza. Con eso vemos que siempre son *dos* á lo ménos los cuerpos que tienen entre sí la relacion recíproca de que antes hemos ha-

blado. Las máquinas se componen precisamente de cuerpos acoplados así dos á dos; y estos cuerpos constituyen los verdaderos *elementos* cinemáticos de las máquinas.

Como ejemplos de acoplos de elementos de ese género pueden citarse el gorron y el coginete, el tornillo y la tuerca, etc. Podemos aquí hacer constar que nunca los elementos cinemáticos se hallan aislados en las máquinas y están siempre acoplados dos á dos, ó que la máquina se compone, no de elementos aislados, sino de *acoplos de elementos*. Esa particularidad de la composicion de la máquina es fundamental y permite distinguirla muy claramente de todos los demás objetos que pueden considerarse como formando un todo.

Un acoplo de elementos dado permite realizar un movimiento determinado con la condicion de fijar uno de esos elementos, es decir, de mantenerlo en reposo relativamente al sistema del espacio con el cual se encuentra en conexion el movimiento considerado. El otro elemento que queda móvil, no puede entonces tomar más que un movimiento solo determinado por la naturaleza del acoplo de que forma parte. Su *movimiento relativo* con respeto al elemento correspondiente, mantenido fijo, es entonces su *movimiento absoluto* en el sistema del espacio considerado. Así por ejemplo, en el acoplo de elementos tornillo y tuerca que representa la fig. 5, si se pone en movimiento la tuerca, todos los puntos de ese elemento describirán hélices de una forma determinada tan pronto como esté fijo el tornillo, suponiéndolo provisto de un pié de forma conveniente ó de otro modo equivalente de soporte.

En el acoplo de elementos de la fig. 6, que se compone de dos prismas, el uno macizo y el otro hueco, este último al ponerse en movimiento despues de fijar el primero, describe en todos sus puntos rectas de la misma longitud.

Con acoplos de elementos pueden realizarse gran número de movimientos, conforme nos lo demostrará más adelante un estudio más detallado. Sin embargo, desde ahora podemos indicar un procedimiento que permite aumentar en muy fuerte proporcion el número de movimientos que se pueden realizar por medio de acoplos aislados: ese procedimiento consiste en la reunion de acoplos de elementos *a b* y *c d*; ese resultado no puede por de pronto obtenerse sino á condicion de ligar uno de los elementos de un acoplo con un elemento de otro acoplo, de manera que formen un solo cuerpo. Pero además conviene enlazar igualmente los otros dos elementos, porque de otro modo las diferentes partes no dependerian unas de otras ni se conseguiria por lo tanto nada nuevo. Es, pues, esencial que el enlace entre los elementos sea recíproco, es decir, que si se enlaza *b* con *c*, debe tambien trabarse *d* con *a;* y así mismo, si se une *b* á *d*, *c* debe estar ligado con *a*. Para ver con un ejemplo lo que así se puede conseguir, consideremos los dos acoplos *ab* y *cd*, que supondremos idénticos: *b* y *c* son cilindros, *a* y *d* ranuras prismáticas á que están ajustados los cilindros *b* y *c*, de manera que no puedan desviarse lateralmente ni en la direccion de sus ejes. Enlacemos ahora los dos cilindros *b* y *c* disponiéndolos paralelamente el uno al otro (fig. 7) y reunamos igualmente las dos deslizaderas, de suerte que sean paralelas tambien. Es evidente que entonces si *ad* se mantiene fijo, todos los puntos de *bc* habrán de moverse paralelamente á las caras de las deslizaderas, como lo indica la saeta, recorriendo caminos rectilíneos de igual longitud. El movimiento que así se obtiene es, por consiguiente, idéntico al que ocurriria, si *bc* perteneciera á un prisma macizo, móvil en un prisma hueco, como por ejemplo en el acoplo *ab* de la fig. 8. En las condiciones en que hemos efectuado el enlace de nuestros dos acoplos, no tenemos, pues, en realidad más que un resultado fácil de obtener con un simple acoplo, y nuestro esperimento puede por de pronto juzgarse infructuoso.

Pero si en vez de disponer las deslizaderas *a* y *d* paralelamente, las inclinamos una á otra como lo indica la fig. 9, el resultado será muy distinto. Los centros de *bc* no recorrerán siempre caminos iguales en las deslizaderas, y por consiguiente no describirán todos los demás puntos idénticas trayectorias; el punto *p* por ejemplo, describirá una curva. El movimiento obtenido será, pues, en este caso esencialmente distinto del de la disposicion anterior.

Con todo, entre los dos casos representados por las figuras 7 y 9 existe la analogia de que en ambos casos, $b - c$ y $a - d$ están unidos de una manera rígida y pueden considerarse como formando cada uno un solo cuerpo. Por consiguiente en los dos casos se llega á no tener más que un solo acoplo de elementos proporcionados por la reunion ó enlace de dos acoplos distintos. Estos dos últimos acoplos segun el modo de union que se les ha aplicado, han dado resultados diferentes, pero siempre han formado un solo acoplo.

Así, pues, el enlace recíproco de los elementos de dos acoplos, da orígen de una manera general *á otro acoplo de elementos que puede ser diferente de los dos acoplos primitivos*. Ahí tenemos un resultado notable y fecundo en consecuencias. Ahora podemos ir más léjos y proceder al enlace de tres ó cuatro acoplos de elementos. Supongamos, por ejemplo, los acoplos dados,

ab *cd* *ef* *gh*

Si unimos cada elemento de cada uno de ellos con un elemento de otro, todos los acoplos aislados, sin perder sus propiedades primitivas, adquirirán igualmente otra. La union puede formarse de varias maneras como lo indican por ejemplo las séries siguientes de combinaciones:

$$b \text{ —— } cd \text{ —— } ef \text{ —— } gh \text{ —— } a$$
$$\text{ó} \quad b \text{ —— } dc \text{ —— } ef \text{ —— } hg \text{ —— } a$$

El todo forma una especie de cadena que vuelve sobre sí misma, análoga á una cadena sin fin y constituida por una série de eslabones trabados unos á otros. Designaremos con el nombre de *cadena cinemática* el resultado de esa trabazon de acoplos de elementos: el cuerpo que resulte de la reunion de elementos de acoplos diferentes, será entonces un *eslabon* ó un *miembro* de la *cadena cinemática*. Cada miembro de la anterior cadena se compone de dos elementos, de modo que esta cadena tiene aquí un número de miembros cabalmente igual al de los acoplos que encierra.

En una cadena dos miembros consecutivos tienen un movimiento relativo determinado, que es precisamente el del acoplo que los enlaza; pero dos miembros separados por un tercero no tienen necesariamente el uno respecto del otro movimientos relativos determinados. Tales movimientos se efectuan únicamente en las cadenas constituidas, de modo que *todo cambio de posicion de un miembro con respecto al que le sigue inmediatamente, acarrea un cambio de posicion de todos los demás miembros con respecto al primero.*

En una cadena cinemática que goce de tal propiedad, un miembro cualquiera no tiene más que un solo movimiento relativo con respecto á cada uno de los otros; y cuando, por consiguiente, se produce en la cadena un movimiento relativo, todos los miembros se hallan *sujetos* á cumplir determinados movimientos relativos. Una cadena cinemática semejante, de *movimientos forzosos*, constituye lo que llamaremos una *cadena cerrada desmodrómica*, (a) ó más simplemente una *cadena cerrada*.

Como ejemplo de cadena de ese género tomaremos la que está representada por la figura 10. Esa cadena, fácil de comprender, se compone de cuatro acoplos semejantes, *ab*, *cd*, *ef*, *gh*, formados cada uno de un gorron cilíndrico y de un cubo que les rodea: todos los gorrones son paralelos entre sí. En esa cadena cada miembro no puede tomar con respecto al contiguo más que un movimiento circular; y como además toda rotacion de *ah*, con respecto á *gh*, acarrea un cambio de posicion de *bc* lo mismo que de *de*, resulta que la cadena está cerrada.

Una *cadena cerrada* no tiene por sí misma ningun movimiento determinado, y para darle uno es necesario recurrir á un procedimiento análogo al que hemos indicado para el acoplo de elementos, es decir, *mantener fijo uno de los miembros de la cadena cinemática con respecto al sistema que se supone inmóvil en el espacio.* Los movimientos relativos de los diversos miembros se encuentran entonces trasformados en movimientos absolutos. *Una cadena cinemática cerrada, uno de cuyos miembros se mantiene fijo, constituye un* MECANISMO.

Segun esto, la cadena anterior puede ser un mecanismo de cuatro diferentes maneras, que se encuentran indicadas por las fórmulas siguientes, en las que se ha tenido cuidado de subrayar los miembros que se mantienen fijos:

1. $\underline{b \text{ —— } c}$ $d \text{ —— } e$ $f \text{ —— } g$ $h \text{ —— } a$
2. $b \text{ —— } c$ $\underline{d \text{ —— } e}$ $f \text{ —— } g$ $h \text{ —— } a$
3. $b \text{ —— } c$ $d \text{ —— } e$ $\underline{f \text{ —— } g}$ $h \text{ —— } a$
4. $b \text{ —— } c$ $d \text{ —— } e$ $f \text{ —— } g$ $\underline{h \text{ —— } a}$

En general una cadena cerrada puede trasformarse en mecanismo de tantas maneras distintas como miembros contenga (9).

Para mantener fijo un miembro de una cadena es necesario proveerlo de órganos de fijacion de una manera conveniente.

Con el objeto de completar la demostracion, supongamos un soporte bastante firme, como el que representa la figura 11, una especie de pedestal en que nuestra cadena esté fuertemente encajada por uno de sus miembros *ah*, por ejemplo, y de modo que bajo el punto de vista cinemático puede este soporte considerarse como formando una sola piaza con *ah*. El movimiento que puede tomar el mecanismo así determinado, se indica con líneas punteadas para algunos de los puntos principales. Es por otra parte el muy conocido movimiento que se verifica entre «balancin y manubrio.»

Bajo el punto de vista cinemático la forma de los soportes es sin duda alguna indiferente; pero en la práctica suele haber la tendencia de darles una disposicion semejante á la de las partes arquitecturales cerca de las que con frecuencia deben instalarse, y con las que deben tener una propiedad comun, la de una completa inamovilidad. Por este motivo las partes fijas de

(a) De *desmos*, lazo y *dromos*, carrera.

los mecanismos han llamado mucho la atencion de los teóricos. Hemos visto ya en la Introduccion (pág. 14) que en la clasificacion de los órganos mecánicos propuesta por *Borgnis*, los soportes se consideran como formando una clase especial. Otro indicio de esa preocupacion nos da la division de los órganos de máquinas en *activos* y *pasivos* que varios autores han admitido. Esos órganos pasivos no son en efecto otra cosa que los elementos de los miembros de cadenas cinemáticas que se mantienen fijos. Más no existe diferencia específica entre esos órganos activos y pasivos, porque en los diferentes mecanismos que se derivan de una misma cadena, un órgano dado puede ser unas veces fijo, otras veces móvil.

En los mecanismos que pueden obtenerse de una cadena de la forma que acabamos de describir, un miembro contiguo al que está fijo, no puede tomar más que un movimiento conforme al que permite el elemento por cuya intermision se encuentra acoplado con dicho miembro fijo; y por lo tanto, la única influencia ejercida sobre la forma de su movimiento es la de ese acoplo de elementos. Lo contrario sucede con el miembro que sigue inmediatamente al que acabamos de mencionar, pues el movimiento de éste depende á la vez de los acoplos de elementos que corresponden á sus puntos de articulacion y de los movimientos de los elementos inmediatos ó contiguos. Por consiguiente, en el caso de la cadena tomada como ejemplo, aquel está determinado por cuatro acoplos de elementos, si bien respecto del miembro fijo su movimiento está exactamente determinado, como si estuviera enlazado con él por la intermision de un solo acoplo. Podemos por consecuencia aplicar de nuevo el procedimiento en virtud del cual hemos llegado á la cadena, es decir, podemos enlazar ese miembro con un elemento de un nuevo acoplo y dar así á la cadena mayor desarrollo.

La nueva porcion de cadena deberá por otra parte estar trabada con el miembro inicial de modo que produzca el cierre. Así obtenemos una cadena cinemática á la que daremos el epíteto de *compuesta* en oposicion á la de *simple*, que conservaremos para la cadena precedente. La fig. 12 representa una cadena compuesta de ese género y formado de 6 miembros de igual naturaleza que los de la primera. Dos de los miembros de esa nueva cadena contienen ahora tres elementos, á saber:

$$d \text{——} i \text{——} e$$
$$\text{y} \quad a \text{——} h \text{——} o$$

Si suponemos de nuevo que se fija el miembro a—h ó bien a—h—o, el miembro k—l tendrá un movimiento aún más complicado que d—e. El empleo de las cadenas compuestas ofrece, pues, la posibilidad de realizar movimientos cuyas leyes sean más complejas cada vez, y da por ende la posibilidad de crear medios cinemáticos para una série muy considerable, y por decirlo así, infinita de especies de movimientos. Las cadenas compuestas pueden, como las simples, trasformarse en mecanismos, fijando uno cualquiera de sus miembros, lo cual da un número de soluciones precisamente igual al de estos últimos.

Mecanismos completos por sí mismos pueden ulteriormente componerse y trasformarse por lo tanto en mecanismos de órden superior; y esos *mecanismos compuestos* pueden clasificarse entre los que dimanan de *cadenas compuestas*.

De lo dicho se desprende que estamos en posesion del procedimiento general para la formacion de los mecanismos, el cual puede formularse así:

El mecanismo es una cadena cinemática cerrada; la cadena cinemática es simple ó compuesta y está formada de acoplos de elementos; estos llevan en sí mismos las formas envolventes (ó envolturas) de los movimientos que los cuerpos en contacto deben tener unos respecto de otros, de suerte que todos los movimientos distintos de los que se desean realizar están forzosamente escluidos del mecanismo.

Un mecanismo entra en movimiento cuando uno de sus miembros móviles es solicitado por una fuerza mecánica susceptible de hacerle cambiar de posicion. *La fuerza hace en tal caso un trabajo mecánico que se verifica con movimientos determinados;* EN CONJUNTO ENTONCES CONSTITUYE UNA MÁQUINA.

La disposicion que ha de emplearse para poner en accion la fuerza natural, debe terminarse segun el objeto que la máquina debe llenar. Si por ejemplo, esa disposicion es tal, que la fuerza pueda obrar de una manera contínua, la máquina tiene tambien un movimiento contínuo, como sucede con las ruedas hidráulicas, las turbinas, etc. Si el órgano solicitado directamente por la fuerza natural llega al cabo de cierto tiempo á una posicion tal que esta fuerza no pueda ya ejercer su accion, es necesario para asegurar la continuidad del movimiento, volver artificialmente el órgano á su posicion primitiva, como se hace, por ejemplo, en los relojes.

En algunas máquinas el movimiento se halla limitado á muy leves cambios de posicion de los miembros de cadena móvil, como en las balanzas, y entonces es necesario restablecer á cada instante la posicion adecuada á la accion de la fuerza. Por de pronto nos limitaremos á esos ejemplos, reservándonos volver más adelante á todas esas cuestiones para tratarlas sistemáticamente.

La espresion *máquina* no siempre se ha aplicado de una manera muy lógica. Los solos casos en que suele empleársela con preferencia, son aquellos en que puede hacerse constar una manifestacion evidente ó contínua de la fuerza ó del movimiento. De ahí que ciertos autores nieguen el nombre de máquina á la balanza, fundándose en que los movimientos están en ella comprendidos entre límites muy estrechos, y no obstante, no puede dudarse que la balanza merece el nombre de máquina, ya que en ella se utilizan exactamente la fuerza y el movimiento de igual manera que en todas las otras máquinas. Con mucha más razon podria sostenerse que los aparatos de medir del geómetra, como por ejemplo, el teodolito, no son verdaderas máquinas: en realidad son *mecanismos* en la acepcion sigurosa que hemos dado antes á la palabra, sobre los cuales la accion de las fuerzas se ejerce de la manera que hemos indicado, siempre y cuando se usan. Como por otra parte en dichos aparatos las fuerzas puestas en juego son poco importantes, y aquellos no funcionan más que de vez en cuando, parece preferible conservarles el nombre de *instrumentos*. Sin embargo, tampoco aquí tiene nada de incorrecto el nombre de máquinas, como es fácil convencerse reflexionando que en esta clase de aparatos figuran los gigantescos telescopios ingleses, con los poderosos dispositivos que permiten regularlos y darles el movimiento de rotacion: bajo el punto de vista de la especie y del objeto del mecanismo, esos grandes aparatos son enteramente análogos á los pequeños gemelos de teatro y solo se diferencian en lo tocante á sus proporciones. Es igualmente opinion muy general la de que no debe aplicarse el nombre de máquinas á ciertos dispositivos que se encuentran ya formados en la naturaleza. Dos moles de piedra que obrando como palancas articuladas desalojan otra mole de la posicion que ocupa, pueden bajo el punto de vista cinemático considerarse como constituyendo un mecanismo semejante al de la fig. 11; las grandes losas oscilantes que se encuentran en gran número de localidades, presentan una disposicion análoga á la de la balanza de báscula; los geysers de Islandia funcionan en cierto modo como máquinas de vapor y lanzan el agua por largos tubos verticales, cuya formacion maravillosa se debe á los depósitos sucesivos originados por esa agua: verdaderamente no puede negárseles el nombre de máquinas. Esas diferentes citas van simplemente encaminadas á demostrar la utilidad de esa palabra para el objeto que nos proponemos, pues bajo el punto de vista de la exactitud científica, dista mucho de ser indiferente la significacion del nombre que se emplea. Léjos de mí además el pensamiento de estender el uso de esa denominacion á los dispositivos para los cuales no se le da ningun valor. Más todos los ejemplos citados concuerdan con la definicion que hemos dado de la máquina, lo mismo que con las indicaciones hechas antes sobre su composicion general. La sola conclusion que queremos sacar de ahí es que la denominacion de máquina, por más que no se les aplique, no deja de ser ménos exacta para los dispositivos que acabamos de mencionar, y que en realidad ofrecen la ventaja de designar con un solo nombre todas las propiedades comprendidas en la definicion dada.

Hemos visto de que manera el *mecanismo* da nacimiento á la máquina. Conforme con las consideraciones que hemos aducido, la máquina se compone de uno ó más mecanismos, cada uno de los cuales puede relacionarse á una cadena cinemática, formada á su vez de acoplos de elementos. La operacion inversa, ó sea, la *síntesis* consiste en la investigacion de los elementos cinemáticos, cadenas y mecanismos, de que debe componerse una máquina para conseguir un efecto determinado.

Encuéntranse en las ciencias exactas muchas ramas para las cuales pueden el análisis y la síntesis existir el uno sin la otra, ó á lo ménos, para las cuales es posible obtener grandes resultados simplemente haciendo uso de la deduccion aplicada á principios generales bien sentados. Pero en el caso que nos ocupa, no puede suceder lo mismo; porque en efecto la máquina, salvo muy raras escepciones, nunca se presenta como un producto natural; *nosotros mismos lo hemos creado*, haciendo en realidad uso del procedimiento sintético. Por lo tanto, en definitiva hemos llegado á la máquina por la induccion, sin darnos acaso muy exacta cuenta de la marcha seguida, y por tanto es evidente que la deduccion y el análisis constituyen el medio más á propósito para hacernos capaces de utilizar con conocimiento de causa la síntesis y la induccion.

La síntesis aquí como en la mayor parte de los casos presenta muchísimas más dificultades que el análisis. Hasta hoy casi no se la ha usado sino de una manera empírica. Comprende cabalmente lo que el lenguaje usual designa con el nombre de *invento*. Sin volver sobre los detalles en que con tal motivo hemos entrado en la Introduccion, podemos decir, que en verdad, el in-

vento no es más que la induccion, puesto que el sistema que sigue en cada caso, se reduce en definitiva á plantear cierto número de problemas, á buscar por analogia las soluciones posibles y sujetar estas últimas luego al análisis. Ese sistema de ensayos sucesivos se prosigue hasta alcanzar el objeto que más ó ménos decididamente se ha intentado desde el orígen y que en razon misma de la incertidumbre y de la oscuridad inherentes al procedimiento suelen trasformarse más ó ménos completamente durante el camino que se sigue. Así es como más de un inventor, por entre un verdadero laberinto de soluciones sucesivamente ensayadas y luego desechadas, pero cada una de las cuales se encuentra encadenada con la anterior, ha acabado por llegar á una forma de solucion definitiva, muy próxima á veces de aquella que le ha servido de punto de partida. Probable es que entre los lectores de esa obra haya varios que despues de consagrar un gran número de dias al estudio de una cuestion de máquina, hayan tenido que confesar que no habian hecho más que girar en un círculo vicioso, y que sus tanteos y sus molestias no habian dado otro resultado que el de conducirles á un problema conocido, no susceptible de darles solucion satisfactoria.

La causa principal de las dificultades con que se ha tropezado hasta ahora en las investigaciones de ese género, provenia de que el mecánico no podia naturalmente tener en cuenta en las operaciones de su inteligencia el encadenamiento cinemático de los mecanismos y las leyes que los rigen por no tener á su disposicion el medio de determinar la composicion. El conocimiento de esas leyes habria indicado inmediatamente, de 10 veces las 9, la solucion más aproximada, y abreviado notablemente el camino que se habia de recorrer para llegar á la más distante. Una teoria verdaderamente científica de los mecanismos fundada en el empleo del análisis, permite, pues, salvar completamente gran parte de las dificultades señaladas: por lo que toca á las que subsisten todavia, son de índole muy diferente. Mientras que el procedimiento empírico no es en definitiva otra cosa que caminar á tientas por la oscuridad, donde no puede abrigarse la esperanza de llegar, sino por casualidad, á una solucion, el procedimiento de induccion puede siempre aplicarse con buen éxito, sobre todo por aquel á quien el análisis es familiar. Los obstáculos que se presentan en tal caso, dependen más bien de la exigencia que la induccion tiene respecto de la capacidad individual.

En la aplicacion de ese procedimiento la cinemática sigue las mismas leyes que las demás ciencias. Más adelante tendremos con frecuencia ocasion de hacer resaltar las diferencias capitales que existen entre el antiguo procedimiento y el nuevo: más por de pronto debemos limitarnos á presentar al lector las conclusiones deducidas de los principios generales que hemos sentado.

Hasta aquí el problema de las máquinas no se ha resuelto sino *teóricamente;* en otros términos, las consideraciones anteriores no hacen más que indicar de una manera general y abstracta la marcha que debe seguirse para llegar á la solucion del problema. Los teoremas generales que hemos anunciado tocante á los acoplos de elementos, á las cadenas y á los mecanismos, no son en cierto modo más que los títulos, los rótulos de materias contenidas en hojas arrolladas que es necesario ahora desarrollar sucesivamente. Para pasar del problema resuelto en toda su generalidad á las aplicaciones particulares, es indispensable emprender un estudio especial que será precisamente el asunto del siguiente capítulo.

Parece indudable *á priori* que semejante estudio no ha de ser fácil ni sencillo; á lo ménos para mí tengo por imposible pasar rápidamente por cuestiones de una importancia y profundidad escepcionales. El que se consagra á un exámen atento del problema de las máquinas le descubre tantos aspectos diversos, cuyos puntos de conexion son difíciles de apreciar, que no puede tardar á convencerse de la imposibilidad de llegar con un estudio superficial á las leyes fundamentales que los rigen; y por igual motivo comprende que á veces sea necesaria toda la inteligencia de un hombre para hacer dar un solo paso adelante á algunas de las cuestiones que entraña dicho problema.

Para formarse una idea de las dificultades que á la teoria toca vencer, á lo ménos mientras permanece en el dominio de lo abstracto, basta examinar las sucesivas trasformaciones que desde un principio hasta nuestros dias han sufrido las principales máquinas de la industria: como ejemplos particularmente interesantes á tal punto de vista podemos citar la máquina de hilar y la máquina de coser. La primera de esas máquinas ha exigido el trabajo de tres generaciones para llegar á su estado actual, el que aún es susceptible de perfeccionamientos, por mucho que sea el producto de los esfuerzos sucesivos de los más distinguidos mecánicos. No debe á más perderse de vista que los principios anteriormente desarrollados son de todo punto nuevos, y por tanto es necesario aplicarlos con mucho cuidado á numerosos casos particulares; conviniendo igualmente estender su aplicacion á todos aquellos casos que parecen perfectamente conocidos del constructor, pero que no habiéndose sometido aún á la luz de dichos prin-

cipios pueden revelarse en este estudio bajo cierto número de aspectos nuevos. Por lo dicho se comprende que no podremos llegar sino al cabo de cierto tiempo á proposiciones que sean susceptibles de una aplicacion inmediata.

Pero cuando hayamos acabado la demostracion de la leyes sobre cuya existencia está basado nuestro procedimiento, habremos alcanzado sin duda el límite hasta donde debe presentarse la teoria como dueña y guia de la enseñanza.

Con efecto, la aplicacion de las leyes generales exige por parte del práctico una sagacidad especial para lograr hacer de la máquina una *obra práctica*, entendiendo con esto *una máquina que resuelve definitivamente y bien el problema planteado, y eso con medios tan sencillos y poco numerosos como sea posible.* Eso no puede enseñarse sino en muy exigua medida ni puede esplicarse claramente sino por medio de ejemplos, pues la abstraccion científica puede únicamente, en cuanto á la máquina, demostrar *lo que es posible hacer*, y no tiene criterio alguno para escoger entre lo práctico y lo que no lo es.

Con frecuencia se ha achacado á la teoria esa falta de criterio; pero tal acusacion no está bien fundada sino cuando la teoria se obstina en permanecer fuera del dominio de las cosas prácticas. Nosotros no dejamos ese dominio por el de la abstraccion, sino con el solo objeto de llegar á conocer claramente la marcha complicada de nuestro problema. Cabalmente por esa eleccion que debe hacerse entre lo que es práctico y lo que no lo es, nos vemos internados de nuevo en el dominio de la realidad.

De consiguiente, la cinemática debe en las escuelas ir amenudo al lado de la práctica, y en todas las soluciones dadas por el empirismo debe proponerse no solamente buscarles la teoria propiamente dicha, sino tambien investigar de qué manera se ha llegado á cada una de esas soluciones; es decir, hacer la teoria de su invento.

Cosa digna de notarse es que no exista casi ningun problema cinemático, ninguna deduccion de los principios teóricos, por atrevida que sea, de las cuales no pueda encontrarse un ejemplo en la práctica. Además, no tiene la teoria necesidad para ello de correr siempre en pos de la práctica, como ha hecho hasta ahora con sobrada frecuencia; más bien debe procurar reunir lo que está conforme con las leyes generales en lo que ha encontrado antes, y de las chispas aisladas formar una vasta llama destinada á iluminar la via de los descubrimientos y servir de faro á progresos ulteriores y decisivos. En una palabra, la teoria y la práctica deben ponerse la una con respecto de la otra sobre el pié de una estimacion recíproca en todas las cuestiones relativas á la constitucion de las máquinas.

CAPÍTULO V

PRINCIPIOS FORONÓMICOS

§ 4

Consideraciones preliminares

La teoria de los mecanismos es una ciencia derivada cuyas fuentes esenciales se encuentran, como hemos dicho, en la mecánica aplicada y las matemáticas. De la primera de esas ciencias toma un asunto enteramente especial, puesto que ante todo se ocupa de la clase particular de movimientos debidos á las fuerzas latentes, y que por lo mismo están determinadas por las propiedades geométricas de los cuerpos que sirven para trasmitir tales fuerzas. Por esa razon dichos problemas tienen en gran parte sus raices en un dominio perfectamente definido de la mecánica, el dominio geométrico, que no siempre se designa de igual manera en los diversos tratados. La designacion más exacta es la de Foronomia: muy amenudo se emplea la de cinemática, más sin razon, porque ese nombre no tiene aquí el sentido que le atribuyó *Ampere* al inventarlo. Nos parece además completamente ocioso conservar la palabra cinemática desviándola de su significacion primitiva, toda vez que el de foronomia es muy suficiente, á la vez que mucho más exacto y espresivo. La foronomia tiene en realidad el objeto de enseñar como se determina y mide el movimiento de los cuerpos, sea cual fuere su índole y naturaleza. Luego, es la ciencia de medir los movimientos de los cuerpos, y se ha desarrollado particularmente como *ciencia de la representacion geométrica de los movimientos*. A esa ciencia, así definida proponemos conservar el nombre de *foronomia*, y como tendremos que hacer uso frecuente de aquellos de sus teoremas que se refieren especialmente á los cuerpos sólidos, nos encontramos naturalmente inducidos á esponerlos un poco más adelante.

La parte puramente matemática de las cuestiones de foronomia que debemos considerar, constituye la materia de la ciencia especial que el catedrático *Aronhold* designó con el nombre de «geometria cinemática.» En verdad es una parte de la foronomia, y no acertamos á comprender la utilidad de darle una designacion especial. Si á esa parte se añaden las consideraciones relativas á las acciones de las masas de los sistemas de puntos en movimiento, se da orígen «á la mecánica foronómica·» Es la ciencia que en estos últimos tiempos ciertos autores franceses han propuesto designar con el

nombre de «cinemática pura.» (Véase la Introduccion, pág. 17). Sí, como esperamos, nuestra manera de ver se generalizase, daria por resultado hacer desaparecer la especie de confusion que aun ahora reina, permitiendo definir con claridad las diferentes subdivisiones de la ciencia; pero de todos modos conviene poner término á la ambigüedad de todas las designaciones usadas hasta hoy.

Hasta estos últimos tiempos la enseñanza en las escuelas politécnicas de Alemania no comprendia absolutamente más que las partes más elementales, las más sencillas de la foronomia, es decir, las que se relacionan con el movimiento *del punto* y que están tratadas en tan gran número de libros, que hoy son familiares á todo mecánico práctico que siente algun interés por las nociones científicas. Los problemas relativos á los *sistemas de puntos* no están en cambio tratados sino escepcionalmente y en forma de ejemplos; rara vez se encuentran en los libros escritos para los técnicos, y en aquellos en que se encuentran, están presentados más bien como adiciones interesantes, que como problemas esenciales. Tales problemas son en realidad de suma importancia para la cinemática, y los únicos de que aquí nos ocuparemos. Me atrevo á esperar que gran parte de los teoremas que desarrollaremos en el curso de nuestras investigaciones, ofrecerá algun interés de novedad, no solo para el práctico, sino tambien hasta para los ingenieros más espertos. Una de las propiedades más importantes de las soluciones que tendremos que esponer, es el carácter de evidencia que resalta como principio fundamental y que da por resultado hacer visible á la imaginacion la forma que efecta la marcha de los cambios de sitios. He procurado cuantas veces me ha parecido, hacer más completa esa propiedad de lo que se hacia hasta ahora.

§ 5

Movimiento relativo en el plano.

Al examinar el movimiento de un punto no podemos con el simple auxilio de los sentidos darnos cuenta del movimiento absoluto; no nos es dable observar en realidad más que las posiciones que toma relativamente á cuerpos ó puntos que nos circundan. Esa relacion de posiciones que suponemos conocida á todo momento, constituye lo que se llama el movimiento relativo al punto, ó si en vez de un mero punto se trata de un cuerpo, el movimiento relativo del cuerpo con respecto á los objetos del espacio que nos rodea. Si estos últimos son inmóviles, los movimientos absolutos y reactivos de los cuerpos son idénticos, siendo diferentes en el caso contrario. Para las investigaciones que intentamos practicar, carece de importaucia la consideracion del movimiento absoluto en el universo. Así pues, nos limitaremos á dar á esa expresion un significado más estrecho, limitándonos á considerar como movimiento absoluto, á lo ménos para nosotros, el movimiento relativo por lo tocante á la parte del espacio en que se hace la observacion, y que puede ser, segun los casos, la tierra, el puente de un barco, un tren de ferro-carril, etcétera.

Comenzaremos ante todo por examinar los movimientos en el plano, es decir, el movimiento de puntos en un plano que al propio tiempo será considerado como campo de observacion.

Teorema I.—El movimiento relativo de un punto P, (figura 13) con relacion á otro punto Q, en el plano, se verifica siguiendo la línea recta PQ que reune estos dos puntos, sea cual fuere la manera de moverse aisladamente de cada uno de ellos con respecto al plano de observacion. Cuando la distancia PQ es conocida á cada instante, se conoce por lo mismo el movimiento relativo de P con respecto á Q, y el de Q con respecto á P. Esa primera proposicion no se limita al movimiento en un plano, sino que igualmente se aplica de una manera general al movimiento de dos puntos en el espacio.

Ejemplo.—*El movimiento relativo del centro P de un planeta con respecto al centro Q del cuerpo central entorno del que gira, se reduce á una oscilacion sobre el radio vector PQ.*

Teorema II.—El movimiento relativo de un punto P con relacion á un plano en el cual se mueve, es conocido cuando se dan los movimientos relativos de P con respecto á dos puntos A y B de una figura plana, establecida de una manera invariable en el plano del movimiento (fig. 14). La trayectoria del punto P es el lugar geométrico del vértice ó cúspide P del triángulo APB, del cual está representada en líneas punteadas otra posicion en la figura.

Ejemplo.—*El movimiento relativo del centro P de un planeta con respecto al plano del sistema solar, en el*

cual circula este planeta sin perturbaciones, es una seccion cónica que puede determinarse con la medida de la paralaxe del cuerpo central.

Teorema III.—El movimiento relativo de una figura plana con relacion á un plano, en el cual se mueve, es conocido cuando se dan los movimientos relativos de dos de sus puntos P y Q (fig. 15) con respecto á dos puntos fijos A y B del plano del movimiento. En este caso se puede por medio de las posiciones de P y Q determinar las posiciones de todos los otros puntos de la figura móvil, considerándolos como vértices de triángulos de los cuales se conocen las longitudes de los tres lados, así como la posicion de la base. *Podemos por lo tanto en nuestras consideraciones espresar toda figura plana por medio de una recta de longitud constante, situada en su plano de una manera invariable.* Por esa razon el movimiento de la recta PQ con relacion á la recta AB, es tambien el momimiento de la *figura* PQ con relacion á la *figura* AB.

Ejemplo.—*Para determinar con respecto al plano de un sistema solar el movimiento relativo de la seccion ecuatorial de un planeta que pertenece á este sistema y describe en él una órbita plana, es necesario conocer los movimientos relativos de dos puntos á lo ménos de esa seccion con respecto al plano del movimiento. Prescindiendo de las circunstancias que introducen complicaciones, se logra determinar puntos de ese género con la observacion de ciertas irregularidades, visibles en la superficie de los cuerpos considerados, y que para el sol, por ejemplo, consisten en lo que se llama las manchas.*

Teorema IV.—El movimiento relativo de una figura plana PQ (fig. 16), con respecto á un punto A del plano en que se mueve, es un haz plano de líneas que irradian todas del punto A en ángulos indeterminados. La figura en efecto puede tomar para los mismos ángulos las posiciones más diferentes, y por lo tanto efectuar en su plano movimientos variados que los ángulos observados no permiten determinar.

Ejemplo.—*Como consecuencia de lo que antecede, una cadena cinemática que, al cambiar de sitio en un plano, no está fija más que en un solo punto del mismo plano, no puede efectuar ningun movimiento determinado, aunque el movimiento relativo del punto pueda estar completamente determinado con respecto á la cadena, es decir, aunque ésta sea una cadena cerrada. La opinion, al parecer contradictoria, de que ciertos mecanismos nuevos de guia ó guiaje en línea recta no necesitan más que un solo punto fijo, se apoya en una manera de ver errónea. Si en un mecanismo semejante no se mantiene realmente fijo más que un solo punto, ó mejor dicho, un solo eje, todas las otras partes dejan de ejecutar movimientos determinados.*

§ 6

Centro momentáneo de rotacion ó Polo. —Polígono regular.

Los cuatro teoremas anteriores constituyen la base fundamental de la foronomia de un sistema de puntos, y son en cierto modo suficientes. Pero no dan todavia una idea clara de la *sucesion* de las posiciones relativas. Luego, tenemos que examinar más de cerca esta última cuestion.

Dadas dos posiciones no paralelas, PQ y P_1H_1 (figura 17), de una figura plana que se mueve en su plano, siempre se puede imaginar que se pasa de una á otra de tales posiciones por medio de una rotacion entorno de un punto O del plano, que se obtiene tomando el punto de interseccion de las perpendiculares elevadas sobre las líneas PP_1 y QQ_1 en la mitad de las mismas. El punto último es el centro de rotacion O, puesto que los dos triángulos OPQ y OP_1Q_1 son congruentes, por tener sus lados iguales. El pnnto O se llama *el centro momentáneo de rotacion* ó *el polo*, para el cambio de posicion de que se trata.

Si por el mismo procedimiente buscamos los polos momentáneos para una série de cambios de posicion sucesivos, de P_1Q_1 á P_2Q_2, P_3Q_3... se obtiene una série de puntos O, O_1, O_2, O_3.... que pueden unirse entre sí por medio de rectas que formen un polígono plano $OO_1O_2O_3$... (fig. 18), cuyos vértices son los polos: lo designaremos con el nombre de *polígono polar*. Si con un série de cambios la figura PQ vuelve exactamente á su posicion primitiva, el polígono polar se cierra, en tanto que queda abierto en el caso contrario; más la figura verifica en cada caso una série de rotaciones alrededor de los polos; sus puntos describen, por ende, arcos de círculo que se encuentran perfectamente determinados cuando se conoce la dimension de los ángulos que corresponden á las diferentes rotaciones.

Fáltanos ahora indicar el modo de representacion que puede adoptarse para hacer resaltar las divisiones de dichos ángulos.

En su rotacion alrededor del punto O la figura describe un ángulo $POP_1=x_1$. Para representar más claramente esa rotacion supongamos invariablemente unida PQ á la recta MM_1 trazada de manera que el punto M que coincide con O, haga el ángulo $O_1OM_1=x_1$, y $MM_1=OO_1$. Entonces en la primera rotacion la recta MM_1 girando alrededor de O, pasará á tomar la posicion OO_1 y como está unida á PQ de una manera invariable, podemos considerar su movimiento como que reemplaza el de esta última línea. Si aplicamos el mismo procedimiento á la rotacion en torno de O_1, trazando la recta $M_1M_2=O_1O_2$, de suerte que forme con O_1O_2 un ángulo igual á x_2, cuando M_1 coincida con O_1, la figura MM_1M_2 podrá de igual modo sustituir la fig. PQ. Prosiguiendo así obtenemos otro polígono $MM_1M_2M_3...$, que por las rotaciones sucesivas de sus lados alrededor de los vértices ó cúspides correspondientes del primer polígono, reproduce los cambios de posicion de la figura PQ con respecto al plano fijo ó con respecto á una figura fija AB contenida en dicho plano.

Si consideramos al propio tiempo los dos polígonos polares, podemos afirmar que presentan la particularidad muy característica é importante, *de tener el uno con respecto al otro propiedades completamente idénticas*, es decir, de ser *recíprocos*, ya que en las diferentes posiciones en que coinciden dos lados correspondientes de los dos polígonos, ambos polígonos determinan lo mismo la posicion de la figura considerada como móvil con respecto á la que está fija, que al revés, la de ésta con relacion á la figura móvil. (Teor. III del § anterior). Los dos polígonos polares determinan, pues, *tantas posiciones relativas de las dos figuras* cuantos lados correspondientes tienen.

§ 7

Trayectorias polares.—Rotacion cilíndrica.

El procedimiento que acabamos de describir da los medios de representar de un modo visible una série de posiciones determinadas de dos figuras móviles. Sin embargo, no considera los cambios de posicion en sí mismos, ó mejor, se limita á suponer que consisten en rotaciones entorno de centros distintos. Pero si imaginamos, que las posiciones, suponiéndolas conocidas, $PQ_1, P_1Q_1, P_2Q_2...$ se aproximan más y más unas á otras hasta que llegan á estar infinitamente cercanas, el trazado anterior acaba por dar una imágen fiel de lo que sucede en realidad. En la hipótesis que acabamos de hacer las cúspides de los dos polígonos polares se aproximan igualmente unos á otros y acaban por no estar distantes más que en cantidades infinitamente pequeñas, de suerte que los polígonos se trasforman de una manera general en *curvas*, cuyos lados infinitamente pequeños de igual longitud llegan á coincidir ejecutando rotaciones infinitamente pequeñas, entorno de sus extremos: por lo tanto, durante el cambio progresivo y contínuo de las posiciones relativas de ambas figuras, dichas curvas *giran una sobre otra*. Cada punto queda entonces centro de rotacion, no como antes, *por cierto período de tiempo*, sino únicamente *por un instante;* y constituye desde entonces lo que llamaremos un *centro instantáneo de rotacion*. Las curvas en que se han trasformado los polígonos polares *están ambas recorridas* punto por punto, por el centro instantáneo de rotacion ó por el polo, y de consiguiente podemos designarlas de una manera conveniente con el nombre de *trayectorias polares* de las figuras móviles. Cuando esas trayectorias son conocidas para un acoplo dado de figuras, pueden determinarse completamente los movimientos relativos de ambas, aun para posiciones infinitamente cercanas: basta sin duda para conseguir ese resultado hacer girar las dos trayectorias una sobre otra.

De donde procede evidentemente que los movimientos relativos de las figuras planas no son en general *iguales;* y en efecto no hemos encontrado ninguna condicion capaz de traer como consecuente la congruencia de las trayectorias polares. No puede dudarse, además, que la igualdad existe desde el momento en que existe tal congruencia.

PRIMER EJEMPLO.—*Los problemas sobre las cicloides son ejemplos de movimientos relativos de figuras planas en las que se suponen dadas las trayectorias polares. Cuando un cilindro de base circular gira sobre un plano, las secciones normales de ambas figuras son las que se mueven dos á dos en un mismo plano; el círculo PQ y la recta AB* (fig. 19), *que así se obtiene, giran el uno sobre la otra y son por tanto á la vez las trayectorias polares de ambas figuras y de los elementos de figuras que pueden encontrarse unidas con ellas. Todos los puntos de PQ describen con respecto á AB, cicloides que son ordinarias, prolongadas ó acortadas, segun se encuentren en la circunferencia fuera ó dentro de ella; y por otra parte, todos los puntos que están invariablemente unidos á la recta AB, describen con relacion al*

círculo PQ desarrollantes que son tambien ordinarias largas ó cortas, segun se encuentren sus puntos sobre la recta abajo ó arriba.

2.° EJEMPLO.—*Dos círculos de igual dimension que giran uno sobre otro tienen movimientos relativos idénticos; los puntos de esos dos círculos describen epicicloides que son iguales para un mismo valor del radio.*

De una manera general las anteriores investigaciones se aplican á los movimientos relativos de figuras planas, situadas en un plano comun, que por abreviacion designaremos en adelante con el nombre de figuras *co-planas;* y desde ahora podemos sacar de los resultados obtenidos la siguiente conclusion: *Todos los movimientos relativos de las figuras co-planas pueden considerarse como movimientos de revolucion ó de rotacion y estar completamente determinados, en lo que toca á las trayectorias de los diferentes puntos, tan pronto como se conocen las trayectorias polares correspondientes.*

Si por las figuras consideradas PQ y AB se hacen pasar cuerpos que les estén invariablemente ligados, todos los acoplos de secciones planas hechas en tales cuerpos paralelamente al plano del movimiento primitivo, se mueven exactamente como dicho acoplo de figuras, y tienen por tanto acoplos de trayectorias polares enteramente idénticas. Los enlaces geométricos de todas esas trayectorias constituyen dos superficies cilíndricas que están siempre en contacto á lo largo de una generatriz y giran una sobre otra. La generatriz en virtud de la cual los cilindros se tocan en un momento dado, es en tal caso un *eje de rotacion* y se llama cabalmente *eje de rotacion instantáneo* ó *eje instantáneo del movimiento:* el movimiento mismo toma el nombre de *rotacion* ó *revolucion cilíndrica.* Ahora podemos estender á ese movimiento relativo así materializado las proposiciones sentadas antes para las figuras planas. Un carácter distintivo de todas las posiciones mútuas de cuerpos de rotacion cilíndrica, es que todas las secciones hechas normalmente en el eje instantáneo de rotacion dan figuras que en el movimiento son siempre co-planas. Hemos llegado por consiguiente á esta conclusion: *Todos los movimientos relativos de dos cuerpos que se mueven de manera que las secciones hechas paralelamente á un mismo plano queden siempre co-planas, pueden considerarse como rotaciones cilíndricas, y las trayectorias de sus diferentes puntos pueden determinarse desde el momento en que se conocen los cilindros de los ejes instantáneos correspondientes á dichos cuerpos.*

§ 8

Investigacion de las trayectorias polares.

Cuando se pasa, como anteriormente, del movimiento discontínuo al movimiento contínuo, las perpendiculares elevadas primitivamente sobre las líneas de union de las posiciones consecutivas P y P_1, Q y Q_1 vienen á ser las *normales de los elementos de curvas* que recorren los puntos P y Q, á cada instante considerado. Si se quiere, pues, determinar la trayectoria polar del movimiento de una figura PQ con relacion á otra figura AB, es necesario conocer para cada posicion de PQ, la direccion del movimiento de dos de sus puntos á lo ménos, es decir, la posicion de las tangentes respectivas á las dos curvas recorridas por esos puntos. Las normales llevadas á los elementos de esas curvas no se cortan más que en un solo punto. De donde resulta que *para cada movimiento relativo de figuras coplanas no existe más que un solo acoplo de trayectorias polares.*

La determinacion de las trayectorias polares puede fijarse operando punto por punto, ó en ciertos casos apoyándose en consideraciones generales que permitan conocer inmediatamente el género de curvas á que pertenecen las trayectorias buscadas. Vamos á examinar brevemente esos dos procedimientos.

Supongamos conocida la relacion que existe entre los movimientos mútuos de dos figuras coplanas PQ y AB (fig. 19). Para poder trazar las trayectorias polares correspondientes comencemos por trasformar el movimiento relativo dado en un movimiento absoluto para nosotros, comunicando á todo el sistema un movimiento igual y contrario en sentido al de una de las figuras, AB por ejemplo, de suerte que para nosotros quede en reposo esa figura. Tracemos enseguida las curvas en que se mueven dos puntos P y Q, y llevemos las normales á esas curvas de los puntos P y Q; su punto de interseccion O será un punto de la trayectoria polar correspondiente á AB; otro acoplo de normales; elevadas á los puntos P_1 y Q_1, dará un segundo punto O_1 de esa trayectoria, y así sucesivamente. La determinacion de la segunda trayectoria polar OM_1 puede fijarse absolutamente de igual modo, ó sea haciendo pasar la figura PQ al reposo y poniendo la figura AB en movimiento. Las más de las veces puede alcanzarse el mismo resultado de una manera más rápida fundándose en la siguiente observacion. En la posicion P_1Q_1

el polo O_1 que es entonces comun á las dos trayectorias polares, está á la distancia P_1O_1 de la posicion P_1 del punto, y á la distancia Q_1O_1 de la posicion Q_1 del punto Q; luego, si de los puntos P y Q como centros y con radios respectivamente iguales á P_1O_1 y Q_1O_1 se describen dos arcos de círculo, uno de los puntos de interseccion de estos arcos marcará el punto M_1 de la segunda trayectoria. Por lo demás fácil es distinguir qué punto de interseccion debe escojerse teniendo en cuenta los ángulos en P_1 y Q_1.

PRIMER EJEMPLO.—*Supongamos que se trata de hallar las trayectorias polares de la cadena cinemática* (fig. 10) *que hemos mencionado en el* § 3: *segun su composicion misma esta cadena no puede dar márgen sino á movimientos correlativos, y es por lo tanto muy á propósito para proporcionarnos un ejemplo muy conveniente en el caso actual. Como cada uno de los miembros es móvil con respecto á los otros tres, tendremos aquí seis acoplos de trayectorias polares, cuatro de los cuales están en conexion con los miembros adyacentes y los otros dos con los miembros opuestos. Los cuatro primeros son muy sencillos, puesto que cada uno se reduce á un punto; y en cambio los otros dos no se ven inmediatamente. Propongámonos buscar primero el acoplo de trayectorias polares correspondiente al movimiento relativo de los dos miembros* a—h *y* d—e. *Con ese objeto empecemos por poner inmóvil el miembro* a—h *sujetándolo á un sorporte fijo como el de la figura 11, por ejemplo. El miembro* a—d *gira entonces alrededor del punto* a *describiendo un círculo, á la vez que el miembro* e—h *oscila entorno del punto* h *describiendo simplemente un arco de círculo. Los centros de los elementos recorren, pues, en* c *y* f *trayectorias, cuyas normales todas son radios que pasan respectivamente por los centros* a *y* h. *Prolongando estos radios hasta su punto de interseccion obtenemos, por consiguiente, para cada posicion un punto de la trayectoria polar correspondiente al miembro fijo* a—h. *Esta trayectoria está representada por la fig. 20:* O_1M *es el polo correspondiente á la posicion inicial* a—d—e—h, *que ha sido determinado por la pronlongacion de* a—d *y* h—e *hasta su encuentro. La figura así obtenida,* $OO_1O_2...O_5$ *dista mucho de tener una forma sencilla, tiene cuatro puntos á una distancia infinita que corresponden á las posiciones paralelas de* a—d *y* e—h. *La segunda trayectoria polar, relativa al miembro* d—e *y obtenida por el procedimiento indicado antes, está representada en* $MM_1M_2...M_5$; *tiene tambien necesariamente cuatro puntos al infinito. Las dos trayectorias polares que en el dibujo son tangentes en* OM, *giran una sobre otra cuando el mecanismo está en movimiento, quedando fija* $OO_1...O_5$; *dan todos los elementos necesarios para el estudio del movimiento asaz complicado, en verdad, del miembro* d—e. *Bajo el punto de vista de la posibilidad de abarcar de una sola ojeada los fenómenos, esa representacion foronómica deja mucho que desear, pues la existencia de puntos al infinito es sobre todo perjudicial á la claridad. Con todo, cumple observar que no se trata aquí principalmente de llegar á una solucion más ó menos fácil de comprender, y la que hemos obtenido es ante todo una solucion verdadera y completa del problema. Más adelante demostraremos de que manera se puede á veces hasta en los casos más árduos y complicados llegar á grandes simplificaciones.*

2.° EJEMPLO.—*Un ejemplo muy sencillo de la determinacion de trayectorias polares, basada en consideraciones generales, nos dan las ruedas dentadas cilíndricas ó más generalmente dos cuerpos que giran alrededor de dos ejes paralelos de distancia constante, con una relacion invariable de velocidades. Sean* a *y* b (fig. 21) *dos secciones correlativas de dichos cuerpos,* c *y* d *los dos centros de rotacion; si suponemos primero que* a *permanece fijo, el punto* d *deberá moverse entorno del punto* c *describiendo una circunferencia, ya que la longitud* cd *es invariable; al propio tiempo* b *deberá tambien girar alrededor del polo todavia desconocido. Más como la normal á la trayectoria de* d *coincide con la línea de los centros, el palo habrá de encontrarse en esta línea ó en su prolongacion. Admitamos por un momento que este polo esté en* O *y mantengamos fija la línea* cd *de los centros;* a *y* b *recobrarán entonces sus movimientos de rotacion, y las trayectorias polares móviles ambas y girando una sobre otra en* O, *tendrán por consiguiente en este punto velocidades tangenciales idénticas, en cuanto á sus velocidades angulares estarán entre sí en la proporcion* dO : cO. *Más como por hipótesis esa proporcion debe ser constante, resulta de ahí que* dO *y* cO *deben tambien ser constantes; de donde se deduce que las trayectorias polares son dos círculos descritos de los puntos* c *y* d *como centros, con radios inversamente proporcionales á las velocidades angulares de ambos cuerpos. Segun esto, se ve que los círculos primitivos de los engranajes cilíndricos no son otra cosa que las trayectorias polares de las secciones normales.*

Así pues, aquí encontramos un caso en el que las trayectorias polares son particularmente sencillas, por más que en la construccion de las máquinas se prestan á las aplicaciones más estensas.

§ 9

Reduccion de las trayectorias polares.

El acoplo de trayectorias polares que hemos encontrado en el primer ejemplo del párrafo anterior, contiene la representacion completa del movimiento relativo entre los miembros *d—e* y *a—h* de la cadena cinemática que hemos considerado, y por esa razon puede igualmente servir, cuando la fijacion de la cadena para formar un mecanismo, es diferente de la que hemos supuesto. De esa cadena puede en efecto sacarse otro mecanismo bastante notable, poniendo fijo el miembro *b—c:* ese modo de fijacion es el primero de los que antes hemos indicado (pág. 31). En el mecanismo que así se obtiene y que está representado por la fig. 22, los miembros *a—h* y *d—e* describen círculos, conduciéndose el uno al otro por conducto del miembro *f—g*. Eso es lo que llamamos *juntura articulada ó de flexion*. Los brazos ó manubrios *d—e* y *a—h* presentan en su movimiento de rotacion una proporcion de las velocidades angulares variable para cada posicion del mecanismo con las longitudes de los radios vectores correspondientes de las trayectorias polares, y que por lo tanto puede quedar determinada en virtud de esas longitudes. Efectivamente, si suponemos las trayectorias de la figura 20 en relacion con los brazos correspondientes, vemos que ambas giran alrededor de los puntos fijos *a* y *d* como rodando una sobre otra, exactamente lo mismo que los contornos primitivos de un acoplo de ruedas dentadas de secciones no circulares (§ 10). Sin embargo, en razon de la forma particular de ambas trayectorias polares, esas consecuencias son muy difíciles de notar á primera vista, y de desear fuera tener un modo de representacion más claro, máxime en lo tocante á la relacion de las velocidades angulares de dos brazos. Para lograr ese resultado imaginemos una rueda dentada cilíndrica, sujeta á uno de los brazos, *d—e*, por ejemplo (fig. 23), y endentando con otra rueda dentada igual, montada en otro eje *k;* en virtud de tal enlace ese tercer eje girará exactamente con la misma celeridad angular que el brazo *d—e*, pero en sentido contrario. Si suponemos ahora que se determinan las trayectorias polares del primer brazo *a—h* y de un brazo *ik*, montado en el eje *k*, dichas trayectorias podrán sin duda sustituir las anteriores, á lo ménos en lo concerniente á la proporcion ó relacion de las velocidades angulares entre *a—h* y *d—e*. Así reducimos las dos primeras trayectorias polares á otras dos que designaremos con el nombre de trayectorias reducidas. Considerando esas trayectorias como los contornos de discos de friccion ó como las curvas primitivas de dos engranajes no circulares, dan inmediatamente una representacion muy clara de la trasmision del movimiento de rotacion entre *a—h* y *d—e*. Más adelante volveremos sobre el modo de trazar esas trayectorias polares reducidas; por ahora nos limitaremos á consignar que en el caso actual la suma de los radios vectores que corresponden á los elementos en contacto, es constante é igual á *ak*, en tanto que en las trayectorias primitivas (fig. 20) era constante é igual á *ad* la diferencia de tales radios vectores. Las nuevas trayectorias no tienen ya puntos al infinito, y el trazado gráfico, volviéndose sencillo en estremo, presenta notables ventajas bajo diferentes aspectos.

Los puntos de distancia infinita pueden en ciertas circunstancias ser aun más dificultosos que en el caso anterior, en el que merced á las asíntotes quedan en rigor utilizables en cierta medida. Así por ejemplo, si en el mecanismo antedicho se da á los miembros opuestos la *misma longitud* (fig. 24), las líneas medias de los cuatro brazos forman un *paralelógramo;* las prolongaciones de esas líneas no se encuentran á la sazon hasta el infinito, de suerte que las *dos trayectorias polares se convierten en curvas infinitamente grandes, que es imposible trazar*. El método de reduccion que acabamos de usar, daria por el contrario en este caso dos círculos tangentes de igual diámetro. Pero podemos aquí realizar un modo de representacion más inteligible todavia. Con ese objeto desde los puntos *a* y *f*, como centros y con un radio más pequeño que la mitad de la distancia de estos centros, describamos dos círculos iguales y apliquémosles una tangente esterior *ik*. Si ahora dejamos arrollar esa recta sin deslizamiento por los dos círculos, en tanto que éstos giran alrededor de los centros *a* y *f*, es evidente que los círculos *i* y *k* tienen exactamente el movimiento que resultaria de la union de los brazos del paralelógramo, es decir, giran ambos en el mismo sentido y con una relacion de velocidades angulares constante é igual á la unidad. El conjunto de esas tres trayectorias polares, á las que acabamos de reducir las trayectorias primitivas, infinitamente grandes y no susceptibles de ser trazadas, espresa así de una manera completa la ley del movimiento que se trataba de representar.

Podemos por otra parte imaginar realizadas con efecto esas trayectorias y aplicadas simultáneamente con las trayectorias primitivas. Como en cierto modo secundan el movimiento originado, se puede designarlas con el nombre de *trayectorias polares secundarias*. En el caso actual no constituyen un *acoplo* sino un *terno* de figuras correspondientes, cosa digna de notarse ya

que segun hemos visto (§ 8), no existe más que un solo acoplo de trayectorias polares para cada movimiento relativo de figuras correspondientes ó correlativas. Esa propiedad que tiene la representacion secundaria de dar orígen á más de dos figuras, no está limitada á algunos casos particulares, sino que al contrario es enteramente general.

Las trayectorias polares secundarias pueden igualmente prestar servicios en los casos que las trayectorias polares, aun cuando fuesen fáciles de trazar, exigiesen para el dibujo excesivas dimensiones, como sucede por ejemplo, en un acoplo de cuerpos que giren en el mismo sentido con una relacion de velocidades angulares constante y diferente de la unidad. En tal caso se obtendrian en vez de trayectorias polares circunferencias tangentes una dentro de otra: las trayectorias polares secundarias del género precedente son circunferencias cuyos diámetros están en la misma proporcion que los de las trayectorias primitivas y que permiten determinar inmediatamente la posicion de la tangente *ik* (fig. 25). Las trayectorias secundarias pueden tambien aplicarse al caso de los cuerpos que giran en sentido contrario con una relacion ó proporcion de velocidad constante, siendo entonces la tangente *ik* (figura 26) una tangente *interior* de los dos círculos polares secundarios. En ciertos métodos usuales para determinar los perfiles de los dientes de engranajes, esas trayectorias polares secundarias (§ 11) desempeñan á veces un papel muy importante: las encontramos ya introducidas en los métodos de la construccion de las máquinas, y por consiguiente podemos decir que hemos podido agregar á los principios generales de la foronomia un procedimiento de uso muy generalizado en la práctica.

§ 10

Rotacion entorno de un punto.

En lo que precede hemos indicado tan claramente como se puede, el modo general de representacion del *movimiento relativo en el plano;* y ahora debemos resolver un problema más difícil, el del *movimiento relativo en el espacio*, limitando ante todo nuestro estudio al caso en que uno de los puntos del cuerpo qne debemos considerar, permanece para nosotros inmóvil en el espacio. Cuando un cuerpo se mueve de manera que cada uno de sus puntos se encuentra siempre á igual distancia de otro punto fijo, se dice *que el cuerpo gira en torno de ese punto*. Para conocer los fenómenos de los movimientos relativos que en ese caso se producen como movimientos *relativos* del cuerpo, con respecto á otro *cuerpo en reposo*, sujeto al punto fijo A, describamos, tomando ese último punto por centro, una esfera de tamaño tal que corte el cuerpo en movimiento (fig. 27).

Si conocemos el movimiento de la figura esférica PQ en la esfera, figura determinada por dicha seccion, no cabe duda que tambien conoceremos el movimiento del cuerpo. Pero el movimiento de la figura se encuentra determinado cuando se conocen todas las posiciones de dos de sus puntos P y Q, ó las del arco del círculo grande que las reune, puesto que de estas últimas posiciones siempre pueden deducirse las de los otros puntos de la figura, considerando cada uno de ellos como las cúspides de un triángulo esférico, del cual se conoce la longitud de los tres lados á la vez que la posicion de la base PQ. Luego, en definitiva, el problema del movimiento relativo de un cuerpo entorno de un punto fijo se encuentra reducido al estudio del arco de círculo máximo PQ bajo el punto de vista de su movimiento. Además, ahí encontramos el medio de introducir una simplificacion análoga á la que hemos aplicado ya al estudio del movimiento en un plano, y que consiste en reemplazar cada figura esférica con un arco de círculo grande que en ella está contenido.

Toda figura esférica PQ (fig. 28) que se mueve en la superficie de la esfera á que pertenece, puede siempre llevarse de una de sus posiciones PQ á otra P_1Q_1, por medio de una rotacion esférica alrededor de un punto O de la superficie de la esfera, punto que se determina levantando en el medio de los arcos de union PP_1 y QQ_1 otros arcos de círculo máximo perpendiculares, prolongándolos hasta su encuentro. El punto de interseccion O es el punto buscado, puesto que los triángulos esféricos OPQ y OP_1 Q_1 son congruentes por tener todos sus lados iguales. Ese punto O es el *centro momentáneo de rotacion* ó el *polo* para el movimiento de rotacion esférico que consideramos. Los dos arcos de círculo máximo que hemos trazado, se cortan no solamente en O, sino tambien en otro punto que se halla precisamente al estremo del diámetro que pasa por el punto O y por el centro de la esfera, ó sea el punto fijo dado. A. Como por hipótesis la figura PQ queda en su movimiento á una distancia constante de ese punto fijo, resulta que el diámetro espresado tampoco cambia de posicion respecto de la figura, y es por consiguiente el *eje temporario* de rotacion para el movimiento considerado. Otra rotacion da un segundo polo O_1, otra da un tercero O_2..., y así sucesivamente; la reunion de todos esos polos por medio de los arcos de círculo grande da un *polígono polar esférico*, al cual corresponde otro polígono polar esférico que está rela-

cionado de una manera invariable con la figura en movimiento. Si por las cúspides de esos polígonos y por el punto fijo se pasan rectas que sean diámetros de la esfera, se obtienen dos *pirámides*, entorno de cuyas aristas se efectuan las diferentes rotaciones parciales.

§ 11

Rotacion cónica ó arrollamiento cónico.

El procedimiento que acabamos de indicar tiene, como se ve, la mayor analogia con el que hemos usado para el movimiento en un plano. Si como para este último suponemos las posiciones de PQ infinitamente cercanas, los polígonos polares se convierten en *trayectorias polares esféricas;* los ejes de rotacion temporarios en *ejes instantáneos*, y las pirámides en *conos*, teniendo ambos sus cúspides en el punto A y girando uno sobre otro. Los *conos de los ejes instantáneos* y el conjunto de su movimiento relativo constituye lo que se llama arrollamiento cónico. Así nos encontramos conducidos al siguiente teorema como resúmen: *Todos los movimientos relativos de dos cuerpos que tienen constantemente un punto comun, pueden considerarse como arrollamientos cónicos y están determinados, bajo el punto de vista de las trayectorias de sus puntos, desde el momento que se conocen los conos de los ejes instantáneos que les corresponden.*

Es, además, evidente que todas las consideraciones que hemos presentado sobre la determinacion de las trayectorias polares y su reduccion, son inmediatamente aplicables al arrollamiento cónico, y por lo tanto podemos dispensarnos de reproducirlas ahora.

§ 12

Forma más general del movimiento relativo de cuerpos sólidos.

Cuando se conocen las posiciones de tres puntos de un cuerpo, puede determinarse la de un punto cualquiera del mismo, considerándolo como la cúspide de una pirámide triangular de cuyas aristas conocemos las longitudes así como la posicion de la base. Para estudiar el movimiento relativo de dos cuerpos sólidos podemos por tanto, representar esos cuerpos con dos triángulos PQR y ABC (fig. 29) contenidos respectivamente en cada uno de ellos. Supongamos inmóvil el cuerpo ABC; en ese caso el cuerpo PQR para nosotros se mueve solo y pasa, por ejemplo, de la posicion PQR á la posicion $P_1Q_1R_1$. Este cambio de posicion puede realizarse de diferentes maneras. Si por ejemplo trazamos una recta que pase por P y P_1 y hacemos deslizar la fig. PQR paralelamente á sí misma hasta que el punto P llegue á P_1, no tendremos que hacer más sino imprimir á esa figura una rotacion entorno de un eje SS que pase por P_1, siempre fácil de determinar, para pasar de la posicion intermedia $P_1Q'R'$ á la posicion $P_1Q_1R_1$. Segun esto el movimiento más general de PQR con respecto de ABC, puede siempre obtenerse por la *combinacion de un deslizamiento paralelo y de una simple rotacion entorno de un eje*, y eso de una infinidad de maneras diferentes.

Por otra parte, no es en modo alguno necesario que la direccion del deslizamiento ó de la traslacion sea palalcla á la recta de union de dos posiciones de un mismo punto. En el número infinito de maneras de realizar el movimiento compuesto, hay uno que presenta una sencillez particular, y es aquel *en que la traslacion es paralela al eje de rotacion.* En tal caso el movimiento se reduce á una rotacion entorno de un eje y á un deslizamiento á lo largo de ese eje. Si los cambios de posicion de PQR con respecto de ABC son infinitamente pequeños, todos los ejes de rotacion instantáneos, á lo largo de los cuales se realiza al propio tiempo el deslizamiento, llegan á estar infinitamente cercanos unos de otros.

§ 13

Viracion y arrollamiento de superficies reguladas.

Se ha intentado de varios modos expresar con una imágen sensible lo que, sin embargo, no es fácil, la naturaleza del movimiento que acabamos de describir. *Poinsot* propuso imaginar el cuerpo inmóvil (ó considerado como tal) invariablemente unido á un tornillo y el cuerpo móvil á una tuerca; en esas condiciones la traslacion se afectua siguiendo la direccion del eje del tornillo y la rotacion entorno del mismo, conforme á lo que exije el género de movimiento considerado. Más como el movimiento puede efectuarse con una celeridad variable, lo mismo para la traslacion que para la rotacion, es necesario admitir que el tornillo y su tuerca son de naturaleza tal que cambian de inclinacion á cada instante. Entonces se llega á una representacion de la que es bastante difícil darse perfecta cuenta; pues un objeto de forma tan variable no es un cuerpo definido; con los mejores esfuerzos de imaginacion no se logra adquirir una idea muy clara de la variabilidad de forma del tornillo y de su tuerca, y al fin y al cabo no se adelanta mucho hasta que se procura simplemente figurar-

se el doble movimiento de rotacion y traslacion en el espacio.

Belanger propuso dos modos de representacion: el primero consiste en asimilar el movimiento de los dos cuerpos á un *arrollamiento cónico* (§ 11), en el cual los dos conos unidos á eses cuerpos tendrian un movimiento de traslacion con respecto al sistema fijo en el espacio. Entonces la *rotacion entorno de un eje* seria dada por el *arrollamiento cónico*, y el *deslizamiento* por la *traslacion de los dos conos*. Verdad es que así logramos formarnos una idea exacta del movimiento relativo de los dos cuerpos considerados, pero con la condicion de introducir una tercera especie de cuerpos (los conos), lo que si bien es ventajoso en algunos casos y aun á veces indispensable (véase § 9), debe sin embargo, por regla general evitarse, siempre y cuando sea posible emplear un modo de representacion más sencillo.

La segunda proposicion de *Belanger* consiste en representar el movimiento relativo de los dos cuerpos con el de *dos superficies reguladas*, determinadas para cada uno de dichos cuerpos por las posiciones sucesivas del eje instantáneo de rotacion y de deslizamiento: en esas condiciones el movimiento considerado se encuentra reducido á un arrollamiento de las dos superficies reguladas con deslizamiento á cada instante á lo largo de la generatriz de contacto. Con ese modo de representacion tienen conexion muchos otros que se han emitido más recientemente. Puede en realidad deducirse como consecuencia directa de lo que hemos dicho antes, puesto que tomando para cada uno de los dos cuerpos la envoltura de las posiciones sucesivas del eje de rotacion y de deslizamiento simultáneos, se obtienen cabalmente dichas superficies reguladas como lugares de los ejes instantáneos.

Esa especie particular de movimiento, en el cual hay á la par deslizamiento y rotacion á lo largo y alrededor de una misma recta, constituye lo que nosotros proponemos llamar una *viracion* (a). Igualmente proponemos comprender en una designacion comun los cuerpos que acaban de mencionarse y cuyo movimiento da una imágen sensible del movimiento relativo en el caso más general. Como dichos cuerpos están siempre constituidos por una série sucesiva de ejes, parece natural designarlo con el nombre de *axoides*. Por lo tanto nos vemos inducidos á resumir en la siguiente proposicion los resultados que hemos obtenido: *Todos los movimientos relativos de dos cuerpos pueden considerarse como movimientos de viracion ó de arrollamiento de superficies reguladas ó de axoides.*

De ese teorema general pueden deducirse con reducciones y simplificaciones oportunas todos los que antes hemos encontrado para casos particulares. Con efecto, no es difícil imaginar que una superficie regulada se reduzca á un cono ó á un cilindro, en cuyos dos casos en vez de un movimiento de viracion se efectua un simple movimiento de rotacion ó de arrollamiento. Sin embargo, importa no dejarse llevar hasta el estremo de deducir que los movimientos de mero arrollamiento deben atribuirse únicamente al uno ó al otro de ambos casos (como se ha admitido hasta aquí, sin ninguna escepcion que sepamos). La condicion de la ausencia de deslizamiento á lo largo de las generatrices, no es en efecto que esas generatrices se corten todas en un mismo punto como en el cono, ó que sean paralelas como en el cilindro; es una condicion de órden más elevado, consistente en que las superficies reguladas deben ser de naturaleza tal, que sus séries de generatrices infinitamente cercanas comprendan en posiciones homólogas superficies de igual forma; ó en otros términos, conforme la espresion adoptada por los geómetras, estas superficies reguladas deben ser desarrollables una sobre otra.

Una superficie cónica es desarrollable sobre otra de igual modo que un cilindro lo es sobre otro cilindro; porque las pequeñas porciones de superficie comprendidas entre dos generatrices infinitamente aproximadas, sufren en posiciones homólogas idénticas variaciones. De donde resulta que de una manera general pueden igualmente girar la una sobre la otra figuras de superficies reguladas, desde el momento en que tales superficies satisfacen simplemente la condicion de ser desarrollables la una sobre la otra. Así por ejemplo, dos superficies helicoidales construidas de manera que satisfagan esa condicion y estén debidamente dispuestas como en la figura 30, pueden girar la una sobre la otra; y lo mismo puede suceder con una superficie helicoidal y un hiperboloide (fig. 31). Superficies de ese género se emplean realmente en la construccion de las máquinas, de suerte que las cuestiones tratadas aquí ofrecen tanto interés para los prácticos como para los teóricos.

La construccion de las máquinas hace tambien uso de superficies reguladas que tienen la una con respecto á la otra un movimiento de viracion, tales, por ejemplo, como los axoides de los engranajes hiperboloides que

---

(a) En la imposibilidad de traducir exactamente al español la palabra alemana *schroten* empleada por el Autor para espresar el movimiento especial de que se trata, debemos resignarnos á adoptar la palabra *virar* (andar girando), y su derivada viracion, dándoles el sentido que tienen sobre todo las palabras derivadas *virote*, *viraton* y *vira* (que significa una especie de dardo ó de flecha delgada y muy aguda emplumada á guisa de hélice con hojuelas de madera, asta ú hojadelata, que la hacian girar sobre sí misma en el aire al dispararla.

representa la fig. 32; en las ruedas helicoidales de ejes oblícuos estos axoides dejan de ser ejecutados, por más que siempre representen el movimiento relativo de dichas ruedas.

No nos permite el cuadro de nuestras investigaciones tratar aquí de una manera sistemática todos los axoides posibles de órden superior, y nos limitaremos á resolver una definitiva cuestion general en averiguacion de si las superficies reguladas, sea cual fuere su movimiento (una viracion ó un simple arrollamiento), tienen todavia alguna propiedad comun característica susceptible de utilizarse en todos los casos particulares. Con efecto, existe una propiedad de ese género, como es fácil demostrar.

Si por los puntos homólogos de dos axoides correspondientes se hacen pasar planos normales á las generatrices de contacto, todos esos planos determinarán en cada axoide una superficie envolvente cuyos elementos en la proximidad inmediata de las generatrices de contacto son precisamente normales á esas generatrices. En el cono ordinario esta superficie lleva el nombre de *cono complementario* (veáse HJ, fig. 33), y para el cilindro, lleva el de *base;* en la hiperboloide de rotacion (donde hay un cono HJ, fig. 34), le he dado igualmente el nombre de *cono complementario.* De una manera general podemos designar esta superficie envolvente con el nombre de *superficie complementaria* de la superficie regulada. Si suponemos esa superficie ejecutada para cada uno de los dos axoides correspondientes, obtendremos en cada uno de ellos una línea de interseccion entre la superficie complementaria y la del axoide; y esa línea que, en el cono ordinario el cilindro y la hiperboloide de rotacion, es una circunferencia, y en la superficie helicoidal, una hélice, etc., constituye lo que de una manera general llamaremos *el contorno complementario del axoide.* Si entonces se imagina que se proyectan los contornos complementarios de dos axoides en un plano normal á la línea de contacto, se obtienen dos figuras que en el movimiento del polo se tocan constantemente por medio de nuevos elementos y de tal manera que en el punto de contacto pasan siempre á la vez de las longitudes iguales de cada curva; en otros términos, las dos curvas de proyeccion giran una sobre otra. Cuando los axoides son hiperboloides normales (fig. 32) esas curvas de proyeccion son elipses; en el caso de la fig. 30 son las proyecciones de dos hélices, es decir, lo que podemos llamar cicloides elípticas (§ 12). Finalmente, en caso de la fig. 31 el acoplo de las figuras de proyeccion comprende una cicloide de ese género y una elipse. Así pues, podemos completar en definitiva el teorema anterior de la manera siguiente: *Las viraciones de superficies reguladas á las cuales pueden reducirse los movimientos relativos más generales de dos cuerpos, se efectuan de manera que las proyecciones de los contornos complementarios de los axoides en un plano normal al eje instantáneo* GIRAN LA UNA SOBRE LA OTRA.

Ese teorema reduce todos los movimientos que se verifican en la máquina á una idea fundamental, de donde derivan las diversas proposiciones que corresponden á especiales aplicaciones. A imitacion del filósofo de la antigüedad que asimilaba á la corriente del agua de un rio la trasformacion contínua y sucesiva de las cosas y la resumia en este axioma: «*Todo gira, todo corre,*» nosotros podemos tambien encerrar en una sola frase los numerosos fenómenos del movimiento que se manifiestan en la máquina, ese portentoso parto de la inteligencia humana, y decir con no ménos laconismo. «*Todo gira.*» En toda máquina esa ley fundamental de la rotacion ó giro, sea aparente ó esté oculta, preside los movimientos relativos de los diferentes órganos, puesto que puede considerarse el deslizamiento en línea recta como un movimiento de rotacion sobre líneas situadas á una distancia infinita. Tambien se puede estender, conforme hemos tenido ocasion de decir antes, ese concepto á todos los movimientos cósmicos; pues las consideraciones que hemos presentado no están en modo alguno limitadas á las traslaciones que hay en las máquinas, sino que son aplicables de una manera general á todos los cuerpos en movimiento.

Cumple notar, sin embargo, que las figuras geométricas de rotacion ó arrollamiento que podemos construir para los cuerpos del sistema del universo, no son permanentes, participan de la *espansion* general y tienen como los fenómenos mismos, continuados cambios, tanto si llegan á desaparecer, como si se trasforman en otras figuras de forma igualmente variable, que no pueden determinarse exactamente á cada instante, sino en el punto mismo de la rotacion ó arrollamiento.

Los movimientos planetarios deben considerarse como no ofreciendo sino aproximadamente ese carácter de permanencia que solo es compatible con una representacion rigurosa por medio de axoides. Por el contrario á efecto de la limitacion artificial de los movimientos, en la máquina las figuras rotatorias conservan una forma constante, ó á lo ménos se procura asegurársela de todas las maneras posibles; en otros términos, esa permanencia de forma de las figuras representativas de los movimientos en la máquina, se considera como un principio que se procura satisfacer, y aquí podemos admitir que se encuentra realizada.

En la máquina ejecutan indefinidamente sus movimientos relativos las figuras representativas pasando y repasando periódicamente por las mismas posiciones; se paran con la máquina, pero vuelven á emprender invariablemente sus funciones, así que la fuerza motriz vuelve á dar la vida á todo el conjunto; y la única parte de la máquina que está constantemente en reposo es aquella que sirve para unir las partes móviles al sistema fijo del espacio.

Para el mecánico práctico que está familiarizado con la nueva foronomia, y más aun para el teórico, la máquina se ostenta, pues, como vivificada de una manera particular por esas figuras geométricas cuyos arrollamientos representan los movimientos relativos de los diversos órganos. Algunas de esas figuras toman, por decirlo así, una forma material, efectuándose realmente sus arrollamientos, como sucede por ejemplo, con las poleas, las ruedas de friccion, las ruedas de ferro-carriles, etc.; y otras como las de ruedas dentadas se perciben ménos claramente, puesto que en cierto modo quedan disfrazadas ó tapadas con un lijero velo: siguen despues las que están estrechamente concentradas en el interior de los cuerpos correspondientes, cuya forma esterior deja apenas sospechar su existencia, como por ejemplo, jas figuras giratorias de los escéntricos, de los arcos circulares y otros mecanismos análogos, con los cuales trabaremos más tarde muy ámplio conocimiento. Por último, hay otras que como las de mecanismos constituidos con bielas y manubrios, son figuras de ramas infinitas que no se traslucen al esterior por ningun signo susceptible de darlas á conocer. Luego, segun los casos, con los ojos del cuerpo ó los del alma ha de ver el cinemático como todas esas figuras desempeñan sin fatiga sus singulares funciones y ejecutan silenciosamente sus evoluciones, en medio del ruido, á veces atronador, de los órganos materiales que le corresponden. Dichas figuras constituyen en cierto modo el espíritu de la máquina, que gobierna las manifestaciones esteriores del movimiento que ésta tiene, y las pone claramente en evidencia. Son, en una palabra, la abstraccion geométrica de la máquina y le dan una significacion de carácter más profundo, lo cual debe tener naturalmente por resultado interesar nuestra inteligencia muchísimo más de lo que se podria, prescindiendo de esa consideracion que nos pondrá en claro muchas y muy complicadas cuestiones.

CAPÍTULO III

ACOPLOS DE ELEMENTOS

§ 14

De las diferentes especies de acoplos de elementos

En la solucion general del problema de las máquinas hemos encontrado que los órganos elementales, ó aquellos que como tales deben designarse, jamás se emplean *aisladamente*, sino siempre *por acoplos*, y que por lo tanto bajo el punto de vista cinemático, una máquina debe considerarse como compuesta, no de *elementos*, sino de acoplos de elementos. Lo que ante todo debemos intentar conocer es la forma geométrica de dichos scoplos.

Limitando en primera línea nuestras investigaciones á los *cuerpos sólidos*, ó sea, á los que pueden considerarse como sensiblemente *rígidos*, el primer problema que nos toca resolver para construir acoplos de elementos, estriba en determinar por medio de dos *cuerpos solamente* ó de dos elementos, un movimiento dado ó impuesto. Conforme con las condiciones espuestas anteriormente, tales elementos deben llenar las siguientes condiciones.

1.° Uno de los elementos debe mantenerse inmóvil con relacion al sistema del espacio considerado como fijo;

2.° Ese mismo elemento debe estar dispuesto de manera que contenga la forma envolvente de las posiciones del otro elemento que se supone móvil;

3.° Esa forma envolvente (envoltura) debe ser tal que impida al segundo elemento tomar movimiento cualquiera salvo el que le está impuesto.

El elemento inmóvil, pues, debe en cierto modo mantener prisionero el otro elemento privándole de todos los movimientos ménos uno solo, y *obligándole* por lo tanto, cuando hay movimiento, á describir por sus diferentes puntos trayectorias determinadas. De ahí resulta que esos elementos constituyen lo que se puede denominar un acoplo *desmodrómico* (§ 13). Si consideramos ahora que el movimiento relativo de los cuerpos puede, como lo hemos visto en el capítulo anterior, afectar una gran variedad de formas, es fácil comprender que para un acoplo de elementos desmodrómico puede presentarse un gran número de figuras geométricas. Todos los acoplos de formas geométricas que satisfacen las dos últimas condiciones antedichas tienen como propiedad comun la de ser *formas envolventes* y precisamente for-

más envolventes *recíprocas* para los movimientos relativos dados (que pueden representarse por medio de axoides). Por consiguiente, de igual manera que los axoides correspondientes pueden ser más ó ménos sencillos. Es obvio además que las dos condiciones se encuentran igualmente satisfechas cuando uno de los elementos en vez de *envolver* simplemente al otro, lo *encaja* por completo; es decir se encuentra con que es su *matriz*, la *forma ó molde en hueco;* y en tal caso las formas de los dos elementos son geométricamente *idénticas*. Un acoplo de este género constituye lo que podemos denominar un *acoplo de encaje*.

Es evidente que los acoplos de encaje se distinguen esencialmente, por su sencillez, de aquellos cuyos elementos no tienen una forma idéntica. Parece entonces natural separarlos de los dos últimos y estudiarlos en primer lugar.

§ 15

Investigacion de los acoplos de encaje ó ajuste.

Las propiedades de las formas materiales que pueden utilizarse para formar acoplos de encaje son de naturaleza tan caracterizada, que no tenemos necesidad de comenzar buscando tales acoplos en la práctica de las máquinas y que podemos proponernos determinarlas *á priori*.

Dos cuerpos que constituyan un acoplo de encaje, coincinden por completo en toda la estension de las superficies que están en contacto, de suerte que es posible trazar en tales superficies una infinidad de curvas que se cubren enteramente dos á dos; y entre esas curvas importa distinguir las que se hallan precisamente en aquella direccion en virtud de la cual se produce el único movimiento posible, y que por lo mismo deben *deslizarse la una sobre la otra*. Consideremos separadamente un acoplo de esas curvas de deslizamiento que correspondan á los dos elementos respectivamente y supongamos que se las hace deslizar una sobre otra sin dejar de hacerlas coincidir. Por los puntos A y A′ de dichas dos curvas (fig. 35) hagamos pasar un plano osculador y dos sistemas de arcos de coordinadadas homólogas XYZ y X′Y′Z′. La propiedad del encaje y del deslizamiento consiste en que un elemento de curva AB es siempre congruente con el elemento A′B′ de igual longitud, sea cual fuere la posicion de A′ sobre la curva, y que por lo tanto AB coincide con A′B′ cuando A′ está ajustada sobre A′, B sobre B′ y X sobre X′. En otros términos, se cumple la condicion del encaje durante el movimiento siempre que las dos curvas del deslizamiento satisfacen la relacion:

$$f(x, z)=f(x', z')$$

ó sea siempre que $y=y'$, para $x=x'$ y $z=z'$. De una manera general esta condicion no se satisface sino por la *hélice cilíndrica ó normal*. Segun esto el *tornillo ordinario y su tuerca constituyen un acoplo de encaje* (fig. 5).

Sin embargo, la forma del tornillo no es aquí indiferente por completo, ya que segun la tercera condicion nunca debe efectuarse más que un *solo* movimiento, que aquí debe estar dirigido segun la hélice. Los filetes del tornillo y de la tuerca deben segun ello tener un perfil tal, que un movimiento normal al hélice sea imposible. Y así sucede cuando el perfil normal á la hélice de deslizamiento ó sea el *perfil de la superficie helicoidal complementaria* está formado de manera que presente partes dirigidas en opuesto sentido las unas de las otras, conforme lo indica de varias maneras la fig. 36.

Como el *encaje* impide todo movimiento relativo, y perfiles análogos á los anteriores hacen imposibles todos los movimientos trasversales con relacion á la hélice de deslizamiento, en definitiva no queda posible más movimiento que el que sigue esta hélice. Ocioso es recordar que los filetes empleados para los tornillos de sujeccion y para los demás usos se ejecutan con perfiles semejantes. Si como generatriz de la superficie del filete se emplease una porcion de recta paralela al eje del tornillo y de longitud superior á su paso, se obtendria en rigor un tornillo, pero la forma exterior de ese tornillo se confundiria con la superficie de un cilindro ordinario y la superficie cumplementaria tendria como perfil una hélice ordinaria. En el acoplo de elementos así engendrado no se impediria, pues, más que el movimiento relativo en el sentido de un radio, pero este acoplo no seria en modo alguno desmodrómico para los demás movimientos.

Dicho acoplo de encaje constituido por un *tornillo ordinario*, convenientemente perfilado, y por su *tuerca* podemos ahora examinarlo más de cerca bajo el punto de vista de sus valores variables, que son el *radio* ó el *parámetro* y el *ángulo* correspondiente *de inclinacion*.

Haciendo variar el radio ninguna forma nueva conseguimos, pues la forma típica del tornillo en nada se modifica.

El resultado es muy diferente con el ángulo de inclinacion. Si hacemos menguar gradualmente ese ángulo, el paso para un mismo punto del rádio se hace más pequeño otra vez. Cuando el mismo án-

gulo llega á cero, el paso queda igualmente nulo y el perfil del tornillo describe una *superficie de rotacion*. El tornillo complementario tiene un ángulo de inclinacion de 90°, y por ende el perfil de su seccion coincide con el perfil generador del cuerpo de rotacion; siendo, pues, el resultado un *acoplo de cuerpos de rotacion que se encajan, cuyo perfil axial ó el meridiano no permite ninguna traslacion ó desaloje en la direccion del eje*. La fig. 37 representa como ejemplo un acoplo de esa especie, en que la tuerca convertida en cuerpo de rotacion está figurada en corte; el único movimiento que puede tomar es un movimiento de rotacion.

En cambio, si se hace aumentar el ángulo de inclinacion, el tornillo se alarga más y más, y cuando dicho ángulo llega á los 90°, las aristas de los filetes son paralelas al eje; el tornillo se encuentra entonces trasformado en un *prisma lleno* y la tuerca en un *prisma hueco* que encaja el primero. La superficie helicoidal complementaria cuya inclinacion ha llegado á ser al propio tiempo nula, se halla trasformada en una seccion recta del prisma, suponiendo empero que no deja de tenerse en cuenta la condicion de un perfil susceptible de impedir todo movimiento trasversal, esto es, de un perfil que en el caso actual no sea circular. El resultado que se obtiene definitivamente es por lo tanto: *un acoplo de prismas que se encajan, cuyo perfil normal no permite una rotacion entorno del eje comun* (véase fig. 6). El último movimiento posible de prisma hueco es un deslizamiento á lo largo de las aristas del prisma lleno.

Si se continua haciendo variar el ángulo de inclinacion más allá del límite precedente, no se alcanza ningun resultado nuevo, si bien es verdad que haciendo aumentar ese ángulo más allá de los 90°, se pasa de un tornillo á la derecha á un tornillo á la izquierda, ó vice-versa, pero siempre se tiene un tornillo. Por otra parte, cumple decir que hasta aquí no hemos presentado más que una sola hipótesis en el sentido de la inclinacion.

De donde resulta que el problema de los acoplos de encaje está resuelto ahora de una manera completa. Las tres formas á que hemos llegado, si bien en rigor pueden incluirse las tres en la denominacion general de tornillo, merecen considerarse aparte, y por lo tanto proponemos *tres acoplos de encaje* que para resumirlos rápidamente son:

1.° El tornillo ordinario con su tuerca;

2.° El cuerpo de rotacion con su forma en hueco;

3.° El prisma lleno con su prisma hueco.

Suponiendo además provistos de los tres de perfiles complementarios susceptibles de impedir lo que hemos llamado el movimiento trasversal, tales acoplos permiten realizar tres especies de movimientos desmodrómicos, correspondientes respectivamente á *trayectorias helicoidales, circulares y rectilíneas*.

La mecánica práctica conoce perfectamente esos tres acoplos que utiliza en numerosas circunstancias: el *acoplo tornillo*, para sujecciones y para ciertos movimientos especiales, el acoplo de cuerpos de rotacion ó el acoplo de rotoides, para los gorrones, los soportes y otros órganos análogos, y el acoplo de prismas para el guiaje de los movimientos rectilíneos de todo género. La propiedad que tiene el perfil complementario de impedir los desplazamientos trasversales se le puede comunicar de varias maneras diferentes. En los árboles de movimiento de rotacion, por ejemplo, las partes del perfil complementario están en cierto modo formadas por los cuellos de los gorrones. En el caso en que se ha de establecer un acoplo de cuerpos de rotacion en un árbol completamente cilíndrico, se puede recurrir para completar ese acoplo á la adicion de *aros ó argollas de detencion*, con tornillo de presion, conforme indica la fig. 38. A causa de las facilidades que presenta el torno para preparar superficies cilíndricas, sucede bastante amenudo que se comienza por establecer superficies de ese género y que luego se trasforma en prismas por la adicion de ranuras y lengüetas (fig. 39). La fijacion de un cuerpo en otro cuando las fuerzas obrantes tienden á producir efectos de torsion, puede igualmente efectuarse por una *prismatizacion* de cilindros con auxilio de clavetes longitudinales y trasversales, etc. En suma, el constructor de máquinas se encuentra perfectamente en el caso de poder satisfacer de varias maneras las condiciones que hemos enunciado.

§ 16

De los movimientos en los acoplos de encaje.

Acabamos de ver que existen *tres* acoplos de elementos que llenan la condicion particular de un encaje contínuo de los cuerpos acoplados. La circunstancia de que no existan más que *tres* es muy digna de atencion, y ese resultado de nuestras investigaciones es más asombroso aun con razon de la estrema riqueza de casos particulares que ofrecen las máquinas y que podian naturalmente inducirnos á admitir *á priori* la existencia de un gran número de acoplos de ese género. Por lo demás, esos tres acoplos únicos están caracterizados de una manera muy particular por los movimientos desmodrómicos que originan.

En el *acoplo tornillo* todos los puntos de la tuerca describen hélices, que son *iguales* para todos los puntos situados á la misma distancia del eje. El movimiento de cada punto se compone de una rotacion alrededor de un eje y de una traslacion en sentido de ese eje, que es precisamente el eje mismo del tornillo. La axoide correspondiente al tornillo (véase § 13) es por consiguiente *una línea recta que coincide con el eje del tornillo.* En cuanto al axoide de la tuerca basta para encontrarlo, suponer fija la tuerca y poner en movimiento el tornillo: todos los puntos de éste describen entonces hélices que son *iguales* para todos los puntos equidistantes del eje, *siendo por lo tanto el movimiento exactamente el mismo que se ha encontrado antes:* y así *el axoide de la tuerca es igualmente una recta que coincide con el eje geométrico.* Esa recta se desliza sobre la primera á la vez que gira entorno de la misma describiendo ángulos proporcionales á las longitudes de deslizamiento. De donde resulta que en el *acoplo tornillo* y *tuerca* encontramos un ejemplo del caso más general de la *viracion de los axoides,* pero en la forma más sencilla que se pueda imaginar, ya que *los dos axoides se hallan reducidos á los ejes mismos de viracion.*

Con el *acoplo de rotoides* se llega á un resultado análogo; pues en ese acoplo cada punto del cuerpo hueco móvil describe una circunferencia alrededor de un punto del eje del cuerpo fijo, y las circunferencias son *iguales* para todos los puntos situados á la misma distancia de ese eje. El axoide del cuerpo fijo es por lo tanto una recta que coincide con su eje geométrico; y se obtiene un resultado del mismo género para el axoide del cuerpo hueco, suponiendo que se fija este último y que se pone en movimiento el cuerpo lleno. Por consiguiente, las axoides en el *acoplo de rotoides* son dos ejes coincidentes que giran uno sobre otro, lo cual es sin disputa el caso más sencillo del arrollamiento cilíndrico, puesto que *los dos cilindros de los ejes instantáneos se encuentran reducidos á dos líneas rectas.*

Finalmente, en el *acoplo de prismas* no hay rotacion; la viracion de los ejes instantáneos se reduce á un simple deslizamiento de dichos ejes el uno sobre el otro. Los ejes geométricos de ambos prismas pueden entonces considerarse como las axoides del movimiento. Sin embargo, como en un prisma la espresion de eje geométrico no es susceptible de definirse como en el cuerpo de rotacion ó el tornillo, pueden tomarse tambien para las axoides dos aristas que coinciden ó dos rectas paralelas á tales aristas é igualmente en coincidencia. El acoplo de prismas da, pues, un ejemplo límite del caso más general de la viracion, en el que la rotacion ha desaparecido y *no queda más que el deslizamiento ó la traslacion.*

Podemos todavia ir más léjos para llegar á un resultado de cierta importancia. Como primera condicion de la produccion forzosa de un movimiento determinado por medio de un acoplo de elementos, hemos admitido antes que uno de los elementos debia estar invariablemente unido ó relacionado con el sistema de puntos considerado como fijo en el espacio. No nos es posible ahora desentendernos de esa condicion; y si ponemos entonces en movimiento los dos elementos que suponemos debidamente acoplados, sigue existiendo entre esos dos elementos el movimiento que antes era *absoluto,* ó que como *absoluto lo consideramos;* pero ya no es entonces sino el movimiento relativo de uno de los elementos con respecto al otro. Por lo tanto, llega á ser posible introducir en cadenas cinemáticas los acoplos de elementos que acabamos de encontrar, y en tal caso *el movimiento relativo de los elementos acoplados se trasforma en el de los miembros de la cadena cinemática relacionados ó unidos con los elementos mismos.*

De lo que acabamos de decir se desprende que los tres acoplos de encaje representan los *tres casos límites* de la forma más general del movimiento relativo de que se ha tratado en los §§ 12 y 13; é invirtiendo el órden en que han sido presentados corresponden con efecto á los tres movimientos siguientes: *un deslizamiento puro y sencillo, una simple rotacion alrededor de un eje y por último, un mero deslizamiento combinado con una rotacion simple proporcional al deslizamiento.*

Ahí está uno de los lados característicos de los acoplos de encaje. Otro carácter, importante tambien que hemos notado ya, más sin insistir, estriba en que por la permutacion del elemento fijo con el elemento móvil no se efectua ninguna modificacion en el movimiento absoluto engendrado. Esa propiedad que de una manera general es la consecuencia de la igualdad de las axoides es de una importancia y valor escepcionales para la construccion de las máquinas. La permutacion de uno de los elementos de un acoplo con su elemento enlazado, bajo el punto de vista de la fijacion, constituye lo que proponemos llamar inversion del acoplo; y podemos por lo tanto espresar, como sigue, la propiedad de que acaba de ser cuestion: *en un acoplo de encaje la inversion de los elementos no produce ninguna modificacion para el movimiento engendrado en ese acoplo.*

En la práctica da márgen ese teorema á numerosas aplicaciones. Cuando por ejemplo se emplea un tornillo de cabeza (fig. 40, *a*) en vez de un tornillo ordina-

rio de tuerca (fig. 40, *b*). No se hace en realidad más que una simple inversion del acoplo tornillo y tuerca. En las ruedas de carruaje ordinarias el eje está sujeto al cuerpo mismo del carruaje y la rueda gira sobre ese eje, por mediacion del cubo, cuerpo hueco que le encaja; en los coches de ferro-carril es en cambio el elemento hueco el que está fijo en la armazon del coche, mientras que el eje está invariablemente ligado á la rueda y es móvil con ella. Para las guias de correderas, destinadas á asegurar el movimiento rectilíneo, se recurre segun los casos, á la disposicion que marcan las figuras 41 y 42: en la primera un prisma lleno A se desliza por un marco prismático B (prisma hueco), mientras que en la segunda un prisma hueco A se desliza por una pieza llena prismática B, á la cual encaja.

El conocimiento de esa propiedad de la inversion de los elementos en los acoplos de encaje y la costumbre de usarlos, pueden en muchos casos ser de grandísima utilidad para el constructor de máquinas. Para el empleo de un acoplo de ese género ve inmediatamente la posibilidad ó conveniencia de servirse de uno ú otro de los elementos como cuerpos huecos, ó bien de disponerlos de modo que el contacto de cada uno de ellos con su enlazado tenga efecto en parte al interior y en parte al exterior. La nocion de la propiedad de inversion permite igualmente reducir á su justo valor las diferencias que parecen presentar ciertas construcciones y que á primera vista se ostentan más ó ménos profundas, ó á lo ménos proporciona una espresion sencilla de lo que les pertenece en comun, en vez de la idea confusa que de ello podia tenerse. Con tal motivo importa mencionar aquí la permutacion del cilindro con el émbolo ó piston que ha introducido hace poco tiempo *Condie* en su martillo de vapor y que le distingue del de *Nasmyth*. El constructor del primer aparato no ha hecho en realidad más que la inversion de un acoplo de prismas sin tocar para nada las demás funciones del mecanismo; los canales de conduccion de vapor se han establecido en los tres como en el dispositivo ordinario, si bien ha habido cierta dificultad en esto; tambien habria sido más cómodo disponer el cajon de otra manera, y sin embargo no se ha cambiado. Citaremos como otro ejemplo la corredera de *Humphry-Tennant* (figura 43) ó más exactamente de *Nasmyth*, aproximándola al dispositivo más antiguo y generalizado, que se conoce con el nombre de corredera de *Stephenson* (figura 48). Fácil es ver que ha habido aquí dos inversiones de acoplos. En primer lugar la corredera llena AB en el mecanismo de *Humphry* es una inversion de la corredera hueca A_1B_1, de *Stephenson;* para lo cual el elemento acoplado con esta corredera, es decir, el boton C_1D_1 ha debido préviamente trasformarse en una pieza CD provista de una ranura curva destinada á encajar el arco AB. En segundo lugar *Nasmyth* ha sustituido tambien al gorron E que atraviesa el boton, un cubo cilíndrico FF y convertido en consecuencia el orificio cilíndrico E_1 de *Stephenson* en un segmento cilíndrico lleno EE, que por lo demás ha ensanchado suficientemente para que la corredera AB pueda cruzarla, ejecutando así una segunda inversion. Por otra parte bajo el punto de vista cinemático las piezas CDE y $C_1D_1E_1$ son enteramente idénticas, porque ambas contienen como formas de elementos una corredera (segmento de un cuerpo de rotacion) y un cilindro normal á esta corredera.

Bajo el punto de vista de la construccion las inversiones de ese género ofrecen amenudo grandes ventajas y no pueden ser por lo tanto indiferentes á los que idean proyectos de máquinas. Pero bajo el punto de vista cinemático propiamente dicho no constituyen sino ejemplos de un principio sencillo que como hemos visto, se sienta de una manera general y *á priori* para los acoplos de elementos más sencilos.

§ 17

Apoyos necesarios y suficientes de los elementos.

En el curso de las consideraciones que hemos hecho acerca de los acoplos de encaje, *tornillos*, *rotoides* y *prismas*, hemos estudiado principalmente las acciones recíprocas de las formas llenas y huecas correspondientes, dejando á un lado sin ni siquiera mencionarla, la circunstancia de que las figuras geométricas destinadas á encajarse, generalmente no tienen en los diferentes casos que pueden considerarse, el mismo tamaño y desarrollo. Así por ejemplo, casi siempre en la práctica una tuerca es notablemente ménos larga que el núcleo fileteado, ó el tornillo propiamente dicho, y una corredera prismática más corta que la pieza hueca en que se desliza; en los soportes se deja siempre cierto intérvalo entre los cojinetes, y estos se hallan muy amenudo provistos en su interior de ranuras para el aceite, de modo que en realidad queda suprimida la parte correspondiente de la superficie de encaje. Como en la práctica de las máquinas las partes de superficie conservadas suelen tener todavia una estension muy suficiente, se encuentra ese procedimiento tan natural y lógico, que por regla general ni siquiera se pregunta hasta qué punto puede irse por esta senda. En construcciones sometidas á poderosos esfuerzos las consideraciones relativas al desgaste impiden al constructor cuidadoso reducir

desmesuradamente la estension de las superficies de contacto; pero en tal caso se trata sobre todo de la superficie total de las caras en contacto y no de su reparticion sobre los cuerpos más estensos. Si las cargas son débiles la condicion relativa al desgaste es fácil de satisfacer; más en la reduccion que se hace sufrir á las superficies de contacto, siempre se tiene sumo cuidado de que la parte conservada sea sin cesar suficiente para asegurar á los elementos acoplados las posiciones relativas que se ha propuesto imponerles.

De los ejemplos que pueden citarse en apoyo de nuestro aserto tomemos el que nos proporcionan las válvulas ó sopapos cónicos. En las tres figuras 45, 46 y 47 el vástago de la válvula que debe representarse rodeado por un tubo cilíndrico que lo encaja, presenta formas que se diferencian notablemente del cilindro lleno, á fin de dar paso al agua; la diferencia va acentuándose de la primera figura á la última. De la superficie cilíndrica no se han conservado más que algunas bandas estrechas dispuestas de manera que admitiendo en cada uno de los tres casos una ejecucion bastante exacta, el eje del vástago puesto en movimiento no cesa un solo instante de coincidir con el eje del cilindro hueco. En la primera disposicion (fig. 45) la superficie conservada se compone de tres bandas cilíndricas delgadas; en la segunda, de cuatro partes en espiral; y finalmente en la tercera de cuatro porciones de cilindros paralelas al eje sujetas en la parte inferior por una argolla cilíndrica de escasa altura. Existe evidentemente una ley general que importa observar para la disposicion de esas porciones de superficies cilíndricas, fajas ó puntos, que es necesario conservar á fin de satisfacer la condicion de mantener la posicion mútua de ambos cuerpos, es decir, de darles *puntos de apoyo recíprocos*. Para llegar á un resultado conveniente es *necesario* cierto número de puntos de apoyo, pero importa que tambien sea *suficiente*. Ese mínimum de puntos de apoyo es el que nos proponemos determinar: hasta ahora no se atribuyó á esa determinacion ninguna importancia especial, si bien no cabe duda que merece ser tomada muy seriamente en consideracion; y si en efecto queremos llegar á establecer sobre bases científicas una teoria general de las máquinas, no debemos descuidar ninguna de las propiedades de los elementos, porque no hay ninguna que carezca de importancia y por otra parte la solucion del problema especial de que se trata, conduce como veremos, á consecuencias verdaderamente esenciales.

§ 18

Apoyo contra la traslacion.

Consideremos ante todo una figura plana en su plano, ó si se quiere, una plancha ó raja delgada de un cilindro recto que suponemos privada por cualquier medio de dejar el plano en que descansa. Por punto de apoyo de la figura asi definida, entendemos un punto tal de su contorno, que *no pueda ser desalojada* en la direccion de la normal á ese punto ni fuera de la tangente. Con el nombre de *traslacion* de la figura designaremos aquí un movimiento idéntico de todos los puntos de esa figura.

Punto de apoyo único.—Supongamos primero que la figura considerada A (fig. 48) esté privada de moverse libremente en su plano por efecto de su contacto con otra figura correlativa ó coplana B, y procuremos determinar hasta qué límite obra ese obstáculo. Partiendo de la definicion dada por el punto de apoyo, es evidente que no necesitamos conocer la forma de la figura B; si por el punto de apoyo a hacemos pasar una tangente TT′ á la figura A (fig. 49), y si en esta tangente elevamos en a la normal NN′ la direccion de a hácia N′, será aquella en virtud de la cual el punto de apoyo haga imposible la traslacion de la fig. A.

Luego, si un movimiento de traslacion que se tiene á la mira tiene una componente en este sentido, tal movimiento es imposible. Los desplazamientos dirigidos conforme indican las flechas, al espacio angular TNT′, son los únicos que no tienen tales componentes; ese espacio angular de 180° constituye por lo tanto el *campo de traslacion* ó *desplazamiento* para la figura apoyada en a en tanto que la direccion N′a de la normal á TT′ es la direccion de apoyo de ese punto a.

En el segundo doble cuadrante TN′T′ caen en cambio todas las direcciones de los desplazamientos impedidos por el apoyo a, pudiendo por consecuencia designar este espacio con el nombre de *campo de apoyo* del punto a. Ese campo y el de la traslacion forman juntos cuatro ángulos rectos y se encuentran separados por la tangente TT′ al punto de apoyo. No obstante, como solamente se trata de ángulos y direcciones, podemos trasladar esa línea de separacion y limitarnos á hacerla paralela á TT′. Así pues, como límite entre los dos campos puede utilizarse la línea tt' ó la línea t_1t_1' paralelas á TT′, y de una manera general, toda línea perpendicular á la direccion del apoyo.

Dos puntos de apoyo.—Si la figura tiene dos puntos de apoyo a y b (fig. 50) la facultad de traslacion se en-

cuentra limitada al ángulo que forman las tangentes *a*T y *b*T, puesto que todas las direcciones de movimientos de traslacion que caen fuera de ese ángulo, como por ejemplo 3 y 4, tendrian una componente paralela á una de las dos direcciones de apoyo 1 y 2. Si para cada uno de los dos puntos *a* y *b* se traslada la línea de separacion entre el campo de apoyo y el de desplazamiento, de manera que pase por el punto de interseccion O de las dos normales en *a* y *b*, el ángulo POQ que así obtiene y que está cubierto de líneas entrecruzadas, constituye el *campo de traslacion* en el caso actual, á la vez que el ángulo suplementario POQ forma el *campo de apoyo*. Cnando la direccion de un movimiento de traslacion coincide con este último ángulo, los dos puntos de apoyo concurren á impedir que se verifique.

Por una disminucion del ángulo de las tangentes *a*TB puede llegarse á reducir más y más el campo de la traslacion. Si tales tangentes tienden á volverse paralelas (fig. 51), ese campo se reduce á un ángulo infinitamente pequeño. Más así como antes la traslacion podia tambien efectuarse para las direcciones paralelas á las dos líneas límites, debe ahora efectuarse igualmente para la direccion paralela á la recta única, á la que se reducen aquí esas dos líneas límites, y que es precisamente una paralela á las dos tangentes, pudiendo además producirse tambien esa traslacion en el sentido OP y en el sentido OR, posicion límite de los dos lados del ángulo opuesto por el vértice al anterior, y que á su vez queda tambien infinitamente pequeño. En otros términos, el campo de traslacion se reduce en este caso á una línea paralela á las tangentes de apoyo, en virtud de la cual la traslacion puede realizarse igualmente bien en los dos sentidos OP y OR.

Si las direcciones de apoyo 1 y 2 en vez de estar opuestas como aquí, estuviesen en el mismo sentido, producirian bajo el punto de vista de la traslacion exactamente el mismo efecto que un punto de apoyo único, y es por lo tanto inútil detenernos por más tiempo en este caso particular.

Tres puntos de apoyo.—Si á los dos puntos de apoyo *a* y *b*, cuya accion acabamos de examinar, se añade un tercero *c* (fig. 52), es fácil determinar la influencia de ese punto. Tracemos al efecto la tangente *c*U y la normal al punto *c*, luego perpendicularmente á esta última la línea OR que separa el campo de traslacion del campo de apoyo, de manera que pase por el punto de interseccion O de las dos primeras normales en *a* y *b*. La figura demuestra entonces inmediatamente que se han hecho imposibles las traslaciones en el ángulo QQR, y que por ende el campo de traslacion se halla reducido al ángulo POR. Ahí se ve enseguida el medio de impedir completamente todo movimiento de traslacion con tres puntos de apoyo. En efecto, como quiera que el campo de apoyo de cada punto aisladamente considerado comprende 180°, basta disponer el tercer punto de manera tal que el campo de traslacion que se ha dejado libre por los dos primeros puntos, caiga en el campo de apoyo del último. Este es el caso que representa la fig. 53. Segun la posicion dada al tercer punto *c* su campo de apoyo se encuentra limitado por la línea RO, y el campo de traslacion POQ de los otros dos puntos de apoyo reunidos *a* y *b* se encuentra enteramente situado debajo de esta línea RO. Prácticamente la condicion que ha de llenarse para conseguir ese resultado, puede precisarse de la siguiente manera: *Los tres puntos de apoyo deben estar dispuestos de modo que dos direcciones de apoyo consecutivas formen siempre un ángulo menor de 180°*. En la misma figura el campo de traslacion correspondiente á los dos puntos *a* y *b* está designado tambien por cruzados ó grisados, pero estos grisados son de puntos para indicar que la facultad de traslacion se encuentra realmente suprimida en ese campo por efecto de la existencia del tercer punto de apoyo *c*.

Si para mayor claridad nos representamos aisladamente en las figs. 54 y 55 las tres direcciones de apoyo de las figs. 52 y 53, vemos que en la primera los ángulos formados respectivamente por las direcciones 1 y 2, 2 y 3, son menores de 180°, y el ángulo de las direcciones 3 y 1 mayor de 180, mientras que en la segunda los ángulos determinados por esas mismas direcciones, tomados dos á dos son menores de 180°.

En el caso en que las dos primeras direcciones de apoyo sean paralelas y en sentido opuesto (fig. 56), el tercer punto de apoyo *c* no es bastante para impedir todo movimiento de traslacion, y se hace indispensable introducir un cuarto *d*. Con efecto, en este caso las direcciones O*c* y OR trazadas paralelamente á las tangentes TW y VU, forman entre sí un ángulo de 180°, como las direcciones de apoyo de *a* y *b*. Por consiguiente es necesario intercalar dos puntos de apoyo, el uno entre V y W, el otro entre T y U, para llenar la condicion de que las direcciones de apoyo consecutivas formen ángulos menores de 180°. Las direcciones de apoyo de esos dos nuevos puntos *c* y *d* pueden en rigor comprender entre sí un ángulo de 180°, es decir, que las tangentes á esos puntos pueden ser paralelas.

De ahí resulta que el mínimum de puntos de apoyo necesarios para evitar la traslacion de una figura plana es de *tres*, y que ese número se eleva á *cuatro* cuando

las direcciones de apoyo de dos de ellos forman un ángulo de 180°. En los ejemplos que hemos citado al principio del § 17, y deducidos de la construccion de las válvulas cónicas, la seccion de la cola de la válvula para uno de los casos presenta tres puntos de apoyo, y para los dos restantes, cuatro: todos esos puntos corresponden además á pequeñas porciones de la periferia.

Igualmente podemos recordar con este motivo lás formas ordinarias de las *terrajas*.

Para toda figura plana que se encuentra limitada por un contorno de partes entrantes, es fácil establecer puntos de apoyo contra la traslacion. Es indiferente que la accion de los apoyos provenga del esterior como lo hemos supuesto en las figuras precedentes, ó del interior como en la figura 57, toda vez que las condiciones halladas abarcan igualmente ese caso. Por lo demás es lo mismo que demuestran de otra manera las consideraciones anteriores: la segunda figura (B), que lleva los puntos de apoyo para la primera (A), debe ser una figura hueca si la primera es convexa, y la accion de una figura sobre otra debe en lo concerniente al apoyo, ser recíproca, condicion enteramente análoga á la que antes hemos encontrado en el estudio de los elementos que forman acoplos.

§ 19

Apoyo contra la rotacion.

Como en el párrafo anterior aquí no consideramos más que el caso de una figura plana en su plano, y con el nombre de rotacion comprendemos un movimiento de la figura en virtud del cual un punto invariablemente unido con ella conserva su posicion en el plano, ya sea mientras dura el movimiento, ya tan solo durante un instante muy corto. Distinguiremos á más dos sentidos de rotacion, designando con el nombre de *rotacion derecha* la que se efectua en el sentido del movimiento de las saetillas de un reloj y con el de *rotacion izquierda* la que se verifica en sentido contrario.

Punto de apoyo único.—Si la figura A (fig. 58) no tiene más que un punto de apoyo r, y TT′ y NN′ son respectivamente la tangente y la normal al contorno en el punto a, esa figura puede tomar un movimiento de rotacion á la derecha, alrededor de un punto cualquiera de uno de los cuadrantes ó ángulos N′aT y NaT, pero no puede girar á la izquierda en ambos cuadrantes, porque el movimiento que en tal caso tendiera á tomar el punto a, tendria una componente en la direccion de apoyo. Por igual motivo la rotacion á la izquierda es posible alrededor de un punto cualquiera de los otros dos cuadrantes N′aT′ y T′aN, mientras que la rotacion á la derecha no lo es. Las rotaciones posibles para cada lado de la normal NN′, están indicadas por las letras r (derecha) y l (izquierda). Todo el espacio NTN′T′ es como se ve, *campo de rotacion*, y se encuentra dividido por la normal NN′ en campo de rotacion derecha y campo de rotacion izquierda. De ahí proviene que en la normal misma deben encontrarse polos que permitan las rotaciones en ambos sentidos, ya que la normal en su calidad de línea de separacion pertenece á la vez á los dos campos. Efectivamente, entorno de todos los puntos de aN pueden efectuarse rotaciones en ambos sentidos de una amplitud cualquiera, á la vez que, en cambio, alrededor de los puntos de aN no pueden verificarse más que rotaciones infinitamente pequeñas. Con efecto, apenas ha comenzado una rotacion entorno de uno de estos últimos puntos, cesa la normal de pasar por el punto de rotacion, que por consiguiente entra al instante en uno de los campos de rotacion y precisamente en el que no permite la rotacion comenzada, de lo cual es fácil convencernos con una simple ojeada á la figura.

Dos puntos de apoyo.—Si la figura tiene dos puntos de apoyo a y b (fig. 59), y se determinan separadamente sus campos de rotacion respectivos trazando normales aa' y bb', se ve al momento que el campo de rotacion derecha de a en el ángulo aOb, comprendido entre las normales, se encuentra cubierto por el campo de rotacion izquierda de b, de suerte que en ese ángulo viene á ser imposible la rotacion á la derecha; y lo mismo sucede en el ángulo opuesto con el vértice aOb de la rotacion á la izquierda que permitiria el mismo punto a, si estuviese solo. En los otros dos ángulos opuestos por el vértice bOa' y aOb' se cubren campos de rotacion de sentido igual, que son para uno de los ángulos á la derecha y para el otro á la izquierda; luego, realmente hay posibilidad de rotacion á la derecha ó á la izquierda entorno de los puntos situados en los ángulos que en la figura están indicados por grisados. Segun esto, se ve que de los dos acoplos de ángulos opuestos por el vértice y determinados por las normales, el uno, el que comprende el punto de interseccion T de las tangentes, constituye un *campo de apoyo* contra la rotacion en ambos sentidos, á la vez que el segundo acoplo es *campo de rotacion derecha* por el lado del punto O, é *izquierda* por el otro. Alrededor del vértice O comun á los dos campos puede naturalmente efectuarse la rotacion en ambos sentidos.

Si las normales á los puntos de apoyo son paralelas y están dirigidas en sentido contrario, es decir, si sus

direcciones difieren de 180°, el campo de rotacion, compuesto antes, de dos ángulos opuestos por el vértice, se convierte en una faja ó banda comprendida entre las dos normales, y entorno de cuyos puntos puede efectuarse una rotacion á la derecha (fig. 60) ó una rotacion á la izquierda (fig. 61), segun corresponda el lado de las normales girado hácia dicha banda á uno ú otro de los sentidos de rotacion. Si las normales coinciden, la banda se reduce á una simple línea recta (fig. 62) entorno de todos cuyos puntos es posible la rotacion lo mismo á la derecha que á la izquierda, porque esa línea puede considerarse como el límite de los campos de rotacion de opuestos sentidós. Si las dos normales son paralelas y van dirigidas en igual sentido (fig. 63), la banda comprendida entre esas dos normales es campo de apoyo, en tanto que fuera de esa banda se encuentran dos campos de rotacion, el uno á la derecha y el otro á la izquierda, que en la figura están indicados con grisados.

Tres puntos de apoyo.—Cuando á dos puntos de apoyo *a* y *b*, cuyas tangentes forman un ángulo menor de 180°, se añade un tercero *c*, la influencia de ese mismo sobre la reduccion de la facultad de rotacion depende esencialmente de la posicion que se le ha dado. Si se coloca el punto *c* en el arco comprendido en el ángulo *a*T*b* de los tangentes (fig. 64), la normal á ese punto corta las dos normales existentes en los puntos P y Q y su campo de rotacion izquierda va á cubrir el ángulo de rotacion izquierda *a*O*b'*, de suerte que este ángulo *queda* todavia campo de rotacion izquierda. Por otro lado el campo de rotacion recta de *c* cubre la parte *b*PQ*a'* del ángulo de rotacion de igual sentido *b*O*a'*, y esta parte queda, por lo tanto, campo de rotacion derecha. Así el pequeño triángulo POQ se encuentra que corresponde solo á dos campos de rotacion de sentidos contrarios, de suerte que solamente ahí se encuentra suprimida la posibilidad de rotacion.

Si escogemos el punto *c* de manera que su normal cruce las dos partes del campo de rotacion de los puntos *a* y *b* (fig. 65), el triángulo POQ de las tres normales cae en el campo de apoyo de esos puntos, en vez de caer en su campo de rotacion; las dos partes *c'*P*O*b* y *c'*Q*b'* se encuentran corresponder ambos á rotaciones de contrario sentido, de suerte que las dos porciones grisadas (*c*P*a'* y *c*Q*O**a*) quedan solas como campos de rotacion derecha é izquierda.

La influencia del tercer punto de apoyo *c* queda mucho más marcada cuando se halla de modo que los ángulos de su normal de apoyo con las normales de los otros dos puntos sean inferiores á 180° (fig. 66). Como en este caso la normal de *c* cruza el campo de rotacion derecha de los dos primeros puntos, su campo de rotacion derecha cubre *enteramente* el campo de rotacion izquierda *a*O*b'*, y su campo de rotacion izquierda la parte *a'*PQ*b* de la rotacion derecha *a'*O*b*, de manera que para esas dos partes se encuentra suprimida la posibilidad de rotacion, y en definitiva no queda más que el triángulo POQ, entorno de cuyos puntos puede efectuarse una rotacion derecha. En el caso de que por efecto de la posicion de *c* su normal cruzara el campo de rotacion izquierda *a*O*b'*, el pequeño triángulo restante corresponderia sin disputa á una rotacion izquierda.

Fácil es limitar más aun la posibilidad de rotacion disminuyendo simplemente el triángulo POQ. Ese último se encuentra reducido á su mínimum, es decir, á un punto único, cuando la normal del punto *c pasa por el punto de interseccion de las otras dos normales* (fig. 67). La facultad de rotacion de la figura se encuentra entonces reducida al mínimum pero *existe todavia sin embargo.*

Cuando los dos primeros puntos de apoyo tienen *normales paralelas*, la adicion de un tercer punto da lugar á una série de casos particulares que ofrecen notorio interés.

Si las dos normales en *a* y *b* son paralelas, pero de direcciones opuestas (fig. 68), la normal al tercer punto *c* dispuesto entre los puntos *a* y *b*, divide el campo de rotacion en dos partes, una de las cuales en razon de quedar cubierta por un campo de rotacion del mismo sentido, queda campo de rotacion, mientras que el otro pasa en cambio al estado de campo de apoyo.

En el caso en que por efecto de la coincidencia de las normales de los dos primeros puntos, el campo de rotacion de éstos se encuentra reducido á una línea recta (fig. 69), hemos visto antes que la rotacion podia efectuarse indiferentemente á la derecha ó á la izquierda entorno de todos los puntos de esa línea; la normal de *c* que la corta en P la divide en dos partes P*a* y P*b*, tales que alrededor de los puntos de cada una de ellas no hay más que una sola rotacion posible, á la derecha para la primera, y á la izquierda para la segunda.

Si las normales de los dos primeros puntos de apoyo son á la vez paralelos y van dirigidos en idéntico sentido (fig. 70), el tercer punto *c* puede trasformar en campo de apoyo una parte de cada uno de los dos campos de rotacion que, conforme hemos visto y como indica la figura, se hallan situados fuera de las dos primeras normales. Puede lograrse que desaparezca completamente uno de los campos de rotacion (fig. 71) escogiendo el tercer punto de apoyo tal, que su normal sea paralela á las dos primeras, pero que esté dirigida en sentido opuesto: el

campo de rotacion que queda, se halla reducido á una faja de escasa anchura.

Finalmente, si la normal del tercer punto siendo paralela y de sentido contrario á las dos primeras, queda comprendida entre ellas como en la fig. 72, ambos campos de rotacion primitivos se encuentran cubiertos por otro campo de rotacion de sentido contrario, y quedan así convertidos en campo de apoyo; *la posibilidad de rotacion se encuentra desde el momento completamente suprimida.*

CUATRO Y CINCO PUNTOS DE APOYO.—En el caso en que la rotacion no pueda quedar impedida por tres puntos de apoyo, y así hemos visto que por regla general sucede, puede lograrse el resultado por medio de un cuarto punto de apoyo, cuando éste pueda disponerse de manera que *sus campos de rotacion cubran con rotaciones de opuestos sentidos, los que hayan dejado subsistir los tres primeros puntos de apoyo.*

Si por ejemplo, á los tres puntos de apoyo indicados en la fig. 66 se añade un cuarto *d*, cuya normal no cruce el campo de rotacion OPQ á la vez que lo deja al lado en que las rotaciones que permite son de sentido contrario (fig. 73), se logra impedir completamente toda rotacion de la figura.

Refiriéndonos á la disposicion de la fig. 68 vemos, que se llega tambien á conocer que un cuarto punto de apoyo *d* (fig. 74) escogido de manera que su campo de rotacion izquierda cubra el campo de rotacion derecha dejado por los tres primeros puntos, tiene por consecuencia convertir ese último en campo de apoyo.—La introduccion de un cuarto punto de apoyo da resultados análogos en los dos casos representados por las figuras 70 y 71.

En cambio no es posible en el caso de la fig. 69 llegar de esa manera al objeto propuesto. Con efecto, si se escoje el cuarto punto de apoyo *d* (fig. 75) de suerte que su normal pase fuera del punto P y que los campos de rotacion derecha é izquierda correspondientes se encuentren respective á la izquierda y á la derecha de la figura, las partes Q*b* y P*a* del campo de rotacion primitivo (que aquí se reduce á una recta) están bien cubiertas por campos de *sentido contrario*, y por consiguiente se encuentra en ellos impedida la rotacion, si bien la parte QP queda todavia línea de rotacion izquierda, puesto que está cubierta por un campo del mismo sentido. Para hacer desaparecer esta línea PQ, importa, pues, tomar un punto *d* tal, que su normal pase por el punto P; entonces queda impedida la rotacion entorno de todos los puntos de P*a* y de P*b*, *á escepcion del punto mismo* P. Este punto en su calidad de punto comun á las líneas separatorias de todos los campos de rotacion ó de punto de encuentro de todas las normales, queda todavia centro de rotacion.

Para impedir por completo toda rotacion es necesario añadir á los puntos de apoyo de la fig. 75 un quinto punto *e* (fig. 76), que cubra con un campo de sentido contrario el campo de rotacion PQ. En el último caso examinado, en el cual hemos supuesto la posicion del cuarto punto *d* de modo que P coincidiese con Q, seria menester añadir otros dos puntos de apoyo, el uno contra la rotacion derecha y el otro contra la rotacion izquierda.

Lo mismo sucede con el caso de la fig. 67 en el que las normales de los tres puntos de apoyo se encuentran en un solo punto, esto es, se necesita añadir otros dos puntos de apoyo para que el uno impida la rotacion derecha y el otro la rotacion izquierda, y adoptar por lo tanto una disposicion análoga á la de fig. 76. Este caso y el anterior pueden comprenderse á la vez en el siguiente teorema: Cuando las normales de tres puntos de apoyo de una figura se cortan en un solo punto, *son menester á lo ménos cinco puntos de apoyo para impedir toda rotacion de la figura.*

El problema que tiene por objeto impedir que gire una figura plana dándole el número de apoyos conveniente, presenta, como se vé, más dificultades que el que simplemente consiste en impedir que tome un movimiento de traslacion. Por regla general *cuatro puntos de apoyo á lo ménos* son necesarios: *en un caso escepcional* (fig. 76), *tres* son suficientes; pero con frecuencia no se logra el resultado sino con *cinco*. Además, la forma de la figura misma no puede escogerse como se quiera entre límites tan vastos como en los problemas relativos á la traslacion. El perfil de esa figura debe presentar en las direcciones de las tangentes, variaciones bastantes para permitir disponer debidamente á derecha é izquierda las normales de los puntos de apoyo. Por ende, no es posible llegar por medio de los apoyos á impedir que el círculo gire, lo cual por lo demás es evidente *á priori* como un axioma. En la construccion de las máquinas, en las que se utiliza con tanta frecuencia en razon de las facilidades especiales de ejecucion que presenta, es necesario, siempre y cuando se emplea como seccion de un cuerpo que no debe girar, modificarle para lograr que tenga una forma susceptible de ser apoyada contra la rotacion. Ya una vez (§ 15), al detenernos en consideraciones de otro género, hemos tropezado con esa misma cuestion que ahora podemos tratar basándonos en las investigaciones anteriores.

Un ejemplo muy comun nos proporciona el sistema de fijacion de un cubo de rueda en un árbol cilíndrico

(fig. 77). Si se conservase completamente la forma circular, todas las normales se cruzarian en un mismo punto; y de consiguiente es necesario practicar en ese círculo una muesca ó escote de forma rectangular, en cuyos costados se apoya en *e* y *f* una pieza saliente, el clavete ó clavillo que debe estar metido tambien en el cubo. Una de las normales de apoyo *ee'*, dirigida á la izquierda, cubre con su campo de rotacion derecha el centro O, mientras que la segunda *ff'*, dirigida á la derecha, le cubre con su campo de rotacion izquierda: así se realiza la condicion que hemos conocido necesaria en el caso de la fig. 76. A veces se llega tambien al mismo resultado aplanando simplemente el círculo en una seccion (fig. 78). En tal caso de todas las presiones que el clavillo ejerce las hay que se efectuan en la cercania de los bordes del aplanamiento en *e* y *f;* las dos normales *ee'* y *ff'*, que pasan á derecha é izquierda del punto O, lo cubren la una con su campo de rotacion derecha y el otro con su campo de rotacion izquierda. Los brazos de palanca de las fuerzas de apoyo, dirigidas segun las normales, son aquí naturalmente mucho más cortos que en la disposicion anterior; y en eso estriba, como es fácil comprender, una de las razones por qué en la práctica no se recurre á la segunda forma sino en los casos en que las fuerzas que tienden á producir la rotacion son bastante escasas.

En las grandes y pesadas ruedas hidráulicas se encuentra á veces el cubo fijo al árbol con tres clavillos y más amenudo con cuatro; en cuyo caso se deja un hueco bastante considerable entre el cilindro hueco y el cilindro lleno, cuyas superficies no deben considerarse ya por consiguiente como superficies de apoyo (figs. 79 y 80). A decir verdad, no pueden esos sistemas de fijacion oponer más que una resistencia bastante débil á las fuerzas que tienden á producir la rotacion, toda vez que las normales de apoyo de las superficies de los clavillos pasan á una distancia muy corta del punto de interseccion O de las normales trazadas desde el punto medio de los clavetes. Por ello debe considerarse ese modo de claveteaje más bien como medio de centraje, es decir, como *modo de apoyo* contra *el desplazamiento trasversal* del eje del cubo ó cilindro hueco. Fácil es de ver que la disposicion es muy conveniente para el efecto (véase la fig. 53 y 56). Pero en los casos en que deben trasmitirse por el cubo grandes esfuerzos de torsion, como por ejemplo, en los engranages de los laminadores, se aplica con preferencia el modo de calar indicado por la fig. 81. Es á la par un modo de apoyo contra la rotacion y la traslacion.

Rigurosamente hablando bastaria emplear los cinco apoyos indicados en la fig. 82, tres de los cuales corresponderian al caso de la fig. 72, mientras que los otros dos completarian el apoyo contra la traslacion (véase figura 56). Más la disposicion de la fig. 81 es infinitamente mejor ya que reporta la resistencia á la torsion en cuatro apoyos y no en dos solos y que dobla la longitud de los brazos de palanca de esa resistencia: la fuerza de torsion á que se encuentra espuesto cada clavete no es, pues, más que la cuarta parte de lo que seria en la otra disposicion, amen de que la accion sobre el cubo en vez de ejercerse en el medio de los lados de la seccion, se ejerce en la proximidad de los ángulos, lo cual es mucho más ventajoso.

De una manera general la mayor dificultad que presenta el apoyo á la rotacion relativamente al apoyo contra la traslacion, se pone en evidencia por la comparacion de los dos primeros teoremas, y allí mismo encuentra su aplicacion. En efecto, un punto de apoyo contra la traslacion tiene un campo de accion que se estiende á 180°, á la vez que un punto de apoyo contra la rotacion no puede en realidad impedir la rotacion y no hace mucho más que *dividir* el campo de rotacion en dos partes, la una de rotacion á la derecha, la otra de rotacion á la izquierda.

§ 20

Apoyos simultáneos contra la traslacion y la rotacion.

Si queremos ahora aplicar los resultados que acabamos de encontrar al caso en que se ha de considerar al propio tiempo la traslacion y la rotacion, debemos comenzar por formular los teoremas siguientes que de nuestras investigaciones se desprenden:

1.° Con dos puntos de apoyo solamente no puede impedirse la traslacion ni la rotacion de una figura plana en su plano.

2.° Con tres puntos de apoyo debidamente escojidos se puede:

a Impedir la traslacion, pero no la rotacion (fig. 53, 66 y 67):

b O impedir la rotacion, más no la traslacion (figura 72).

3.° Con cuatro puntos de apoyo debidamente dispuestos y para ciertos perfiles con cinco solamente, se puede impedir á la vez la traslacion y la rotacion.

Pasemos á aplicar esos teoremas á los acoplos de encaje.

Apoyos en el acoplo de prismas.—Supongamos que se quiera determinar el mínimum del número de los puntos que conviene dar á un prisma lleno para que no pueda tomar con respecto á sus apoyos ningun mo-

vimiento fuera de los que le permitiria el prisma hueco en el acoplo de encaje. Si consideramos dos secciones rectas hechas en ese prisma por dos plomos perpendiculares al eje, podemos proteger cada una de ellas contra la traslacion y la rotacion por medio de cuatro puntos de apoyo (fig. 83), en cuyas condiciones queda impedida toda rotacion, y la traslacion del prisma no puede efectuarse más que en la direccion del eje: lo cual constituye precisamente la propiedad característica del acoplo de prismas. Así tenemos ocho puntos de apoyo, *a, b, c, d, f, g, h, i,* repartidos entre las secciones como lo indica la fig. 83. De esos ocho puntos pueden suprimirse dos imaginando una tercera seccion recta entre las dos primeras (fig. 84) y suponiendo aplicados á esa seccion dos puntos obtenidos por la reduccion de dos acoplos de puntos existentes, *d* y *h*, *e* y *g* por ejemplo. Así obtenemos definitivamente *seis puntos de apoyo a, b, c, d, e, f,* (fig. 84) que impiden igualmente toda rotacion del prisma y no permiten más que una traslacion en el sentido del eje.

Apoyos en el acoplo de rotoides.—Escojamos como cuerpo de rotacion un cilindro lleno de bases planas (fig. 85) é imaginemos en este cilindro dos secciones rectas. Para impedir toda traslacion trasversal debemos dar á cada una de estas secciones tres puntos de apoyo, *a, b, c* y *d, e, f,* mientras que para evitar una traslacion longitudinal bastarán dos puntos de apoyo *g* y *h* en las dos bases. Aquí volvemos á tener los *ocho puntos de apoyo*. Más si trasladamos los seis primeros puntos á los contornos de las bases (fig. 86) y damos una inclinacion conveniente á las superficies de apoyo, estos seis puntos pueden impedir al propio tiempo la traslacion longitudinal y deben por lo tanto, considerarse como suficientes para constituir un sistema de apoyos completo.

Apoyos en el acoplo tornillo.—Para realizar el mínimum de puntos de apoyo en un filete de tornillo basta afianzar contra la traslacion y la rotacion dos secciones longitudinales hechas por el eje, perpendicularmente una á otra: el filete se encuentra entonces en las mismas condiciones que si estuviese en su tuerca. Segun las indicaciones suministradas por la fig. 74, el número de puntos de apoyo para cada seccion, debe ser igual á cuatro (fig. 87), de modo que esta vez tambien son necesarios *ocho puntos de apoyo*. Sin embargo, dos acoplos de dichos puntos pueden reducirse á un solo punto, como en el caso de la fig. 84, y por ende se puede llegar como mínimum hasta *seis puntos de apoyo*.

En suma, para los tres acoplos de encaje bastan ocho puntos de apoyo y aun seis solamente, aprovechando los puntos dobles, para mantener uno de esos elementos en la posicion que con el acoplo completo corresponde á un número infinito de puntos de apoyo.

§ 21

Acoplos superiores de elementos.

De las precedentes consideraciones sobre los apoyos de las figuras planas resulta que se pueden formar acoplos en los cuales están dispuestas las figuras de modo que no puedan tomar ningun movimiento de traslacion, uno con respecto al otro, sin quedar para ello privadas de la facultad de rotacion; y esto cabalmente es lo que sucede cuando las normales á los puntos de apoyo (cuyo número entonces debe ser de tres á lo ménos) se cortan en un mismo punto, como lo indica la fig. 88: en este caso no existe facultad de rotacion más que entorno de un solo punto. Esa facultad de rotacion constituye una movilidad de índole perfectamente determinada y exclusiva de todos los otros movimientos, esto es, cabalmente esa propiedad que consideramos fundamental para dos cuerpos susceptibles de formar con su reunion un acoplo de elementos. Si ahora semejante acoplo de figuras es de tal naturaleza que despues de efectuarse una rotacion infinitamente pequeña entorno del polo O, tiene todavia apoyo en tres puntos cuyas normales se cruzan todas en otro punto, y si esa propiedad sigue verificándose para todas las posiciones sucesivas de las dos figuras, es evidente que podrán servir para formar los elementos de un acoplo. Para ello bastará, por ejemplo, considerar esas figuras como las secciones rectas de dos cilindros provistos de bordes que impidan desplazamientos ó traslaciones longitudinales.

Por lo que toca á las figuras que sirven de base á los dos cilindros, es cuestion sobre la cual debemos llamar la atencion muy especialmente. Suponiendo que para un sistema completo de apoyos contra la traslacion las normales á los puntos de apoyo de dichas bases tengan un punto de interseccion comun, que entorno de ese punto se efectue una rotacion infinitamente pequeña y que en virtud de ese conocimiento de rotacion y todos aquellos que se produzcan sucesivamente, quede sin cesar impedida la traslacion, será fácil ver que los puntos de apoyo deben forzosamente estar dispuestos de manera que las normales correspondientes pasen por un solo y mismo punto en todas las posiciones de la figura. En efecto, como el sistema de apoyos, por hipótesis, no permitia ninguna traslacion, el solo movimiento posible ha sido un movimiento de rotacion alrededor de un punto único, el cual no podia ser otro que el punto de encuentro de todas las normales. Si de otro

modo sucediese, si pudiese producirse, por ejemplo, una rotacion entorno de un punto diferente, ese punto estaria forzosamente situado fuera de la una al ménos de las normales de apoyo, y por lo tanto la rotacion habria podido efectuar la separacion de las dos figuras en el punto de apoyo correspondiente, lo cual está en contradiccion con el sostenimiento del sistema de apoyos que hemos supuesto. De donde dimana que podemos sentar el siguiente teorema que es de mucha importancia:

Cuando se puede probar que dos figuras en todas sus posiciones sucesivas constituyen constantemente una para otra un sistema completo de apoyos contra la traslacion, queda por lo mismo demostrado que sus normales de apoyo se encuentran todas siempre en un mismo punto de apoyo.

Las dos séries de puntos de encuentro sucesivas de las normales ó de los polos en las dos figuras, constituyen las *trayectorias polares* de esas figuras, y los cilindros que pasan por esas curvas son las *axoides* de dos cuerpos acoplados.

Los acoplos de elementos que de esa manera se producen, no gozan la propiedad del encaje recíproco de los elementos que caracterizaba los tres acoplos encontrados antes, pero tienen la facultad del envolvimiento recíproco que es más general y de órden más elevado (§ 3). Por ese motivo nos parece conveniente designarlos con el nombre de acoplos de *elementos superiores* por oposicion al de *inferiores*, que podemos dar á los acoplos de encaje en razon de sus propiedades más restringidas. Para llegar á más perfecto conocimiento de esos acoplos superiores, es necesario abordar el exámen de algunos ejemplos.

§ 22

Figura biconvexa de dos arcos de círculo en el triángulo.

Si de los estremos P y Q de una línea recta PQ se trazan dos arcos de círculo con la longitud de esa recta como radio, se determina en el plano una figura biconvexa PRQS (fig. 89) formada de dos arcos de círculo iguales. Esta figura está en contacto por los puntos Q, R y S con un triángulo equilátero ABC de altura 2PQ, cuando el punto Q está en medio de uno de los lados del triángulo. En efecto, AB es perpendicular á QR puesto que el ángulo PRA=BAQ=30°; que el ángulo QRP=60°, y que además Q, R, A y S pertenecen al círculo descrito del punto P como centro, con PQ por radio. Las normales de apoyo en S, R y Q se cortan todas en el punto Q y forman entre sí ángulos de 120°. De ahí resulta que el sistema de apoyos impide todo movimiento de traslacion, á la vez que deja subsistir la posibilidad de rotacion entorno de un punto (véase la figura 67). La misma propiedad subsiste como vamos á verlo, para cualquier otra posicion de la figura biconvexa en el triángulo, por ejemplo, la que está indicada en punteado.

Supongamos ante todo que se mantiene la figura biconvexa en contacto con dos lados solamente AB y BC del triángulo, lo cual siempre es posible; entonces en la rotacion á la izquierda el punto P se mueve sobre una recta TU, paralela á BC, puesto que ese punto P como centro del arco RQS, debe quedar á distancia constante de todos los puntos de ese arco; así tambien el punto Q se mueve sobre una recta QT paralela á AB. Esas dos rectas se cortan en T formando un ángulo de 60°, es decir, un ángulo igual al que forman en S las dos líneas PS y QS. La trayectoria, aun desconocida, del punto S, con respecto al triángulo ABC, es por consiguiente, de una manera general, la del vértice de un triángulo indeterminado PSQ, que por los estremos P y Q de su base, se desliza por los lados de un ángulo igual al ángulo del vértice del triángulo.

Sea PQS (fig. 90) ese triángulo, UTQ=a, su ángulo del vértice por cuyos lados se deslizan los puntos P y Q, B y y, sus ángulos en la base. Los puntos S y T deben encontrarse en una circunferencia que pase por los puntos P y Q en la que a es un ángulo inscrito correspondiente á la cuerda PQ. Si trazamos la línea ST, el ángulo QTS es igual al ángulo B por tener igual valor, y por lo tanto es constante. Si ahora prolongamos la línea ST más allá del punto T, el ángulo ATP es igual á $180° - (a + B)$, esto es, al segundo ángulo de la base y. Por consiguiente, *el punto* S *se mueve en una recta que forma con los dos lados del ángulo dado dos ángulos precisamente iguales á los dos ángulos de la base del triángulo dado.* Esa recta en la figura 89 es el tercer lado AC del triángulo ABC, que en el punto T forma con UT y QT dos ángulos iguales de 60° cada uno, es decir, iguales al ángulo de la base del triángulo equilátero PQS, resultando de ahí que los lados del triángulo ABC se hallan siempre en contacto los tres con la figura biconvexa.

El punto S de dicha figura se mueve constantemente sobre el lado CA del triángulo, á la vez que los otros dos lados permanecen tangentes á los dos

arcos; y así el ángulo de dos normales de apoyo consecutivas es siempre de 120°, porque esas normales son perpendiculares á los lados del triángulo. De lo dicho se deduce que las condiciones necesarias para impedir constantemente la traslacion, se encuentran satisfechas en el acoplo de figuras que acabamos de examinar, y que por lo tanto, segun lo espuesto en el § 21, todas las normales de apoyo deben encontrarse siempre en un punto, y por lo mismo tales figuras pueden formar un acoplo de elementos superior. Fáltanos ahora proceder á la investigacion de las trayectorias polares.

a *Trayectoria polar correspondiente al triángulo.* —Para dar mayor generalidad á nuestra investigacion, notemos que en el problema anterior puede la longitud PQ considerarse como una figura plana (véase § 5), que con relacion á la figura representada por el ángulo UTQ, se mueve exactamente como la figura biconvexa con relacion al triángulo. Conforme hemos indicado en el § 8, es necesario conocer las trayectorias de dos puntos á lo ménos, de la figura móvil. Y aquí las trayectorias rectilíneas TP y TQ de los puntos P y Q son conocidas. Las normales á esas trayectorias (fig. 91) se cortan en un punto O, que debe hallarse en la circunferencia antes indicada en la figura 90, ya que esas normales por ser perpendiculares á los lados del ángulo *a*, deben formar un ángulo precisamente igual á *a*. Como además los ángulos TPO y TQO son rectos, resulta que la línea OT es un diámetro del círculo PTSQ. Este círculo mismo tiene un grandor constante, puesto que la longitud PQ y el ángulo *a* no varian: por consiguiente, la distancia TO del polo O al punto T es igualmente invariable, de suerte que este polo debe hallarse siempre en una circunferencia descrita desde el punto T como centro con un radio igual á TO. Para obtener la longitud de ese radio movamos la longitud PQ hasta que llegue á ser perpendicular á uno de los lados del ángulo, condicion que se encuentra realizada, por ejemplo, para la posicion P'Q'. Una de las normales coincide entonces con P'Q', mientras que el otro está reducido á cero, y se ve inmediatamente que:

$$TQ' = TO = \frac{P'Q'}{\text{seno } a} = \frac{PQ}{\text{seno } a}$$

ó suponiendo TO=R y PQ=a,

$$R = \frac{a}{\text{seno } a}$$

b *Trayectoria polar correspondiente á la figura biconvexa.*—Para hallar la segunda trayectoria polar debemos suponer la longitud PQ manteniéndose fija y el ángulo PTQ puesto en movimiento; en cuyo caso los puntos de este último que pasan por P y Q, se mueven en las direcciones mismas de los lados TP y TQ del ángulo.

Las normales se cortan, como antes, en el punto O, que es ahora el lugar geométrico de los vértices de un triángulo cuya base es PQ y el ángulo del vértice tiene 180°—*a:* ese lugar es la circunferencia QOPTS, de diámetro TO que pasa por los vértices del triángulo dado PQS. Designando por *r* el radio de ese círculo tenemos:

$$r = \frac{TO}{2} = \frac{a}{\text{seno } a} = \frac{R}{2}$$

Las trayectorias polares del acoplo de figuras elegido como ejemplo son, pues, *dos circunferencias, cuyos diámetros están en la proporcion de* 1 *á* 2 *y de las cuales la menor gira sobre la mayor.*

Las trayectorias relativas, por lo tanto, son cicloides: aquí en el arrollo del círculo *r* en el interior del círculo R, las hipocicloides se encuentran reducidas á *elipses* (fig. 92), entre las cuales aquellas que están descritas por los puntos de la periferia de *r* tienen su eje mayor igual á R y nulo su eje menor, quedando por tanto confundidas con los diámetros de R. En el arrollo de R sobre *r* las pericicloides toman la forma especial de pericardioides como lo indica la fig. 93, en la que lo propio que en la fig. 92 se han representado las tres formas que afecta ese género de curvas, segun que el punto describidor esté en la periferia, en el esterior ó en el interior. El primero de esos dos problemas sobre las cicloides fué tratado por vez primera, que sepamos, pero de una manera imcompleta por el matemático *Cardan* (en el siglo XVI) (§ 14). Como tendremos que volver más adelante á mencionar con frecuencia ese acoplo de círculos tan notable, lo designaremos por abreviacion con el nombre de *círculos de Cardan.*— En el problema precedente esos círculos no se encuentran utilizados sino en parte, si bien eso depende de no haberse aplicado con toda la estension de que es susceptible el problema del triángulo y de la figura biconvexa. Penetrando más en la cuestion se llega á los resultados siguientes:

Mientras que el punto P (fig. 94) marcha hácia U, T es el vértice del ángulo sobre cuyos lados se desliza la línea PQ; el radio $R = \frac{PQ}{\text{seno } a} = \frac{PQ}{\text{seno } 60^\circ}$ esta longitud TQ cuya mitad VQ es el radio *r*, de modo que en el caso actual el arco QU, que debe tomarse en cuenta, pertenece al mayor de los círculos de Cardan, en tanto

que el arco QWP es un arco del mínimo. Como aquí el ángulo UTQ es de 60° y el ángulo PVQ de 120°, los dos arcos QU y QWP se encuentran iguales. Supongamos ahora que á partir de la posición U, P se desplaza por la cuerda UQ hasta W, mientras que Q recorre la semi-cuerda VT: en este caso Q es el vértice del ángulo por cuyos lados se desliza la línea PQ, Q_1 es el radio R y WQ el radio *r;* los arcos correspondientes UT y QVP, son de igual longitud como en el caso anterior. A partir de W, P recorre la semi-cuerda WQ, á la vez que Q marcha de T hácia P; entonces U es el vértice del ángulo, y desde ese punto debe describirse con el radio R el arco QT, por el cual gira el arco QWP.

Despues de esos diversos movimientos sucesivos P ocupa la posicion primitiva de Q y vice-versa, de suerte que la figura biconvexa RPSQ se encuentra haber girado de 180°. En una rotacion ulterior de igual amplitud el triángulo curvilíneo es recorrido por el polo por segunda vez, en tanto que el doble arco PVQW lo es una vez y media; por consiguiente despues de volver á la posicion primitiva el polo ha recorrido definitivamente 2×3 lados del triángulo curvilíneo QUT y 3×2 lados del doble arco PVQW, de manera que ha habido constantemente arrollo de las dos trayectorias polares una sobre otra (§ 15). Esas trayectorias están por lo demás completamente determinadas y ahora son: (*a*) para el triángulo equilátero, un *triángulo curvilíneo* (de arcos de círculo) tambien *equilátero*, que está inscrito en el primero; (*b*) para la figura biconvexa, una *figura geométricamente semejante* que tiene por eje mayor el eje menor de la figura dada y que gira sobre la trayectoria polar del ángulo.

§ 23

Trayectorias de los puntos de la figura biconvexa con relacion al triángulo equilátero.

Conocidas las trayectorias polares de las dos figuras nos es ahora posible determinar por completo las curvas que describen los diferentes puntos de la figura biconvexa precedente con relacion al triángulo, manteniendo ese triángulo fijo y haciendo mover la otra figura. Como las dos trayectorias polares giran la una sobre la otra, todas las trayectorias de los puntos de nuestros elementos son naturalmente curvas de arrollamiento ó de rotacion, ó *rodajas*, segun la espresion admitida. Hemos obtenido ya las trayectorias de dos puntos importantes P y Q de la figura biconvexa. Como ambos pertenecen á un pequeño círculo de Cardan esos puntos describen fragmentos de hipocicloides que se confunden con dos porciones de diámetros de círculo mayor correspondiente. Esas diferentes líneas, conforme hemos observado, están dispuestas unas á continuacion de otras y constituyen los lados de dos triángulos equiláteros que se encuentran superpuestos uno á otro (fig. 95. Todos los demás puntos de la figura biconvexa describen necesariamente arcos de hipocicloides acortadas ó prolongadas, que aquí se reducen, como hemos visto, á elipses. Generalmente se comprende bajo la designacion comun de *trocoides* las cicloides prolongadas ó acortadas de toda especie. Por de pronto podemos decir á más que las trayectorias de los demás puntos de la figura biconvexa son *hipotrocoides* que tienen por figura fundamental el triángulo equilátero UTQ. Así como ese triángulo se compone, conforme hemos visto, de seis estremos de hipocicloides, cada una de esas trayectorias está constituida por seis arcos de hipotrocoides.

La figura determinada por tales arcos efecta formas muy diferentes, segun la posicion del punto describidor. A más del triángulo UTQ, la fig. 95 representa tres más, cuyos puntos describidores situados en la prolongacion del eje menor PQ de la figura biconvexa ó del eje mayor de la trayectoria polar Pm_1Qm_4, están indicados partiendo del punto más distante por las cifras 1, 2, 3; el punto 4 coincide con el mismo punto P. Esas figuras que de una manera general están compuestas de tres lados curvilíneos, se aproximan más y más al triangulo equilátero, á medida que el punto describidor va acercándose al punto 4.

En la fig. 96 están representadas en mayor escala las trayectorias de otros tres puntos 5, 6 y 7, el último de los cuales es el centro M del disco. La trayectoria de 5 presenta tres nodos; para el punto 6 que está escogido de manera que en la posicion indicada en la figura 95 coincida con el centro de gravedad M_1 del triángulo ABC, los tres nodos van á cruzarse en un solo punto que es precisamente el punto 6.

Si el punto describidor está situado entre 6 y 7, los nodos no están completos y las porciones de curvas descritas forman un pequeño triángulo. Por último, el punto 7 describe aun los tres nodos, pero esos nodos son tambien incompletos y se reducen á una curva única que es la más pequeña de las curvas descritas por los puntos de la figura biconvexa. Esa última curva es doble ó de dos hojas; en un período entero se encuentra con efecto recorrida dos veces por el punto 7, como es fácil comprobar observando que en los nodos 6 la tangente para ese período gira dos veces cuatro ángulos rectos.

Si se traslada el punto describidor más allá del pun-

to 7, más sin dejar el eje PQ, las curvas que acabamos de encontrar se reproducen en sentido inverso.

Una segunda série de curvas que debe señalarse es la figura que nos suministran los puntos del eje mayor RS de la biconvexa. Algunas de esas curvas están representadas en las figs. 97 y 98. El punto 1 describe á más un triángulo elíptico; el punto 2 que coincide con el estremo S del eje, da una figura triangular en parte rectilínea y en parte elíptica; el punto 3 da un triángulo elíptico de lados cóncavos, que se encuentra reproducido en mayor escala en la fig. 98. El punto 4 coincide con el estremo m_1 del eje más corto m_1m_2 de la pequeña trayectoria polar. Describe la notable curva representada por el número 4 en la figura 98, curva que se compone de tres arcos de círculo, que describe m_2 considerado como centro de arco Pm_1Q, y de tres apéndices rectilíneos (descritos por m_2 considerado como orígen del arco Pm_2Q),que son recorridos dos veces.

El punto 5 describe una curva con tres nodos que se cruzan en el punto M_1; el punto 6, otra curva tambien de tres nodos, cuyas ramas interiores determinan un pequeño triángulo; y en fin, el punto M da la curva ya conocida y representada en la figura 96 bajo el número 7. Una particularidad digna de notarse es que los triángulos trocoidales descritos por los puntos del *eje mayor* están inclinados 60° con relacion á las trayectorias de los puntos del *eje menor*.

Entre esas dos posiciones principales se hallan comprendidas las de las trayectorias que en general son triangulares elípticas y tienen los rayos vectores intermedios entre el eje mayor y menor.

Cuatro de esas trayectorias están representadas en punteado en las figs. 97 y 98 con los números 1′, 2′, 1″ y 2′. Tales figuras, como lo indica sobre todo claramente el número 2, no son ya simétricas con relacion á los tres ejes, como lo eran las curvas examinadas antemente (§ 16).

§ 24

Trayectorias de los puntos del triángulo con relacion á la figura biconvexa.

Para determinar las trayectorias de los puntos del triángulo con relacion á la figura biconvexa debemos mantener fija esta última figura poniendo en movimiento la primera. Entonces el triángulo curvilíneo UTQ (fig. 99) rueda ó gira entorno de la figura biconvexa Pm_1 Qm_2. Refiriéndonos á las indicaciones de la figura 93 se ve que las figuras descritas se componen de *pericardioides*. Todos los puntos describidores situados fuera de los arcos de círculo que componen el triángulo UTQ dan tambien *trocoides*, ó por mejor decir, *peritrocoides*.

Lo que ante todo salta á la vista cuando se examinan esas figuras es la notable diferencia que ofrecen en su forma general con las que hemos considerado anteriormente. Por ese motivo el ejemplo es muy á propósito para disipar la preocupacion harto generalizada hasta hoy entre los mecánicos de que la inversion de un acoplo daba á lo más por resultado producir un cambio de sentido de rotacion, sin introducir ninguna otra modificacion en las trayectorias de los diferentes puntos (§ 17). Ahí está esencialmente el motivo que me indujo á construir ese acoplo de elementos característicos, al cual, sin embargo, no tengo la pretension de atribuir una importancia práctica especial.

Las figs. 99 y 100 representan las trayectorias de los puntos del eje MA del triángulo. El punto 1 describe un óvalo aplanado, que como las demás figuras se encuentra constituido por seis arcos de peritrocoides. El punto 2 que coincide con el vértice *a* del triángulo, describe un óvalo de partes entrantes, y lo mismo sucede con el punto 3. El punto 4, con dos arcos de cardioides, toca en m_1 y m_2 la trayectoria polar fija.

En la figura 100 la trayectoria número 4 está reproducida en mayor escala. Las trayectorias 5 y 6 presentan dos nodos (ó nudos), que en el número 7 están sustituidos por una sola curva oval descrita por el centro de gravedad M_1 del triángulo ABC. Cumple observar que la trayectoria 7 es de tres hojas, porque en realidad está recorrida tres veces por el punto M_1 para cada período, y así es fácil conocerlo refiriéndonos á las trayectorias de nodos de los puntos 5 y 6; donde para el mismo período, la direccion de la tangente gira tres veces cuatro ángulos rectos. La trayectoria 1 es tambien muy digna de llamar la atencion, porque los tres puntos homólogos 1, 1′, 1″, del triángulo situados en ella, la tocan siempre de manera que forman un sistema de apoyos completo correspondiente al de la figura 55.

Las figuras 101 y 102 representan otras trayectorias que se consiguen cuando se toma el punto describidor más allá del punto M_1, yendo hácia Q, ó lo que daria el mismo resultado, alejándose de M_1 hácia T ó U. Se ve que en tal caso el eje principal de cada figura ha girado de 90° y que además los nodos se forman en puntos cuyos radios están inclinados de 90° sobre los de los nodos que se encuentran en la fig. 100. La porcion de curva TS (fig. 101) es característica lo mismo que sus repeticiones simétricas: esa porcion de curva

es un árculo de círculo descrito desde el centro T del arco UQ.

Si se toman los puntos describidores en los radios vectores que caen entre AM, y TM, se obtienen trayectorias que no son como las precedentes simétricas con relacion á dos ejes. Hemos creido que no debíamos dar aquí ejemplos de ese género de curvas, porque las trayectorias 1', 2',... de las figuras 97 y 98 permiten por analogia formarse una idea suficiente de ellas.

Acabamos de encontrar en virtud del procedimiento anterior una riqueza de formas estraordinaria en los movimientos de los puntos del acoplo de elementos elegido como ejemplo; pero podemos llegar á formarnos de ella una idea más clara todavia recurriendo al modo de consideraciones adoptado para el estudio de las cicloides. Los dos casos que se cónsiguen fijando sucesivamente una de las figuras, dan cada uno una clase de trayectorias, y cada clase puede dividirse en grupos segun la posicion del rayo vector que el punto describidor lleva. De esas curvas conviene señalar como particularmente características las de los puntos situados en las periferias de las trayectorias polares, como por ejemplo, el triángulo UTQ de la fig. 95, la curva de tres puntas del punto m_3 en la fig. 98, etc. Esas trayectorias de puntos constituyen lo que se puede llamar las *formas ordinarias* de las rodajas de que aquí se trata, por analogia, con lo que se hace para las cicloides. Por idéntica razon de analogia las curvas descritas por los puntos situados al esterior y al interior de las trayectorias polares rodantes se designarán respectivamente con los nombres de trayectorias *prolongadas* y *acortadas*. Entre las últimas hay una que es enteramente característica y que además es comun á todos los grupos de trayectorias de puntos; es la que corresponde al *centro de gravedad* de la figura polar móvil M, en las figs. 95 á 98, y M_1 en las figs. 99 á 102. Esa rodaja es al propio tiempo *la más pequeña* de cuantas pertenecen á la misma clase; en el contorno de esa curva tienden á concentrarse las diferentes trayectorias, así como el círculo tiende á su centro, cuando el radio disminuye sucesivamente hasta el punto de ser nulo. Por esa razon proponemos que esa curva se designe con el nombre de *forma concentrada* del sistema de trayectorias correspondiente.

Debemos á más señalar como notables las rodajas (ó cicloides) que pasan por el centro de toda la série, como, por ejemplo, la curva núm. 6 en la fig. 96, y que por esa razon pueden recibir el calificativo de *homocéntricas*. En nuestro ejemplo las rodezuelas de esa especie toman una série de formas que se encuentran indicadas una en cada una de las figuras 96, 98, 100, y 102. Sin embargo, cumple notar que las trayectorias homocéntricas no pueden ser descritas más que por los puntos que en movimiento de revolucion de la trayectoria móvil, pasan por el centro de la trayectoria polar fija, ó al revés, por los puntos en que pasaria el centro de esta trayectoria, si se diese una inversion al acoplo de elementos. Los solos puntos que llenan esa condicion, son los de las *trayectorias concentradas*, pudiendo así decirse en otros términos: *Los puntos de las trayectorias concentradas describen con la inversion del acoplo curvas homocéntricas*. Así, pues, las curvas homocéntricas 6 (figura 96) y 5 (fig. 98) están descritas por los puntos de las trayectorias concentradas M (ó 7), representadas en las figuras 100 y 102, etc. Los puntos de las curvas concentradas que se han de utilizar para el trazado de las curvas homocéntricas, son muy fáciles de determinar en las figuras.

Estas últimas consideraciones son tambien aplicables á las cicloides y por de pronto podemos estenderlas inmediatamente al caso en que las trayectorias polares de acoplos de elementos superiores son círculos; en cuyo caso las *curvas concentradas* son circunferencias descritas por los centros de círculos giratorios (ó rodantes), á la vez que las *curvas homocéntricas* son esas figuras radiadas descritas por puntos de tales circunferencias y que muchas veces á causa de sus propiedades especiales han llamado la atencion de los geómetras (párrafo 18).

§ 25

Figuras de anchura constante.

Partiendo del principio establecido en el § 21 hemos llegado por via de síntesis á una série de otros acoplos de elementos, algunos de los cuales deben formar aquí el objeto de un exámen especial. Si en una figura plana se trazan dos tangentes paralelas AB y CD (fig. 103), la distancia c de dichas tangentes es la medida de la dimension de la figura en la direccion de las normales de apoyo. Esa dimension que constituye lo que puede llamarse la *anchura* de la figura, es en general un tamaño variable, pero se pueden imaginar figuras en las cuales sea constante la anchura, es decir, en las cuales todos los acoplos de tangentes paralelas que forman apoyo en sentidos contrarios, tengan la misma distancia, como nos da ejemplo de ello el círculo. Si á una figura que goce de esa propiedad, se acercan dos acoplos de tangentes de ese género, esas líneas tocarán la figura en cuatro puntos y así constituirán apoyos sus-

ceptibles de impedir toda traslacion conforme se ha demostrado en el § 18. Pero tambien sabemos que tales apoyos no se oponen á la rotacion de la figura y que además no puede efectuarse esa rotacion sino entorno de un solo punto; lo que equivale á decir que todas las normales á los cuatro puntos de apoyo se cortan en un mismo punto, ó que las normales de apoyo coinciden como lo indica la figura 104, donde la normal en *a* pasa por *c* y la normal en *d* por *b*. Puesto que en efecto la anchura de la figura es constante, debe deducirse que para todos los cambios de posicion de esa figura hechos en el interior del cuadrilátero de las tangentes, el sistema de apoyos subsiste, y que por lo tanto, segun el § 21, debe existir un polo único. De ahí dimana igualmente que las figuras de anchura constante gocen de la propiedad característica de que se halle situado en el radio de curvatura de cada elemento del contorno no solo el centro de curvatura correspondiente, sino tambien el del elemento opuesto. Las cuatro tangentes limitan en el plano un cuadrado ó más generalmente un rombo ABCD. Puede deducirse de ahí que *toda figura de anchura constante es desmodrómica en un rombo que la rodea*, y que por tanto puede servir para formar con ese rombo un acoplo de elementos.

§ 26

El triángulo curvilíneo equilátero en el rombo.

Con arcos de círculos pueden fácilmente componerse figuras de anchura constante. Si de los diferentes vértices de un triángulo equilátero como centros y con la longitud de los lados como radio se describen arcos de círculo, determínase una figura que puede designarse con el nombre de *triángulo curvilíneo equilátero*. Ese triángulo tiene una anchura constante igual á la longitud PQ (fig. 105) de los lados rectilíneos y puede por lo tanto ser envuelto desmodrómicamente por un cuadrado ó por un rombo ABCD, cuyos lados opuestos están precisamente separados por la distancia PQ. El encuentro de las normales de apoyo, que se efectua en un mismo punto O, se hace en ángulo recto en el cuadrado y oblícuamente en el rombo. Tomando cada uno de los dos acoplos de figuras en contacto, como bases de cilindros, y suponiendo estos últimos dispuestos de forma que no pueda efectuarse desplazamiento longitudinal, nos encontramos haber formado dos acoplos superiores de elementos.

Vamos á determinar las trayectorias polares suponiendo primero que sea un cuadrado la figura esterior. Para hallar la trayectoria que corresponde al cuadrado ABCD (fig. 106), imaginemos que se imprime al triángulo curvilíneo una rotacion entorno del polo O. En la posicion inicial representada en la figura ese polo es el punto medio de PQ y se encuentra situado en el eje de simetria RO del cuadrado. Suponiendo ahora que la rotacion se verifique á la izquierda, el vértice P del triángulo curvilíneo se deslizará bajando á lo largo del lado AD, á la vez que el punto R marchará hácia C por el lado de C. Las normales en P y R se cortan siempre en ángulo recto, de donde resulta que el polo es el lugar geométrico del vértice de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa se desliza en sus estremos por los lados de un ángulo recto, el polo O es tambien uno de los vértices de un rectángulo PDRO, cuya diagonal es constante é igual á PR. De consiguiente la trayectoria polar es un arco de círculo descrito desde el punto D como centro con un radio igual á PR=PQ=AB, es decir, á la longitud del lado del cuadrado. Ese arco debe tomarse como trayectoria hasta el punto 2, para el cual la distancia de R al punto C se halla precisamente reducida á la que separa P de A. Contando desde esta posicion el deslizamiento de la cuerda PQ comienza á efectuarse por los lados BA y AD; la trayectoria polar correspondiente es el arco de círculo 2,3, idéntico al anterior, enseguida se obtiene el arco 3,4 y finalmente el arco 4,1 ó 4,O. La trayectoria polar del cuadrado es por consiguiente *un cuadrado curvilíneo que se compone de cuatro arcos de círculo, descritos desde los vértices del cuadrado primitivo como centros y con la longitud del lado de ese cuadrado por radio.*

Para hallar la trayectoria polar correspondiente al triángulo, podemos recurrir á una inversion del acoplo, ó sea, imaginar que el triángulo se mantenga fijo y que el cuadrado tenga entorno suyo un movimiento de rotacion á la derecha. Inmediatamente se ve entonces que la trayectoria polar es el lugar de los vértices O del ángulo recto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es PR, es decir, una circunferencia descrita con PR como diámetro. Esa circunferencia debe tomarse como trayectoria hasta el punto 2′, punto medio del lado QR. Se obtienen enseguida y de la misma manera los otros arcos de la trayectoria, 2′3′ y 3′1, terminando ese último en el punto O. Segun esto la trayectoria polar correspondiente al triángulo curvilíneo es tambien *un triángulo curvilíneo equilátero cuyos lados son arcos de círculo descritos desde los puntos medios de los lados* PQ, QR y RP *del triángulo rectilíneo* PQR *con la mitad de la longitud de esos como radio.*

En el movimiento relativo de las dos figuras hay sucesivamente rotacion del arco 1,2′ sobre 1,2, de 2′,3′ sobre 2,3, de 3′,1 sobre 3,4, etc. Para volver á su posicion inicial el polo debe recorrer por las dos trayec-

torias caminos iguales, ó sea tres veces los cuatro lados del cuadrado curvilíneo 1, 2, 3, 4 y cuatro veces los tres lados del triángulo curvilíneo 1, 2′, 3′. Despues de cada revolucion del triángulo curvilíneo el disco triangular se encuentra que ha girado 90° con respecto al cuadrado, de modo que despues de la primera vuelta el vértice 1 del pequeño triángulo curvilíneo ha pasado á 4, despues del segundo á 3, despues del tercero á 2, y que en fin, despues del cuarto se encuentra con que ha vuelto á O,1.

§ 27

Trayectorias de los puntos del triángulo curvilíneo con relacion al cuadrado.

Las trayectorias de los puntos del acoplo de elementos considerado en el párrafo anterior presentan, como es fácil observar, una gran analogia con las del acoplo representado en las figs. 95 á 98. Todas las trayectorias de los puntos del triángulo curvilíneo se componen con relacion al cuadrado, de arcos de hipocicloides ó de hipotrocoides, que en ese caso particular se reducen á arcos de elipses, mientras que todas las trayectorias de los puntos del cuadrado son, con relacion al triángulo, pericardioides ó peritrocoides. Supongamos ante todo que el cuadrado se mantiene fijo y el triángulo se pone en movimiento.

Las figs. 107 y 108 representan una clase de trayectorias cuyos puntos describientes se hallan situados en un radio vector del triángulo curvilíneo, trazado con el centro M normalmente á la cuerda PQ y prolongado más allá. La figura descrita por el punto 1 es un cuadrado elíptico, cuyos vértices truncados se forman de dos árcos de elipse congruentes, engendrados, el uno por el arrollamiento ó rotacion del arco m_1m_2 sobre O_4O_1, y el otro por la rotacion del arco m_1m_3 sobre O_4O_3, Cuando el punto m_2 llega á O_1, m_2m_3 comienza á girar sobre O_1O_2. Como el punto describiente 1 se ha escogido de manera que $m_1$1 sea igual al radio m_1m_2, resulta que ese punto está situado en la circunferencia del pequeño círculo de Cardan m_2m_3 (prolongado con línea de puntos) y que por consiguiente describe una recta. Las porciones de trayectorias que pasan por los puntos B y A, centros de los grandes círculos de Cardan O_1O_2 y O_2O_3, son por lo tanto líneas rectas, ó si se quiere, arcos de elipse trasformados en línea recta. La parte complementaria de la trayectoria se comprende fácilmente sin otras esplicaciones. Esa trayectoria se encuentra enteramente descrita como antes cuando en el movimiento de rotacion de las dos trayectorias polares $m_1m_2m_3$ y $O_1O_2O_3O_4$, una sobre otra, el polo ha recorrido cuatro veces los tres lados de la primera y tres veces los cuatro lados de la segunda.

El punto 2 describe un cuadrado elíptico cuyos lados están lijeramente encorvados hácia dentro. En la curva del mismo género descrita por el punto 3 situado en el cuadrado, esa curvatura es más pronunciada. El vértice m_4, el cuarto en la série de los puntos describientes, traza ante todo á la derecha y á izquierda de O_4 pequeñas partes rectas, dirigidas hácia los centros C y D de los arcos de círculo O_4O_1 y O_4O_3, y de una longitud precisamente igual á la de las partes tambien rectas O_1m_2 y O_3m_3, recorridas por los puntos homólogos m_2 y m_3. A continuacion de cada parte recta la trayectoria se forma de un arco de círculo que se encuentra descrito por el centro del pequeño círculo de Cardan m_2m_3 en su arrollamiento ó rotacion sobre O_1O_2 ó sobre O_3O_2. La trayectoria así obtenida constituye la forma ordinaria de la clase de curvas que aquí consideramos.

El quinto punto describe un cuadrado elíptico que presenta ya pequeños nodos en sus vértices y está representado á doble escala en la fig. 108. En la trayectoria del punto 6 el cruce de los nodos está muy pronunciado; en la del punto 7, que coincide con el centro de gravedad M, los nodos se cubren por completo y dan un cuadrado elíptico muy romo que en un período completo se encuentra recorrido tres veces por el punto M (véase § 23). El centro M_1 del cuadrado es igualmente el centro de esa trayectoria, que es la más pequeña de las descritas por los puntos del triángulo curvilíneo y que segun la denominacion general antes adoptada, es la *forma concentrada* de las trayectorias de los puntos de ese triángulo.

Las curvas trazadas en las figs. 109 y 110 son las trayectorias cuyos puntos describientes están situados en la prolongacion más allá del centro M_1 del radio vector precedente. El punto 1 da un cuadrado elíptico cuyos lados son lijeramente convexos; el punto 2 da un cuadrado de lados rectilíneos cuyos vértices están truncados elípticamente, y que cubre hasta una corta distancia de los vértices el cuadrado primitivo ABCD. Las curvas de los puntos 3 y 4 son cuadrados elípticos de lados entrantes. La última curva está reproducida á doble escala en la fig. 110; sobre esa misma figura se halla tambien indicada la trayectoria del punto periférico 5, que es una de las formas ordinarias de la clase de curvas considerada, y se compone de cuatro arcos de elipse, cóncavos esteriormente, con cuatro puntas rectilíneas. La trayectoria 6 está descrita por el punto M_1 que en la fig. 109 coincide con el centro del

cuadrado, siendo por consiguiente la *forma homocéntrica* de las curvas de la clase que estudiamos. Además, la fig. 110 reproduce la trayectoria concentrada descrita por el punto M é indicada ya en la fig. 108.

Por otra parte las figs. 109 y 110 indican en líneas de puntos las trayectorias 1′, 2′, 3′, descritas por puntos de un radio vector que no coincide con uno de los ejes principales de la trayectoria polar.

§ 28

Trayectorias de los puntos del cuadrado con relacion al triángulo curvilíneo.

Supongamos ahora que en las figuras 111 y 112 el triángulo curvilíneo PQR está fijo, y el cuadrado ABCD móvil. En las mismas figuras están trazadas seis trayectorias de puntos, que pertenecen al radio vector MO_4....

Los números 1 y 2 son cicloides alargadas compuestas de arcos de peritrocoides, el número 3 es la forma ordinaria de la clase de curvas que aquí consideramos, y el número 4 es una curva acortada, la misma que se encuentra reproducida á doble escala en la fig. 112. El número 5 representa la curva homocéntrica de la série, y el número 6 la curva concentrada. Esa última curva que es muy parecida á un círculo, se compone en realidad de arcos de peritrocoides que se cubren unos á otros, de modo que en cada período completo se encuentra recorrida cuatro veces (curva de cuatro hojas).

Las curvas 1′ y 2′ corresponden á puntos de un radio vector comprendido entre dos ejes principales; son dos cicloides la primera de las cuales está prolongada y la segunda acortada.

Las figuras 113 y 114 encierran 7 cicloides que pertenecen á puntos del radio vector M_1B. Los números 1, 2 y 3 son cicloides alargadas, el número 4, la forma ordinaria de la série, los números 5 y 6, cicloides acortadas, y por último el número 7, la curva concentrada, idéntica á la curva número 6 de la figura 112.

§ 29

Otros discos curvilíneos de anchura constante.

Hemos visto en el § 25 que toda figura de anchura costante es desmodrómica en un rombo que la rodea, lo que permite formar con ella y el rombo un acoplo de elementos. Las figuras 115 á 122 ofrecen todavia ocho nuevos ejemplos especialmente á propósito para demostrar la estraordinaria variedad de movimientos forzosos que se derivan de ese principio. Podemos tratar brevemente esos ejemplos en razon del desarrollo que hemos dado á los casos anteriores.

Fig. 115. *Triángulo curvilíneo equilátero, rodeado por un rombo cuyos ángulos son de 60 y de 120°.*— Las formas que aquí presentan las dos trayectorias polares son muy diferentes de las que hemos encontrado para el acoplo de las figuras 111 á 114. La trayectoria polar del triángulo curvilíneo es una estrella de tres ramas ó rayos formada por tres arcos de círculo cuyo radio, CQ=CR, es igual á la semi-longitud del lado del rombo. La trayectoria polar del rombo es una figura biconvexa de dos arcos de círculo iguales, cuvo radio BA =BC es la longitud misma del lado del rombo, es decir, el doble del anterior. Los arcos de trayectorias polares que giran unos sobre otros, pertenecen tambien aquí á círculos de Cardan, y las trayectorias de los diferentes puntos están compuestas de trocoides.

Algunas de las trayectorias que describe el triángulo curvilíneo, con relacion al rombo, están representadas en la figura 115. El punto I que es el medio de la perpendicular AQ, considerado como perteneciente al rombo, describe una figura simétrica con relacion á dos ejes, y su forma presenta cierta analogia con el perfil de nn rail.

El centro II perteneciente al triángulo, describe la trayectoria concentrada de ese triángulo, la cual no es más que el eje menor EF de la figura biconvexa, en la direccion de la diagonal DB: durante el período entero del movimiento es recorrida tres veces. Además, esa figura concentrada coincide aquí con la figura homocéntrica, y como está descrita por un punto del contorno de la trayectoria polar, debe al propio tiempo considerarse como forma ordinaria de la série. La trayectoria I′ es una cicloide arreglada del rombo, II′ una cicloide acortada de la misma figura. Todos los puntos del eje menor EF describen en el triángulo curvilíneo curvas homocéntricas. Una de ellas está representada, la de los puntos estremos E y F. La variedad de formas que afectan aquí las cicloides, demuestra cuan importante es guardarse de conclusiones de analogia demasiado precipitadas respecto del carácter general de la forma de las trayectorias consideradas.

Fig. 116. *Pentágono curvilíneo equilátero en un cuadrado.*—El pentágono curvilíneo se forma de arcos de círculo descritos desde los vértices de un pentágono rectilíneo regular con la longitud de una diagonal por radio; así se obtiene una figura de anchura constante. Las trayectorias polares son: para el cuadrado ABCD un cuadrado curvilíneo 1′ 2′ 3′ 4′, cuyos lados están descritos desde los vértices con un radio igual al lado PQ

del pentágono rectilíneo; para el pentágono curvilíneo, igualmente un pentágono curvilíneo equilátero, cuyos lados están descritos desde los puntos medios m_1, m_2, m_3... de los lados del pentágono rectilíneo como centros, con la mitad de la longitud de esos lados como radio. La trayectoria polar del pentágono gira aquí sobre la del cuadrado, que por cada período completo es recorrida cinco veces por el polo, en tanto que la primera lo es cuatro veces. La trayectoria designada con I está descrita por el pentágono curvilíneo que gira en el cuadrado; y es una curva prolongada, puesto que el punto I está fuera de la trayectoria polar: la curva I′ es tambien una cicloide prolongada, pero está descrita por un punto del cuadrado, supuesto móvil con relacion al polígono fijo.

Fig. 117. *Disco en forma de corazon limitado por cinco arcos de círculo en el cuadrado.*—PSQ es un triángulo isóceles, cuyo ángulo del vértice PSQ=53°. Los arcos PQ, ST y SR están descritos desde los puntos S, Q y P, con el lado AB del cuadrado como radio, mientras que los arcos TP y QR se describen desde el punto de interseccion M de las cuerdas PR y QT, con un radio igual á la mitad del anterior. La figura así obtenida tiene una longitud constante é igual á AB. Las trayectorias polares se hallan en tal caso de este modo: para el disco, otro disco 1,2, limitado por dos arcos de círculo desiguales; para el cuadrado, una estrella de 8 vértices, formada de arcos de círculo de radio variable. Los arcos de esas trayectorias que giran unos sobre otros coresponden á círculos de Cardan. Dos trayectorias de puntos I é I′ están indicadas en la figura, y como trayectorias de los puntos particularmente característicos pueden citarse las cicloides ordinarias descritas por los dos puntos estremos 1 y 2 de la trayectoria polar del disco en forma de corazon. Esas trayectorias son cuadrados rectilíneos, 1′ 3′ 5′ 7′ y 2′ 4′ 6′ 8 (§ 19).

Fig. 118. *Triángulo curvilíneo isóceles en el rombo.*—De los estremos 1 y 2 de la base de un triángulo isóceles 1S2, cuyo ángulo del vértice es menor de 60°, se trazan con los radios 1S y 2S, los arcos de círculo ST y SR hasta su encuentro en T y R con la línea 1,2 prolongada; desde los mismos centros con 1T y 2R por radios se describen los arcos TP y RQ, hasta su interseccion en P y Q con los lados S1 y S2 prolongados; y en fin los dos puntos P y Q se reunen con un arco de círculo descrito desde el punto S. La figura comprendida entre estos cinco arcos de círculo tiene una anchura constante QS, y está rodeada por un rombo cuyos ángulos son de 60 y de 120°. Las trayectorias polares están aquí bastante complicadas; pues se componen como anteriormente de arcos de círculo de Cardan en número de cuatro para el disco curvilíneo, y de ocho para el rombo. De las dos trayectorias de puntos I é I′, indicadas en la figura, corresponde la primera al movimiento del triángulo y la segunda á la del rombo.

La fig. 119 indica otro disco de contorno curvilíneo encerrado en un rombo. Ese disco es equilátero como el de la fig. 115; está formado de tres grandes arcos de círculo que están descritos desde los vértices P, Q, R del triángulo rectilíneo equilátero, con un radio levemente mayor que la longitud de los lados del triángulo, y que están enlazados por pequeños arcos de círculo, trazados desde los mismos centros, con un radio precisamente igual á la diferencia que hay entre el radio de los círculos grandes y el lado del triángulo rectilíneo. El movimiento tiene efecto exactamente lo mismo que si el triángulo curvilíneo normal PQR indicado con líneas de puntos en la figura, se moviese dentro del rombo $O_1O_2O_3O_4$, trazado tambien de punteado, en tanto que el verdadero disco curvilíneo se mueve dentro del rombo ABCD. Los ángulos de ese rombo miden 76 y 104°, mientras que los de la fig. 115 son de 60 y 120°. Esa diferencia se traduce de una manera sensible en las trayectorias polares, que en cierto modo son truncaduras de las de la fig. 115. Es fácil ver que aquí tenemos una transicion entre las formas de esta última figura y las que hemos hallado antes para el cuadrado y el triángulo curvilíneo equilátero.

Las figs. 120, 121 y 122 indican otros tres acoplos cuya formacion es análoga á la de los acoplos que hasta ahora venimos estudiando. En la fig. 120 debemos señalar, á más de la regularidad de las trayectorias polares, el cuadrado rectilíneo descrito por los puntos estremos 1 y 2 de la trayectoria más pequeña. El disco de la fig. 121 es análogo al de la fig 118, si bien está formado con un ángulo del vértice más pequeño. El disco de la fig. 122 es tambien análogo al de la fig. 117. La diferencia entre las trayectorias polares de esas dos figuras merece ser estudiada.

En todas las figuras puede seguirse fácilmente el movimiento de rotacion de una de las trayectorias polares sobre otra merced á las cifras inscritas en las mismas trayectorias.

Los ejemplos anteriores demuestran claramente la gran variedad de movimientos que pueden realizarse con acoplos superiores, al mismo tiempo que hacen resaltar la notabilísima utilidad de las trayectorias polares para darse fácilmente cuenta de los movimientos complicados que se hallan comprendidos en dos grandes clases de curvas de las formas más diversas.

§ 30

Investigacion general de los perfiles de elementos para una ley de movimiento dada.

Los acoplos de elementos que acabamos de examinar han sido para nosotros el resultado de un procedimiento sintético; y con efecto, partiendo de la solucion general del problema sobre los apoyos ó soportes y basándonos en los principios que nos ha suministrado, hemos logrado formar acoplos de cuerpos desmodrómicos, cuyos movimientos relativos hemos determinado enseguida, recurriendo á las trayectorias polares. Esa última parte de nuestras investigaciones, que por otra parte tiene un carácter analítico, nos conduce naturalmente, por decirlo así, á los procedimientos que han de emplearse para resolver otro problema, de índole sintética, que consiste en formar acoplos de elementos susceptibles de realizar *movimientos relativos cuyas leyes están determinadas, es decir, cuyas trayectorias polares están determinadas.* Conforme hemos visto, las formas que permiten realizar el apoyo recíproco contínuo de los elementos, son envolventes recíprocas, para un movimiento relativo único de dos figuras y precisamente para el que está caracterizado por las trayectorias polares. En las investigaciones de las formas de ese género, á las que nos hemos consagrado hasta aquí, hemos partido simplemente de la condicion del apoyo recíproco, y hemos determinado enseguida las trayectorias polares; pero ahora podemos, invirtiendo el problema, suponer las trayectorias dadas y buscar las figuras correspondientes susceptibles de servirse de apoyos recíprocos. Ese problema es el que con más frecuencia se presenta en la construccion de las máquinas y el que amenudo importa resolver lo mismo para los movimientos de naturaleza sencilla que para los complicados.

Los procedimientos generales á que se puede recurrir para resolver los diferentes casos que en la práctica se presentan, son bastante numerosos, pero es fácil reducirlos á siete solamente, que vamos á examinar uno en pos de otro, limitándonos por de pronto al *arrollamiento ó á la rotacion cilíndrica.*

§ 31

Primer procedimiento.—Determinacion del perfil correspondiente á un perfil escogido al azar.

Supongamos que para un acoplo cuyas trayectorias conocemos, se ha escogido arbitrariamente el perfil de uno de los elementos: haciendo girar la trayectoria polar de ese elemento sobre la del elemento desconocido que suponemos en reposo, y trazando la figura del perfil escogido en todas sus posiciones sucesivas, la figura envolvente, determinada por tales posiciones sobre el elemento fijo, permanece constantemente en contacto con la figura dada, y puede por consiguiente, utilizarse como perfil del elemento desconocido, con tal que proporcione un número suficiente de puntos de apoyo. Esta última condicion es fácil de realizar: la figura hallada puede aun dar más puntos de apoyo que los necesarios.

En tal caso no deberán ejecutarse más que las partes de la figura que bastan para que el apoyo tenga lugar sin interrupcion. Eso es lo que hemos visto anteriormente y distintas veces, como por ejemplo, con el triángulo curvilíneo en el cuadrado y con la figura biconvexa de dos arcos en el triángulo: en ambos casos los arcos de las curvas envolventes que corresponden á los ángulos del cuadrado y del triángulo, se han suprimido como debian suprimirse, toda vez que ninguna utilidad tenian para el apoyo recíproco de las dos figuras. El procedimiento espuesto es por lo tanto perfectamente aplicable y nos limitaremos á insistir sobre el lado práctico del metodo del trazado.

Sean A y B (fig. 123) las dos trayectorias polares dadas, y *ab*.... el perfil tomado arbitrariamente que corresponde á A; si como en la figura, un punto *b* de este perfil cae en la trayectoria misma A, el punto de contacto correspondiente á O de la trayectoria B es ya un punto del perfil buscado. Para determinar otro punto de ese perfil, aquel por ejemplo, que debe ir á coincidir con *a*, apliquemos al perfil dado la normal *ac* que corta en *c* la trayectoria A. Si hacemos girar A sobre B hasta que dicho punto *c* haya llegado á ser el punto de contacto ó el polo, es evidente que el punto buscado debe hallarse á una distancia de ese polo igual á *ac*, por cuya razon esa longitud *ac*, lleva el nombre de *distancia polar* del punto *a*. Al propio tiempo el punto B, que en la posicion primitiva está en *b*, se hallará á una distancia de *a* fácil de determinar. Basta para ello reducir B á la posicion b_1c, que corresponde al contacto en *c*, haciendo girar el arco de trayectoria b_1c, sobre *bc*, y tomando por consiguiente el arco bc_1=al arco cb_1=al arco *bc*. Si ahora describimos círculos desde los puntos c_1 y b, con radios respectivamente iguales á *ca* y b_1a, ambos círculos se cortarán en el punto *a* del perfil que se busca.—Continuando así puede llegarse á trazar exactamente ese perfil punto por punto.

Si no se pretende alcanzar una grande exactitud, puede limitarse el trabajo al procedimiento aproximati-

vo siguiente que se debe á *Poncelet*. En varios puntos bastante cercanos *a*, *c*, *e*,... del perfil dado (fig. 124) se elevan las normales que se prolongan hasta sus puntos de interseccion *b*, *d*, *f*..., con la trayectoria polar correspondiente A: luego se determina en la otra trayectoria B, los puntos de contacto b_1, d_1, f_1.. correspondientes. y desde esos últimos puntos con las distancias polares *ab*, *cd*, *ef*,... se describen arcos de círculo. Trazando enseguida uua curva que envuelva todos esos arcos, se obtiene con cierta aproximacion el perfil buscado.

El procedimiento que acabamos de describir, es el que en su aplicacion á los engranajes se conoce con el nombre de *procedimiento general de endentaje*. En tal caso las trayectorias polares son comunmente círculos, lo cual hace posibles ciertas simplificaciones.

Un método que propuse en mi obra *El Constructor* para el trazado de los dientes de engranaje, en el caso de trayectorias polares circulares, es el siguiente:

En la fig. 125 *ac*O*eg* es el perfil dado, A la trayectoria polar correspondiente, formada de un círculo cuyo centro está en A_1, B la otra trayectoria, tambien circular descrita desde el punto B_1. Despues de aplicar la normal *ab*, á un punto *a* del perfil, se busca el punto 1, donde se encontrará *a* cuando sea punto de contacto, ó lo que viene á ser lo mismo, cuando el engranaje se efectue en *a* con el perfil aun desconocido. Suponiendo que las dos trayectorias polares giran entorno de sus centros respectivos A_1 y B_1, que están fijas en el plano de la figura, el punto de engranaje 1 se halla necesariamente situado en un primer círculo descrito desde el punto A_1 con el radio A_1a, y en otro círculo descrito desde el punto O con un radio igual á la distancia polar *ba*, puesto que en el momento en que el contacto se verifica en la posicion 1 del punto *a*, la normal *ab* debe pasar por el polo O. Por otra parte en tal momento el contorno de B está desalojado de un arco Ob_1, igual al arco O*b*. El punto a_1 del perfil buscado correspondiente á *a*, debe por lo tanto hallarse en dos círculos descritos, el uno desde B_1, con el radio $1B_1$, y el otro de b_1 con el radio O1. Se determinan de la misma manera los puntos de engranaje 2, 3, 4..... y los puntos correspondientes del perfil c_1, e_1, g_1... La série de los puntos 1, 2, 3, 4... da una línea que se designa con el nombre de *línea de engranaje* y que puede considerarse como el camino que recorre el punto de contacto de los dos perfiles. Juntando los puntos de esa línea al polo O se obtiene á cada instante la direccion de la normal de apoyo, y por tanto, la de la presion que ejercen los perfiles de elementos el uno sobre el otro y al mismo instante.

El procedimiento del cual acabamos de indicar tres modos diferentes de aplicacion, puede proporcionarnos perfiles de formas las más variadas, entre las que hay cierto número que son poco ó nada susceptible de utilizacion práctica. Debemos señalar especialmente como inaplicables las curvas que presentan nodos, puntos de revuelta, espiras muy estrechas, etc. (véase fig. 126). Esas curvas no son *prácticas* en modo alguno, por muy *exactas* que sean bajo el punto de vista geométrico, es decir, por más que llenen las condiciones impuestas para que el apoyo se efectue constantemente en los acoplos de trayectorias polares dadas. Cuando se llega á curvas de ese género es necesario renunciar al perfil que se habia escogido al principio y procurar sustituirlo con otro más conveniente, esto es, en definitiva debe procederse por tanteos. Luego, la arbitrariedad en la eleccion del primer perfil se halla sometida á cierta restriccion. Otra circunstancia que limita tambien esa arbitrariedad, estriba en no poderse utilizar las partes de los perfiles en que las normales cortan la trayectoria polar, en el polo, bajo un ángulo demasiado grande, como por ejemplo, la normal O1 en la figura 125; en cuyo caso se correria la esposicion de roces muy pronunciados y de apuntalamientos completos. Finalmente, debe tambien prescindirse de las porciones de perfiles en que no encuentran las normales la trayectoria polar ni pueden por consiguiente ser normales de apoyo. De donde dimana que para usar en la cinemática aplicada el procedimiento esplicado, es indispensable eliminar de los perfiles escogidos arbitrariamente todos aquellos que son inaplicables ó no corresponden al fin propuesto.

§ 32

Segundo procedimiento.—Trayectorias polares auxiliares.

En el primer procedimiento que acabamos de examinar, no se obtienen los dos perfiles de elementos sino el uno en pos del otro, mientras que en el segundo se puede al propio tiempo, como vamos á ver; determinar los dos perfiles que llenan las condiciones del apoyo contínuo.

Sean A y B (fig. 127) dos trayectorias polares correspondientes que se tocan en el punto O. Imaginemos una tercera curva C tangente en este punto á las dos primeras y de forma tal que pueda girar sobre las mismas; hagamos ahora mover esa curva con las dos trayectorias de manera que las toque sin cesar en el polo O, es decir, que este polo se desaloje en aquella como

en las otras dos. En ese movimiento un punto D, sujeto invariablemente á la curva C, describe una cicloide con relacion á cada una de las dos trayectorias A y B. Las dos cicloides así engendradas, *a*D..., y *b*D..., tienen siempre un punto comun, el punto generador D, y una normal comun OD. Segun ello pueden ser utilizadas como perfiles de elementos, puesto que su normal comun pasa constantemente por el punto de contacto de las trayectorias polares, á más de que para ser aplicables deben llenar las condiciones espuestas en el párrafo anterior.

Esa curva C, en razon de sus funciones, puede propiamente designarse con el nombre de *trayectoria polar auxiliar*. Si el punto describiente se encuentra en la trayectoria auxiliar ó en el interior de ella, las cicloides *a* y *b* que engendra, quedan constantemente á un mismo lado de las trayectorias polares correspondientes á A y B, y el lado opuesto es disponible en todo caso para recibir cicloides análogas como curvas de perfiles. Por lo tanto, se puede con el mismo procedimiento obtener nuevas cicloides *c* y *d* (fig. 128) que correspondan á otra trayectoria igual ó nó á la anterior.

Si los puntos describientes están situados en los contornos de las trayectorias auxiliares, las cicloides engendradas van á tocar las trayectorias polares; por cuya razon se puede reunir *a* con *c* de manera que formen un solo perfil, y lo mismo *b* con *d*. Si se repite el procedimiento indicado por diferentes posiciones de cada una de las trayectorias polares, se obtiene una série de perfiles que pueden utilizarse como perfiles de salientes en forma de dientes sobre el elemento correspondiente. Una sucesion regular de salientes de ese género intercaladas de los convenientes vacios, encuentra, como sabemos, una aplicacion general en las ruedas dentadas. En esas ruedas la porcion de la trayectoria polar comprendida entre los puntos homólogos de dos dientes consecutivos constituye el *paso;* la trayectoria polar misma, el *contorno primitivo*, ó si es de forma circular, el *círculo primitivo*. Como trayectorias polares auxiliares se utilizan círculos (designados con el nombre de círculos de ruedas). Las porciones de cicloides que constituyen los perfiles de los dientes, deben tener un tamaño suficiente para que el *apoyo no sufra ninguna interrupcion:* deben tener á lo ménos un tamaño tal que para cada diente exista el apoyo mientras que la trayectoria en su rotacion describe la longitud de un paso, lo que en lenguaje vulgar, se espresa diciendo que la duracion del engranaje debe corresponder á un paso al ménos.

En las ruedas dentadas correspondientes á axoides cilíndricos, ó en las ruedas rectas, se ha ido más allá, y se ha exigido la condicion de dar á los perfiles de los dientes una forma tal que todas las ruedas de paso igual puedan engranar rigurosamente unas con otras, es decir, que dichos perfiles se trasmitan mútuamente movimientos tales que las trayectorias polares correspondientes (contornos primitivos) sean círculos. Las ruedas que llenen esa condicion pueden designarse con el nombre de *ruedas de surtimiento* (ó de combinacion), puesto que en tal caso todas las ruedas de paso igual constituyen en cierto modo una coleccion en la que pueden tomarse dos términos cualesquiera para formar un acoplo. *Willis* parece ser el primero que llamó la atencion sobre ese problema de tan gran interés bajo el punto de vista práctico, indicando á la par una solucion, conforme veremos en el *Constructor*. Si ahora prescindimos del caso particular de las ruedas dentadas para volvernos á poner en el punto de vista general donde nos encontrábamos antes, nos será fácil ver que el problema puede resolverse con el empleo de trayectorias polares auxiliares congruentes dispuestas enfrente una de otra como en la fig. 128.

Con el estudio de las ruedas dentadas han llegado los geómetras hace tiempo al empleo de las cicloides como perfiles de elementos. En 1733 *Camus* espuso muy claramente en una memoria, muy poco conocida, el principio de dicho empleo, segun resulta de las investigaciones de *Willis* (§ 20).

Antes habia ya *Lahire* hecho aplicaciones del mismo principio, y al efecto se refiere tambien á los trabajos anteriores de *Desargues* (1573 á 1662) que habia construido ya ruedas dentadas de perfiles encicloidales, mucho tiempo antes que *Römer* (1664 á 1710,) que sin embargo, amenudo se cita como inventor de los endentajes de arcos cicloidales.

Con respecto á la evidencia de los resultados el método que consiste en trazar los perfiles de los elementos por medio de cicloides, es muy superior al precedente y hasta cierto punto puede afirmarse que lo encierra como caso particular, puesto que en definitiva el perfil escogido arbitrariamente *puede considerarse siempre como engendrado por una trayectoria polar auxiliar*. Por lo mismo el segundo perfil, el que se busca, es una *cicloide* de esa misma trayectoria auxiliar, que puede imaginarse como generatriz del perfil en el primer método, si bien que en realidad no se pretende en general determinarlo.

El principio de la generacion de las curvas como cicloides que tiene mucha importancia para la cinemática, fué indicado en otro tiempo por el geómetra *Lahire* (§ 21) á quien se debe igualmente la espresion de *rodezuela* ó *rodaja* que dió á la *cicloide*. Hasta

aquí los métodos fundados en ese modo de generacion y los teoremas que á los mismos se refieren, no han sido desarrollados como merecian. En el procedimiento descrito en el párrafo anterior la investigacion de la trayectoria polar auxiliar es sin duda interesante, más de ningun modo indispensable para el objeto propuesto. En general el primer procedimiento es siempre aplicable y práctico cuando se trate de obtener un resultado aislado que no deba depender de otros.

§ 33

Tercer procedimiento.—Trayectorias polares secundarias consideradas como generatrices de perfiles.

En el segundo apartado del § 9 hemos indicado el empleo de trayectorias polares secundarias en reemplazo de las trayectorias polares propiamente dichas, ó primarias, y hemos visto que á veces permitian hacer mucho más fácil la solucion de ciertos problemas; tambien hemos notado que segun los casos, debian emplearse simultánea ó alternativamente con las trayectorias primarias. Entre dichas trayectorias secundarias las hay que presentan muchísima utilidad para la generacion de los perfiles de elementos. Esa clase particular de trayectorias corresponde á los casos en que el movimiento puede representarse con *dos curvas y una recta tangente á estas curvas*. Se consiguen, por ejemplo, trayectorias secundarias de ese género cuando por los puntos de las dos trayectorias polares primarias A y B (fig. 129) se hacen pasar secantes, bajo un ángulo constante con relacion á las tangentes de esas curvas; las curvas envolventes de tales secantes tocadas por una recta que gira sobre ellas, forman con la recta trayectorias polares secundarias. Si en efecto C y D son los centros de curvatura de los elementos de trayectorias polares que son tangentes en O, las perpendiculares CE y DF están entre sí en la misma relacion que las longitudes CO y OD; de donde resulta que en su movimiento de rotacion ó arrollo la recta FE es la que produce en ambas figuras las rotaciones angulares más débiles, y esas rotaciones son precisamente las que produciria el arrollamiento de las trayectorias polares. Supongamos ahora que se deja que un punto cualquiera P de esa recta descrita dos curvas *a*P y *b*P, la una con relacion á A, la otra con relacion á B; esas curvas, segun las hipótesis, tendrán constantemente una normal comun que pase por el polo y se confunda con la recta generatriz misma FE. Por lo tanto podrán ser utilizadas como perfiles para el acoplo de elementos que se quiere formar. En el caso particular en que las trayectorias polares primarias A y B son circulares, sucede lo mismo con las dos curvas E y F: las curvas de perfiles *a*P y *b*P son entonces desarrollantes de círculo. Ese método de trazado por desarrollantes se usa con frecuencia para los engranajes. En ese mismo método se obtienen ruedas de surtimiento cuando se toma el ángulo FOD constante para todas las ruedas de paso igual.

Las curvas de perfiles *a*P y *b*P son en el caso actual rodezuelas ó cicloides engendradas por la rotacion de una recta sobre las dos curvas E y F. Conforme hemos dicho antes, pueden igualmente considerarse como rodezuelas para la figura A y B. En el caso en que se trata de trayectorias polares circulares, se encuentra una espiral logarítmica para la trayectoria polar auxiliar, un solo y mismo punto de la cual describe respectivamente las desarrollantes *a*P y *b*P, en el arrollamiento de la curva sobre el círculo A y dentro del círculo B. Si en la trinidad de las tres trayectorias polares la línea intermedia no es una curva recta, las cicloides descritas por los puntos de esa línea no tienen normal comun que pase por el polo, y de consiguiente no pueden utilizarse como curvas de perfiles.

§ 34

Cuarto procedimiento.—Trayectorias de puntos de elementos como perfiles.

En el segundo de los procedimientos que acabamos de indicar, pueden las trayectorias polares auxiliares tomar las formas más variadas. Como ejemplo especialmente notable debemos consignar la modificacion que da por resultado hacer coincidir las trayectorias auxiliares con las trayectorias polares propiamente dichas. Cada trayectoria auxiliar no describe en tal caso ninguna curva con relacion á una de las trayectorias polares, esto es, cada punto describiente no engendra en realidad sino un punto único; y en cambio, con relacion á la otra trayectoria polar, ese punto describe una trayectoria. Esa última curva, eligiéndola como perfil de elemento, tiene un punto como perfil coreespondiente en el otro elemento. Ese modo de trazado de los perfiles encuentra una aplicacion en las ruedas dentadas. Basándome precisamente en ese modo de generacion de los perfiles de los dientes he designado con el nombre

endentaaura de puntos la especie de engranaje que en semejante caso se obtiene (a).

La fig. 130 da un ejemplo de un acoplo de engranaje con endentadura de dicha especie. Las dos trayectorias auxiliares se supone que coinciden con las dos trayectorias polares A y B, que son círculos; *ab* y *bc*, son trayectorias (aquí epicicloides), descritas por los puntos *a* y *c* del círculo B; *de* y *ef*, otras trayectorias (tambien epicicloides), descritas por los puntos *d* y *g* del círculo A; *ghd* y *aid* son trocoides (epicicloides prolongadas), engendradas respectivamente por el punto *e* de la rueda B y el punto *b* de la rueda A. Aquí el contacto se efectua á la vez en *a*, *b* y *c;* las normales en estos puntos de apoyo pasan siempre por el polo O; despues de un pequeño arrollamiento á derecha ó á izquierda se efectua tambien un contacto de *e* con *gh* ó de *k* con *al*.

Muy amenudo se tiene ocasion de refundir ese modo de trazado de los perfiles en otro, con lo cual se obtiene entonces lo que se llama *endentaduras mixtas*, de las que se encuentran ejemplos en las ruedas de engranaje.

§ 35

Quinto procedimiento.—Perfiles formados por líneas paralelas á cicloides.

Supongamos que para dos trayectorias polares A y B (figura 131) se hayan determinado los perfiles *a*P y *b*P por cualquiera de los medios indicados hasta aquí. Si de los centros de curvatura de las dos curvas *a*P y *b*P, que corresponden al punto de contacto P, se describen dos círculos, el uno de ellos con el radio de curvatura de *a*P en P aumentado en la longitud PP_1, y el otro con el radio de curvatura de *b*P, disminuido en la misma longitud, esos dos círculos estarán en contacto en la normal PP,O, y tendrán por ende con los elementos de arcos en P una normal comun que pase por el polo O. Operando de la misma manera para los demás puntos de ambos arcos de perfiles *a*P y *b*P, se obtienen otros dos arcos a_1P_1 y b_1P_1, que son paralelos á los primeros ó equidistantes, y que pueden igualmente utilizarse como perfiles de elementos. Así nos encontramos con otra variedad de formas de perfiles muy estensa, que está únicamente limitada por las condiciones prácticas de empleo indicadas en el § 31. Las curvas equidistantes ofrecen á veces notorias ventajas, como por ejemplo, en los casos en que están destinadas á sustituir trayectorias que se reducen á un punto único; punto que á la sazon se encuentra reemplazado con un arco de círculo ó hasta por un círculo entero, como sucede particularmente en los engranajes llamados de linterna, que antiguamente estaban muy generalizados y que aun hoy se emplean en algunas circunstancias escepcionales. La figura 132 nos da un ejemplo de ello. El punto *a* y la epicicloide *ab* se encuentra reemplazados, el primero por un círculo de radio a,a_1, y la segunda por la curva equidistante a_1b_1.

Como segundo ejemplo volvamos á la cuestion del triángulo curvilíneo en el cuadrado de que se ha hecho mencion antes, y propongámonos tratarla de una manera diferente. En la fig. 133 O2′3′ y O234 son respectivamente las trayectorias polares de un acoplo superior de elementos, cuyos perfiles queremos determinar. Al efecto recurriremos primero al método de endentadura de puntos haciendo coincidir la trayectoria polar auxiliar con O2′ 3′. Del radio vector O3, que divide en dos partes iguales el arco 2′ 3′, escojamos como punto generador el punto R que coincide con el segundo punto de interseccion de los arcos O2′ y O3′ prolongados. Con relacion á la trayectoria polar triangular R describe un punto, mientras que con relacion al otro, describe á derecha é izquierda una línea recta, en su calidad de punto de la periferia del círculo menor de Cardan que gira en el mayor: RC y RD son las dos partes de esa recta. Si continuamos haciendo girar la trayectoria polar interior sobre la otra, acabamos por obtener los cuatro lados del cuadrado como perfiles para el elemento esterior. Solo nos falta entonces hallar el apoyo para el elemento interior. Empecemos al efecto por tomar un punto generador completamente homólogo á R para cada uno de los otros dos lados de la figura interior, y entonces obtenemos los puntos P y Q, que en el arrollamiento de las dos trayectorias polares una sobre otra, recorren igualmente los lados del cuadrado. Si bajo el punto de vista del apoyo en los lados opuestos reemplazamos ahora los tres puntos R, P y Q con los arcos equidistantes PQ, RQ y RP, volvemos á encontrarnos con el triángulo curvilíneo equilátero PQR.

Además para trazar los arcos equidistantes nada impide escoger un radio superior al lado del cuadrado, y tomarlo, por ejemplo, igual á ese lado PQ, aumentado en 1/6 como se ha hecho en la figura 134. La forma del triángulo curvilíneo difiere entonces de la precedente, porque los vértices de los ángulos P,Q.R están reemplazados con tres pequeños arcos equidistantes. Esta supresion de los ángulos P,Q,R prácticamente es ventajosa. Por lo demás, hemos usado ya ese procedi-

(a) Más adelante ó sea en *El Constructor* trataremos detalladamente esta cuestion.

miento en las figuras 119 y 122. Si en vez de aumentar el radio de equidistancia, se disminuye, se consiguen formas que no son susceptibles de ser utilizadas, como la que indica en la figura el trazado punteado.

Un tercer ejemplo de la aplicacion de los perfiles equidistantes nos proporciona el acoplo superior de elementos que representa la figura 9 y que ya hemos examinado anteriormente. Aquí la ley del movimiento está determinada por las trayectorias de dos puntos, es decir, las líneas rectas descritas por los puntos *b* y *c*. Las equidistantes á esas trayectorias rectilíneas constituyen los perfiles de las ranuras prismáticas practicadas en las piezas *aa dd*, mientras que los círculos equidistantes de los dos puntos *b* y *c*, proporcionan los perfiles de los gorrones correspondientes. No se necesita en tal caso, como se ve, conocer las trayectorias polares para la formacion del acoplo. En cuanto á la forma de esas trayectorias fácil es determinarla despues de lo que hemos dicho antes; pues resulta efectivamente de las consideraciones del § 22 que tales trayectorias son círculos de Cardan, ó cuando ménos, arcos pertenecientes á círculos de esta especie.

§ 36

Sexto procedimiento.—Trazados aproximativos de los perfiles por medio de arcos de círculo.—Método de Willis.

Cuando los perfiles de elementos son líneas de curvatura variable, su ejecucion presenta á veces ciertas dificultades, y es de desear entonces que se puedan reemplazar esas curvas con arcos de círculo. Este reemplazo es posible siempre y cuando podamos contentarnos con cierta aproximacion ó debamos utilizar solamente una escasa porcion de esas curvas, lo que en particular es el caso más frecuente en las ruedas de engranaje. Las partes curvas de los perfiles se sustituyen entonces con arcos, debidamente escogidos, de sus círculos de curvatura. Muchos procedimientos se usan para determinar esos arcos. Con las ruedas dentadas de perfiles cicloides que deban ser al mismo tiempo ruedas de surtimiento, se puede, por ejemplo, emplear el método siguiente que propuse en otra obra *(El Constructor)*.

En la fig. 135 A es un arco de la trayectoria polar circular, esto es, del círculo primitivo de la rueda que se trata de endentar, B el centro de este círculo, C y D los centros de los dos círculos auxiliares de igual radio (trayectorias polares auxiliares), generadores de los arcos de cicloides en *a* y *b*, que deben ser reemplazadas con arcos de círculo; el radio de los círculos auxiliares es igual á los 7/8 del paso de la rueda; O es el polo de los círculos A, C y D.

Tomando los ángulos OC*a* y OD*b* iguales á 30°, se prolongan los radios *a*C y D*b* hasta sus puntos de encuentro *a'* y *b'* con los círculos auxiliares, luego se traza por *a* y *b* una recta que, segun la manera con que están determinados esos puntos, debe pasar por el polo O y ser por consiguiente normal á los elementos de cicloides en *a* y *b;* se juntan enseguida los puntos *a'* y *b'* al centro B, y los puntos P y Q, donde las líneas de union B*a'* y B*b'* cortan la normal *ba*, son los centros de curvatura que se buscan. Los dos arcos de círculo descritos del círculo primitivo al vértice y á la raiz del diente, se repiten simétricamente por el otro lado, para constituir el perfil completo de ese diente como lo indica el dibujo.

En el notable método que propuso *Willis*, procede directamente á buscar los arcos de círculo á propósito para el trazado del perfil de los dientes, esto es, sin introducir trayectorias polares auxiliares ni cicloides. Ese método que por varios conceptos tiene conexion con las indicaciones de *Euler*, se funda en consideraciones que pueden resumirse como sigue: sean A y B (fig. 136) los centros de rotacion de dos cuerpos que deban dominarse mútuamente, por intermediacion de los perfiles circulares que tengan sus centros en P y Q y su punto de contacto en R; el punto de encuentro O de las dos líneas de los centros PQ y AB es entonces un punto de las dos trayectorias polares correspondientes á A y B (véase § 8), y las velocidades angulares de esas trayectorias están entre sí en la relacion de OB á OA. Para que esa relacion pueda ser sensiblemente constante durante un tiempo muy corto, es preciso que en este mismo tiempo la línea PQ se aparte en su movimiento lo ménos posible del punto O. Más siendo el centro instantáneo de rotacion de PQ con relacion á AB el polo C colocado en la interseccion de los radios PA y BQ prolongados, resulta que el punto O no puede permanecer por un instante sobre PQ, sino en cuanto el punto C se halle sobre una perpendicular á PQ trazada por el punto O, como por ejemplo, el punto C' en nuestra figura. De consiguiente cuando se ha escogido uno de los dos centros, P por ejemplo, se puede inmediatamente determinar el segundo, como quiera que debe encontrarse en la interseccion de PQ con la línea de union BC'. La longitud PQ ó mejor PQ', así obtenida, es la suma de los radios de curvatura buscados; pudiendo, además, colocar siempre que se quiera, el punto de contacto R, trasladarle, por ejemplo á R', apoyándose en las propiedades conocidas en las curvas equidistantes (§ 35).

Para llenar en ese curioso método la condicion especial de las ruedas de surtimiento *Willis* elige tres dimensiones constantes: la longitud OC', la OR y el ángulo POA, que toma igual á 75°. Si el perfil de los dientes debe limitarse por un solo arco de círculo, hace OC'=∞ y OR=O, y entonces los arcos de círculo aproximativos se vuelven arcos de desarrollantes (véase § 33).

Si han de emplearse dos arcos de círculo yuxtapuestos en forma de una S, se tiene que aplicar el método dos veces (fig. 137); se toman, además, OR' y OR'' iguales ambos á la mitad del paso, á la vez que se hacen las dos longitudes iguales OC' y OC'' bastante grandes para que una rueda de doce dientes llegue á tener flancos rectos en el interior del círculo primitivo. Ese último resultado se alcanza cuando se toma OC' igual al paso multiplicado por $\frac{6}{\pi}$ seno 75°. Si se examina más detalladamente esa construccion, se ve que es idéntica á la de la fig. 135, aunque, por supuesto, con la condicion de dar los mismos valores á las tres constantes correspondientes. R'C' y R''C'' son los diámetros de los círculos auxiliares de la figura 135, que para facilitar la comparacion se han dibujado ahora con líneas de puntos: los puntos C' y C'' corresponden á los puntos *a'* y *b'* de aquella figura: en lo tocante á los puntos P y Q, están determinados de igual modo en ambos casos. *Willis* reconoció tambien la identidad de los métodos.

§ 37

Séptimo procedimiento.—Empleo de las trayectorias polares como perfiles de elementos.

Si se deja que las trayectorias polares auxiliares que se emplean en el segundo procedimiento y se consideran como figuras cerradas, se vuelvan cada vez más pequeñas hasta reducirse á simples puntos, es evidente que estos puntos en la rotacion describirán *las dos trayectorias polares*. Esas trayectorias pueden tambien utilizarse como perfiles de elementos, con la condicion de que las dos axoides cilíndricas estén apretadas una á otra bastante firmemente, para que el roce producido en el punto de contacto tenga fuerza capaz de impedir el deslizamiento, y que por lo tanto los cilindros queden obligados á girar uno sobre otro. Es el *solo* caso en que los perfiles de elementos tienen un movimiento de mero arrollamiento ó rotacion. Trayectorias polares circulares de constante dimension dan ruedas cilíndricas (fig. 138), conocidas con el nombre de ruedas de friccion. Entre las aplicaciones bastante numerosas de estas ruedas, las más importantes son aquellas que se refieren á las ruedas de los ferro-carriles. Por lo demás, en el capítulo siguiente volveremos sobre la propiedad característica de la fuerza, que en las aplicaciones de ese género mantiene las dos axoides apretadas una á otra.

§ 38

Generalizacion de los procedimientos anteriores.

En la exposicion de los métodos estudiados hasta aquí nos hemos limitado siempre á considerar el arrollamiento cilíndrico, por más que tales métodos pueden tambien aplicarse al caso de axoides no cilíndricas. Esa aplicacion es fácil con las axoides de arrollamiento cónico, pero es mucho más laboriosa cuando se trata de axoides que *viran* la una con respecto á la otra ó que están dotadas de un movimiento de rotacion hiperboloide (véase § 13). Aquí hasta las leyes de movimiento más sencillas acarrean grandes dificultades, lo mismo para las consideraciones teóricas que para la ejecucion práctica. A la cinemática aplicada incumbe la tarea de resolver los casos más importantes, analizándolos tan completamente como sea menester. De una manera general se debe afirmar que entre los perfiles de elementos para axoides superiores, los más sencillos, como los de engranajes hiperboloides, ofrecen aun sérias dificultades de ejecucion, y ésta es una circunstancia que nos mueve á vislumbrar con modestia los resultados obtenidos hasta el presente. Sin embargo, nos interesa consignar aquí los laudables progresos que se han dado á la aplicacion de los axoides superiores en la industria, que podemos llamar reciente, de las máquinas de coser, y en la construccion de las máquinas agrícolas, por mucho que tales progresos se hayan realizado de una manera empírica, por decirlo así, y sin darse exactamente cuenta del carácter general de las investigaciones que los han impulsado. Peculiarmente á la primera de estas industrias debemos el desarrollo dado á los medios propios para asegurar la ejecucion rigurosa de las superficies envolventes, relativamente complicadas.

Los ejemplos que antes hemos citado eran en su mayor parte, ya que no en su totalidad, tomados del dominio de las ruedas dentadas ordinarias; siendo por lo mismo más ó ménos conocidos, ó si se quiere, familiares, para aquellos de nuestros lectores que han hecho de la técnica de las máquinas el objeto de un estudio científico. Sin embargo, los procedimientos que hemos indi-

cado, merecian llamar de nuevo la atencion, porque los hemos considerado colocándonos bajo un punto de vista enteramente general, y porque nos hemos propuesto mucho ménos formular reglas para trazar ruedas dentadas, que demostrar como dependian tales reglas de más elevado principio. Apartándonos un poco del punto de vista en que es costumbre colocarse, hemos logrado patentizar que ciertos resultados considerados y espuestos comunmente como el producto de reglas estrechas y limitadas, eran en realidad susceptibles de una utilizacion general. Escogiendo ejemplos familiares, hemos tenido precisamente por objeto hacer más inteligibles los resultados conseguidos y facilitar su aplicacion á casos más generales.

Ahora esperamos haber puesto en evidencia la posibilidad de formar un acoplo de elementos susceptible de realizar un movimiento cualquiera, por complicado que se le suponga, indicando los medios de determinar los perfiles que deben darse á los dos elementos. Tambien hemos demostrado que en los casos ordinarios en que las leyes de los movimientos que han de realizarse, son relativamente sencillos, se tiene á disposicion una variedad muy grande de soluciones. Mientras que en el siglo pasado procuraban los geómetras más eminentes hallar las soluciones especiales de problemas aislados y daban forzosamente á esas cuestiones importancia gravísima, existe hoy en un círculo mucho más vasto una abundancia de miras, que en su conjunto es casi más fácil de abarcar que antes lo era el caso aislado; y esa generalidad de miras deja, sin embargo, todavia al sentido práctico numerosas ocasiones de ejercitarse, porque á él le toca descubrir, de entre las soluciones variadas que se presentan, aquella que conviene escojer como mejor.

Quizás deba temer que se hayan fatigado algunos de mis lectores con las estensas esplicaciones que acabo de dar, porque la verdad es que hasta aquí no he podido avanzar sino muy despacio, y paso á paso por decirlo así, procurando ante todo poner en evidencia las dificultades de los problemas, más bien que desviarme de ellas. Pero siguiendo así he llegado poco á poco á determinar completamente las leyes particulares que deben presidir á la formacion de los acoplos de elementos desmodrómicos, lo cual era cabalmente el objeto que debia alcanzar. Verdad es que esas leyes no pecan de sencillas ni parecen evidentes al primer aspecto; más no por ello dejan de constituir verdaderas leyes, perfectamente determinadas, que son aplicables dentro de los límites que nos hemos trazado. Por este motivo no será inutil detenernos aquí un instante á llamar otra vez la atencion de los lectores sobre los sistemas que han sido generalmente admitidos hasta aquí, y que hemos bosquejado en la *Introduccion:* nos fijaremos particularmente en los sistemas fundamentales de *Laboulaye,* que están bastante generalizados, y respecto de los cuales hemos prometido dar esplicaciones más detalladas.

Propongámonos, pues, ahora determinar lo que verdaderamente representan los tres sistemas *palanca, torno* y *plano* de *Laboulaye,* que ofrecen un carácter tan marcado de generalidad geométrica, utilizando para resolver esa cuestion las nociones que hemos procurado adquirir en el último capítulo.

En el primer sistema el cuerpo móvil tiene un punto fijo; en el segundo *el cuerpo tiene dos puntos fijos ó una recta fija,* y por último, en el tercero *el obstáculo consiste en tres puntos fijos ó en un plano que pasa por dichos tres puntos.* Conviene ante todo notar que en el fondo no hay aquí ninguna alusion á la cadena cinemática, la cual segun hemos visto, es la espresion más general de la máquina, y en ella se encuentra simplemente el acoplo de elementos. Con efecto, la cuestion queda siempre reducida á un cuerpo único que se debe sostener, pero nunca á un sistema de cuerpos que formen un todo. Debemos limitarnos, pues, á no ver más que el acoplo de elementos en tales sistemas, por más que *Laboulaye* los declare á propósito para representar una espresion general de la máquina. ¿Pero, cuál es el acoplo que no tiene más que un punto fijo? Hemos visto (§ 5) que con un solo punto fijo el movimiento de un cuerpo está siempre esencialmente indeterminado, y que en semejante caso no es posible formar un acoplo de elementos desmodrómico ó una cadena de igual naturaleza. A no dudar, *Laboulaye* cita como ejemplo la palanca que tiene un movimiento oscilatorio, y que por lo tanto ejecuta una rotacion entorno de un eje: su sistema *palanca,* corresponde por lo mismo á nuestro acoplo inferior de elementos número 2 (§ 15): «Cuerpo de rotacion con su forma en hueco.» Pero segun el § 20, un acoplo de ese género exije nó *un* solo punto de apoyo, sino *seis* á lo ménos. Podria en verdad objetarse que el punto mantenido fijo del *sistema palanca* pertenece á un eje geométrico, de suerte que para espresarse de una manera más rigurosa, *Laboulaye* habria debido (ó querido) decir que dos puntos de ese eje, que en cierto modo pueden concebirse como una idealizacion del cuerpo, debian mantenerse en una posicion fija, y que en una proyeccion sobre un plano normal al

eje ambos puntos se confundian en uno solo. Más no pudo ser esa la intencion de *Laboulaye*, toda vez que dice cabalmente lo mismo de su segundo sistema, el *sistema torno*, y que no pudo por tanto haber cometido semejante error de exposicion; siendo por otra parte claro de toda evidencia que quiso hablar de un cuerpo y nó de su representacion ideal por un eje. Todo lo que es necesario para impedir los cambios de posicion de los dos puntos de ese eje geométrico, lo es igualmente, como hemos visto, para el cuerpo mismo, sabiendo que éste debe tener una forma determinada y que además con esta forma debe apoyarse en seis puntos á lo ménos. Si fuese cuestion de mantener fijo un solo punto, el cuerpo debiera tener la forma de una esfera, la cual exigiria á lo ménos cuatro puntos de apoyo, en cuyo caso no se efectuaria un movimiento forzoso, hasta que el centro de la esfera no pudiese cambiar de posicion, y todos los demás puntos estarian por lo mismo obligados á permanecer en superficies esféricas, siendo á la vez perfectamente libres de ejecutar cualesquiera movimientos en dichas superficies.

Supongamos ahora que con la espresion de *sistema palanca* quiso *Laboulaye* designar los acoplos de elementos que realizan lo que nosotros hemos llamado el arrollamiento cónico (§ 11); nada impide admitir *á priori* que así sea. Entonces el ejemplo que cita de la palanca no se acomoda á ese caso. «*El movimiento de un punto cualquiera que pertenece á la palanca, será de naturaleza* CIRCULAR *á cada instante, y además en general* ALTERNATIVO *en una máquina, efectuándose las más de las veces en un plano.*» Tenemos ahí una definicion que carece completamente de exactitud y claridad, pues contiene una nocion en verdad bastante oscura de los acoplos de elementos de movimiento oscilatorio, nocion que en virtud de su apariencia de profundidad y generalidad sedujo á cierto número de matemáticos, pero que no conviene sacar á relucir, sino se quiere verla inmediatamente rebatida y anonadada.

Los otros dos sistemas *torno* y *plano* dan márgen á observaciones semejantes. Actualmente en los tres sistemas no se ve muy claro lo que rigurosamente debe entenderse con las designaciones de *punto fijo* y de *plano inmutable;* en segundo lugar cabe preguntarse cuales son los caractéres particulares que permiten distinguir un sistema de los otros dos. Para ilustrarnos sobre esa materia tentemos la prueba inversa y busquemos en cual de esos sistemas puede clasificarse uno de los acoplos de elementos superiores que nosotros hemos logrado conocer. Escojamos, por ejemplo, el que forma el triángulo curvilíneo en el cuadrado. Para ese acoplo hemos visto que cuando se mantiene fijo el cuadrado, y se pone en movimiento el triángulo, todos los puntos de ese triángulo se mueven sin escepcion alguna. En cambio, segun *Laboulaye*, á lo ménos un punto debiera pertenecer al *sistema plano*, ya que por hipótesis, sus secciones normales se hallan privadas de salir de los planos en que se mueven; esos planos serian cabalmente los planos inmutables que, segun *Laboulaye*, caracterizan el tercer sistema. Podria sin duda interpretarse ese sistema en tal sentido; pero entonces el *acoplo de rotoides* habria de pertenecer al *sistema plano*, por más que antes hemos debido clasificarlo en el *sistema torno*. Por lo tanto, aquí carecemos de una base sólida y debemos hacer constar la falta de caractéres distintivos, susceptibles de definir claramente cosas de todo punto diferentes. No puede dudarse que esa definicion ó determinacion era y debia ser cabalmente el objeto principal de la clasificacion propuesta

Lo que acabamos de decir basta á todas luces para demostrar que ese sistema de clasificacion no puede sostenerse, y juzgamos inútil insistir más sobre ese punto. Por otra parte, no nos hemos propuesto hacer una crítica del tratado de *Laboulaye*, tanto ménos en cuanto que esa crítica debiera estenderse á otros autores que se le han apropiado tales ideas sin someterlas á un exámen bastante profundo. Disto mucho tambien de admitir que no se deban tener en gran consideracion los trabajos de ese investigador científico, á cuyos méritos he tributado justicia en la *Introduccion*. La crítica, además, estaria tanto ménos justificada en cuanto en la parte de su obra que trata de las aplicaciones, *Laboulaye* no ha sacado por decirlo así, consecuencias de los principios enunciados, y ha evitado así los graves errores á que le hubiera conducido la aplicacion de sus principios. Queria solamente demostrar con lo que he dicho, sobre cuán frágiles bases poco firmes y poco seguras se ha erigido ó creido poder erigir el gran edificio de la cinemática científica, y dar así al lector otra prueba palpable de la necesidad de sentar en forma de axiomas, principios fundados en un método completamente riguroso que abarque todos los casos particulares, á fin de alcanzar resultados que estén á cubierto de las objeciones.

CAPÍTULO IV

ACOPLOS DE ELEMENTOS NO INDEPENDIENTES

§ 39

Clausura ó cierre de acoplos de elementos por medio de fuerzas sensibles.

En el estudio de acoplos inferiores y superiores de elementos hemos supuesto hasta aquí que el apoyo recíproco de dos elementos cinemáticos combinados para formar un acoplo se verificaba de una manera completa, es decir, que cada uno de los dos cuerpos en razon de su facultad de resistencia y de la forma que se le atribuia, envolvia el otro, de suerte que formase por sí mismo el acoplo desmodrómico. Esplícita ó tácitamente hemos hecho además la misma suposicion al investigar las formas de los cuerpos más á propósito para impedir con el desarrollo de las fuerzas latentes las acciones perturbadoras de las fuerzas sensibles sobre los movimientos relativos que querian obtenerse. En ciertas circunstancias, sin embargo, podemos dispensarnos de llenar en todo rigor una condicion semejante, como puede hacerse por ejemplo, cuando se ha tenido la precaucion de eliminar del acoplo las fuerzas sensibles que obran en ciertas direcciones. En un caso semejante es obvio que no es absolutamente necesario que el cierre del acoplo se haga completamente por sí mismo, puesto que en los puntos situados en dichas direcciones, el apoyo ó el contacto material de los dos elementos deja de tener una utilidad directa.

Para eliminar la accion de una fuerza sensible, de direccion dada, el medio que hay que emplear, consiste en aplicar al elemento *a*, que se quiera hacer desmodrómico, otra fuerza dirigida en sentido contrario de la primera, y que le sea superior ó cuando ménos igual. Si la fuerza perturbadora es igual á P, se tendrá por consiguiente, á fin de paralizar su accion sobre el elemento *a*, que aplicar á ese elemento una fuerza igual y contraria á P. Si á esa última fuerza, que bajo el punto de vista del apoyo, reemplaza, en cierto modo al segundo elemento *b* del acoplo, se da para mayor seguridad el valor P+Q, el elemento *a* en el caso más desfavorable será oprimido sobre los puntos de apoyo opuestos por la fuerza P+Q—P, ó Q, á la cual resisten las fuerzas latentes del elemento combinado *b*. Las condiciones del equilibrio se encuentran así á cada instante establecidas de una manera general. La fuerza P+Q *cierra* en cierto modo el acoplo de elementos, que ha quedado abierto é incompleto en la direccion

—(P+Q), y por lo tanto proponemos designarla con el nombre de *fuerza de cierre* ó *de clausura*, reservando la espresion de *clausura de fuerza* para el cierre que se obtenga por ese medio. Los acoplos de elementos que necesitan semejante fuerza de clausura, no son en verdad independientes y quedan subordinados á la presencia de dicha fuerza.

Los acoplos de clausura de fuerza no son raros en la práctica de las máquinas. Un ejemplo primero hallamos en los gorrones y los soportes de la mayor parte de las ruedas hidráulicas, en las que el considerable peso de la rueda es casi siempre bastante para impedir que el gorron se alce verticalmente ni se separe de su soporte desprovisto de chapeta ó sombrero (fig. 139). Otra prueba nos suministran las traviesas de las grandes máquinas impelentes horizontales (fig. 140), en las que el peso del émbolo y su vástago impide que la traviesa guiada solamente por debajo y lateralmente, abandone la deslizadera. Los cuchillos de suspension de los platos de las balanzas (fig. 141) se mantienen tambien en contacto contínuo con los encajes ó muescas de los soportes por el peso de los platos suspendidos. En los platos giratorios de los ferro-carriles el propio peso del plato y el de la carga mantienen esa gran plancha apoyada en la superficie de los galetes, y lo mismo sucede con los gorrones de las gruas de muelle. Por último, un ejemplo muy conocido es el que ofrecen las ruedas de los ferro-carriles: merced á las fuerzas de clausura dirigidas verticalmente, se mantienen tales ruedas en contacto con su elemento combinado, el rail.

En todos esos casos, y en todos los del mismo género la clausura de fuerza se presenta como un medio natural cómodo, y que á veces permite simplificar la construccion de una manera notable. Todos esos casos además, no hacen otra cosa que realzar un solo modo de empleo de la clausura de fuerza, mientras que existen otros que debemos enumerar.

§ 40

Rotacion de axoides por clausura de fuerza.

En los casos que acabamos de mencionar la fuerza de cierre no hace más que impedir la separacion de elementos que han quedado incompletos; á la vez que en ciertas circunstancias se le asigna un fin mucho más importante; así por ejemplo, se llega á completar el apoyo recíproco de los elementos, por medio de la accion del roce, que es la consecuencia de dicho apoyo. Como tipo de ese género de aplicacion pueden citarse las ruedas de friccion (fig. 138) de que ya se ha hecho mérito en el párrafo 37. En esas ruedas la clausura de fuerza está destinada no solamente á mantener los dos discos en contacto, sino tambien á oprimirlas asaz fuertemente una con otra para impedir todo deslizamiento de las superficies de contacto, cuando hay trasmision de una fuerza tangencial: ó en otros términos, la fuerza de clausura tiene además por objeto obligar las axoides, que se confunden aquí con las mismas superficies cilíndricas, á girar una sobre otra.

Examinando más detenidamente lo que ocurre en este caso particular, podria notarse que la fuerza de clausura da por objeto apretar unas á otras las pequeñas rugosidades de la superficies en contacto y determinar, por ende, una accion análoga á la de los engranajes, mientras que la componente de las acciones ejercidas por tales asperezas en el plano de los ejes, queda contrarestada por la fuerza misma de clausura. En mecánica ese efecto de la comprension mútua de dos cuerpos en contacto, constituye lo que por abreviacion se designa con el nombre de *rozamiento ó roce* (§ 22), espresion que nosotros creemos deber conservar.

Ese último modo de utilizar la clausura de fuerza está, como el primero, bastante generalizado, y desempeña en particular un papel por demás importante en las ruedas motrices de las locomotoras, pues á él precisamente se debe el desarrollo de nuestro sistema de vias férreas: en los primeros tiempos parecia, como se sabe, tan ilusorio el principio de la adherencia sobre los rails, que no se quiso tentar la aplicacion, y se prefirió recurrir al empleo de acoplos de elementos provistos de perfiles de apoyo. Con tal motivo nos limitaremos á recordar las cremalleras de *Blenkinsop*, las del ferro-carril de Liverpool á Manchester, el sistema de muletas de *Brunton* y una série de otros dispositivos ménos prácticos aun.

La aplicacion de la clausura de fuerza para determinar la rotacion de axoides, es esencialmente distinta de la que tiene por objeto asegurar la clausura pura y simple de un acoplo de elementos que se ha dejado incompleto. Por lo demás, pueden ambos métodos aplicarse junta ó separadamente. En las ruedas motrices de las locomotoras se encuentran reunidos, mientras que en las otras ruedas la clausura de los elementos se efectua simplemente en virtud de la ley de la gravedad.

En los vagones de ferro-carriles podria obtener la clausura de los elementos con la adicion de un segundo acoplo compuesto de un rail y de un elemento correspondiente fijo en el vagon, estando dispuestos ambos elementos de manera que impidiesen todo levanta-

miento eventual del vagon, con respecto á los rails ordinarios, sin atender á los sistemas de ruedas motrices. El nuevo ferro-carril del Rigi presenta en efecto una disposicion de ese género. El movimiento del vagon en la via no es ya, en efecto, de simple clausura de fuerza, sino muy aproximadamente de clausura por acoplo. En virtud de la grande inclinacion de la via hubo de renunciarse á la rotacion de axoides por clausura de fuerza y volver al sistema de clausura por acoplo del antiguo ferro-carril dc Liverpool.

Por lo dicho se concibe que la clausura de fuerza tiene muy importantes y numerosas aplicaciones; pero cumple observar que no es enteramente perfecta. Si las fuerzas de clausura no son bastante grandes ó sobrevienen perturbaciones imprevistas, el acoplo pierde, temporalmente á lo ménos, la propiedad de ser desmodrómico. No obstante esa imperfeccion, la clausura de fuerza presta muy notables servicios á la práctica, como lo prueban los ejemplos recien citados, amen de que nos proporciona una categoria especial de elementos, que desde el punto de vista de las aplicaciones tienen aun más importancia que aquellos de que hemos venido tratando hasta ahora. De esos elementos vamos á ocuparnos en el párrafo siguiente.

§ 41

Elementos cinemáticos dúctiles.

La facultad de resistencia que hemos aceptado como una propiedad fundamental de los cuerpos con que deben formarse las máquinas, hasta aquí ha sido considerada por nosotros en los elementos cinemáticos como correspondiente á la rigidez perfecta ó á la inmovilidad completa de las partes más pequeñas de cada cuerpo con relacion unas de otras. Así suponíamos que la materia y las dimensiones de cada elemento eran debidamente escogidas segun las reglas de la ciencia de la construccion de las máquinas. Pero la introduccion del principio de la clausura de fuerza nos induce á sentar que es igualmente posible formar elementos cinemáticos con cuerpos desprovistos de los caractéres de la rigidez. Si escogemos, en efecto, cuerpos que, en *una* direccion á lo ménos, tengan la facultad de resistir las fuerzas sensibles de una manera casi perfecta, ó sea sin que la invariabilidad de las posiciones moleculares quede sensiblemente alterada, y si les aplicamos una clausura de fuerza que corresponda precisamente á esa facultad, podrán tales cuerpos funcionar exactamente como cuerpos capaces de resistir en todas direcciones.

Entre los cuerpos dotados de esa propiedad hallamos inmediatamente las cuerdas ó los cables, formados de materias fibrosas, las fajas ó correas de cuero ó de tejido, las cintas, los hilos y los alambres, las cadenas con sus diversas formas, y en una palabra, todos los órganos que no pueden oponer resistencia alguna notable á una fuerza distinta de la traccion, mientras que en la direccion misma de esa traccion pueden hacerse tan resistentes como se quiera. Por eso conviene comprenderlos todos bajo la denominacion comun de *órganos de traccion*

A causa de la flexibilidad en todas las demás direcciones los órganos de traccion se dejan combinar muy bien con cuerpos sólidos de todas formas, para dos acoplos de elementos. Así sucede, por ejemplo, con piezas guiadoras redondeadas (fig. 142), por las cuales se deslizan bajo la accion de una clausura de fuerza aplicada por ambos lados; con poleas (fig. 143), donde se arrollan por un lado y se desarrollan por el otro; con tambores (fig. 144), por los cuales se arrollan en espiral, etc., etc. Así se obtienen acoplos de elementos utilizables y utilizados bajo las más diversas formas, en las muflas, las gruas, las trasmisiones por correas, por cables, etc., donde representan, como sabemos, un papel importantísimo. Todos esos acoplos presentan la propiedad del envolvimiento recíproco de los elementos y tambien á veces la del encaje, sin que no obstante, esa última propiedad pueda considerarse entonces como fundamental: por cuya razon entran en la clase de los acoplos superiores de elementos.

Diametralmente opuestos á los órganos de traccion se presentan otros órganos que no pueden oponer resistencia más que á las fuerzas que tienden á aproximar sus moléculas unas á otras, y que por lo mismo conviene designar con el nombre de *órganos de compresion*. A esa clase especial pertenecen esencialmente todos los fluidos, líquidos ó gaseosos, como el agua, el aceite, el vapor, el aire, y los gases de toda especie. La clausura de fuerza debe aplicarse á esos diferentes órganos de manera que sin cesar tienda á producir la aproximacion de sus moléculas; más para que esas moléculas no se deslicen lateralmente, es necesario mantenerlas ejerciendo la misma presion sobre todas las superficies que limitan el fluido. Ese resultado se consigue fácilmente con las fuerzas latentes que se determinan encerrando el fluido en depósitos de forma y resistencia convenientes. Así sucede por ejemplo, en los conductos de agua y de vapor (figura 145), en los cilindros de las bombas, en los de las máquinas de vapor ó de máquinas impelentes (figu-

ra 146), etc. No tenemos necesidad de recordar aquí la importancia del papel que en la mecánica desempeñan los órganos de compresion de ese género.

Otra categoria de órganos que en el fondo está íntimamente relacionada con la anterior, se ha constituido poco há por medio de ciertos órganos de traccion que se han utilizado como órganos de compresion, quitándoles con el empleo de las *envolturas* debidamente dispuestas, la facultad de ceder lateralmente. De ese modo, por ejemplo, la cadena de *Galles* encerrada en un tubo como sucede en las gruas de *Neustadt* (figura 147), se encuentra sujeta á la compresion; y del mismo modo la lámina delgada de acero de un freno, aplicada al interior de un cilindro hueco (fig. 148), se ha vuelto capaz de soportar una presion en sus estremos libres: esas diferentes partes se apoyan entonces unas á otras como las dovelas de un arco ó de una bóveda. Los hilos metálicos se han utilizado tambien de análoga manera.

Los órganos de compresion comparten con los acoplos inferiores la propiedad del encaje, si bien que, teniendo en cuenta la movilidad de sus diferentes partes, aun las más pequeñas, conviene contarlos en el número de los acoplos superiores.

Si se comparan las dos especies de acoplos de elementos á que nos ha conducido aquí la clausura de fuerza, se descubre entre ellas íntimo parentesco. La necesidad de una clausura de fuerza permanente da por resultado obligar á no emplear nunca esos órganos sino para una direccion de fuerza determinada, lo que equivale á decir que los primeros no pueden utilizarse más que para la traccion sola y los segundos para la compresion. Obrando de abajo arriba sobre la cuerda en la figura 144, no se pone el tambor en movimiento, como tampoco se logra desplazar el piston en la figura 146 haciendo salir el líquido. Para tales acoplos, pues, la *clausura* no existe más que por *un solo lado*, es decir, son *monocinéticos*: esa es la propiedad que más adelante encontraremos en otros acoplos. Esta propiedad se debe á la flexibilidad de sus partes más pequeñas en todas las direcciones escepto una sola ó á lo ménos un número muy limitado. En los órganos de compresion, en que el estado de agregacion no existe, por decirlo así, esa flexibilidad constituye la *fluidez*, mientras que en los órganos de traccion se designa propiamente con el nombre de *flexibilidad*. Esas dos espresiones pueden á más reemplazarse con una sola, la de *ductilidad*, lo cual nos permite adoptar la espresion de *elementos dúctiles* para designar los órganos de traccion y de compresion cuando sirven para formar elementos cinemáticos.

Entre las dos categorias de órganos existe en cierto modo la relacion de lo positivo á lo negativo, relacion que se manifiesta inmediatamente en las direcciones de sus fuerzas de clausura respectivas. El tubo lleno de agua de la fig. 145 es cabalmente lo opuesto, lo contrario de la cuerda de traccion que señala la fig. 142; así como el cilindro cuyo émbolo está sometido por un lado á la presion del agua (fig. 146), corresponde al tambor de la fig. 144.

El mango de bomba hidráulica, cuyo uso se ha introducido en las bombas de minas, debe considerarse como la contraparte de la cuerda de traccion. De ahí resulta que los órganos de traccion y de compresion se completan mútuamente, lo cual es lógico, y tienen por lo tanto un valor equivalente en la série de los elementos cinemáticos. Por esto se ha de considerar como imperfecto el sistema de clasificacion propuesto por *Willis*, el cual, conforme hemos indicado en la INTRODUCCION, escluye los mecanismos que funcionan con los líquidos. Desde el momento en que las trasmisiones por correas, las muflas ó garruchas, etc., figuran entre los mecanismos «*puros*,» no es posible escluir las máquinas de vapor, de viento y de agua. Basta además reflexionar sobre la importancia del empleo que se da á los motores de vapor, para encontrar muy chocante que la máquina más esencial, la más generalizada y perfeccionada en sus movimientos deba considerarse «*impura*» bajo el punto de vista de la cinemática y escluida por lo tanto del estudio de esa ciencia. Muy al contrario, más adelante veremos con cuanto poder y buen éxito cumple cabalmente á la cinemática emprender el estudio de esa máquina.—Por otra parte, la opinion de *Willis* jamás ha sido admitida en principio, por más que no haya sido el objeto de una refutacion propiamente dicha. Prácticamente ha tenido el resultado de que las máquinas de fluidos, no obstante su importancia escepcional, apenas han sido tratadas bajo el punto de vista cinemático por los autores ingleses. En cuanto á los autores de otras naciones rara vez se han ocupado de ellas, y cuando lo han hecho, no han desplegado en su investigacion la energia que reclamaba semejante estudio.

§ 42

Los resortes.

Los órganos de traccion y de compresion constituyen, como hemos visto, elementos dúctiles que no son susceptibles más que de un solo modo de accion muy sencillo; pero en mecánica existe otra categoria de

elementos de esa especie, que pueden disponerse como se quiera en vista de un modo cualquiera de accion. Esos elementos son los *resortes*. Como se sabe, afectan distintas formas y son susceptibles de prestar grandes servicios, por supuesto, con la condicion de que se procuren guardar en su empleo, las reglas generales que hemos conocido necesarias para los elementos dúctiles precedentes, es decir, limitándose en cada caso particular, á un modo de accion única de la fuerza aplicada. La construccion de los resortes varia precisamente segun ese modo de accion y se puede, segun esto, distinguir los resortes de traccion, compresion, torsion y apoyo. Los resortes de flexion y torsion son por regla general, de metal, y á veces de madera, en tanto que los resortes de compresion y, ménos amenudo, los de traccion, están formados de cauchú y otras materias orgánicas.

La facilidad de dar á los resortes las formas más variadas permite disponer un órgano de ese género de tal manera que con frecuencia, considerado en su conjunto, se utiliza y puede realmente utilizarse para un modo de accion diferente del que corresponde á las secciones aisladas.

Así, por ejemplo, el resorte de hélice (fig. 149) considerado como un todo, debe cerrarse por fuerzas divergentes dirigidas en sentido del eje, es decir, debe tratarse como un órgano de traccion, mientras que, segun el modo de carga correspondiente á las secciones trasversales, es un resorte de torsion. Si se dispone el mismo resorte de manera que en el estado de reposo las espiras no se toquen, puede considerarse como órgano de compresion, más entonces como todo órgano de ese género, debe protejerse contra la desviaciones laterales por el aditamento de una envoltura Segun el modo de carga de los hilos que lo componen, el resorte de la fig. 150 seria un resorte de traccion propiamente dicho, mientras que considerado en su conjunto, debe ser y es en efecto designado como resorte de torsion.—Los resortes de flexion simples y compuestos se utilizan, como se sabe, de varias maneras en el material de ferro-carriles, lo mismo que varias especies de resortes de torsion. Hay igualmente un resorte de apoyo, el de *Adam*, que es de uso poco generalizado hasta ahora. En las diferentes aplicaciones de los resortes de todo género á las máquinas, conviene vigilar que estén puestos al abrigo de toda fuerza perturbadora.

Los resortes convienen muy bien para producir la clausura de fuerza en acoplos de elementos no independientes y encuentran en este sentido numerosas aplicaciones, entre las cuales pueden citarse aquellas que se refieren á las guarniciones de émbolos, á los trinquetes de ruedas de escape, etc.—Desempeñan además como colectores de fuerzas motrices un papel muy importante, del cual nos reservamos hablar más tarde. Los resortes constituidos por materias orgánicas, como el cauchú, las fibras vegetales, los tendones de animales, etcétera, se parecen mucho á los órganos de traccion, en tanto que los formados de materias sólidas tienen mucha más analogia con los elementos rígidos.—En su modo de funcionar los resortes ofrecen semejanza con los órganos de presion gaseosos, ya que como ellos, son elásticos entre límites relativamente estensos. Bajo ese punto de vista son esencialmente distintos de los elementos rígidos, á pesar del parentesco que acabamos de señalar. En estos últimos la flexibilidad tiene efectivamente un valor muy escaso, despreciable de todo punto, mientras que en los resortes se procura al contrario hacer muy grande esa flexibilidad.

§ 43

Clausura de acoplos de elementos por las cadenas cinemáticas.

La clausura de un acoplo de elementos no independientes puede tambien llevarse á cabo por medio de una cadena cinemática. Dos cilindros *a* y *b* (fig. 151), provistos de dientes, ó dos ruedas rectas segun la espresion técnica, tienen en la hipótesis de una endentadura exacta y sin juego, las superficies envolventes necesarias para el apoyo en la direccion de la tangente TT; estas superficies que son las de los contornos dentados, pueden igualmente estar dispuestas de un modo que impida la aproximacion de las dos ruedas; más no existe ningun apoyo contra las fuerzas que tienden á separarlas la una de la otra en la direccion de la normal NN. Es posible además introducir superficies á propósito para asegurar este apoyo, recurriendo á uno de los métodos que hemos estudiado en el capítulo anterior. Escojamos el quinto procedimiento (§ 35), en el cual como perfiles se utilizan curvas paralelas á las cicloides ó rodezuelas; y entonces encontramos como acoplo de perfiles conveniente á nuestro caso, un acoplo constituido por dos paralelas á la trayectoria del centro de una de ambas ruedas, es decir, por una ranura circular así como por una curva paralela á ese mismo centro, ó sea por un círculo. En la fig. 152 ese acoplo de perfiles se presenta en forma de una ranura circular para la rueda *a* y de un gorron cilíndrico para la rueda *b;* habiendo entonces apoyo lo mismo contra las fuerzas que tienden á separar las dos ruedas que contra las

que tienden á aproximarlas. Si por otra parte admitimos que se hayan tomado las disposiciones necesarias para impedir todo desplazamiento en el sentido paralelo á los ejes de las ruedas, tendremos un acoplo completamente cerrado.

Para las aplicaciones ordinarias de los engranajes ese modo de clausura no seria muy práctico; pero un poco más adelante veremos que existen ejemplos. Comunmente se prefiere recurrir al empleo de una cadena cinemática entre *a* y *b*, la cual es fácil de realizar. Al efecto, se puede por ejemplo armar una de las ruedas *a* y *b* con un pequeño cilindro lleno, que tenga el mismo eje que la axoide correspondiente, y envolver esos dos cilindros con dos cubos reunidos en una traviesa rígida *c* (fig. 163). El apoyo en la direccion normal NN se encuentra así completamente asegurado, de suerte que se puede aquí, lo mismo que en la disposicion precedente, dispensarse de hacer encajar los vértices de los dientes de una rueda en los huecos de los dientes de la otra, lo que equivale á decir que puede prescindirse del encaje riguroso de tales dientes. En vez de un *acoplo* cinemático cerrado se tiene á la sazon una cadena cinemática cerrada compuesta de tres miembros; los dos primeros son los cuerpos cilíndricos dentados *a* y *b* con sus árboles conaxiales, y el tercero la traviesa ó travesaño de union *c* con sus dos cubos ó cilindros huecos que envuelven los ejes de ambas ruedas.

La *clausura por cadena*, por medio de la cual acabamos de cerrar y hacer por lo tanto completamente desmodrómico el acoplo no independiente que se nos habia dado, es de grandísima utilidad y tiene, como sabemos, numerosas aplicaciones no solamente en los engranajes cilíndricos, sino tambien en los engranajes cónicos, hiperboloides, helicoidales, etc.; es el modo de clausura cuyo empleo está más difundido.

Tambien á veces se hace simplemente uso de esa clausura para realizar una pequeña simplificacion en la ejecucion, por más que exista el elemento propio de la clausura del acoplo: pero entonces se prescinde de ejecutarla por entero. El mecanismo de tornillo ó de husillo representado bajo dos formas diferentes en las figuras 154 y 155, se compone de tres miembros: el tornillo fileteado *a* con dos gorrones de rotacion conaxiales, la tuerca *b* formada de un prisma paralelo al eje del tornillo, y la pieza prismática *c*, que sirve de guia á la tuerca á la vez que soporta los gorrones de tornillo. Considerados separadamente en la fig. 154 cada uno de los tres acoplos se encuentra completamente cerrado, mientras que en la fig. 155 la clausura entre *b* y *c* es incompleta; el apoyo contra el levantamiento de la tuerca *b* debe entonces producirse por el miembro contiguo *a*, que por lo demás se encuentra en realidad perfectamente adecuado al objeto. Así pues, en tal caso al lado de una clausura de acoplo incompleto se usa una clausura por cadena, que es de aplicacion fácil.

La clausura por cadena puede tambien utilizarse á la par de la clausura de fuerza. La rueda de escape comun (fig. 156) ofrece un ejemplo. El movimiento del estremo del trinquete que obra en el vacio de los dientes de la rueda es de clausura de fuerza, desde el momento en que ese estremo deslizándose atrás por los dientes va á colocarse en un vacio; en tanto que el movimiento de la articulacion de ese trinquete que se efectua siguiendo un arco descrito desde el centro de la rueda, es de clausura por cadena. Ese mecanismo es al propio tiempo monocinético, es decir, tiene la propiedad señalada con motivo de la figura 144.

Un ejemplo instructivo de la coexistencia de las dos clausuras, una por fuerza y la otra por cadena, nos proporciona la prensa hidráulica (fig. 157), en la que hacemos ante todo abstraccion de las válvulas de la bomba. El recipiente *d* efectua una clausura por cadena entre los émbolos *a* y *b*, puesto que forma con cada uno de ellos un acoplo prismático. Al propio tiempo forma clausura de fuerza para el líquido *c* que envuelve, mientras que las presiones sobre los dos émbolos constituyen la clausura de fuerza en las direcciones de movimiento de los estremos del cuerpo líquido. La prensa hidráulica bajo el punto de vista cinemático viene á ser la contraparte de una máquina de aspecto muy diferente, la mufla, puesto que el agua, órgano de compresion, se encuentra sustituir á la cuerda, órgano de traccion. Si en la última máquina se suponen las poleas ordinarias reemplazadas arriba y abajo con dos piezas fijas de deslizamiento *a* y *b* (fig. 158), la concordancia lógica de ambos mecanismos salta á la vista (a).

En ese último caso la cadena no tiene realmente más que tres miembros; más esto se esplica naturalmente, ya que los órganos de traccion no necesitan mantenerse entre las paredes de un recipiente, amen de que el movimiento de la pieza *b* en el movimiento general, es tambien de clausura de fuerza (merced á la carga). La analogia entre ambos mecanismos seria aún más comptela, si en su movimiento hácia *a* la pieza *b* se encontrase guiada por medio de un acoplo de

(a) Es un error bastante generalizado el que la accion de la garrucha ó mufla depende de los *discos móviles*, de las poleas, por más que éstas tengan simplemente por objeto disminuir el rozamiento perjudicial que habria con guias tales como *a* y *b*. Semejante error no puede dejar de impedir que nos formemos una idea clara del mecanismo.

prismas. A propósito de esto cumple observar que desde algun tiempo llama más y más la atencion esa permutabilidad entre los órganos de traccion y compresion de que acabamos de ofrecer un ejemplo. Los martinetes de presion de aire, cuyo uso es de fecha relativamente reciente, están en oposicion simple y directa con los antiguos martinetes movidos por alambres ó barras de hierro; la misma relacion existe entre el mango hidráulico (de simple efecto) de las bombas de minas y el mango de traccion ordinario hecho de hierro; y así tambien existe, parcialmente al ménos, entre la grua hidráulica y la grua de cuerda ó cadena. La rueda hidráulica (fig. 159) da otro ejemplo de un mecanismo de dos géneros de clausura. El agua que corre por el canal *c* se encuentra aquí sometida tambien á doble clausura, producida de un lado por las fuerzas latentes de las paredes del canal, y de otro lado por la gravedad que impide al agua escaparse por arriba. En la parte curva del canal el agua forma un acoplo de elementos con las cavidades de las paletas de la rueda, del mismo modo que forma otro con el canal. Por su parte la rueda se encuentra relacionada á ese canal por los gorrones de rotacion y sus soportes de manera que dé lugar á una clausura por acoplos. La cadena cinemática tiene en este caso tres miembros: la rueda *a* con su eje, el agua *b* y el canal *c* con los soportes de los gorrones. Por medio de la cadena se hace el acoplamiento del elemento dúctil *b* con el elemento *a*, mientras que la clausura de fuerza, que á la par existe, produce un verdadero encaje del elemento dúctil *b* con las paletas de las ruedas y tambien con el canal que en definitiva debe considerarse como un recipiente incompletamente cerrado.

La rotacion de axoides de que antes hemos tratado (§§ 37 y 40) puede igualmente en ciertos casos realizarse con una clausura de cadena en vez de una clausura de fuerza, dándonos de ello un ejemplo notable el ferro-carril de *Fell*. En el sistema de *Fell* la presion de las ruedas motoras contra los rails, en vez de efectuarse como de ordinario por la gravedad, se debe al empleo de una cadena cinemática compuesta de un sistema de resortes que tiene por objeto apoyar contra un rail central las ruedas motrices dispuestas horizontalmente. En ese caso y en varios otros análogos el resorte puede utilizarse de una manera muy ventajosa, como quiera que sirve como elemento dúctil elástico con fuerza variable; amen de que con semejantes sistemas de resortes se deja á veces cierta indeterminacion en los movimientos que deben efectuarse, es decir, se da una especie de preponderancia á la clausura de fuerza ordinaria.

§ 44

Clausura cinemática completa de los elementos dúctiles.

Acabamos de ver como pueden los elementos dúctiles por medio de la clausura por acoplo y de la clausura por cadena, ser susceptibles de aplicaciones cinemáticas muy importantes bajo el punto de vista práctico; igualmente hemos encontrado que en todas las aplicaciones citadas la clausura de fuerza era necesaria, si bien que en diferente medida segun los casos. Así por ejemplo, en el dispositivo en la fig. 142 la clausura de fuerza tiene por objeto mantener invariable la direccion de la cuerda, impidiendo los efectos de las fuerzas perturbadoras que tendieran á ejercerse en una fibra cualquiera de esa cuerda, en la prensa hidráulica la clausura de fuerza se reduce á una presion ejercida de arriba abajo en los dos émbolos. Ahora nos es posible ir más léjos y llegar á prescindir por completo de la clausura de fuerza, es decir, sujetar los elementos dúctiles, sin ninguna restriccion, al principio maquinal.

Puede eliminarse la clausura de fuerza recurriendo á una combinacion conveniente de cadenas de clausura de fuerza. La trasmision por correa (fig. 160) es el mejor ejemplo que puede citarse tocante al particular. Si entre las dos poleas *a* y *b* ejecutadas como cuerpos de rotacion y provistas de gorrones concéntricos, se intercala la barra de union *d*, que lleve los soportes de esos gorrones, y se arrolla entorno de las dos poleas una correa de una sola pieza *c*, correa dicha sin fin, se obtiene una cadena cinemática, en la que el elemento dúctil *c* se encuentra completamente emancipado de la clausura de fuerza. Esa cadena puede sin disputa considerarse como una combinacion de dos cadenas simples análogas á las de la fig. 143, y en las cuales las fuerzas de clausura obrarian en sentido opuesto

La clausura por cadena ofrece por lo demás un doble modo de accion. En primer lugar, conforme hemos visto, hace supérflua la clausura de fuerza para el elemento dúctil *c*, reemplazándola con la accion de la fuerza latente que se desarrolla en la barra de union *d;* en segundo lugar determina tambien el arrollamiento de las axoides, cuya realizacion por medio de la clausura de fuerza se ha indicado en el § 40. En la hipótesis de poleas de forma cilíndrica las axoides están aquí constituidas por una parte con las superficies esteriores de las poleas, y por otra con las superficies internas de las hebras de correas que se arrollan y desarrollan. La presion que ejercen tales superficies, las unas con-

tra las otras, merced á la accion que produce en ambos sentidos la fuerza latente desarrollada en la barra de union, tiene por objeto impedir todo deslizamiento relativo. La cadena así obtenida tiene cuatro miembros: las dos poleas *a* y *b* con sus ejes, la correa *c* y la barra de union *d* con sus soportes; los movimientos que se efectuan en esa cadena son absolutamente los mismos que si estuviese formada de elementos rígidos. Todo movimiento angular de una de las poleas determina un movimiento semejante á la otra. La cadena se presta igualmente á la inversion, es decir, se puede fijar uno cualquiera de sus miembros con la condicion de tomar las precauciones necesarias para evitar toda accion trasversal sobre la correa misma.

Como contraparte de ese mecanismo podemos considerar la cadena cinemática que representa la fig. 161. Dos émbolos *a* y *b* que se mueven en dos partes cilíndricas ó prismáticas de un recipiente, sobre las cuales están ajustados exactamente, se hallan unidos de una manera cinemática por las columnas líquidas *c* y *b*. Si el émbolo *a* se pone en movimiento hácia la derecha, la columna de agua que se encuentra al mismo lado obliga el émbolo *b* á moverse hácia la izquierda y empujar por consiguiente hácia atrás del émbolo superior, una cantidad de agua igual al volúmen que engendra el desplazamiento de ese émbolo. Suponiendo que se ha tenido el cuidado de llenar exactamente de agua todo el interior del recipiente y eliminar el aire mezclado mecánicamente con esa agua, la accion que acabamos de indicar se realiza de una manera completa, es decir, la clausura de la cadena es tan perfecta como si esta cadena se compusiera tan solo de elementos rígidos. Eso es por lo demás lo que demostró *Anderssohn* de una manera concluyente y por medio de esperimentos, efectuados sobre tubos que tenian hasta 3,000 metros de longitud y que estaban destinados á formar mangos de bomba hidráulicos de simple efecto, dispuestos como la cadena de la fig. 157. Todo desplazamiento, por pequeño que sea, de uno de los émbolos, se trasmite inmediatamente al otro. El mecanismo de la fig 161 que solo se produce tardiamente como contraparte de la trasmision por correa, ha llegado estos últimos años á tener numerosas aplicaciones bajo el nombre de mango hidráulico (ó árbol hidráulico) de doble efecto. La circunstancia de que ese mecanismo se ha considerado por gran número de ingenieros como una novedad, es un indicio evidente del desarrollo ó por mejor decir, de la formacion en que se encuentran las ideas tocante al particular.

Así como los órganos de traccion y compresion, pueden tambien los resortes introducirse con clausura por cadena en los mecanismos de manera que se produzca una desmodromicidad perfecta. Hallamos un ejemplo de ello en el resorte de los relojes (fig. 162). Atado por uno de sus estremos al cilindro *c* y por el otro al tambor *b*, el cual está acoplado con *c* y es solidario del rodaje del reloj, el resorte está intercalado como un miembro de una cadena cinemática cerrada, y se encuentra aquí ser de utilidad especial para una máquina en la que una marcha rigurosamente desmodrómica es una necesidad de primer órden.

CAPÍTULO V

CADENAS CINEMÁTICAS NO INDEPENDIENTES

§ 45

Puntos muertos en los mecanismos.—Modo de salvarlos por medio de fuerzas sensibles.

La propiedad característica de ser no independientes que hemos observado en ciertos acoplos de elementos y que hemos aprendido á remediar, se presenta tambien para gran número de cadenas cinemáticas y se corrige por medios análogos. Así por ejemplo, en el caso de la balanza ordinaria podria decirse que en razon del modo de union de sus miembros por los cuchillos de suspension la cadena debe considerarse como no independiente, pero esa no independencia es precisamente la misma que la de los acoplos de elementos, y por lo tanto parece inútil insistir más en este asunto. Aquí, pues, nos ocuparemos únicamente de la no independencia de las cadenas que se pueden componer enteramente de acoplos cerrados, ó en los cuales está preparado de un modo cualquiera á la clausura de los diferentes acoplos.

Cuando en un mecanismo cualquiera se efectua un movimiento en condiciones tales que uno de los miembros tome el movimiento que le es propio bajo la accion de fuerzas sensibles, no se sigue necesariamente que el movimiento es contínuo. Así por ejemplo, en la disposicion representada por la fig. 163 el mecanismo se pone y se mantiene en movimiento por la accion de una fuerza que permanece siempre normal á la direccion del manubrio *a*, y que obra sobre el boton 2 de este manubrio, de suerte que merced á la intermediacion del miembro *b* la pieza toma un movimiento alternativo en la deslizadera 4. Más si en vez de aplicarse la fuerza motriz al boton del manubrio *a*, obrase sobre la ranurita *c* para hacerlo pasar alternativamente de $3'$ á $3''$ y de $3''$ á $3'$, cambiando de direccion al fin de cada carrera, la continuacion del movimiento hácia los puntos $3'$ y $3''$, á los cuales corresponden las posiciones $2'$ y $2''$ del boton del manubrio, no estaria asegurado; pues por cada una de las posiciones la fuerza motriz iria á pasar por el punto fijo 1 del soporte y su accion quedaria por lo tanto destruida por la fijeza del miembro *d*.—Las dos posiciones que acabamos de indicar llevan el nombre muy conocido de *puntos muertos*

del mecanismo. Esa denominacion se esplica naturalmente si reflexionamos que la cadena procede entonces con relacion á la fuerza motriz como un cuerpo rígido unido al miembro fijo, que ha perdido toda movilidad, toda vida, y que por lo tanto constituye aquí un cuerpo muerto. Vamos á generalizar ese concepto aplicándolo no solamente, como lo hizo *Watt*, al mecanismo del manubrio, sino tambien á los demás mecanismos para los cuales puede tener cierta utilidad.

Varios procedimientos se han puesto en práctica para salvar ó como se dice tambien, para pasar los puntos muertos en los mecanismos. Uno muy generalizado para los casos análogos al anterior consiste en la aplicacion de las *masas pesantes* ó los *volantes* á ciertos miembros de cadena que en la posicion de un punto muerto del miembro accionado por la fuerza sensible, tienen una celeridad suficiente para que la *fuerza viva* almacenada en tales masas sea capaz de mover el mecanismo más allá de ese punto muerto. Para el mecanismo de manubrio, cuando se emplea en la máquina de vapor, el *volante* está sujeto al manubrio mismo. El volante es el que desarrolla en tal caso la fuerza *sensible* necesaria para la continuacion del movimiento; y por consiguiente la continuidad del movimiento se obtiene en ese caso por *clausura de fuerza*. En la locomotora es la masa entera de todo el aparato, animada de movimiento rectilíneo, la que produce el paso de los puntos muertos cuando la máquina está en plena marcha. Sin embargo, las más de las veces se disponen las masas destinadas á representar el papel de volantes en cuerpos dotados de un movimiento de rotacion. En algunos casos encuéntranse tambien simples pesos que sin tener velocidad especial suministran de una manera estática la clausura de fuerza necesaria para el paso de los puntos muertos.

§ 46

Paso de los puntos muertos por clausura de cadena.

El empleo de la clausura de fuerza para el paso del punto muerto no se ha adoptado esclusivamente en todos los casos. En el dominio de la máquina de vapor se ha tenido sobre todo con frecuencia la ocasion de recurrir á otro principio. Ha tenido que hacerse en todas las circunstancias en que el paso del punto muerto debe efectuarse cuando el mecanismo solo tiene escasa velocidad, sensible apenas, como sucede por ejemplo, en las locomotoras, las máquinas de buques, las máquinas de estraccion de las minas, etc., en las cuales se tienen frecuentes alternativas de pasos y arranques de marcha. Esotro principio consiste en el *empleo auxiliar de una segunda cadena cinemática*, que está sujeta á la primera, de suerte que se encuentra en una posicion activa cuando la otra está en el punto muerto. Las más de las veces se sujetan entre sí dos cadenas idénticas que ofrecen la ventaja de ejercer acciones perfectamente recíprocas.

Así, para salvar puntos muertos el mecanismo de manubrio se sujeta á otro mecanismo idéntico (fig. 164), de suerte que siendo paralelas las direcciones de deslizamientos, los dos manubrios se encuentran afirmados en ángulo de 90° el uno respecto del otro, en un eje comun; es una disposicion empleada en todas las locomotoras, y que de una manera general es de uso muy difundido para todas las máquinas gemelas ó acopladas. En vez de afirmar los manubrios en ángulo recto pueden inclinarse las dos deslizaderas de 90° una hácia otra (fig. 165), y entonces un manubrio solo puede servir para los dos mecanismos; esa disposicion se encuentra en gran número de máquinas de buques de hélice, y tiende igualmente á introducirse en ciertas máquinas fijas. En ese caso como en el anterior, se supone naturalmente que la fuerza motriz (la presion del vapor) obra sobre los cuerpos c y c'.

Otro mecanismo en que el paso del punto muerto se efectua por medio de una clausura de cadena tenemos representado en la fig. 166. Dos manubrios iguales y paralelos a y c, están aquí articulados á una barra ó biela b, cuya longitud es precisamente igual á la de la barra de union d. La figura 1,2,3,4, es por consiguiente un paralelógramo; las posiciones 1,2′,3′,4 y 1, 2″, 3″, 4, corresponden á los puntos muertos, lo mismo en el caso en que la fuerza motriz obra sobre a que en aquel en que obra sobre c. El paso de los puntos muertos se ha hecho posible con el aditamento de una segunda cadena $a'b'c'd'$ (fig. 167), igual á la primera y unida con ella de modo que los manubrios a' y c' sean respectivamente perpendiculares á los manubrios a y c y estén armados sobre los mismos ejes y que además d'' esté invariablemente unido á d, es decir, que las dos piezas d y d, estén las dos sujetas y fijas. Las locomotoras de ejes acoplados suministran un ejemplo de esa disposicion.

Otro método aplicable al mismo mecanismo consiste en establecer en el plano de los dos manubrios b y d (fig. 168) un tercer manubrio b', igual y paralelo á los otros dos, en acoplarlo con ellos por las bielas 6,3 y 6,4, y reunir el soporte de su eje con la traviesa a, de tal suerte que las figuras 1,4,6,5 y 3,2,6,5, sean igualmente paralelógramos. Así obtenemos juntas *tres*

cadenas idénticas á la primera y una de las cuales tan solo puede encontrarse en un punto muerto, cuando los tres puntos 4,3 y 6 forman un triángulo. Bastante amenudo se encuentran aplicaciones de ese mecanismo, que lo propio que la anterior, se utilizan para trasmitir movimientos de rotacion.

§ 47

Clausura de cadenas cinemáticas por medio de acoplos de elementos.

Hace poco hemos visto (§ 42) que en ciertos casos pueden cerrarse acoplos de elementos por medio de cadenas cinemáticas; el procedimiento inverso, que consiste *en la clausura de cadenas cinemáticas por acoplos de elementos*, es mucho ménos el recíproco del primero que un sistema de clausura que puede utilizarse como adicion á una clausura por cadena existente, más no bastante.

Ya en el mecanismo que representa la fig. 163 hemos podido hacer una observacion que dista mucho de ser indiferente respecto de la sucesion de las diversas faces del movimiento. Imaginemos que el manubrio girando á la izquierda llega de 2 al punto muerto 2′ en virtud del desplazamiento de la pieza *c* á la que se encuentra aplicada la fuerza motriz; si ahora dejamos obrar esa fuerza en sentido contrario y si el paso del punto muerto no está asegurado por una clausura de fuerza ni por una clausura de cadena, es evidente que lo mismo puede efectuarse un movimiento adelante del manubrio, en el semi-círculo *inferior*, que un movimiento atrás en el semi-círculo *superior*. Por lo tanto, el movimiento en la cadena no es completamente desmodrómico, ó la clausura no es perfecta, entendiéndose una clausura en virtud de la cual un movimiento cualquiera de uno de los miembros no origina más que un *solo* y *único* movimiento de cualquier otro miembro de la cadena. No obstante, el movimiento retrógrado que acabamos de mencionar respecto del manubrio *a*, no es en el fondo diferente del movimiento que se ha efectuado antes, toda vez que se puede considerar el desplazamiento de la ranurita *c* de izquierda á derecha, como si fuese tambien un movimiento retrógrado, y que por ende, la relacion entre los movimientos del manubrio y de la ranurita sigue siendo la misma que en el período anterior.

En circunstancias análogas se llega á un resultado muy distinto tocante al mecanismo de los dos manubrios paralelos de la fig. 166. Supongamos que ese mecanismo pase de la posicion 2,3 á la posicion 2′3,′ (fig. 169), girando en el sentido de la saeta, y que á falta de toda disposicion especial para el paso del punto muerto, el manubrio *a* continua moviéndose en el mismo sentido, ó sea adelante; puede suceder que el manubrio *c* en vez de seguir tambien adelante, tome un movimiento retrógrado, de modo que esté por ejemplo, en la posicion 3 cuando *a* ha llegado á 2‴, y que se encuentre en la posicion 4,3″, correspondiente á un punto muerto, cuando en su movimiento directo *a* ha llegado á 1,2′. A partir de esa última posicion el movimiento retrógrado de *c* puede continuar por el semi-círculo inferior, si *a* continua moviéndose en el sentido de la flecha, de 2″ á 2, etc.—En definitiva, para un movimiento directo del manubrio *a*, el movimiento del manubrio *c* puede ser lo mismo directo que retrógrado, y la ley de ese último movimiento es enteramente distinta de la del primero. El paso de uno de los sentidos del movimiento al otro puede efectuarse en cada uno de los dos puntos muertos, de suerte que en realidad la cadena no se encuentre cerrada en ninguno de ambos. Las dos disposiciones indicadas en las figuras 167 y 168 para asegurar el paso de los puntos muertos, dan igualmente por resultado el producir la clausura de esa cadena en el sentido riguroso que damos á la espresion de clausura. Si dejamos de aplicar esos dispositivos que completan la clausura, puede efectuarse en los puntos muertos un cambio radical de la ley del mecanismo, el cual por lo tanto viene á ser del todo distinto del que era al principio. Designaremos con el nombre de *posicion* ó *punto de inversion* toda posicion de los miembros de un mecanismo, en virtud de la cual pueda producirse una modificacion de ese género. La clausura por cadena indicada con dos formas en la fig. 167 y 168 da por resultado mantener el mismo sentido de movimiento para los dos manubrios. Veamos ahora de qué manera debe efectuarse la clausura para que los dos manubrios estén obligados á girar en sentidos contrarios.

Aquí como generalmente en todas las cadenas que tienen puntos de inversion, puede obtenerse dicha clausura *uniendo los miembros que quedan sin clausura á los puntos de inversion, por medio de un acoplo de elementos que corresponda precisamente á la clase de movimientos que se quiera realizar para el mecanismo.*

La aplicacion de esa idea exige, conforme hemos visto en el capítulo III, que se conozcan las axoides ó las trayectorias polares de los cuerpos que han de acoplarse. Esos cuerpos son aquí, por ejemplo, los dos manubrios *a* y *c*, ó los dos miembros *b* y *d* (fig. 169), y de una manera general dos miembros opuestos en la ca-

dena de cuatro miembros, formada de cuatro acoplos cilíndricos paralelos (fig. 10), cuyas trayectorias polares hemos buscado anteriormente (§§ 8 y 9). Esas trayectorias se presentaban entonces como figuras muy complicadas; pero ahora en razon de la igualdad de los miembros opuestos se reducen á formas notoriamente más sencillas. Están representadas en la fig. 170; é importa no perder de vista que esa figura se ha trazado suponiendo los manubrios animados de movimientos en sentidos contrarios, es decir, *anti-rotativos*.

Para los miembros *a* y *c*, los más cortos, esas trayectorias son elipses, cuyos focos son los estremos 1,2 y 3,4 de los manubrios y cuyos ejes mayores AB y CD son respectivamente iguales á las longitudes de los miembros de union *b* y *d*; sobre esas dos líneas *b* y *a* oscila el polo P, coincidiendo constantemente con su punto de interseccion. Las trayectorias de esos miembros *b* y *d* son *hipérboles* cuyos ejes principales EF y GH, que coinciden en direccion con *b* y *d*, son ambos iguales á la longitud de los manubrios *a* y *c* y tienen sus focos en los puntos 2,3 y 1,4; el polo O recorre cada brazo de hipérbole hasta el infinito, para pasar enseguida en el otro brazo á $-\infty$.

Un acoplo que debe establecerse entre dos miembros opuestos, en vista de un punto de inversion, ha de ser en todo caso un acoplo superior, pero no es necesario que se estienda más allá de las pequeñas porciones de arcos de trayectorias que tienen que girar uno sobre otro, durante el paso de los puntos de inversion. Si por ejemplo, escojemos para acoplarlos los dos miembros *a* y *c*, esos pequeños arcos corresponden á los vértices A,B y C,D, situados á los estremos de los ejes mayores de ambas elipses. Si aplicamos en estos puntos un diente y una parte hueca correspondiente, como lo indica la fig. 171, obtenemos un mecanismo de cadena completamente cerrada, que fuí el primero en dar á conocer con la designacion de *manubrios anti-rotativos*. Más adelante volveremos á ocuparnos de ese mecanismo y lo presentaremos con otra denominacion. Si en cambio se han de acoplar los dos miembros más largos *b* y *d*, basta observar que para las posiciones de inversion los vértices F y G ó E y H se ponen en contacto. Si para cada una de esas dos séries de puntos establecemos de nuevo un diente y el vacio que le corresponda (figura 172) obtenemos un acoplo que cierra completamente la cadena. Así pues, dos son las soluciones que encontramos para el problema propuesto. Aun podríamos ir más adelante aplicando el primer modo de clausura á uno de los puntos muertos y el segundo al otro.

Otro ejemplo notable de la clausura de una cadena de punto de inversion por un acoplo es el que sigue: Si en el mecanismo representado por la fig. 163 se toma la longitud del miembro *b* igual á la del manubrio *a*, la ranurita ó canalita, con un cuarto de vuelta de ese manubrio, se encuentra trasladada del estremo 3′ de su carrera hasta el centro de rotacion 1, y con una nueva rotacion de 90° en el mismo sentido llegaria á una posicion simétrica de la que ocupaba al principio, si cabalmente para la posicion media del manubrio no existiese un punto de inversion en el mecanismo. Efectivamente en esa posicion la articulacion 3 de la ranurita coincide con el centro de rotacion 1; *a* y *b* se cubren mútuamente y pueden girar juntas entorno de un eje que pase por el mismo punto 1, y por consiguiente la cadena respecto al punto de inversion se convierte en un acoplo de elementos. Para eliminar la influencia de ese punto de inversion podemos recurrir al acoplamiento de los manubrios opuestos *b* y *d* con la condicion de buscar primero las trayectorias polares correspondientes.

Un exámen profundo de los movimientos relativos de *b* y *d* prueban que esas trayectorias son círculos de Cardan (fig. 173); el primero de los cuales unido á *b* está descrito desde el punto 2 con el radio $a=b$, en tanto que el mayor unido con *d*, tiene por centro el punto 1 y un radio doble del primero. Fácil es ahora realizar el acoplamiento armando simplemente *b* y *d* con pequeñas piezas de endentadura que engranen juntas cuando el mecanismo pase por los puntos de inversion.

Mucho facilitan la solucion la relacion 1 : 2 de los contornos de las trayectorias polares y la sencillez de su forma. Si por ejemplo, establecemos para el elemento *b* un diente en el punto 5, que está opuesto al punto 3, ese diente podrá engranar respecto del primer punto de inversion, en 5′ y respecto del segundo en 5″ con las partes huecas que convenga establecer en estos dos últimos puntos; el mecanismo se hallará entonces completamente cerrado, como puede verse en la figura. Cumple observar que para cada semi-vuelta del manubrio *a* el punto 3 recorre un camino igual á cuatro veces la longitud del manubrio, mientras que en el mecanismo de la figura 163 el camino recorrido por el mismo punto es solamente igual á dos veces dicha longitud. El mecanismo que acabamos de indicar se conoce desde muchos años; en 1816 *Dawes* lo aplicó con insignificantes modificaciones á una máquina de vapor sobre la cual hablaremos más adelante (véase § 80).

Conviene además observar que el sistema de clausura precedente no podria en modo alguno servir al paso de los puntos muertos 3′ y 3″ que resultarian si la fuerza motriz obrase sobre la ranura; el paso de esos puntos no podria conseguirse por medio de un acoplo

en la disposicion actual ni en la del mecanismo de la figura 163, puesto que para dichos puntos muertos el polo se encuentra en la prolongacion de la línea de deslizamiento, y por ende la fuerza motriz pasa entonces cabalmente por el polo mismo.

Por regla general el paso de los puntos muertos por medio de acoplos superiores no es posible sino cuando las trayectorias polares tienen una forma adecuada. Una condicion esencial que debe llenar, estriba en que la fuerza motriz no pase por el polo mismo en el momento en que el mecanismo se encuentra en el punto muerto, ya que en tal caso su brazo de palanca ó su momento estático es necesariamente nulo.

Como por via de otro ejemplo mencionemos un mecanismo curioso qne se deduce de la cadena de la figura 174 por un simple cambio en la longitud de los lados. Si en esta cadena se hacen los miembros *a* y *b* de longitud diferente, los miembros *d* y *c* respectivamente iguales á los dos primeros, y se fija uno de los miembros más cortos, se obtiene un mecanismo que presenta igualmente dos puntos de inversion. El primero resulta cuando el miembro *a* girando hácia la izquierda ha llegado á la posicion 1,4 y que el punto 3 ha llegado al punto 3′; en este caso, si no se introdujera una clausura conveniente; la cadena se convertiria en un acoplo de cilindros susceptible de un movimiento de rotacion entorno del punto 4. El segundo punto de inversion ocurre cuando siguiendo *a* la vuelta alrededor del punto *u* en el mismo sentido, ha dado una rotacion entera y ha vuelto á ocupar la posicion 1,4, á la vez que 3 ha llegado á 3″. Las dos piezas *d* y *c* que coinciden, pueden de nuevo girar entorno del punto 4.

Admitiendo que la cadena esté cerrada, el manubrio *a* en una vuelta entera hace dar una semi-vuelta al manubrio *c*, ó al revés, el manubrio *c* con una vuelta hace dar dos al manubrio *a*. Ese mecanismo fué indicado la primera vez por *Galloway*, que realizaba el paso de los puntos de inversion por medio de una clausura de fuerza producida por un volante. *Galloway* admitia que las longitudes de los lados *a* y *c* debian ser entre sí en la relacion de 1 : 2; lo que acabamos de decir demuestra que ello era una restriccion enteramente inútil.

Para la clausura de la cadena con un acoplo es necesario conocer las trayectorias polares. Como los miembros 2,3 y 1,4 son iguales respectivamente á los miembros opuestos 4,3 y 1,2, los dos acoplos de trayectorias polares son idénticos; por ese motivo no se representa más que uno solo de dichos acoplos en la fig. 175. Las dos curvas tienen una gran analogia con las trayectorias polares más simples del caso anterior, puesto que giran igualmente la una en el interior de la otra y las longitudes de sus periferias están en la relacion de 1 : 2; en cambio acusan inmediatamente la proporcion variable de las velocidades de las piezas *a* y *c*. La rama mayor 2A2 (de rayados lijeros) de la trayectoria polar de *a* gira en el interior del arco ECF de la trayectoria polar de *c*, en tanto que el nodo 2B2 (de rayados más espesos) gira en el arco EDF.

En los puntos de inversion van á ponerse respectivamente en contacto los vértices A y C, B y D. Luego, si establecemos en dichos puntos dientes y huecos correspondientes obtendremos igualmente aquí una clausura por acoplo completo. Nuestra figura demuestra como podria procederse á la construccion efectiva de ese mecanismo y así reemplazar con ventaja la clausura de fuerza recomendada por *Galloway*. Más no hacemos ánimo de discutir aquí la utilidad que pudiera tener ese mecanismo en el terreno de la práctica y nos limitaremos á observar que si hasta hoy casi no ha ofrecido más que un interés meramente teórico, no puede deducirse que jamás será susceptible de aplicaciones. Como última observacion añadiremos que seria posible utilizar para la clausura el segundo acoplo de trayectorias polares, como lo hemos hecho ya en el mecanismo de la fig. 170.

En la clase de los dispositivos que tienen esencialmente por objeto asegurar el paso de los puntos muertos, entran igualmente los depósitos de aire de las bombas de incendio, de las bombas de vapor, de las máquinas de columna de agua, así como los fuelles de toda especie, fuelles á mano, fuelles de fragua, fuelles de órgano de iglesia: á esta misma clase pertenece tambien el regulador de las máquinas soplantes de cilindro para hornos de fundicion y otras instalaciones metalúrgicas. El recipiente de aire que corresponde completamente al volante de las máquinas de vapor de manubrio, tiene además por objeto hacer, como este último, uniforme el movimiento del órgano de compresion, es decir, el que ejerce su accion antes y despues del paso del punto muerto. Su efecto está basado como el del volante en la clausura de fuerza; pero bajo este concepto va más adelante, puesto que el órgano en virtud del cual se ejerce su accion, es decir, el aire, es ya por si mismo, de clausura de fuerza.

De una manera general puede afirmarse, lo cual no carece de interés, que en el mecanismo práctico el empleo de la clausura de cadena para el paso de los puntos muertos y de los puntos de inversion de los mecanismos, tiende á sustituir más y más el de la clausura de fuerza. Así por ejemplo, en la mayor parte de las máquinas de

vapor y sobre todo en las que han de ser de cambio de marcha, se recurre hoy al sistema de las máquinas gemelas ó acopladas, en las que la clausura para los puntos muertos se hace por cadena. Este sistema se ha estendido hasta las más toscas máquinas de vapor, las de los laminadores, para las cuales el volante era considerado en otro tiempo como una condicion *sine qua non*. La necesidad de invertir el movimiento en la fabricacion de las planchas de corazas de buques, ha sido el punto de partida de esa innovacion y probablemente ha acarreado su adopcion en gran número de casos donde no existia la misma necesidad. El principio de acoplamiento no tardó en aplicarse á las máquinas de vapor fijas que no son de cambio de marcha; y es probable que á ello condujo ante todo el ejemplo de las máquinas de locomotoras y de barcos, y que despues su estension ha sido la consecuencia de las ventajas que ofrece.

La tendencia que acabamos de señalar para las máquinas de vapor es igualmente fácil de conocer en las máquinas fuelles de todo género que antes hemos mencionado; y con efecto en tales máquinas se procura sustituir más cada dia la clausura de cadena á la clausura de fuerza, ya sea aumentando el número de cilindros, ya sea añadiendo cilindros reguladores especiales, cuyos émbolos se ponen en movimiento por medio de discos curvos, ya en fin, adoptando otras disposiciones destinadas á producir un efecto del mismo género. No cabe dudar que en el momento actual existe en la mecánica una marcada tendencia á dejar las formas antiguas para recurrir á las disposiciones que hacen posible una solucion más rigurosa del problema propuesto, es decir, que permiten obtener de una manera más exacta la realizacion de un movimiento determinado.

CAPÍTULO VI

OJEADA SOBRE LA HISTORIA DEL DESARROLLO DE LAS MÁQUINAS

«¡Qué de creaciones del arte, qué de prodigios de la actividad humana, cuánta luz en todos los campos de la ciencia desde que el hombre no gasta inútilmente sus fuerzas en la triste defensa de sí mismo; desde que está en su poder el transigir con la necesidad á la cual nunca podrá enteramente sustraerse; desde que ha conquistado el precioso privilegio de disponer libremente de sus aptitudes y responder al llamamiento de su génio! ¡Cuánta actividad despierta por doquier desde que las necesidades, al multiplicarse, han dado nuevas alas al espíritu inventivo y han abierto nuevos campos á la investigacion!»

SCHILLER.

«Una vez en posesion de la idea del desenvolvimiento del mundo, la historia no se nos presenta ya como un horizonte limitado, en el que las mismas cosas se repiten de siglo en siglo con una monotomia cansada y fatigosa. Nos encontramos en cambio, en presencia de una trasformacion incesante de la existencia, de una série de maravillas que la naturaleza nos revela y nuestra alma como un génio celeste se eleva con potente vuelo á través de los espacios.»

GEIGER.

§ 48

Orígenes y desarrollo de las máquinas.

Las investigaciones de que nos hemos ocupado en los dos últimos capítulos nos conducen involuntariamente á un nuevo terreno, al de la *historia del desarrollo de las máquinas en la humanidad;* por más que este asunto no parezca á primera vista tener relacion necesaria con una teoria deductiva de las máquinas, es sin embargo muy á propósito para excitar nuestro interés en el más alto grado, á la vez que realmente tiene una importancia esencial para la inteligencia de las materias que forman especialmente el objeto de nuestro estudio. Por lo demás no tenemos la intencion de introducir el lector muy adentro de ese nuevo dominio, en primer lugar porque, segun nuestra propia observacion, no se halla precisamente situado en la senda que debemos seguir, y en segundo lugar porque no existen hasta ahora más que muy escaso número de investigaciones históricas bien ordenadas de que poder disponer para trazar un cuadro exacto y completo en todas sus partes.

Además, conviene no confundir aquí la historia propiamente dicha de las máquinas con la historia de su desarrollo. La primera, en efecto, nos presenta una série cronológica de producciones aisladas, que no todas constituyen forzosamente progresos y hasta algunas de ellas no pueden mirarse más que como pasos dados atrás ó como señales de decadencia. En cambio, la se-

gunda se limita para cada máquina á la investigacion de los diversos estados que constituyen las gradas sucesivas de la escala que se ha ido subiendo desde el orígen hasta la altura actual, pudiendo decirse que comienza con cada pueblo que entra en su período de desenvolvimiento y que hasta se refleja en el desarrollo de cada indivíduo aislado.—La historia de las máquinas puede en rigor esponerse hasta hoy de una manera bastante completa, á lo ménos por lo que toca á ciertas clases especiales de aparatos, como por ejemplo, los molinos, los vehículos, las máquinas de vapor, y en esta via pueden notarse cada dia nuevos progresos. La historia del desarrollo progresivo de las máquinas no puede en cambio emprenderse sin que préviamente se hayan fijado las nociones fundamentales que á ellas se refieren, el cual es precisamente el objeto de nuestro trabajo; no puede ser más que el resultado de investigaciones fundadas sobre las mismas nociones y que por lo mismo no se han practicado todavia. Con todo, basándose en los conocimientos adquiridos y en la situacion actual, es posible llegar por la reflexion á difundir alguna luz sobre el pasado. Eso cabalmente es lo que intentamos realizar, apoyándonos en los resultados á que nos han conducido las consideraciones que llevamos espuestas.

Para comprender perfectamente el desarrollo progresivo de las máquinas importa ante todo procurar formarse una idea clara de lo que debe entenderse por perfeccion ó imperfeccion de una máquina. De la buena calidad de los productos no puede deducirse retrospectivamente la perfeccion de la máquina de que proceden, sino en cuanto se pone cuidado en separar primero la parte adherente á la accion de la mano del hombre. Ciertos tejidos indios, por ejemplo, son de una calidad y finura estraordinariamente notables, por más que estén fabricados con telares muy imperfectos: con dichos telares desde el orígen de la fabricacion de tales tejidos la habilidad del tejedor ha sido con mucho la que ha desempeñado el papel más importante. Además, no tenemos necesidad de hacer notar que ninguna máquina podrá ser nunca completamente independiente de la accion del hombre, toda vez que esa accion será siempre necesaria, aun cuando no fuese más que para dirigir el funcionamiento de la máquina, ponerla en marcha ó pararla. Por lo dicho se infiere que una máquina es tanto más perfecta cuanto mejor llena la *parte* del trabajo que le está asignada y cuanto más es dicha parte *una fraccion mayor* del trabajo total. En realidad hoy la industria de las máquinas pretende progresar en estas dos direcciones, intensidad y estension, entre las cuales hay cierta dependencia, puesto que siempre y cuando se alcanza algun perfeccionamiento en la manera de llenar una máquina su objeto, se manifiesta una tendencia natural á estender la parte de accion de esa máquina en el conjunto del trabajo que ha de efectuar.

El fin que aquí debemos proponernos consiste mucho ménos en patentizar el desarrollo gradual de la eficacia de las máquinas y señalar el aumento del número de sus aplicaciones, que descubrir los medios que han contribuido á llevar las máquinas al grado de perfeccion de que hoy somos testigos, es decir, el concepto general que ha presidido todos los perfeccionamientos. —Para hablar con más exactitud tratamos de investigar aquí cual ha sido el carácter esencial de los perfeccionamientos sucesivos aportados á los procedimientos mecánicos; y tanto más interés tenemos en llegar sobre ese punto á la mayor claridad y á deducir de nuestro estudio un concepto puramente objetivo, libre de toda nocion accesoria; dándonos así el medio de avanzar más fácilmente por la senda del perfeccionamiento ulterior de las máquinas, y esto con la plena conciencia del procedimiento seguido.

Para lograr el objeto que nos hemos propuesto conviene remontarnos en lo posible á la primera aparicion de la máquina.

Cuando en la historia se buscan los orígenes de las máquinas, siempre se tiene que remontar á épocas más y más antiguas. Todos los pueblos al entrar en su período histórico, están más ó ménos provistos de máquinas, de condicion, empero, bastante imperfecta. No será pues en esos pueblos donde podamos descubrir los verdaderos orígenes de las máquinas, ni sus tradiciones podrán darnos más que indicaciones sobre su desarrollo y sus perfeccionamientos. Por lo tanto, nos vemos obligados á dejar el terreno de la historia para remontarnos á los períodos prehistóricos. Pero antes importa observar que indirectamente podemos alcanzar el mismo objeto entrando en el dominio etnográfico, es decir, entregándonos al estudio de los pueblos que se encuentran todavia en el estado natural, y que segun una opinion muy plausible, se hallan en uno de los grados de desarrollo por el cual sucesivamente han pasado una vez todos los pueblos civilizados de la tierra. Con efecto, las investigaciones de ese género tienden á confirmar más y más la opinion de que en el mismo grado de adelanto por la escala del progreso el ingenio humano llega por doquier á producciones análogas y sigue siempre en su desarrollo progresivo grandes leyes naturales que le son inherentes (23). Si entrando ahora más en el asunto ponemos en vista de lo que era anteriormente conocido los restos recien descubiertos de las

culturas más ó ménos imperfectas, que pertenecieron á las épocas prehistóricas ó que han desaparecido por completo, es para nosotros evidentísimo que la constitucion de las máquinas no debe buscarse únicamente en el pasado y que se halla íntimamente ligada con el desarrollo general de la humanidad. En otros términos, hemos podido observar que es necesario remontarse á las épocas más remotas y oscuras de la historia de la civilizacion del género humano para descubrir los primeros gérmenes, las primeras raices de aquellas nociones que trás un período de formacion lenta, abarcan varios miles de años y en medio de los más variables grados de cultura, han llegado á las épocas de civilizacion más adelantada para tomar, al fin, en Occidente en los dos últimos siglos un desarrollo cuya rapidez hasta hoy ha ido siempre en aumento. De ahí resulta que la solucion del asunto que nos ocupa, no puede acometerse sino con la condicion de buscar sus elementos en la arqueologia, la filologia, la etnografia y la antropologia.

Fuera del estudio de los restos de antiguas civilizaciones que ha vuelto á encontrar ó simplemente ha conservado la tradiccion, se debe á más recurrir al estudio mucho más delicado é indirecto de las huellas del desenvolvimiento progresivo de las facultades humanas que en el lenguaje mismo se encuentran; y así es como esa rama especial de la arqueologia, que designamos con el nombre de lingüística, ha conducido en este punto á resultados de la mayor importancia. A un lingüista debemos profundas y verdaderamente notables investigaciones sobre los orígenes de las máquinas. El filólogo *Geiger*, desgraciadamente arrebatado harto temprano á la ciencia, trazó en dos memorias sobre el *orígen de los útiles* y sobre el *descubrimiento del fuego*, algunas líneas generales muy dignas de llamar la atencion de todos aquellos que quieren estudiar especialmente la marcha progresiva de la humanidad desde los tiempos prehistóricos é históricos hasta nuestros dias. En su pequeña obra, grande en riqueza de ideas, *Geiger* á consecuencia de consideraciones múltiples y profundas, llega á la conclusion de que el *movimiento de rotacion* es el primero que el hombre ha producido por medio de disposiciones del género de aquellas que nosotros hemos llamado maquinales. Segun él, uno de los primeros dispositivos, ya que no el primer mecanismo que merece el nombre de máquina, es el aparato de producir fuego con el frote de dos leños; ese aparato que desempeña un papel muy importante en las ceremonias religiosas de los pueblos primitivos de la raza indo-germánica, aun hoy es de uso frecuente entre las tribus salvajes, y su orígen se remonta á una época tan remota, que probablemente en aquella época el fuego no se utilizaba todavia para los usos domésticos ni servia más que para los del culto. Efectivamente existen poderosas razones para creer que la raza humana ha recorrido cierto período sin hacer uso del fuego en sus moradas, á la vez que en los lugares sagrados adoraba ya ese elemento como una potencia superior.

A un palo toscamente tallado en punta por abajo é introducido normalmente en una cavidad correspondiente, sostenido entre las palmas de ambas manos, puede comunicársele un movimiento de rotacion alternativo y muy rápido, hasta que con el frote las pequeñas astillas de leña desprendidas, las fibras algodonosas, ó los pedacitos de médula en la proximidad de la cavidad lleguen á prender luego (fig. 176). En ese aparato las manos no corren simplemente por el palo (al que en nuestro dibujo se ha dado una forma algo demasiado europea), sino que lo oprimen igualmente de arriba abajo contra la pieza de madera horizontal que se mantiene firmemente con los piés ó con las rodillas, de modo que paulatinamente se efectua un movimiento descendente de las manos. De ahí resulta que con la leña que se inflama difícilmente, el aparato exige el concurso de dos hombres, uno de los cuales empieza á trabajar por la parte alta del palo cuando el otro ha llegado á la parte inferior (24). Segun diversos relatos ó descripciones, parece que los bramines utilizan aun hoy una disposicion análoga para producir fuego en las ceremonias del culto, si bien sus aparatos ofrecen con respecto al precedente ciertas diferencias, que tal vez no sean del todo despreciables.

En época posterior muy distante de aquella á la cual se debe ese primer producto del concepto maquinal, hubo de concebirse la idea de arrollar en varias vueltas alrededor de un polo vertical una cuerda cuyos estremos cogidos con las manos y estirados sucesivamente uno despues de otro, permitieran dar á ese palo un movimiento de rotacion alternativa (fig. 177).

En tal caso el estremo superior del palo igualmente cortado en punta, se mantiene en su posicion por medio de otra pieza de manera, análoga á la de abajo y sostenida firme y sujeta por otro obrero, que ejerce en ella una presion de arriba abajo, en tanto que el primero trabaja con el palo y la cuerda (a).

Por poco que se quiera penetrar en nuestra histo-

(a) La figura 177 está copiada, lo mismo que la 176, de la obra de *V. Tylor* EARLY HISTORY OF MANKIND. Representa calcado sobre un dibujo del siglo pasado á dos esquimales ocupados en encender fuego. *Tylor* reproduce una série de otros dibujos que se refieren á epocas más ó ménos cercanas de nosotros y que representan *taladradores de fuego ó fire-drills* como él los denomina.

ria primitiva, se llega á formar perfecta cuenta de que la causa determinante de las modificaciones y perfeccionamientos dados sucesivamente á ese curioso dispositivo, ha sido el uso muy estenso que de él se hacia. Para tener una idea de esa estension bastará notar que entre los indios, los antepasados de los actuales habitantes de Europa, en el último mes de la gran fiesta de los Sacrificios, el fuego debe encenderse 360 veces al dia, con nueve clases distintas de madera ó leña, prescritas por el rito.

Los descubrimientos hechos en varias escavaciones permiten deducir con grandes probabilidades de certidumbre, que los hombres primitivos usaron aparatos más ó ménos semejantes á los que acabamos de describir, y lo asombroso es que con medios análogos llegaban á barrenar no solamente la madera, los huesos y las astas de ciervo, sino tambien las piedras más duras. Los salvajes de las diferentes comarcas del globo se sirven aun hoy del mismo dispositivo para horadar. Se ha probado recientemente que con el sencillísimo aparato de la fig. 176, ó á lo más con el de la fig. 177, se habian preparado las esmeraldas, los cristales de roca y las nefritas que encontraron *Humboldt* y *Bonpland* en la América del Sud, y que representaban figuras de animales tan profunda y finamente esculpidas, que aquellos ilustres viajeros habian creido deber considerarlas como los productos de una civilizacion muy avanzada que habia desaparecido. El secreto que permitia á los artesanos primitivos obtener semejantes resultados, consistia en la adicion de agua y arena para aguzar la punta del taladro. Cumple además añadir que con ese procedimiento una sola pieza para quedar completamente terminada exigia muchos años y aun quizás una ó dos generaciones (25). Otra circunstancia que tiende á dar mayor luz todavia sobre el caso, es que las palabras empleadas actualmente para espresar la *accion de horadar*, no abarcaban en su orígen la idea de una cavidad redonda ó de una penetracion practicada en un objeto, idea que les atribuimos hoy de una manera determinada. Todas espresaban más ó ménos claramente la accion de frotar, de vaciar, raspar, operacion que está en íntima relacion con la de pulir, afilar, modelar con el frote.

Por lo que toca á la cuestion de saber cuál es el período de tiempo que trascurrió antes que se llegase á pasar del movimiento de rotacion alternativo, antes descrito, al movimiento de rotacion contínuo, no es susceptible de una respuesta categórica, y no pueden admitirse tocante al particular más que meras conjeturas. En todo caso ese período debe haber sido de una duracion que pasa con mucho de la de nuestros períodos históricos. Verdad es que las ruedas hidráulicas, que son sin duda los primeros representantes de las máquinas de movimiento de rotacion contínuo, se remontan á la mayor antigüedad; pero tambien lo es que patentizan ya un grado de cultura muy considerable. Pues suponen con efecto, á lo ménos allí en donde se emplearon para el riego, la existencia de poblaciones sedentarias consagradas á la agricultura. Las tradiciones que hasta nosotros han llegado acerca de las ruedas de ese género empleadas en aquel tiempo en Mesopotamia, ofrecen una concordancia maravillosa entre la forma que tenian y la de las ruedas análogas que aun hoy están usándose en aquel pais: las antiguas ruedas eran enteramente de madera y estaban provistas de vasos de arcilla (cangilones) (a). La fig. 178 representa una de las formas más antiguas de las ruedas elevatorias que aun hoy se utilizan en la China. Escepto el eje que es de madera, esas ruedas se componen enteramente de bambúes y juncos trenzados sin mezcla de metal alguno: el eje descansa en dos soportes de madera dispuestos en la parte de arriba á manera de horquilla. El diámetro de esas ruedas varia de 6 á 12 metros; el agua sacada por los recipientes de bambú durante su inmersion, se vierte en un vasto depósito, desde donde va por un pequeño canal á regar los campos. *Geiger*, que no habla de estas últimas ruedas, es de opinion que deben considerarse como más antiguas las ruedas oratorias, que están todavia en uso en los templos budistas del Japon y del Tíbet y que en parte son ruedas de viento y en parte ruedas hidráulicas. Con cierta agudeza advierte ese autor que el empleo de tales ruedas en los ritos del culto hubo de reconocer precisamente por causa el respeto que inspiraba el movimiento de rotacion contínuo. Los demás ejemplos que cita á continuacion el docto filólogo no ofrecen ningun interés para el asunto que nos ocupa, y por lo tanto los pasaremos en silencio.

La rueda ó torno del alfarero, que era todavia desconocida de las tribus lacustres, no es probablemente anterior á las ruedas hidráulicas que acabamos de indicar; pero en todo caso representa una aplicacion, hecha en hora temprana, de un movimiento de rotacion contínuo de una duracion más ó menos considerable.

Quizás debemos admitir que antes de saber utilizar para la conservacion del movimiento de rotacion la fuerza viva adquirida por la masa en movimiento, el alfarero tenia que recurrir á un ayudante que comuni-

(a) Plinio, XIX, 22.

case al disco un movimiento de rotacion alternativo con las manos.

Otra cuestion por estremo interesante es la que se refiere al orígen de los *carros* y de *las ruedas de los carros*, porque estas últimas consideradas como dispositivos cinemáticos, permiten sacar importantes conclusiones relativamente á la existencia de otras disposiciones maquinales. En Grecia, Egipto y otros pueblos del Asia Mayor encontramos en época muy temprana el uso de los carros y especialmente los de dos ruedas (26). Despues de tomar orígen en Oriente se difunden progresivamente en los paises occidentales. Durante mucho tiempo constituian los carros entre los griegos y los egipcios el principal, por no decir el único medio de trasporte acarreado por caballos, lo mismo para la guerra que para el comercio y los cortejos públicos. Solamente hasta más tarde comenzaron tales pueblos á utilizar el caballo para montarlo, á imitacion de los pueblos del Oriente y del Norte. Los héroes de Homero combaten todos en carros, y hasta puede observarse que los ginetes ú hombres montados en caballos se consideran, en los tiempos heróicos, como salvajes en estado de natura, conforme lo atestigua el mito de los centáuros. En cambio, entre los asirios, segun las indicaciones que nos suministran los bajo-relieves que han llegado hasta nosotros, el caballo se utilizaba desde épocas muy remotas para montarlo y para tirar de los carros. En aquel tiempo el carro de combate era un aparato de guerra muy dispendioso, y la posesion de aparatos de ese género en número más considerable, como hoy la de una artilleria más poderosa, bastaba para dar á un ejército ventaja grande sobre el ejército enemigo. Por enseñanza de la Biblia sabemos (Jueces, I, 19), que los isrealitas á su entrada en Palestina, hubieron de sentir mucho la falta de semejantes carros. Aunque Judá tomara posesion de la montaña, no podia espulsar á los habitantes del valle, «porque tenian carros de hierro» (Jueces,, IV, Victoria de Débora). Hasta doscientos años despues no desaparece esta inferioridad cuando David tomó á los asirios 700 carros á consecuencia de una gran victoria que les ganó (II Salm., X, 18) (27).

Los decorados y los dibujos que provienen de los egipcios, asirios y griegos, así como los pocos carros ó restos de los mismos que se han conservado, nos permiten formarnos exacta cuenta del modo de confeccion de los antiguos vehículos de ruedas. Los asirios y los egipcios hacian las más de las veces uso de ruedas de seis radios; en las ruedas de diámetro relativamente considerable ó de una ejecucion bastante imperfecta, ese número se elevaba á ocho, diez y hasta doce; y en cambio los griegos usaban con preferencia las ruedas de cuatro radios solamente. Los tipos de ruedas que contenian el menor número de radios, son de ejecucion más perfecta y delicada que los demás tipos. Construidas en su orígen enteramente de madera, fueron reemplazándose por un sistema mixto de madera y metal, para llegar finalmente al empleo esclusivo del metal (bronce) (28). Las ruedas enteramente llenas y de trabajo más tosco representadas en algunos de los dibujos que hemos mencionado poco há, se atribuyen á los pueblos ménos civilizados del Asia Menor. Aun hoy en los carros de los indios, á la par de ruedas de varios radios se encuentran ruedas toscas, formadas de discos llenos, que están montadas en ejes de hierro ó de madera. El tipo más antiguo de los carros de trasporte de los romanos, el *plaustrum*, tenia tambien ruedas llenas y ofrecia la particularidad digna de ser notada, de que las *dos ruedas provistas cada una de abertura central de forma cuadrada, estaban montadas en ejes de madera*, los cuales tenian gorrones redondos que les permitian girar en la armadura del carro. Ese modo de construccion se ha mantenido hasta nuestros dias en Portugal, y sobre ese mismo tipo los habitantes de la isla Formosa construyen sus carros (29).

A un orígen que casi no puede suponerse anterior al de los antiguos vehículos que acabamos de citar y que hasta probablemente es más reciente, se remontan los carros de bronce en miniatura que se han descubierto en las tumbas (túmulos) de las llanuras de Alemania del Norte, en Schonen, por ejemplo, y de los cuales el museo romano-germánico de Maguncia tiene excelentes reproducciones. Supónese que son modelos de carros que servian para el uso del culto, y que tal vez por lo mismo tienen cierta analogia con las calderas de ruedas del templo de Salomon. Conviene además, añadir que personas competentes han emitido tocante al asunto una opinion completamente distinta Una particularidad notable de esos carros es que sus ruedas pequeñas son de cuatro radios como en la mayor parte de los carros griegos.

Por otra parte es cierto que el carro era ya conocido en época más antigua que la del orígen de todos los vehículos que aquí hemos mencionado Las obras más antiguas de la literatura india hablan de ellos muchas veces. Por ejemplo en Riksanhita se encuentran los siguientes pasajes:

(X, 89, 4) Indra al separar el cielo de la tierra los fija en su omnipotencia como dos ruedas á su eje.....

(VIII, 6, 38) Así como la rueda gira detrás del caballo, así tambien los dos mundos.....

En la descripcion del dia y de la noche dice:

(I, 185, 2). Sosteniendo todo el universo con su propia fuerza, el dia y la noche giran pareciendo dos ruedas...

Los dos, aunque no tienen piés ni caminan, poseen un gran número de radios que tienen piés y caminan...

Además de estos pasajes podrian citarse otros, en los cuales se describen los ricos ornamentos de los carros y los cuidados que han de tenerse para criar los caballos. De esa abundancia de imágenes poéticas en que figura el carro de ruedas, puede concluirse que ese carro estaba ya en uso desde mucho tiempo, en la época de los poemas bélicos (1700 años antes de la era cristiana).

Si tenemos en cuenta, pues, las transiciones indispensables, nos veremos inducidos á admitir que el orígen del carro se pierde en las tinieblas de aquellas épocas que son muy anteriores á los períodos históricos, y sobre las cuales únicamente las investigaciones filológicas han logrado echar algunos débiles rayos de luz. De tales investigaciones parece además resultar que el carro ó la carreta no deriva del tríneo ó del vehículo en forma de caja, sino que más bien debe considerarse como una consecuencia del empleo de los cuerpos rodantes, es decir, de la rueda misma (a). Tal vez conviene buscar el orígen de la rueda en el tronco de árbol rodante, el cual sin ninguna duda dió la idea de los rodillos que debian colocarse bajo los objetos que habian de desplazarse: el rodillo se aproxima mucho á la rueda llena y especialmene al acoplo de ruedas, tal como el que está en uso todavia en la isla Formosa (30). De donde proviene que nos vemos reducidos á referir el descubrimiento del carro al orígen del desarrollo de la cultura humana, á la época correspondiente á la construccion de la primera morada artificial, y á clasificarlo, por tanto, en los inventos más antiguos de la inteligencia del hombre.

En la antiguedad histórica se encuentra aun en uso el mecanismo de taladrar que hemos mencionado. *Homero* nos da del mismo una descripcion muy clara en la Odisea (IX, 384):

> ...A la manera que con el taladro un hombre horada el madero de un barco, y otros obrando sobre los dos estremos de la cuerda que rodea el útil, le comunican sin cesar un movimiento de rotacion... así nosotros girábamos...

Ese modo de trabajar, muy empleado sin duda por los carpinteros en los tiempos homéricos, exigia tres obreros; con bastante verosimilitud podemos admitir que el mismo procedimiento se aplicaba de una manera análoga en los tiempos prehistóricos para taladrar las grandes hachas de piedra.

Una circustancia que merece aquí ponerse de relieve es que el arte de practicar agujeros cilíndricos y por ende preparar cilindros huecos, hubo de ser anterior de mucho al que permitió obtener cilindros llenos, ó de una manera general, cuerpos limitados esteriormente por una superficie de rotacion. En efecto, siempre se logró practicar un agujero, aun con instrumentos de índole muy imperfecta, puesto que limitando la superficie de rotacion la cavidad, se obtiene aproximadamente con la misma facilidad, tanto si la generatriz (de la arista cortante del útil) tiene superficie regular como no. Una astilla de sílex cualquiera podia, por lo tanto, utilizarse para abrir agujeros en la madera, los huesos y el asta de ciervo con la sola condicion de estar afilada y debidamente sujeta (31). En cambio, para *tornear* un cuerpo esteriormente era menester, aun cuando no fuese más que para poder aplicar el cincel con buen éxito, que existiese un dispositivo ó mecanismo especial que permitiera fijar ese cuerpo con bastante exactitud y firmeza para poder recibir un movimiento de rotacion alrededor de un eje fijo geométrico. Parece bastante verosímil que la rueda del alfarero debió sugerir la primera idea del *torno* propiamente dicho. En todo caso está fuera de duda que el taladro es mucho más antiguo que la rueda del alfarero, la cual á su vez es anterior al torno.

Una de las formas más antiguas de esa última máquina se encuentra en el torno que aun hoy está en uso entre los calmucos y que está representado por la figura 179 (a). Conforme vemos, se compone de un eje demadera colocado horizontalmente en dos soportes, entre los cuales hay una cuerda arrollada que permite á un ayudante del tornero comunicar á dicho eje un movimiento de rotacion, enteramente idéntico al del aparato de la fig. 177: en el estremo libre del eje está fijo el objeto que se ha de tornear. El tornero despues de fijar su aparato en el suelo por medio de simples clavijas, coloca delante un banco pequeño dispuesto como lo indica la fig. 179, y comienza su trabajo. Con esa máquina de tan notable sencillez consigue elaborar objetos de una perfeccion relativamente muy grande (b).

Conviene observar que el tornero calmuco fabrica con preferencia platos ó tazas de madera, hueso, metal, etcétera. Ese género de fabricacion se encuentra en ín-

(a) En Sanscrito el nombre del carro es *ratha*.

(a) Segun Klemm *Kulturwissenschaft*, I, pág. 387.

(b) V. Bergmann, *Nomad, Streifereien, u. d. Kalmücken* Riga, 1804, II, 171.

tima conexion con el modo de construir de su torno; la falta de un segundo apoyo para la pieza que ha de tornearse, ó de lo que se llama la contrapunta en los tornos ordinarios, naturalmente le obliga en efecto á trabajar tan solo objetos de escasa longitud y especialmente piezas planas y huecas. Ambas circunstancias, es decir, el modo de construccion del torno y la clase de los productos, parecen probar de una manera casi incontestable que el aparato deriva de la rueda del alfarero. Esa conclusion se encuentra confirmada por la circunstancia de que entre los romanos el obrero que hacia uso del torno, se designaba no solo con el nombre de *tornator*, sino tambien con el nombre de *vascularius* (a), esto es, fabricante de vasijas (32). Aun cuando ambas espresiones no hubiesen sido, propiamente hablando, equivalentes de todo punto, es lo cierto que el *vascularius* se servia amenudo del torno, y con mucha habilidad, como lo prueban los vasos y fragmentos de vasos que han llegado hasta nosotros. El torno que acabamos de describir, puede considerarse, pues, como constituyendo un aparato intermedio entre la rueda del alfarero y el torno propiamente dicho, dispuestos para trabajar objetos de forma prolongada y de cualquiera materia. En estos últimos tiempos el tornero calmuco ha logrado suprimir el ayudante, á lo ménos para la ejecucion de los trabajos más ligeros, maniobrando él solo los estremos de la cuerda, el uno con la mano izquierda y el otro con un dedo del pié izquierdo, mientras que con la mano derecha guia el cincel.

Los torneros romanos habian llegado á un alto grado de habilidad; pues no solamente sabian fabricar tazas de piedra de espesor sumamente delgado, sino que tambien torneaban vasos de vidrio, como lo prueban los fragmentos de vasos antiguos de la coleccion de *Minutoli*.—No obstante, su oficio no consistia únicamente en la produccion de objetos de ese género, y es cierto que utilizaban igualmente su aparato para tornear grandes columnas de piedra ó fustes de columnas (b).

Es incontestable que los antiguos egipcios conocian el arte de tornear y hacian uso de objetos torneados; más no se tiene tanta seguridad acerca de su manera de trabajar (33). Quizás conviene considerar el torno que aun hoy se emplea en Egipto tal como lo representa la fig. 180, como una derivacion directa del que se usaba en tiempo de los Faraones. Este singular aparato es de una sencillez de todo punto primitiva.

(a) Ciceron, e. Verrin, IV, 24.

(b) V. Ottfr. Müller's *Archäologie der Kunst nach* Kleuze in Bottiger's *Amalthea*, III, pág. 72.

La pieza 2 (de madera) que se ha de preparar está cogida entre dos puntos de hierro *b* y *c* y recibe un movimiento de rotacion alternativo que se le comunica por medio del arco *d*. La traviesa de madera que lleva la punta *b*, está elevada en la tabla *e* que hace las veces de banco de torno, en tanto que la segunda traviesa *c* puede trasladarse y solo descansa en la tabla *e;* y se mantiene en la posicion que se le da á cada operacion con el peso de la barra de hierro *f*, que en uno de sus estremos está armada de un contrapeso de piedra *g*, mientras que en el otro, cerca de la traviesa *b* está sujeta á la tabla con un espigon vertical *h*. Las dos puntas de hierro *b* y *c* están directamente clavadas en las traviesas como clavos. Para servirse de ese aparato el tornero está agachado en tierra y pone en movimiento con la mano izquierda el arco *d*, en tanto que con la mano derecha tiene el mango de la herramienta, sirviéndose del dedo gordo del pié derecho para apoyarla en *k* sobre la barra de hierro *f*. En mucha estima se considera la habilidad del tornero egipcio (a).

Ese estraño aparato, en el que la clausura de fuerza está realizada de una manera mucho más completa que en los aparatos anteriores, no puede en verdad considerarse como una transicion directa entre la rueda del alfarero y el torno propiamente dicho. Es además bastante inverosímil que la Europa meridional haya podido tomar como modelo el torno egipcio, cuyo modo de construccion hace precisamente indispensable para el obrero el estar agachado, posicion que no se acomoda mucho con los hábitos de los pueblos de Occidente.

En la Edad Media se encuentra un torno derivado sin duda alguna de los de la antigüedad, cuyo mecanismo motor estriba tambien en el mismo principio del taladro anteriormente descrito, pero que sin embargo presenta notables perfeccionamientos. Ese torno ha quedado en uso hasta hoy en Italia y por regla general en los paises meridionales de Europa. La principal particularidad de ese torno consiste en que no exige para funcionar más que un solo hombre en vez de dos. Para servirse de este aparato el tornero rodea entorno del huso ó más amenudo entorno de la misma pieza que ha de tornearse (este procedimiento es sin duda el más antiguo), una cuerda ó una correa, que en la parte superior está atada á una hoja de madera flexible que forma resorte, y en la parte inferior á un simple pedal (fig. 181), que baja con la presion del pié del tornero, y se eleva enseguida merced á la tension que á la cuerda comu-

(a) Véase *Description de l' Egypte*, 2.ª edicion, 1823, tom. XII, página 452, Lám. XV.

nica la hoja flexible. Así la pieza que ha de tornearse recibe un movimiento de rotacion alternativo adelante y atrás, correspondiendo solamente el movimiento adelante á la bajada del pedal, y entonces el tornero hace morder la madera ó el metal que trabaja con el cincel, el escoplo, etc (a). Un taller de torneros en Italia con su techo del cual se destacan infinidad de cuerdas y hojas flexibles, produce una estraña impresion en el ánimo del ingeniero moderno: probablemente se encuentra allí una copia bastante exacta de un taller de torneros de la antigua Roma.

Para los trabajos pequeños de torneo y taladro se utiliza hoy todavia el movimiento de rotacion alternativo. En tal caso la cuerda destinada á dar el movimiento al útil, se arrolla entorno de un pequeño cilindro ó huso, y sus dos estremos están atados á un arco de acero. El movimiento de rotacion alternativo del huso se obtiene entonces haciendo correr adelante y atrás ese arco, cuya tension, contra lo que sucede con el resorte del torno de la fig. 181, conserva siempre un valor constante. En el pequeño torno de relojero el husillo está sostenido entre dos puntas ó por dos soportes. Cuando se trata simplemente de practicar un agujero, se recurre en general á una disposicion bastante primitiva, que consiste en apoyar el eje del taladro, por una parte contra la pieza que se ha de taladrar y por la otra en el pecho por medio de un escudo. El taladro de arco se remonta á muy remota antigüedad, ya que en forma bastante sencilla está muy generalizado entre los chinos (b); se encuentra igualmente entre los calmucos bajo dos formas distintas (c), y por último está hoy demostrado que los egipcios lo usaban ya 1500 años antes de J. C. (d).

Recientes descubrimientos tienden á establecer con muchos grados de probabilidad que ese aparato era conocido y utilizado por razas desde mucho tiempo estinguidas que habitaban las Américas, antes de los indios que actualmente encontramos en ellas (e). En los tornos que se usan hoy para la relojeria y la mecánica de precision tiende el arco á desaparecer poco á poco, para ceder el puesto á la trasmision por correa, presentando una disposicion análoga á la de la fig. 160. Despues de lo dicho debe comprenderse con cuanta lentitud y cuantas dificultades ha debido efectuarse el paso del movimiento de rotacion alternativo al movimiento contínuo por medio de una trasmision por cuerda ó por correa.

Parece que no puede fijarse con exactitud la época en que comenzó á introducirse ese segundo modo de trasmision. Pero en todo caso el empleo de la trasmision por el movimiento del rodete en casi todos los pueblos del Asia, es una prueba de antigüedad. Segun todas las probabilidades la disposicion de la correa cruzada (fig. 182), debe haberse utilizado antes que la correa no cruzada, y hasta debe haber sido precedida por la disposicion de la fig. 183, en la que la correa ó la cuerda cruzada ó no, estaba arrollada varias vueltas entorno de dos rodillos, para que no pudiese efectuarse ningun deslizamiento (34). En esa última disposicion hasta una armadura informe y de construccion imperfecta bastaba para hacer posible la trasmision del movimiento, toda vez que en razon del número de vueltas de la cuerda existia una grandísima adherencia entre la cuerda y la superficie de los rodillos ó tambores.

Puede hallarse en tales disposiciones el orígen de la moderna correa sin fin, considerándola como una trasmision de la cuerda arrollada con varias vueltas, para producir un movimiento de rotacion alternativo; y en ese órden de ideas las dos poleas de la fig. 183 deben estar asimiladas á dos árboles de aparatos de taladrar cuyas cuerdas están reunidas. El número de vueltas sobre el mismo rodillo ha ido disminuyendo poco á poco hasta acabar por encontrarse reducidas á una sola, como en la fig. 182. Al propio tiempo que se efectuaba esa reduccion del número de vueltas, se introducia el empleo de una correa ancha y plana en vez de la tira estrecha, ó de la redonda cuerda que se empleaba anteriormente. Solo hasta mucho más adelante fué cuando se intentó arrollar la correa por las poleas sin cruzarla. No debemos olvidarnos de mencionar tocante al asunto la importancia que se ha dado hasta nuestros dias al *rodillo tendedor*, que aun en la actualidad figura en todos los tratados de mecánica aplicada, como un ejemplo particularmente notable. Todas esas trasformaciones sucesivas se han llevado á cabo con estrema lentitud, que sin embargo es posible esplicarse, si se tienen en cuenta las dificultades que sufren aun gran número de personas en comprender de qué modo en las *trasmisiones telodinámicas*, el movimiento de la polea conducida puede determinarse en virtud de un cable que está flojo; en cuyo caso el principio aplicado á la cuerda arrollada varias veces, parece llevado á su límite estremo.

Una aplicacion importantísima del movimiento de

(a) Laboulaye designa ese torno con el nombre de *Torno al aire*. Cine., pág. 463.

(b) V. Klemm. K. W.. I. pág. 385.

(c) V. Bergmann, *Nomad Streifereien*, II, pág. 93.

(d) V. Weiss, *Kostümkde*, I, 1860, pág. 96, y Wilkinson, *Ancient Egyptians*, 1871, I, pág. 56.

(e) V. Rau, *Drilling stone without Metal, Smithsonian Report*, 1868, pág. 398, donde se mencionan husos de piedra, y de huesos de taladros pertenecientes á la edad de piedra.

rotacion que con justicia debe considerarse como un primer paso dado hácia la adopcion del movimiento circular contínuo, es la que se refiere al *hilado*. En su orígen la operacion que tiene por objeto retorcer y juntar en un hilo las fibras textiles, parece probable que hubo de exigir dos personas; más tarde se efectuó con una sola, que con la palma de la mano hacia rodar el hilo por su muslo, como se hace todavia en algunas comarcas de la India. Por lo dicho se infiere que la introduccion de la rueca ó huso de mano, deberia remontarse á una época posterior y quizás á una época histórica. Pero los descubrimientos hechos recientemente en las moradas lacustres han modificado esa opinion, como quiera que efectivamente se han encontrado en tales habitaciones husos de mano completos, originarios de la edad de piedra. Uno de esos husos, representado con el número 1 de la fig. 184, está provisto de un pilon de barro cocido, de forma bastante elegante y de ornamentacion variada. Luego si ha de deducirse que el uso del huso habia entrado en los hábitos de aquel tiempo, resulta igualmente que su orígen no se remonta á una época anterior al último período de la edad de piedra.

En el huso de mano se encuentra la primera aplicacion del importante descubrimiento de que una vez producido el movimiento de rotacion puede mantenerse por espacio de cierto tiempo, en virtud de una masa de peso, que haga las veces de volante. Como se ve, el huso de mano que aun hoy se utiliza en ciertas comarcas de Bohemia y Silesia, tiene un orígen prehistórico. Está provisto de un pilon de madera, estaño ó arcilla (2, fig. 184), y termina en punta por ambos estremos. La hiladora coje la parte superior del huso entre dos dedos, le imprime un movimento circular, que mantiene por medio de impulsos reiterados que da con dichos dos dedos, hasta que el útil llega á tocar el suelo: ese es el modo de impulsion que, segun la leyenda popular alemana, fué fatal á la princesa Dornröschen. Ese *huso* de mano que se encuentra en las costumbres y en las leyendas de ciertas regiones de Alemania, no es el solo cuyo empleo se haya conservado hasta nosotros en Europa. En la Italia meridional y en la Grecia se encuentran todavia husos de otras formas igualmente muy antiguas. En primer lugar citaremos el huso toscano (3, fig. 184), en el cual está reemplazado el pilon con una abolladura muy pronunciada, siendo la manera de operar con este huso la misma que con el anterior. Entre las demás variedades nos limitaremos á mencionar el huso de las campesinas napolitanas y sicilianas, que desconocen por completo el torno de hilar. Prescindiendo de las pequeñas diferencias locales ese huso que es enteramente de madera, se compone de un árbol cilíndrico provisto de dos discos, uno en la parte superior y otro en el medio, y entre los cuales se encuentra el hilo terminado (4, fig. 184). La hiladora suele efectuar su tarea estando sentada; comienza por colocar el huso en su rodilla y le imprime un movimiento rápido giratorio con la palma de la mano derecha; mientras dura ese movimiento de rotacion, saca de la rueca ó del copo una nueva cantidad de la materia que va hilando y que recibe del movimiento del huso la torsion necesaria por medio de un ganchito metálico clavado en la cara superior de la rodaja de arriba. El movimiento de rotacion disminuye poco á poco á medida que el huso baja. Cuando llega cerca del suelo, la parte de materia reducida á hilo se arrolla en el huso, la parte libre se engancha en el pequeño garfio, y así se repite indefinidamente la misma operacion.

El huso de mano se encuentra igualmente empleado hoy en Egipto en la forma que representa el número 5 de la figura 184 y que es casi idéntica á una de las que se usaban en Egipto en la antigüedad. (35) En razon de la posicion agachada que afecta el hilador (que puede ser un hombre lo mismo que una mujer), el movimiento de rotacion se da al huso con los dedos de la mano derecha, en tanto que la mano izquierda tiene la rueca suspendida en el aire.

El procedimiento que se pone por obra en esos diferentes casos para engendrar un movimiento de rotacion siempre dirigido en el mismo sentido y en cierto modo contínuo, presenta todavia, como se ve, mucha analogia con el que se utilizaba en su orígen para producir un movimiento de rotacion alternativo.

Tomada en su acepcion más lata la operacion de hilar, comprende tambien la fabricacion de cuerdas ó de torcidos. La disposicion que se emplea en Egipto para esa fabricacion y que está indicada en la figura 185, ofrece para nosotros un interés especial en lo que puede considerarse como constituyendo una transicion notable entre nuestra trasmision actual por correa y la antigua trasmision por cuerda para el movimiento alternativo. Ese aparato que verosimilmente es muy antiguo, se utiliza en Egipto para la operacion del *torcido*, la cual tiene por objeto, como se sabe, reunir y torcer los ramales préviamente preparados (aquí en número de cuatro) para formar una cuerda. Los ramales parten del caballete de dos piés *a* que está sostenido atrás con un recio cable, y van á unirse en el punto en que debe operarse el torcido. Allí el cordelero europeo se sirve generalmente de una pieza especial, el *topo*, que es un tronco de cono de madera provisto de cierto número de canalitas por las que pasan los ramales: de-

trás de esta pieza que él hace avanzar progresivamente hácia el caballete, se produce la torsion resultante del movimiento contínuo de rotacion que la porcion de cuerda ya preparada ejecuta entorno de su eje. El cordelero egipcio guia en cambio los cuatro ramales con las manos, dejándolos deslizar con cierta destreza entre los dedos, á la vez que adelanta despacio hácia el caballete *a*. Los cuarro husos á que están fijos los ramales, deben como la cuerda, girar de una manera contínua alrededor de sus ejes respectivos, de suerte que el grado de torsion de esos ramales no cambie. Ese resultado se obtiene por medio de una cuerda sin fin *c*, que pasa dos veces por los husos y que constantemente está tirada por dos hombres. En *d* esa cuerda pasa por un anillo, que por efecto de la resistencia que opone á la hebra ascendente, da por resultado mantenerla siempre bastante tendida.

El *torno de hilar á mano* está generalizado de tal modo en la India, la China, el Japon y los pueblos del archipiélago Malayo, que forzosamente debe remontarse á una grande antigüedad. Tambien era conocido de los romanos. En cambio parece que en Germania el hilado al torno no se introdujo antes de la Edad Media, y solamente hasta el siglo XVI no se empieza á ver el torno de pedal; pero á pesar de las modificaciones que aporta, la mano del hombre tiene que efectuar todavia una gran parte del trabajo.

Actualmente está demostrado que los habitantes de poblaciones palustres tenian un *telar* para trasformar el hilo en tejido. Verdad es que ese telar no merecia el nombre de máquina en el sentido que atribuimos á esa palabra. Conforme es fácil comprobar, merced á la inteligente reconstruccion debida á un industrial de Zuric, *M. Paur*, ese telar tiene alguna analogia con el mecanismo empleado para hacer blondas á mano, en el que el movimiento maquinal propiamente dicho no existe más que en gérmen.

Una máquina muy antigua, por más que sea difícil hacerla remontar á una época ante-histórica, es la que representa la fig. 186 y que los indios designan con el nombre de *picota* ó *cupilay*. En ese aparato encontramos utilizado el movimiento de la palanca. A uno de los estremos de una especie de balancin de madera que descansa en dos apoyos dispuestos en forma de horquilla y atados con cuerdas, está sujeta una percha que lleva un cubo á la vez que el otro estremo está cargado con un contrapeso. Dos hombres que se trasladan de un lado á otro en esa báscula, le comunican un movimiento de oscilacion vertical, en tanto que otro colocado en la parte inferior dirige el cubo al pozo para llenarlo y enseguida vaciarlo en un reguero destinado á conducir el agua por los campos que han de regarse. Hasta ahora ese aparato primitivo ha estado en uso no solamente en las Indias, sino tambien en el norte de Africa, en España, en Bélgica (en las ladrillerias) y por último en varias comarcas de Alemania. Un mecanismo que ofrece grandísima analogia con el anterior, es el del taladro de cuerda que usan los chinos para horadar sus maravillosos pozos artesianos. El aparato que utilizan los egipcios desde los tiempos más remotos con el nombre de *caduf* (36), se parece mucho á la *picota* tal como en Europa se emplea. La única diferencia esencial consiste en que el primero de esos aparatos lo maniobra un solo hombre, y que la báscula produce el efecto útil de la elevacion del agua bajo la accion del contrapeso. El hombre que está cerca del cubo (cufin), sirve para poner la máquina en accion. La figura 187 representa una instalacion importante de un caduf de tres mesetas.

a, *b*, *c*, son pilares formados de limo del Nilo. En *a* y *b* están aplicadas cuatro palancas oscilantes y dos en *c*. Estas últimas ejecutan un número de oscilaciones doble de las primeras, pero tienen una carrera la mitad más corta; *d* y *d* son *cufines* trenzados; *e* y *e* contrapesos formados de limo seco. Las palancas giran alrededor de ejes de madera, á los cuales estan firmemente atados. La máquina está servida por diez hombres que trabajan cantando en cadencia.

Una aplicacion incontestablemente muy antigua del *movimiento rectilíneo* vemos en la flecha y en el arco, que además ofrecen un ejemplo del empleo de un cuerpo elástico (el arco) como colector de fuerza. Verdad es que la utilizacion de la elasticidad del arco, que sin duda vino mucho tiempo despues de la honda, instrumento mucho más primitivo, indica cierto grado de sagacidad y debe por tanto considerarse como el producto de una civilizacion algo avanzada. De orígen posterior al del arco, si bien que bastante antiguo es el tubo de viento que entre los salvajes de la América del Sud se usa en forma de cerbatana, cuya longitud alcanza hasta tres metros. Ese aparato permite arrojar con grande exactitud bolillas de barro, bodoques ó flechas, y segun se haga el arrojo del proyectil, puede considerarse como un primer paso hácia el invento del fusil.

Esas dos aplicaciones del movimiento rectilíneo dan por resultado el arrojo de proyectiles que abandonan al punto la máquina para continuar su movimiento fuera de ella bajo la accion de las fuerzas cósmicas, de tal manera que la parte de la trayectoria que describen mientras van guiados por la máquina, es con mucho la más débil. Por regla general en los primeros períodos de la cultura humana rara vez se siente la necesidad de

conseguir el movimiento rectilíneo, que parece hoy tan natural á nuestra inteligencia tan avezada á los principios geométricos. Cuanto más cercano del estado natural se halla el hombre, tanto ménos siente la utilidad de la línea recta, y por lo mismo conviene esforzarnos en lo posible en hacer abstraccion de nuestras ideas modernas cuando queremos juzgar de hechos que se remontan á una época más ó ménos remota.

En los aparatos de guerra de los griegos y romanos que, conforme conviene hacer constar, tomaron ó imitaron de aquellos pueblos del Oriente, el lado maquinal se muestra ya desarrollado de una manera enteramente notable; y sobre todo la acumulacion de la fuerza para el arrojo de los proyectiles se encuentra allí elevada á sumo grado de perfeccion. En las balistas y catapultas se encuentra generalmente como forma fundamental la de la ballesta, una trasformacion del arco primitivo, si bien que en vez de una materia elástica, como en ese último aparato, se usan brazos rígidos cuyo movimiento de disparo dimana de un resorte de torsion, tal como el que hemos estudiado en el § 42 y que está formado de tendones, tripas ó pelo de animales (fig. 150). Las partes accesorias, tales como guias, aparatos de arrollamiento, de torsion, etcétera, presentan disposiciones muy ingeniosas que acusan alto grado de habilidad.

Fáltanos ahora procurar determinar á qué época se remonta el orígen del acoplo de elementos constituido por «el tornillo y la tuerca.» Cierto es que era perfectamente conocido de los griegos y de los romanos, que lo aplicaban, por ejemplo, á la construccion de los carros, pero tambien lo es que nunca se generalizó mucho. En las colecciones alemanas de antigüedades una de las rarezas más preciosas que figura en ellas, es el tornillo cuando va provisto de una tuerca. Un hecho bastante sorprendente y que mereciera profundizarse, es que desde el orígen el tornillo á la derecha se ha empleado siempre con preferencia del tornillo á la izquierda. A falta de elementos y datos suficientes, procuraremos dar una esplicacion de semejante fenómeno y nos limitaremos á observar que esa preferencia no debió probablemente efectuarse siempre con un carácter tan esclusivo como en nuestra época, en que los profanos apenas tienen una nocion de la existencia del tornillo *sinistrorsum* (á la izquierda). Encuéntranse, en efecto, tornillos de esa especie representados en dibujos de la antigüedad, y á la vez debe decirse que en varios dibujos de la Edad Media, lo mismo que en los de la prensa de abatanar de la *Fulonica* de Pompeya, figuran los dos géneros de tornillos.

Más sea como fuere, difícilmente puede determinarse por qué via se llegó á ese maravilloso acoplo de elementos. Ante todo conceptuamos inadmisible la opinion en virtud de la cual tendria el tornillo por orígen una imitacion directa de la naturaleza y seria por ejemplo la reproduccion de la forma de la concha del caracol. Sin embargo, hemos de confesar que hay cierto número de argumentos favorables á esa hipótesis: así, en primer lugar, las espiras de las conchas de caracoles con muy raras escepciones son *dextrorsum* (á la derecha); en segundo lugar, las palabras que en griego sirven para designar el tornillo y el caracol *(kochlias, kochlion, kochlos)* son idénticas ó casi idénticas; más ninguno de ambos argumentos es decisivo. Nada impide en efecto que el tornillo, descubierto de una manera cualquiera, recibiese más tarde un nombre alusivo á su semejanza con el caracol; y por otra parte, el nombre griego que significa *cuchara (kochliarion)*, es igualmente un derivado del nombre del caracol; y por ende la analogia en tal caso se limita únicamente á la forma hueca, sin que la figura espiral entre para nada en la significacion.

Además, aceptando como verdadera la hipótesis de que el tornillo deriva de la imitacion de una forma natural, se tendria que admitir una interrupcion en el desarrollo progresivo de las máquinas, la cual estaria en completa contradiccion con el modo de estratificarse las ideas que observamos en otros casos. Por otro lado, la cáscara del caracol no da más que el modelo de un tornillo cónico, y por lo mismo ese modelo habria tenido que sufrir forzosamente una trasformacion para llegar á la forma cilíndrica. Finalmente, lo que constituye para nosotros un argumento más decisivo aun, es que la concha del caracol en nada nos ofrece el ejemplo de un acoplo de elementos del género del que nos ocupa, ni puede dar ninguna idea del movimiento relativo que caracteriza el acoplo «tornillo y tuerca,» ni de la facultad de engendrar una presion que es la consecuencia de tal acoplo.

Mucho más probable parece que el invento del tornillo y la tuerca tuvo por punto de partida la observacion del movimiento helicoidal engendrado accidentalmente en ciertos aparatos. Sin querer hacer otra cosa que una mera hipótesis, podemos suponer que el taladro de movimiento alternativo que representa la figura 177, abrió indirectamente la senda que debia conducir á dicho acoplo de elementos. A consecuencia de un uso mucho tiempo prolongado la cuerda arrollada entorno del palo móvil puede, merced á la presion y al frote, haber determinado en dicho palo salientes helicoidales que en el movimiento de rotacion del palo resultante del arrollamiento hacian las veces de filetes

de tornillo, al tiempo que la cuerda con sus diferentes vueltas desempeñaba el papel de tuerca. Repitiéndose esa observacion un gran número de veces, pudo muy bien haber conducido poco á poco á útiles aplicaciones de la combinacion maquinal obtenida así en cierto modo por casualidad. Esa opinion se encuentra firmemente corroborada por la forma de la palabra *schraube* que en la lengua alemana sirve para designar el tornillo. En las lenguas latinas y en la lengua inglesa el filete de los tornillos se encuentra aun hoy designado con espresiones que recuerdan el hilo *(filo)* ó la cuerda *(hilo, filetto, filet, thread)*. No obstante conviene no insistir demasiado sobre ese punto, porque nada prueba que esas denominaciones dejen de ser posteriores al invento del tornillo. Difícil es llegar á sentar cual fué el objeto propuesto en las primeras aplicaciones del tornillo y por lo tanto determinar si primeramente se empleó para producir un movimiento progresivo ó para ejercer una presion, ó para servir, en fin, como medio de unir piezas; y no es ménos difícil aclarar de qué manera se construia al principio la tuerca ó tornillo hueco. No podemos hacer más que recomendar con instancia el estudio de esas cuestiones de orígen á los lingüistas y á todos los que se ocupan de investigaciones relativas á la antigüedad.

A la par de la variedad de los movimientos que se multiplicaban con rapidez en las máquinas, el desarrollo de las fuerzas motrices se operaba muy al contrario con estrema lentitud. La opinion antes espuesta de que la primera máquina fué el aparato del movimiento alternativo para la produccion del fuego, en el que el empleo de la fuerza representa un papel poco importante, se encuentra en contradiccion con la idea universalmente admitida de que tal prioridad corresponde á la palanca.

Sin ni siquiera suscitar la objecion perjudicial de que las nociones relativas á lo que llamamos la palanca tendrian aun gran necesidad de aclararse y profundizarse, cúmplenos observar que adoptando esa última opinion parece que no se quiere en modo alguno tomar en cuenta el sendero que comunmente siguen las facultades humanas en su desarrollo y que en todo tiempo deben haber seguido. La hipótesis en virtud de la cual la palanca seria la máquina más antigua, se refiere sin duda á la idea de las tentativas que el hombre debe haber acometido para vencer grandes *resistencias*. Ahora bien, no son las fuerzas las que ante todo se han manifestado á la inteligencia humana al principio, sino más bien los *movimientos* que producen. El niño se siente vivamente impresionado á la vista de los molinos de viento, de las ruedas hidráulicas, de los mazos de batan, y por regla general, de todas las máquinas que ejecutan movimientos regulares, fáciles de abarcar á la primera ojeada; más no se forma la menor idea de las fuerzas utilizadas para obtener tales movimientos. La abstraccion, indispensable para concebir la fuerza separada del movimiento, constituye una operacion bastante complicada de la mente, que ha necesitado un largo período para llegar á su completo desarrollo. Por esa razon en las primeras máquinas salidas de las manos del hombre, aun poco espertas, la fuerza no desempeñaba más que un papel bastante secundario, en proporcion de la que permitian los esfuerzos de los miembros, obrando así de una manera *inconsciente* en cierto modo.

Por la misma razon las inteligencias poco cultivadas en la mecánica se obstinan hoy todavia en buscar el *movimiento contínuo*. Como cabalmente el sentido de la vista es el que trasmite á nuestra inteligencia las primeras impresiones, la contemplacion del movimiento ejerce siempre en los naturales incultos una atraccion irresistible, una especie de fascinacion, á la que por otra parte las inteligencias más desarrolladas no pueden alabarse de haberse sustraido siempre. Las tentativas hechas para producir el *movimiento*, han tenido el resultado de desarrollar lenta y gradualmente los modos de produccion *de las fuerzas motrices* que no se hallaban inmediatamente á la disposicion del hombre. La opinion popular que admite la hipótesis contraria, comete el grave error de suponernos como otros tantos Robinsones nutridos de ideas modernas, en la posicion de los inventores primitivos, que en cambio debian ante todo sentir la necesidad y formarse la idea de la posibilidad de un perfeccionamiento cualquiera, antes de intentar realizarlo.

No cabe duda que trascurrió un período muy largo de tiempo antes que el hombre llegase, respecto del *elemento motor*, á un grado de desarrollo tal que le fuese posible reemplazar en las máquinas primitivas la accion de sus fuerzas musculares con las de otras fuerzas naturales. Es probable que hubo de comenzar por recurrir con tal fin á las fuerzas de séres animados que á su lado vivian, esto es, á las fuerzas animales; más para ello tuvo ante todo necesidad de someter los animales domésticos, resultado que no se realizó sino despues de un período de tiempo muy considerable. Durante todo ese período sin cesar procuraba perfeccionar las disposiciones de sus máquinas, de manera que permitiese á una sola persona ejecutar el resultado que primitivamente exijia varias, y así logró aumentar la cantidad de trabajo que podria dar un individuo aislado (37). Las fuerzas que se encuentran en la naturaleza

inanimada y que era impotente para comprender, no le inspiraban al principio más que un impulso de terror, impulso que poco á poco aprendió á vencer para llegar definitivamente al punto de procurar sacar partido de él. Conforme ha demostrado *Curtius*, á consecuencia de investigaciones de lingüística muy ingeniosas, el hombre se contentó mucho tiempo con la navegacion de remos, antes de aprovechar por medio de las velas la fuerza del viento, que sin embargo, se le ofrecia tan espontáneamente.

Lo que hubo de parecerle más relacionado con la naturaleza animada, fué sin disputa la corriente de agua cuyo solo movimiento llamó ante todo su atencion; lleno de respeto por ese movimiento contínuo y en apariencia eterno, sintióse movido á erigirlo en el objeto de un culto especial, hoy estinguido y con el cual tenian conexion las ruedas sagradas del Tíbet. Tan solo más adelante fué desarrollándose poco á poco en su ánimo la idea de aprovechar un movimiento obtenido así sin fatiga, y hacer de él una primera aplicacion utilizándole para dar el movimiento á una rueda elevatoria.

En el ínterin la esperiencia le habia dado á conocer el principio tan importante y rico en consecuencias que antes hemos señalado con motivo del arco, y que consiste en la acumulacion de la fuerza sucesivamente desarrollada por los músculos, para utilizarla luego en totalidad y en determinado momento.

En el aparato primitivo destinado á dispara flechas la pieza flexible ó el arco es el órgano maquinal de la acumulacion de la fuerza; él es el que acumula en estado de fuerza latente la fuerza sensible de los músculos, y esa fuerza latente es la que en el arco primitivo, como en la ballesta, obra al disparar las flechas. En las balistas antiguas y las catapultas el principio de la acumulacion se encuentra elevado á un grado mucho mayor de desarrollo, puesto que en tales aparatos la fuerza de varios hombres se halla concentrada y latente por medio de procedimientos cinemáticos, y enseguida se utiliza de un solo golpe para producir un efecto considerable. Más adelante ese mismo principio se estiende sin distincion á todas las fuerzas motrices, y hoy se le encuentra en gran número de aplicaciones que desde los pequeños resortes de los relojes y los de fusiles, se estienden á través de una série de mecanismos de tension hasta los acumuladores de presion de las gruas hidráulicas de Armstrong y á los recipientes de aire comprimido de los perforadores del Mont-Cenis.

Hasta mucho más tarde no se descubrió la fuerza motriz del vapor de agua, cuando ya se conocia desde mucho tiempo la de las materias fácilmente inflamables ó esplosivas, ó para hablar con más exactitud, aquella fuerza latente que la naturaleza ha acumulado en cantidades enormes por el globo terrestre en las materias descomponibles. En otros términos, el hombre conocia un manantial de fuerza cuya importancia no presentia al principio, pero que merced á su empleo en la máquina, le ha conferido sobre la naturaleza tan vasto poder, que debe considerarse esta circunstancia como la mayor revolucion que hasta aquí se haya verificado en la existencia del género humano.

§ 49

Principio cinemático del perfeccionamiento de las máquinas

¿Cuál es, podemos preguntarnos, el carácter cinemático propiamente dicho que pueda considerarse como el signo distintivo del perfeccionamiento en los desarrollos sucesivos de las máquinas, lo mismo para los casos antes citados que para todos los demás? ¿Cuáles son los puntos que han presentado más facilidad ó dificultad al espíritu inventivo, suponiendo que se designa así en la máquina la nocion del elemento mecánico que desde el orígen tiende constantemente á ser más clara y profunda? A semejante pregunta no puede darse en mi sentir otra respuesta que la siguiente: *El progreso debe buscarse en el modo de aplicacion de la clausura de fuerza, y en particular en la limitacion sucesiva de la clausura de fuerza propiamente dicha, con sustitucion, en una medida siempre creciente, de la clausura por acoplos y de la clausura por cadenas cinemáticas que pueden formarse con tales acoplos.*

Lo que la inteligencia humana procuraba al despertar por vez primera, en la creacion de la máquina, por cierto de una manera bastante confusa, era obligar ciertos cuerpos inanimados á tomar movimientos determinados, susceptibles de utilizarse para los resultados que se proponia. Primero el hombre pide á sí propio y á sus semejantes las fuerzas necesarias para producir ciertos movimientos. La idea de someter á esa utilidad las fuerzas naturales dista mucho aun de germinar en su espíritu. Se da por muy contento y satisfecho viendo el buen éxito de sus proyectos, debido á sus propios esfuerzos, á pesar del cansancio que le producen aquellos. La clausura de fuerza es entonces el medio más ordinario á que recurre para combinar una série de cuerpos que juntos cooperen á la produccion del efecto que desea.

En el enciende-fuegos por el frote del palo (fig. 176),

tipo el más antiguo del acoplo de elementos que hemos designado con el nombre de *acoplo de rotoides*, vemos que la clausura de fuerza produce la presion en el sentido longitudinal, así como el sosten del palo en todas las direcciones trasversales; es tambien la clausura de fuerza la que pone ese palo (ó árbol) en movimiento por medio de las palmas de dos manos; y ella misma es en fin, la que mantiene fija la pieza horizontal de madera. Más adelante se recurre al empleo de un cordon y se introduce un apoyo á la parte superior, siendo esto el indicio de un gran progreso maquinal, como quiera que, merced á la adicion de esos dos nuevos elementos cinemáticos la fuerza muscular que ha de gastarse en producir el movimiento, se encuentra amenguada y reducida á un simple acto de traccion alternativa sobre los dos estremos del cordon, mientras que anteriormente debian las manos ejercer al mismo tiempo una presion sobre el palo y comunicarle un movimiento de rotacion alternativo. Sin embargo, uno de los elementos añadidos, el cordon, es todavia de clausura de fuerza é igualmente por clausura de fuerza está unido sistemáticamente á la pieza de madera entorno de la cual se arrolla.

Si seguimos ese aparato de movimiento alternativo desde el momento en que bajo la forma de taladro se utiliza por los constructores de palafitas ó estacadas de habitaciones palustres, para ser empleado más tarde casi sin modificaciones por los carpinteros de ribera mencionados en la Odisea, hasta la época en que llegó á dar el torno primitivo, podemos afirmar que recibió durante ese intérvalo muy notables perfeccionamientos. En primer lugar desaparece la doble clausura de fuerza en los soportes de la pieza móvil, puesto que, merced á la adicion de la segunda punta del torno se obtiene un sistema de soportes de clausura por acoplo. El movimiento de la cuerda motriz sufre tambien un cambio ventajoso; no solamente, en efecto, los estremos superior é inferior de la cuerda en virtud de la accion de la percha elástica y del pedal, á los que respectivamente están atados, se encuentran en la precision de recorrer trayectorias bastante bien determinadas, *resultado que corresponde á la adicion de dos miembros en la cadena cinemática*, sino que tambien el movimiento de regreso de la percha y del pedal está asegurado por la fuerza acumulada en el resorte, de manera que el tornero no tiene que producir más que el movimiento adelante. Como ese último se obtiene fácilmente con el pié, resulta que las manos quedan enteramente libres para guiar la herramienta. Conviene, además, observar que el nuevo elemento que hace las veces de resorte, la percha del torno, es tambien de clausura de fuerza, así como la accion intermitente del pié sobre el pedal, que no se produce más que en un sentido. El torno de los calmucos que antes hemos descrito, puede considerarse como uno de los grados intermedios que nos son incompletamente conocidos, de los progresos realizados desde el taladro de *Homero* hasta el torno de madera usado aun en Italia, por mucho que aquí sea difícil separar lo que se debe á estrañas influencias y las de épocas más recientes. Lo que en todo caso importa notar es que la introduccion de procedimientos cinemáticos ha hecho posible el poner en movimiento la máquina por un solo hombre en lugar de dos y hasta tres que primitivamente eran necesarios.

El huso de mano da márgen á observaciones de igual género. Por más que sea todavia de clausura de fuerza en todas direcciones, no debe dejar de considerarse como una disposicion maquinal compuesta de los elementos rueca é hilo (órgano de traccion); merced á ese dispositivo la torsion laboriosa de la fibras que primitivamente, como en la fabricacion de las cuerdas, exigia á lo ménos dos personas, pudo ejecutarse por una sola ó cuando ménos hizo posible el sustituir el modo de torsion defectuoso practicado por los indios, con un procedimiento más rápido y perfecto.

Podemos á más señalar circunstancias análogas en el desarrollo de la picota indiana, por más que esa máquina sea de orígen mucho más reciente que el enciende-fuegos por el frote del palo y que el huso de mano; las fuerzas que han de vencerse son aquí más considerables (existen picotas maniobradas por seis y hasta ocho hombres, con cubos de un peso correspondiente): sin embargo, la clausura domina por doquiera. Así sucede que en los caballetes de la báscula la clausura de cada soporte se efectua en el sentido vertical merced á la pesantez, en tanto que los movimientos laterales quedan impedidos no solamente por las cuerdas de atadura, sino tambien y sobre todo por la direccion conveniente que conserva la presion ejercida por los piés. El punto de atadura del tirante y el asa del cubo son igualmente de simple clausura de fuerza, así como el agua, el cuerpo que ha de elevarse. Por último, se encuentra otra doble clausura de fuerza en el modo de poner en movimiento la báscula, puesto que uno de los dos hombres empuja siempre hácia abajo uno de los brazos de la báscula, al tiempo que el otro, suspendiéndose al enrejado de bambú, no hace más que guiar en la direccion que se quiere el brazo que se levanta. En el chaduf egipcio la articulacion de la báscula está generalmente formada por un eje de madera, habiendo por consiguiente ahí un órgano de clausura por acoplo que permite elevar por medio de un contrapeso un cubo de

agua de peso menor, no exigiendo más que la intervencion de un solo hombre, cuya tarea consiste en bajar el cubo vacio tirando de la cuerda. En el arco donde el movimiento rectilíneo de proyeccion se realiza de una manera maquinal, en tanto que en la honda dominaba todavia todos los puntos la clausura de fuerza, la saeta guiada por el dedo debidamente encorvado es todavia de clausura de fuerza, y lo mismo podemos decir del arco y de su cuerda. Por el contrario, en la balista y en la ballesta ese modo de clausura se encuentra desechado en gran parte, ya que la flecha va guiada por una ranura rectilínea; á más de que encontramos aquí una disposicion para obtener la tension, y por lo tanto una cadena cinemática intermedia que viene á sustituir la clausura de fuerza producida por la mano del hombre al tender la cuerda. En la cerbatana el acoplo de prismas que sirve para guiar el proyectil está ya notablemente perfeccionado. En el antiguo fusil ese acoplo es más perfecto todavia, porque el cañon está enteramente pulido por dentro; y por fin, en los modernos fusiles rayados, el cañon y el proyectil constituyen un verdadero acoplo de tornillo, de manera tal que la clausura de fuerza para el proyectil queda enteramente eliminada.

La rueda elevatoria china, de que hace poco hemos hecho mencion, revela claramente su antiguo orígen con el empleo preponderante de la clausura de fuerza. Con efecto, ese modo de clausura se encuentra para el elemento motor lo mismo en el lecho de la corriente en que está sumergida la rueda, que en las paletas trenzadas sobre las cuales esa corriente obra; é igualmente se halla en los cubos de bambú que sirven para subir el agua al canal que la dirige por los campos que han de regarse, y finalmente, en los soportes á guisa de horquillas del árbol de la rueda.

Las antiguas ruedas de cubos (cangilones) de España, que se designan con el nombre de *norias* (38), pueden servir entre otros ejemplos para demostrarnos la gran parte que tuvo en el invento de la clausura cinemática la simple reaccion ó la lucha con los movimientos perturbadores. Los estremos del eje de una de esas ruedas descansan en las traviesas superiores de la armadura que están ligeramente inclinadas y sin ninguna muesca (fig. 188). En el movimiento de rotacion indicado por el sentido de la saeta cada gorron tiende á rodar hácia adelante, pero ese desplazamiento queda impedido por una pequeña pieza saliente ligeramente ensamblada en la traviesa.

Sabemos muy bien que con el tiempo tales soportes y los del mismo género fueron trasformándose paulatinamente en acoplos de rotoides, ajustados con suma exactitud, y que por otra parte guiando el agua al principio á un canal y más tarde á un saetin que encajara con la rueda, se fué sujetando más y más esa agua á un sistema de clausura por acoplos; pero no es ménos cierto que en las ruedas hidráulicas encontramos de una manera general evidentes huellas del antiguo predominio de la clausura de fuerza.

En las bombas, los molinos y las otras máquinas de la Edad Media encontramos numerosas aplicaciones de los *mecanismos de manubrio*, es decir, de mecanismos que contienen un número bastante grande de articulaciones ó de acoplos de rotoides. Estudiando más detenidamente esas máquinas, cosa fácil si se consultan los dibujos de la época, que se han conservado, se ve que la clausura de fuerza se halla en ellas en pleno desarrollo. Las articulaciones de los manubrios y de las bielas están compuestas de barras redondas que juegan libremente en aberturas tambien circulares (ojos) como sucede con los eslabones de una cadena forjada comun, en tanto que los cuellos dispuestos á bastante distancia impiden los movimientos laterales harto pronunciados. Esos juegos considerables permiten al propio tiempo allí en donde la disposicion lo exije, una rotacion entorno de un eje perpendicular al de la barra: para esas posiciones, á las que hoy aplicaríamos una articulacion universal, los antiguos aparatos, como se ve, son más pobres en órganos que los modernos.

La clausura de fuerza se ostenta en su apogeo en algunos aparatos que provienen de los últimos siglos, en las antiguas *prensas de lagar*, por ejemplo, usadas todavia en algunos puntos de los valles del Rhin y del Mosela, así como en Suiza. Para ejercer la presion se usa una palanca enteramente de clausura de fuerza, compuesta de un tronco de roble que en las prensas de la forma más antigua está cargado al estremo libre con una piedra de molino. Igualmente encontramos en este aparato un tornillo de madera que sirve no para producir la presion, sino meramente para subir y bajar el estremo cargado de la palanca (39). Únicamente en las prensas ó molinos de ese género que vemos en la cuenca del Rhin, y que por lo demás deben considerarse como los más modernos, sirve el husillo ó tornillo para prensar la barra hácia abajo; toda la máquina puede entonces compararse á un tornillo de cerrajero, en el que el punto de presion en vez de hallarse, como de ordinario, fuera del husillo y de la articulacion, se encontraria entre las dos piezas y más aproximado á la segunda.

Debemos igualmente señalar como muy curiosos esos martillos de fragua primitivos que encuentra el viajero en los estrechos valles tan industriosos del antiguo ducado de Berg y de la region de Eifel. Una pequeña

rueda hidráulica toscamente construida da el movimiento á un martillo, en tanto que otra rueda mueve la máquina soplante ó fuelle que en el pais se designa con el nombre de *cucú*. De igual modo que el martillo los fuelles reciben su movimiento por medio de barras, siendo por consiguiente de clausura de fuerza; puesto que en efecto cada barra obra sobre la tabla superior de un fuelle, y la baja en tanto que un resorte de palo clavado en el pavimento empuja esa tabla así que la barra la suelta. En ese aparato en el que se descubre de una manera indudable la herencia de los siglos, no hay casi ningun acoplo de elementos que no sea de clausura de fuerza. Unicamente pasando por una série lenta de trasformaciones ha llegado el *cucú* á proporcionar la admirable máquina soplante de cilindros que hoy presta tantos servicios á la industria.

En todos esos ejemplos sacados de los antiguos mecanismos vemos desaparecer paulatinamente la clausura de fuerza para abrir plaza á la clausura por acoplo y por cadena cinemática. De la clausura de fuerza pura y simple se llegó primero á los acoplos de elementos de clausura de fuerza, de éstos se pasó á los acoplos más y más cerrados, para terminar en los acoplos desmodrómicos, que fueron insensiblemente el preludio de las cadenas cinemáticas. Entre tanto cada progreso alcanzado ayudaba á realizar otros, ya que todo perfeccionamiento aportado á una máquina-herramienta daba por resultado hacer más perfecta la ejecucion de los órganos de toda máquina nueva organizada con su concurso. Luego, no es la *sencillez* tomada en el sentido del *corto número de piezas* de que se compone, la que caracteriza el *valor de una máquina*, sino la *mayor precision de los movimientos que permite obtener*, á la vez que exije ménos inteligencia en el manantial de fuerza, aun cuando ese resultado no se consiga más que á costa de un *aumento considerable del número de órganos*, ó conforme la espresion que hemos adoptado, del número de miembros del encadenamiento cinemático.

Si ahora reducimos el principio cinemático á la unidad más elevada del desenvolvimiento humano, del conjunto de hechos examinados podemos sacar la conclusion de que el modo de establecerse los primeros dispositivos maquinales debe considerarse únicamente como el resultado de expedientes impuestos por la necesidad. Habiéndose erigido en verdadera necesidad ciertos movimientos, realizáronse *tan bien como se podia*, y así se cayó fácilmente en los acoplos de elementos en su imperfecta forma primitiva; era un resultado forzoso, ya que conforme lo han demostrado nuestras investigaciones, no es posible llegar á otras soluciones que presenten el mismo grado de sencillez. El ejercicio y la práctica condujeron poco á poco á aplicar la inventiva á la produccion de efectos diferentes de aquellos que al principio se habian tenido á la mira y á mostrarse más y más exigente cada dia bajo el concepto del valor y de la utilidad práctica de las disposiciones adoptadas. Para satisfacer esa exigencia creciente y responder por ende á una necesidad creada por las circunstancias esteriores, la concepcion maquinal hubo de sufrir en cierto modo una especie de cristalizacion lenta, adquiriendo así poco á poco formas bastante claras para que se pudiera con propósito deliberado comenzar á emprender con su auxilio la investigacion de las soluciones de nuevos problemas. En esa investigacion el perfeccionamiento del útil empleado era sin cesar el objeto que se tenia á la mira á fin de que pudiera convertirse en manantial de nuevas aplicaciones y ulteriores progresos.

Aquí como en todas partes podemos hacer resaltar esa maravillosa tendencia á la estension de la pujanza del hombre, tendencia que se demuestra muy desigualmente entre las diversas razas humanas y que por lo tanto las ha conducido á grados de desarrollo diferentes. Esa tendencia se muestra en algunas en muy escasa medida, por lo cual durante millares de años no han podido avanzar más que á cortos pasos por las sendas del progreso; han quedado más fieles á la naturaleza y han querido someterse á su dominio más que las otras razas. Empujadas otras en cambio por una fuerza interior que en cierto modo se producia sin cesar, han disputado á la naturaleza su dominio palmo á palmo, y desarrollando sus facultades en esa lucha se han encontrado dispuestas para llevar á cabo los trabajos de la mayor importancia.

§ 50

Modo de desarrollo de la mecánica moderna.

La mecánica moderna data del invento de la máquina de vapor; con ella y por ella se ha desarrollado con una rapidez que de ningun modo tiene ejemplo en los períodos anteriores. Sin embargo, en mi sentir no se ha de ver ahí un verdadero salto, un cambio brusco en el desenvolvimiento de las ideas, sino simplemente una aceleracion en su sucesion. La curva se ha elevado en este punto más prontamente, sin cesar, empero, de obedecer á la misma ley. No debemos con efecto olvidar que en las cuestiones de ese género es en estremo difícil formular un juicio sobre sucesos que se realizan á nuestra vista, como quiera que tambien nos-

otros estamos sometidos al impulso, y que en nuestras sensaciones y juicios sufrimos la influencia de las ideas que dominan en rededor de nosotros. Verdad es que en compensacion tenemos á mano gran número de hechos que podemos conocer y apreciar con exactitud. Un exámen atento de la manera como se llevan hoy á cabo los perfeccionamientos de las máquinas conduce, como veremos pronto, á esta conclusion: *el procedimiento que consiste en sustituir á la clausura de fuerza la clausura por acoplo y por cadena, ha seguido hasta ahora una marcha regular; y por lo tanto podemos considerarlo como el resúmen más completo y general del desarrollo sucesivo de las máquinas. Además, en adelante tendremos que considerarlo como una forma esencial de su desarrollo ulterior.*

En la máquina de vapor de *Newcomen* (fig. 189) la clausura de fuerza prepondera todavia y se mantiene así durante todo el siglo XVIII; ese modo de clausura existe en la bomba, en las cadenas del balancin, en el émbolo del vapor, y en fin, en la distribucion misma, por más que el invento del jóven *Potter* tuviera por resultado sustituir la accion de un mecanismo á la intervencion de la inteligencia. *Watt* es el primero que comienza á introducir sucesivamente en diversos órganos la clausura por acoplo y la clausura por cadena. Así, por ejemplo, las cadenas de clausura de fuerza del balancin, ceden su puesto al «paralelógramo,» infinitamente más complicado, pero tambien mucho más perfecto bajo el punto de vista cinemático. Hasta aquel dia la respetable máquina de elevar agua de nuestras minas permaneció parcialmente entorpecida por las trabas de la clausura de fuerza, y tan solo desde muy poco tiempo se ha entablado sériamente la lucha entre ella y las nuevas bombas de vapor de accion directa.

Un ejemplo interesante de la trasformacion de la clausura de fuerza nos proporciona el mecanismo conocido con el nombre de rueda planetaria de *Watt*. La forma bajo la cual fué introducida esa rueda la primera vez por su autor, no era la de la fig. 190, sino que era muy distinta y tal como la representa la figura 191. Para hacer girar la rueda *c* entorno de *d* sin dejar de tener constantemente encajados los dientes de una y otra, *Watt* recurrió á un acoplamiento cinemático enteramente idéntico al que hemos mencionado en el § 43. Y en efecto, se dejó guiar por la idea de que un mecanismo era tanto *más sencillo* cuanto más escaso era el número de sus órganos. Hasta más adelante no adoptó la disposicion de la fig. 190, disposicion en que la cadena cinemática tenia verdaderamente un miembro más, que correspondia á la barra de union *e*, pero el movimiento habia ganado en exactitud, y además se eliminaba por completo la clausura de fuerza que en el otro caso debia producir la masa del volante, y que era necesaria en razon del rápido desgaste debido al rozamiento.

En los aparatos de trasporte asistimos en nuestros dias á la conversion de la clausura de fuerza en clausura por acoplo. Despues de las mejoras trascendentales introducidas en la construccion de los coches, de la aplicacion de un avantren perfeccionado, de la ejecucion más esmerada de las carreteras, etc., todavia la clausura de fuerza se hallaba preponderante, máxime para mantener la direccion del tiro que exigia animales muy ejercitados y guiados con inteligencia. Modificóse esta situacion cuando tomó orígen la idea de sustituir la clausura de fuerza con la clausura de acoplo para la direccion del vehículo. En la via férrea el rail está acoplado como elemento con la rueda, y la clausura de fuerza no se conserva más que para las fuerzas perturbadoras verticales. De ese modo se habia realizado un inmenso progreso bajo el concepto de la perfeccion maquinal, que, sin embargo, necesitó más de un siglo y medio (a) para llegar á ser completa. Merced á ese progreso el coche y la via considerados en conjunto podian conceptuarse como constituyendo una máquina. El *rail* es una parte de esa *máquina*, es el elemento que se mantiene fijo en la cadena cinemática que representa el mecanismo. El perfeccionamiento ulterior de la clausura por acoplo en ese mecanismo, la eliminacion de lo que aun queda de la clausura de fuerza en la via, los soportes de los ejes y la suspension de los resortes de los vagones, así como de las locomotoras, son otros tantos puntos que en la actualidad llaman vivamente la atencion.

En cambio, el problema de la locomotora sin rails que tantas veces se ha planteado con gran ardor estos últimos años, se halla condenado á no encontrar más que soluciones imperfectas, porque en el fondo está basado en una contradiccion. Efectivamente, se pretende crear una máquina y al propio tiempo se renuncia á la propiedad más esencial de las máquinas, al acoplo de los elementos. Por otra parte, en la misma cuestion se han hecho varias tentativas para introducir cuando ménos una pieza trasportable, susceptible de acoplarse como elemento con la rueda, como sucede, por ejemplo, con la locomotora *caminera* (b) de *Boydell*, donde hay evidentemente una manifestacion de la tendencia general á limitar la clausura de fuerza. Así tambien

(a) En 1676 usábanse ya en las minas de Newcastle vias de madera; los primeros rails de hierro datan de 1738.

(b) Por distinguirla de la que sirve en los ferro-carriles.

la rueda motriz con calce de goma elástica, de *Thompson*, para locomotora caminera, es en el fondo un indicio de esa tendencia: y con efecto, el calce elástico que aplanándose esteriormente se amolda sobre el suelo del camino ó carretera, ofrece en su contacto con la parte rígida de la llanta una superficie lisa y uniforme, que corresponde á la que presentaria un rail sobre el cual rodase la periferia rígida de esa llanta.

La turbina con sus perfeccionamientos sucesivos merece tambien ocupar un puesto en esta especie de revista. La construccion moderna de este motor deriva directamente de la rueda de erizo del Tirol y de las montañas de Suiza. En esa rueda los hilos de agua que brotan por todo el circuito produciendo rompientes y remolinos, van á proyectarse en las paletas informes de que está armada la rueda, y dan así lugar á una violenta clausura de fuerza; mientras que, al contrario, en la turbina moderna el acoplamiento de dichos hilos con la rueda, cuya construccion es esmerada, presenta una notoria exactitud.

La trituracion de los minerales, ejecutada antes con el aparato primitivo de mazos (el bocarte), despues con cilindros compresores, que durante mucho tiempo parecian constituir una solucion satisfactoria, se efectua hoy con la máquina de triturar, que por así decirlo, se ha introducido de repente y ha tomado una importancia tan grande, que sin ella hoy apenas podria existir un verdadero horno de fundicion: ahí encontramos un ejemplo del paso del sistema de clausura producida por las fuerzas sensibles de masas pesadas dotadas de un movimiento vertical alternativo, al sistema constituido por las fuerzas latentes de un mecanismo de palanca compuesto. Podemos hacer constar una trasformacion análoga en el reemplazo de los antiguos martillos de fragua de báscula y levantamiento, con los cilindros compresores, los laminadores y otros aparatos que actualmente se usan.

Por más que la mecánica agrícola es de orígen relativamente reciente, manifiesta la misma tendencia y busca, no sin tropezar con grandes dificultades, la manera de eliminar una clausura de fuerza que es en estremo complicada, ó cuando ménos reducirla en lo posible, sustituyéndole la clausura por acoplo y por cadena.

Como prueba de la importancia que se da á la sustitucion de la clausura por cadena á la clausura por fuerza, así como de la creencia que se tiene de que en este punto hay una aspiracion á un algo nuevo, una tendencia á un estado mejor, podemos invocar el buen éxito que tuvo á fines del siglo pasado la prensa hidráulica, cuyo paralelismo directo hemos demostrado en el § 43, con respecto á la antigua mufla (40): aun hoy se siente por esa prensa una especie de admiracion en tanto que nadie se digna fijar su atencion en la mufla. Otra prueba del mismo género tenemos en el árbol hidráulico (fig. 161) de que hemos hablado ya en el § 44. Hemos demostrado que ese mecanismo es enteramente análogo á la trasmision por correa (fig. 160) por más que viera la luz mucho más tarde.

Esa gran diferencia de antigüedad entre dos mecanismos tan parecidos por su concepto fundamental, es una prueba manifiesta de que la inventiva trabaja sin cesar y en cierto modo á saltos, bajo el impulso de una inspiracion más ó ménos confusa.

La tendencia cada dia más marcada á eliminar la clausura de fuerza se manifiesta bajo una forma interesante en ciertos productos delicados de la construccion mecánica moderna, como lo son, por ejemplo, los *engrasadores mecánicos* y los *mecanismos ó dispositivos de seguridad* que se encuentran en los ensambles en que entran tornillos, pernos, clavijas y otros órganos del mismo género.

En los engrasadores mecánicos en vez de introducirse el líquido por clausura de fuerza, se efectua por medio de cadenas cinemáticas, muy complicadas con frecuencia, que resuelven á veces el problema con verdadero refinamiento. Así tambien los ensambles de tornillos y clavetes, los dispositivos de seguridad, en los que la clausura se realiza simplemente por accion del frote ó de la pesantez, tienden cada dia más á ser reemplazados con otros de construccion muy esmerada, en los que la clausura se hace por acoplo ó por cadena.

Por ese motivo el número de las piezas de construccion en las máquinas modernas de vapor es mucho más considerable que en las antiguas. Así por ejemplo, en las máquinas de un barco de guerra ordinario los dispositivos de seguridad de los pernos solamente, acarrean tocante al número de piezas, un aumento que varia de 200 á 400.

Como otro ejemplo en apoyo de lo que antecede podemos citar las *ruedas dentadas* (41). Por más que sean conocidas desde unos 1,000 años, sin cesar tendieron á perfeccionarse hasta hoy, y esa tendencia se ha manifestado esencialmente en el sentido de escluir la clausura de fuerza, que todavia existe en lo que se llama el juego entre los dientes (a), y amenudo se traduce por choques. Mientras que en las máquinas hidráulicas de los chinos y en la máquina elevatoria de

(a) Los ingleses designan este juego con la denominacion espresiva de *freedom* (libertad), la cual parece indicar cierta analogía entre ese juego y la libertad cósmica.

los egipcios designada con el nombre de *saquia* (42), los dientes de los engranajes, constituidos por simples clavijas, están separados por anchos intérvalos y á penas llenan la condicion indispensable de la endentadura recíproca, vemos durante la Edad Media y los últimos siglos reducirse más y más el juego, á medida que se llenan mejor las condiciones cinemáticas por lo que toca á la forma que debe darse á los dientes, hasta que por último llega en nuestros dias á verse reducido á una fraccion muy exígua del paso. En el siglo pasado fué tomándose poco á poco la costumbre de considerar la rueda y los dientes de que está armada, como formando una unidad, un todo, y determinar los perfiles de los dientes partiendo de esa conexion. Además, estoy convencido de que antes de un corto número de años se logrará hacer trabajar las ruedas dentadas sin juego alguno (a).

Ya anteriormente al ocuparnos de los medios que deben emplearse para pasar los *puntos muertos* en los mecanismos (§ 46), hemos señalado la lucha que existe hoy dia entre la clausura de fuerza y la clausura por acoplo en el terreno de las máquinas motrices. Hemos hecho notar entonces la preferencia más y más marcada que se da á las máquinas gemelas comparativamente con las máquinas simples. Aun no hace veinte años que se podia oir á prácticos espertos y exentos de preocupaciones afirmar que las máquinas gemelas no convenian para la esplotacion de las minas, y que la máquina simple cabalmente á causa de su sencillez les era muy preferible; que las máquinas gemelas no eran más que cuestion de moda, que no se tardaria en reconocer y renunciar á la instalacion de semejantes máquinas en las minas. Y no obstante, hoy la máquina gemela, si bien más complicada, triunfa ya en las minas como en todas partes. En los laminadores de hierro se aplicaban y se aplican aun como homenaje al principio de la clausura de fuerza, volantes colosales que muchas veces constituyen una causa séria de peligros. Más como hemos visto en el § 47, estos aparatos han sufrido en estos últimos años un perfeccionamiento que consiste precisamente en la sustitucion de la máquina gemela á la máquina simple. Puede considerarse casi como cierto que dentro de diez años la introduccion comenzada ya de las máquinas gemelas será enteramente completa en las hilanderias, fábricas de tejidos, talleres de construccion de máquinas y en las manufacturas de todos géneros. Vemos, pues, aquí como en todas partes, que la clausura de fuerza pierde cada dia terreno y tiende más y más á ceder el puesto á la clausura por acoplo y á la clausura por cadena, que verdaderamente son mucho más complicadas, pero en cambio mucho más perfectas bajo el punto de vista cinemático.

Fuera de esa perfeccion intrínseca que distingue las máquinas modernas de las que les han precedido, conviene señalar otro progreso que se encuentra realizado en ellas y que por ser esterior no es ménos esencial ni ménos importante. Ese progreso consiste en las mejoras aportadas al modo de establecimiento de los diferentes órganos de las máquinas, es decir, de los miembros de las cadenas cinemáticas de que se componen. Merced á la sustitucion del hierro colado á la madera, sustitucion que ha comenzado á efectuarse durante el trascurso del siglo pasado, varios órganos, tales como los balancines, las ruedas dentadas, las palancas, las armaduras, etc., se encuentran compuestos de un número de piezas mucho menor que antes, ó quizá de una sola pieza en ciertos casos. De una manera análoga el acero fundido ha comenzado en nuestros dias á ejercer su influencia en las construcciones de hierro. Prosiguiendo esa clase de estudios la ciencia de la construccion de las máquinas ha llegado á proporcionar con una exactitud más y más grande, las fuerzas latentes de los órganos á las fuerzas sensibles y á reducir sus órganos á las dimensiones más convenientes. En suma, al lado de esa reduccion de la dimension de los órganos se efectua simultáneamente una disminucion del número de esos órganos, ó más exactamente, del número de piezas, y de ahí resulta, por lo tanto, en las máquinas una simplificacion que un simple exámen basta para hacer resaltar. Eso esplica el por qué la máquina moderna parece con frecuencia más sencilla que la máquina antigua, por mucho que en realidad su composicion sea generalmente más compleja. Así, por ejemplo, las antiguas gruas de los muelles, con las cuales no podian levantarse más que cargas muy modestas, pueden considerarse como construcciones importantes y grandiosas al compararlas con las gruas modernas, que bajo la apariencia tan sencilla son, sin embargo, infinitamente mas fuertes y presentan en sus disposiciones interiores una complicacion mucho mayor. Igual observacion se aplica á las bombas, á los molinos, á las máquinas de vapor, etc., cuando se comparan los mecanismos antiguos con los modernos. Esa considerable simplificacion en lo que puede llamarse la forma esterior, progresa dia por dia y tiene por efecto hacer más y más fácil la ejecucion de las máquinas. No se debe además olvidar que semejante resultado se funda en la masa colosal de trabajo acumulado en los recur-

(a) Seis meses hacia que se habia dado á la publicidad esa observacion, cuando de repente se encontró confirmada en la Exposicion universal de Viena con la máquina de tallar los dientes de las ruedas, inventada por *Sellers*, la cual da los engranajes en que el juego no es más que 1/100 del paso.

sos de todo género que ofrecen los talleres de construccion mecánica. Los intereses de ese capital de trabajo son los que usamos en la simplificacion esterior de la máquina, simplificacion que no debe, sin embargo, hacernos perder de vista el aumento que antes hemos señalado en la complicacion interior. Por otra parte, más adelante veremos que esa complicacion no puede aumentar indefinidamente, que se acerca ya á un límite, que es posible conocer, y que está en la esencia misma de la union cinemática: por de pronto debemos todavia dejar á un lado esa cuestion de interés é importancia escepcionales.

Si resumimos ahora los resultados de la revista que acabamos de pasar al progreso mecánico, apoyándonos en los conceptos fundamentales espuestos al principio de este capítulo, podemos decir que la limitacion de la clausura de fuerza ha sido esencialmente el medio utilizado para hacer la máquina apta *para ejecutar en las mejores condiciones la porcion del trabajo que le está asignada.* Merced á esa limitacion los espedientes adoptados por necesidad al principio, se han ido trasformando poco á poco en acoplos de elementos y en mecanismos más sencillos de un efecto mucho más seguro. Esa trasformacion tuvo necesariamente por consecuencia el permitir que se estendiera al propio tiempo la esfera de accion de la máquina y hacer más eficaz la accion intelectual del hombre, ó en fin, para espresarnos como anteriormente, *hacer participar la máquina en una fraccion mayor del trabajo que habia de efectuar.*

Esa última tendencia dió igualmente por resultado inducir al invento de nuevos mecanismos; pero aquí todavia la clausura de fuerza se presenta siempre como el primer procedimiento utilizado, como el primer grado de la série de las trasformaciones sucesivas. Eso es lo que puede hacerse constar aun hoy muy claramente en todas las máquinas inventadas por obreros ó empíricos faltos de instruccion. Las creaciones de ese género se encuentran en gran número y sus inventores han desempeñado con mucha frecuencia el papel de esploradores, entregando á la mecánica campos inesplorados hasta entonces. Generalmente se encuentran reunidos en esas máquinas tanto peso, resortes, barras, escéntricos, volantes, etc., que cumplen ruidosamente sus funciones bajo la accion de la clausura de fuerza, que casi se creeria tener á la vista las estaciones sucesivas del desarrollo de las máquinas reunidas en una sola imágen y vistas por el lado ancho de un anteojo. El constructor esperto é instruido comienza por apartar sonriendo todo ese exceso de órganos de efecto inseguro, para sustituirlos con otros susceptibles de una accion mucho más segura; pero ese mismo constructor cuando bosqueja el proyecto de una máquina enteramente nueva, recurre con frecuencia en los primeros momentos al empleo de la clausura de fuerza, allí en donde habria podido aplicar convenientemente la clausura por acoplo y donde sin duda la aplicará más adelante cuando examine su proyecto con reflexion y calma. La distribucion de las máquinas de vapor del sistema *Corliss* nos proporciona al efecto un ejemplo notable; pues en ella se presenta la clausura de fuerza en todo su apogeo; y en todos los proyectos de perfeccionamiento de ese sistema se encuentra más ó ménos como idea comun la eliminacion de ese modo de clausura. Así pues, en el procedimiento intensivo de perfeccionamiento de las máquinas, vemos desarrollarse de contínuo la idea de eliminar la clausura de fuerza, para confinarla al dominio limitado que le corresponde y que no podemos ni queremos quitarle.

No debemos perder de vista que hasta ahora el desarrollo general de la máquina se ha efectuado en cierta medida, sin *que de ello se tenga clara conciencia:* eso es lo que imprime al antiguo modo de producir las máquinas un carácter enteramente particular, que no permite formarse de él una idea muy exacta. Muy distintamente sucede con el modo de creacion de la máquina moderna, que acabamos de indicar como la obra de un constructor muy ejercitado, en cuyo caso una gran parte de las combinaciones adoptadas, aun si no es la mayor, es el resultado de conceptos claros y premeditados. Lo que aquí hacemos constar, no es tanto el perfeccionamiento de disposiciones antiguas é imperfectas, como la creacion de nuevas combinaciones, susceptibles de abrir á la máquina campos de actividad que hasta entonces habian escapado á su dominio. Mecanismos completos, por más que enteramente nuevos, de combinaciones de órganos de clausura rigurosamente desmodrómica, son los que se ofrecen á la sancion de la práctica, como puede observarse, por ejemplo, en las máquinas de coser, los últimos tipos de fusiles, de piezas de artilleria, etc. Es incontestable que varios de esos inventos modernos revelan un espíritu nuevo, un génio particular muy sorprendente y que se diferencia en esencia del que presidia á las creaciones de la mecánica de los tiempos pasados. Puede decirse que existe entre ellos la misma diferencia que entre la integracion y la diferenciacion. La base del procedimiento antiguo es el «perfeccionamiento» incesante, el *improvement* de los ingleses, espresion que, como se ve, no deja de tener profunda razon de ser. En cambio el procedimiento moderno produce inmediatamente nuevo, y así es como vemos á veces máquinas que hacen

triunfalmente su entrada en la práctica ostentando desde el principio elevadísimo grado de perfeccion. En ellos se demuestran las manifestaciones de un concepto nuevo que probablemente está llamado á generalizarse y erigirse en la regla general de todos los hombres técnicos propiamente dichos. En mi conviccion á ese concepto tendrá que subordinarse más y más la enseñanza de la construccion de las máquinas en nuestras escuelas politécnicas. Con todo, si quereremos notar que la índole del génio humano en su conjunto es inmutable, que el desarrollo de las ideas debe hacerse en cada individuo de una manera microcósmica desde el principio y que por otra parte soluciones aun imperfectas no dejan de ser soluciones, se llega forzosamente á la conclusion de que el antagonismo actual entre la clausura de fuerza y la clausura de acoplo nunca podrá desaparecer por completo.

Conforme han podido poco á poco demostrarlo claramente nuestras investigaciones, la constitucion íntima de la máquina es enteramente el resultado de una limitacion premeditada; y su perfeccionamiento consiste en la tendencia á dar los movimientos más y más exactos y llegar finalmente á la eliminacion completa de toda seccion indeterminada. A lograr ese resultado se han dirigido sin cesar los esfuerzos de la humanidad. Podemos además encontrar al efecto un punto de comparacion en el gran problema de la civilizacion humana, de la que en el fondo el desarrollo de la mecánica no es más que un factor. De la misma manera que el poeta en comparacion de los compañeros de Ulises, civilizados y por lo mismo simpáticos, nos presenta á los cíclopes como «mónstruos odiosos que no obedecen ninguna ley,» que son la imágen de la fuerza brutal, así nosotros podemos poner en oposicion la accion de las fuerzas en la máquina adecuada, por conveniente limitacion, á un objeto único determinado, con el poderio indómito de las fuerzas naturales que entrechocándose con entera libertad no engendran en su lucha más que el producto desconocido de la necesidad. Una sábia limitacion ha creado el Estado, ella sola lo mantiene y lo hace capaz de llegar á más grandes resultados: una limitacion análoga somete poco á poco á nuestro imperio las fuerzas más poderosas, las vuelve dóciles y en cierto modo las encadena á nuestros pasos.

§ 51

De las causas determinantes del desarrollo de las máquinas.

En lo que antecede hemos clamado contra esa opinion tan difundida, y hasta deberíamos decir tan dominante, en virtud de la cual la máquina habria nacido de la necesidad de emplear la fuerza motriz y despues de haber demostrado con razones sacadas del corazon mismo del asunto, el error de un punto de vista tan esclusivo, hemos dado á conocer que la primera idea de la máquina debe más bien atribuirse á la necesidad de la produccion del movimiento. Sin embargo, no hemos querido decir con ello que la necesidad de fuerza motriz haya quedado sin ninguna influencia; pues por el contrario vemos que la cuestion de fuerza interviene constantemente de una manera marcada en la historia del progreso y de las máquinas, por más que siempre quede fuera del desarrollo cinemático, que en realidad constituye la esencia misma del desarrollo de tales máquinas.

De consiguente hay en definitiva dos órdenes de ideas en los cuales deben buscarse los motivos que impelen hácia el desarrollo de las máquinas. El primero y más antiguo corresponde á la necesidad de realizar una série de movimientos diferentes y el segundo á la necesidad de utilizar la fuerza motriz disponible. Esos dos motivos de impulsion obran paralelamente, reunidos en ciertos casos y separados en otros; pero su influencia se ejerce sin cesar en provecho del perfeccionamiento de las máquinas.

Así en el pasado, el material mecánico de construccion y de la guerra, máxime en lo que atañe al trasporte y elevacion de fardos, exigia una produccion de fuerza más y más considerable, en tanto que el material de las manufacturas, los instrumentos de medir el tiempo y otros aparatos análogos exigian la realizacion de movimientos más y más variados siempre.

Aun hoy dia, á pesar del principio abstracto que tanto prospera y que segun el cual nunca deberia considerarse la fuerza separadamente del movimiento, nos vemos inducidos á sentar una distincion del mismo género, toda vez que en una categoria de máquinas desempeña la fuerza el papel predominante, mientras que en la otra por el contrario lo desempeña la riqueza de los movimientos. En presencia de estas dos cuestiones de carácter tan distinto se comprende que la inteligencia humana en su desarrollo ha tenido que seguir forzosamente un sendero muy distinto para cada una de ellas.

El hombre encuentra las fuerzas motrices en actividad dentro del dominio de la naturaleza; pero así están de tal modo fuera de su alcance, que en los orígenes no existen para él, lo mismo que si le fuesen desconocidas; y debe ante todo comenzar por aprender á distinguirlas del conjunto de los fenómenos que las acompañan, á

separarlas, en una palabra, *descubrirlas*. El perfeccionamiento de la máquina bajo el punto de vista de la cuestion de la fuerza, depende esencialmente del conocimiento que el hombre tiene de la naturaleza y en una época ulterior, de las ciencias naturales, á cuyos progresos debe dedicarse siempre más íntimamente. Cuando *Papin* inventaba la máquina de vapor, era á lo ménos tan físico, sino más, que un mecánico práctico; y lo mismo puede decirse de *Watt* cuando con su poderoso génio acometia la cuestion del mecanismo. No acontece hoy lo contrario al buscar los manantiales de las fuerzas, descubiertas y rigurosamente profundizadas con los medios que ofrece la física esperimental y matemática, completadas con el empleo de medios verdaderamente científicos.

Existen igualmente en la naturaleza movimientos de muy grande variedad, que han llamado desde el principio la atencion del hombre; pero los unos son movimientos cósmicos libres, y los otros movimientos producidos por la voluntad de séres animados: en cuanto á movimientos rigurosamente sujetos unos á otros y que con regularidad dimanen tambien unos de otros, como los que obligamos á producir á las máquinas, no se encuentran jamás en la naturaleza, ó á lo ménos se encuentran tan solo en casos muy raros. El modo de produccion de un movimiento determinado es un resultado del pensamiento; á la actividad de la inteligencia humana incumbe crearlo, *inventarlo*. Así, *descubrimiento* por un lado, *invento* por otro, son los dos términos que corresponden á las dos direcciones diferentes, *fuerza* y *movimiento*, segun las cuales se ha efectuado el desarrollo de la máquina.

Por más que esas dos direcciones sean independientes una de otra, en realidad no tienen influencia en el perfeccionamiento de la máquina sino cuando se encuentran reunidas. Todo descubrimiento de un nuevo orígen de fuerza se relaciona inmediatamente al efecto con el invento de los medios que permiten utilizarlo. Así el descubrimiento de las propiedades motrices del vapor ménos constituia por sí mismo un progreso que una iniciacion al progreso. Tuvo por resultado provocar la mayor actividad en la investigacion de las combinaciones, los mayores esfuerzos de inteligencia y reflexion, con el objeto de llegar á crear con el invento los medios de sacar partido del nuevo manantial de fuerza. Para hacer la utilizacion de ese manantial más y más completa, el invento quedó constantemente en actividad, procediendo en su trabajo con un conocimiento más y más claro del *objeto* que debia alcanzar, hasta aquel dia en que ese objeto pudo considerarse proximamente como conocido por completo. Conforme hemos indicado antes, la tarea de la cinemática científica estriba precisamente en determinar la ley que ha de observarse en la eleccion de los *procedimientos* susceptibles de conducir á tal objeto.

En ese modo especial de formacion de acoplos de elementos cinemáticos que hemos designado con el nombre de *clausura de fuerza*, hemos aprendido á conocer la forma bajo la cual se ha conservado en el sistema maquinal, un resto de libertad cósmica, que durante millares de años el espíritu de inventiva se ha esforzado en dominar y reducir, para aplicarlo despues de su limitacion definitiva á nuevos problemas; nosotros encontramos ahí por otra parte el terreno de transicion que permite pasar del *sistema maquinal* ideal al *sistema cósmico*. La clausura de fuerza constituye en efecto esa línea de contorno, que sin ofrecer quizás un trazado perfectamente deslindado, separa los dos sistemas de los cuales se ha hecho mencion al principio de este libro, respecto de los límites del problema de las máquinas (§ 1). El futuro historiador del desarrollo de las máquinas encontrará probablemente en la línea de separacion entre la clausura de fuerza y la clausura de acoplo, el hilo Ariana que le permita descubrir la senda seguida por ese desarrollo, á pesar de las complicaciones de todo género y no obstante las imperfecciones del trazado de dicha senda. Será, además, de la mayor utilidad para el perfeccionamiento ulterior de las máquinas el poder estudiar los problemas con la conviccion de que en la sustitucion de la clausura cinemática á la clausura de fuerza, consiste siempre el verdadero procedimiento que ha de emplearse para realizar un progreso, y que por consiguiente se ha de llegar al fin propuesto con tanta mayor rapidez cuanta mayor sea la decision con que se emprenda esa via.

En mi sentir la enseñanza técnica deberia proponerse sentar claramente y difundir por doquier esa manera de comprender el pogreso que se ha realizado. Aquí nos encontramos en presencia de uno de aquellos pensamientos á que sin comprenderlos obedece instintivamente el inventor, pensamiento que, sin embargo, no está ligado con los otros y que por lo tanto tiene perfecto derecho á que le consagremos un estudio especial profundo.

Ese mismo estudio permite además alcanzar otro resultado de suma importancia. Con efecto, permite mantener ó restaurar en el ánimo del constructor de máquinas el sentimiento de solidaridad y comunidad, no solamente con el resto de la mecánica práctica, sino tambien con todas las manifestaciones de la actividad humana, sentimiento que por efecto de la direccion se-

guida hasta ahora, se ha debilitado considerablemente, y hasta en ciertos casos ha desaparecido por completo. Este último resultado debe principalmente atribuirse á la influencia del principio que tanto se ha popularizado con el nombre de «division del trabajo,» por más que semejante resultado no entrase de ningun modo en las miras de aquellos mismos que procuraron propagar ese principio.

La division del trabajo, que no es susceptible de producir buenos efectos más que en ciertos límites, por una singular mala inteligencia se encuentra hoy aplicado mucho más allá de tales límites, y hasta tiende á ser la base de una verdadera subdivision de la ciencia. Tan lejos hemos llegado en esta senda, que se hace difícil encontrar especialistas cuyos conocimientos se estiendan á todas las partes del dominio de la construccion de las máquinas. En cuanto al mecánico práctico que tenga algunas nociones de las otras materias que trata la actividad humana fuera del dominio industrial, es un fenómeno que tiende á ser más raro cada dia. Y sin embargo, si una cosa hay cierta, es que semejante division en los estudios no podrá ménos de ser desventajosa para todos, si como hasta ahora prosigue indefinidamente. La subdivision de la ciencia no puede impunemente estremarse; por lo tanto debe procurarse reunir de nuevo las partes que se han separado y darles una unidad más elevada, á fin de no llegar á perder de vista el objeto final á que tiende su conjunto. No basta en verdad que algunos sábios tengan conciencia de ello; y especialmente en la forma bajo la cual se han difundido y enseñado los conocimientos, deberia encontrar su espresion el sentimiento de la comunidad de los esfuerzos humanos.

Uno de los elementos más idóneos para fortalecer dicho sentimiento se encuentra en el pensamiento que ha servido de base al presente bosquejo de una historia del desarrollo de las máquinas, es decir, en el *pensamiento mismo de ese desarrollo*. Toda la ciencia moderna de investigaciones se ha apropiado más ó ménos ese pensamiento, lo mismo en el dominio de la historia que en el del estudio de la naturaleza, donde, como se sabe, ha preocupado tan vivamente los ánimos. Ella sola permite y exige al propio tiempo que se abarque de una sola mirada todos los aspectos de un vasto conjunto de conocimientos. Obliga á mirar desde léjos y elevarse por encima de las circunstancias del momento, á la vez que hace más profunda y más alta la interpretacion de los fenómenos aislados. Y es, en fin, la causa de ese vigor que tiene la ciencia moderna y que apenas se vislumbró antes de las dos últimas generaciones. Para el que pretende escudriñar los pasados tiempos, formaban los fenómenos una série sensiblemente limitada, en cada uno de ellos, al período de aparicion; sucedíanse como los granos de un collar de perlas, y su solo punto de union estaba representado por el encadenamiento de las causas á las cuales eran debidos. Hoy en cambio á la par de esa dependencia de los fenómenos, consideramos tambien como elementos fundamentales y esenciales de nuestras investigaciones, el progreso y la marcha contínua del pensamiento: ahí vemos ménos el encadenamiento de los fenómenos que lo que puede ante todo darles la vida y asegurarles la existencia.

He intentado patentizar ese contraste á los ojos del lector con dos epígrafes inscritos á la cabeza del presente capítulo. Entre las espresiones de *Schiller* y los de *Geiger* se encuentra esa diferencia profunda, característica, que existe entre la ciencia de ayer y la ciencia de hoy. El concepto de *Schiller*, por más que es interesante, presenta un carácter frio y contemplativo, y apenas roza por nuestra mente, en tanto que las espresiones de *Geiger* impresionan enérgicamente nuestros sentidos y dan á nuestras impresiones forma y color. Éstas son modernas en el sentido más profundo y mejor de la palabra, y por lo mismo tienen una eficacia especial. Son á la vez tan verdaderas y generales, que aun cuando se refieran á un órden de investigaciones enteramente distinto, conservan todo su valor en el dominio abstracto de nuestras investigaciones actuales.

CAPÍTULO VII

LENGUAJE SIMBÓLICO CINEMÁTICO

§ 52

Necesidad de un lenguaje simbólico para la cinemática

Las consideraciones desarrolladas en los últimos artículos nos han conducido nuevamente á los acoplos inferiores y superiores de elementos de la cadena cinemática, en la que habíamos conocido antes (§ 3) la representacion de la solucion general del problema de las máquinas. Lo que entonces habíamos deducido como consecuencia de simples principios, lo hemos encontrado directamente otra vez, al estudiar el desenvolvimiento genético de la máquina, y al propio tiempo hemos visto aumentarse en una medida sorprendente el uso de la cadena cinemática. La ojeada que hemos echado sobre la historia del desarrollo de las máquinas, nos ha permitido luego conocer la cooperacion de los procedimientos intelectuales, á los que se debe la cadena cinemática y por medio de los cuales llegará probablemente á tomar en lo venidero un desarrollo mucho mayor. Fáltanos ahora emprender más directamente el estudio del asunto que nos hemos impuesto.

La variedad de los casos particulares deducidos ó por deducir se ha hecho tan considerable, que su exámen presenta más dificultades cada vez; y eso es lo que mayormente sucede cuando se trata de espresar con el lenguaje ordinario las propiedades características y distinguir los casos que importa separar. Esas dificultades por otra parte no pueden sino aumentar constantemente, en razon de las formas más y más numerosas cada vez que tiende á tomar el conjunto de las cadenas cinemáticas. Manifiéstase á la par en una medida siempre creciente, la necesidad de poder abarcar de una sola mirada los puntos de afinidad de los mecanismos entre sí. De consiguiente, nos vemos de una manera involuntaria inducidos á la investigacion de un medio idóneo para facilitar su espresion.

En situacion análoga las ciencias matemáticas y en pos de ellas la química han debido recurrir al *lenguaje simbólico*, que no ha tardado en ser para entrambas ciencias un medio de adelanto tan esencial, que hoy realmente no podrian concebirse sin él. Este recurso no se ha sentido necesario en cada una de las dos

ciencias hasta el momento en que se habia llegado á un concepto claro de sus operaciones fundamentales. En la ciencia que forma el objeto de nuestros estudios, las nociones adquiridas han tomado actualmente una forma tan distinta y clara, sus relaciones mútuas pueden establecerse de una manera tan precisa, que la simplificacion del lenguaje con el empleo de los símbolos parece tan justificada como fácilmente practicable. Debemos, pues, comenzar por adquirir ese medio auxiliar, cuya utilidad no es discutible.

Nos convenceremos pronto de las ventajas que ofrece la posibilidad de representar con un símbolo una nocion compuesta, allí en donde debe servir de unidad á la par de otras de la misma especie. Es sin disputa el medio de ahorrarse la pena de volver á cada instante á tratar de la propiedades ya definidas, y por otro lado la precision del lenguaje simbólico da sobre la dependencia y la reciprocidad de los diversos elementos representados, indicaciones que es difícil obtener y aun más difícil trasmitir con los recursos del lenguaje ordinario. No vaya ahora el lector á espantarse con ese nuevo desvio que tendrá que hacer en sus hábitos ó costumbres, para llegar á apropiarse el método de abreviacion que vamos á esponer. Con efecto, todo lenguaje simbólico en una ciencia no constituye más que un simple método de abreviacion y de ningun modo es una escritura geroglífica, un secreto inaccesible á los que no están iniciados. La esposicion de ese lenguaje, amen del objeto especial que debe llenar, tendrá tambien la ventaja de proporcionarnos la ocasion de difundir mucha luz sobre varias cadenas cinemáticas de importancia incontestable.

§ 53

Ensayos de notaciones anteriores.

Algunas tentativas se han hecho hasta ahora para espresar de una manera abreviada la composicion de una máquina. Así, por ejemplo, entre los relojeros y los autores que han escrito sobre esa rama especial de las artes técnicas, encuéntrase á veces una especie de notacion destinada á representar la sucesion de las ruedas dentadas y de los ejes que constituyen el rodaje de un reloj. *Willis* es el que ha entrado más completamente en ese sistema de representacion. Una forma en que se ha fijado más, es la que tiene por objeto designar el rodaje de un péndulo ordinario=:

48
6————45
6————30

En ese modo de notacion las cifras indican los números de dientes, la superposicion de dos cifras, el engranage de la rueda y del piñon correspondiente, y en fin, cada línea la union de dos ruedas por medio de un eje. Si se coloca el nombre de cada rueda al lado de la cifra que indica el número de sus dientes, tendremos:

Rueda mayor 48
Piñon 6 ————45 Segunda rueda
Piñon 6 ————30 Rueda de escape.

Otros artistas ú autores han hecho uso de notaciones diferentes (a). Por otra parte, es evidente que aquí se trata tan solo de la representacion de la parte de un caso enteramente particular; y ese método muy conveniente para representar de una manera visible, las relaciones de trasmision de las ruedas dentadas, no tiene en modo alguno la pretension de ocuparse de la esencia misma del contenido cinemático de esas ruedas.

Más notable y susceptible en realidad de una aplicacion general es el sistema que el inglés *Babbage*, el inventor de la maravillosa máquina de calcular logarítmica, propuso con el título de «Método para espresar con signos las funciones de una máquina.» *Babbage*, á quien ocurrió dicha idea á consecuencia de las enormes dificultades que habia encontrado en la construccion de su máquina de calcular, espuso su método en una obrita muy poco conocida (b), haciendo la aplicacion á dos grandes ejemplos, un reloj de pared con rodaje y campaneo y un ariete hidráulico. En ese método todos los órganos móviles de la máquina que ha de representarse, están inscritos en un cuadro siguiendo el órden en que se suceden y con sus denominaciones respectivas: al lado de cada órgano se encuentra indicado *su movimiento espresado con un signo;* como signos se hace uso de flechas de diferentes formas, de líneas contínuas ó discontínuas, de paréntesis, de corchetes, de cruces, etc. Realmente, con *ayuda del dibujo* es posible darse cuenta del modo de funcionar una máquina, así simbolizada, cuando se está perfectamente

---

(a) Las notaciones siguientes, citadas por *Willis*, se refieren al mismo rodaje.

Oughtred.	Derham.	Allexandre.
30	48)6—45)6—30	48
6)45		45—6
6)48		30—6

(b) *A Method of Expressing by Signs the Action of Machinery*, by C. *Babbage*, Londres, 1866.

al corriente de la significacion de los diversos signos: sin embargo, este método no se ha generalizado. El público técnico no pone atencion en ello, y así contribuye involuntariamente á difundir ese sentimiento de desmayo y mal humor que se revela en la obra que *Babbage* publicó poco tiempo antes de morir. En esa obra en que se muestra tan misántropo como *Timon* el ateniense, echa en cara en términos poco mesurados á sus contemporáneos el no haber comprendido y apreciado su obra. Verdaderamente, á pesar de los servicios de valor incontestable que *Babbage* prestó en otros conceptos, debemos confesar que el mal éxito de su método de notacion debe atribuirse á la insuficiencia del mismo método, mucho más que á la ignorancia ó á la mala voluntad del público técnico.

Con efecto, lo que *Babbage* espresa y quiso espresar con su sistema de notacion, no es en realidad la composicion propiamente dicha de la máquina en órganos definidos científicamente y representados por signos estenográficos que permitan conocerlos, sino solamente una indicacion en estremo general del *movimiento* de esos órganos, los cuales se designan con la escritura y el lenguage ordinarios. Con auxilio del cuadro se puede saber si un órgano dado gira ó tiene movimiento de traslacion adelante ó atrás, si es un movimiento alternativo ó contínuo, uniforme ó variado, y hasta conocer para las piezas de rotacion, la relacion en que se hace la trasmision, etc. Más por otro lado es evidente que en ese sistema la misma notacion puede aplicarse á mecanismos de composicion enteramente distintos. La notacion es una mera indicacion de las propiedades inherentes á cada órgano, pero nada nos enseña sobre la naturaleza de ese órgano, ó dicho en otros términos, el sistema de *Babbage* no da más que una *descripcion abreviada de las funciones de las máquinas*, sin hacer resaltar para nada los principios generales de su composicion.

Si se inscriben los signos propuestos por *Babbage* en el dibujo de la máquina, el cual siempre es indispensable, se llega á un modo de representacion que en concepto de la claridad es muy preferible á las indicaciones abstractas del cuadro que antes hemos mencionado.

Para el objeto que nos proponemos, la representacion de las trabazones cinemáticas con símbolos, el método de *Babbage* no puede sernos de ninguna utilidad; por lo que lo dejaremos á un lado, lo mismo que las modificaciones propuestas por *Willis*, (a) para hacer la aplicacion de ese método un poco más satisfactoria.

(a) V. Willis, *Principles of Mechanism*, segunda edicion, pág. 292.

§ 54

De las diferentes especies de símbolos necesarios.

El lenguaje simbólico que nos proponemos establecer para la cinemática, debe tener por objeto, como el de las *matemáticas*, indicar ciertas operaciones que deben hacerse ó suponerse hechas con los cuerpos representados por signos, á la vez que ese lenguaje debe tambien presentar cierta anologia con el de la *química*, en el sentido de que debe indicar exactamente y con la mayor generalidad posible la *cualidad* de los objetos designados. Los símbolos para los cuerpos cinemáticos no deben, pues, estar desprovistos en sí mismos de significacion, como sucede en las matemáticas, en las que diferentes letras sirven solamente para indicar diferencias de *tamaño* de los objetos que bajo el punto de vista de la cuestion de medida, son *homogéneos*; toda letra debe, al contrario, como en la química, indicar una especie de cuerpos determinada, y en realidad una especie de *cuerpos geométricos*. La letra empleada deberá ante todo corresponder al nombre del cuerpo, es decir, del elemento cinemático que ha de representar, el cual está dotado de propiedades determinadas indicadas exactamente por ese nombre mismo. En ese órden de ideas dicha letra será para nosotros el *símbolo de la especie* ó *del nombre* del elemento que ha de representarse.

No obstante, el símbolo correspondiente al nombre general de un elemento cinemático conocido, por ejemplo la letra que designa una de las palabras *tornillo, rotoide, prisma*, rara vez es suficiente. Por regla general es necesario completarlo con una indicacion más exacta sobre la naturaleza particular ó la *forma del cuerpo;* así, por ejemplo, en el caso del tornillo es indispensable indicar si los filetes están trazados al interior ó al esterior del cuerpo, es decir, si se trata de un *tornillo* propiamente tal ó de una *tuerca*. En ambos casos la superficie geométrica fundamental es la misma; pero existe una diferencia esencial entre las dos formas de aplicacion correspondiente, con respecto á los dos casos. Este signo que es necesario añadir al símbolo del nombre, para precisar más la forma del cuerpo, lo designaremos con el nombre de *símbolo de forma*.

Una tercera especie de símbolo es tambien necesaria para indicar cuál es la relacion que en el mecanismo existe entre dos ó más elementos: importa, con efecto, que la notacion adoptada dé á conocer si dos elementos contiguos están *acoplados* ó si están *unidos invariablemente* de manera que formen un miembro de

cadena, en qué posicion geométrica se encuentra ese miembro, si es móvil ó fijo, ó en otros términos, en qué condiciones está colocado con respecto al sistema considerado como fijo en el espacio, etc. Ese nuevo símbolo constituirá lo que llamaremos un *símbolo de relacion*.

Ese empleo de los símbolos presentará evidentemente tanta mayor utilidad, en cuanto que permitirá dar una idea más precisa y exacta de los elementos cinemáticos representados, y de su encadenamiento. Sin embargo, se podrá en cierta medida limitar ese empleo, á fin de evitar una proligidad que acabaria por ser enojosa, y los símbolos no deberán por lo tanto indicar más que lo que verdaderamente es general y esencial.

§ 55

Símbolos de especie ó de nombre.

Los símbolos de especie ó de nombre deben servir para designar cuerpos susceptibles de ser definidos geométricamente, y por ello conviene escogerlos, como se hace en la química, segun los nombres mismos de tales cuerpos, recurriendo á las letras *mayúsculas ó iniciales*. Por lo tanto, adoptaremos los doce símbolos siguientes para las especies de elementos cuyos nombres ponemos al lado.

S. Espiral (tornillo).
R. Cuerpos de rotacion (rotoide).
P. Prisma.
C. Cilindro.
K. Cono.
H. Hiperboloide.
G. Globo (esfera).
A. Arco.
Z. Diente (saliente).
V. Vaso (recipiente).
T. Organo de traccion.
Q. Organo de presion.

Sorprendente podria parecer á primera vista que el número de las especies de elementos sea tan corto; pero en realidad el dominio de las formas cinemáticas es tan limitado, que un número mayor de símbolos no seria necesario; y hasta cierto punto hay una superfluidad de símbolos en el cuadro precedente: si se toman al efecto las letras A y Z, se ve que la primera designa un arco, es decir, una porcion de un cuerpo de rotacion, y la segunda un diente que es en rigor una porcion de prisma, de cono, de cilindro, etc. En todo caso es una ventaja no tener más que un corto número de símbolos. Las letras han sido escogidas con el mayor cuidado, de manera que pudiesen ser adoptadas sin dificultad en todas las lenguas (a). El autor puede afirmar por propia esperiencia que esos símbolos pueden retenerse fácilmente en la memoria.

§ 56

Símbolos de forma.

Al establecer los símbolos de forma tropezamos ante todo con una dificultad que resulta de que el modo ordinario de concepcion geométrica de la forma del cuerpo, es hasta cierto punto insuficiente para el objeto que nos proponemos. Lo que se entiende en geometria por forma de un cuerpo de un nombre dado, es la porcion del espacio limitado por ese cuerpo, que tiene la forma espresada por el nombre mismo. Por regla general se admite que esa porcion del espacio es la que se encuentra comprendida en el interior de la superficie geométrica dada; pero hay en ello cierto arbitrariedad, ya que no existe ninguna razon formal para escluir de la definicion las *dos* porciones del espacio separadas por la superficie considerada.

Para nuestro objeto es necesario designar claramente esas dos porciones del espacio, lo mismo la que está encerrada por la superficie dada que la que se encuentra al *exterior*. Si, por ejemplo, cortamos un cilindro ordinario por dos planos paralelos, perpendiculares á su eje, tenemos que distinguir la porcion del espacio comprendida entre esos dos planos y el interior de la superficie cilíndrica, de la que se encuentra entre esos dos planos al esterior de la superficie; ó en otros términos, debemos indicar á qué lado de la envoltura cilíndrica se encuentra colocada la materia que constituye el cuerpo que se presenta como elemento. Llamaremos *cilindro lleno* el cuerpo encerrado en el interior de la envoltura cilíndrica y *cilindro hueco* el que se encuentra en el esterior; como símbolo de forma adoptaremos para el primero el signo + y para el segundo el signo—.

Igualmente necesitamos una designacion especial para la superficie plana que constituye el caso estremo

(a) No tenemos necesidad de insistir en que para una notacion que puede estar destinada á ser de uso general, es esencialísimo que los símbolos sean los mismos en todas las lenguas. Nos limitaremos á observar que solamente cuatro de esas letras dejan de ser las iniciales de los nombres españoles correspondientes, y que dos de ellas, C y P, utilizadas ya para el cilindro y el prisma no habrian podido emplearse para el cono y el órgano de presion. Por lo demás, téngase en cuenta que las letras R, A, V, T y Q, no son siquiera las iniciales de los nombres alemanes que corresponden al español.

de un cuerpo de rotacion; pudiendo esta superficie considerarse en cierto modo como el límite entre los cuerpos desiguales, respectivamente con los signos + y —, podemos adoptar el índice cero.

Para los perfiles curvos en general, es decir, para aquellos que no son rectilíneos ni circulares, emplearemos un tilde (~) y tendremos por consiguiente como símbolos de forma:

\+ Para los cuerpos llenos.
— Para los cuerpos huecos.
° Para los cuerpos planos.
~ Para los cuerpos de perfil curvo.

Esos símbolos de forma se añaden en *pequeños caractéres arriba y á la derecha* de los símbolos de nombres, escepto el tilde que se coloca directamente *encima*.

VÉANSE ALGUNOS EJEMPLOS:

C^+ Cilindro lleno.
C^- Cilindro hueco.
S^+ Tornillo lleno ó filete de tornillo.
S^- Tuerca.
K^+ Cono lleno.
K^- Cono hueco.
K° Cono plano (cono de un ángulo de vértice de 180°.)
$\tilde{C}$ Cilindro de base curva cualquiera.
$\tilde{C}^+$ El mismo cilindro lleno.
$\tilde{C}^-$ El mismo cilindro hueco.
$\tilde{P}$ Prisma de base curva cualquiera.

Anteriormente hemos adoptado la letra V para designar un vaso, un recipiente; ahora tenemos la posibilidad de estender el significado de este símbolo y aplicarlo á ciertos casos especiales; así por ejemplo, podemos representar con el símbolo V^+ lo *contrario* de un vaso, esto es, un cuerpo lleno que estaria en contacto con el interior del vaso, y entonces ese vaso deberia designarse necesariamente por V^-. Segun esto, V^+ puede servir, por ejemplo, para representar un *émbolo* ó *piston*, y V^- el *cilindro correspondiente*.

Las letras de los símbolos de nombres, empleadas minúsculas, proporcionan otros símbolos de forma. Se colocan en tal caso á la *derecha* y *abajo* de las letras mayúsculas, y así sirven para distinguir claramente ciertas formas especiales de elementos, teniendo sin duda de esa manera un medio de evitar todo doble sentido.

Las designaciones particulares que nos proponemos adoptar son estas:

C_z Rueda dentada cilíndrica ó endentaje recto.
C_z^+ — — — de engranaje esterior.
C_z^- — — — — interior.
K_z^+ Rueda dentada cónica de endentaje esterior.
K_z° Rueda dentada plana.
H_z^+ — — hiperboloide.
H_z° — — — plana.
$\tilde{C}_z^+$ Rueda recta no circular de endentadura esterior.
P_z Cremallera.
C_s^+ Rueda helicoidal cilíndrica de endentadura esterior.
T_p Organo de traccion prismática (cinta, correa).
T_p^+ Hebra de correa que arrolla.
T_p^- Hebra que se desarrolla.
T_s Cuerda, T_c alambre metálico, T_z cadena de eslabones, T_r cadena de articulaciones.

Para los órganos de compresion ó de presion se necesitan signos especiales en el caso en que se quieran distinguir los órganos líquidos de los gaseosos; y adoptaremos las letras griegas λ y γ, de suerte que designaremos por:

$Q\lambda$ un órgano de presion líquida, un líquido,
$Q\gamma$ un órgano de presion gaseoso, un gas, el aire, el vapor.

En ciertos casos el órgano de presion se compone de granos de una forma más ó ménos redonda, que podemos considerar aproximadamente como esferas ó globos (G), de modo que designaremos por:

Q_g ó más exactamente por
$Q\tilde{g}$ un órgano de compresion formado de granos esféricos ó sensiblemente esféricos.

Por otra parte, nos reservamos introducir otras combinaciones de signos, cuando la ocasion se presente.

§ 57

Símbolos de relacion.

De las relaciones que pueden existir entre dos elementos de la cadena cinemática, las dos más importantes son aquellas que corresponden á la *reunion* de esos elementos para formar, ya sea *un acoplo* ya *un miembro de cadena*. El primer modo de ligazon se indicará con una *vírgula*, intercalada entre los símbolos de nombres de los elementos. Así en el caso de dos cilindros que rueden el uno sobre el otro, tendremos

como notacion general, C,C; para dos cilindros llenos esa notacion será C^+,C^+, y para un cilindro lleno con un cilindro hueco, C^+,C^-. Esa interposicion de la coma ó vírgula supone, además, naturalmente que el acoplo de los dos elementos es posible y que se hace en condiciones convenientes. Así, por ejemplo, con la notacion C^+,C^+, no es necesario mencionar espresamente que los ejes de los cilindros deben ser paralelos, así como es evidente que la notacion C^-,C^- es *á priori* inadmisible, puesto que dos cilindros huecos nunca pueden estar acoplados cinemáticamente.

La *reunion* de dos elementos para formar un *miembro* de cadena se indica con *un punto*, ó mejor con una *série de puntos*. Así la notacion $C^+ \ldots C^+$ designa dos cilindros llenos reunidos invariablemente entre sí; C^-C^-, una ligazon del mismo género para dos cilindros huecos.

La *fijeza* de un miembro de cadena se indica con una *línea llena* que subraya la notacion de ese miembro. Así $\underline{P^+ \ldots C^+}$ representa un miembro de una cadena cinemática que se mantiene fijo y está compuesto de un prisma lleno y de un cilindro lleno.

Si es necesario, aunque se presenta rara vez, indicar que un miembro de cadena es *elástico*, es decir, que constituye un *resorte*, se recurre á una línea *ondulada* encima de la línea de puntos ~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Se utiliza además como símbolos de relaciones una série de signos idénticos ó análogos á los que se usan en aritmética ó geometria y son los siguientes:

$=$ igual, $>$ mayor, $<$ menor, ∞ infinito;
$|$ conaxial, $\parallel$ paralelo, $\angle$ inclinado, $\perp$ normal;
$\vdash$ cruzado oblícuamente, $+$ cruzado en ángulo recto;
$\doteq$ igual y conaxial, $\#$ igual y paralelo;
$\cong$ coincidente ó congruente;
$\square$ complano ó coplano;
$\geqq$ antiparalelo (en un cuadrilátero);
$\trianglelefteq$ isóceles (en un cuadrilátero).

Las relaciones que se puedan espresar por medio de esos signos, pueden existir lo mismo entre los elementos de los *acoplos* que entre los de los *miembros* de una cadena. Si uno de esos signos debe establecerse en un acoplo, se *suprime la vírgula*, adoptando al propio tiempo para el signo intercalado una escala más pequeña.

Un cilindro lleno y un cilindro hueco geométricamente iguales, son además *conaxiales* cuando están reunidos para formar un acoplo; y por tanto, se puede en tal caso reemplezar la vírgula con el signo $\doteq$. Como por otra parte esos dos cilindros, por lo mismo que son iguales y forman acoplo, tienen forzosamente un eje comun, esa última condicion puede dejar de espresarse sin perjudicar en nada la claridad, y entonces el acoplo se halla representado simplemente por la notacion $C^{\pm}_{=}\, C^-$. No obstante, para que ese acoplo cuando existe enteramente solo, sea tambien un acoplo *cerrado* de rotoides, es necesario que llene las condiciones mencionadas esplícitamente en el párrafo 15 por medio de los *perfiles completamentarios* que impiden los movimientos trasversales. Luego, admitiremos en principio cuantas veces no se diga espresamente lo contrario, que los elementos ligados por un signo de acoplamiento *forman un acoplo cerrado*. Más adelante veremos que en el caso contrario el modo de notacion de la cadena proporciona siempre la posibilidad de indicar el no cierre. Segun esto, los *tres acoplos inferiores*, el acoplo tornillo, el acoplo de rotoides y el acoplo de prismas, deben respectivamente tener por anotaciones:

$$S^{\pm}_{=}S^- \qquad R^{\pm}_{=}R^- \qquad P^{\pm}_{=}P^-.$$

Los discos formados de arcos de círculo con los prismas huecos de 3, 4, etc., lados (capítulo III) en los cuales se encuentran, deben estar representados de una manera general, para la notacion $\widetilde{C}^+$, $\widetilde{P}^-$ ó $\widetilde{C}^+$, $\widetilde{P}_{\not p}^-$; por consiguiente, todos entran en una sola y misma categoria de acoplos. En cuanto al acoplo simple de cuerpos de rotacion $R^{\pm}_{=}R^-$, en la que la forma del perfil de los elementos puede ser cualquiera, con la sola condicion de que subsista la clausura, es de notar que bajo el punto de vista del movimiento relativo producido, *no se distingue del acoplo de cilindro cerrado* $C^{\pm}_{=}C^-$; por lo tanto, podemos permitirnos *para los casos ordinarios* escribir $C^{\pm}_{=}C^-$, en vez de $R^{\pm}_{=}R^-$. La primera notacion es un poco más cómoda que la segunda, así como la denominacion de «acoplo de cilindros» es un poco más sencilla que la de «acoplo de cuerpos de rotacion;» además, en la mecánica práctica suele emplearse el cuerpo C para el cuerpo R. Unicamente en casos particulares volveremos á tomar la espresion enteramente exacta.

El símbolo de relacion de los elementos reunidos en un miembro de cadena consiste, como lo hemos visto, en una série de puntos. Así la notacion $C^+ \ldots \parallel \ldots C^+$ indica dos cilindros llenos paralelos, invariablemente ligados, como por ejemplo, los que constituyen un manubrio; $C^- \ldots \parallel \ldots C^-$, dos cilindros huecos paralelos igualmente ligados de una manera invariable como en una biela; $C^{+}_{z} \ldots \parallel \ldots C^+$ una rueda dentada con un eje cilíndrico lleno, unido con esa rueda y teniendo el mismo eje; $C^{+}_{z} \ldots \parallel \ldots C^-$, una rueda dentada semejante,

con un agujero cilíndrico que tiene el mismo eje que esa rueda.

Una notacion particular se hace á veces necesaria para *acoplos independientes*. Ante todo conviene saber espresar el *estado incompleto* de los elementos empleados, á cuyo efecto acudiremos al símbolo de la *division*, lo cual nos permitirá indicar en denominador el modo de clausura.

Un elemento incompleto puede indicarse afectándolo con el divisor 2 como si en cierto modo no fuese más que la mitad del elemento completo. Si el elemento se mantiene acoplado por medio de una *clausura de fuerza*, pondremos la letra *f* en el denominador, en tanto que adoptaremos la letra *k* para designar una *clausura por cadena cinemática;* así mismo emplearemos la letra *l* en el denominador para espresar de una manera abreviada que la pieza de clausura propiamente dicha, es un resorte, y en fin, la letra *p* para indicar que la clausura se verifica con un *acoplo* (V. § 47). Así llegamos, por ejemplo, á las siguientes notaciones:

$\frac{C^-}{2}$ un cilindro hueco incompleto.

$\frac{C^+}{f}$ un cilindro lleno apoyado por una clausura de fuerza.

$\frac{C^+}{k}$ un cilindro lleno acoplado por medio de una clausura por cadena.

$\frac{C^+}{l}$ un cilindro lleno apretado por un resorte.

$\frac{C^+}{p}$ un cilindro lleno cerrado con acoplo de elementos.

Cuando un *miembro de cadena* que sirve á la clausura, lleva una letra de designacion como *a,b,c*..... (Véase más adelante), esa letra puede colocarse igualmente en el denominador, é indicar por lo tanto, claramente el modo de clausura. Por lo demás, luego veremos en varios ejemplos aplicaciones de esos diversos modos de notacion.

§ 58

Notacion de cadenas cinemáticas y de mecanismos simples.

Si queremos escribir simbólicamente una cadena cinemática completa, estamos obligados en virtud de la disposicion de los signos en líneas, á renunciar á la representacion espresiva de la circunstancia de que la cadena cerrada gira sobre sí misma, y debemos contentarnos con indicar simplemente que hay cierre. Tambien las fórmulas químicas presentan el mismo inconveniente, si, empero, puede llamarse así una imperfeccion que en el fondo tiene muy poca importancia. Para poner en notacion una cadena partiremos de un *miembro* cualquiera, de modo que la fórmula comience por un elemento aislado de un acoplo, para terminar con el elemento conjugado ó articulado del mismo acoplo, estando indicada la clausura de la cadena por el signo de acoplo aplicado á la última letra.

Un ejemplo nos permitirá presentar más clara la cuestion. Supongamos que debemos establecer la notacion de la cadena conocida ya, que representa la figura 10. En esa figura, los diferentes acoplos de cilindros están indicados por las designaciones *bc, de, fg, ha,* que para mayor claridad introduciremos primero en nuestra fórmula simbólica. Comenzando por *bc* tendremos la notacion siguiente:

$$\underbrace{C^+ \ldots \parallel \ldots C\overset{+}{=}C^- \ldots \parallel \ldots C}_{bc}\underbrace{=C^+ \ldots \parallel \ldots C\overset{+}{=}C^- \ldots \parallel \ldots C}_{de}\underbrace{=C^+ \ldots \parallel \ldots C\overset{+}{=}C^- \ldots \parallel \ldots C}_{fg}\underbrace{=C^+ \ldots \parallel \ldots C\overset{+}{=}C^- \ldots \parallel \ldots C}_{ha}=$$

Dejando á un un lado los símbolos de forma colocados á la derecha y arriba de los símbolos de nombre, todos los miembros son idénticos. Si la cadena presenta la disposicion de la fig. 11, la fórmula viene á ser la siguiente, suprimiendo las designaciones especiales de los diversos miembros:

$$C^+ \ldots \parallel \ldots C\overset{+}{=}C^- \ldots \parallel \ldots C=C^+ \ldots \parallel \ldots C\overset{+}{=}C^- \ldots \parallel \ldots C=$$

A primera vista puede parecer sorprendente que los cuatro miembros de nuestra cadena no presenten ninguna diferencia de forma, y podria creerse que en ello hay un defecto sensible de nuestro sistema de notacion. Decimos que esos miembros no se distinguen unos de otros, porque segun las indicaciones del párrafo 16, sabemos que los símbolos de forma + y — pueden siempre en los acoplos inferiores permutarse entre sí sin alteracion del acoplo, y por lo tanto es fácil en la forma anterior reducir todos los miembros á una notacion idéntica. Pero observándolo con más detencion se llega á ver que ese defecto aparente constituye al contrario una ventaja muy notable. Efectivamente, en la fórmula los miembros de la cadena aparecen todos equivalentes, *porque en realidad todos tienen de una manera general el mismo valor*. Circunstancia es esa de la que es preciso comenzar por convencerse bien, si queremos llegar á pasar del caso particular y concreto

al caso general y abstracto. ¿Cuál es el mecánico empírico que en el mecanismo de la figura 11 sospecharia el dispositivo «del balancin y de la biela?» Sin embargo, *fg* no es otra cosa que el brazo del balancin, *de* la biela, *bc* el manubrio, *ah* la armadura del mecanismo, la cual puede afectar una estrema variedad de formas; y así es como á veces está constituido por un entablamento y columnas, otras por una pirámide, un macizo de albañileria, etc. En la práctica esa armadura, ese miembro fijo de la cadena, está provisto de accesorios tan numerosos, asociado tan íntimamente con las obras de albañileria de los edificios, y en una palabra, presenta á veces una composicion tan complicada, que su papel tan sencillo de pieza fija pasa desapercibido con suma frecuencia al observador, y hasta un gran número de mecánicos no consideran el mecanismo del balancin y del manubrio más que compuesto de *tres partes solamente*, el balancin, la biela y el manubrio. La falta de notacion clara sobre la composicion de ese mecanismo es tal, que en los tratados en que se pretende representarla esquemáticamente, es decir, de una manera abstracta por medio del dibujo, el cuarto miembro, *ah*, *ni siquiera figura en el trazado*. Y en efecto, en este caso se sobreentiende, sin tener de ello clara conciencia, que el papel en que se hace este trazado constituye en cierto modo el soporte para los tres órganos que deben considerarse como móviles. Nuestro sistema de notacion del mecanismo es particularmente á propósito para hacer desaparecer esa indecision ó más exactamente esa imperfeccion en el modo de concebirlo. Ahora podemos preguntarnos si habria cierta utilidad en introducir en la fórmula las relaciones entre las longitudes de los diversos miembros. Esa adicion, si bien seria posible, no dejaria de presentar ciertas dificultades, con motivo del gran número de relaciones numéricas diferentes que pueden existir entre las longitudes de los cuatro miembros; y por otra parte seria realmente de poca utilidad, porque aun cuando esas relaciones estuviesen inscritas en la fórmula, no podria sacarse ninguna consecuencia, sin un estudio especial del mecanismo en cada caso particular. Además, un poco más adelante indicaremos un método á la vez sencillo y fácil para espresar semejantes relaciones de dimension.

Como segundo ejemplo de aplicacion de nuestro sistema podemos tomar la *juntura universal ó de cruz*, que se designa tambien con el nombre de *juntura de Cardan ó articulacion de Hook*, y que está representada esquemáticamente por la fig. 192.

La cadena tiene aquí cuatro miembros, que en la figura están designados con las letras *a*, *b*, *c*, *d*. El miembro *b* está acoplado con el miembro *a*, por mediacion de un acoplo de cilindros al cual corresponde la cifra 2. Normalmente á ese acoplo se presenta otro, 3, que tiene su cilindro hueco en la horquilla que termina *b*, y su cilindro lleno en el brazo oblícuo de la pieza *c*; el miembro *b* puede por consiguiente escribirse: $C^{+}...\perp...C^{-}$. Importa notar aquí que la rama inferior de la horquilla forma una sola pieza con el brazo superior, y que por consiguiente no debe contarse por separado; y lo mismo sucede con el gorron inferior del brazo oblícuo *c*, que no forma cinemáticamente más que un solo elemento con el gorron superior.

La pieza *c* se compone de dos cilindros llenos 3 y 4, cuyos ejes están cruzados en ángulo recto; y por lo tanto tiene como notacion: $C^{+}...\perp...C^{+}$. El tercer miembro ó sea la horquilla *d* con su eje, es análogo á *b*, y debe por lo mismo tener igual notacion. Por último, el cuarto miembro *a* consiste en dos cilindros huecos 1 y 2 inclinados uno sobre otro, de suerte que puede escribirse: $C^{-}...\angle...C^{-}$; manteniéndose además fijo como está indicado en la figura por la forma misma de la pieza. Segun esto el mecanismo todo, añadiéndole las designaciones de los miembros y de los acoplos, puede representarse con esta fórmula:

$$\underset{\underset{b}{\frown}}{C^{+}...\perp...C\overset{2}{=}C^{+}}\underset{\underset{c}{\frown}}{...\perp...C\overset{3}{=}C^{-}}\underset{\underset{d}{\frown}}{...\perp...C\overset{4}{=}C^{-}}\underset{\underset{a}{\frown}}{...\angle...C^{-}}$$

Una propiedad geométrica de la cadena anterior consiste en que el punto de interseccion de 3 y 4 coincide con el de 1 y 2, así como con el de 1 y de 4. Nuestra fórmula no indica esta propiedad; pero esa indicacion puede omitirse sin inconveniente, toda vez que la cadena cuyos acoplos todos suponemos cerrados, no podria existir sino con la condicion de admitir la propiedad precedente realizada. Una mera inspeccion de la fórmula muestra que los miembros *b*, *c* y *d* tienen la misma composicion. Ahí está una propiedad que merece señalarse y de la cual tendremos que ocuparnos más tarde bajo otra forma: la manera con que suele ejecutarse la juntura universal, da por resultado dejar esa propiedad tan disimulada, que hasta hoy ha sido enteramente desconocida para el mecánico práctico.

La *trasmision por correa* de la fig. 160, que hemos examinado ya bajo otro punto de vista, puede escribirse de la siguiente manera:

$$T\underset{p}{\pm}...\cong\angle...T\underset{p}{\mp},R^{+}... \mid ...C\overset{1}{=}C^{-}... \parallel ...C\overset{2}{=}C^{+}... \mid ...R^{+},$$

Siendo el órgano de traccion empleado T una correa,

debe estar provisto del índice p (prismático); la correa se arrolla por cada una de las poleas R y se desarrolla igualmente de cada una de ellas, de modo que debe estar afectada por los signos $\pm$ y $\mp$. Esa inversion de los dos signos depende de que la hebra que se arrolla por una de las dos poleas, al propio tiempo se desarrolla de la otra. La correa para la polea a es idéntica á la que corresponde á la polea b, coincide con ella; de ahí la necesidad del signo $\cong$ intercalado en la série de puntos; y por último, la correa es recta, y sus hebras en razon de la desigualdad de los diámetros de las poleas, forman cierto ángulo que necesita la adicion del signo $\angle$ al signo precedente: si la correa estuviese cruzada, se habria de recurrir al signo $\vdash$.

Las otras partes de la fórmula se comprenden por sí mismas. Traducido en lenguaje ordinario esa fórmula puede enunciarse así: «Mecanismo compuesto de dos cuerpos de rotacion de tamaño desigual, que están reunidos por una correa sin fin, de contacto esterior y cuyos ejes de rotacion, conaxiales á los ejes geométricos, están dispuestos paralelamente en una armadura fija.»

La *trasmision simple de engranajes cilíndricos* de la fig. 153 puede escribirse:

$$C^{+}\ldots \mid \ldots C^{+}_{z}, C^{+}_{z}\ldots \mid \ldots \underline{C^{\pm}_{=} C^{-}\ldots \parallel C^{=}_{=}}$$

Los dos primeros miembros de la fórmula designan las dos ruedas dentadas a y b con sus ejes, y el último el soporte de esos ejes que se supone estable ó fijo.

La trasmision de engranajes interiores de la fig. 193 está representada por la formula:

$$C^{+}\ldots \mid \ldots C^{+}_{z}, C^{-}_{z}\ldots \mid \ldots \underline{C^{=}_{=} C^{-}\ldots \parallel \ldots C^{=}_{=}}$$

en el que el primer miembro designa la rueda a, de endentadura esterior, el segundo la rueda hueca b, y por último el tercero el soporte c que suponemos fijo.

§ 59

Notacion abreviada.

Para cierto número de aplicaciones de las fórmulas cinemáticas puede simplificarse notablemente la notacion cuando los diferentes miembros de una cadena se han separado y sometido á un exámen particular, de forma que la cadena pueda considerarse conocida. Las abreviaciones que pueden usarse son bastante numerosas y vamos á examinarlas una tras otra.

En primer lugar, para los acoplos inferiores y algunos otros en que los dos elementos articulados se designan con el mismo símbolo de nombre, se puede con frecuencia contentarse con una *sola* letra, con la condicion de acompañarla de un signo distintivo. Si adoptamos para ese signo un *paréntesis*, podremos cuando sea ocasion representar de una manera abreviada:

El acoplo	de tornillo	$S^{\pm}_{=}S^{-}$ por (S)
—	de cilindros	$C^{\pm}_{=}C^{-}$ — (C)
—	de prismas	$P^{\pm}_{=}P^{-}$ — (P)
El acoplo de engranajes	cilíndricos	C_{1}, C_{2} — (C_{1})
	cónicos	K_{1}, K_{2} — (K_{1})

y así sucesivamente, lo cual nos permite escribir como sigue la cadena representada por la fig. 10:

$$C^{+}\ldots \parallel \ldots(C)\ldots \parallel \ldots(C)\ldots \parallel \ldots(C)\ldots \parallel \ldots C^{=}_{=}$$

En ese caso el primero y último miembros solamente deben estar designados por separado y con sus símbolos de forma. La letra única *entre paréntesis* designa un *acoplo* de elementos. Por otra parte se puede adelantar más con ese modo de escritura. Con efecto, permite representar ciertas cadenas cinemáticas simples bajo una forma más concentrada que la anterior, puesto que con los paréntesis es posible suprimir las líneas de puntos, con la sola condicion de poner en evidencia la relacion entre los acoplos sucesivos. Tal es sin duda el caso en la fórmula precedente, puesto que la relacion entre los diversos elementos que constituyen la cadena, queda siempre la misma y consiste simplemente en su paralelismo; el paréntesis puede entonces estenderse á varios y hasta á todos los miembros de la cadena, lo que en ciertos casos permite sin riesgo de ser incomprensible, reducir la fórmula anterior al símbolo único (C''_{4}), que puede enunciarse «C paralelo á cuatro» ó «C cuatro paralelo», y que significa: «una cadena formada de cuatro acoplos de cilindros paralelos, es decir, de cuatro miembros cada uno de los cuales se compone de dos cilindros paralelos.» Una notacion así concentrada supone naturalmente el conocimiento prévio del modo de formacion de la cadena; pero admitido esto, se debe reconocer que es una concision que nada deja que desear.

Como otro ejemplo de aplicacion de este sistema de abreviacion, la cadena de juntura universal de la figura 192 puede representarse con el símbolo $(C^{\perp}_{3} C^{\angle})$ que se anuncia «C normal tres, C inclinada.»

La cadena de rodaje de la fig. 193 puede escribirse igualmente $(C^{+}_{z} C''_{4})$ y se anuncia «C_{z} y más C paralela dos,» etc.

Ese sistema de notacion abreviado conviene especialmente á una *cadena* cinemática, pero no al *mecanismo* que se logra formar fijando uno de sus miembros; con todo, más adelante indicaremos el medio de apropiarlo á ese último caso dentro de ciertos límites.

§ 60

Notaciones de cadenas compuestas.

En la representacion simbólica de la cadena cinemática simple existe, como hemos visto, cierta arbitrariedad relativamente á la eleccion del miembro por el que debe comenzar la notacion. Esa indeterminacion está todavia mucho más pronunciada en el caso de las cadenas compuestas, de suerte que en realidad es bastante difícil llegar de pronto á una notacion que se presente con toda la claridad deseable. Pero es posible con un poco de costumbre obtener semejante resultado, y eso es lo que intentamos demostrar con algunos ejemplos.

La cadena que representa la fig. 12 y que consiste en siete acoplos de cilindros paralelos, ha sido ya examinada en el párrafo 3. Compuesta de la cadena simple C''_4 y de otros dos miembros de la forma C... || ...C, presenta en el fondo una disposicion notable por su simetria, y en efecto es fácil ver que en esta cadena dos miembros de tres cilindros se encuentran enfrente uno de otro y están reunidos por cuatro miembros de dos cilindros. Esa disposicion está indicada más claramente en la fig. 195, en que la simetria existe igualmente para las dimensiones de los miembros. En esa figura los acoplos de cilindros están numerados de 1 á 7. La cadena completa puede considerarse como compuesta de dos cadenas de cinco miembros, 1, 2, 3, 4, 5 y 1, 2, 6, 7, 5, en los cuales los miembros 1, 2 y 1, 5 son comunes, en tanto que los dos grupos de cilindros 2, 3, 6 y 5, 4, 7 forman cada uno un miembro de *tres* elementos. Un miembro de esa especie que contenga tres elementos, puede designarse con el nombre de *ternario*, por analogia al de *binario*, que afecta al miembro de dos elementos.

Para llegar ahora á la notacion que buscamos, comenzaremos por escribir *separadamente* las dos cadenas de cinco miembros, que por sí mismas no dan una clausura desmodrómica; luego haremos un especie de *adicion*, es decir, que en una segunda transcripcion escribiremos una sola vez las piezas comunes, y reuniremos entre paréntesis los elementos ternarios que entran juntos. Adoptando para los acoplos inferiores el modo de notacion abreviada, obtendremos así sucesivamente:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ C{+}... \parallel ...(C)... \parallel ...(C)... \parallel ...(C)... \parallel ...(C)... \parallel ...C{=} \\ C{+}... \parallel ...(C)... \parallel ...(C)... \parallel ...(C)... \parallel ...(C)... \parallel ...C{=} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ C{+}... \parallel ...(C)... \parallel \left\{\begin{array}{c}...(C)... \parallel ...(C)... \\ ...(C)... \parallel ...(C)...\end{array}\right\} \parallel ...(C)...{=}...C{=} \\ & & 6 & 7 & & \end{array}$$

La fórmula compuesta que ha proporcionado la adicion y en la que para mayor claridad están inscritos los números de los acoplos de cilindros, puede considerarse como satisfactorio, puesto que reproduce con claridad la simetria de disposicion de la cadena misma. Sin embargo, es posible darle una forma todavia más fácil de comprender y que en varios casos es de uso más cómodo. Con efecto, si se observa que los cuatro acoplos de cilindros 3, 4, 6, 7 encerrados entre paréntesis, *forman por sí mismos una cadena cilíndrica simple cerrada* (C''_4), se ve que esta cadena desempeña en cierto modo el papel de un simple miembro de cadena, y que por lo tanto toda la fórmula puede tambien escribirse:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3,4,7,6 & 5 & 1 \\ C{+}... \parallel ...(C)... \parallel ...(C_4)... \parallel ...(C)... \parallel ...C{=} \end{array}$$

De esa manera se evita por completo toda prolijidad de notacion. En el caso en que se pone fijo uno de los miembros 1.2, 2.3, 1.5, 5.7, la última fórmula puede además utilizarse para la notacion del mecanismo que resulta de esa fijacion. En el caso contrario en que debiese suponerse fijo uno de los dos miembros interiores del grupo 3, 4, 7, 6, seria necesario recurrir á la penúltima fórmula.

Tomemos como otro ejemplo un juego de ruedas dentadas. La fig. 194 representa un juego de ese género, compuesto de dos acoplos de ruedas dentadas cilíndicas *a*, *b* y *c*, *d*. La rueda *c* está fija en la rueda *b*, y los tres ejes de rotacion que son los mismos que los de las ruedas, están sostenidos por un miembro ternario de cilindros 1.2.3, que es el miembro fijo del mecanismo. Puede llegarse á la notacion de ese mecanismo de varias maneras distintas.

Partiendo del acoplo de cilindros 2, se tiene á cada lado un engranaje simple; y pueden entonces escribirse por separado esos dos engranajes y adicionarlos enseguida, lo cual da:

$$\begin{array}{llll} 2 & b,a & 1 & 2 \\ C^{+}... \mid ...C^{+}_{z},C^{+}_{z}... \mid & ...(C)... & \parallel & ...C^{=} \\ C^{+}... \mid ...C^{+}_{z},C^{+}_{z}... \mid & ...(C)... & \parallel & ...C^{=} \\ 2 & c,d & 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 2 & b,a & 1 & 2 \\ C^{+}... \mid \left\{ \begin{array}{l} C^{+}_{z},C^{+}_{z}... \mid ...\underline{(C)...} \\ C^{+}_{z},C^{+}_{z}... \mid ...\underline{(C)...} \end{array} \right\} & & \parallel & \underline{..\ ...C^{=}} \\ 2 & c,d & 3 & 2 \end{array}$$

Aquí existen como se ve, dos miembros *a*.1 y *d*.3 y dos miembros ternarios 2.*b*.*c* y 2.1.3. Estos últimos son las ruedas acopladas *b* y *c*, con su eje comun, y el soporte de los ejes que, como lo indica la línea de abajo, está mantenido fijo.

Puede además obtenerse otra notacion de la siguiente manera: comenzando por la rueda *a*, escribamos la rueda *b* con todo lo que á ella se refiere para formar un miembro ternario; pasemos enseguida á la rueda *d*, espresemos su ligazon con 3, y reunamos finalmente el segundo cilindro de 3, lo mismo que el de 2, con el segundo cilindro de 1. Si para mayor claridad empleamos el sistema de notacion no abreviada, obtendremos:

$$\begin{array}{llll} 1 & a,b & 2 & 1 \\ C^{+}... \mid ...C^{+}_{z},C^{+}_{z}... & \left\{ \begin{array}{l} .....\underline{C^{=}C^{-}}..... \\ .. \mid ...C^{+}_{z},C^{+}_{z}... \mid ...\underline{C^{=}C^{-}}... \end{array} \right\} & \parallel & \underline{...C^{=}} \\ & c,d & 3 & \end{array}$$

Esta fórmula tiene enteramente la misma significacion que la anterior; pero importa notar que el paréntesis encierra bajo una forma fácil de comprender, una cadena cinemática simple, que en realidad está compuesta de dos ruedas *c* y *d*, y de su pieza de union 2.3. Si escribimos esta cadena en abreviacion, conforme las indicaciones del párrafo 59, y hacemos lo mismo para el acoplo *a*, *b*, obtendremos la fórmula:

$$\begin{array}{llll} 1 & a,b & c,d,3,2 & 1 \\ C^{+}... \mid ...(C^{+}_{z})... \mid & ...(\underline{C^{+}_{z}C''_{3}})... & \parallel & \underline{...C^{=}} \end{array}$$

Utilizando el modo de abreviacion concentrado que antes hemos indicado, se puede llegar á una notacion todavia más concisa, suficiente por lo tanto en cierto número de casos: así se obtiene $(C^{+}_{z2}\,C''_{3})$ ó de una manera general para un juego de *n* acoplos de ruedas dentadas: $(C_{zn}C''_{n+1})$, puesto que para un juego + de *n* acoplos de ruedas, suele haber $n+1$ ejes, ó mejor dicho $n+1$ acoplos de cilindros (C).

§ 61

Notaciones de cadenas con órganos de presion.

Para establecer la fórmula simbólica de una cadena que encierra un órgano de presion, es á veces útil imaginar ante todo ese órgano reemplazado por un órgano rígido; y esa sustitucion produce como es fácil comprenderlo, una leve alteracion del acoplamiento, y la fórmula que así se obtiene, debe enseguida trasformarse por la reintroduccion del órgano de presion.

Así por ejemplo, para representar con una fórmula cinemática la rueda hidráulica (fig. 159) de que se ha hecho antes mencion, comenzaremos por sustituir al agua una cremallera con guia prismática (fig. 196), la cual con la accion de su peso es susceptible de poner en movimiento la rueda dentada *a*, como lo haria el agua con la rueda de paletas, y por consiguiente puede reemplazar esa agua. La fórmula del mecanismo obtenido con esa sustitucion es la siguiente:

$$C^{+}... \mid ...C^{+}_{z},P_{z}... \parallel ...P^{=}P^{-}...+...C^{=}$$

Para volver al mecanismo primitivo debemos ahora reemplazar el miembro $P_{z}... \parallel ...P^{+}$ por $Q\lambda...Q\lambda$, y el símbolo P^{-} por el símbolo V^{-} que representa el canal ó saetin del agua: entonces obtenemos como fórmula de la rueda hidráulica:

$$C^{+}... \mid ...C^{+}{}_{z},Q\lambda.....Q\lambda,\underline{V^{-}...+...C^{=}}$$

Si además se quisiera indicar que el canal está abierto á la parte superior y que por consiguiente el acoplamiento de ese canal y del agua es de clausura de fuerza (accion de la pesantez), se tendrá que poner simplemente $\frac{V^{-}}{f}$ en vez de V^{-}.

Por su composicion ese mecanismo corresponde al de una *rueda elevatoria* que estuviese destinada á subir el agua de un canal inferior á otro superior. En cambio, si se fija la cadena en el segundo miembro, es decir, si se pone en libertad el miembro $V^{-}...+...C^{-}$ fijando en su lugar $Q\lambda...,Q\lambda$, se llega á otro mecanismo, tambien conocido, el del *barco de ruedas*; en cuyo caso el miembro $V^{-}...+...C^{-}$ se mueve en el agua considerada como estando en reposo. Es además evidente que el miembro *c* debe entonces suponerse construido de tal manera que sea capaz de flotar.

Vamos ahora á procurar aplicar aquí el sistema de de notacion abreviado. Bajo ese concepto el acoplo

C_z^+; P_1 de la primera de las dos fórmulas, ofrece cierta dificultad porque, aun cuando sea siempre posible, no deberíamos introducir ese acoplo en la fórmula con dos mayúsculas, á fin de evitar el error que podria cometerse considerando cada una de esas letras como indicadora de un acoplo. Efectivamente, la escritura concentrada debe en lo posible permitir que á primera vista se conozca el número de acoplos de que se compone la cadena, resultado que se consigue de la manera más satisfactoria con la eleccion adecuada de las mayúsculas, con el aditamento de índices aplicativos. Por consiguiente, tendremos necesidad de recurrir aquí á un medio convencional. El acoplo C_1, P_1, puede representarse por el símbolo C_{1p}, sin que haya de temerse una mala inteligencia, y la cadena de la fig. 196 podrá entonces escribirse: $(C'C_{1p}P^+)$. Aquí se ha añadido al símbolo (P) del acoplo de prismas el signo + (inclinado en ángulo recto), para indicar claramente la posicion de ese acoplo.

En la segunda de las fórmulas anteriores tropezamos tambien con la dificultad de las dobles mayúsculas; pero podemos salvarla recurriendo al mismo medio convencional, es decir, reemplazando:

$$C_1,Q\lambda \text{ por } (C_1\lambda)$$

y

$$V-,Q\lambda \text{ por } (V\lambda).$$

El índice λ se emplea aquí como abreviacion de ${}_1\lambda$ y basta para indicar el acoplamiento de C_1, ó de V, con un líquido. De consiguiente, obtenemos para la cadena cinemática de la fig. 159 la fórmula concentrada: $(C'C_1\lambda V\lambda)$, que segun hemos dicho antes, conviene lo mismo para la rueda hidráulica que para la rueda elevatoria y barco de ruedas.

§ 62

Notacion concentrada de algunos mecanismos.

La notacion concentrada establecida para una cadena cinemática no puede estenderse inmediatamente al mecanismo que de ella deriva, como quiera que la fórmula simbólica abreviada, por lo mismo que indica simplemente *acoplos* y no *miembros* de cadena, no permite poner en evidencia la fijacion de uno de los miembros. Por lo tanto, seria de desear que igualmente pudiese aplicarse al mecanismo ese sistema de notacion, que es notable por su concision, y que se encuentra ser suficiente en gran número de casos.

Si ese sistema de abreviacion no es susceptible de aplicarse aquí de una manera tan general como lo hemos hecho antes, sin embargo es posible utilizarlo en ciertos casos particulares y en cadenas especiales con la condicion de afectar los miembros de esas cadenas de símbolos de nombres convencionales que deben determinarse en cada caso. Si hecho esto, se tiene cuidado de colocar convenientemente en la fórmula el símbolo adoptado para el miembro que se mantiene fijo, se llega á utilizar la notacion abreviada para el mecanismo.

Para la designacion simbólica de los miembros elegiremos las letras minúsculas del alfabeto latino, comenzando en cada caso por la letra *a* y siguiendo el órden natural de las letras, que por lo mismo no tendrán que dar ninguna indicacion de forma ó de calidad. Para evitar toda confusion con los símbolos de forma, les daremos una posicion particular y pondremos cada una de ellas en *esponente* fuera del paréntesis que encierre los símbolos de acoplos. En este punto no tendremos comunmente más que una sola letra, ya que en cada caso no tenemos que designar más que *un solo* miembro, el que se mantiene fijo. Para mayor claridad vamos á aplicar ese procedimiento á un ejemplo.

Supongamos que se quieran representar con una fórmula concentrada los mecanismos que se obtienen como derivados de la cadena de cuatro acoplos cilíndricos (fig. 10); comenzaremos por dar á los cuatro miembros la designacion *a*, *b*, *c*, *d*, que hemos escogido arbitrariamente, pero que hemos convenido mantener en el órden que se halla indicado en la figura esquemática 197. Las longitudes de los diversos miembros están escogidas de modo que manteniéndose fijo *d*, pueda el miembro *a* (el manubrio) girar describiendo un círculo completo, mientras que el miembro *c* oscila simplemente siguiendo un arco de círculo. En tanto que la cadena queda completamente libre, es decir, sin fijacion, puede segun hemos visto, representarse con la espresion abreviada (C''_4). Si entonces queremos espresar que el miembro *d* está fijo, lo cual va indicado en la figura con una forma diferente dada á ese miembro, deberemos emplear la fórmula $C''_4)^d$. que enuncia: «C paralelo cuatro sobre *d*». La preposicion *sobre* indica claramente que la cadena está establecida de cierto modo sobre el *miembro d*, ó que este miembro se utiliza como base de fijacion. En cambio, si estando libre *d* se hiciera la fijacion sobre *a*, el nuevo mecanismo deberia representarse con $(C''_4)^a$. Segun esto la rueda hidráulica del párrafo 61 debe ahora designarse con $(C'C_1\lambda V\lambda)^c$, el barco de ruedas con $(C'C_1\lambda V\lambda)^b$, etc.

Ese sistema de notacion une como se ve, la concision á la claridad y permite diferenciar muy sencillamente los diversos mecanismos que derivan de una sola y misma cadena. La sola restriccion que admite en realidad es que las letras *a*, *b*, *c*, *d*.... no tienen aquí ya una significacion general y cualitativa; esa significacion es enteramente eventual y comparable á la de los nombres propios. Sin embargo, recobra un carácter *parcialmente* general en razon de que la sucesion de los signos alfabéticos, ó su *órden* no es arbitrario. Así, la primera letra está afectada en lo posible á un miembro de valor especial, como lo es, por ejemplo, el manubrio en el caso precedente, lo cual permite conservar fácilmente el medio convencional que hemos adoptado. Ese sistema de notacion abreviada es por estremo fecunda en consecuencias, conforme veremos en lo sucesivo.

Permite además dicho sistema introducir en la fórmula otro dato de grandísima utilidad, porque en efecto importa bastante á veces poner de relieve el miembro de la cadena por mediacion del cual *se efectua en el mecanismo la introduccion de la fuerza motriz ó del movimiento*. Es muy obvio que debe existir una gran diferencia entre dos mecanismos, uno de los cuales se pone en movimiento por mediacion del miembro *b*, en tanto que el otro por la del miembro *a*. Un ejemplo notable de ello tenemos en los mecanismos de la rueda hidráulica y de la rueda elevatoria. Conforme al modo simbólico indicado hasta aquí, ambos tienen absolutamente la misma fórmula: $(C'C_2\lambda V\lambda)^c$, por más que esencialmente difieren en la manera de hacer la trasmision del movimiento. Examinada con más detencion esa fórmula se presenta á todas luces como una fórmula *general* ó *indeterminada*, apropiada á los dos mecanismos, la cual necesitaria convertirse para cada uno de ellos en una fórmula *especial* ó *determinada*. Fácilmente podemos llenar este vacio colocando como *denominador del esponente* el símbolo del miembro que sirve para trasmitir la fuerza ó el movimiento.

Así pues, en la fórmula general el esponente designará tan solo el miembro que se mantiene fijo, mientras que en la fórmula *especial* se presentará bajo la forma de una fraccion cuyo numerador indicará el miembro fijo y el denominador el miembro motor. La eleccion de la forma fraccionaria se halla justificada por la analogia con la designacion de la clausura por fuerza y por cadena, tal como se ha estipulado en el párrafo 57.

A consecuencia de ese nuevo medio convencional el mecanismo $(C''_4)^d$, por ejemplo, cuando está puesto en movimiento por el miembro de rotacion *a* (el manubrio), deberá escribirse: $(C''_4)^{d}_{a}$; lo que se enuncia: «C paralelo cuatro sobre *d* por medio de *a*,» y quiere decir que el mecanismo fijado en *d* se pone en movimiento por medio de *a*. Cuando el propio mecanismo está puesto en movimiento por mediacion del miembro oscilante *c*, tiene igualmente como fórmula especial: $(C''_4)^{d}_{c}$; y segun lo dicho anteriormente, la fórmula general comun de esos dos mecanismos es $(C''_4)^d$. La rueda hidráulica debe entonces escribirse: $(C'C_2\lambda V\lambda)^{c}_{b}$, la rueda elevatoria: $(C'C_2\lambda V\lambda)^{c}_{a}$, y el barco de ruedas: $(C'C_2\lambda V\lambda)^{b}_{a}$. Esos últimos ejemplos ponen claramente en evidencia la utilidad que puede reportarnos el especializar así las fórmulas. Con el sistema antedicho de notacion se logra, en efecto, por un lado poner de relieve la estrecha conexion de máquinas que en la práctica parecen distar mucho unas de otras, á la vez que por otro lado se determinan clara y sencillamente sus verdaderos puntos de diferencia.

La fórmula especial presenta una utilidad particular para el análisis de las máquinas completas y sobre todo para las *aplicaciones* de los mecanismos, en tanto que para la representacion abstracta de esos mecanismos la fórmula general suele ser suficiente. Sin embargo, aun bajo este último punto de vista la fórmula especial puede á veces tener una grande importancia porque permite conocer cuál es la causa primera de la variabilidad de los movimientos de los diferentes miembros. En lo sucesivo tendremos que hacer uso frecuente de esos dos géneros de fórmulas, y en el entretanto podemos entrar ya en la aplicacion regular del lenguaje simbólico cinemático cuyas bases acabamos de esponer.

CAPÍTULO VIII

ANÁLISIS CINEMÁTICO

§ 63

Objeto del análisis cinemático

El análisis de un dispositivo cinemático consiste en descomponerlo en aquellas partes que cinemáticamente deben considerarse como elementos, y en determinar el órden con que entran esas partes á formar acoplos de elementos y cadenas cinemáticas. Todo lo que se refiere á la obra de la construccion, está aquí completamente fuera del objeto. Por medio del lenguaje simbólico cuyos principios hemos espuesto en el capítulo anterior, podemos representar el resultado de ese análisis bajo una forma fácilmente perceptible, que espresa la ley de formacion. Ahora vamos á emprender una série de investigaciones de ese género, con el doble fin de ejercitarnos en la aplicacion del método y conseguir aclarar algunos puntos importantes de la ciencia de las máquinas. Así nos veremos precisados á consignar que ciertos conceptos fundamentales, considerados hasta aquí como susceptibles de ser fácilmente utilizados, dejan mucho que desear por lo que á la claridad incumbe. Tendremos además que rectificar varias nociones usuales, y es evidente que con ello nos veremos obligados á destruir ó á lo ménos trasformar completamente algunos principios que al parecer debian ser inmortales. Más no ha de perderse de vista que como compensacion llegaremos á sentar sobre bases verdaderamente científicas, principios nuevos en estremo importantes y de mucho alcance y trascendencia.

§ 64

De las máquinas llamadas máquinas simples.

Los dispositivos mecánicos que llevan el nombre de máquinas simples son conocidos de todo mecánico. En la mayor parte de los tratados que hasta ahora han visto la luz desde Galileo y aun en aquellos que se remontan á una época anterior, se consideran más ó ménos como disposiciones á las cuales pueden reducirse todas las máquinas, ó lo que viene á ser lo mismo, como aquellas de que puede demostrarse que todas las máquinas se componen. Sin embargo, no hay completo

acuerdo respecto de esta cuestion, y cumple observar no sin sorpresa que la mecánica *superior* tiende más y más á prescindir de toda consideracion de ese género. Si las máquinas simples tienen realmente la significacion que les está asignada (y hasta hoy no se ha conseguido dar una prueba de lo contrario), convendria atribuirles muy señalado valor, y por ende la ciencia que acabamos de mencionar, no tendria porque desdeñarse de abrazarlas por sencillas é inferiores que puedan parecer, mientras que la idea que en cambio parece predominar ahora, es que las «máquinas simples» pueden en rigor convenir para la mecánica *elemental*, si bien no ofrecen la menor importancia para la mecánica *superior*.

Si estudiamos más detenidamente la cuestion comparando unos con otros los diversos tratados, no se tarda en conocer que existe marcada indeterminacion respecto al modo de concebir las «máquinas sencillas» aun en los mismos tratados que en principio les han permanecido fieles (43). El desacuerdo existe hasta en el número de esas máquinas. Los unos no cuentan más que seis:

Palanca, Plano inclinado, Cuña, Polea, Cabria, Tornillo;

mientras que otros llegan á siete añadiendo la *máquina funicular*. Las discordancias son todavia más pronunciadas cuando se trata de definir lo que debe entenderse con la *espresion* de máquina simple; pues apenas se encontrarian dos tratados que diesen la misma definicion. Tambien pueden notarse divergencias marcadísimas relativamente al lugar que les está asignado en los tratados diversos; y así vemos que en los unos se encuentran al principio del libro, otros las describen en medio y algunas al final, ó bien á veces se hallan repartidas en capítulos diferentes; sucediendo, en fin, con harta frecuencia que algunos se ocupan de ellas, más sin designarlas con sus nombres ordinarios, como si así quisiera en cierto modo evitarse que se las pueda conocer. En suma, despues de un exámen de ese género es ya imposible admitir la existencia de un concepto comun de las máquinas simples, y más bien estaria uno inducido á dudar de la existencia misma de esas máquinas como máquinas simples.

Y no obstante, existe un atractivo muy peculiar en tales dispositivos, ó cuando ménos en algunos de ellos, como la *palanca* y el *plano inclinado*, que hasta han pasado del dominio científico al del lenguaje vulgar. Tienen en sí propios algo familiar y escitan un interés especial, que es meramente de sentimiento. ¿Será acaso simplemente el resultado de los recuerdos juveniles de aquél que emprendió en hora temprana el estudio de la mecánica, ó el efecto del soplo de juventud que emana de esos dispositivos mismos? ¿O no existe en realidad una razon más profunda de ese sentimiento de simpatia que ni aun el sábio puede librarse de abrigar cuando está absorbido en los poblemas más elevados? A todas esas cuestiones debe permitirnos el análisis cinemático que respondamos de una manera decisiva: dicho análisis debe demostrarnos si esos antiguos utensilios de familia de la mecánica deben abandonarse realmente y ponerlos en definitiva fuera de uso, ó bien si existe en ellos algo fundamental é indestructible. Con este objeto vamos á emprender el estudio de tales dispositivos.

Palanca.—Un cuerpo en forma de barra recta ó angular (acodillada) (fig. 198) puede girar entorno de la arista de un soporte fijo sobre el que descansa; á cada lado del apoyo, á entrambos estremos de la barra móvil, se aplican dos fuerzas cuyas condiciones de equilibrio se enseñan; tal es la forma bajo la cual se ha conservado desde la época de *Arquímedes* el problema de la palanca. Pero en la mayoria de los casos esa descripcion no es exacta. Sin decirlo esplícitamente se admite en realidad que el apoyo está dispuesto de manera que no permite el movimiento de los brazos de la palanca sino en un plano; más de ningun modo se dice que en el caso de que las fuerzas con motivo de su direccion tendieran á levantar de su apoyo la palanca, no podria efectuarse tal levantamiento, ó en otros términos, que la disposicion del apoyo se opondria á ese efecto. Así pues, para un problema fundamental de tan notoria importancia nos encontramos enfrente de un enunciado que no deja de ser muy incompleto. Si queremos remediar esa defectuosidad, tendremos que dar á la palanca y al apoyo una disposicion tal, que el movimiento del uno con respecto al otro sea desmodrómico, es decir, que *el primero no pueda describir con relacion al segundo más que circunferencias*. Una disposicion de ese género no puede ser más que la del *acoplo de rotoides* $R\underline{\underline{=}}R^{-}$, ó bien (segun el párrafo 57) la del *acoplo de cilindros* $C\underline{\underline{=}}C^{-}$. Luego si fijamos uno de los dos elementos, la fórmula de la palanca puede escribirse:

$$\underline{R}\underline{=}R^{+} \quad \text{ó} \quad \underline{R}\underline{\underline{=}}R^{-}$$

ó bien

$$\underline{C}\underline{=}C^{+} \quad \text{ó} \quad \underline{C}\underline{\underline{=}}C^{-}$$

Las «leyes de la palanca» tomadas en toda su estension no son otra cosa más que las *condiciones de equi-*

librio de las fuerzas en el acoplo de rotoides. Tocante á la forma del acoplo constituido por la palanca y su apoyo, comunmente es la de un acoplo de rotoides no independiente y sobre todo de *clausura de fuerza*, cuya disposicion es análoga á la de la fig. 139; en cuyo caso la fórmula puede escribirse

$$\underline{C \overline{=} C^{+}}_{f}$$

Plano inclinado.—Así se designa una superficie plana inclinada al horizonte, sobre la cual tiende á resbalar un cuerpo que está en contacto con ella por una seccion plana y que se halla sometido á la accion de la gravedad (fig. 199). Se calcula la intensidad de la fuerza capaz de producir el movimiento. Aquí tambien deja mucho que desear la descripcion, porque generalmente se omite decir que el cuerpo no puede resbalar sino paralelamente á la direccion del plano, es decir, que debe suponerse apoyado debidamente para obtener ese resultado, y en segundo lugar, que debe estar dispuesto de manera que no pueda separarse de dicho plano. En otros términos, se supone implícitamente que el cuerpo *está acoplado* con la superficie en que reposa, de modo que produzca un *movimiento rectilíneo;* y por ende el acoplo considerado no es en realidad más que un *acoplo de prismas*, de suerte que con la fijacion de uno de los elementos, su fórmula puede escribirse:

$$\underline{P \overline{=} P^{-}} \text{ ó } \underline{P \overline{=} P^{+}}$$

La «ley del plano inclinado» ha de tener para ser completa las *condiciones de equilibrio de las fuerzas aplicadas á un acoplo de prismas.* En el caso más comun se tiene un acoplo de prismas no independiente, de *clausura de fuerza*, cuya fórmula es:

$$\underline{P^{-} = P^{+}}_{f}$$

Cuña.—Ese dispositivo se encuentra generalmente representado en una forma muy primitiva, la de un útil de partir la leña (fig. 200), que no puede recordar sino en muy escasa medida la precision de movimientos de las máquinas. En ese dispositivo rústico se sabe calcular la relacion que existe entre la fuerza que obra directamente sobre la cuña y las resistencias que se ejercen en sus costados.—Si queremos completar la descripcion, falta por lo general de exactitud, que se acostumbra á dar, para poder considerarlo como un verdadero aparato mecánico, deberemos decir de una manera sumaria que los dos costados ó flancos de la cuña deben conceptuarse como acoplados prismáticamente con las superficies en contacto, y que en segundo lugar, las dos partes de la pieza de leña ó madera de la fig. 200 deben figurar como dos cuerpos *distintos*, que el uno con respecto al otro tienen un movimiento rectilíneo, y por ende forman igualmente un acoplo de prismas. El conjunto constituye á la sazon un mecanismo que debe considerarse formado por una *cadena prismática de tres miembros a, b, c* (fig. 201), la cual observando el órden de estos miembros puede escribirse:

$$P^{+} \ldots \angle \ldots \underline{P \overline{=} P^{-}} \ldots \angle \ldots \underline{P \overline{=} P^{+}} \ldots \angle \ldots \underline{P \overline{=}}$$

La «ley de la cuña,» suponiéndola establecida con una generalidad bastante, ha de ofrecer las *condiciones de equilibrio de las fuerzas en esa cadena.* La disposicion representada aquí ofrece un agregado de varios cuerpos de clausura de fuerza, que no reproduce sino aproximadamente la disposicion tradicional de la cuña.

Polea.—Ese dispositivo se compone de un disco circular que se mueve entorno de un eje fijo y que en su periferia está provisto de una ranura (garganta), por la cual pasa una cuerda cargada á entrambos estremos (fig. 202); en la enseñanza ordinaria se indican las condiciones de equilibrio entre las fuerzas aplicadas á los estremos de la cuerda y la fuerza que obra sobre la chapa (ó caja) del eje fijo. La polea ocupa entre las máquinas simples un sitio que merece llamar la atencion. Cumple ante todo observar que no son dos cuerpos solamente, sino tres, los que se hallan combinados para formar esa máquina. En la descripcion que comunmente se da de ella, olvídase mencionar la condicion de que el modo de suspension debe establecerse de manera que impida los movimientos trasversales. En segundo lugar debe notarse que en este mecanismo un elemento de clausura de fuerza, la cuerda, se halla en evidencia, sin que se haga resaltar suficientemente la curiosa propiedad que goza de no ser susceptible de resistencia más que en un solo sentido. Suponiendo fija la chapa de la polea el mecanismo puede cinemáticamente escribirse de la siguiente manera:

$$\underline{C \overline{=} C} - \ldots \mid \ldots R^{+}, T \ldots \begin{cases} \ldots \underline{\underline{T^{-}}}_{f} \\ \ldots \underline{\underline{T^{+}}}_{f} \end{cases}$$

Así se tiene un mecanismo formado de *tres miembros*, cuyo modo de movimiento es muy indeterminado y que no llega á satisfacer aproximadamente la preci-

sion exigida por las máquinas sino en razon de clausura de fuerza.

Esa forma no es la única que afecta al mecanismo de la polea en las aplicaciones; pues hay otro que constituye lo que se llama la *polea móvil* (fig. 203), por oposicion á la anterior que se designa con el nombre de *polea fija*. En esta segunda disposicion la chapa es móvil y está cargada, en tanto que uno de los estremos de la cuerda se mantiene fijo; y entonces se llega á la fórmula siguiente:

$$\frac{C\overline{\underline{=}}C-\ldots \mid \ldots R+,\ T\ldots}{f}\begin{cases}\ldots\dfrac{T-}{f}\\ \ldots\underline{T+}\end{cases}$$

la cual no se diferencia del anterior más que por indicar, como mantenido fijo otro miembro de la cadena. Así encontramos en un antiguo mecanismo la realizacion de *la inversion de una cadena cinemática*. Importa notar que en la polea móvil el empleo de la clausura de fuerza es todavia más estenso que en la polea fija.

Cabria.—Ese mecanismo se compone de dos tambores conaxiales, de diámetros diferentes, que están juntos y en cada uno de los cuales hay una cuerda fija que se encuentra cargada á su estremo libre; el eje comun de los dos tambores está sostenido por una armadura fija ó bien se *supone* simplemente sostenido, porque á veces los soportes faltan por completo en el dibujo, como por ejemplo, en la fig. 204. Los tratados ordinarios enseñan las condiciones de equilibrio entre las fuerzas aplicadas.

El problema que se pretende resolver, no deja de ser poco claro ni llega á tomar un carácter práctico, sino merced á una abstraccion que generalmente se tiene cuidado de pasar en silencio. Introduciendo la armadura y espresando que es el miembro fijo de la cadena cinemática, nuestro sistema de notacion nos conduce en tal caso á esta fórmula:

$$\underline{C\overline{=}}C+\ldots\begin{cases}\cdot \mid \ldots R+,\ \dfrac{T-}{f}\\ \cdot \mid \ldots R+,\ \dfrac{T+}{f}\end{cases}$$

La imperfeccion debida á la indeterminacion de los movimientos que hemos señalado en el ejemplo anterior, se encuentra igualmente aquí, y es aun más pronunciada por efecto de verificarse el arrollo y desarrollo de las dos cuerdas siguiendo hélices. Además, como otra complicacion, el ánima en ambas cuerdas debe describir hélices de órden superior, á ménos de suponer el empleo de disposiciones accesorias especiales ó suponer que se elude la dificultad, merced á una abstraccion consistente en admitir que las cuerdas son infinitamente delgadas: ese es el partido que comunmente se toma. En la idea de evadirse de una hipótesis poco exacta y difícil de motivar algunos autores dejan completamente las cuerdas á un lado y las reemplazan simplemente con fuerzas tangenciales aplicadas á las periferias de los dos tambores. De esa manera convierten el problema actual en el de la palanca, pero así tambien se apartan enteramente de la cuestion.

Tornillo.—Por regla general se considera este mecanismo como compuesto de un husillo vertical metido en una tuerca fija y cargada de un peso (fig. 205); y se enseña el medio de encontrar el valor de la fuerza que, suponiéndola aplicada al tornillo en un punto situado fuera del eje y normalmente al radio que pasa por ese punto, seria capaz de producir un movimiento de rotacion uniforme y hacer por consiguiente equilibrio á la carga.—Vemos aquí inmediatamente que estamos en presencia de nuestro *acoplo tornillo*, cuya fórmula, suponiendo fijado uno de los elementos es:

$$\underline{S\overline{=}}S+ \text{ ó } \underline{S\overline{\pm}}S-$$

La «ley del tornillo» es una espresion muy limitada y aun incompleta de las *condiciones de equilibrio entre las fuerzas aplicadas al acoplo tornillo.*

Máquina funicular.—Considerada de una manera bastante abstracta, esta máquina da márgen á un problema de un gran valor para la mecánica pura, y por otra parte dista mucho de llenar las condiciones del principio maquinal, por efecto de su gran movilidad y del predominio de la clausura de fuerza. Por ello nos creemos en el deber de dar de mano á esa máquina que, como lo hemos dicho, dista mucho de tener de una manera incontestable el derecho de contarse en el número de las máquinas simples.

Resúmen y conclusiones.—Los resultados á que nos han conducido las precedentes investigaciones, son asaz interesantes para que intentemos resumirlas. En las máquinas simples que bajo el concepto cinemático deberian presentar entre sí estrecho parentesco, completa armonia, no encontramos en definitiva más que una mezcla singular de problemas cinemáticos: acoplos cerrados y no cerrados, cadenas tomadas por error como acoplos dispositivos las más de las veces de clausura de fuerza, y sobre todo órganos de traccion que presentan dificultades especiales; y en último lugar, un ensayo de inversion de un mecanismo. Con pena debemos hacer constar igualmente un defecto de precision y exactitud

en la manera de plantear los problemas, que no es evidentemente idónea para dar ideas claras á los principiantes. Para llegar á esplicar todas esas singularidades es necesario referirse al modo de desarrollarse las ideas que hemos llegado á aclarar en el capítulo anterior, al trazar la historia del desarrollo progresivo de las máquinas en general. Allí hemos visto efectivamente que la máquina habia nacido de la combinacion de clausura de fuerza de cuerpos móviles y de cuerpos en reposo. La historia del desarrollo de las máquinas se reproduce en las máquinas simples que deben considerarse como la primera tentativa hecha para clasificar científicamente lo que existia; esa misma sucesion de ideas que hemos patentizado en el conjunto, se repite en mucho menor escala en el procedimiento seguido para asentar en una base científica los resultados hallados de una manera empírica.

Ahora debemos salir al encuentro de la segunda cuestion que anteriormente hemos indicado y ver si suponiendo introducida en la definicion y concepto «de las máquinas simples,» toda la precision necesaria, esas máquinas gozan realmente la propiedad de poderse considerar como las partes elementales de todas las máquinas. A la cuestion así planteada estamos en disposicion de responder negativamente de una manera categórica.

Tres de esas máquinas simples, suponiéndolas despojadas de sus accesorios, contienen en realidad los tres acoplos inferiores (R), (P) y (S), así como el acoplo superior R, T; más todos los otros acoplos superiores faltan completamente lo mismo que los órganos de presion, sin hablar de los resortes ¿Cómo se podria, por lo tanto, en presencia de la máquina de vapor y de las bombas, esos maravillosos aparatos en que dominan los órganos de presion, continuar sosteniendo la opinion de que todas las máquinas pueden reducirse ó referirse á las máquinas simples tradicionales? Apenas se concibe que todavia puede espresarse hoy una opinion semejante. Tampoco es exacto decir que todos los problemas estáticos de la mecánica están contenidos en los de las máquinas simples y que precisamente esa propiedad es la que da su importancia á esas últimas, al propio tiempo que justifica su conexion. Con efecto, fácil es asegurarse de que la ley de la palanca no da la relacion de las fuerzas en el acoplo superior de cilindros, á ménos de limitarse á movimientos infinitamente pequeños. Tampoco proporciona esa misma ley la relacion de las fuerzas en el acoplo de hiperboloides. Las máquinas simples no son de ningun valor para la solucion de problemas relativos á una infinidad de fuerzas que se encuentran tan amenudo en las máquinas; nada enseñan con respecto á los acoplos de fuerzas; dejan completamente á un lado el empleo de los flúidos como manantiales de fuerza motriz en las máquinas, por más que comprendan la utilizacion de los órganos de traccion que, conforme hemos visto, no son más que su contraparte. En suma, el aserto de que todas las máquinas pueden reducirse «á las máquinas simples» no está *poco ni mucho* justificado.

Por todas esas razones podemos esplicarnos perfectamente la repugnancia más acentuada cada dia de los autores á reconocer esas máquinas simples, que sin embargo, tan hondas raices han echado en el dominio histórico, así como comprendemos la negativa que por su parte les opone la mecánica superior á admitirlas. Y no obstante, de las consideraciones precedentes nos está permitido sacar una conclusion de índole algo diversa, que puede servir para esplicar el indudable atractivo que ejerce esa clase de problemas tan antiguos y tan conocidos. A nuestro modo de ver el interés particular que se da á esos problemas, dimana ante todo de la circunstancia que hemos puesto en evidencia, de que tres de esas máquinas, la palanca, el plano inclinado y el tornillo, representan *acoplos de elementos*, mientras que en los otros, y sobre todo en la polea, se revela tímidamente un primer paso por la senda tan fecuuda del empleo de la *cadena cinemática*.

De consiguiente, en primera línea fué el deseo, bastante mal definido por cierto, de reducir los movimientos de las máquinas á los de acoplos de cuerpos, lo que condujo «á las máquinas simples.» Al admitirlas, se vió que á pesar de algunos tanteos, se habia marchado en realidad por la verdadera senda que debia conducir al fin. Por esa razon la palanca, el plano inclinado y el tornillo, que á *priori* hemos podido reconocer como los únicos acoplos de encaje (§ 15), han podido echar tan firmes y profundas raices. Asi mismo, del problema de la polea se desprendia llena de promesas una lijera huella de la ley de formacion de la cadena cinemática. Así limitada, la utilidad de los problemas de las máquinas simples no es discutible. Creemos además que la crítica precedente debe tener por consecuencia dar á comprender la necesidad de una revision de las materias de la mecánica elemental, no solamente en los tratados y en la enseñanza de esta ciencia, sino tambien en la enseñanza de la física, donde las «máquinas simples» están igualmente arraigadas.

§ 65

Cuadrilátero de manubrio cilíndrico (C''_4).

La cadena cinemática (C''_4), formada de cuatro acoplos de cilindros paralelos y de la cual nos hemos ocupado ya diferentes veces, es una de las más importantes que tiene la mecánica práctica. Vamos ahora á entrar de lleno en el análisis de esa cadena. Sin embargo, como quiera que á la cinemática aplicada y no á la cinemática teórica incumbe tratarla enteramente por completo, no podemos entregarnos aquí á un estudio acabado y nos propondremos simplemente como objeto investigar bajo cuantas formas diferentes esta cadena puede llegar á constituir un mecanismo. Vamos á ver como es muy considerable el número de esas formas.

Ante todo nos ocuparemos de la especie de cadena de que ha sido cuestion antes, en el párrafo 62, y en la que las dimensiones de los cuatro miembros (fig. 197) eran tales, que suponiendo d fijo, a podia describir círculos enteros, en tanto que c oscilaba simplemente siguiendo un arco de círculo. Admitiendo que a, b, c, d, representan todavia las longitudes de los diferentes miembros, medidas entre los centros de los gorrones, basta para que el resultado precedente se mantenga y tengamos:

$$a+b+c>d \qquad a+d+c>b \qquad a \leqq c$$

Las dos primeras desigualdades espresan las condiciones relativas á la existencia del cuadrilátero 1, 2, 3, 4.

En razon del paralelismo de los cuatro acoplos de cilindros, todas las trayectorias polares son figuras planas y todas las axoides son *cilindros*. Como en las aplicaciones el miembro giratorio a lleva el nombre de *manubrio*, la cadena anterior puede llamarse *cuadrilátero de manubrio cilíndrico* ó bien *cadena de manubrio cilíndrico de cuatro miembros*. Los diversos mecanismos que de ahí pueden deducirse fijando uno de los miembros, pueden, por lo tanto, designarse con el nombre de *mecanismos de manubrio cilíndricos de cuatro miembros*. El adjetivo *cilíndrico* debe figurar en esas designaciones, pues más adelante veremos que existen otros mecanismos de manubrio. Los mecanismos derivados de la cadena precedente son en número de cuatro y segun el método de notacion concentrado del párrafo 62 pueden escribirse: $(C''_4)^d$, $(C''_4)^b$, $(C''_4)^a$, $(C''_4)^c$. Examinémoslos someramente uno despues de otro.

Mecanismo $(C''_4)^d$.—Varias veces hemos encontrado ese mecanismo, con el cual estamos por consiguiente bastante familiarizados. Sus miembros tienen funciones claramente distintas y para abreviar el discurso, podemos darles como definitivas las designaciones que hasta ahora no hemos empleado sino de una manera incidental, y así llamaremos:

a	el manubrio.	c	el oscilador.
b	el lazo.	d	el puente.

Esas denominaciones cuya adopcion no es necesario motivar más detalladamente en virtud de lo que precede, podrán utilizarse con algunas calificaciones convenientes para otros mecanismos de manubrio.

Con el mecanismo actual (fig. 197), el manubrio a en su rotacion da por mediacion del lazo b un movimiento de vaiven, que sigue un arco de círculo, al oscilador c, pudiendo, por lo tanto, designarse el mecanismo con el nombre de *manubrio rotatorio de impulso curvilíneo*.

Mecanismo $(C''_4)^b$.—Si ahora fijamos la cadena en el miembro b dejando libre el puente d de la figura anterior, obtenemos un mecanismo (fig. 206), en el que a tambien gira, pero entorno del eje 2 en vez del 1, á la vez que c oscila entorno del eje 3; el puente d se ha convertido en lazo y el lazo primitivo en puente. El mecanismo es tambien un *manubrio rotatorio de impulso curvilíneo*, que no se diferencia del anterior sino con respecto á las dimensiones del lazo y del puente. Por lo que toca á la naturaleza del mecanismo es la misma en ambos casos, de suerte que se tiene: $(C''_4)^d = (C''_4)^b$.

Mecanismo $(C''_4)^a$.—Si se toma el miembro a como puente (fig. 207), se obtiene un mecanismo del cual nos hemos ocupado ya en el párrafo 9, y que es completamente distinto de los dos anteriores. Los miembros b y d giran alrededor de los ejes 2 y 1, y por lo tanto, vienen á ser manubrios, á la vez que c sirve de lazo. La práctica conoce este mecanismo con el nombre de juntura de articulacion; nosotros la designaremos con el de *manubrio doble rotatorio*. Las rotaciones de los dos manubrios se ejecutan con relaciones de velocidades variables, lo cual hemos demostrado antes en una forma fácil de comprender por medio de las trayectorias polares reducidas (fig. 23).

Mecanismo $(C''_4)^c$.—En ese cuarto modo de fijacion (fig. 208), los miembros b y d oscilan entorno de los ejes 3 y 4; c viene á ser el puente, a el lazo. En la posicion 4 1′2′3 (en punteado) b se encuentra en su posicion límite, á la derecha; y cuando b vuelve atrás, d se adelanta todavia un poco hácia la derecha, luego vuel-

ve igualmente atrás, para llegar por último á su posicion estrema á la izquierda, en $1''$. Asimismo cuando á partir de esa posicion d se dirige á la derecha, b se desplaza todavia en una pequeña cantidad hácia la izquierda para volver enseguida á la derecha. En la posicion intermedia $4\ 1'''2'''3$, los miembros b y d se ostentan cruzados. En la práctica se emplea ese mecanismo en formas variadas, como aparato de guiaje en línea recta, no utilizando, empero, más que una parte de la oscilacion total; y nosotros nos proponemos designarlo con el nombre de *manubrio doble oscilante*. Podemos considerarle como la contraparte exacta del mecanismo $(C''_4)^a$, en el cual los mismos brazos b y d giran en vez de oscilar.

Así hemos agotado los diversos modos de fijar la cadena considerada, haciendo constar que los cuatro mecanismos á los cuales dan márgen esas fijaciones, se reducen á tres de índole diferente. Los tres modos distintos de movimiento de esos mismos mecanismos no son otra cosa, como sabemos, que los movimientos relativos de los miembros de la cadena cuyo movimiento absoluto hemos denotado segun el método de fijacion, ó más exactamente, movimiento absoluto para nosotros, con relacion al cuarto miembro *(d)*, al segundo *(b)*, al primero *(a)* ó al tercero *(c)* (véase párrafo 3.)

De los cuatro mecanismos que hemos hallado aquel cuyas aplicaciones son las más numerosas, es el mecanismo $(C''_4)^d=(C''_4)^b$ ó $(C''_4)^{b=d}$, reuniendo las dos fórmulas en una sola.

§ 66

Manubrios paralelos.

Es obvio que cambiando las relaciones de dimensiones de los miembros en la cadena (C''_4), se han de poder modificar los mecanismos que de ella derivan, así como la índole de sus movimientos, puesto que aumentando bastante el ángulo de oscilacion, los movimientos relativos oscilatorios pueden convertirse en movimientos rotatorios y vice-versa. Modificaciones de ese género se efectuan en una série de casos particulares, de los cuales vamos á examinar los más importantes. Comencemos por elevar á su estremo límite la relacion de las longitudes a y de c, para las cuales hemos supuesto hasta aquí $a<c$: si hacemos $a=c$ y tomamos además $b=d$, el cuadrilátero de manubrio se trasforma en *paralelógramo* (fig. 166). El oscilador c viene á ser un manubrio idéntico al manubrio a, y describe los mismos ángulos que él, cuando d está fijo. Como los miembros son paralelos dos á dos, la cadena puede representarse con la fórmula concentrada $(C''_2 \parallel C''_2)$. El signo $\parallel$ es suficiente, y no se necesita recorrer al signo más completo $\#$, puesto que el primero escluye el anti-paralelismo que, conforme con el párrafo 47, podria igualmente resultar. El signo $=$ no seria suficiente, porque la igualdad de los miembros dos á dos que indicaria, pudiera efectuarse de suerte tal, que se tuviese $a=b$, $c=d$, pero $a<c$ ó $>c$, lo que seria contrario á la hipótesis sentada. El signo $\#$ puede reservarse para los casos en que el paralelógramo se convierta en un rombo.

Si se fija el mecanismo en el miembro d, que viene á ser entonces el puente, como lo indica exactamente la figura, la fórmula debe escribirse: $(C''_2 \parallel C''_2)^d$. La índole del mecanismo no cambia cuando la fijacion se hace en uno cualquiera de los miembros b, a y c, en vez de d. Por consiguiente, los cuatros mecanismos que la cadena es susceptible de formar, son de la misma especie y los comprenderemos todos bajo la denominacion comun de *manubrios paralelos*.

En los puntos muertos $2'1\ 3'4$ y $1\ 2''4\ 3''$, la cadena no está cerrada desmodrómicamente, conforme lo hemos visto ya en el párrafo 46. Por consiguiente, para asegurar el paso de los puntos muertos es necesario recurrir á una clausura especial, de la cual hemos encontrado diferentes veces la aplicacion y precisamente bajo las dos formas que representan las figs. 167 y 168. Ahora se trata de ver como podemos escribir cinemáticamente esos dos modos de trabazon.

Aquí nos encontramos enfrente de una clausura por cadena, y segun el párrafo 57, esa clausura debiera indicarse introduciendo en la fórmula la letra k en el denominador, de modo que las dos cadenas deberian escribirse:

$$\frac{(C''_2 \parallel C''_2)}{k}$$

Mas como aquí la cadena de clausura es precisamente idéntica á la cadena que se trata de cerrar, se obtendrá una fórmula más inteligible aun, añadiendo el signo de igualdad al denominador k, y cerrando el todo entre paréntesis. La fórmula es entonces:

$$\frac{(C''_2 \parallel C''_2)}{(k=)}$$

lo que significa: un acoplo de manubrios paralelos cerrado por otro acoplo de manubrios paralelos. Puede, empero, adoptarse aquí una notacion más cómoda todavia, introduciendo el factor 2 para espresar la reunion

de las dos cadenas de la misma especie, que actuan además de una manera recíproca, obteniéndose así la fórmula:

$$2(C''_2 \parallel C''_2)$$

Ahora falta precisar un último punto, el de la distincion entre las disposiciones de las figuras 167 y 168. En el primer caso los dos «manubrios» de la cadena de clausura están ligados invariablemente con los de la cadena que ha de cerrarse, de manera que formen dos á dos un solo miembro. En el segundo caso uno de los manubrios de la cadena de clausura parece coincidir con uno de los de la cadena principal, á la par que el otro queda aislado, y por consiguiente debe estar reunido por medio de un lazo con el segundo manubrio de esta misma cadena. Con todo, comparando con cuidado y haciendo la abstraccion posible de las dos cadenas, se logra conocer que existe entre ellas una relacion más simple; pues en efecto, se ve que las dos cadenas (no los *mecanismos)* son idénticas. En realidad los miembros ternarios *aa'* y *cc'* de la cadena de la fig. 167 corresponden á los miembros ternarios *aa'* y *cc'* de la figura 168, así como los miembros binarios *d*, *b* y *b'* de la primera disposicion corresponden á los miembros que llevan las mismas designaciones en la segunda. Por consiguiente, si como lo indican las figuras, se convierten las cadenas en mecanismos fijándolos respectivamente en los puntos *d* y *aa'*, el segundo mecanismo se ostenta como una inversion del primero, de manera que podemos ahora representar de un modo muy claro el mecanismo de la fig. 167 con la fórmula $2(C''_2 \parallel C''_2)^i$ y el de la fig. 168 $2(C''_2 \parallel C''_2)$.[a] Esos mecanismos están formados uno y otro por la misma cadena de cinco miembros y son ejemplos de las dos únicas especies de mecanismos que pueden resultar de esa misma cadena.

§ 67

Manubrios antiparalelos.

Conforme hemos visto en el párrafo 47, podemos por medio de una clausura por acoplo convertir el paralelógramo de manubrios en un *antiparalelógramo*, que permanece sin cesar desmodrómico en todas las posiciones á que puede reducirse. Las figs. 171 y 172 representan las dos formas de la cadena de clausura por acoplos que así se obtiene y que ya hemos considerado anteriormente. Designaremos con el nombre de *manubrios antiparalelos* los mecanismos que pueden sacarse de esta cadena. Son posibles dos disposiciones que conducen á resultados diferentes: la fijacion se efectua para la primera en *d* ó *b*, y para la segunda en *c* ó *a*.

Si la fijacion se verifica en *d*, como lo indican las dos figuras 171 y 172, ambos manubrios *a* y *c* giran *en sentido opuesto*, ó son como se dice, de *sentidos contrarios;* por esa razon he propuesto antes designar ese mecanismo con el nombre de *manubrios antirotatorios* (Véase párrafo 47, fig. 171).

Si por el contrario la fijacion tiene lugar en *a* (figura 209), *c* es el lazo: *b* y *d* son entonces manubrios que efectuan todavia rotaciones enteras, si bien que de un *mismo sentido.*

El antiparalelógramo da por consiguiente en el primer modo de fijacion *manubrios antiparalelos de rotaciones contrarias*, y en el segundo, *manubrios antiparalelos de rotaciones de un mismo sentido.* Cumple notar que *la ley de la rotacion es la misma en ambos casos;* lo cual resulta de que en razon del antiparalelismo los ángulos 1,2,3 y 1,4,3 son iguales entre sí. Luego si se quieren reducir á trayectorias polares, á movimientos contrarios (Véase § 9), las trayectorias polares hiperbólicas, descritas para los miembros *b* y *d* (Véase § 47), y que son bastante difíciles de notarse, se obtendrian dos elipses congruentes.

La notacion concentrada de los dos mecanismos anteriores debe ante todo indicar el antiparalelismo, y conviene por lo tanto intercalar el signo correspondiente entre los símbolos de los cilindros. La cadena ante toda fijacion deberá escribirse pues: $(C''_2 \gtrless C''_2)$. A la sazon tendremos para los manubrios antiparalelos de rotaciones contrarias: $(C''_2 \gtrless C''_2)^d$ ó $(C''_2 \gtrless C''_2)^b$; y de esas dos fórmulas no puede conservarse más que una, la primera, á ménos de preferir reunirla en una fórmula sola: $(C''_2 \gtrless C''_2)^{d=b}$. Asimismo los manubrios antiparalelos de rotaciones de un mismo sentido podrán representarse con una sola fórmula: $(C''_2 \gtrless C''_2)^a$, ó bien con $(C''_2 \gtrless C''_2)^{a=c}$, si se quiere espresar la equivalencia de *a* y *c*.

Fáltanos aun indicar la clausura por acoplos, que es indispensable para el paso de los puntos muertos. Si esa clausura está dispuesta como lo indica la fig. 171, la fórmula vendrá á ser:

$$\frac{(C''_2 \gtrless C''_2)^d}{(p)\,a.c}$$ y en el caso de la fig. 172: $$\frac{(C''_2 \gtrless C''_2)^d}{(p)\,b.d}$$

En esas fórmulas *p* designa la clausura por acoplos (Véase § 57) en sí misma, mientras que el paréntesis y el aditamento de los signos de los miembros acoplados representan lo que se efectua con una exactitud sufi-

ciente. Muy amenudo no será necesario espresar la existencia de esa clausura, puesto que el sosten del antiparalelismo, que es la consecuencia de la permanencia atribuida al signo $\geq$, supone ya la presencia de esa clausura. Acá y acullá se encuentran los manubrios antiparalelos en varias aplicaciones, sin que por ello sean muy conocidos: un ejemplo se encuentra en la articulacion ó juntura de *Dubs* para los coches de las vias férreas del sistema *Fairlie*, en la que se utilizan nuestras elipses como perfiles para los repulsores.

§ 68

Mecanismo de manubrio isóceles.

Un caso particular de la cadena (C''_4), que merece notarse bajo el concepto de la teoria, es el que se logra cuando se hace $a=d$, $b=c$, y como antes $a<c$. Hemos examinado ya en el párrafo 47, un mecanismo derivado de una cadena de ese género con clausura de acoplos superiores. Las figs. 174 y 210 representan respectivamente ese mecanismo solo y con clausura por acoplos. Una diagonal que reune los puntos 2 y 4 del cuadrilátero 1 2 3 4, lo divide siempre en dos triángulos isóceles, y por ese motivo proponemos caracterizar con el epíteto de *isóceles* ese mecanismo de manubrio. Fácil es consignar despues de lo dicho, la notacion de la cadena. Utililizando el signo indicado en el párrafo 57 para el isocelismo, llegaremos á la fórmula: $(C''_2 \leqq C''_2)$. Para espresar en esa forma el acoplamiento superior indicado en la fig. 210 deberemos ponerla en la forma: $\frac{(C''_2 \leqq C'_2)}{(p)\ a.c}$.

Del mismo modo que en los manubrios antiparalelos, el acoplamiento en vez de establecerse entre a y c, podria establecerse entre d y b; pero nada nuevo resultaria: la clausura por acoplos podria por una parte efectuarse entre a y c y por otra entre b y d.

La cadena proporciona dos géneros de mecanismos que corresponden el uno á la fijacion en d ó a y el otro en la fijacion en b ó c.

El mecanismo de la fig. 174, en el cual d está indicado como fijo, tiene por fórmula: $(C''_2 \leqq C''_2)^d$. La trasmision del movimiento á c ofrece la curiosa particularidad de que c, en vez de oscilar simplemente, tiene un movimiento de rotacion cuya velocidad media es la mitad de la del manubrio a, conforme hemos demostrado en el párrafo 47.

Fijando c ó b se obtiene el mecanismo que representa la fig. 211 con una clausura por acoplos; y teniendo en cuenta esa clausura, la fórmula del mecanismo es $\frac{(C''_2 \leqq C''_2)^c}{(p)\ a.c}$. Su movimiento no es ménos interesante que el del mecanismo anterior, y ofrece analogia con el del mecanismo de manubrio curvilíneo de impulso $(C''_4)^d$. El puente d de ese último es aquí un manubrio, el miembro a se ha vuelto un lazo, y b describe alrededor del eje 3 simétricamente por relacion á c, una oscilacion de amplitud tal, que la distancia de cada uno de los puntos estremos $2'$ y $2''$ al punto 4, es precisamente igual al doble de a. Esos puntos $2'$ y $2''$ están por consiguiente á una distancia uno del otro proximamente igual á *cuatro* longitudes de manubrio, mientras que en el mecanismo $(C''_4)^d$, el estremo 3 del oscilador no recorre aproximadamente sino dos longitudes de manubrio. Más adelante volveremos á estudiar esa interesante cuestion.

§ 69

Cadena de manubrio de impulsion cilíndrica $(C''_3 P^{\perp})$.

Sin dejar de continuar el exámen crítico de la cadena (C''_4), vamos á ensayar en ella una pequeña trasformacion, que consiste en reemplazar el oscilador c con una porcion de anillo cilíndrico móvil en una ranura que le encaja y que está ligada de una manera invariable con el cubo del gorron 1 (fig. 212).

Si suponemos el centro M de la ranura y del sector c, colocado á distancias de los puntos 1 y 3 precisamente iguales á las que antes existian entre esos puntos y el centro 4, la pieza deslizante c se encontrará que tiene el mismo movimiento relativo que si perteneciera al oscilador c, y por ende puede sustituir á esa última pieza: un poco más adelante veremos que bajo el concepto cinemático le es completamente idéntica. Ahora podemos, empezando por a, escribir como sigue la disposicion que esa trasformacion nos proporciona:

$$C^{+}... \parallel ...C\overset{+}{=}C^{-}... \parallel ...C\underline{=}C^{+}... \parallel ...A\overset{+}{=}A^{-}... \parallel ...C\underline{=}$$

puesto que segun el párrafo 57 el signo A (arco) puede designar una porcion de anillo. De una manera más concisa podria escribirse $(C''_3 A'')$. Más distintamente que en la fórmula anterior puede verse aquí que las relaciones de dimension deben elegirse de tal modo que el miembro c tenga un movimiento oscilatorio trazando un arco de círculo, porque de otro modo el acoplo $A\overset{+}{=}A^{-}$ no seria suficiente.

Por lo que toca al rádio del arco A, podemos aumentarlo como queramos sin esponernos á dificultades en la construccion; pues es evidente que la ranura del

miembro *d* y la corredera *c* se aproximarán tanto más á ser piezas de caras planas cuanto mayor sea el rádio. Nada nos impide hacer crecer este rádio hasta el *infinito*, y entonces la distancia del centro 1 al punto 4, es decir, la longitud del miembro *d* aumenta á su vez hasta el infinito. Admitamos que las longitudes 3.4 y 1.4 de los miembros *c* y *d* vienen á ser al mismo tiempo infinitamente grandes, esto es que tengamos:

$$c = d = \infty$$

En ese caso nuestra última forma deja de ser aplicable, y la cadena cinemática es completamente diferente de lo que era al principio, ya que el arco A se encuentra trasformado en un prisma P y el acoplo $A^{\pm}A^{-}$ en un acoplo de prismas $P^{\pm}_{=}\,P^{-}$. En razon de la igualdad de *c* y *d*, la recta sobre la cual se mueve el punto 3 con respecto á *d*, suponiéndola prolongada, pasa por el punto 1 y á la vez se encuentra siendo perpendicular á los ejes 3 y 1. La fórmula de la nueva cadena que está representada por la figura 213 y que por lo demás nos es ya conocida, deberá escribirse:

$$C^{+}... \parallel ...C^{\pm}_{=}C^{-}... \parallel C^{=}_{=}C^{+}...\perp...P^{\pm}_{=}P^{-}...\perp...C^{=}_{=}$$

ó de una manera más abreviada:

$$C^{+}... \parallel ...(C)... \parallel ...(C)...\perp...(P)...\perp...C^{=}_{=}$$

ó en fin, bajo una forma todavia más concisa $(C''_3P^{\perp})$. En esa cadena notable y más importante el miembro *c*, en vez de moverse en un arco de círculo, como en el caso de la cadena (C''_4), se encuentra que hay una carrera *rectilínea*, por cuyo motivo la designaremos con el nombre de *cadena cilíndrica de manubrio de impulsion rectilínea*, ó más simplemente con el de *cadena cilíndrica de manubrio de impulsion*. Examinemos ahora los diferentes modos de fijacion de esa cadena que son en número de cuatro.

Mecanismo $(C''_3P^{\perp})^{d}$.—Si como lo indica la figura 163, se fija la cadena en el miembro *d*, la rotacion del manubrio *a* produce un movimiento rectilíneo alternativo del miembro *c*, y entonces nos encontramos en presencia de uno de los mecanismos más conocidos y que desempeña un papel importantísimo en las máquinas de vapor, las bombas y gran número de otras máquinas. El miembro *c* puede designarse con el nombre de *corredera* y el miembro *d* con el de *deslizadera*, sobre todo en los casos en que es móvil. En razon del movimiento de rotacion el mecanismo total puede tomar el nombre de *manubrio rotatorio de impulsion*. En las aplicaciones á las máquinas de vapor de manubrio, la corredera *c* obra como órgano motor, y en este caso la fórmula general $(C''_3P^{\perp})^{d}$ está reemplazada por la fórmula especial $(C''_3P^{\perp}\frac{d}{c})$ En los otros ejemplos que hemos citado (las bombas, etc.,) al contrario es el manubrio *a* el que conduce el mecanismo, y la fórmula viene á ser $(C''_3P^{\perp})\frac{d}{a}$.

El lazo *b* efectua movimientos complicados que es posible determinar exactamente por medio de trayectorias polares. Por de pronto no nos ocuparemos de esas trayectorias y nos limitaremos á notar que deben naturalmente ser simétricas con respecto al eje 3,1.

Mecanismo $(C''_3P^{\perp})^{b}$.—Siguiendo el mismo órden que para la cadena (C''_4), establezcamos ahora la fijacion en *b* (fig. 214). El eje en torno del cual gira el manubrio es entonces el boton 2 del mecanismo anterior; ese manubrio por mediacion de la corredera *c* imprime á la pieza *d* un movimiento oscilatorio adelante y atrás. En razon de su forma especial la pieza *d* puede designarse con el nombre de *corredera* (rectilínea) y por ende el mecanismo puede recibir la denominacion de *manubrio de corredera oscilante*. Conviene además no olvidar que los acoplos inferiores por ser susceptibles de inversion sin que la ley del movimiento se modifique en nada (véase párrafo 16), se tiene la libertad de adoptar igualmente para la corredera grande ó pequeña la disposicion representada por la figura 215.

El mecanismo á que acabamos de llegar es igualmente muy conocido, por más que no dé márgen á tan gran número de aplicaciones como el anterior $(C''_3P^{\perp})^{d}$. Particularmente se le halla empleado en las máquinas de vapor oscilantes bajo una forma que recuerde inmediatamente la fig. 215. En esa figura la pieza guia *d* que representa el émbolo de vapor, es el miembro motor, de modo tal que la fórmula especial debe escribirse en este caso $(C''_3P^{\perp})\frac{b}{d}$. No sin trabajo se ha intentado establecer el grado de parentesco de la máquina oscilante con la máquina de vapor ordinaria, haciendo derivar la primera de la segunda por medio de un cambio de dimensiones. Se ha supuesto, por ejemplo, que reduciendo á cero la longitud de la biela (el lazo), la máquina ordinaria podia considerarse como trasformada en máquina oscilante, con la condicion de admitir al propio tiempo que el cilindro estuviese en libertad de oscilar alrededor de un eje. Hay sin duda ahí más de un simple cambio de dimensiones, y en realidad el paso de una forma á otra queda todavia bastante oscuro. En cambio, vemos muy claramente

aquí la conexion que existe entre los dos mecanismos que corresponden á los dos géneros de máquinas, y demostramos que para obtener el segundo basta hacer sufrir una inversion á la cadena cinemática que ha proporcionado el primero. Tocante á la analogia que existe entre las máquinas mismas nos reservamos estudiarla más adelante de una manera más completa.

El mecanismo $(C''_3\ P^{\perp})^b$ ha encontrado bajo la forma $(C''_3\ P^{\perp})^{\frac{b}{a}}$, otra aplicacion en las máquinas de acepillar y entallar la madera. Utilízase en tal caso la propiedad que tiene el movimiento del miembro *c* de no ser uniforme como el del manubrio, el miembro motor. En la posicion 1′ (fig. 216) cuando el manubrio se encuentra á su mayor distancia del puente, la velocidad angular que se imprime al miembro *c*, tiene su más exíguo valor relativo, mientras que esa velocidad alcanza en cambio, su máximum cuando el manubrio está en la posicion 1″, la más cercana del puente. Acoplando el miembro *e* con el porta-útil, como lo indica la fig. 216, se llega al resultado de que la *vuelta* del útil se efectua más rápidamente que su *avance*. Los mecanismos de ese género están cabalmente designados con el nombre de mecanismos de «vuelta rápida.»

El mecanismo $(C''_3P^{\perp})^b$ halla además otras aplicaciones en la mecánica práctica.

Mecanismo $(C''_3P^{\perp})^a$.—Este tercer mecanismo corresponde á la fijacion de la cadena en *a* (fig. 217). En este caso el miembro *b* gira alrededor del eje 2 y se encuentra trasformado en manubrio, á la par que el miembro *a* que llenaba primeramente ese papel, ha pasado al estado de puente. La pieza de guiaje *d*, arrastrada por la correderita *c*, efectua rotaciones completas en torno del eje 1. Suponiendo uniforme el movimiento del manubrio *b* sucede todo lo contrario con el de las piezas *d* y *c*, cuya velocidad alcanza su mínimun en la posicion 3″, la más distante del puente, y su máximun en la posicion 3′, la más cercana. *Whitworth* y otros utilizaron esa propiedad para obtener bajo la forma $(C''_3P^{\perp})^{\frac{a}{b}}$, un mecanismo de «vuelta rápida.» Segun *Goodeve*, ese mecanismo era tambien conocido de los antiguos, que lo utilizaron para representar el movimiento de la luna con respecto á la tierra. Proponemos designarlo con el nombre de *manubrio de correderа rotatoria*.

Mecanismo $(C''_3P^{\perp})^c$.—El cuarto y último género de mecanismo se obtiene fijando la pieza *c* (fig. 218.) El lazo *b* no efectua ya en este caso sino oscilaciones alrededor del eje 3, al tiempo que la pieza *d* toma un movimiento rectilíneo alternativo en la correderita ó ranura que ha pasado al estado de puente, viniendo así á ser la pieza deslizadora, y en fin, el manubrio *a* se ha convertido en lazo y efectua movimientos oscilatorios bastante complicados. Por efecto del movimiento de oscilacion del miembro *b*, designaremos ese mecanismo con el nombre de *manubrio de impulso oscilante*.

Es poco conocido, pero allá y acullá se le encuentra á veces empleado, y entre tales aplicaciones debemos citar la disposicion bosquejada en la fig. 219 y utilizada para la afiladura en los cilindros de cardas; esa disposicion permite, como se ve, dar al cilindro un movimiento alternativo á lo largo del eje entorno del cual gira.

Como en este mecanismo el movimiento se trasmite por el miembro *a*, la fórmula debe escribirse: $C''_3P^{\perp})^{\frac{c}{a}}$. Otra aplicacion de esa misma fórmula hice en el mecanismo que designé con el nombre de *escéntrico dentado*. Por último, más adelante veremos aun otro que es muy notable.

El análisis anterior nos ha demostrado que de la cadena $(C''_3P^{\perp})$ derivan *cuatro mecanismos*, el primero de los cuales es muy conocido y el último muy poco; el estrecho parentesco que entre ellos existe y que resalta tan claramente del análisis, era hasta hoy completamente ignorado. Además, hemos apurado esa cadena por completo, puesto que sabemos que no es posible sacar de ella más de *cuatro* mecanismos. Si relacionamos unas con otras las fórmulas que hemos obtenido, nos procuran la ocasion de poner en evidencia ciertas relaciones de especie particular que existen entre los mecanismos. Con el objeto de poder comparar más fácilmente nuestras fórmulas, escribámoslas en série ordenada las unas bajo las otras:

$$\begin{array}{llll} & a & b & c & d \\ (C''_3P^{\perp})^1 = & \overbrace{C^{+}\ldots} \parallel \ldots\overbrace{(C)\ldots} \parallel \ldots\overbrace{(C)\ldots} \perp \ldots\overbrace{(P)\ldots} \perp \ldots C= \\ (C''_3P^{\perp})^b = & C^{+}\ldots \parallel \ldots\underbrace{(C)\ldots} \parallel \ldots\underbrace{(C)\ldots} \perp \ldots\overbrace{(P)\ldots} \perp \ldots C= \\ (C''_3P^{\perp})^a = & C^{+}\ldots \parallel \ldots\underbrace{(C)\ldots} \parallel \ldots\underbrace{(C)\ldots} \perp \ldots(P)\ldots \perp \ldots C= \\ (C''_3P^{\perp})^c = & \overbrace{C^{+}\ldots} \parallel \ldots\overbrace{(C)\ldots} \parallel \ldots\underbrace{(C)\ldots} \perp \ldots\underbrace{(P)\ldots} \perp \ldots C= \end{array}$$

A la simple inspeccion de esas fórmulas puede observarse que es dable leerse ó escribirse lo mismo comenzando por la derecha que por la izquierda, y se observa además que el segundo y el tercero mecanismos tienen absolutamente la *misma fórmula*. Con efecto, en ambos el miembro fijo es de la forma C... ‖ ...C; además á uno de los lados se encuentra un miembro C... ‖ ...C, y al otro, otro miembro C...⊥...P, que están reunidos ambos á dos por un miembro C...⊥...P. La

diferencia entre esos dos mecanismos, que, sin embargo, es muy grande, conforme hemos visto, *se funda únicamente en la relacion que hay entre las longitudes a* y *b*. Esa diferencia se encuentra espresada con las calificaciones *oscilante* y *rotatorio*, que se añade respectivamente en cada uno de estos casos á la denominacion de manubrio de corredera.

Un parentesco enteramente análogo existe entre el primero y el cuarto mecanismos. En ambos el soporte es de la forma C...⊥...P; y en ambos se encuentra entre dos miembros, C... ‖ ...C y P...⊥...C, reunidos á su vez por un miembro C... ‖ ...C. La sola diferencia notable que aquí existe entre esos dos mecanismos, dimana de la relacion de las longitudes *a* y *b*. Está caracterizada en cada uno de ellos por las espresiones *rotativo* y *oscilante* añadidas respectivamente á la denominacion general.

Finalmente, si observamos que en los cuatro mecanismos los dos miembros acoplados, de la forma C...⊥...P, que constituyen la correderita *c* y la corredera *d*, son absolutamente de la misma clase, puede decirse que en realidad no existe entre esos diversos mecanismos *ninguna diferencia cinemática*. Por sorprendente que á primera vista pueda parecer esta circunstancia, no deja de ser exacta y merece cabalmente llamar la atencion, si queremos habituarnos á comprender rápidamente los mecanismos; nos limitaremos con ese objeto á recordar el ejemplo de la fig. 216. Las cadenas representadas por las cuatro figs. 220, 221, 222 y 213 son cinemáticamente idénticas de todo punto. Las diferencias de aspecto que ostentan, dimanan únicamente de la propiedad de inversion de los acoplos inferiores, que puede siempre aprovecharse y sobre la cual hemos insistido ya en el párrafo 16 no sin razon, como ahora hemos visto.

§ 70

Cadena de manubrio de impulso isóceles.

Antes hemos observado que los mecanismos $(C''_3\ P^{\perp})^b$ y $(C''_3\ P^{\perp})^a$ no se diferencian uno de otro sino porque se habia supuesto $b > a$; á esta circunstancia exactamente de igual género se debe la diferencia entre los otros dos mecanismos $(C''_3\ P^{\perp})^d$ y $(C''_3\ P^{\perp})^c$, derivados de la misma cadena. Por lo tanto, debemos llegar á una forma intermedia para cada uno de los dos casos, si suponemos $a=b$. Así obtenemos una cadena que está representada con la fig. 173, y de la cual ya antes ha sido cuestion en el párrafo 47. Los miembros *a* y *b* son iguales por hipótesis; pero lo mismo ocurre igualmente entre los otros dos miembros *c* y *d*, puesto que de una manera general estos miembros en la cadena $(C''_3\ P^{\perp})$ son iguales y de una longitud infinita. Los miembros iguales dos á dos son contíguos, y por ende nos encontramos aquí en presencia de la misma disposicion *general* que hemos encontrado ya en el mecanismo de manubrio isóceles de la fig. 174. La cadena de que aquí nos ocupamos, es pues, un caso particular de la cadena de la cual deriva ese mecanismo, y por lo tanto, podremos designarla con el nombre de *cadena de manubrio de impulsion isóceles*.

Ya en el párrafo 47 hemos tratado de las trayectorias polares de esa cadena. Son dos acoplos de círculos de *Cardan;* los círculos pequeños corresponden á *a* y *b*, los mayores á *c* y *d*, la relacion 1 : 2 entre sus periferias se ostenta aquí como una propiedad general del cuadrilátero de manubrio isóceles, puesto que lo hemos ya hecho constar en este último, por más que sus trayectorias polares tuviesen entonces una forma infinitamente complicada: ahí llega el limite al cual tiende esa forma que aquí encontramos en toda su sencillez.

Los cuatro mecanismos de la cadena de manubrio de impulsion se reducen á dos en el caso actual. El primero está representado por la fig. 173; omitiendo el indicar la clausura por acoplo superior tiene esta fórmula: $(C''_2 \leqq C''P^{\perp})^{d=c}$. La fijacion de la cadena en *c* da el mismo mecanismo que la fijacion en *d*, y esa es la razon porque los dos símbolos *c* y *d* figuran como esponentes en la fórmula, con el signo de igualdad. Por lo tocante á la denominacion podemos, conforme á lo que antecede, adoptar la de *manubrio de impulsion rotatoria isóceles*.

Fijando la cadena en *a* (ó en *b)* se obtiene el segundo mecanismo que representa la fig. 223, y cuya fórmula es: $(C''_2 \leqq C''P^{\perp})^{a=b}$. El manubrio *a* se ha convertido en puente y *b* en manubrio; la correderita *c* trasmite el movimiento de rotacion de esa última á la corredera móvil *d* ó *vice-versa*. Daremos á ese mecanismo el nombre de *manubrio de corredera rotatoria isóceles*.

Los miembros *b* y *d* giran en círculo y en el mismo sentido con una relacion de velocidades angulares constante, igual á 2 : 1, exactamente como si *b* y *d* fuesen dos ruedas dentadas de engranaje interior, cuyos números de dientes estuviesen en la relacion 1 : 2. En realidad el mecanismo de engranaje de la fig. 224, en el cual *a* no tiene más que dos dientes de perfil cilíndrico, presenta una grande analogia con el mecanismo anterior, por más que tenga un miembro ménos: la rueda *b* de cuatro dientes corresponde á la corredera rotatoria *d*. La analogia se ofrece ménos pronunciada

cuando se emplean ruedas de 3 y de 6 dientes, como en la fig. 225, y desaparece casi por completo cuando se usan formas de dientes diferentes. Por lo demás tales mecanismos tienen entre sí un grado de evidente parentesco, como quiera que las trayectorias polares de las piezas comparables están coincidiendo. Así pues, nos encontramos aquí con un ejemplo interesante de la solucion de un mismo problema cinemático por el empleo de mecanismos distintos.

El movimiento de la correderita *c* merece todavia llamar la atencien. Tiene por trayectoria polar con respecto á *b* un círculo mayor de Cardan, descrito en 3, mientras que el círculo conjugado, la mitad más pequeño, debe considerarse como ligado invariablemente al puente *a* y tiene su centro en 2. Este último círculo *cubre* por consiguiente el pequeño círculo de Cardan del miembro *b*. Para comprender fácilmente el movimiento de *c*, basta, pues, imaginar que el gran círculo de Cardan 3 gira sobre el pequeño círculo 2 que se supone fijo. De ahí resulta que todas las trayectorias de la correderita *c* son peritrocoides.

§ 71

Ensanche de los gorrones en la cadena del manubrio de impulsion.

Hasta aquí no nos hemos ocupado de los diámetros de los acoplos de cilindros que entran en la composicion de los mecanismos de manubrio.

En realidad ninguna influencia tienen sobre las leyes del movimiento las variaciones en la dimension de los elementos, cuando las trayectorias polares no están afectadas por esas variaciones. Sin embargo, la cuestion de las dimensiones merece aquí un exámen especial, porque en la manera de tratar la cinemática admitida hasta ahora ha estribado á veces la causa de cierta oscuridad, ocultando la verdadera naturaleza de los mecanismos. En ese exámen nos limitaremos por de pronto á la cadena de manubrio $(C''_3P^{\perp})$, limitándonos ante todo especialmente á las variaciones de la relacion de dimensiones de los *tres acoplos de cilindros* que encierra. Fácil nos será estender enseguida los resultados hallados á los demás casos.

Los tres acoplos de cilindros 1, 2 y 3 (fig. 163) que se encuentran en la cadena $(C''_3P^{\perp})$, pertenecen más ó ménos á todos esos miembros, y pueden de consiguiente por su grandor de ejecucion, ejercer una influencia en la forma de dichos miembros, sin poder, empero, alterar las leyes del movimiento. Es evidente que bajo el concepto cinemático en nada modificamos la cadena en cuestion, si, por ejemplo, reducimos el cilindro lleno ó el gorron del acoplo 1, que pertenece al manubrio *a*, á tener un diámetro bastante grande para que el perfil 2 llegue á caer *en el interior* del perfil de 1 (fig. 226.) En esa figura hemos marcado suficientemente la amplificacion, ó como se dice, el *ensanche* (a), para que el perfil del gorron 2 caiga completamente en la porcion del espacio ocupada por el gorron 1. El cilindro hueco que se encuentra en *d*, debe á su vez ensancharse en la medida misma que el cilindro 1, á fin de continuar envolviéndola como antes. Esa disposicion que se puede resumir diciendo que «2 está encerrado en 1», se encuentra en algunos aparatos de la mecánica práctica, en ciertas máquinas de taladrar, de cortar el hierro, etc., en las que el manubrio, de escasa longitud, está forjado de una sola pieza con su eje.

Si en vez del gorron 1 se ensancha el gorron 2 en una medida tal que 1 se encuentre contenido en el interior de 2, se realiza una cadena de forma especial que se representa con la figura 227. Suponiendo esa cadena fija en *d* y tomando *a* como miembro motor de manera que se obtenga un mecanismo cuya fórmula sea $(C''_3P^{\perp})^{\frac{d}{a}}$, se tiene en presencia un dispositivo de uso muy general, en el que el manubrio *a* suele designarse con el nombre de *escéntrico circular*, de *disco escéntrico*, ó más simplemente de *escéntrico*. Se ve que este manubrio no se diferencia del ordinario más que bajo un solo punto de vista, el de la construccion.

Fijando la cadena en *a*, en cuyo caso se consigue el manubrio de corredera rotatoria $(C''_3P^{\perp})^a$, se realiza otra disposicion que igualmente se utiliza en la práctica, y precisamente en la forma introducida por *Wilhworth* (fig. 228), en la cual *b* desempeña el papel de miembro motor, lo que conduce á darle por fórmula $(C''_3P^{\perp})^{\frac{a}{b}}$. Ese mecanismo sirve para producir «el retorno (ó vuelta) rápido,» y en su obra intitulada «Bewegungs—Mechanismen,» *Redtenbacher* lo designó con el nombre de manubrio de corredera encubierta. En la figura, la biela con su dispositivo de desplace no pertenece á la cadena como tampoco la rueda dentada. Conviene en cambio notar en el *cuerpo* de la rueda dentada el lazo *b* que por un lado lleva el gorron (hueco) 2 y por otro el gorron 3, por medio del cual se liga con la correderita *c*, que á su vez se desliza por el prisma hueco de la corredera *d*.

En el caso en que el gorron esté ensanchado lo bas-

(a) Aproximar esa idea del ensanche á la de los perfiles equidistantes de que se habla en el § 35.

tante para que pueda contener 3, se cae en la disposicion que representa la figura 229 y en la que el cilindro 2, perteneciente al manubrio *a*, está ejecutado como un cuerpo de rotacion hueco. El lazo *b* tiene la forma de un disco escéntrico que oscila en derredor del cilindro lleno 3 de la correderita *c*, mientras que á su vez está completamente rodeado por el anillo del manubrio *a* que gira sobre él.

En vez de encerrar 3 en 2, se puede hacer lo inverso y colocar 2 en 3 como lo indica la fig. 230. El lazo *b* es tambien aquí un disco escéntrico que oscila en el anillo trabado con la correderita *c* y en el cual está metido el boton de manubrio 2. Las líneas auxiliares trazadas en la figura tienen por objeto dar al lector mayor facilidad, para que se dé cuenta de la forma del mecanismo, la cual no es ordinaria ni se descubre claramente á primera vista, cuando el ojo no está bastante esperto en abstracciones de esse linaje.

En la cadena del manubrio de impulsion hemos llegado, pues, á realizar cuatro modos diferentes de ensanche que respectivamente corresponden á:

2 en 1 (fig. 226)
1 » 2 (fig. 227)
3 » 2 (fig. 229)
2 » 3 (fig. 230)

Así hemos apurado el número de las combinaciones dos á dos de los tres gorrones 1, 2, 3. Ahora podemos ir más adelante y emprender el estudio de las combinaciones ternarias. Puesto que 1 puede estar incluido en 2, y por otro lado, 2 en 3, nada impide en efecto suponer que las dos cosas ocurren al propio tiempo y por lo tanto podemos colocar:

1 en 2 en 3

así como:

3 en 2 en 1.

Esas dos disposiciones están representadas en las figuras 231 y 232, las cuales ambas á dos se refieren al caso del manubrio de impulsion rotatoria $(C'_3P^{\perp})^d$, es decir, corresponden á la hipótesis de la fijacion en el miembro *d*.

Quizás podria acontecer que ciertos lectores sintiesen una impresion de que ese estudio sistemático del procedimiento del ensanche de los gorrones, se aparta demasiado del dominio práctico para tener una importancia esencial en las aplicaciones de la cinemática; pero no es ese el caso, como nos lo demostrarán las siguientes consideraciones.

Refiriéndonos una vez más al cuarto modo de ensanche, en virtud del cual 2 se encuentre en 3, y examinando la cuestion más detenidamente, vemos que el miembro *c* puede tambien suponerse provisto de una saliente central cilíndrica, que penetre en una cavidad correspondiente del miembro *b* (fig. 233). Admitamos que *d* sea tambien el miembro fijo. El lazo *b* se encuentra entonces trasformado en un anillo de seccion rectangular, que efectua sus movimientos oscilatorios en la cavidad anular de la correderita *c*. Con esto no hemos introducido cambio ninguno en el mecanismo, puesto que el acoplo de elementos 3, de una manera general no es más que un acoplo de rotoides cerrado, cuyo perfil puede escojerse arbitrariamente, bajo la sola condicion de que la *clausura* del acoplo se encuentre constantemente asegurada. Partiendo de ahí podemos introducir otras modificaciones en ese acoplo. Si admitimos ante todo que la fuerza motriz se trasmita por el manubrio *a*, es decir, que la fórmula del mecanismo sea $(C''_3P^{\perp})^{\frac{d}{a}}$, tenemos que ocuparnos del movimiento alternativo de la correderita *c*. Observando ahora que el lazo *b* en la carrera hácia la derecha se encuentra apoyado lo mismo en A que en D, en tanto que en la carrera hácia la izquierda está en B y en C, vemos inmediatamente que ese *doble apoyo* puede muy bien en cada caso reemplazarse con un *apoyo simple*, lo que puede hacerse de diferentes maneras. El método más sencillo consiste en *cortar en el anillo b* entorno del gorron 2, un *sector* que la figura indica en punteado, y en dejarlo subsistir solo. En la carrera á la derecha este sector se apoyará en A con la correderita, mientras que en la carrera á la izquierda el apoyo se efectuará en B, y en definitiva cumplirá su movimiento oscilatorio en la ranura de *c*. De donde resulta que no tenemos necesidad de conservar sino una parte de esa ranura en una longitud simplemente bastante, para dejar á uno y otro lado el juego necesario para el sector *b*.

La disposicion así modificada se representa con la figura 234. No debemos perder de vista que, como antes, *b* es el *lazo*, el cual *en razon de su intercalacion en la cadena*, está completamente cerrado ó es de movimiento desmodrómico, y que así mismo la correderita *c* tiene todavia las partes cinemáticas que poseia primitivamente; *b* es como antes un miembro de la forma C... || ...C, uno de cuyos cilindros, el que es hueco, rodea el gorron 2 del manubrio, mientras que el otro se adapta con un apoyo suficiente en la rotoide hueca de la correderita *c*, moviéndose con respecto á él absolutamente lo mismo que en el caso anterior, es

decir, oscilando entorno del mismo eje. Si queremos introducir las notaciones apropiadas á los dos miembros *b* y *c*, tales como están ejecutados, es necesario reemplazar para entrambos el símbolo del cilindro completo en el acoplo 2 con el de un sector ó de un arco, y por consiguiente tendremos:

$$\overbrace{C^{-}\ldots \parallel \ldots A}^{b} \stackrel{+}{=} \overbrace{A^{-}\ldots \perp \ldots P^{+}}^{c}$$

Con ello se indica al propio tiempo que un acoplo de la forma $C\stackrel{+}{=}C^{-}$ ó $C\stackrel{=}{=}C^{+}$ puede siempre y cuando su movimiento consiste tan solo en oscilaciones de escasa amplitud, reemplazarse con un acoplo de la forma $A\stackrel{+}{=}A^{-}$ ó $A\stackrel{=}{=}A^{+}$, esto es, que en semejante caso se puede tomar:

$$(C)=(A)$$

Ese reemplazo de un acoplo de cilindros por un acoplo de arcos ó por una corredera curva con su correderita, se ha presentado ya una vez á principios del párrafo 69. Ahora vemos que ese reemplazo está en realidad plenamente justificado, lo que equivale á decir que de ningun modo modifica la cadena.

En muy grandes proporciones utiliza la práctica las propiedades que acabamos de señalar; ó en otros términos, con frecuencia recurre al ensanche de los gorrones. El mecanismo anterior (fig. 234) es conocido y aplicado, por más que hasta ahora no se haya considerado como equivalente del manubrio rotatorio comun. Se ha demostrado que en virtud de la rotacion del manubrio la correderita *se mueve exactamente* como si estuviese ligada á ese manubrio con una biela de una longitud igual al radio de curvatura de la corredera. Más no se ha observado que la correderita forma realmente esa biela misma, ó el lazo. El corto espacio que exije el arco de corredera, constituye una ventaja séria en gran número de casos en que se tiene que usar el mecanismo de manubrio. Nos limitaremos á recordar aquí como ejemplos muy conocidos las aplicaciones que se hacen de este arco de corredera, para las distribuciones de vapor en las locomotoras *Stephenson, Gooch,* etcétera; más no tenemos que ocuparnos aquí de estos dispositivos, que no son mecanismos de manubrios simples, sino de los mecanismos compuestos, en los cuales el reemplazo de (C) por (A) es esencial y se efectua de varias maneras diferentes (V. § 16).

Otro ejemplo del ensanche de los gorrones nos proporciona el mecanismo señalado con la fig. 235, que se encuentra en ciertas máquinas de taladrar. Ese mecanismo es un manubrio rotatorio, cuya fórmula es $(C''_{3}P^{\perp})^{\frac{d}{a}}$. El miembro *b*, ó sea el lazo, tiene por lo que toca al cilindro 3 una disposicion semejante á la que hemos indicado antes. Pero aquí esa pieza termina á uno y otro lado del gorron 2 con dos *arcos convexos*, el uno de radio grande y el otro de radio muy pequeño, los cuales permanecen siempre en contacto con los arcos cóncavos correspondientes que deben estar dispuestos en la correderita *c*. Esa correderita *c* está además encajada por el puente *d*, de suerte que el gorron 3, compuesto de dos partes terminadas por arcos convexos, cae en el interior del prisma 4. Por consiguiente nos encontramos aquí en presencia de una nueva disposicion de los elementos del mecanismo de manubrio, en virtud de la cual 2 está en 3 y además 3 en 4; es un ejemplo de la manera como el procedimiento de ensanche puede igualmente estenderse al cuarto acoplo.

El mecanismo de la figura 236 demuestra que inversamente se puede tambien colocar 4 en 3. El gorron 3 del miembro *c* está establecido aquí con dimensiones bastantes para que pueda comprender el prisma hueco del acoplo 4. En tal caso el cilindro hueco 3 que pertenece al lazo *b* oscila entorno de la correderita *c*; este cilindro está además provisto de muescas destinadas á evitar que vaya á encontrar el puente *d*. Fácil es determinar el tamaño que se ha de dar á esas muescas trazando, como lo indica la figura, las dos posiciones del eje del puente, por las cuales se encuentra en el máximo de separacion de *b*. En esas dos posiciones el manubrio *a* se encuentra perpendicular al puente *d*. Nos reservamos examinar más adelante algunas aplicaciones de esa forma particular de ensanche.

De una manera general el ensanche de los gorrones conduce, como se ve, á cambios de forma sorprendentes del mecanismo de manubrio, cambios que por un lado pueden haber tenido á veces el inconveniente de disfrazar el orígen del mecanismo, más que por otro lado presentan amenudo sérias ventajas para la construccion. Lo mismo sucede tambien con otros mecanismos. Varios dispositivos conocidos se encuentran en cierto modo iluminados con nueva luz, cuando se reducen los arcos de corredera, que puede encerrar, á su forma fundamental C... ‖ ...C; y otros toman por el procedimiento de inversion una forma mucho más adecuada al uso práctico que la que habria podido dársele de otra manera.

§ 72

Cadena de corredera en cruz rectangular $(C''_3P^{\perp}_{2})$.

El procedimiento que permite reemplazar un acoplo oscilante (C) con el acoplo (A) para obtener un miembro oscilante de la cadena de manubrio, lo hemos utilizado ya en el párrafo 69, al reducir á la forma de la correderita el oscilador *c* supuesto de longitud infinita. Si ahora aplicamos el mismo procedimiento al lazo *b* de la cadena de manubrio de impulsion, podemos tambien suponer infinitamente largo ese lazo, que en la disposicion de la figura 234 desempeña ya el papel de correderita con respecto á la corredera curva. En tal caso la corredera de *c* es rectilinea y perpendicular á la línea de union 1,4; en tanto que el lazo se trasforma en correderita prismática, en la cual está fijo normalmente un cilindro 2, como lo indica la figura 237. La fórmula completa de la nueva cadena será comenzando por el manubrio *a:*

$$\overset{a}{\frown}\quad\overset{b}{\frown}\quad\overset{c}{\frown}\quad\overset{d}{\frown}$$
$$C^{+}\ldots\parallel\ldots C^{\pm}C^{-}\ldots\perp\ldots P^{\pm}P^{-}\ldots\perp\ldots P^{\pm}P^{-}\ldots\perp\ldots C^{=}$$

El miembro *c* se ha trasformado así en una cruz de prismas rectangulares, que puede considerarse como una corredera, porque amenudo uno de los prismas se efectua como en nuestra figura bajo la forma de prisma hueco, y que aun á veces entre ambos tienen esa última forma, como en la fig. 242. Nos proponemos designar esa corredera con el nombre de *corredera en cruz* y en el caso particular con el de *corredera en cruz recta* ó *rectangular;* de manera que toda la cadena tomará el nombre de *cadena de corredera en cruz rectangular*. El manubrio *a* ha quedado como era primeramente, pero el lazo *b* ha tomado la forma C...⊥...P.

Para reducir la fórmula anterior á la forma concentrada basta observar que la cadena se compone de dos acoplos de cilindros paralelos y de dos acoplos de prismas perpendiculares el uno al otro: esta fórmula deberá pues escribirse: $(C''_3P^{\perp}_{2})$.

Mecanismo $(C''_3P^{\perp}_{2})^{d}{=}^{b}$.—Para estudiar los diferentes mecanismos que pueden derivarse de la cadena precedente, comenzaremos por fijarla en *d;* entonces podemos notar inmediatamente que en concepto cinemático el lazo *b* es enteramente equivalente al puente *d* y se encuentra exactamente dispuesto como él en la cadena, es decir, con un miembro C... ‖ ...C, por un lado, y un miembro P...⊥...P, por el otro. De ahí resulta que los dos mecanismos $(C''_3P^{\perp}_{2})^{d}$ y $(C''_3P^{\perp}_{2})^{b}$ son idénticos. Suponiendo *d* fijo se obtiene el mecanismo representado por la fig. 237. Como deriva del *manubrio rotatorio,* en el cual se supone el lazo infinitamente largo, podemos designarlo con el nombre de *manubrio de corredera rotatorio,* en tanto que el mecanismo $(C''_3P^{\perp}_{2})^{b}$ que deriva del *manubrio de corredera oscilante,* tomará el nombre de *corredera en cruz oscilante.* Los movimientos de esos mecanismos son de índole muy sencilla. Las trayectorias polares entre *a* y *c* son círculos de Cardan, el más pequeño de los cuales está descrito en *a* como diámetro, mientras que el mayor tiene esa misma longitud por rádio, y por centro el medio de la correderita en cruz *c* (fig. 237). Para *b* y *d* las trayectorias polares vienen á ser infinitamente grandes y deben por consiguiente reemplazarse con las trayectorias polares secundarias, las cuales indican que relativamente á *d, b* describe por todos sus puntos círculos de igual tamaño, lo que equivale á decir que se mueve siempre paralelamente á su posicion primitiva. Esas últimas trayectorias se han omitido en la figura.

El manubrio de corredera rotatoria se emplea con bastante frecuencia. Sobre todo ha encontrado numerosas aplicaciones en las bombas de vapor, en donde se utiliza como mecanismo de movimiento bajo la forma $(C''_3P^{\perp}_{2})^{\frac{d}{a}}$. Una propiedad que en ciertos casos es muy ventajosa consiste en que el manubrio con un movimiento de rotacion uniforme imprima á la pieza *c* «un movimiento alternativo puro y simple.»

Mecanismo $(C''_3P^{\perp})^{a}$.— Cuando se hace la fijacion en *a,* los miembros *b* y *d* tienen ejes de rotacion fijos en 2 y 1; la corredera en cruz *c* gira alrededor de *a,* girando entonces su gran círculo de Cardan sobre el pequeño que está inmóvil. La fig. 238 representa el mecanismo que así se obtiene y que designaremos con el nombre de *corredera en cruz rotatoria.* Los miembros *b* y *d* son cinemáticamente equivalentes, por más que en la figura estén representados de una manera muy diversa: giran constantemente los dos sobre ángulos iguales.

Ese mecanismo ha dado orígen á varias aplicaciones prácticas. Una de las más interesantes es la que se ha hecho en la juntura de *Oldham* (a) (fig. 239) utilizada para la trasmision de un movimiento de rotacion uniforme entre dos árboles paralelos. Tiene por fórmula $(C''_3P^{\perp}_{2})^{\frac{a}{d}}$ ó $(C''_3P^{\perp}_{2})^{\frac{a}{b}}$. La armadura de los soportes de ambos árboles es el puente *a;* el disco intermedio es el

(a) En el *Constructor* veremos descrita con todos sus detalles esa articulacion denominada juntura de *Oldham.*

miembro *c;* la corredera en cruz tiene por fórmula $P^{\perp}...\perp...P^{\perp}$; los dos árboles con sus mangos de acoplamiento son las piezas *b* y *d*. Para mayor claridad esos tres últimos miembros se han reproducido aisladamente en la figura 240.

La propiedad del mecanismo $(C''P^{\perp}_{2})^{1}$ que se utiliza esencialmente en la juntura de *Oldham*, es la uniformidad del movimiento de rotacion de las piezas *b* y *d*. La juntura de *Oldham* encontró una aplicacion original en el singular barco submarino (el barco cigarro) de los hermanos *Winan*.

Otra aplicacion igualmente muy notable del mismo mecanismo es el *torno oval* (fig. 241) que en lo que podemos saber, fué inventado ó á lo ménos estudiado por *Leonardo de Vinci*, el gran artista. Aquí la propiedad de la cadena que se encuentra especialmente utilizada, es aquella en virtud de la cual todos los puntos sujetos invariablemente al más pequeño de los dos círculos de *Cardan*, es decir, en el caso actual al puente *a*, describen *elipses* (a) con respecto á la pieza que corresponde al círculo grande. En la máquina encontramos en el cuerpo *c* del disco plano la corredera en cruz formada por los dos prismas que forman saliente en la faz posterior y que se cruzan en ángulo recto. En uno de los dos se encaja el prisma lleno 3 unido invariablemente al árbol *b* del tronco. La armadura *a* ó la muñeca fija, forma con el árbol *b* el acoplo de cilindros 2. En la armadura está fijo con pernos ó clavijas uno de los cilindros de acoplo 1, el que corresponde á *a;* tiene la forma de un anillo por el cual pasa libremente el árbol *b*, y está por consiguiente *ensanchado* (§ 70), de manera que 2 esté contenido en 1. La pieza *d* que encaja el cilindro 1 con su cilindro hueco correspondiente, lleva por otra parte el prisma lleno 4, que se encaja en el segundo prisma hueco de la corredera en cruz *c*. La punta trazadora ó la herramienta P forma parte de la pieza en reposo ó del puente *a*. Las elipses que la punta de P describe, con respecto al plato, presentan entre sus semi-ejes, una diferencia igual á la longitud *a*, cuando esta punta P se encuentra fuera de *a;* pero cuando este punto está entre 1 y 2, *a* es la suma de los semi-ejes.

El tamaño de *a* es variable, tanto á lo ménos, como lo permite el ensanche del gorron 1, lo cual unido á la facultad de desplace que tiene P, da el medio de obtener la mayor variedad en las elipses descritas por el aparato; siendo *b* el miembro por el cual se da el movimiento, la fórmula completa del mecanismo debe escribirse $(C''_{2}P^{\perp}_{2})^{\frac{a}{b}}$. Podria igualmente disponerse la instalacion de suerte que el miembro *d*, que es de todo punto el equivalente de *b*, fuese el miembro conductor (V. § 76).

No debe perderse de vista que las trayectorias estando descritas desde los puntos del disco *c* por el círculo mayor de *Cardan* son peritrocoides. El centro de la corredera se desaloja sobre el pequeño círculo, y lo recorre dos veces por cada rotacion completa de *b* y *d*.

Mecanismo $(C''_{2}P^{\perp}_{2})^{c}$. — Fáltanos todavia examinar la fijacion de la cadena en el miembro *c*, que es la corredera en cruz. Esa fijacion da el *manubrio de corredera en cruz oscilante*, que con el nombre de *compás de elipses* y bajo diferentes formas, se emplea con frecuencia en la práctica para el dibujo en planchas, el grabado en las mismas, etc.; bajo una forma más tosca sirve igualmente para el trabajo de adorno (fig. 242.) El compás de elipses suele llevar tambien el nombre de *compás de carpintero*. La fórmula especial de este mecanismo es $(C''_{2}\ P^{\perp}_{2})^{\frac{c}{a}}$. *Charles* descubrió que entre ese instrumento y el torno oval de *Leonardo de Vinci* existe una relacion análoga á la que hemos señalado ya en el párrafo 3, y que es la consecuencia de la propiedad de las cadenas cinemáticas, designada por nosotros con el nombre de *inversion*, y debemos añadir que la verdadera ley en que descansa esa relacion habia escapado á dicho eminente investigador.

La cadena $(C''_{2}\ P^{\perp}_{2})$ tiene como se ve, muy estensas aplicaciones, pero más aun que otras muchas cadenas se halla disimulada en sus aplicaciones prácticas por las formas accesorias; por cuya razon hasta hoy se habia permanecido en la ignorancia más completa sobre la íntima conexion que tiene con otras cadenas.

§ 73

Cadena de manubrio de impulsion desviada.

La riqueza muy grande ya de formas que puede ostentar la cadena de manubrio, es aun susceptible de un aumento considerable, como quiera que en la cadena del manubrio de impulso $(C''_{3}\ P^{\perp})$, así como en sus diversas trasformaciones, nada obliga á suponer de longitud igual los miembros para los cuales se admite que dicha longitud aumenta indefinidamente. Eso es lo que con facilidad se concibe observando que los puntos de partida de las piezas que se suponen de lon-

(a) *Laboulaye* en su *Cinemática*, pág 863 intenta demostrar que las curvas descritas en el torno oval de *Leonardo de Vinci* no son rigurosamente elipses; pero está en un error. Más adelante volveremos sobre ese mecanismo, párrafo 76, dándole una forma un poco diferente.

gitud infinita, se encuentran en la parte finita que corresponde á nuestro espresado mecanismo, y que por lo mismo el grandor infinito de dichas piezas no hace desaparecer las diferencias de las posiciones respectivas de tales puntos de partida. Someramente vamos á examinar las nuevas formas que resultan de ese género de consideraciones.

Si en la cadena de manubrio (C''_4) de la fig. 212 suponemos infinitamente largos los miembros *c* y *d*, y al propio tiempo hacemos *c* mayor que *d*, obtendremos las cadenas representadas por las figs. 243 y 244. La direccion del impulso en que se mueve la articulacion 3 con respecto al miembro *d*, no pasa ya por el punto 1 y se encuentra á una distancia de ese punto, igual á la diferencia *c*—*d*. La cadena resultante, que designaremos con el nombre de *cadena de manubrio de impulso desviado*, tendrá por notacion:

$$C^{+}... \parallel ...C\overset{\pm}{=}C^{-}... \parallel ...C\overset{=}{=}C^{+}...\perp...P\overset{\pm}{=}P^{-}...+...C\overset{=}{=} \text{ (fig. 243).}$$

ó

$$C^{+}... \parallel ...C\overset{\pm}{=}C^{-}... \parallel ...C\overset{=}{=}C^{+}...+...P\overset{\pm}{=}P^{-}...\perp...C\overset{=}{=} \text{ (fig. 244).}$$

En esas fórmulas en vez del signo correspondiente á *rectangular* hemos introducido en el miembro *c* ó el miembro *d*, el signo que espresa *normal ó cruzado en ángulo recto.*

Puesta en forma concentrada la fórmula es (C''_3P^{+}). Esa cadena, como la cadena más sencilla ($C''_3P^{\perp}$), da *cuatro* mecanismos que corresponden á las cuatro fijaciones en *d*, *b*, *a* ó *c*. Las denominaciones pueden ser las mismas que antes, con la sola condicion de añadirles el adjetivo *desviado*. Así obtenemos: el manubrio de impulso rotatorio $(C''_3P^{+})^{a}$, el manubrio de corredera oscilante desviada, etc.

Los movimientos que se efectuan con esos mecanismos, son más complicados en razon de la notable influencia que ejerce la disimetria de los miembros; pero conservan íntima conexion con los anteriores. Las aplicaciones que de ellos se hacen son sumamente raras. Una de las más originales es la que ha hecho *Schwartzkopff* en la llave de tuercas que representa la fig. 245; y es una llave universal automática, es decir, que se mueve por sí misma, con la separacion conveniente para el diámetro de la tuerca que debe hacer girar. Para oprimir el pestillo móvil *c* contra esa tuerca, se utiliza el mecanismo del manubrio de impulso rotatorio desviado $C''_3P^{+})^{d}$, bajo la forma especial $(C''_3P^{+})^{\frac{d}{a}}$. La pieza *a* que funciona como palanca, es el manubrio, que puede girar alrededor del manubrio 1 fijado en el puente *d*. Por mediacion del gorron 2 que lleva, actua sobre el lazo *b* articulado en 3 con la pieza deslizante *c*, y así comunica á esa última un movimiento de desplace en la direccion CD. 4 es el acoplo de prismas entre los miembros *c* y *d*. Haciendo girar el mango ó puño *a* en el sentido de la flecha, la tuerca se encuentra apretada entre el pestillo móvil y el puente *d* tanto más fuertemente cuanto más considerable es la presion ejercida sobre el puño. La tuerca y la llave llegan, por decirlo así, á formar un conjunto rígido, de suerte tal que la palanca *a* viene en cierto modo á ser un brazo de la tuerca y por lo tanto permite que gire para darle la presion ó aprieto necesario. Dando á la llave un movimiento de rotacion en sentido contrario se llega á poner la tuerca en libertad. Cada vez que la llave se aplica á una tuerca, el mecanismo (C''_3P^{+}) entra en actividad durante un escaso período de tiempo.

El manubrio de impulsion rotatoria desviada é isóceles $(C''_2\leqq C''P^{+})^{d=c}$ y el manubrio de corredera oscilante é isóceles $(C''_2\leqq C''P^{+})^{b=a}$ tienen mucha menor importancia que en la cadena de manubrio de impulsion simétrica; siendo además fácil imaginar mecanismos de ese género por analogia con aquellos que hemos estudiado en el párrafo 69.

Como mecanismos notables debemos aun señalar los que se obtienen haciendo $b=\infty$. En ese caso la corredera en cruz rectangular se trueca en *una corredera en cruz oblícua* (fig. 246), y entonces la fórmula de la cadena debe escribirse de este modo:

$$\overset{a}{\frown}\quad\overset{b}{\frown}\quad\overset{c}{\frown}\quad\overset{d}{\frown}$$
$$C^{+}... \parallel ...C\overset{\pm}{=}C^{-}...\perp...P\overset{\pm}{=}P^{-}...\angle...P.\overset{\pm}{=}P^{-}...\perp...C\overset{=}{=}$$

El signo de la *inclinacion normal* se encuentra así reemplazado por el de la *oblicuidad*. Poniendo en evidencia, como hasta aquí lo hemos hecho, los símbolos de relaciones características de los miembros, obtenemos para la fórmula concentrada: ($C''_3P^{\angle}_2$). Los miembros *b* y *d* se encuentran aquí tambien iguales y dispuestos á semejanza uno de otro, por lo cual podemos sacar, como antes, de esta cadena tres mecanismos, á saber:

Manubrio de cruz oblícua rotatoria. . . .
ó corredera en cruz oblícua oscilante. $(C''_2P^{\angle}_{2})^{d=b}$
Corredera en cruz oblícua rotatoria. . . $(C''_2P^{\angle}_{2})^{a}$
Manubrio de cruz oblícua oscilante. . . $(C''_2P^{\angle}_{2})^{c}$

Fuera de estos casos particulares la cadena de manubrio de impulsion desviada puede aun afectar dos formas especiales igualmente dignas de mencion. Esas formas se obtienen suponiendo que los *cuatro miembros pueden ser infinitamente grandes.*

Si hacemos $c=d=\infty$, como antes, y además $b=\infty$ y $a=\infty$, suponiendo, empero, $a<b$, se obtiene la cadena representada por la fig. 247, cuya fórmula es:

$$\overbrace{C^{+}...\perp...P^{\pm}}^{a}\overbrace{P-...+...C^{\pm}}^{b}\overbrace{C-...\perp...P^{\pm}}^{c}\overbrace{P-...\perp...C^{\mp}}^{d}$$

Podemos designar esa cadena con el nombre de *cadena de corredera angular de simple desviacion* y escribirla de una manera abreviada: $(CP^{+}CP^{\perp})$. Da cuatro mecanismos puesto que todos sus cuatro miembros están diversamente dispuestos. Si ahora se supone que c y d son de tamaño diferentes, si por ejemplo, se hace $a>c$ y se admite por último que la diferencia entre a y b no sea la misma que la que existe entre c y d, se obtiene la *cadena de corredera angular de doble desvio* representada por la fig. 248. Los miembros a y c están *semejantemente* dispuestos en la cadena, lo mismo que los miembros b y d, de modo que esa cadena no da más que dos mecanismos.

En los mecanismos derivados de las dos cadenas anteriores las trayectorias polares no están ya cerradas y todas tienen puntos de distancia infinita. La cadena de corredera angular de desviacion simple da márgen á varias aplicaciones prácticas.

§ 74

Cuadro recapitulatorio de los mecanismos de manubrio cilíndricos.

El número de mecanismos importantes que pueden formarse directamente con la cadena (C''_4) ó que puede deducirse de ellos es, como acabamos de ver, bastante considerable y parece por lo tanto conveniente presentarlos aquí en un cuadro recapitulatorio bajo una forma fácil de comprender. En este cuadro se agrega á la denominacion y á la fórmula de cada mecanismo una pequeña figura esquemática, en la que el miembro que se mantiene fijo se pone en relieve por medio de rayados. En cuanto al acoplamiento superior que puede ser necesario para ciertos mecanismos, se ha dejado de indicarlos.

A.—CUADRILÁTERO DE MANUBRIO (C''_4)

1. Manubrio rotatorio de impulsion curvilínea.. . . $(C''_4)^{d=b}$



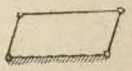
2. Manubrio doble rotatorio. . . . $(C''_4)^{a}$



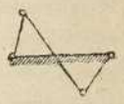
3. Manubrio doble oscilante. . . . $(C''_4)^{c}$



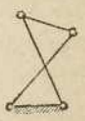
4. Manubrios paralelos. . . . . $(C''_2\|C''_2)^{d=b=a=c}$



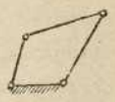
5. Manubrios antiparalelos de sentido contrario. . . . $(C''_2\geq C''_2)^{d=b}$



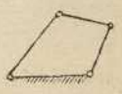
6. Manubrios antiparalelos de igual sentido. . . . $(C''_2\geq C''_2)^{a=c}$



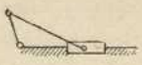
7. Manubrio doble rotatorio isóceles. $(C''_2\leq C''_2)^{d=a}$

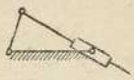


8. Manubrio doble oscilante isóceles. $(C''_2\leq C''_2)^{b=c}$

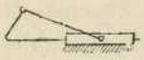


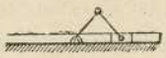
B.—CADENA DE MANUBRIO DE IMPULSION $(C''_3P^{\perp})^d$.

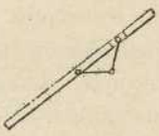
9. Manubrio de impulsion rotatorio. $(C''_3P^{\perp})^d$ 

10. Manubrio de corredera oscilante. $(C''_3P^{\perp})^b$ 

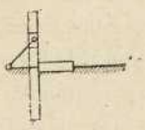
11. Manubrio de corredera rotatorio. $(C''_3P^{\perp})^a$ 

12. Manubrio de impulsion oscilante. $(C''_3P^{\perp})^c$ 

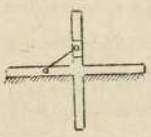
13. Manubrio de impulsion rotatorio isóceles. . . . $(C''_2 \leqq C''P^{\perp})^{d=c}$ 

14. Manubrio de corredera rotatorio isóceles. . . . $(C''_2 \leqq C''P^{\perp})^{a=b}$ 

C.—CADENA DE CORREDERA EN CRUZ RECTANGULAR $(C''_2P^{\perp}_2)$.

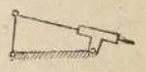
15. Manubrio de corredera en cruz rotatorio ó Corredera en cruz oscilante. . . . $(C''_2P^{\perp}_2)^{d=b}$ 

16. Corredera en cruz rotatoria.. . . . . $(C''_2P^{\perp}_2)^a$ 

17. Manubrio de corredera en cruz oscilante. $(C''_2P^{\perp}_2)^c$ 

D.—CADENA DEL MANUBRIO DE IMPULSION DESVIADA (C''_3P^{+}).

18. Manubrio de impulsion rotatoria desviada. . . . $(C''_3P^{+})^d$ 

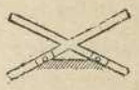
19. Manubrio de corredera oscilante desviada. . . . $(C''_3P^{+})^b$ 

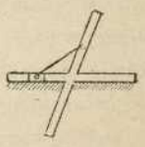
20. Manubrio de corredera rotatoria desviada. . . . $(C''_3P^{+})^a$ 

21. Manubrio de impulsion oscilante desviada. . . . $(C''_3P^{+})^c$ 

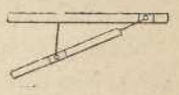
E.—CADENA DE CORREDERA EN CRUZ OBLÍCUA $(C''_3P^{\angle}_2)$.

22. Manubrio de cruz oblícua rotatoria ó Corredera en cruz oblícua oscilante. . $(C''_2P^{\angle}_2)^{d=b}$ 

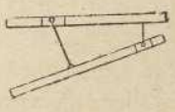
23. Corredera en cruz oblícua rotatoria. . . $(C''_2P^{\angle}_2)^a$ 

24. Manubrio de cruz oblícua oscilante. . . $(C''_2P^{\angle}_2)^c$ 

F.—CADENA DE CORREDERA ANGULAR DE SIMPLE DESVIO $(CP^{+}CP^{\perp})$.

25 á 28. Cuatro mecanismos. 

G.—CADENA DE CORREDERA ANGULAR DE DOBLE DESVIO $(CP^{+})_2$.

29 á 30. Dos mecanismos. 

Ese cuadro recapitulatorio muestra de la manera más evidente que el análisis cinemático á que hemos recurrido, era necesario hasta para aprender á conocer una cadena tan sencilla en apariencia como lo es la cadena (C''_4) ú otra cualquiera de las que derivan de la misma. Podemos igualmente hacer notar aquí la conveniencia de adoptar nombres determinados para los mecanismos que se encuentran más amenudo entre los que el análisis suministra. Esos nombres, como hemos visto, se han escogido con el mayor cuidado y de una manera sistemática, de suerte tal que fuesen muy fáciles de grabarse en la memoria, máxime yendo acompañados de las fórmulas correspondientes. Desde el momento en que permiten prescindir de las disposiciones accesorias, ofrecen la ventaja de indicar enseguida al cinemático lo que constituye realmente la esencia de las construcciones de formas múltiples que presenta la práctica de las máquinas. Vamos por otro lado á ver que aun limitándonos á lo indispensable, distamos mucho de haber apurado toda la série de mecanismos que pueden establecerse con cuatro acoplos de cilindros, y que todavia nos falta trabar conocimiento con una nueva familia de mecanismos semejantes.

§ 75

Cuadrilátero de manubrio cónico (C^c_4).

Si los ejes de los cuatro acoplos de rotoides que constituyen la cadena (C''_4) en vez de ser paralelos como hasta aquí hemos supuesto, están dispuestos de manera que se corten en un solo y mismo punto, la cadena obtenida es todavia móvil como antes, amen de que en idénticas circunstancias queda cerrada. Las axoides no son ya en tal caso cilindros, sino conos que tienen todos como punto comun el punto de encuentro de los ejes de rotacion. Por consiguiente todos los miembros tienen, con respecto unos á otros, un movimiento de «arrollo cónico» tal como el que hemos estudiado en el párrafo 10 para simples acoplos de cuerpos. Supongamos que las longitudes de los miembros considerados como arcos de círculos máximos de una esfera cuyo centro coincide con el punto de encuentro M de los ejes (fig. 249), tengan entre sí relaciones idénticas á las que hemos admitido en el párrafo 65 para la cadena (C''_4), es decir que se tenga:

$$a+b+c>d, \qquad a+d+c>b$$
$$a\leqq c,$$

la cadena afecta entonces una forma de la cual puede darnos una idea la misma fig. 249. Podemos designar una cadena de esa índole con el nombre de *cuadrilátero de manubrio cónico* ó de *cadena de manubrio cónico de cuatro miembros*. Se encuentra íntimamente ligada á la cadena cilíndrica, que en rigor hasta puede considerarse como una cadena cónica, en la cual el punto de encuentro M de los ejes llegase al infinito (44). La fórmula de la nueva cadena puede escribirse:

$$\overbrace{C^+...\angle...C^{\pm}}^{a}\overbrace{C^-...\angle...C^{=}}^{b}\overbrace{C^+...\angle...C^{\pm}}^{c}\overbrace{C^-...\angle...C^{=}}^{d}$$

Reducida á la forma más concentrada la notacion de esa misma cadena viene simplemente á ser (C^c_4); y en el empleo de esa fórmula hemos de admitir no solamente que los cuatro acoplos están inclinados unos sobre otros, sino tambien que sus ejes tienen un vértice comun, como lo indica la fig. 249

Las formas especiales que puede afectar la cadena en el caso del cuadrilátero de manubrio cilíndrico y que antes hemos mencionado, se encuentran igualmente en el caso del cuadrilátero cónico, por más que entonces se presenten de una manera diferente bajo ciertos conceptos. En primer lugar para un mecanismo dado las longitudes de los miembros a, b, c, d toman siempre valores diferentes, cuando se modifica el radio de la esfera sobre el cual deben medirse esas longitudes como arcos de círculos máximos; pero las relaciones de las longitudes, así medidas, al radio de la esfera quedan constantes, y como esas relaciones están precisamente representadas por los ángulos 1M2, 2M3, 3M4 y 4M1, nos vemos naturalmente inducidos á considerar en vez de las longitudes de los miembros, los ángulos que les corresponden, ángulos que podemos designar igualmente con las letras a, b, c, d.

A los cambios que introducíamos antes en las longitudes de los miembros prolongándolas hasta el infinito, corresponden aquí variaciones en el grandor de los ángulos; así es que á la longitud infinita de un miembro corresponde el ángulo de 90°; y por tanto la particularidad que hemos señalado en el párrafo 73 y que consiste en que dos miembros, ambos de longitud infinita, pueden diferenciarse en una longitud *finita*, se traducirá por lo mismo en que uno de los miembros ha de corresponder á un *ángulo recto* y el otro á un *ángulo obtuso*. Más como los ejes de los miembros pueden siempre suponerse prolongados mas allá del centro de la esfera, resulta que al ángulo *obtuso* de los dos ejes corresponde por el otro lado un ángulo *agudo*, y que en definitiva no existe diferencia alguna entre los miembros de ángulos agudos y obtusos. Una simplificacion

análoga acontece con las trayectorias polares y las axoides. Los puntos de distancia infinita de las trayectorias polares en la cadena (C''_4), de la cual hemos visto ejemplos en el § 8 corresponden aquí á puntos que en la esfera se hallan situadas á 90° de los ejes de rotacion. Las axoides aquí son por consiguiente conos (circulares ó nó) cuyas bases son figuras cerradas.

Sentados esos preliminares vamos á proceder ahora al exámen sumario de los mecanismos que pueden deducirse del cuadrilátero de manubrio cónico, conservando en lo posible el órden que hemos seguido en los párrafos anteriores.

A. Cuadrilátero de manubrio cónico $(C^{\angle}_4)$, figura 250. Todos los miembros son inferiores á 90°. De esa cadena derivan, como de la cadena (C''_4), *ocho mecanismos* cuyas designaciones se deducen de las precedentes, añadiéndoles tan solo el adjetivo *cónico*. Las fórmulas son igualmente análogas, con la sola diferencia de que el símbolo del *paralelismo* se encuentra reemplazado con el de la *oblicuidad*. No conozco aplicaciones de mecanismos de ese género; más nada impide suponer que existen y que se encuentran disimuladas por accesorios de construccion.

Los casos particulares de los manubrios paralelos y antiparalelos etc., pueden sin duda estenderse tambien al cuadrilátero cónico. Los dispositivos necesarios para el paso de los puntos muertos no podrian ser, sin embargo, análogos á los que hemos indicado anteriormente. Reuniendo dos cadenas cónicas paralelas, como se ha hecho en la figura 167, se obtiene un mecanismo con el cual á primera vista parece posible trasmitir un movimiento de rotacion uniforme entre dos árboles cuyos ejes no sean coincidentes ni paralelos. Problema es ese para el cual se han propuesto, conforme sabemos, varias soluciones. La fórmula de ese último mecanismo seria:

$$2\ (C^{\angle}_2 \parallel C^{\angle}_2)^{\mathrm{d}}.$$

Pero examinándolo mas de cerca, fácil es demostrar que eso en realidad no puede ser así. En la cadena $(C^{\angle}_2 \parallel C^{\angle}_2)$ no existen en efecto más que cuatro posiciones (las cuatro posiciones cardinales) para las que los miembros opuestos se hallan paralelos dos á dos y forman un paralelógramo, siendo para todas las demás posiciones desiguales los ángulos opuestos, de modo que no es posible la rotacion uniforme de los manubrios. De ahí dimana que la cadena $(C^{\angle}_2 \parallel C^{\angle}_2)$ por más que ofrezca un interés especial, no debe considerarse como enteramente análoga á la cadena $(C''_2 \parallel C''_2)$.

B. Cadena de manubrio de impulso cónico $(C^{\angle}_2 C^{\perp}_2)$, figura 251. Los miembros *d* y *c* son rectangulares, es decir, los ángulos comprendidos entre los ejes 1 y 4, 4 y 3, son iguales á 90°. A fin de presentar la cuestion más clara para los prácticos recurriremos á la figura 252. Aplicando aquí el principio del ensanche de los gorrones podemos en vez del brazo M3 perpendicular al eje 4 (que debe imaginarse normal en M al plano de la figura), utilizar la pequeña seccion de cilindro 4, que resbala sobre una parte correspondiente del miembro *d;* y entonces *c* es la correderita, *d* el puente, *a* el manubrio y *b* el lazo, como primitivamente.

La cadena cilíndrica trazada en la figura debajo de la cadena cónica puede sin disputa considerarse que se ha conseguido llevando el centro M á una distancia infinita. La cadena de manubrio de impulso cónico $(C^{\angle}_2 C^{\perp}_2)$, lo mismo que la cadena cilíndrica correspondiente, proporciona como mecanismos cuatro formas principales y dos accesorias, total *seis mecanismos*. Los nombres que han de dárseles son los mismos que para la cadena cilíndrica, con la sola adicion del adjetivo *cónico*. Parece que no existen aplicaciones de esos mecanismos ó á lo ménos son por extremo raras.

C. Cadena de juntura en cruz rectangular $(C^{\perp}_3 C^{\angle})$, figura 253. Los miembros *b,c* y *d* son rectangulares y solamente *a* es de ángulo agudo. Esa cadena corresponde á la cadena de corredera en cruz para el cuadrilátero de manubrio cilíndrico. Con el empleo del principio del ensanche de los gorrones se encuentra reducida á una forma (fig. 254) que ofrece la mayor analogia con la de la cadena de corredera. El mecanismo de la figura 255 es en sustancia idéntico al anterior. La corredera *d* no es otra cosa que una porcion de cilindro que en la figura 254 está indicada bajo la forma de una barra recta. Por lo que toca al miembro *b*, no debe olvidarse que corresponde á 90° y que por lo tanto es idéntico á la correderita *b* de dicha figura 254. En vez de la denominacion «corredera en cruz rectangular cónica» podemos adoptar la de *juntura en cruz rectangular*, que es más corta y que se encuentra justificada por el cruzamiento enteramente característico de los ejes 1 y 4. Por analogia con la cadena de corredera en cruz la cadena actual proporciona *tres mecanismos*, que adoptando los mismos números que en el cuadro recapitulatorio de la página 146 son los siguientes:

15. Manubrio de juntura en cruz rotatorio ó juntura en cruz oscilante. $(C^{\perp}_3 C^{\angle})^{\mathrm{d=b}}$
16. Juntura en cruz rotativa. . . . . $(C^{\perp}_3 C^{\angle})^{\mathrm{a}}$
17. Manubrio de juntura en cruz oscilante. $(C^{\perp}_3 C^{\angle})^{\mathrm{c}}$

Encuéntranse en la práctica varias aplicaciones de esos mecanismos, y en particular el del número 16 se emplea muy amenudo bajo los diferentes nombres de *juntura universal, juntura de Cardan ó de Hook;* yo he propuesto darle la denominacion especial de *acoplo de juntura en cruz.* Si escribimos la fórmula en su forma más completa suponiendo la cadena fijada en *a*, tendremos:

$$\overbrace{C^{+}...\perp...C^{\pm}}^{b}\overbrace{C^{-}...\perp...C^{\mp}}^{c}\overbrace{C^{+}...\perp...C^{\pm}}^{d}\underbrace{\overbrace{C^{-}...\angle...C^{=}}^{a}}$$

Esa fórmula que corresponde á la cadena de la figura 253, la hemos establecido ya en el párrafo 58 para el acoplo de juntura en cruz (fig. 192).

Pudiendo ser *b* ó *d* el miembro conductor, la fórmula concentrada será $(C_3^{\pm}C^{\angle})_{\overline{b}}^{a}$ ó $(C_3^{\pm}C^{\angle})_{\overline{d}}^{a}$. — Cumple notar que los miembros *b*, *c* y *d* son enteramente idénticos, como es fácil ver por la fig. 253; pero las más de las veces se encuentran disimulados ú ocultos en las aplicaciones prácticas de la juntura universal. La cadena de que hablamos, suministra aun otras aplicaciones muy notables de las cuales volveremos á tratar más adelante.

D. Cadena de manubrio de impulsion desviado y cónico. $(C_3^{\pm}C^{\angle})$. La desviacion de la cadena de manubrio de impulso se encuentra espresada aquí por la reduccion de los miembros rectangulares á uno solo, el miembro *d* en la fig. 256. Como antes, obtenemos *cuatro mecanismos* (del número 18 al 21 del cuadro), cuyas aplicaciones deben ser rarísimas.

E. Cadena de juntura en cruz oblícua $(C^{\angle}\,C^{\perp})_2$. En la fig. 257 *a* y *b* son miembros de ángulo agudo, *b* y *d* miembros rectangulares. Esa cadena corresponde á la cadena de corredera en cruz oblícua, al propio tiempo que á las cadenas de corredera en cruz angulares indicadas con las letras F y G en el cuadro del párrafo anterior. De ahí pueden deducirse tres mecanismos (números 22 á 24), cuyas aplicaciones son bastante raras, si bien se encuentran algunas.

En suma, el cuadrilátero de manubrio cónico suministra 24 mecanismos divididos en 5 clases, y en su mayor parte han sido hasta ahora desconocidos. Por lo demás, es indiferente examinar ahora si estos mecanismos que carecen de aplicacion, son prácticos ó nó. Pero nos reservamos deducir de ellos, algo más adelante, consecuencias importantes bajo el punto de vista de la seguridad de nuestro sistema de análisis. Añadiendo estos últimos mecanismos á los del párrafo precedente, alcanzamos un total de 54 mecanismos que pueden ordenarse en 12 clases y que deben considerarse como representantes de todos los mecanismos esenciales que es posible sacar de la cadena completa de cuatro cilindros.

§ 76

Reduccion del número de los miembros de una cadena cinemática.

Al hallarse en presencia de una cadena cinemática completa y tratarse de producir un movimiento determinado por medio de uno de los mecanismos que de ella derivan, sin que sea menester utilizar toda la série de movimientos á que dicho mecanismo da lugar, se puede en ciertos casos *suprimir un miembro de la cadena con la condicion de establecer un acoplo conveniente entre los miembros conservados.* Así se disminuye el número de los miembros de la cadena, sin modificar para nada el movimiento que se necesita. No cabe dudar que ese procedimiento ofrece en ciertos casos algunas ventajas, y vamos inmediatamente á dar un ejemplo.

Supongamos que se trata de obtener un movimiento rectilíneo alternativo por medio del manubrio de impulso rotatorio $(C''_3P^{\perp})^{d}$ (fig. 163) y que se tenga únicamente necesidad de utilizar el movimiento de ese género que suministra la correderita *c:* puede entonces suprimirse el lazo *b* y establecer un acoplo entre la correderita *c* y el manubrio *a*. Basta para eso por ejemplo, aplicar en 2 un gorron cilíndrico de conveniente diámetro, luego armar la correderita con un arco de corredera que forme cuerpo con ella y cuya corredera esté trazada segun la envoltura misma de las posiciones del gorron, de manera que lo toque por ambos lados como lo indica la fig. 258. Ese arco de corredera segun su modo de trazado, forma entonces con el gorron un acoplo de elementos *superior*. Lo más sencillo á la sazon consiste en tomar por centro de ese gorron el punto mismo de articulacion del lazo suprimido y describir por ese punto la corredera; pues tomando gorrones más distantes del centro de rotacion 1 se llegaria á correderas muy complicadas, como lo indica, por ejemplo, la trayectoria del punto $2''$ trazada en punteado. La cadena así simplificada con la supresion del miembro *b* y suponiéndola fija en *d*, tiene por fórmula completa:

$$\overbrace{C^{+}\ldots \parallel \ldots C^{+}}^{a},\overbrace{A^{\pm}\ldots\perp\ldots P^{\pm}}^{c}\overbrace{P^{-}\ldots\perp\ldots C^{=}}^{d}$$

Puede considerarse esa cadena como esencialmente diversa de la cadena anterior $(C''_3P^{\perp})^d$ cuya fórmula completa es:

$$C^{+}\ldots \parallel \ldots C^{\pm}C^{-}\ldots \parallel \ldots C^{=}C^{+}\ldots\perp\ldots P^{\pm}P^{-}\ldots\perp\ldots C^{=}$$

Con todo, como no da movimientos nuevos y por el contrario aun da *ménos* que la primera, no formaremos con ella una clase separada y nos limitaremos á considerarla como *derivada de la cadena de cuatro miembros*, y eso por la supresion del miembro *b*. Esa supresion de un miembro cuyas funciones se hallan desempeñadas por la introduccion de un acoplo superior, constituye lo que proponemos llamar una *reduccion* de la cadena completa, é indicaremos la fórmula concentrada de la nueva cadena en la forma siguiente:

$$(C''_3P^{\perp})—b.$$

La cadena así reducida ya no tiene realmente más que tres miembros, y por ende solo puede dar orígen á tres modos de fijacion, de suerte tal que no *proporciona más que tres mecanismos:* $(C''_3P^{\perp})^d—b$, $(C''_3P^{\perp})^a—b$, y $(C''_3P^{\perp})^c—b$, fórmulas que corresponden respectivamente á estas denominaciones: manubrio de impulsion rotatorio, manubrio de corredera rotatorio y manubrio de impulsion oscilante. Los tres mecanismos se encuentran realmente en la práctica.

No puede dudarse que de los cuatro miembros de la cadena puede suprimirse otro á más de *b*, dando por supuesto que no tenga de utilizarse el movimiento correspondiente. Las dos figs. 259 y 260 indican dos disposiciones de la cadena $(C''_3P^{\perp})$, disminuida de la correderita *c*, es decir, en realidad dos disposiciones de la cadena $(C''_3P^{\perp})—c$. En el primero de esos dispositivos el acoplo destinado á suplir la falta de *c* está constituido por la aplicacion al estremo del lazo, de un cilindro conaxial al gorron 3, y cuya figura envolvente es en el puente un corredera prismática, ó sea un prisma *negativo*. En cambio, en el segundo dispositivo el puente *d* está provisto de un prisma *positivo*, cuya figura envolvente se halla al estremo del lazo. Esa figura está constituida por una cavidad cuyas paredes laterales ofrecen la forma de una X y no encajan el prisma sino en las posiciones estremas de desviacion del lazo, en tanto que todas las demás le dejan cierto juego, de suerte que el acoplo es de clausura de fuerza. Si la parte prismática de *d* estuviese reducida á un espesor infinitamente pequeño, habria una clausura por acoplo completo. La forma indicada por la fig. 260 se encuentra en la práctica, pero las más de las veces con un marcado embotamiento de las aristas en la ranura de *b*. La forma que ha de darse á ese embotamiento no carece de importancia, y se puede suponer determinada convenientemente de este modo: Se empieza (fig. 261) por admitir para el prisma positivo del puente *d* una anchura relativamente bastante grande, y se determina la ranura correspondiente; hecho lo cual se busca á tenor de la regla indicada en el párrafo 35, los equidistantes de los perfiles hallados, y de ellos se escoge para la ejecucion los que dan con respecto á *d* un espesor más delgado que el admitido al principio.

El perfil equidistante sobre el lazo indica entonces el embotamiento circular ó el romo que se ha de practicar en cada una de las aristas inferiores, romo que se encuentra por lo demás indicado en la figura. Ocioso parece observar que esa forma de trazado no hace desaparecer la imperfeccion que antes hemos consignado, y que estriba en el juego existente entre *b* y *d* para todas las posiciones del lazo distintas de las de los estremos.

Como otro ejemplo notable de una cadena de manubrio reducida podemos citar la disposicion ordinaria del torno oval (fig. 262), que está muy difundida en la práctica y de la cual hemos tratado ya en el párrafo 72. La reduccion que se verifica en ese torno corresponde á la supresion del miembro *b* de la corredera en cruz rotativa, y por consiguiente da esa forma de mecanismo que se deduciria de la fig. 258 suponiendo infinitamente grande el radio de curvatura de la corredera.—La fórmula general concentrada es: $(C''_2P^{\perp}_2)^a—b$, y la fórmula especial: $(C''_2P^{\perp}_2)\frac{a}{d}—b$, puesto que el movimiento se da por mediacion de la corredera *d*, que gira en torno del gorron 1 (véase el torno oval del § 72 en el que *b* hace las funciones de miembro motor en vez de *d*). Efectivamente, en el estremo a_1 de la punta del torno y *t* en la pieza a_2, que está fijada en él por medio de dos tornillos, volvemos á encontrar el manubrio *a*, que ha pasado al estado de puente. Por mediacion del gorron 1 soporta ese manubrio la corredera *d*, con el prisma hueco 4, lo cual debe escribirse $C^{+}\ldots\perp\ldots P^{-}$. La corredera en cruz *c*, cuya fórmula es $P^{+}\ldots\perp\ldots P^{-}$, se compone aquí del prisma lleno deslizante en 4 y de dos mandíbulas ó tenazas 3,3 que forman un prisma hueco, las cuales son fáciles de conocer por los dos dibujos de la fig. 262. Encajan el

gorron ensanchado 2 del puente *a*, gorron que por efecto de la supresion del miembro *b* forma con el prisma 3 un acoplo superior. Aquí, por consiguiente, encontramos á la vez aplicados el ensanche de los gorrones y la reduccion del número de los miembros de cadena. Con auxilio de dos tornillos de punta y de la escala trazada en a_1, puede lograrse hacer variar fácilmente segun las necesidades la longitud de la pieza *a;* la muesca longitudinal de la pieza a_2 deja al efecto todo el juego necesario á los órganos 1, *d* y 4. La corredera en cruz *c* termina delante con una seccion fileteada, en la cual se fija de la manera ordinaria el mandrin ú otro órgano del mismo género.

Ese ejemplo es muy á propósito para demostrar hasta que punto pueden los accesorios de la construccion disfrazar ú ocultar la verdadera índole de un mecanismo. En realidad puede decirse que el torno oval de *Leonardo de Vinci*, por mucho que sea de uso muy general, ha sido hasta ahora muy poco comprendido. Es en verdad asombroso que se haya practicado con tal persistencia la supresion del miembro *b*, que de ningun modo es propicia á la conservacion de la máquina. El cilindro 2 y la boca ó mandíbulas 3,3 se hallan en efecto sometidos á un desgaste bastante rápido á consecuencia de la exígua estension de sus superficies de contacto, y el movimiento por lo tanto llega á no presentar ya un grado suficiente de exactitud. En la disposicion de la fig. 241, á la cual hemos llegado directamente como á una consecuencia de nuestras investigaciones teóricas, la cadena no queda disminuida ni existe el inconveniente espresado, siendo además esa disposicion más cómoda que la de la fig. 262, máxime por lo que toca al establecimiento de los prismas 3 y 4, que se efectua muy fácilmente y por decirlo así con naturalidad en el dorso de un disco plano.

Si en una cadena de cuatro miembros el número de ellos puede, como acabamos de ver, reducirse á tres, parece natural admitir que en determinadas circunstancias se podrá reducir á dos el número de miembros de una cadena que tenga tres, como por ejemplo, una de las que acabamos de examinar. Y es lo que realmente sucede, como vamos á demostrarlo con varios ejemplos. En la fig. 263 volvemos á encontrar la cadena de la fig. 259, disminuida tambien de un miembro ó sea del manubrio *a*. Con tal fin al estremo 2 del lazo se ha introducido el acoplamiento de un cilindro lleno con una ranura anular descrita del centro 1 y dispuesta en el puente *d*. La fórmula de esa nueva cadena será:

$$(C''_3P^{\perp})—a—c.$$

La cadena ya no es entonces más que de dos miembros, ó dicho en otros términos, se halla reducida á un acoplo de elementos compuesto de los elementos *b* y *d*, y no es susceptible más que de dos modos de fijacion. La fijacion en *d* suministra el *manubrio de impulso rotatorio* $(C''_3P^{\perp})^d—a—c$, el cual será aplicable siempre y cuando tenga que utilizarse simplemente el movimiento del lazo; el segundo modo de fijacion da la *corredera oscilante*, en la cual no se ha de utilizar más que el movimiento de la corredera *d*.

Otro ejemplo nos proporciona la fig. 9 que representa un dispositivo del cual nos hemos ocupado ya en el capítulo primero. Ese dispositivo no es otra cosa más, como se ve, que una cadena de corredera en cruz oblícua (fig. 246), disminuida de dos miembros. La pieza que en la fig. 9 está designada por *aadd*, constituye la corredera en cruz oblícua, á la vez que la pieza *bpc* es el manubrio. La fórmula de esa cadena reducida es:

$$(C''_3P^{c}_2)—b—d.$$

Por nuestras investigaciones anteriores sabemos que la curva sobre la cual se mueve el punto *p* con relacion á *ad*, es una elipse. El acoplamiento destinado á suplir la falta de un miembro, es aquí como anteriormente, de órden superior, de suerte que en definitiva el acoplo resultante de la reduccion de los miembros es un acoplo superior. Por otra parte no es posible, como se ve, estremar más la reduccion, puesto que aquí hemos llegado á un mínimum del número de órganos que puedan emplearse para constituir una trabazon maquinal de cuerpos.

En la práctica se usa tambien para otras cadenas cinemáticas el procedimiento de reduccion del número de los miembros. Así, para citar un ejemplo, la cadena de ruedas dentadas de la fig. 153 puede trasformarse con ese procedimiento en un simple acoplo superior, como lo representa la fig. 152. La cadena completa tiene por fórmula $(C^{+}_{z}C''_2)$, en tanto que el acoplo obtenido con la supresion del puente *c* debe escribirse $(C^{+}_{z}C''_2)—c$.

No deben considerarse las cadenas reducidas como procedentes en realidad de cadenas completas. Más aun, tenemos poderosas razones para suponer, segun hemos visto en el capítulo VI al tratar de la marcha del desarrollo de las máquinas, que casi siempre acontece lo contrario. Más ello no debe impedirnos hacer uso del procedimiento deductivo que acabamos de indicar y que es sumamente á propósito, no solo para facilitar nuestro exámen, sí que tambien para evitar repeticiones sin fin. Si, con efecto, quisiéramos conside-

rar siempre las cadenas reducidas como cadenas cinemáticas especiales, tropezaríamos con una infinidad de combinaciones resultantes de la estremada variedad de los acoplos superiores que podrian practicarse con los miembros conservados, sin que de ahí sacásemos ninguna utilidad, puesto que tales combinaciones no podrian darnos un solo movimiento que no estuviese ya contenido en la cadena completa. De lo dicho resulta que la introduccion del principio de la reduccion de las cadenas en los procedimientos de la cinemática es á propósito para producir una estraordinaria simplificacion. En los mecanismos compuestos puede ofrecer dicha reduccion notorias ventajas. El análisis riguroso de combinaciones de este género constituye cabalmente uno de los problemas más interesantes é instructivos de la cinemática aplicada (45).

§ 77

Aumento del número de miembros de una cadena cinemática.

Contra la disminucion del número de los miembros de una cadena surge lógicamente el *aumento* del número de tales miembros. Ante todo es evidente que una cadena reducida puede volverse al estado de cadena completa con el aumento del número de sus miembros. Más tambien se puede lograr análogo efecto uniendo con un acoplo existente un nuevo miembro interpolado que no sea susceptible de alterar la índole del movimiento de los dos cuerpos que componen el acoplo. Si la cadena se hallase con el máximum del número de miembros que puede tener, sin dejar de permanecer cerrada, y sin embargo, hubiese de aumentarse, daria necesariamente orígen á una cadena compuesta. Por consiguiente, el procedimiento de aumentacion nos induce en general al dominio de las cadenas compuestas, de las cuales por de pronto poco tenemos que ocuparnos. Nos limitaremos á mencionar como ejemplo que las *guias articuladas del movimiento rectilíneo* que sustituyen en los mecanismos de manubrio á las guias prismáticas, no son otra cosa que cadenas aumentadas. Así los paralelógramos de *Watt*, *Evans*, etc., han reemplazado un acoplo de prismas con una cadena cinemática que no contiene sino dos articulaciones y que por tanto no encierra más que acoplos de rotoides, de suerte que en el fondo no es otra cosa que un mecanismo de manubrio. Puede igualmente decirse que hay aumento de cadena cuando á su acoplo de ruedas dentadas cuya relacion de trasmision es muy considerable, se sustituye una série de acoplos de ruedas reunidas en cadena, entre las cuales se halla repartida la relacion primitiva de trasmision. Esos ejemplos bastan para demostrar que la práctica hace mucho uso del sistema del aumento de las cadenas. No pretendemos entrar aquí más á fondo en la cuestion y nos contentaremos con haber sentado de una manera general el principio de que se trata, haciendo notar de paso que el desarrollo de esa cuestion pertenece más bien al dominio de la cinemática aplicada que al de la cinemática teórica.

CAPÍTULO IX

ANÁLISIS DE LOS CAPSULISMOS DE MANUBRIO

«Innumerables tentativas se han practicado para resolver el problema de las máquinas de vapor rotativas, sin que hasta aquí se haya llegado á resultados satisfactorios.»

KARMARSCH.

§ 78

Encadenamiento de los mecanismos de manubrio con órganos de presion.

Despues de haber procurado conocer en el capítulo que antecede, la manera de aplicar el análisis cinemático á las formas variadas de la cadena de manubrio simple que habíamos escogido como ejemplo, nos proponemos aquí examinar más detenidamente esa misma clase de mecanismos y penetrar en el dominio de las aplicaciones con el objeto de determinar el valor que pueda tener el análisis bajo el punto de vista de la mecánica práctica. Terminado ese nuevo estudio podremos considerar suficiente llano el camino para utilizarlo con provecho.

De las numerosas aplicaciones que en la mecánica práctica encuentran los mecanismos de manubrio, hay algunas que desempeñan un papel sumamente especial, y son aquellas en que un órgano de presion (agua, aire, vapor de agua, gas de alumbrado, etc.), se encuentra ligado cinemáticamente con el mecanismo de manubrio para dar orígen, ya sea á una máquina (una bomba) destinada á poner en movimiento el órgano mismo de presion, ya sea por el contrario, á una máquina motriz que tenga ese órgano de presion como elemento motor. Para esos dos distintos objetos que suponen evidentemente una estrecha afinidad entre las combinaciones que han de formarse, la práctica ha logrado realizar una gran variedad de dispositivos ó mecanismos. Y sin embargo, quizás no hay un solo terreno sobre el cual proceda con mayor incertidumbre ni ideas más vagas ó indeterminadas que sobre el terreno de que aquí precisa-

mente es cuestion. Por decirlo así anda á tientas y oscuras, sin apoyarse en principio alguno, sin conocer la senda ni siquiera comprender lo que podrá encontrar.

De esa manera ha creado y crea aun todos los dias una cantidad tal de dispositivos para un mismo fin, que casi parece imposible poder someter á una clasificacion los materiales así aglomerados, y por otra parte la memoria es impotente para recordarlos.

El ardor con que se ha ido en busca de inventar *máquinas rotativas* (máquinas de vapor y bombas) ha contribuido en escesiva manera á producir semejantes resultados. Esas investigaciones han dado grandioso número de dispositivos que no ofrecen ninguna utilidad ó que parecen no ofrecer ninguna, á pesar de los ímprobos esfuerzos de invencion y de un enorme gasto de capitales. Por eso, no obstante, se ha intentado varias veces, siquier con muy escaso ó ningun éxito, disuadir á los inventores de seguir dicho sendero. Pero nos cumple añadir que bajo el punto de vista de la cinemática no es posible acomodarse sin restriccion á consejos de esa naturaleza. En primer lugar la investigacion de las combinaciones posibles puede muy bien dejar de constituir en el fondo un inconveniente, siquiera la utilidad que de ahí resulta sea muy inferior á la que el inventor esperaba. Y en segundo lugar la pretension de querer poner un freno á las investigaciones empíricas no estará en modo alguno justificada en tanto que el modo de concepcion teórica no se halle en estado de dar resultados equivalentes ó superiores, ó no permita apreciar con seguridad el valor ó la inutilidad de los dispositivos que se pueden obtener. Realmente la cinemática puede proporcionar hoy para dicha apreciacion un primer punto de partida de suma importancia, puesto que el análisis cinemático está en el caso de dar á conocer el verdadero contenido de los mecanismos. Precisamente vamos á proponernos la resolucion de ese problema para las máquinas en que entra un órgano de presion con un mecanismo de manubrio.

El procedimiento para componer semejante máquina se divide en dos partes. La primera consiste en formar *(a)* un *vaso* ó una *cápsula*, con uno de los miembros de la cadena, y *(b)* un *piston* ó un émbolo que se ajuste exactamente con aquél, acompañado de uno ó hasta de dos miembros de la cadena. Los dos órganos así formados dejan en su movimiento relativo entrar unas veces, y otras espulsan, el órgano de presion. La segunda parte del procedimiento consiste en establecer dispositivos cinemáticos destinados á abrir y cerrar periódicamente la capacidad del vaso. Conforme á lo que siempre se ha admitido hasta aquí tocante á las máquinas de vapor, en adelante designaremos esos dispositivos especiales con el nombre de *distribuidores* para toda la série de las máquinas que tendremos que examinar.

La cápsula y el émbolo forman con el fluido (líquido ó gaseoso) un encadenamiento cinemático que se combina con el del mecanismo de manubrio, para dar una cadena compuesta que en circunstancias dadas puede exigir una notacion bastante compleja. Pero podemos vencer esa dificultad limitándonos primero únicamente á la consideracion del vaso y del émbolo dando enteramente de mano el fluido mismo. Esa manera de proceder es suficiente de todo punto para el objeto á que aspiramos, á la par que es esencialmente muy propio para favorecer la inteligencia del conjunto. Un mecanismo de manubrio cuyos miembros estén dispuestos de manera que lleven en sí mismos las fórmulas de cápsula y piston adecuadas á recibir y poner en movimiento el fluido, constituye lo que nos proponemos designar con el nombre de *capsulismo de manubrio*. En cuanto á la distribucion podremos de todos modos tratarla muy sumariamente, toda vez que no determina la índole de cada máquina: indicaciones suscintas sobre la disposicion general de esa distribucion bastarán perfectamente para el objeto que nos proponemos. Un poco más adelante (Cap. XII y XIII) volveremos á tratar del verdadero significado cinemático de ese elemento de las máquinas, así como del papel en realidad aferente al órgano de presion en los diferentes casos que vamos á examinar.

§ 79

Capsulismos de manubrio derivados del manubrio de impulsion rotativa.

La série sistemática de los mecanismos contenidos en el cuadro recapitulatorio del párrafo 74 parece indicarnos, por decirlo así, naturalmente el órden en que podríamos tratar los capsulismos del manubrio. Pero preferimos seguir otra senda y comenzar por el dispositivo más conocido y familiar al lector, el que se contrae á la máquina de vapor ordinaria, de manera que disminuyamos en lo posible las dificultades bastante sérias del análisis que vamos á emprender. Así pues, escogeremos en primer lugar la cadena $(C''_3P^{\perp})$: con la fijacion en *d* esa cadena da el mecanismo que hemos designado con el nombre de *manubrio de impulso rotativo* $(C''_3P^{\perp})^d$. Las figs. 264 á 271 inclusive, representan esquemáticamente 8 capsulismos de manubrio derivados de ese mecanismo, los cuales vamos á examinar uno tras otro.

La fig. 264 indica una disposicion muy usada para máquinas de vapor y bombas. El puente *d* se utiliza parcialmente para formar la cápsula; en la parte superior se presenta como guia prismática para la correderita *c*, y en la parte inferior como cilindro hueco (cilindro de vapor, cuerpo de bomba). Dentro de ese cilindro se mueve operando un cierre hermético el émbolo, que está constituido por el estremo inferior de la correderita *c*. Las flechas aladas indican en esa figura, lo propio que en las siete siguientes, las direcciones de entrada y salida del fluido cuando el manubrio *a* se mueve en la direccion indicada por la flecha sencilla. Cuando la máquina sirve como bomba, casi siempre la distribucion es automática, utilizándose la presion del fluido para abrir y cerrar las válvulas que separan la capacidad de la cápsula de los otros espacios en que se encuentra igualmente el fluido. Si por el contrario se emplea como máquina motriz el aparato, las válvulas deben ponerse en movimiento por medio de una cadena cinemática especial, que constituye el mecanismo de la distribucion. Tambien á veces en ciertas bombas llamadas *bombas de cajones*, se usa ese dispositivo especial de distribucion. No debe perderse de vista que la sola condicion fundamental que debe llenarse bajo el punto de vista cinemático, estriba en que la forma de la cápsula sea *prismática;* y por consiguiente el empleo del cilindro circular debe considerarse como accesorio y atribuirse únicamente á razones de conveniencia: no es ménos cierto que de esa forma accesoria ha sacado la pieza su designacion ordinaria de «cilindro de vapor,» «cilindro de bomba,» etc. En las máquinas impelentes de cajon, en que las cápsulas están formadas de planchas, unidas igualmente por razones de conveniencia, se ha adoptado en vez del cilindro el prisma de base cuadrada. La posicion de la cadena con relacion al horizonte no tiene la menor importancia especial; y por ende la fig. 264 conviene lo mismo para las máquinas de vapor que para las bombas horizontales, inclinadas, invertidas (con el cilindro arriba) etcétera. Todos esos dispositivos pueden en la práctica considerarse resueltamente como constituyentes de los diversos sistemas; pero en el concepto cinemático no se diferencian unos de otros.

Un punto particular sobre el que debemos llamar la atencion se refiere á lo que denominamos el doble efecto del émbolo, y para el objeto que nos ocupa, conviene determinarlo claramente y con toda exactitud. Consiste en que el émbolo *c* en su movimiento periódico se encuentre acoplado con el fluido, no por un solo lado, sino por los dos, y de ahí resulta que en *cada evolucion completa del mecanismo la capacidad de la cápsula se llena dos veces de fluido.* No es ese mismo el caso en las bombas de émbolo sumergido ó en las máquinas de émbolo llamadas de simple efecto, y por esa razon sucede que la mecánica práctica hace resaltar ese modo de accion diferente.

Debajo de la figura está inscrita la fórmula determinada y concentrada del mecanismo, en la que no hay, como se ve, ninguna otra parte para añadir á los cuatro miembros conocidos que entran en él, puesto que hemos convenido en hacer abstraccion de la distribucion y del fluido. En esa fórmula el miembro deslizante *c* figura como miembro motor, lo cual supone que el mecanismo es el de una máquina de vapor. Si por el contrario correspondiese á una bomba, la fórmula seria: $(C''_3 P^{\perp})_a^{\frac{d}{-}}$. La adicion $(V^{\pm})=c, d$ tiene por objeto indicar que el émbolo V^{+} y la cápsula V^{-}, que forman el acoplo $(V^{\pm})$ están constituidos por los miembros *c* y *d*, es decir, por la correderita y el puente del manubrio de impulso rotativo. De la misma manera se encuentran anexionadas á las figuras esquemáticas de todos los mecanismos siguientes (265 á 271) las fórmulas principales, así como las relativas á la formacion del émbolo y de la cápsula.

La fig. 265 representa un dispositivo de máquina de vapor que fué indicado por *Broderip* en 1828, por *Humphreys* en 1835 y que fué especialmente aplicada por *Penn*. La parte superior del prisma *c* está lo bastante ensanchada para comprender el gorron 3 (es decir, para que el acoplo 2 se encuentre en 3, § 71). Además *c* tiene una forma tal, que el lazo *b* no tiene obstáculo alguno en su movimiento (véase fig. 235), por más que el centro de 3 baje á una gran profundidad. Este dispositivo se conoce con el nombre de *máquina de vaina.*

La vaina da por resultado reducir estraordinariamente la capacidad superior de la cápsula; pero en principio esta disposicion no se diferencia de la precedente, puesto que en ella tambien el vástago del émbolo produce una disminucion de la misma capacidad.

Figura 266. Disposicion de *Hastie* para máquina de vapor. En esta máquina que es de simple efecto, la cápsula se estiende más allá del manubrio. El peso del piston es bastante considerable para equilibrar en parte la fuerza motriz que no actua más que en una sola de sus faces. Más recientemente *Hicks* procuró utilizar esa misma disposicion colocando horizontalmente el puente *d*; y su máquina produjo en la Exposicion de Paris (1867) cierta sensacion que tal vez no estaba muy justificada. A fin de equilibrar la accion del vapor que no obra más que en una sola faz del piston y pasar los

puntos muertos, habia juntado cuatro piezas, ó hablando más propiamente, dos acoplos de mecanismos del género precedente (clausura por cadena segun el § 46) y por medio de los dos pistones de uno de los acoplos efectuaba la distribucion de vapor para el otro acoplo.

Figura 267. Bomba de *Pattison*. Ese dispositivo para el cual se tomó privilegio en Inglaterra el año 1857, no es otra cosa que un mecanismo de la forma $(C''_3P^{\perp})^d$, en el que el lazo *b* es el miembro motor, lo que equivale á decir que está dispuesto como piston y se encuentra acoplado con una cápsula constituida por el puente *d*: $(V^{=})=b,d$. La cápsula es un cilindro hueco, conaxial al cilindro 1, en tanto que la superficie del piston *b* en la parte en que debe formar un cierre hermético con *d*, es conaxial al cilindro 2. En el prisma 4 la correderita *c* forma clausura bajo la forma de un pequeño piston prismático, enteramente lo mismo que en el ejemplo anterior. Sin embargo, las oscilaciones de ese piston no se utilizan para el desplazamiento de un líquido, puesto que aquí faltan las válvulas necesarias para lograr ese resultado. Este émbolo es el que á causa del movimiento que le imprime el gorron 2, notablemente ensanchado del manubrio *a*, aspira el agua por un lado y la impele por otro. La capacidad disponible de la cápsula, ó sea su volúmen total, disminuido con el del émbolo, se llena y vacia una sola vez en cada evolucion completa, y por lo tanto, segun antes hemos dicho, la bomba es de simple efecto. En su posicion más baja el piston deja durante un tiempo muy corto una comunicacion entre los dos conductos de aspiracion y de impulso, más con un movimiento bastante rápido esa comunicacion no ejerce influencia sensible. El acoplamiento entre *b* y *d* es de órden inferior para las superficies de la base, pero de órden superior para las del contorno (las que se ven en corte en la figura); y por ello es muy difícil conseguir una clausura hermética. Como se ve, esa bomba no tiene necesidad de válvulas, ó á lo ménos de órganos de ese género, teniendo por única funcion la de distribuir el líquido.

Figura 268. Máquina de vapor de *Lamb*, privilegiada en Inglaterra (1842). Esa máquina, destinada á funcionar por medio de aire, gas, ó vapores de índole cualquiera, puede igualmente utilizarse como bomba. Reduciendo á lo que es verdaderamente esencial la descripcion bastante abstrusa del inventor, queda su dispositivo reducido á lo que indica nuestra figura esquemática. El mecanismo es en definitiva el del manubrio de impulso rotativo disminuido de la correderita *c*, y su fórmula indeterminada es por consiguiente: $(C''_3P^{\perp})^d$—*c*. Aquí tambien el lazo *b* y el puente *d* constituyen respectivamente el piston y la cápsula. La fórmula determinada es entonces $(C''_3P^{\perp})^{\frac{d}{b}}$—*c*. Como la correderita *c*, que deberia formar clausura falta en ese mecanismo, se ha aplicado en 3', entre *b* y *d*, el acoplo mencionado en el párrafo 76 é indicado en las figuras 260 y 261; pero es evidente que no puede esperarse mucho el conseguir así un cierre hermético satisfactorio. Por ese motivo creyó el inventor que debia introducir en ese punto una pieza especial de clausura, cuya descripcion deja mucho que desear en cuanto á claridad y que en nuestra figura se ha suprimido. Con todo, esa pieza carece de importancia cuando hay una clausura hermética en las dos posiciones de contacto del lazo con las paredes anulares de la cápsula *d*. *Lamb* hace entrar el vapor lo mismo al esterior que al interior. En la posicion representada por la figura el espacio bastante considerable que se halla comprendido á la izquierda entre el anillo esterior y la pared interna del piston, afecta la forma de una media luna, mientras que entre la pared interna de *b* y el cilindro lleno interior de *a* que está fijo, comienza precisamente á abrirse una pequeña hendidura, en la que se introduce igualmente el vapor motor. La accion aquí comienza cuando el espacio esterior está lleno á medias, hallándose entonces el manubrio en su punto muerto superior. El vapor que ha actuado, se escapa de los dos espacios complementarios que se hallan el uno al esterior de *b* y el otro al interior. Merced á la hendidura que ofrece en 3' el émbolo *b* sube y baja sobre el diafragma de *b* determinando la rotacion del manubrio *a*, exactamente lo mismo que el gorron 3 y la correderita *c* en el ejemplo precedente. Cuando no se quiere producir espansion ó disparo de vapor, la necesidad de un sistema de distribucion dimana únicamente de que en su posicion más baja, lo mismo que en la bomba de *Pattison*, el émbolo durante un tiempo muy corto deja una comunicacion entre la entrada y la salida del fluido, siendo éste el inconveniente que interesa evitar con el empleo de una válvula.

La figura 269 representa otra máquina de *Lamb* constituida por la reunion de dos dispositivos de la especie del que acabamos de describir y que aquí se encuentran encajados el uno en el otro. Los émbolos b_1 y b_2 actuan aisladamente, formando en realidad dos lazos de diferentes longitudes, ligados á un manubrio comun *a*. Las flechas indicadoras de la corriente de vapor, así como las aberturas de paso para el fluido, están simplemente indicadas en ambas figuras sobre la pared esterior de *d*; y las que corresponden á las capacidades internas, se han omitido con el objeto de simplificar el dibujo. *Lamb* se reserva (podríamos quizás

decir en son de amenaza) aumentar el número de las cámaras anulares y de los émbolos correspondientes. En ese caso la segunda cámara que existe ya en la figura y todas las que se añadieran, servirian para producir efectos de espansion ó disparo. Como la capacidad disponible de la cápsula lo mismo en el interior que en el esterior del piston anular *b*, se llena una vez y se vacia otra en cada evolucion completa, resulta que la máquina de que se trata, debe clasificarse entre las máquinas de doble efecto.

La fig. 270 indica una máquina de vapor rotativa que se ha presentado diferentes veces. Construida en 1847 por *Bæhrens* en Colonia, privilegiada el año 1851 á favor de *D. Napier* en Inglaterra por ciertos perfeccionamientos, fué inventada nuevamente en Italia el año 1867 por *Bompard*. Nuestra figura representa el doble empleo del mecanismo $(C''_3P^{\perp})^{d}$, en el cual los miembros *a* y *d* están respectivamente dispuestos como émbolo y vaso. El miembro *b* no actua más que como medio de obtener un cierre hermético, pues como miembro de cadena su clausura es muy imperfecta. Lo mismo arriba que abajo ese miembro se compone de dos cilindros ó segmentos de cilindros que respectivamente tengan por ejes los ejes de 2 y 3; un perfil en forma de media luna no es idóneo para formar un acoplo desmodrómico con *a* ni con *c*. Por ello se efectua ahí la clausura cinemática por la correderita *c*. Sin embargo, como es incompleto el miembro *b*, el miembro *c* no puede llegar á formar clausura más que con auxilio de medios estraños. Por esa razon debemos escribir la fórmula de modo que esprese el estado incompleto de *b* y *c*, lo cual nos conduce á la notacion:

$$2\left[(C''_3P^{\perp})^{\frac{d}{a}} - \frac{b}{2} - \frac{c}{2}\right],$$

en la que el factor 2 indica el doble empleo de la misma cadena. Si se quisiera igualmente indicar en la fórmula que los miembros *a* y *d* son comunes á las dos cadenas, es decir, que no existen realmente más que una sola vez, se habria de poner fuera del paréntesis *a* y *d* con el signo *menos* (—).

Bæhrens no usaba más que una sola correderita, esto es, dejaba la cadena simple y obtenia la clausura de esa correderita única *c* por medio de un peso que tendia á empujarla constantemente hácia abajo.

En cambio *Napier* habia adoptado una clausura de cadena que no es nueva para nosotros y que llenaba perfectamente el objeto. En primer lugar empleaba tambien únicamente la cadena simple, ó sea que, como *Bæhrens*, no tenia correderita inferior ni conductos de vapor correspondientes; y en cuanto á la correderita superior la proveia exteriormente de dos gorrones, que conaxiales al gorron 3 y con saliente á cada lado de la cápsula *d*, estaban envueltos ó abrazados por dos lazos, que precisamente tenian la longitud del lazo *b*, y en segundo lugar esos dos lazos iban conducidos por dos discos escéntricos que tenian el mismo eje que el cilindro 2. En otros términos, *Napier* utilizaba dos cadenas iguales de la forma $(C''_3P^{\perp})^{d}$ y de accion simultánea, las cuales ofrecian idénticas proporciones de longitud que la cadena principal de cápsula, y además tenian de comun con ella el miembro fijo *d*.

Por otra parte, es evidente que esa clausura por cadenas debe dar por resultado el cierre hermético en el movimiento de desplace de la correderita *c* y del cilindro escotado *b*.

Bompard empleó en la cápsula la doble cadena que indica la fig. 270, habiendo por otra parte realizado la clausura de las dos correderitas *c*, por medio de una cadena especial de varios miembros, cuya descripcion no damos aquí porque nos llevaria demasiado lejos; y nos limitaremos á observar que esa cadena no produce sino aproximadamente el movimiento necesario, de modo tal que no constituye más que una solucion imperfecta é inferior á la de *Napier*.

Figura 271. Máquina de vapor rotativa propuesta y ejecutada primeramente por *Yule* en 1836 y luego por *Hall* (antes de 1869). Aquí nos encontramos en presencia de un manubrio rotativo de impulsion disminuido del lazo *b* y provisto de una clausura de fuerza merced á la correderita *c*. Por lo tanto la fórmula del mecanismo es:

$$(C''_3P^{\perp})^{\frac{d}{a}} - b - \frac{c}{2}$$

El miembro *a* es aquí tambien el miembro motor y sirve de émbolo, en tanto que *d* constituye la cápsula. *Yule* disponia los conductos de vapor como indica la figura; y sin dejar de conservar *Hall* el mismo dispositivo para la evacuacion, utilizaba para la admision un conducto dispuesto en la misma correderita; á cuyo efecto la cápsula estaba armada de un apéndice como en la disposicion de la fig. 267, y el tubo de entrada del vapor desembocaba en esa cavidad por encima de la correderita. En ambas disposiciones la clausura de esa correderita se efectuaba por su propio peso. El acoplamiento entre *a* y *c* es aquí de órden superior, y por lo tanto poco apta para asegurar un cierre hermético al paso del vapor.

Los ocho capsulismos de manubrio que acabamos

de examinar, están fundados, conforme hemos visto, en el mecanismo muy generalizado que constituye el primer ejemplo; y ese es un fenómeno que hasta ahora habia sido completamente ignorado. Todos son por otra parte el resultado de la aplicacion del principio enunciado en el párrafo anterior y consistente en la formacion de un émbolo y una cápsula por medio de miembros que se juzgan convenientes al efecto, y en la adicion de una distribucion allí donde es necesaria. Dejando por de pronto á un lado el exámen del valor práctico de esas diferentes soluciones podemos decir que todas están igualmente justificadas y que todas tienen igual derecho á la atencion de los que se consagran al análisis cinemático.

En esas diferentes soluciones el piston y la cápsula se hallan formados de los miembros

$$c \text{ y } d,\ b \text{ y } d,\ a \text{ y } d.$$

En todas ellas el miembro d constituye la cápsula. La eleccion de ese miembro parece natural para ese objeto, toda vez que al propio tiempo es el miembro fijo y que por lo tanto se presta mucho más que cualquier otro miembro móvil al establecimiento de los tubos de vapor y de agua. Más adelante veremos, empero, que en la práctica se tiene á veces precision de dejar á un lado esa ventaja y utilizar como cápsula un miembro móvil del mecanismo. De donde resulta que en lo que precede, no hemos apurado todavia las combinaciones posibles de piston y cápsula en el mecanismo $(C''_3 P^{\perp})^d$ y por consiguiente el número de capsulismos que de él pueden dimanar: no seria difícil imaginar otras combinaciones. Las máquinas de *Lamb* (figuras 268 y 269) son las que por su aspecto esterior se parecen ménos al mecanismo de manubrio; pues se diria á primera vista que le son completamente estrañas, y exigen, aun del que está habituado á las nuevas ideas, una reflexiva abstraccion para ser perfectamente comprendidas. Entre tanto nuestro análisis ha llegado, sin ningun esfuerzo ni artificio, al resultado antes espuesto, que realmente es susceptible de dar mucha luz sobre la verdadera esencia del mecanismo. Al propio tiempo el lector ha tenido con tal motivo la ocasion de conocer la necesidad del carácter general que hemos dado á las precedentes investigaciones, é igualmente ha podido convencerse de cuan esencial era desarrollar bajo un punto de vista general, como lo hemos hecho, la permutabilidad de + y de — en los acoplos inferiores, el ensanche de los elementos, el aumento y la disminucion de las cadenas, etc., y de poner en evidencia el poder de formacion que reside en esos diferentes procedimientos.

§ 80

Capsulismos de manubrio derivados del manubrio de impulso rotativo isóceles.

El caso particular del manubrio de impulso rotatorio, del que hemos tratado en el párrafo 70 y que se efectua cuando la longitud b del lazo se toma igual á la longitud a del manubrio, se utiliza con bastante frecuencia para la formacion de mecanismos de cápsula. La fig. 272 representa la máquina de vapor que *Dawes* construyó en 1816 partiendo del mecanismo que hemos designado con el nombre de manubrio de impulso rotatorio isóceles. Aquí la deslizadera d se toma como puente ó miembro fijo, y por consiguiente la fórmula general es: $(C''_2 \leqq C'' P^{\perp})^d$; por otra parte c está dispuesta como émbolo y d como cápsula, de suerte que se tiene: $(V^{\perp}) = c,d$. La fórmula especial es la siguiente: $(C''_2 \leqq C'' P^{\perp})^{\frac{d}{c}}$. El lazo prolongado lleva á su estremo superior otra correderita c_1, que se mueve en una segunda corredera d_1, formando cuerpo con d. En vez de la clausura por acoplo indicada en los §§ 47 y 70 se tiene aquí una clausura producida por otra cadena cinemática igual á la cadena principal y en la que la direccion del deslizamiento es perpendicular á esa última.

La aplicacion de ese mecanismo tuvo por orígen la idea de aproximar al cilindro de la máquina de vapor el eje del manubrio. Pero un exámen más detenido permite conocer al instante que ese dispositivo no tiene ningun valor práctico en razon de las dificultades de construccion que ofrece. A pesar de esto aparece de vez en cuando, y así figuraba, por ejemplo, en la Exposicion de Londres el año 1851 y en la de San Petersburgo en 1868. En esta última el profesor *Tchebischeff* habia expuesto un modelo susceptible de ponerse en movimiento, en el que á la segunda guia prismática en c habia sustituido un aumento de cadena (§ 67), es decir, una nueva guia articulada que él inventó.

§ 81

Capsulismos de manubrio derivados de la corredera oscilante.

El segundo de los cuatro mecanismos que anteriormente habíamos deducido de la cadena $(C'_3 P^{\perp})$ era el

manubrio de corredera oscilante, esto es, el mecanismo correspondiente á la fijacion de la cadena en el miembro *b*, que tiene por fórmula abreviada $(C''_3P^{\perp})^b$. Ese mecanismo se utiliza igualmente de varias maneras para la formacion de capsulismos.

La figura más antigua es la que se conoce con el nombre de máquina de vapor oscilante (fig. 273) y que fué inventada por *Murdock* (1785). En esa disposicion el lazo primitivo *b* viene á ser el puente ó la armadura de la máquina; el manubrio *a* gira entorno del eje de su antiguo boton; la correderita *c* se encuentra dispuesta en forma de cápsula cilíndrica, y la corredera *d* es el piston. La formacion de la cápsula y del émbolo debe en tal caso estar indicada por la notacion $(V^{\pm})$ $=d,c$, en tanto que la fórmula determinada del mecanismo debe escribirse $(C''_3P^{\perp})\frac{b}{d}$. Para la distribucion habia *Murdock* adoptado una disposicion en la cual un brazo fijo lijeramente elástico obligaba el vástago de un cajon ordinario á moverse paralelamente al vástago del émbolo; y en tales condiciones el cajon debia hallarse en su posicion media cuando el manubrio se encontrase en uno de sus puntos muertos. Más adelante se concibió la idea de efectuar la distribucion aprovechando el movimiento oscilatorio del gorron 3 (del cilindro), provisto al efecto de canales y luces convenientes ó de un cuerpo de rotacion conaxial á ese gorron: aun hoy dia se emplea el mismo método en el caso en que el mecanismo deba servir como máquina motriz de agua ó como bomba, teniéndose entonces lo que se llama una distribucion por grifo. Si por el contrario se quiere utilizar el trabajo de espansion ó disparo del fluido, se tiene que recurrir al empleo de otros mecanismos de mayor complicacion.

La comparacion de las figuras 264 y 273 demuestra que haciendo caso omiso de la distribucion la máquina de vapor oscilante es una inversion del mecanismo de la máquina de accion directa. Para ello basta recurrir á un artificio muy sencillo, que consiste en introducir en la formacion de la cápsula el acoplo 4 con signos inversos, de modo que el émbolo y el cilindro de la figura 264 vengan á ser respectivamente el cilindro y el émbolo de la fig. 273. Si se quisiera reducir la máquina á la corredera oscilante sin esa inversion de acoplo, se tropezaria con una gran dificultad debida á la presicion de tenerse que emplear un tubo móvil para establecer la comunicacion entre la caldera y la parte del cilindro destinada á recibir el vapor. Pero si se modificara la distribucion de manera que los conductos de vapor estuviesen establecidos en el vástago mismo del émbolo, suponiéndolo provisto de luces convenientes, seria posible obtener la admision y la evacuacion del vapor por medio de una distribucion con grifos en condiciones realmente admisibles. Nos limitaremos á mencionar aquí que al fin se encontró quien pusiera en práctica esa idea. *E. Jelovicki* tomó en Inglaterra (1836) un privilegio para una disposicion de ese género aplicada á una máquina de vapor y á una bomba (a).

Un dispositivo muy semejante al anterior y que ni siquiera en principio se diferencia, es el de la fig. 274, en la que el gorron de rotacion 3 se halla al estremo del cilindro *c*, en vez de hallarse exactamente en el medio, como en la fig. 273. Las máquinas de vapor de *Alban*, *Farcot* y otros constructores, así como las maquinitas de columna de agua de *Armstrong*, presentan ese dispositivo.

En vez de uno de los miembros móviles puédese utilizar igualmente el miembro fijo *d* para formar la cápsula. Con el fin de demostrarlo y de dar aun mayor carácter de generalidad á la solucion del problema actual, hemos indicado en la fig. 275 una construccion que podria servir como bomba y en la que el miembro *c*, es decir, el cilindro de la fig. 273 está dispuesto como émbolo. Ese último oscila como un péndulo en la cápsula *b* girando alrededor del gorron 3. No podemos decir que este dispositivo tenga algun valor práctico, y sin embargo, se han hecho bombas que tienen con él cierta analogia, como podemos comprobar fijando los ojos en la fig. 306.

Un dispositivo que ofrece más interés todavia es el de la máquina de vapor de *Simpson* y *Shipton* (b), cuya fig. 276 da una representacion esquemática. Construida en 1848 con una ejecucion esmeradísima esa máquina fué sometida á ensayos prácticos que dieron, segun se afirma, muy satisfactorios resultados. Pocos ejemplos, sin embargo, son tan á propósito para demostrar por una parte con cuanta facilidad se encuentran ingenieros, aun de verdadera capacidad, que en lo que les interesa, hallan más de lo que realmente existe, y por otra parte, cuan oscuras y confusas han sido hasta aquí las ideas admitidas en la cinemática. Los inventores mismos, de igual modo que sus intérpretes, se hallan tan confusos por la singularidad de los movimientos que á sus propios ojos efectua la máquina, que no creen deber contentarse con las esplicaciones ordinarias del movimiento; y así para describir el émbolo *a* y su modo de fun-

(a) V. Newton, *London Journal of Arts*, etc.; Conjoined Series, 1837, vol. IX, p. 34.

(b) V. Johnson, *Imp. Cyclopaedia, Descr. of the Plates*, p. 29; véase tambien Newton, *London Journal of Arts*, vol. 37, 1850, p. 207.

cionar creen haber de poner por delante «un escéntrico que gira en su propio diámetro.» Lo cual debemos confesar que es un estraño fenómeno geométrico. «Girar en su propio diámetro» es una frase que no espresa ninguna idea, un conato de esplicacion completamente falto de sentido, que pasa desapercibido hasta para aquellos á quienes la oscuridad de los términos habria debido infundir sospechas. La falta de toda observacion tocante al particular se esplica además precisamente por la ignorancia en que se yacia respecto de los medios propios para dar alguna luz á la cuestion, ó en otros términos, porque el modo de representar los movimientos en uso se encontraba hasta aquí falto en gran parte de los principios fundamentales cuya existencia hemos indicado antes.

El mecanismo de que acaba de tratarse, no es en definitiva otra cosa que una corredera oscilante (véase figura 213), disminuida del miembro *d*, en la cual *c* desempeña las funciones de cápsula con respecto al émbolo *a*, que es el miembro conductor. Por consiguiente, la fórmula del mecanismo es: $(C''_3P^{\perp})\frac{b}{a}-d$, y la del émbolo y la cápsula: $(V^{\pm})=a, c$. El miembro *a* describe con relacion á *c* oscilaciones enteramente análogas á las que efectua el émbolo *d* en las figs. 273 y 274. Por efecto de la supresion del miembro *d* el acoplamiento de órden inferior entre *c* y *a* debe estar reemplazado con un acoplo superior, lo cual hace por estremo difícil mantener un cierre hermético completo que impida los pasos del vapor. No debemos olvidarnos de mencionar que el mecanismo precedente (bajo la forma $(C''_3P^{\perp})\frac{b}{a}-d$) fué igualmente utilizada como bomba de agua por el norte-americano *Broughton* (a). Adoptó una distribucion por grifo y la dispuso en el eje 2 del émbolo *a*.

Figura 277. Bomba de *Knott* (b) privilegiada en Inglaterra el año 1863. Aquí se trata de una cadena completa, en la que el miembro *d* está dispuesto como émbolo y el miembro *d* como cápsula. El prisma 4 del miembro *d*, que conforme á la figura esquemática, está colocado en 3, se ajusta exactamente á la correderita *c*, de igual modo que el contorno esterior del collar 1 del mismo miembro forma juntura hermética con la pared cilíndrica de la cápsula. En la posicion extrema de *d* hácia arriba, se efectua durante un tiempo muy limitado una comunicacion entre los tubos de aspiracion y de impulsion como en la bomba de *Pattison* (fig. 267); pero en las demás posiciones y sin que sea menester una distribucion especial, la rotacion de *a* tiene por objeto producir á un lado del émbolo la aspiracion, y al otro el rechazo del líquido. El miembro *a* debe figurar en la fórmula como miembro conductor.—Conforme con la definicion que antes hemos dado, la bomba de *Knott* es de simple efecto, mientras que las cuatro máquinas precedentes son por el contrario de doble efecto.

Figura 278. Ventilador que *Wedding* hizo privilegiar en Prusia el año 1865.—La cadena $(C''_3P^{\perp})$ se halla en este caso disminuida del miembro *c;* pero á la vez ofrece como empleo la mayor analogia con la bomba de *Knott;* teniéndose aquí igualmente $(V^{\pm})=d, b$ y siendo tambien el manubrio *a* el miembro conductor. El acoplo superior que ha debido establecerse entre *d* y *b* á causa de la supresion de *c*, es el de la fig. 261, y por lo tanto el que hemos visto aplicado á los dispositivos de *Lamb* (figs. 268 y 269). Con las débiles presiones de que comunmente podemos valernos para el movimiento del aire en los ventiladores, el modo del cierre tal como existe en 3 es suficiente de todo punto; y así mismo la comunicacion que se establece entre los conductos de aspiracion y de impulso para el punto muerto superior, no constituye un inconveniente capital (a). La analogia de ese mecanismo con el de *Lamb* (figura 268) puede hacerse todavia mayor. Efectivamente, el cilindro interior *d* de la máquina de *Lamb* con su apéndice prismático vertical 3′, corresponde al émbolo de la máquina de *Wedding*, y el émbolo anular rotatorio de la primera á la cápsula de la segunda.

Por lo demás es evidente que esa última es tan solo de simple efecto, mientras que la primera es de efecto doble. *Wedding* hizo notar que perfilando debidamente la parte de la cápsula situada encima de los conductos, se puede formar con ella y el prisma en *d* otra cápsula con su émbolo, que se encontraria precisamente en su máximum de accion cuando la primera parte del mecanismo llegase al punto muerto. Sobre ese punto se ofrece aun la analogia con la máquina de *Lamb*, en la que existe la misma relacion entre los efectos que corresponden respectivamente al interior y al exterior del émbolo anular *b*.—Si comparamos los dos últimos mecanismos con el de la fig. 264, no ha de pa-

(a) Véase *Propag. industrielle*, IV, 1869, pag. 145. El privilegio francés se remonta á 1856.

(b) Véase *Newton, London Journal of Arts*, etc. New Series, vol. XIX, 1864, Véase tambien Konig, *Pumpen*, Jéna, 1869, pág. 103.

(a) Los dos ventiladores de Wedding, de seis caballos de fuerza, que se instalaron en el arsenal de Spandau, tenian á lo que parece, una marcha muy satisfactoria (el émbolo era de madera y la pieza *d* estaba formada de chilla). Sin embargo, fueron reemplazados por ventiladores ordinarios de alas, porque se habia notado que la disminucion de presion producida al paso del punto muerto, tenia un efecto perjudicial para los fuegos de fragua.

recernos ya sorprendente que nuestro análisis, con el poder de penetracion que tiene, nos haya permitido reconocer en la forma tan particular de la caja *b*, una mera transformacion de la biela de la máquina de vapor, y en el émbolo *d* en forma de raqueta, la armadura de la misma máquina.

§ 82

Capsulismos de manubrio derivados de la corredera rotatoria.

De todos los mecanismos de manubrio no hay ninguno que se haya empleado bajo tantas y tan diferentes formas como el manubrio de corredera rotatoria $(C''_3P^{\perp})^a$, para la produccion de máquinas de vapor rotatorias ó de bombas del mismo género. En ese mecanismo los miembros móviles *d*, *b* y *c* tienen, como sabemos, un movimiento de rotacion, y el último miembro *c*, la correderita, tiene además un movimiento de oscilacion. En las tentativas febriles tan amenudo reiteradas que tienen por objeto inventar una máquina rotatoria, cada uno de dichos tres miembros se ha querido utilizar como piston. Así por ejemplo, en las figuras 279 á 288 *c* es el piston ó émbolo, mientras que en las figs. 289 á 294 es *d*, y en fin, *b* en las dos figs. 295 y 296.

Figura 279. Máquina de vapor inaugurada en 1821 por *Ward* para la propulsion de los barcos de ruedas, luego utilizada sucesivamente como máquina motriz ordinaria por *Mouline* antes de 1847, y por *Schneider* en 1862. Los miembros *d* y *c* están dispuestos respectivamente como cápsula y émbolo, de suerte que la máquina viene á ser una inversion directa de la que representa la fig. 264. La admision y el escape del vapor se efectuan por medio de una distribucion hecha con grifos, á la cual se presta de una manera muy conveniente el gorron 1. El volante está fijo en *b* que viene á ser la pieza cuya rotacion debe trasmitirse tan uniforme como se pueda.

Figura 280. Máquina de vapor propuesta en 1819 por *S. Morey* para la propulsion de los barcos de ruedas y aplicada como máquina motriz ordinaria, para el gobierno de máquinas herramientas, primero en 1834 por *Cramer*, que habia reunido tres cilindros con todos sus accesorios, y luego en 1862 por *Schneider*, que habia vuelto al empleo de un cilindro único. Contra lo que ocurre en la disposicion anterior, aquí es el miembro *d* el que está dispuesto para tener un movimiento de rotacion uniforme. *Morey*, *Ward* y *Schneider* son norteamericanos, y se comprende que esa idea de la máquina rotatoria se haya desarrollado en un terreno tan movedizo como el del Nuevo Mundo. Una ventaja del dispositivo anterior que es digna de llamar la atencion, estriba en que todos los órganos móviles tienen movimientos de rotacion y en que por lo tanto es posible llegar sin inconvenientes á una gran velocidad (a).

Figura 281. Bomba de *Emery* (Norte América). Esa máquina que está formada por la combinacion de cuatro correderas rotativas, tiene por fórmula general $4(C''_3P^{\perp})^a$. El puente *a* está dispuesto como cápsula y las cuatro correderitas *c* constituyen el émbolo; aplicándose cada una de éstas á una pared interna de la cápsula y formando con ella un acoplamiento de órden superior; una muesca practicada en los dos cuadrantes inferiores y no representada en el dibujo, impide que en esos dos cuadrantes se produzca el vacio ó quede encarcelado el líquido. El movimiento se trasmite por mediacion del miembro *d*. En aplicaciones posteriores *Emery* suprimió los lazos *b*, es decir, disminuyó de *b* la cadena, recurriendo al acoplamiento del gorron 2 con la ranura anular que está indicada en la figura. *Emery* utilizó tambien el dispositivo precedente como *aparato de medir líquidos*.

Figura 282. Máquina de vapor imaginada por el lord *Cochrane* en 1831. La correderita *c* constituye tambien en ella el émbolo, pero el miembro rotativo *b* está dispuesto como cápsula. La admision y escape del vapor se efectuan por el gorron hueco 1 y el conducto que se figura en punteado en el émbolo *c*. El contacto del miembro *d* con la cápsula en la parte inferior, constituye tambien un acoplamiento de órden superior.

Figura 283. Bomba de gas de *Beale*. Esa bomba que se ha generalizado mucho, está formada por la reunion de dos correderas rotatorias, teniendo por consiguiente como fórmula general $2(C''_3P^{\perp})^a$ y como fórmula especial $2(C''_3P^{\perp})\frac{a}{d}$, puesto que *d* es el miembro conductor. El miembro fijo *a* es la cápsula y el miembro *c* el émbolo; el lazo *b* tiene la forma de un sector anular (§ 71), que se desliza por una ranura igualmente circular, formando cuerpo con *a*, y que abarca un arco de estension suficiente para evitar las fugas de gas intempestivas á través del canal anular 2.

Figura 284. Máquina de vapor rotativa de *Davies* (Inglaterra), privilegiada en 1867. En esa máquina constituida por la reunion de tres mecanismos $(C''_3P^{\perp})^a$, *a* es la cápsula, *c* el émbolo y el miembro motor. El

(a) Una máquina de ese género de tres cilindros es la de *Cramer* ideada en 1834.

lazo *b* se reduce á un vástago cilíndrico, una parte del cual está aplastada siguiendo un perfil igualmente cilíndrico, que es cabalmente una fraccion del cilindro 2, cuyo eje coincide con el eje de la cápsula *a*, y corresponde por lo tanto al boton de manubrio del mecanismo $(C''_3P^{\perp})^d$. Por efecto de la ejecucion bastante imperfecta del gorron 2 el lazo *b* no goza de un movimiento desmodrómico. Por ese motivo *Davies* se vió obligado á recurrir á otra clausura, y eso es lo que hizo añadiendo una ranura circular (representada con líneas de puntos en el dibujo), en la que las correderitas se encajan con gorrones redondos, lo cual viene á ser la introduccion de un acoplamiento superior entre *c* y *a*.

Cumple además observar que esa clausura no es rigurosamente exacta; y con efecto, en la hipótesis de botones cilíndricos fijos en las correderitas *c* la ranura para formar clausura no debiera ser circular, ó bien, con una ranura circular los gorrones de *c* no debieran ser cilindros, sino más bien porciones de cilindros cuyo eje fuera el eje de 3.

Figura 285. Bomba rotatoria muy antigua, ideada por el capitan *Ramelli* y cuya descripcion dió el mismo en 1588. Esa bomba está constituida por cuatro correderas de manubrio rotatorias, en las cuales está suprimido el lazo *b; d* es el miembro conductor y la correderita *c* es de clausura de fuerza, siendo por lo tanto la fórmula especial:

$$4\left[(C''_3P^{\perp})^{\frac{a}{d}} - b - \frac{c}{2}\right]$$

En la figura hemos indicado dos resortes como medio de producir la clausura de fuerza; *Ramelli* no empleaba resortes, sino que disponia la máquina de manera que el centro del tambor interno *d* se hallase encima del de la cápsula, y se contentaba con la clausura hasta cierto punto suficiente que el peso de las correderitas producia. La cápsula *a* presenta inferiormente la forma de un cilindro ordinario y su acoplamiento con las correderitas es de órden superior. La máquina de *Ramelli* se ha vuelto á inventar con mucha frecuencia, en prueba de lo cual nos limitaremos á citar la máquina de vapor de *Borrie*, de cuatro alas, con resortes, y la bomba de *Caméré* que no tiene más que dos alas, las cuales son impulsadas igualmente hácia fuera por medio de resortes.

Figura 286. El dispositivo indicado con esta figura ofrece una grande analogía con la de *Ramelli*. Propusiéronla en 1857 como máquina de vapor y bomba *Jones* y *Shirreff* (Inglaterra); despues en 1867, como máquina de vapor, *Ortlieb* y *White* (Norte América). Aquí encontramos un triple empleo de la cadena $(C''_3P,^{\perp})^a$, disminuida de *b*. El acoplamiento superior que está destinado á guiar *c* y reemplazar así la aecion del lazo *b* suprimido es conveniente de todo punto. En la máquina de *Jones* y *Shirreff* el cilindro 2 está dotado de un movimiento de arrollo, con el fin de disminuir el rozamiento entre él y las correderitas.

Figura 287. Otra disposicion del mismo mecanismo propuesta por *Beale* como máquina de vapor y aplicada por él á un barco de vapor. *Dalgety* y *Ledier* lo utilizaron como bomba en 1854. En ese dispositivo las correderitas *c* son completamente cilíndricas y tienen al propio tiempo la facultad de tomar un movimiento de arrollo. La máquina de *Beale* dió malos resultados, y no hay que estrañarlo, si se observa que por razon de los numerosos acoplos superiores que en ella se encuentran, es casi imposible obtener un cierre hermético.

Figura 288. La máquina de vapor indicada en esta figura fué propuesta por *Smyth:* es de forma singular muy á propósito para evidenciar hasta que punto puede conducir la falsa idea que á veces se tiene de atribuir á la máquina de vapor rotatoria ventajas estraordinarias. La máquina de *Smyth* está formada por la reunion de cuatro mecanismos del género $(C''_3P^{\perp})^a$ —*b*. El acoplo superior destinado á suplir la carencia del miembro *b*, está constituido por un anillo y un cilindro, que se desliza en el interior, consistiendo únicamente la accion ejercida por el vapor en el efecto de espansion del volúmen del vapor encerrado entre los cilindros *c* que se reemplazan sucesivamente. De toda evidencia esa máquina es muy imperfecta.

Figura 289. Máquina de vapor formada de dos mecanismos del género $(C''_3P^{\perp})^a$. Por vez primera encontramos aquí el miembro *d* dispuesto como émbolo; el lazo *b* forma un tambor que está en contacto con el interior de la cápsula y que además gira alrededor del gorron 2, cuyo soporte está cubierto; las correderitas *c* forman piezas de clausura en los puntos en que *d* cruza el tambor *b*. *Lechat* propuso y ejecutó esa máquina en 1866 empleando un solo émbolo y por consiguiente un solo mecanismo $(C''_3P^{\perp})^a$. *Hick*, de Bolton, habia ya obtenido un privilegio inglés para esa misma máquina en 1843. Pero anteriormente á los dos, en 1831, *lord Cochrane* habia ejecutado esa máquina bajo las dos formas con dos émbolos, como lo indica nuestro dibujo, y con uno solo; en 1833 *lord Dundonald* introdujo algunas pequeñas modificaciones en tales dispositivos. Por último, el norte-americano *Root* reprodujo igualmente la misma máquina en 1863 empleando tres émbolos en vez de dos ó de uno solamente.

Figura 290. Máquina con tres aletas empleada como ventilador. Esa disposicion que es análoga á la antecedente, fué objeto de un privilegio tomado en Inglaterra por *Bellford* en 1855. Recientemente ha dado *Root* como nuevo ese mismo ventilador.

Ahí vemos un ejemplo elocuente del verdadero derroche de la fuerza de invencion, al cual ha dado orígen el problema de las máquinas y bombas de vapor rotatorias, y que no habia medio alguno de impedir con el modo de enseñanza que hasta ahora habia usado la cinemática.

Figura 291. Otra disposicion de máquina de vapor rotatoria debida tambien al génio creador de *lord Cochrane*. Nótase aquí inmediatamente que se trata de una disminucion de cadena. El miembro *c* de la clase precedente de máquinas está en efecto suprimido, y queda por lo tanto el mecanismo $(C''_3P^{\perp})^3$—*c*. El acoplamiento superior introducido para suplir la carencia del miembro *c* es el de la figura 260, que casi no permite esperar un cierre bastante hermético.

Figura 292. No estando satisfecho todavia el infatigable lord con la série de combinaciones que habia obtenido y que acabamos de mencionar, tuvo la idea de dar al mecanismo anterior otra forma que hemos representado con la figura 292 y que él aplicó á una bomba. Aquí tambien la cadena se encuentra disminuida de *c*, pero en vez de *a* el miembro *b* es el que se encuentra dispuesto como cápsula $(V^{\pm})=d$, *b*. Si se compara la figura actual con la 278 se conoce inmediatamente que, prescindiendo de la disposicion de los conductos, el mecanismo de la primera de esas figuras es una inversion del mecanismo de la segunda.

Figura 293. Para hacer la cosa más fácil de comprender hemos reproducido en la figura 293 el mecanismo anterior aumentado con el miembro *c;* y es evidente que el nuevo mecanismo así obtenido es una inversion de la bomba de *Knott* (figura 277), que, con la supresion de *c*, dió el mecanismo de la figura 278.

Figura 294. Antes ya, respecto de la figura 288 hemos mencionado la propiedad que tienen los manubrios múltiples de corredera rotatoria de agrandar y disminuir alternativamente los espacios que existen entre los émbolos de rotacion. Esa propiedad se halla utilizada en el mecanismo de la figura 294, que está dispuesta de manera que tales espacios disminuyan hasta el punto de ser casi nulos para aumentar enseguida hasta su máximum. Constituye ese mecanismo la reunion de dos cadenas $(C''_3P^{\perp})^2$; *d* es el émbolo y *a* la cápsula. La dismiuucion hasta cero de los intérvalos entre los émbolos se consigue con la eleccion conveniente del ángulo de desarrollo de los sectores *d*. Las correderas propiamente tales *d* con los lazos y las correderitas se hallan establecidas fuera de la cápsula.

Minari logró empleando tres veces la cadena $(C''_3P^{\perp})^3$ una disposicion que propuso como máquina de vapor en 1838, y *Stocker* no utilizando el mismo mecanismo más que dos veces, como lo indica nuestra figura, consiguió en 1872 otra disposicion que propuso igualmente como máquina de vapor. En tal caso *d* es el miembro motor, y si la máquina se utiliza como bomba, *b* es el miembro que llena esas funciones.

Entre el émbolo y la cápsula existe, como puede notarse, un acoplamiento inferior, de modo tal que no es difícil obtener aquí junturas cerradas herméticamente con respecto al vapor. *Smyth* reunió cuatro manubrios de corredera rotativa, y reemplazando los lazos en el interior de la cápsula, obtuvo un dispositivo que representamos con la fig. 297 y que él propuso como bomba. Las correderitas *c* están suprimidas y reemplazadas por el acoplamiento de la cadena disminuida que representa la fig. 259. La fórmula por consiguiente debe escribirse:

$$4[(C''_3P^{\perp})\frac{a}{b}—c]$$

Figura 295. Esa forma de capsulismo derivado de $(C''_3P^{\perp})^3$ fué debida tambien á lord *Cochrane*. Aquí el miembro *d* está dispuesto como cápsula y hasta en rigor como émbolo. No obstante, puede tambien considerarse como émbolo el lazo *b* indicado en nuestro dibujo bajo la forma de un tambor cilíndrico.

Figura 296. El lazo *d* puede igualmente disponerse como émbolo con una clausura por acoplo inferior. Para mejor demostrarlo hemos representado en la fig. 298 una solucion de ese género, en la que *d* forma el tambor y *c* es la pieza del cierre. Una solucion análoga se encontró en la práctica, cual es la de la máquina de vapor rotatoria de *Flechter* (América del Norte?), que se remonta á 1843 (a) y que está representada por la fig. 296. Está constituida por la reunion de tres mecanismos $(C''_3P^{\perp})^3$. La forma bajo la cual está ejecutado cada lazo *b* es muy notable, y precisamente con el objeto de hacerla comprender mucho mejor hemos añadido la construcción de la fig. 298. El gorron central 2 del lazo *b* de esa última figura está ensanchado en la figura 296 hasta la periferia interna de la cápsula *a*, de manera que la accion del lazo primitivo se halla reemplazado por el acoplamiento de una ranura anular practicada en la cápsula, con pequeño anillo lleno (A^{+}) sujeto al

(a) El autor no tuvo conocimiento de esa máquina sino en virtud de una comunicacion privada.

émbolo *b*. Esa estraña disposicion es muy á propósito para disimular la verdadera naturaleza del mecanismo, y sin embargo, despues de analizarla se vé que naturalmente debe clasificarse entre los dispositivos que acabamos de examinar (46).

§ 83

Capsulismo de manubrio derivado del manubrio de impulsion oscilante.

De los cuatro mecanismos derivados de la cadena $(C''_3P^{\perp})$ el manubrio de impulsion oscilante $(C''_3P^{\perp})^c$ es conforme hemos dicho, el que más rara vez se emplea como simple mecanismo de movimiento; y tampoco ha encontrado como capsulismo más que rarísimas aplicaciones. Que nosotros sepamos, no existe más que una sola, hecha en 1848 por *Simpson* y *Shipton*, en una máquina de vapor que funcionaba en la Exposicion de Londres de 1851 y que produjo una gran sensacion.

Los inventores que son los mismos á los cuales fué debida ya la máquina representada por la fig. 276 aportaron al concepto de su segunda máquina la misma oscuridad que hemos notado en la primera. Para trasmitir el movimiento del miembro *a* á un eje susceptible de girar sobre soportes fijos recurrieron á un mecanismo auxiliar, que consistia en un acoplo de manubrios paralelos, fijos los unos en *a* y los otros en un eje conaxial al gorron 3, eje que es cabalmente el del volante. Los dos lazos de ese acoplo de manubrios son paralelos al lazo principal *b* y forman con él, por decirlo así, dos acoplos de manubrios paralelos. Con efecto son enteramente á propósito para trasmitir al eje que pasa por 3 los desplaces de *a*, que como sabemos, abarcan 360°, y de los múltiples de ese ángulo (§ 69). A más de ese mecanismo auxiliar encuéntrase aquí una cadena $(C''_3P^{\perp})$ fija en *c* y disminuida de *d*, en la que el manubrio *a*, es el miembro conductor y forma émbolo cilíndrico, en tanto que la correderita *c*, que ha venido á ser puente, está dispuesta como cápsula. Por consiguiente, la fórmula completa del mecanismo es: $(C''_3P^{\perp})\frac{c}{a} - d + (C''_4)$, á la cual conviene agregar $(V^{\pm}) = a, c$, para indicar el modo de formacion del capsulismo. Examinando atentamente la disposicion de la figura 299 y comparándola con el mecanismo de la figura 276, fácil es comprender porque nos encontramos en ambos casos en presencia de los mismos inventores; pues el mecanismo $(C''_3P^{\perp})^e - d$ no es en realidad sino una mera inversion del anterior $(C''_3P^{\perp})^b - d$. El acoplamiento entre *c* y *a* es de órden superior, lo cual hace muy difícil la realizacion de un cierre hermético. Hubiera sido posible emplear un acoplamiento inferior y asegurarse por lo tanto de mejores condiciones de hermeticidad, no suprimiendo el miembro *d*. Entonces se habria podido adoptar para la cápsula la forma cilíndrica ordinaria con su émbolo, el cual en tal caso hubiera debido estar formado de dos piezas.

Despues de todo lo que llevamos dicho, debemos dejar al lector el cuidado de probar esa forma mucho más práctica que la anterior, sin querer, empero, alentarle por lo mismo á dar á luz la máquina dotada con ese perfeccionamiento. Tal como aquí se presenta la disposicion de la fig. 299, es en estremo poco práctica, y en todo caso lo es infinitamente ménos que la máquina de vapor ordinaria y de accion directa. Mas ¿qué diremos entonces de la singular aberracion de ideas que resalta de las palabras siguientes pronunciadas por *Shipton* en una reunion de ingenieros mecánicos de Birmingham: «Cuando (como aquí) la accion del vapor puede aplicarse de manera que actue directamente sobre el manubrio, se tiene (para la utilizacion de la potencia de este fluido) un procedimiento *más sencillo y conveniente* que el que se ha usado hasta ahora?» Es verdaderamente asombroso atreverse á formular semejante aserto respecto de una disposicion en la que es necesario intercalar entre el émbolo y el eje del volante un mecanismo tan difícil de establecer como lo es el de los manubrios paralelos.

Aquí debemos hacer una observacion general aplicable á todas las máquinas nuevas. Cuando se dice de una máquina que ha funcionado bien, puede inferirse que su disposicion es ingeniosa, que su ejecucion ha sido esmerada, más no se puede deducir nada sobre su verdadero valor práctico. Amenudo se han confundido esas dos circunstancias esencialmente distintas, y esa confusion ha ejercido una perniciosa influencia en el juicio de hombres capaces y sensatos, en las cuestiones de máquinas de vapor rotativas.

§ 84

Capsulismo de manubrio derivado del manubrio de corredera en cruz rotatoria.

El manubrio de corredera en cruz rotatoria (véase § 72) se presta muy bien á la formacion de máquinas de vapor y de bombas, por cuya razon se ha aplicado muy amenudo á un género especial de aparatos que se obtienen combinando una máquina de vapor con una bomba y que constituye lo que se llama una bomba de vapor. En la fig. 300, que representa una

aplicacion de ese género, la corredera en cruz *c* está dispuesta en forma de émbolo á cada uno de sus estremos inferior é superior, á la vez que el puente *d* en las partes correspondientes forma cápsula. Esa máquina de vapor es de doble efecto, y la bomba de efecto sencillo ó simple. En cuanto al resto del mecanismo, está dispuesto como de costumbre. La fórmula general debe por consiguiente (§ 72) escribirse como antes $(C''_4 P^{+}_{2})^{d}$, en tanto que la fórmula especial es: $(C''_4 P^{+}_{2})^{\frac{d}{c}}$.

Examinando detenidamente el movimiento alternativo de la corredera *b* en la correderita *c*, se ve que ese movimiento es análogo al del émbolo en una cápsula, y que la carrera de la correderita es la misma que la de *c* en su movimiento respecto de *a*. Luego, si con *b* y el prisma 2 que resbala en *c*, se formase un émbolo tomando la misma corredera *c* como cápsula, podria igualmente someterse dicho émbolo á la accion de un órgano de presion, y llegar así á realizar el paso de los puntos muertos por mediacion de una clausura por cadena (véase § 46). Seria muy sorprendente que semejante idea no se hubiese ocurrido hasta ahora á ningun inventor, y efectivamente la encontramos aplicada en una máquina de vapor propuesta por el norte-americano *Root* bajo la forma que representa esquemáticamente la fig. 301. Las dos cápsulas *d* y *c* ofrecen capacidades prismáticas de secciones rectangulares, de manera tal, que todas las superficies destinadas á formar juntura son planas, lo que no deja de presentar ciertas dificultades de ejecucion. Sin embargo, como los cuerpos en contacto constituyen aquí acoplos inferiores, es posible realizar cierres suficientemente herméticos. En la formula especial debemos poner en evidencia á la vez *c* y *b* como miembros conductores y escribir por consiguiente $(C''_4 P^{+}_{2})^{\frac{d}{b+c}}$. La revista de la que hemos estraido la disposicion de esa máquina, no vacila en darla como la «quinta esencia de la sencillez;» juicio al cual no se puede suscribir sino con las mayores reservas, colocándose bajo el punto de vista de la utilizacion práctica.

§ 85

Capsulismos de manubrio derivados de la corredera en cruz rotatoria.

La cadena del mecanismo precedente suministra con la fijacion en *a* la corredera en cruz rotativa $(C''_4 P^{+}_{2})^{a}$, algunas de cuyas aplicaciones hemos indicado en el párrafo 72. Ese último mecanismo puede además servir para formar capsulismos en máquinas de vapor.

La figura 302 representa la máquina de vapor imaginada y construida por *Witty* en 1811. Si suponemos suprimida la bomba de la máquina de la fig. 300, se llega inmediatamente por una simple inversion del mecanismo á la máquina de *Witty*. El manubrio *a* viene á ser el puente ó la armadura; el cilindro *d* gira, así como la correderita *b*, en tanto que la corredera en cruz *c* describe, en su movimiento, cardioides que hemos aprendido á conocer antes; pues con efecto sabemos que las trayectorias polares entre esa corredera y *a* son círculos de *Cardan*, el mayor de los cuales corresponde precisamente á la corredera. Dichos círculos están trazados en la fig. 302. Cuando la corredera en cruz *c* está acoplada con *d*, de manera que forme como en la figura el acoplo 4, está dispuesta por un lado como simple guia prismática, y por el otro como émbolo, es decir, como miembro conductor, de suerte que *c* debe figurar en el denominador en el esponente de la fórmula.

Witty parece haber estudiado detenidamente la índole de los movimientos de su máquina y buscado las trayectorias de puntos de la corredera en cruz, pues se le ve más adelante construir otra máquina (fig. 303), en la que la cadena está disminuida de la correderita *b* y en consecuencia dotada de un acoplamiento superior entre *c* y *a*. El puente *a* está provisto al efecto de un cuadro cuyo perfil está constituido por una curva equidistante de una cardioide prolongada (véase §§ 22 y 35). Como los diámetros de las cardioides que pasan por el centro de 1 son constantes, el vástago *c* está constantemente en contacto con ese cuadro ó marco por los dos rodillos cilíndricos que lo terminan, de manera que forma una clausura contínua. Esa máquina de *Witty* no puede verdadaramente considerarse como susceptible de una utilizacion práctica, y con todo la vemos reaparecer en 1858, casi sin cambio alguno, bajo la denominacion de máquina de *Andrew*.

Considerando la posicion escéntrica del eje de rotacion 1 en el anillo de *a*, se concibe que no ha de ser difícil hacer obrar el miembro *c* como piston en el interior de un cápsula cuyo contorno estaria formado por una cardioide. Ahí vemos realmente una idea que se ha llevado varias veces á la práctica, y particularmente en Paris por *Franchot*, bajo la forma indicada en esquema por la fig. 304. El miembro *d* está dispuesto como tambor, á la vez que el émbolo *c* se adapta constantemente á la pared de la cápsula por ambos estremos, cuyos perfiles son semi-cilindros. Una máquina

muy análoga á la precedente espuso en Paris *Serquis-Ballian* (a) el año 1867.

Woodcock reunió dos cadenas del género que acabamos de estudiar y obtuvo el dispositivo indicado por la figura 305 y cuya fórmula es: $2[(C''_2P^{+}_{2})^a—b]$. El perfil interior de la cápsula debe tambien aquí estar formado por una curva equidistante de una cardioide, puesto que las correderitas tienen una longitud invariable y están terminadas en sus estremos con semi-cilindros. Segun los dibujos suministrados por la revista de la cual hemos tomado esos datos y noticias, *Woodcock* parece haber empleado un círculo en lugar de una cardioide. Esa aproximacion deja mucho que desear, pero con dispositivos suficientemente elásticos se puede atenuar hasta cierto punto ese inconveniente, siendo por otra parte indudable que los resultados obtenidos son tanto más satisfactorios cuanto más exígua es la escentricidad, ó sea la longitud *a* del manubrio más pequeño. *Woodcock* habia dado muy poco valor á esa escentricidad.

De las cuatro máquinas que acabamos de examinar las tres últimas ofrecen realmente muy poca importancia, como quiera que las dificultades de ejecucion de los perfiles de cardioides no están en modo alguno compensadas por las ventajas debidas á su empleo. Por lo demás, la primera máquina tampoco tiene gran valor bajo el punto de vista práctico, por más que en ella solo se encuentren acoplos inferiores y que por lo tanto no sea difícil llegar á una hermeticidad satisfactoria.

§ 86

Capsulismos de manubrio derivados del manubrio rotatorio de impulso curvilíneo.

El cuadrilátero de manubrio (C''_4) se ha utilizado tambien con frecuencia como máquina motriz y como bomba, poniendo los diversos miembros bajo la forma de cápsula y de émbolo. Ante todo examinaremos cierto número de aparatos fundados en el empleo del manubrio rotatorio de impulsion curvilínea $(C''_4)^d$.

La figura 306 representa un mecanismo propuesto primero por *Bramah* como bomba, y luego sucesivamente por *Morgan* (1830) y por *Ericson* como máquina de vapor. En los tres casos el oscilador *c* está dispuesto como émbolo y el puente *d* como cápsula. El movimiento del émbolo es un movimiento oscilatorio que sigue un arco de círculo entorno del eje 4. En el caso en que el aparato está utilizado como bomba la fórmula especial correspondiente es: $(C''_4)^{\frac{d}{a}}$.

En vez de un sector único, para formar el émbolo se pueden emplear dos ó un número mayor. *Gray* (figura 307) dió á la cápsula *d* la forma de una esfera, de modo que la superficie de contacto entre esa cápsula y los sectores es una zona esférica, por cuya razon esa máquina se designa igualmente con el nombre de máquina de vapor esférica. Por lo demás, no se puede consignar ventaja alguna que resulte de esa forma especial. *Thompson* que utilizó ese mecanismo para máquinas gemelas, disponia el miembro *c* como cápsula y el miembro *d* como émbolo: $(V^{\pm})=d,\ c;$ y además mantenia fijo el émbolo y hacia oscilar la cápsula.

Degrand disponia el piston *c* como sector de lo que llamó un anillo cilíndrico *(aro globoide)*, el cual oscilaba en dos prensa-estopas establecidos á los estremos de la abertura practicada en la cápsula *d*, para dar paso al vástago oscilante *c* (fig. 308). Esta máquina es de ejecucion muy difícil.

La fig. 309 representa la máquina de vapor rotativa de *Dundonald*, en la que la cadena está aplicada de una manera enteramente distinta; pues aunque *d* es todavia la cápsula, el émbolo está constituido por el manubrio *a*. El mecanismo es doble, á fin de impedir la afluencia intempestiva de vapor en el escape. El lazo *b* se reduce á una pieza de juntura, de bronce, que no está cerrada cinemáticamente en el gorron 3 ni en el gorron 2 (boton del manubrio), y cuya clausura tiene simplemente efecto merced á la accion del vapor ó de un peso dispuesto al esterior. La pieza oscilante *c* forma una especie de aleta que oscila en la cápsula. Teniendo en cuenta la clausura por fuerza de *b*, debe la fórmula escribirse: $2\left[(C''_4)^d — \frac{b}{2}\right]$, á la cual conviene agregar $(V^{\pm})=a,\ d$. Importa no perder de vista que el manubrio *a* debe formar juntura hermética, no solamente sobre las paredes laterales de la cápsula, sino tambien sobre su contorno. Los detalles de los dispositivos no están indicados en la figura.

Cochrane fijó igualmente su atencion en esa forma de máquina de vapor rotatoria; y la disposicion que decidió está indicada en la fig. 310. Está constituida por la reunion de tres mecanismos; el lazo *b* está completamente suprimido, y el oscilador *c* forma juntura con *a* como anteriormente, por medio de una clausura de fuerza. La entrada y evacuacion del vapor se efectuan por medio de conductos practicados en el inte-

(a) Propuso sucesivamente esa máquina como bomba en 1861 y luego como máquina de vapor.

rior de *a*, que se encuentran en comunicacion en tiempo oportuno con otros conductos aplicados al eje 1.

En 1868 *Cooke* utilizó primero el mecanismo $(C''_4)^d$ para una máquina de vapor, en la que *a* y *d* estaban reservadas como émbolo y cápsula y el oscilador *c* bajo forma de correderita curva, se hallaba aplicada al émbolo *a* por clausura de fuerza, y oscilaba á través de la pared misma de la cápsula, siendo en tal caso la fórmula: $[(C''_4)^d—b]$. Más adelante *Cooke* empleó el propio mecanismo como ventilador bajo la forma representada por la fig. 311. Aquí la cadena es de nuevo completa, puesto que fuera de la cápsula el mecanismo comprende un manubrio, un lazo, un oscilador y un puente; amen de que *d* está dispuesta como cápsula cilíndrica y *a* como émbolo á cuyo contorno se aplica constantemente una parte saliente del oscilador *c*. El contacto se efectua entre esas dos piezas sobre una porcion de cilindro cuyo eje coincide con 3. El aparato de *Cooke* se construye dándole grandes dimensiones y se utiliza como ventilador de minas.

De todas las máquinas representadas por las figuras 306 á 311, ambas inclusive, la última es la sola que pueda considerarse como realmente práctica, puesto que en efecto no ofrece dificultad alguna de construccion y suministra un grado de hermeticidad suficiente para las diferencias de presion relativamente pequeñas que exije la ventilacion de las minas.

§ 87

Capsulismos de manubrio derivados del manubrio doble rotativo.

El manubrio doble rotativo $(C''_4)^a$ se ha utilizado con frecuencia para la formacion de capsulismos, y de él damos aquí como ejemplos cuatro distintas aplicaciones.

La figura 312 representa una bomba construida por *Heppel* (de Suiza). Está constituida por la reunion de cuatro manubrios dobles rotatorios. La direccion de ideas que debe haber conducido á ese invento, ofrece una analogia incontestable con la que se ha seguido para llegar á la máquina de la fig. 294. El miembro fijo *a* constituye la cápsula, y uno de los manubrios rotativos *d*, el émbolo, mientras que el segundo manubrio rotatorio *b*, bajo la forma de un disco móvil entorno del gorron 2, trasmite al émbolo por mediacion del lazo *c* un movimiento de rotacion cuya velocidad crece y decrece periódicamente.

El ventilador de *Lemielle* (fig. 313) cuyo uso está muy generalizado, presenta suma analogia con el anterior. Aquí tambien *a* es la cápsula, pero *c* constituye el émbolo en lugar de *d*, y el manubrio *b* forma un tambor que divide de una manera conveniente el espacio interno. Las razones que hemos invocado en favor del ventilador de minas de *Cooke*, deben igualmente atribuirse al de *Lemielle*, que construido en grandes proporciones, cuenta con numerosos partidarios en Bélgica y en Inglaterra.

La figura 314 representa una bomba muy antigua imaginada por *Ramelli*. Esa bomba constituida por la reunion de tres mecanismos de la especie $(C''_4)^a$ podria en rigor considerarse como derivada de la rueda de *Lemielle*, á la cual se hubiese aplicado el procedimiento de disminucion de cadena. Puede en efecto señalarse en la bomba de *Ramelli* la carencia del manubrio guia *d*, que existe en el aparato precedente, así como del acoplo superior, que debiera reemplazar á dicho manubrio, de suerte que el émbolo estuviese aplicado á las paredes de la cápsula por mera clausura de fuerza. La fórmula general es por consiguiente:

$$3\left[(C''_4)^a—d—\frac{c}{2}\right]$$

Esa máquina parecida á la de *Lemielle* nos suministra un ejemplo interesante que merece citarse en apoyo de lo que hemos dicho anteriormente (capítulo VI) conrespecto al modo de desarrollo de las máquinas; y la forma moderna del ventilador de *Lemielle* no es en efecto más que el perfeccionamiento cinemático de la antigua bomba de *Ramelli*.

En la figura 315 nos hallamos todavia en presencia de una modificacion de la bomba de *Ramelli*, modificacion que se debe á lord *Cochrane*, y que tiene por objeto convertir esa bomba en máquina de vapor. Tambien aquí falta por completo el miembro *d*, y es de clausura de fuerza el miembro *c*. De todos modos esa máquina es muy imperfecta.

Como otra forma de máquina de vapor rotativa derivada del mecanismo $(C''_4)^a$ y sin disputa ménos imperfecta que la precedente, podemos citar la de *Rösky*, cuyo dispositivo se nos comunicó por carta, y que está representado por la figura 316. Como en ella no se utiliza más que una cadena, es preciso recurrir á un cajon de distribucion para impedir los escapes ó pasos intempestivos del vapor. El miembro *d* está aplicado por clausura de fuerza á la pared interior de la cápsula. Siendo *c* el miembro conductor, debe escribirse la fórmula de esa máquina: $(C''_4)\frac{a}{c}—\frac{d}{2}$, á la cual conviene

añadir: $(V^{\perp})=c, a$, para indicar el modo de formacion del émbolo y de la cápsula.

§ 88

Capsulismos derivados de los mecanismos de manubrio cónicos.

Entre las numerosas máquinas que aquí hemos descrito y analizado hay varias que con los métodos antiguos era dificilísimo esplicar ó hasta describir y que por lo tanto habian quedado más ó ménos oscuras para gran número de mecánicos. Pero existe una máquina, ó por mejor decir, una pequeña clase de máquinas que bajo el punto de vista de esa falta de claridad y de las dificultades de comprension, deja muy en zaga á todas las precedentes: nos referimos á la máquina que se designa con el nombre de *Máquina de disco*, y de las bombas ó máquinas de vapor rotatorias que tienen con ella cierta analogia. Desde su invento que se remonta á más de cuarenta años, esas máquinas se han ostentado siempre como un verdadero enigma. Un filósofo célebre, cuya muerte aconteció hace ya más de diez años, pasa por haber dicho en los últimos tiempos de su vida, que de todos sus discípulos uno sólo le habia comprendido, pero que éste le habia comprendido mal. Estudiando las máquinas del género precedente se viene sin querer á la memoria la anécdota esa. Muy pocos son los que las han comprendido, y estos, sin ni siquiera esceptuar á los inventores, las han comprendido mal.

Y sin embargo, no son muy raras esas máquinas. Podia verse una en la Exposicion universal de 1867 en Paris: y otra mueve las prensas de movimiento rápido en que se imprime el periódico *The Times*. Pero si buscamos una descripcion, fácilmente llegamos á convencernos que reina la mayor oscuridad relativamente á la verdadera índole del mecanismo. En sus descripciones de los privilegios los inventores dan las vueltas y revueltas más extrañas para llegar á ofrecer á los demás una idea de lo que para ellos ha sido el producto de una feliz inspiracion. En cuanto al teórico á quien toca tener que hablar de esas máquinas, pasa rápidamente por el análisis cinemático del mecanismo, no sin revelar á veces algun embarazo, y aun amenudo no vacila en confesar francamente que nada de aquél puede comprender.

La causa de dicha oscuridad reside únicamente en la imperfeccion del método hasta aquí predominante, en virtud del cual se quiere formar juicio de los movimientos mecánicos antes de haber investigado las condiciones relativas á la desmodromicidad de tales movimientos. La máquina de disco y sus variedades no constituyen realmente otra cosa que una série de capsulismos derivados de mecanismos de manubrio cónicos. Procediendo como lo hemos hecho antes en los mecanismos de manubrio cilíndricos (§ 78), es decir, disponiendo como émbolo y como cápsula miembros debidamente escogidos de la cadena y aplicando los dispositivos de distribucion necesarios, se obtenian, y se obtienen aun hasta ahora, las diferentes variedades de capsulismos de manubrio cónicos que actualmente debemos examinar como casos particulares de una série verdaderamente general. Un punto hay que merece señalarse y es que los descubrimientos empíricos se han mantenido hasta ahora en un terreno muy restringido, limitándose al caso en que la cadena $(C^{\angle}_{4})$ tiene tres miembros rectangulares, esto es, tiene la forma $(C^{\perp}_{3}C^{\angle})$. Es la cadena que anteriormente (§ 75. C) hemos designado con el nombre de cadena de juntura en cruz rectangular. Entonces hemos hallado que podian deducirse tres mecanismos. Dos de ellos pueden por efecto de esa intuicion especial de las investigaciones empíricas haber sido hallados en forma de capsulismos, y merced á la energia que es capaz de inspirar el problema de la máquina rotatoria, se han reproducido bajo un gran número de aspectos diferentes.

§ 89

Capsulismos derivados del manubrio de juntura en cruz rotatoria.

La máquina de vapor rotatoria que con preferencia se denomina con el nombre de máquina de disco, está representada esquemáticamente por la fig. 1. Por regla general se hace más exacta esa denominacion añadiendo el nombre de *Davies* (a) ó el de *Bishop*, que las perfeccionó en época más reciente. Segun los datos suministrados por las diferentes publicaciones los primeros inventores de esa disposicion especial fueron los hermanos *Dakeyne* (de Inglaterra), que la hicieron privilegiar en 1730 y la utilizaron como máquina de vapor y como bomba. De las numerosas descripciones que de ese sistema de máquinas se han dado, la más completa es la de *Johnson*, la cual se aplica especialmente á la máquina que mueve los aparatos de la im-

(a) Por efecto de un error de imprenta que hay en la obra de Bernouilli y que se reprodujo en las cinco ediciones sucesivas, desde mucho tiempo se conoce en Alemania esta máquina con el nombre de máquina *Darries*.

prenta del *Times* y que fué construida con los perfeccionamientos aportados por *Bishop* á la disposicion primitiva.—Aquí nos hallamos en presencia del mecanismo $(C_3^{+}C^{\angle})^{d}$ ó del manubrio de juntura en cruz rotatoria (§ 75, n.° 15), en la cual el miembro fijo *d* está dispuesto como cápsula, y el miembro *b*, el lazo, como émbolo. La cadena cinemática que así se utiliza, es absolutamente la misma que la que, por su fijacion en *a*, la juntura de *Cardan* suministra.

El manubrio *a* es fácil de conocer, pues gira en torno del gorron 1 y se halla ligado al lazo *b* por el gorron 2. A 90° de ese último gorron el lazo lleva otro 3, que penetra en la correderita *c*. A su vez esa correderita gira alrededor de un eje perpendicular al plano de la figura y se encuentra por lo tanto á 90° del gorron 3. El acoplo de cilindros, ó hablando de una manera más general, el acoplo de rotoides correspondiente á ese cuarto eje no existe aquí más que en la forma de sector, comprendiendo por un lado el perfil de la correderita *c*, y por el otro la superficie que le sirve de guia y que está dispuesta en el vértice de la cápsula. Por lo tanto encontramos en los cuatro miembros *a*, *b*, *c*, *d*, la cadena cinemática:

$$C^{+}...\angle...(C)...\perp...(C)...\perp...(C)...\perp...C^{=}$$

que está fija en el miembro rectangular *d*, adyacente al miembro acutángulo *a*.

Importa mucho darse clara cuenta de la formacion del émbolo y de la cápsula.

El émbolo, que está constituido por el miembro *b*, ostenta la forma de un disco plano que está en contacto con la cápsula al interior y al esterior por medio de superficies de junturas esféricas; y las diferentes posiciones que toman en el movimiento las faces planas de ese émbolo, tienen además por envolturas dos superficies cónicas ordinarias que constituyen las paredes internas de la cápsula *d* y están indicadas más claramente en la fig. 318 en AHG y CIK. Estos conos están siempre en contacto, siguiendo una generatriz, con las superficies planas AB y CD del émbolo, como quiera que el eje 2 forma constantemente con el eje 1 el mismo ángulo *a* que es el complemento del semiángulo de la cúspide de cada cono.

No debe perderse de vista que el eje geométrico del gorron 3 se mueve constantemente en un plano, que es el plano de la figura anterior. Paralelamente á ese plano se halla dispuesto en la cápsula un diafragma 4: ese diafragma, que está limitado por superficies planas, no es otra cosa que una rotoide cuyo eje de rotacion es perpendicular al plano de la figura y pasa por el centro de la cápsula; ó en otros términos, es simplemente la prolongacion de la pieza anular en forma de rotoide, sobre la cual se desliza la correderita *c*. Esa correderita tambien se halla prolongada como lo indica la figura de la derecha; la cual es una proyeccion sobre un plano inclinado con respecto al de la fig. 317, y deja por lo tanto ver una de las faces del diafragma que acabamos de mencionar, y muestra además en L la correderita *c* prolongada bajo la forma de dos porciones de cilindros, que por un lado están en contacto con las faces del diafragma y por otro encuentran sus alojamientos en cavidades de la misma forma practicadas en el disco *b*. Esos dos acoplamientos son de órden inferior, de manera que dicha prolongacion de la correderita es en principio á propósito para suministrar un modo de union hermética. Entre esa prolongacion y la correderita esterior no existe cinemáticamente ninguna diferencia; si bien por lo que toca al esterior el acoplo 4 es de la forma $R^{\pm}_{=}R^{-}$ (ó $C^{\pm}_{=}C^{-}$), mientras que con respecto al interior debe escribirse $R^{-}_{=}R^{+}$ (ó $C^{-}_{=}C^{+}$); del mismo modo que el acoplo 3, segun se trate del esterior ó del interior, corresponde á $C^{-}_{=}C^{+}$ ó á $C^{\pm}_{=}C^{-}$.

Si se admite que el acoplamiento superior que existe entre el disco ABCD y las superficies cónicas de la cápsula, da una juntura hermética, fácil es de ver que el modo de desplazarse el émbolo en la cápsula está muy adecuado á la accion de un órgano de presion. Con efecto, de una manera general el diafragma EF divide la capacidad que se halla situada á cada lado del disco, en dos partes, una de las cuales crece desde cero hasta la capacidad total, para disminuir luego hasta cero, en tanto que la otra sufre evidentemente variaciones opuestas y complementarias. Con la debida distribucion, pues, se puede utilizar ese mecanismo como aparato de doble efecto, ya sea como bomba ya como máquina de vapor.

En la descripcion precedente hemos tomado á nuestro cargo introducir el cilindro partido L, que cinemáticamente es idéntico á la correderita *c;* y ese cilindro no figura en las descripciones dadas hasta aquí, en las que nunca se trata más que de una simple guarnicion ó juego, y aún las más de las veces bajo una forma bastante oscura. En los hermosos dibujos de la obra de *Johnson* que hemos consultado y citado diferentes veces, no se encuentra ninguna indicacion sobre ese punto que, sin embargo, es de importancia suma. De cierto número de dibujos anejos á los privilegios podria deducirse que el disco debe tener simplemente una ranura radial, que representa en seccion la forma de la figura 319; lo cual vendria á disminuir la cadena de la correderita *c* é introducir en cambio el acoplamiento

de la fig. 261, de manera que en definitiva tendríamos una disminucion de cadena, análoga á la que hemos señalado anteriormente en la máquina de *Lamb* (fig. 268). Debemos además observar que en las primeras máquinas ejecutadas, en las de *Dakeyne* y hasta en otras de tiempos posteriores, el estribo exterior, en forma de semicírculo, falta por completo, lo mismo que el gorron 3 y la correderita exterior *c;* en cuyo caso la cadena se encuentra completamente privada del miembro *c*. En la máquina utilizada como máquina de vapor, *b* es el miembro conductor, de manera que la fórmula determinada debe escribirse: $(C\frac{1}{3}C^{2})\frac{d}{b}$.

Difícil es obtener una juntura completamente hermética con el acoplamiento superior indicado entre el disco y las superficies cónicas. *Bishop* intentó resolver esa dificultad armando estas superficies con una guarnicion completa de planchas que se encuentran apretadas contra el disco por la accion de una série de resortes; y esa disposicion ejecutada con esmero parece que triunfó de la dificultad que acabamos de señalar. El empleo de una disposicion tan complicada y los esfuerzos llevados á cabo para alcanzar un resultado satisfactorio, demuestran hasta que punto puede conducir el fanatismo ó atractivo para cuanto sale de lo ordinario; y en ello cabalmente ha consistido amenudo y aun para varios existe, la atraccion principal del estudio de las máquinas.

Si se quisiera buscar en los capsulismos derivados de los mecanismos cilíndricos de manubrio la contraparte de la máquina de disco, hallaríase verdaderamente en el manubrio de corredera rotatoria $(C''_{2}P\frac{1}{2})^{d}$, puesto que en él se encuentran precisamente tres miembros de longitud infinita, que corresponden á los tres miembros rectangulares del mecanismo en cuestion.

Con todo, la rectangularidad en los mecanismos de manubrio cónicos no constituye para la forma de los miembros una causa tan pronunciada de modificacion como el paso al infinito en los mecanismos cilíndricos. Por ese motivo podemos buscar igualmente la contraparte de la máquina de disco entre los mecanismos de la forma $(C''_{1}P^{1})^{d}$, y efectivamente encontramos en la máquina de *Lamb* (fig. 268) una disposicion que ofrece una gran analogia con la anterior. En esta máquina, *b* es igualmente el émbolo, y el miembro conductor, *d*, la cápsula; amen de que por efecto de la supresion de la correderita *c*, el émbolo *b* tiene una hendidura que le permite deslizarse con un movimiento alternativo por la superficie recta del puente. Por último, sin duda podríamos reemplazar tambien el miembro que falta *c*, con un cilindro hendido análogo al que acabamos de indicar. La comparacion de esos dos aparatos no puede ménos que ser muy instructiva.

En Francia introdujeron la máquina de disco bajo una forma algo diferente de la anterior *Bouché* y *Molard;* y ese último en particular, como constructor, se dió y se da todavia mucho trabajo para difundir el uso de ella como máquina de vapor.

La forma adoptada por esos dos inventores está representada en la fig. 318. La cápsula *d* está provista lateralmente de un apéndice de forma cónica que se prolonga más allá del cilindro 2 del miembro *b* y que se aplica exactamente á un cono de igual abertura, que pertenece á *a* y constituye la rotoide 1. El lazo esterior *b* que introdujo *Bishop* en la disposicion precedente, falta aquí por completo lo mismo que la correderita esterior correspondiente; en el interior y á la hendidura del disco se halla aplicada, segun parece, una guarnicion metálica que corresponde á la correderita (a). La hermeticidad de la juntura entre el disco y las paredes cónicas no puede conseguirse sino con una ejecucion por estremo esmerada de las superficies destinadas á ponerse en contacto.

La fig. 320 representa una disposicion más antigua de la máquina de disco, la cual fué propuesta por *Davies* en 1837 para servir como bomba (b). Aquí el miembro *c* se halla completamente suprimido, lo propio que el manubrio *a*, que está reemplazado por el aditamento de un mecanismo auxiliar. Este último consiste en un manubrio de boton esférico perpendicular al eje de la cápsula y que por mediacion de un lazo en forma de horquilla va á trabarse con una traviesa fija en *b*. Por efecto de consideraciones de construccion esa traviesa no se halla colocada normalmente á la hendidura del disco, y en ello hay un error que fácilmente habria podido evitarse. Este mecanismo que se puede considerar como una tosca aproximacion del mecanismo riguroso $(C\frac{1}{3}C^{2})^{d}$, es en efecto suficiente para una bomba destinada á elevar agua á poca altura; pero en rigor no puede ménos de ser considerada como un invento de valor insignificante.

(a) Véase Tresca, *Rapport sur une machine locomobile* de M. Molard. *Bulletin de la Société d'Encouragement*, segunda série, vol. XIX, 1872, página 49. Segun esa memoria la singularidad del modo de accion de la máquina de disco no debe ser estraña á su buen éxito.

(b) Véase Newton, *London Journal of Arts*, Conj. Series, vol. XIX, 1842, pág. 18.

§ 90

Capsulismos derivados de la juntura en cruz oscilante.

La juntura en cruz oscilante $(C^{+}_{3}C^{2})^{b}$ bajo el punto de vista cinemático dá resultados que, conforme hemos visto (§ 75), no se diferencian de los del manubrio de juntura en cruz rotatoria $(C^{+}_{3}C^{2})^{d}$. Sin embargo, hemos tenido empeño en separar las dos clases de mecanismos, porque así nos vemos naturalmente precisados á estudiar los tres mecanismos siguientes, que en cierto modo podemos considerar como inversiones de los mecanismos anteriores.

En primer lugar, la figura 321 que hemos dibujado exprofeso para hacer más clara la cosa, se presenta como una inversion pura y simple de la figura 317; *b* está aquí fija, mientras que la cápsula *d* es móvil; *a* gira alrededor del eje 2, en vez de girar como antes entorno de 1; y finalmente la corredita *c* se mete como cilindro de guarnicion en la hendidura del disco fijo *b* que forma émbolo. Actualmente es fácil comprender la máquina de *Duncan* (a) representada por la figura 322. En esta máquina *b* es igualmente el miembro fijo, pero la parte que constituye el émbolo ostenta la forma de un doble cono dotado de una cavidad esférica. Además el cuerpo de rotacion 1 (en *a*) que en la figura 321 tiene la forma de un cilindro, se presenta aquí bajo la configuracion de un doble cono que tiene por eje AA y da al miembro *d* un movimiento de oscilacion análogo al que tiene en la misma figura 321. En la pared media de *b* se debe imaginar todavia la correderita *c* aplicada en la forma de un cilindro de guarnicion, de eje vertical. En vez de ese cilindro parece que *Duncan* empleó una guarnicion de cáñamo.

La figura 323 indica una disposicion en realidad bastante defectuosa, con la cual puede reemplazarse el manubrio en el mecanismo precedente ó mejor en el de la figura 321. Propuesta esa máquina por *Davies* en 1837 al propio tiempo que la bomba de la fig. 320, se compone de un acoplo de cilindros y de cuatro acoplos de articulaciones esféricas, es decir, de una cadena (CG_4), destinada á reemplazar el miembro *a*. En 1838 *Gossage* (b) tomó en Francia privilegio por un dispositivo análogo que proponia como máquina de vapor. Si *Davies* y *Gossage* se hubiesen hallado en el caso de conocer cuanto más fácil era alcanzar el objeto que se proponian con la mera inversion de cadena indicada por la figura 321, seguramente no habrian pensado en recurrir á dispositivos tan complicados para reemplazar el manubrio.

(a) Véase Clark's, *Table of mechanical motions*, núms. 61 y 62.

(b) Véase *Propag. industrielle*, vol. III, 1868, pág. 246.

§ 91

Capsulismos derivados de la juntura en cruz rotatoria.

De los otros dos modos de fijacion de la cadena de la juntura en cruz, el que se efectua en el miembro *c* no ha encontrado partidarios entre los inventores de máquinas de vapor rotativas, en tanto que el mecanismo $(C^{+}_{3}C^{2})^{a}$ proporciona en cambio una abundante série de capsulismos. Ese mecanismo que, como sabemos, es la juntura de *Cardan* ó de *Hook*, se ha utilizado en las seis máquinas siguientes, sin que, no obstante, nadie se haya dado cuenta de la verdadera naturaleza de ninguna de ellas.

Figura 324. Máquina de vapor rotativa de *Taylor* y *Davies* (a). La cápsula y el émbolo están dispuestos exactamente como en la figura 317; suponemos que lo mismo sucede con la pieza de guarnicion *c*. Por otra parte el manubrio *a* se ha convertido en puente, de manera que el émbolo *b* y la cápsula, con la correderita *c* que arrastra, tienen todos á la vez movimientos de rotacion. Realmente el émbolo y la cápsula corresponden á los dos árboles de la juntura de *Cardan*, en tanto que la correderita *c*, que consiste, como sabemos, en dos rotoides cruzadas en ángulo recto, corresponde al travesaño de la juntura.

Figura 325. Máquina de vapor rotatoria de *Lariviere* y *Braithwaite* (b). Aquí el miembro fijo *a* forma la cápsula que encierra los dos miembros rotativos *b* y *d*, así como la correderita *c*, quedando de los miembros móviles uno solo, el miembro *d*, visible al esterior. El tabique de separacion aplicado á *d* y que corresponde á la rotoide 4, está dispuesto diametralmente de modo que el vapor pueda actuar á doble efecto, sin que sea menester para ello utilizar la segunda faz del disco *b*, la de la izquierda de la figura.

Figura 326. *Duclos* (c) dispone igualmente el miembro *a* como cápsula, pero deja salir al exterior el eje del miembro *b* y se limita á dar al miembro *d* la forma de una paleta (aleta) móvil en torno de un eje. Conviene no perder de vista que el doble cono 1 adap-

(a) Véase Newton, *London Journal of Arts*, etc. Conj. Series, volúmen XVIII, 1841, pág. 97, y vol. XIX, pág. 18.

(b) Véase *Propag. industrielle*, vol. III, 1868, pág. 211.

(c) Véase *Propag. industrielle*, vol. IV, 1869; privilegio de 1867.

tado en *a*, representa una de las rotoides, mientras que el otro de que se compone el miembro *d*, está constituido por las dos faces planas que limitan la paleta *d*.

Figura 327. Bastante análoga á la máquina de *Duclos* es la de *Küster*, que no ha llegado á nuestro conocimiento sino por medio de una comunicacion particular. En esta máquina la cápsula en vez de ser un cono limitado por una superficie esférica, está constituida por un toro, ó anillo cilíndrico, cuyo émbolo *d* es un sector plano. Por lo que toca á la guarnicion que en la hendidura del disco *b* debe encajar el émbolo, nos parece bastante defectuosa, por más que no conozcamos muy exactamente todos los pormenores.

Figura 328. Máquina de vapor rotatoria de *Wood* (a). En esta máquina que se parece igualmente mucho á la de *Duclos*, la juntura en cruz *c* no está dispuesta como órgano de guarnicion, sino más bien como órgano de arrastre. La figura demuestra claramente que se compone de dos rotoides 3 y 4 cruzadas en ángulo recto; el disco *b* presenta una hendidura, perfilada como en la fig. 319 para el paso del émbolo *d*. La cápsula lleva dos rotoides, la primera de as cuales es el doble cono 1, con los ejes AA, y la segunda, el soporte hueco 2, que sirve de guia al eje motor de *b*. Por otra parte debemos hacer observar que el trazado ó dibujo de la máquina de *Wood* se aparta un poco en este punto de lo que acabamos de indicar, puesto que en realidad en vez del brazo único cruzado 4, los dibujos del inventor llevan dos convergentes 4', que están representadas en la figura anexa de la izquierda. Pero es óbvio que con esa última disposicion el mecanismo no seria susceptible de moverse, puesto que el émbolo *c'* así conformado no podria pasar por lo alto y por la base de la cápsula. Efectivamente, en este caso con la fijeza que *Wood* supone espresamente para el eje 3, *c'* está obligada á permanecer constantemente en un mismo plano con el eje 2, de manera tal que la anchura del émbolo deberia crecer y disminuir periódicamente, para permanecer siempre igual á la de la cápsula y suministrar así una clausura hermética en todos los puntos. De la existencia de ese error y de cierto número de otros, que hace resaltar un somero exámen, debe deducirse que la máquina de *Wood* nunca ha sido puesta en movimiento, por más que parezca inferirse lo contrario del tono de conviccion que impera en la descripcion detalladísima que de ella nos ha dado *Bataille*.

Como último ejemplo, la fig. 329 representa uno de los productos más recientes de la mania inventiva que el problema de la máquina rotatoria ha mantenido constantemente en escitacion. Es una máquina de vapor que fué inventada por *Geiss* (a), en Gebweiler, y que al parecer continua funcionando en esta localidad. La cápsula *a* es hemisférica; el miembro *b*, una prolongacion del cual forma el eje del volante, termina al otro lado por un cono armado de un boton esférico. En ese boton está dispuesta, normalmente al eje 2, la articulacion del émbolo-disco *c* que atraviesa el hemisferio. Ese dispositivo no es en definitiva otra cosa que el de la juntura en cruz rotatoria, en la que los ejes de las rotoides 1 y 2 forman un ángulo de 45°. El acoplo de rotoides 2 es fácil de distinguir, más no sucede enteramente lo mismo con el acoplo 1; pues, en efecto, de ese acoplo no existe más que una sola rotoide, el disco plano que cierra el hemisferio, ó en otros términos, un cono plano cuyo eje es AA. Por consiguiente el miembro *a* es de la forma:

$$C^{-} \dots \angle \dots C^{-}, \text{ ó más rigurosamente } K^{o} \dots \angle \dots C^{-}$$

El miembro *b* se compone de dos rotoides 2 y 3, dispuestas en ángulo recto, y el segundo de los cuales se halla alojado en el boton esférico. El miembro *d* hace falta, de modo que la cadena, disminuida de ese miembro, tiene por fórmula general: $(C\frac{+}{3}C^{\angle})^{a}—d$. La supresion de *d* es igualmente la causa de la falta de la segunda rotoide del acoplo 1. La omision del miembro *d* se halla compensada con el acoplamiento supesior operado entre *a* y *c;* á cuyo objeto la arista anterior de *c* es redonda y va á parar á un cono plano que forma parte de *a*; siendo además evidente que así no se puede obtener más que una clausura bastante defectuosa. Por el contrario, seria fácil conservando *d* como órgano de guarnicion, llegar á una clausura satisfactoria producida por un acoplamiento inferior. Las pequeñas figuras de la izquierda indican las disposiciones que en tal caso podrian adoptarse para *d*. Debemos por otra parte notar que las fuentes en que hemos tomado la descripcion de la máquina, dejan mucho que desear en cuanto á la exactitud, y que por lo tanto, no es cierto que deje de existir realmente en esa máquina un dispositivo del género de los que acabamos de mencionar.

En las seis máquinas examinadas en el presente párrafo el émbolo está formado una vez con *b*, cuatro con *d* y una con *c*. En cuanto á la cápsula, *d* se utiliza una sola vez y *a* cinco.

Hemos podido averiguar algunas variaciones en la forma de la cápsula, si bien por regla general la forma

(a) Véase Bataille y Jullien, *Mack. á vap.*, 1847, vol. I, pág. 447.

(a) Véase *Propag. industrielle*. V. 1870, pág. 132.

de doble cono se encuentra utilizada con preferencia, y hasta por algunos es considerada como indispensable. Esa forma ha dado sin duda alguna mucho que reflexionar á los que han inventado ó perfeccionado las máquinas de que se trata aquí. Érales en estremo difícil formarse una idea satisfactoria del movimiento del disco, que á la vez participa del arrollo y del deslizamiento. *Davies* imaginaba hallarse en presencia de un verdadero movimiento de arrollo como el de los engranajes; ó á lo ménos así podemos inferirlo de la circustancia de hacerse privilegiar en 1838 una máquina de disco, destinada á utilizarse como bomba y en la que las faces del disco, así como las superficies cónicas de la cápsula, eran dentadas como ruedas cónicas (a). Su máquina por lo tanto entraba de lleno en la clase de los *capsulismos de ruedas* que estudiaremos en el capítulo siguiente. El tabique de separacion ó sea el diafragma formaba en cierto modo un diente que pertenecia á uno de los dos conos, y la muesca ó ranura del disco se presentaba como un intérvalo de diente en la rueda doble *b*. Pero *Davies* no tardó á conocer que no podia esperar así una buena clausura entre la muesca y el tabique; y eso depende de que habria debido dar al efecto una forma especial á los dientes, la esférico-cicloidal. Esa observacion le indujo pronto á abandonar por completo su idea.

Es interesante investigar cuales son los perfiles que debieran adoptarse para el émbolo y las paredes de la cápsula en el caso de querer que tuviesen unicamente el uno con respecto al otro un movimiento de rotacion ó arrollamiento. La cuestion se reduce evidentemente á buscar axoides entre los miembros *b* y *c* de la cadena $(C^{\perp}_{3}C^{c})$.

Esas axoides pueden fácilmente determinarse partiendo de las muy conocidas fórmulas que se refieren á los movimientos relativos á la juntura de *Cardan*. En esa última juntura, *a* es el miembro fijo y los miembros *b* y *d* giran con una relacion de velocidades tal que designando con ω y ω_1 los ángulos respectivos de rotacion, y con α el ángulo de los ejes de *b* y de *d*, es decir, el ángulo del miembro *a*, tenemos

$$\frac{\text{tang } \omega_1}{\text{tang } \omega} = \cos \alpha$$

de donde se deduce por la relacion de las velocidades angulares w y w_1 de los dos ejes:

$$\frac{w_1}{w} = \frac{\cos \alpha}{1 - \text{sen}^2 \omega \, \text{sen}^2 \alpha}$$

(a) Véase Newton, *London, Journal of Arts*, etc.; Conj. Series, vol. XIX, 1842, pág. 153.

Esa fórmula suministra al propio tiempo la relacion de las distancias de los puntos de contacto de las axoides á sus ejes de rotacion respectivos. Comenzaremos por proceder como si las axoides en vez de ejes convergentes los tuviesen paralelos con radios vectores en la relacion designada; ó en otros términos, reduciremos préviamente las axoides á tener ejes paralelos (véase § 9) y entonces obtendremos como trayectorias polares ó como secciones normales de las axoides, curvas de la forma indicada en la figura 330. En la posicion representada en esa figura la relacion $\frac{w_1}{w}$ de las velocidades angulares corresponde á un máximum, en tanto que alcanza un mínimum cuando los puntos B y B_1 están en contacto; y despues de una rotacion de 90° se realiza de nuevo un máximum, seguido á su vez de otro mínimum, y así sucesivamente á cada nueva rotacion de 90°.

Esas trayectorias polares se dejan volver sin grandes dificultades á las axoides que debemos determinar (47). Así lo hemos hecho en la fig. 331. Segun su forma, las axoides ABC y $A_1B_1C_1$ son congruentes, pero en la posicion indicada se hallan á 90° una de otra con respecto al plano de la figura.

Más no conviene recomendar la adopcion de esas axoides para los perfiles del émbolo y de la cápsula en la máquina de disco, porque es preferible no servirse de ellas sino para formarse una idea del deslizamiento que se efectua á cada instante entre *b* y *d*. La importancia de ese deslizamiento puede evaluarse por medio de la figura precedente, teniendo en consideracion que en la máquina de disco ordinario, *b* es un disco plano, y *d* un cono cuyo ángulo en la cúspide es de $90° - \alpha$.

El acoplo de las axoides correspondiente á los miembros *a* y *c* no es ménos interesante que el que acabamos de examinar; y bajo el punto de vista de la analogia de los perfiles corresponde al acoplo de los círculos de *Cardan* de la cadena de corredera en cruz $(C''_{2}P^{\perp}_{2})$.

§ 92

Ojeada sobre los resultados de las precedentes investigaciones.

Tan considerable se ha presentado el número de formas que puede revestir cada concepto fundamental de los capsulismos de manubrios, que forzosamente nuestro estudio ha tomado una estension muy grande. Por lo tanto nos limitamos á la enumeracion precedente, por más que no sea nuestro intento garantir que sea completa.

Por otra parte, el exámen y la comparacion de las máquinas que han sido efectivamente propuestas y descritas, demuestran que las inversiones tan fáciles de realizar de los tipos existentes no se han hecho todas aun, y que le falta mucho para que se hayan efectuado todas las formas que por analogía pueden deducirse de los espresados tipos. De consiguiente tenemos la perspectiva de una série de nuevos capsulismos de manubrios que el empirismo en su ardor infatigable no dejará de sacar á luz.

Los resultados que nos ha suministrado nuestro análisis son de grandísima importancia, toda vez que nos han conducido ante todo á la ley directriz que han seguido sin tener conciencia de ella, sin presentirla siquiera, todos aquellos que han inventado ó perfeccionado las máquinas que acabamos de examinar. En un exámen ulterior nos reservamos investigar la razon por la que han sido inducidos en tan gran número y sin notarlo á escoger precisamente el *mecanismo de manubrio* como base de sus dispositivos. Entre tanto hemos logrado establecer una clasificacion y leyes que no existian hasta ahora más que en la forma de un conjunto de materias acumuladas con desórden y desconcierto. Cumple observar que esa clasificacion y esas leyes no tienen nada de artificial ni arbitrario, sino que se desprenden esencialmente de la constitucion misma de las máquinas examinadas, y por ello son igualmente aplicables á las máquinas de igual naturaleza que puedan llegar á inventarse en lo venidero, y que desde ahora nos hallamos en el caso de determinar científicamente (48). Al propio tiempo nos permiten esas leyes formar una opinion clarísima sobre el valor de las diferentes máquinas. Unicamente algunas de entre la muchedumbre que se han propuesto ó inventado, acusan un verdadero valor práctico; y otras que son en mucho mayor número, no corresponden al objeto propuesto, ó son notoriamente inferiores á otras soluciones bajo el punto de vista práctico; y en fin, por lo que á otras toca, se ha llegado á conocer cuan ilusorias eran las ventajas que se les habian atribuido. Importa, empero, hacer constar que hasta las máquinas faltas de todo valor práctico han prestado servicios á la cinemática científica, y bajo este concepto no han dejado por lo tanto de tener su utilidad. Ahí vemos en efecto el gran número de casos particulares que por una parte han dado enérgico impulso á la investigacion de las leyes generales, y por otra han suministrado los ejemplos indispensables.

Abrigamos la esperanza de que el conocimiento de esas leyes y su difusion darán por resultado el disminuir y hacer desaparecer poco á poco el desórden y la falta de reglas en el estudio de las nuevas soluciones. Parécenos además que las investigaciones precedentes no podrán dejar de hacer más rigurosa y profunda la crítica científica de las bombas y de las máquinas de vapor rotatorias. Por otro lado, en los dos últimos capítulos hemos dado ya algunos pasos llenos de interés por la senda que con el procedimiento científico puede conducir directamente al invento de nuevas máquinas. En los desarrollos del análisis, involuntariamente se tiene necesidad de hacer algunas aplicaciones de la síntesis. Así se encuentra demostrada ya en parte la posibilidad que en la *Introduccion* hemos señalado de sustituir el invento en el sentido lato que hasta hoy ha tenido, con un procedimiento científico de desarrollo. Asunto es ese, por lo demás, que nos reservamos estudiar con detencion más adelante en el capítulo XIII.

CAPÍTULO X

ANÁLISIS DE LOS CAPSULISMOS DE RUEDAS

§ 93

Encadenamiento de mecanismos de ruedas dentadas con órganos de presion

El movimiento desmodrómico de un órgano de presion por su introduccion en un capsulismo no se halla limitado al círculo de los mecanismos de manubrio, donde hemos encontrado el principio en pleno desarrollo; sino que igualmente puede efectuarse con otros mecanismos, conforme á las numerosas aplicaciones que de estos se tienen. Con efecto, existen muchos mecanismos de índole muy distinta que se pueden disponer de manera que uno de los miembros de cadena, considerado como cuerpo rígido, se halle reemplazado con un órgano de presion. El principio relativo á la formacion de una cápsula que hemos espuesto precedentemente (§ 78), tambien aquí es por completo aplicable y puede en ciertas circunstancias conducir á resultados verdaderamente ventajosos, dando máquinas debidamente adecuadas á las necesidades de la práctica. Como série de inventos interesantes bajo ese punto de vista debemos mencionar todas las máquinas que pueden concebirse como derivadas de la cadena (R_2C_2), por más que en realidad no se hayan obtenido de esa manera. Hemos señalado ya en otra publicacion (a) para gran número de esas máquinas el lazo de parentesco que las une y que hasta ahora habia escapado al estudio de los inventores, y que nosotros hemos propuesto designar bajo la denominacion comun de *ruedas de cápsulas* ó de *capsulismos de ruedas* (b).

Un capsulismo de ruedas se deriva de la cadena (R_2C_3), convertida en mecanismo, de manera que permita la trabazon de ese último con un órgano de presion. En principio, por estar uno de los miembros dispuesto como cápsula, el órgano de presion se introduce en los vacios que hay entre los dientes, se desaloja con ellos, y finalmente, se halla expulsado por efecto del engranaje de dichos dientes. Así el émbolo se halla constituido por una de las ruedas dentadas ó tal vez

(a) Véase *Berliner Verhandlungen*, 1868, pág. 42.

(b) Parécenos ventajoso conservar aquí la espresion de *Capsulismo* que hemos introducido en el capítulo anterior para designar un mecanismo en el cual se encuentra una cápsula, ya que dicha espresion permite simplificar el lenguaje.

por entrambas, mientras que el puente C....C se presta muy bien á la formacion de la cápsula. Un problema tan general admite forzosamente gran número de soluciones.

Conforme hemos notado ya al tratar de los capsulismos de manubrios, el mecanismo que así se realiza, puede utilizarse, ya sea como bomba por lo que toca al trasporte del órgano de presion, ya sea como máquina motriz, bajo la accion de ese órgano, ya en fin para otros usos. El caracter general del mecanismo en esos diferentes modos de utilizacion, viene á ser el mismo siempre, puesto que no existen diferencias más que en las disposiciones particulares á cada una de las funciones que debe llenar la máquina. Vamos á examinar rápidamente algunos de los más importantes *capsulismos de ruedas*.

§ 94

Capsulismo de ruedas de Pappenheim.

El mecanismo que más naturalmente se ofrece para la formacion de un capsulismo de ruedas, es el de las ruedas cilíndricas $(C_2C''_2)^c$ tal como está representado en la figura 153; geométricamente es el caso más simple de (R_2C_2) cuando se hacen las dos ruedas *a* y *b* iguales y se forma con el puente *c* una cápsula que rodea las ruedas para enlazarse con dos conductos, el uno de admision y el otro de escape. La forma más antigua de ese género de capsulismo está representada esquemáticamente por las figuras 332 y 333.

Dos ruedas rectas congruentes *a* y *b*, cuyos dientes están ejecutados sin juego, se encierran en una cápsula constituida por dos superficies semi-cilíndricas que se aplican exactamente á las cimas ó cúspides de los dientes: á una y otra parte de la línea de engranaje está provista esta cápsula de dos conductos, C y D, para la admision y el escape, y además está en contacto en toda su extension con las bases de ambas ruedas. Los árboles de esas ruedas cruzan en guarniciones herméticas una de las paredes de la cápsula y se hallan reunidos cinemáticamente por dos ruedas dentadas cilíndricas iguales, a_1 y b_1 (fig. 333). Si se da un movimiento de rotacion á uno de los árboles, el de *a*, por ejemplo, se pone igualmente á girar el de *b* con la misma velocidad, pero en sentido contrario. Si la rotacion se efectua en el sentido indicado por las saetas de la figura 332 y se supone que el conducto C esté en comunicacion con un recipiente ó depósito de agua, los volúmenes de ese líquido que á cada instante irán á alojarse en los intérvalos de los dientes, serán arrastrados por las dos ruedas *a* y *b* y conducidos de C á D. Por efecto del cierre hermético que produce el contacto de los dientes, en la posicion del engranaje en *c d*, ninguna parte de esa agua puede volver atrás, y por lo tanto se encuentra completamente impelida hácia el conducto D. Conforme vemos, la máquina puede utilizarse como bomba, y para ese género de empleo es bastante conveniente, como quiera que no necesita válvula y que no admite sino órganos de movimiento rotatorio.

Las formas de dientes *a* y *b* pueden fácilmente determinarse de manera que el contacto se efectue siempre á lo ménos en un punto del perfil en la proximidad de *cd*, y que ese punto permanezca sin interrupcion en el perfil de cada rueda. Esa condicion queda enteramente llenada por el perfil de los dientes indicado en la fig. 332, y en este caso ninguna parte del agua puede volver de D á C pasando entre *a* y *b*. El volúmen de agua impelido es proporcional á la velocidad de rotacion de las ruedas. Si esa velocidad es uniforme, la cantidad de agua arrojada por D es constante, y por esa razon puede esa máquina usarse muy convenientemente como bomba de incendios.

El volúmen de agua impelida en una rotacion completa es igual á la suma de las capacidades de los vacios de dientes de ambas ruedas, y como aquí los vacios son muy sensiblemente equivalentes á los llenos, puede decirse que *es próximamente igual al volúmen del anillo comprendido entre los dos cilindros que pasan por las cúspides y los piés de los dientes, con relacion á* UNA SOLA *rueda*. Ese volúmen puede designarse por abreviacion con el nombre de *volúmen del anillo dentado*.

De ahí resulta que para aumentar la cantidad de agua suministrada, se puede sin tocar el diámetro de las ruedas *a* y *b*, aumentar su anchura en la direccion del eje. Con una ejecucion bastante esmerada puede llegarse á reducir las fugas de agua á un valor enteramente despreciable, máxime si la presion debida á la altura de elevacion no es muy considerable, ni es demasiado débil la velocidad de rotacion de las ruedas. El dispositivo anterior puede, por lo tanto, en ciertos casos dar resultados magníficos como bomba de agua.

El empleo de esta máquina como bomba de agua se remonta á una época bastante antigua. *Weisbach* (a) la designa con el nombre de bomba rotatoria de *Bramah*, perfeccionada por *Leclerc*, á quien, segun él, se debe el aditamento de fajas ó bandas de guarnicion á lo largo de las aristas de las cúspides de los dientes. Otros autores llaman á esa máquina bomba de *Leclerc*. Segun esto,

(a) Véase Weisbach, *Mechanik*, vol. III, pág. 843.

su invento no se remontaria más que á fines del siglo pasado; pero ya en 1724 se encuentra descrita esa bomba por *Leupold* (a) como antiquísima, con el título siguiente: *Máquina de cápsula con dos ruedas móviles, designada por D. Becher con el nombre de* MÁQUINA PAPPENHEIMIANA. Ahora bien, la obra de *Becher* (b) apareció á mediados del siglo XVII; y por otra parte, *Kircher*, *Schott* (c), *Leurechin*, y posteriormente á este último, *Schwenter* en sus *recreaciones matemáticas* del año 1636 (pág. 485), describieron la misma máquina, con la sola diferencia de que las dos ruedas tienen cuatro dientes en vez de seis. Sin embargo, ninguno de ellos cita el nombre de *Pappenheim*. De donde resulta que esa máquina se remonta hoy á unos doscientos cuarenta años, pues en la época de la guerra de los Treinta años era ya conocida, y parece ser un invento aleman. Nosotros seguiremos denominándola bomba de *Pappenheim*, por más que no esté bien determinado que este fuese el nombre de su inventor. Esa misma bomba se atribuye en Francia á *Grollier de Servieres*, con la fecha de 1719 (d); pero esa fecha se encuentra con que es simplemente el de una publicacion en la que *Grollier de Servieres* describe la coleccion mecánica de su abuelo, sin indicar á ese último como inventor de la máquina de que tratamos y que figuraba en dicha coleccion, la cual parece haberse instalado durante los treinta primeros años del siglo XVII (e).

Debemos todavía hacer notar que las ruedas dentadas exteriores *a* y *b* no figuran ya en el hermoso grabado en bronce de *Leupold*, como ni tampoco en el grabadito al boj de *Schwenter*; y tampoco se trata de ellas en los aparatos de *Bramah* y *Leclerc*. A todo rigor pueden estas ruedas suprimirse, toda vez que las ruedas interiores tienen la propiedad de moverse una á otra; pero en tal caso sufren directamente los dientes de esas ruedas presiones y choques que tienen por efecto producir un desgaste rapidísimo. Bajo este concepto no se puede recomendar más que el empleo de las ruedas necesarias exteriores a_1 y b_1, *las cuales debe suponerse que existen igualmente en los demás capsulismos de ruedas que están representados por las figuras* 332 á 343. En cuanto á la forma del perfil de los dientes de las ruedas *a* y *b*, fácil es determinarla por medio de las indicaciones de la teoría de los engranajes que hacemos en el *Constructor*. Así pues, nos limitaremos á notar que en la fig. 332 (lo mismo que en el dibujo de *Leupold*) el perfil de la cabeza de los dientes es una semicircunferencia, en virtud de la cual se determina con los procedimientos conocidos el perfil del pié de los dientes; perfil que tambien se diferencia muy poco de un arco de círculo.

Fuera de su empleo como bomba de agua la máquina de *Pappenheim* puede utilizarse igualmente para el trasiego de cuerpos gaseosos, como por ejemplo, el aire, el gas de alumbrado, etc. Se puede tambien producir una inversion completa en su modo de accion, poniéndola en movimiento por efecto de un fluido; y entonces se obtiene una máquina motriz que constituye una máquina rotativa de agua (a), cuando el agua la mueve, ó una máquina rotativa de vapor, si el vapor es el fluido que la mueve. Esa última aplicacion fué intentada por *Murdock*, un contemporáneo de *Watt*, á cuyo objeto procuró aplicar las cabezas de los dientes á las paredes de la cápsula de la manera más perfecta posible, armando con una guarnicion las cimas de esos dientes. Es lógico que semejante máquina no pueda prestar grandes servicios, toda vez que el modo de cierre realizado en la posicion de engranaje *c d*, es de todo punto insuficiente para impedir los escapes ó pasos de un fluido gaseoso á elevada presion como el vapor. Por ello la máquina de *Murdock* no se ha introducido en la práctica.

Una tercera aplicacion, intermedia entre las dos precedentes, corresponde al empleo del capsulismo de ruedas como aparato de medicion, ó *contador de agua*. Es evidente que con la debida ejecucion el número de vueltas que dan las ruedas bajo la accion de una corriente de agua, dá precisamente el volúmen del agua que pasa, en funcion de la capacidad del anillo dentado. Un poco más adelante encontraremos una aplicacion de ese género.

El mismo capsulismo puede tambien utilizarse como *freno* con la condicion de armarlo de un conducto de escape ó salida, cuya seccion pueda estrecharse conforme se quiera. El mecanismo, que se puede hacer funcionar con agua ó con aceite, constituye un freno de simple efecto añadiéndole una sola válvula, y un freno de doble efecto cuando se le añaden dos. Con una disposicion conveniente de los conductos el líquido describe un ciclo cerrado. En los frenos de esa índole, al revés de lo que sucede con los frenos ordinarios de boca ó de mandíbulas, no existe ningun órgano es-

(a) Véase *Theatrum Mach. hydraul.*, tomo I, pág. 123.

(b) Véase *Trifolium Becherianum.*

(c) Véase Kaspar Schott, Mechanica hydraulica pneumática, Maguncia, 1657.

(d) Véase *Propag. industrielle.* 1868, tom. III, pág. 20.

(e) Véase Ewbank, *Hydraulic and other machines*, edicion de 1870, página 285.

(a) De ella hicieron una aplicacion *Renaud*, *Blanchet* y *Biret*. Privilegio de 1817. Véase *Privilegios de inventos*, tom. XXIV, Paris, 1833.

puesto especialmente al desgaste. Esos mismos frenos cuando están dispuestos de manera que no ofrezcan resistencia más que en un solo sentido de rotacion, pueden utilizarse como *cataratas:* el empleo de un freno de esa especie es notoriamente ventajoso en el caso en que la accion de la catarata haya de ejercerse sobre un movimiento de rotacion.

En suma, el capsulismo de ruedas de *Pappenheim* es susceptible de gran número de aplicaciones. En su forma simple, que no admite válvula alguna, puede efectivamente, sin modificacion de ninguna clase, utilizarse segun se quiera, como bomba (comun ó de incendios), como máquina motriz ó como contador de agua. Una adicion poco importante, como la de una válvula, permite hacer de esa máquina un freno ó una catarata. En esas diferentes funciones se presta muy bien al empleo del agua ó de otros líquidos; más tambien puede emplearse para las materias semi-fluidas ó simplemente plásticas, es decir, como prensa de arcilla ó como malaxador, y por último, puede aplicarse para poner en movimiento fluidos gaseosos de escasa presion, como aire, gas de alumbrado, etc. Realmente una sola y misma máquina rara vez se presta á tan gran número de aplicaciones útiles.

§ 95

Ventilador de Fabry.

Las figs. 334 y 335 representan esa máquina muy conocida, que es un capsulismo de ruedas usado como ventilador. El ingeniero belga cuyo nombre lleva, la dispuso y aplicó con éxito grande, como máquina de aspiracion para orear las minas, y aun hoy procura perfeccionarla sin cesar. La fig. 334 representa el perfil de la rueda primitiva de *Fabry*. Las ruedas *a* y *b* son de tres dientes, cuyos perfiles en *m* y *n* están formados por epicicloides de los círculos primitivos, ó sea por curvas equidistantes; á uno y otro lado de la línea de los centros los perfiles se tocan en *o*, *p*, hasta que los perfiles en *m*, *n* se hayan puesto en contacto. Por consiguiente, no es posible un paso del aire entre las dos ruedas, sin que el punto de contacto recorra constantemente el perfil de la rueda, como en la máquina de *Pappenheim*. Por efecto de la concavidad del perfil á cada paso de un diente se encuentra cierta cantidad de aire impelida hácia el conducto de aspiracion. Si se imaginan los dientes dispuestos para un contacto contínuo y que luego se ahuequen, fácil es ver que el volúmen así cogido es cabalmente igual al del aire que se encuentra impulsado hácia atrás. Por lo tanto, aquí tambien podemos admitir en principio que la cantidad de aire desalojada á cada vuelta, es próximamente igual al volúmen del anillo dentado de una de las ruedas definido como antes. Así pues, la concavidad dada al perfil de los dientes no altera el volúmen de aire trasportado, *pero impide que ese trasporte sea rigurosamente uniforme*, puesto que la vuelta del aire hácia atrás no se efectua de una manera contínua. Esa falta de uniformidad rara vez puede acarrear inconvenientes sérios, y solamente en el caso en que el aparato se utiliza para el agua, porque entonces habrian de producirse choques en el movimiento de las ruedas: por el contrario, con el aire carece de influencia apreciable la accion perturbadora, máxime si la velocidad de la corriente es débil y su presion poco elevada.

Para hacer durar por espacio de un tiempo bastante prolongado el cierre hermético en las cimas de los dientes, no es necesario dar á las paredes curvas de la cápsula una estension de un semi-círculo completo, porque basta que corresponda sensiblemente al valor de un paso. Por consiguiente, en la disposicion de la figura 334 dichas paredes podrian terminar en las generatrices *s* y *t*, ó á lo ménos, si se quisiera conservarles el valor de un semi-círculo, podríamos contentarnos con solo ruedas de dos dientes. Cabalmente así sucede en el dispositivo adoptado posteriormente por *Fabry* y que se halla representado en la fig. 335.

Perfiles epicicloidales terminan en *o*, *p*, *q*, *r*, etc. las pequeñas paletas que llevan los dientes, y que tambien empleara el inventor en las ruedas de tres dientes: la pared media de la rueda *b* está en contacto en *mn* con el círculo de fondo de la rueda *a*. Entre ese círculo y la pared de la cápsula se estiende el anillo dentado, cuyo volúmen igualmente aquí puede considerarse muy aproximadamente como igual al del aire desalojado en una vuelta completa. Las ruedas de *Fabry* tienen 3 á 4 metros de diámetro por una anchura de 2 á 3, y se mueven con una velocidad moderada, que está siempre comprendida entre 30 y 60 vueltas por minuto (a). Generalmente el cuerpo de cada rueda es de madera, armada de planchas de palastro en todas las partes donde debe haber contacto con los dientes. El conjunto, como se ve, semeja lo ménos posible una rueda dentada, y por ese motivo es tanto más útil difundir en los círculos prácticos el conocimiento de la relacion teórica que existe entre el mecanismo de *Fabry* y el de *Pappenheim*.

(a) Véase *Zeitschrift des vereins deutscher Ingenieure*, tom. I, página 140; Ponson, *Tratado de la esplotacion de las minas de hulla; Poly. Centralblatt*, 1858, pág. 506; *Civil-ingenieur*.

§ 96

Ventilador de Roots.

El ventilador representado por la fig. 336 é inventado por el norte americano *Roots*, figuraba en la Exposicion universal de Paris de 1867 (b). Las ruedas, que tenian un diámetro de 9 decímetros proximamente y una anchura de más de 2 metros, giraban con estraordinaria celeridad, dando una considerable cantidad de aire á una presion bastante elevada. El perfil *pnr* es circular y está en contacto con el perfil combinado *qmo*, y el engranaje se efectua de una manera contínua. Ese dispositivo, como vemos, no es más que el capsulismo de *Pappenheim* reducido á dos dientes. *Roots* que al principio adoptara la madera para la superficie envolvente de los dientes, acabó por sustituirla con el hierro. Ese ventilador se ha generalizado mucho y se construye en varias fábricas y talleres; en 1873 se veian varios ejemplares de él en la Exposicion universal de Viena. Cumple además notar que *Roots* no es el primer inventor de ese capsulismo, puesto que ya en 1859 lo habia construido *Jones*, de Birmingham, como bomba de gas (a), y ni siquiera se consideró á la sazon como nuevo dispositivo (49).

La fig. 337 representa el perfil de otro ventilador de *Roots*, en el que está modificada la forma de los dientes. Lo propio que en el capsulismo de ruedas de *Murdock* que hace poco hemos estudiado, los dientes se hallan limitados en sus cúspides por perfiles cilíndricos *nr*, *so*, *uw*, que abarcan completamente el perfil de la cápsula; y su desarrollo corresponde á un cuarto de círculo ó sea á la mitad de un paso. Lo mismo sucede tocante á los arcos *mq*, *tp*, *vx*: del fondo de los dientes que se ponen en contacto sobre la línea de los centros con los perfiles de las cimas de los dientes, *mq* se desliza sobre *nr*, *uw* sobre *vx*, etc.

Los perfiles de los flancos *pn*, *mo*, etc., son aquí epicicloides prolongadas de círculos primitivos, que giran una sobre otra. El perfil *mo*, por ejemplo, está descrito por la punta *n* de la rueda *b* en su movimiento relativo á la rueda *a*, de suerte que esa punta reposa en la curva *mo*, cuando las dos ruedas giran en las direcciones indicadas por las saetas. En realidad no utilizó *Roots* esos perfiles teóricamente exactos, y acertadamente los sustituyó con otros que vuelven un poco atrás. Por lo mismo renunció al segundo punto de clausura que habrian suministrado esos perfiles teóricos, y así evitó los efectos de dilatacion y compresion del aire, que con la doble clausura se habrian producido en los espacios cerrados comprendidos entre las dos aristas de contacto. Con el fin de llegar á una representacion más sencilla no hemos indicado más que los perfiles teóricos en la figura; y además conviene, al tratarse de cualquier proyecto de esa índole, comenzar por el trazado de dichos perfiles que determinan los límites detras de los cuales deben quedar los perfiles que definitivamente han de adoptarse.

De los dos dispositivos de *Roots* el primero es el más ventajoso, como quiera que da un chorro uniforme, resultado que no puede obtenerse con el segundo por los motivos que hemos indicado al tratar de la fig. 334. Ambos por lo demás suministran á cada vuelta un volúmen de fluidos sensiblemente igual al del anillo dentado.

§ 97

Contador de agua de Payton.

La figura 338 es la representacion esquemática de un contador de agua que figuraba en la seccion inglesa de la Exposicion universal de Paris de 1867 (a). Ese aparato es un capsulismo de ruedas de dos dientes, cuyos perfiles son desarrollantes de círculo. La normal NN al punto de contacto y la linea de los centros forman en nuestra figura un ángulo de 15°; advirtiendo que ese ángulo debe tomarse siempre bastante pequeño, para que la duracion del engranaje pueda resultar suficientemente grande. Los arcos de desarrollantes, que se tocan en *op*, van de *m* á *q* y de *r* hasta *n*. Por el interior de las circunferencias que pasan en *m* y *r*, los perfiles de los dientes se adaptan á los cubos de las ruedas por medio de una curva arbitraria que ninguna influencia tiene sobre el contacto de los dientes. Por el lado posterior los dientes mismos están limitados por una curva notoriamente paralela á la desarrollante, á la cual debe estar bastante aproximada para no malograr el engranage, ó sea, para no ser tocada por la punta del diente opuesto. Por esa razon ostentan los dientes la forma de paletas, que dista mucho de la forma ordinaria de los dientes.

A cada vuelta la cantidad de líquido que cae en los vacios formados por la faz posterior de los dientes, se

(b) Véase *Engineer*, Agosto, 1867, pág. 146.

(a) Véase Clegg. *Manufacture of coalgas*, pág. 190.

(a) Ese aparato que los ingleses designan con el nombre de *Epicycloidal water meter*, se encuentra descrito en el *Engineer*, Febrero de 1868, pág. 92.

halla reducida para cada rueda al conducto inferior, y por lo tanto, de igual modo que en las figuras 334, 335 y 337, el movimiento de trasporte del líquido no se efectua de una manera uniforme, lo cual sabemos que resulta de que el punto de contacto no recorre sin interrupcion el perfil del contorno de la rueda. Aquí tambien, como antes, el volúmen de fluido trasportado á cada vuelta es asimismo notablemente igual al del anillo dentado.

Tan solo la esperiencia puede resolver si la clausura es bastante hermética para que ese aparato, suponiéndole bien construido, pueda prestar buenos servicios como contador de agua. En Inglaterra la introduccion de ese aparato, que es indudablemente muy sencillo, parece que se ha estudiado con verdadero afan.

§ 98

Capsulismo de ruedas de Evrard.

En la seccion belga de la Exposicion universal de de Paris, de 1867, figuraba bajo una forma muy modesta, si bien que muy digna de llamar la atencion, el ventilador de *Evrard*, que pertenece á la clase de los aparatos que examinamos aquí y que está representado esquemáticamente por la fig. 339.

En la Exposicion de Viena (1873) la seccion belga contenia una bomba de agua constituida por el mismo mecanismo. En uno y otro caso nos encontramos en presencia de un capsulismo de ruedas de dos dientes, en el cual las dos ruedas tienen, como en todos los aparatos anteriores, la misma velocidad, pero no son ya congruentes. La rueda *a* ostenta dos cavidades que caen enteramente dentro de su círculo primitivo *r*, mientras que la rueda *b* lleva por lo contrario dos dientes por completo salientes de su círculo primitivo, que es igual al primero. Los dientes de *a* que como forma tienen cierta analogia con los del segundo dispositivo de *Roots* (fig. 337), están comprendidos en el interior del círculo primitivo, á la vez que en la rueda *b* los dientes están enteramente fuera del círculo del mismo nombre. La curva *mlo* es la epicicloide prolongada de los dos círculos de radio *r*, descrita por la punta de diente *n* de la rueda *b*, en su movimiento relativo á *a*. La curva *pn* es la epicicloide ordinaria (aquí una cardioide) que el punto *o* de la rueda *a* describe con relacion á la rueda *b*. El punto *o* abandona aquí la rueda *b* en el momento en que *n* llega á *m*. Por lo demás, es necesario al efecto que el ángulo *mlo* sea igual al ángulo correspondiente al pié del diente de *b*, esto es, doble del ángulo designado por α en la figura 339.

En la rotacion indicada por las saetas los huecos de los dientes de ambas ruedas llevan el aire ó el agua de la parte inferior á la parte superior. Más el fluido contenido en el espacio que forma el vacio de *a* disminuido de la seccion de forma lenticular *mnpo*, se encuentra otra vez debajo, de manera que el volúmen realmente trasportado á cada vuelta, es *un poco más pequeño que el volúmen del anillo dentado de la rueda b*. El engranaje de las dos ruedas presenta aquí la circunstancia ventajosa de que las cúspides de los dientes de *a* giran, sin deslizarse, por los arcos que forman el fondo de los intérvalos de los dientes de *b*. En lo que era posible averiguar respecto de una máquina de acceso tan difícil, el ventilador expuesto en París, en vez de dientes epicicloidales estaba armado de simples paletas rectas acomodadas en la direccion de los ejes de los dientes de nuestra figura; lo cual para la práctica es muy suficiente y conduce á una simplificacion notable. Por efecto del retorno de una parte del volúmen de fluido arrastrado, el chorro no es uniforme, pero ese es un inconveniente que no tiene gravedad, máxime en los casos de la ventilacion.

En definitiva, el ventilador de *Evrard* debe conceptuarse como capsulismo de ruedas de una construccion muy lógica y conveniente para el objeto propuesto. Si se quisiera conseguir la uniformidad del movimiento del fluido para que la máquina fuese más idónea, para utilizarse como bomba ó como máquina motriz de agua, bastaria perfilar los dientes de *b* segun arcos de círculo, y dar por perfiles á los vacios de *a* las curvas envolventes correspondientes.

La forma particular que *Evrard* adoptó para las ruedas de su ventilador, se habia, sin embargo, aplicado antes y precisamente en el capsulismo antiguo que describiremos en el párrafo 101. Una bomba construida sobre el mismo principio figuraba en la Exposicion internacional de Viena bajo el nombre del baron *Greïndl* (a).

§ 99

Bomba de Repsold.

Conforme acabamos de ver, el invento de *Pappenhein* ha sufrido varias trasformaciones en el concepto

(a) En la disposicion adoptada por el baron *Greindl* una de las ruedas lleva un escote único, y la otra rueda, que tiene dos paletas, marcha con una velocidad de rotacion doble de la primera, de modo que asegure el funcionamiento sucesivo de las dos paletas en la escotadura única. *Laidlow* y *Thomson* construyeron en Inglaterra bombas rotatorias, cuya base es el capsulismo de ruedas de *Evrard* bajo la misma forma que él les dió. Véase *Engineer*, Mayo, 1868, pág. 394.

del número y forma de los dientes. Así es por ejemplo, como el número de los dientes de las ruedas, que al principio se elevaba á 6 ó hasta á una cifra superior, bajó despues á 4, 3 y 2. No faltaba más que llevar hasta su estremo límite esa disminucion que en si misma ofrece ciertas ventajas; y eso es lo que se ha realizado en la bomba rotatoria construida desde más de cuarenta años por la casa *Repsold*, de Hamburgo.

Esa bomba tan conocida, que al principio produjo cierta sensacion, es *un capsulismo cuyas ruedas no tienen más que un solo diente*. La fig. 340 nos da de él una representacion esquemática. Al esterior de los círculos primitivos los perfiles de los dientes de ambas ruedas están constituidos por arcos de epicicloides *mq*, *nt*, y en el interior de estos mismos círculos, por arcos de hipocicloides, siendo además todos estos arcos engendrados, como en las ruedas de surtimiento ordinarios, por círculos de igual diámetro W y W_1, que giran sobre los círculos primitivos al interior y al esterior. A la base de cada diente está añadida una pequeña porcion de perfil *su*, que representa la trayectoria relativa de la punta *t* de la rueda *b* (lo que se puede llamar el perfil teórico del vacio del diente): el arco de hipocicloide *ms* corresponde al arrollo del círculo generador W_1 sobre la estension del arco *mv*. Las cúspides *tp* y *qG* de los dientes, son cilíndricas, así como las partes correspondientes de los fondos sobre ambas ruedas, *absolutamente lo mismo que en las ruedas de engranajes ordinarios*. Con la forma aquí adoptada para los dientes el trasporte del fluido no es completamente uniforme, porque el punto de contacto no recorre de una manera totalmente continua el contorno de la rueda. No obstante, esa falta de uniformidad es bastante insignificante para que pueda despreciarse, y si absolutamente se quisiera hacerla desaparecer, bastaria adoptar para el perfil de las cabezas de los dientes en *mq*, *nt*, etc., una curva enlazada con el cilindro exterior, como por ejemplo, un arco de círculo, y modificar por consecuencia la curva envolvente que correspondiera al pié del diente.

Las ruedas de la máquina *Repsold* suelen conceptuarse como «escéntricas de una forma particular;» pero es muy evidente, teniendo en cuenta lo que precede, que no son otra cosa más que ruedas de engranajes cilíndricos de un solo diente. Por efecto del deslizamiento que se efectua entre los cilindros que corresponden á la cúspide y al fondo de cada diente, se realiza forzosamente al principio cierto desgaste de tales superficies, como en el segundo ventilador de *Roots* (figura 337). Por ese motivo es difícil mantener en dichas partes una hermeticidad perfecta, y por lo mismo, conviene no emplear esa máquina sino para líquidos de escasa presion. Con el objeto de evitar toda comunicacion entre los conductos de entrada y salida, es indispensable que los arcos E G y F H de la cápsula tengan un valor superior á media circunferencia. Con el mismo objeto *Repsold* armó los bordes de esa cápsula con bandas de guarnicion (a). El volúmen de fluido arrastrado á cada vuelta es sensiblemente igual al del anillo dentado de una rueda.

La bomba de *Repsold* ha sido especialmente empleada como bomba de agotamiento para los cimientos de edificios y como bomba de incendios; é igualmente se ha utilizado en Inglaterra como máquina motriz de presion de agua (b), así como con frecuencia se utiliza como bomba de gas. En definitiva, ha realizado con éxito práctico constante tres de las numerosas aplicaciones de que son susceptibles, segun hemos visto, los capsulismos de ruedas.

Por lo que toca al derecho de prioridad, si está permitido aclarar semejante cuestion respecto de una modificacion del aparato de *Pappenheim*, debemos hacer notar que esa prioridad no atañe á *Repsold*, puesto que en 1832 *Lecocq* (c) habia tomado en Francia un privilegio para una bomba rotatoria, de una forma enteramente análoga á la que acabamos de describir, habiéndola presentado bajo la designacion de «bomba de dos émbolos rodantes uno sobre otro.»

§ 100.

Capsulismo de ruedas de Dart ó de Behrens.

La seccion norte americana de la Exposicion universal de Paris (1867) ostentaba dos aplicaciones de un capsulismo de ruedas inventado por *Behrens* y expuesto por la casa *Dart y C.ª* (d). En ese aparato representado por la fig. 341, las dos ruedas *a* y *b* son tambien de un solo diente, como en el ejemplo anterior. Están lateralmente fijas en discos circulares (que se suponen suprimidos en la figura), lo cual permite ahuecarlas al torno en su interior y suprimir por lo tanto sus partes centrales, que se hallan reemplazadas por cilindros c_1 y c_2, fijos invariablemente en la cápsula. Estos cilindros llevan muescas *qr* y *ns* (limitadas por arcos de círculo), las cuales encajan exactamente las cuñas de los dientes á su paso, produciendo una clau-

(a) Véase *Berliner Verhandlungen*, 1844, pág. 208.
(b) Véase *Pract. Mech. Journal*, 1855 á 1856, vol. XVIII, pág. 28.
(c) Véase *Propag. industrielle*, vol. III, 1868, pág, 182.
(d) Véase *Propag. industrielle*, vol. II, 1867, pág. 116.

sura hermética, lo cual hace inútil la clausura por los costados de los dientes mismos. Con todo, en la disposicion que indica la figura dichos costados quedan igualmente en contacto, siendo *mp* un arco de epicicloide prolongada, descrita por el punto *o*. En la ejecucion se redondea levemente el estremo *o*, de forma que deje cierto juego entre ella y la curva, y así impida que quede encerrado líquido en el triángulo *o p q*. El punto *o* llega á *q* al mismo instante que el punto *p*, y luego sigue moviéndose en la muesca ó escotadura del cilindro fijo, desde *q* hasta *r*. Por lo tanto la cúspide del diente *b* se desliza por *q r* formando clausura, en tanto que la raiz *t* del mismo diente se desliza por el cilindro c_2. Muy poco despues llega el punto *m* á *n*, y la clausura se efectua entonces entre la cúspide del diente de *a* y el arco *ns*. Al propio tiempo empieza á efectuarse la vuelta ó regreso hácia I K de la fraccion de líquido, que se encuentra por lo mismo separada de la masa superior. En cuanto al líquido que pasa por la abertura IK en la posicion que la figura indica, se eleva á la izquierda y á lo largo de c_1, en tanto que á la derecha el liquido antes aspirado, es repelido por la rueda *b* entorno de c_2 y acaba por escaparse de la cápsula á través de la abertura EF.

Como se ve, una nueva idea se ha introducido aquí en el capsulismo de ruedas, idea que consiste en la clausura del canal del medio en virtud de acoplos inferiores (acoplos de cilindros), mientras que en todas las modificaciones de la bomba de *Pappenheim*, que acabamos de describir, se operaba dicha clausura por medio de acoplos superiores. La transicion en el modo de clausura actual aparece, empero, en la clausura por acoplos inferiores, de las cúspides de los dientes en las bombas de *Repsold*, *Evrard* y *Roots* (figs. 340, 339 y 337). En el concepto de la hermeticidad los perfiles *mp*, *ot* no son necesarios y podrian suprimirse, si bien es útil conservarlos para disminuir la cantidad de líquido que retrocede, y hacer por consiguiente poco sensible el defecto de uniformidad en el movimiento del líquido. Por lo demás, el volúmen trasportado es tambien aquí sensiblemente igual al del anillo dentado de una de las ruedas.

A causa de las mejores disposiciones de hermeticidad que ofrece la adopcion de acoplos inferiores, la máquina de *Behrens* puede ventajosamente utilizarse como bomba. El fabricante *Dart* (en cuya casa interesa el inventor) construyó gran número de ellas para elevar aguas; y ha aplicado igualmente una como máquina motriz de presion de agua y como máquina de vapor. Una máquina de esa última especie, de la fuerza de 12 caballos, acoplada á una bomba del mismo sistema, funcionaba en la Exposicion de Paris (1867). Dudoso es, sin embargo, que pueda realizarse así una máquina motriz que funcione durante largo tiempo de una manera satisfactoria, porque es en estremo difícil conseguir una hermeticidad completa y de mucha duracion con una presion de vapor elevada. Cuando ménos es completamente imposible llegar en ese punto á la perfeccion de las máquinas de cilindro.

En la Exposicion universal de Viena figuraba una bomba de incendios de vapor construida por *Dart*, en la que la máquina de vapor, la bomba de proyeccion y la bomba alimenticia pertenecian al sistema precedente.

§ 101

Capsulismo de ruedas de Eve.

La forma fundamental del capsulismo propuesta por *Evrard*, se habia utilizado ya muy anteriormente por indicacion del norte-americano *Eve*. Ese capsulismo de ruedas (fig. 342) que fué objeto de un privilegio inglés en 1825 (a), se compone de dos ruedas cilíndricas cuyos diámetros, de tamaño desigual, están en la proporcion de 1 : 3. Los cuerpos *a* y *b*, cuyos ejes están enlazados al esterior de la cápsula por dos ruedas dentadas ordinarias, igualmente en la proporcion de 1 : 3, giran el uno sobre el otro en *mn* por sus axoides cilíndricas, mientras que el líquido es trasportado por los dientes de la rueda en la direccion indicada por las saetas. Al paso de la línea de los centros cada diente de *a* forma un acoplo de clausura superior con la cavidad de *b*, exactamente como en la disposicion de la figura 339.

En 1826 *Ganahl* tomó en Francia un privilegio para un capsulismo análogo destinado á utilizarse como bomba y máquina motriz, (b) consistiendo la sola diferencia con el aparato de *Eve* en que la rueda *b* era cónica, como en una espita. Por ahí se revela la idea que inspiró al inventor, para quien la rueda *a* era una rueda de émbolo y *b* el órgano distribuidor. Rigurosamente hablando el capsulismo de *Ganahl* deberia considerarse como derivado del acoplo de ruedas cónicas (véase el § 103).

(a) Véase Ewbank *Hid and other, Machines*, 1870, pág. 287; Bataille y Jullien, *Machines à vapeur*, tomo I, 1847-49.

(b) Véase *Propag. industrielle*, tomo III, 1868, pág. 55.

§ 102

Capsulismo de Revillion.

De la generalidad del principio espuesto en el párrafo 93, y en virtud del cual todo mecanismo de la forma $(R_1 C_1)$ es susceptible de acomodarse á formar un capsulismo de ruedas, debe deducirse que las ruedas helicoidales pueden igualmente utilizarse para el mismo uso. Esta es una observacion que se hizo mucho tiempo há y dió márgen á numerosas tentativas. En 1830 *Revillion* tomó un privilegio para un capsulismo de ruedas helicoidales (a). La figura 343 representa ese capsulismo bajo una forma un poco diferente de la que le habia dado el inventor (b). Las ruedas *a* y *b* están constituidas por tornillos ordinarios cuyos pasos son iguales, si bien que en sentido contrario, y cuyos ejes están enlazados esteriormente con dos ruedas dentadas ordinarias *a* y *b*, del mismo diámetro. El puente *c* está dispuesto como cápsula. Los filetes que esteriormente se hallan en contacto con esa cápsula, formando con ella un acoplamiento de órden inferior, se deslizan unos sobre otros en *kl*, *mn*, *po*, etc., dando lugar á un acoplamiento superior. En *qr* y *st* hemos adoptado para el perfil de la seccion transversal una forma que asegura un contacto contínuo entre las aristas esteriores del filete de una de las ruedas y las dos superficies laterales del filete de la otra rueda; lo cual no se habia practicado en las diversas disposiciones propuestas hasta ahora. Los arcos que constituyen el perfil de la seccion trasversal, son envolventes de la hélice; y es por demás fácil obtener una ejecucion exacta de esos perfiles por medio de la máquina de filetear ó terrajar (hilera). Como en la máquina de *Pappenheim*, los filetes trasportan el líquido que llena sus intérvalos. Uno de esos intérvalos corresponde, por ejemplo, al volúmen limitado de una parte por la pared de la cápsula *c*, y de la otra, por *mn* y *kl;* ese volúmen se halla separado del vacio restante en virtud de los contactos que se efectuan en *gr* y *st*, así como en las posiciones análogas, por el lado de *mn*. El capsulismo de ruedas helicoidales no debe conceptuarse como de verdadera importancia práctica, por cuyo motivo juzgamos inútil ocuparnos aquí de las tentativas hechas en diferentes ocasiones para utilizar ése capsulismo como máquina de vapor rotatoria ó como bomba.

(a) Véase *Propag. industrielle*, tomo III, 1868, pág. 151.

(b) La forma representada en la figura es la de un modelo que el Autor mandó construir para el museo ó Gabinete cinemático de la Academia de Berlin.

§ 103

Otros capsulismos simples de ruedas.

Las diferentes formas bajo las cuales puede establecerse un capsulismo de ruedas simple, no figuran todas en los ejemplos que hemos presentado, por más que los últimos comprendan los más importantes de los que se conocen. A la par de las ruedas cilíndricas, de diámetros iguales ó desiguales, hemos hallado el empleo de ruedas helicoidales y hasta en rigor una indicacion del uso de las ruedas cónicas (§ 101). Debemos aquí añadir que en esa última direccion se ha recorrido todavia mucho más camino. El mecánico *Lüdecke*, de Dransfeld, cerca de Gotinga, imaginó efectivamente un capsulismo, desprovisto, empero, de todo valor práctico, en el que las dos ruedas son cónicas, de igual tamaño, y cuyo ángulo de la cúspide es muy obtuso; la cápsula forma en el interior una zona esférica y se halla dividida por dos tabiques situados en el plano de los ejes, en dos capacidades que corresponden respectivamente á la aspiracion y á la repulsion. Las dificultades de la práctica en semejante mecanismo sobrepujan de mucho á las que se encuentran en el establecimiento de los capsulismos de rueda cilíndricos. Sin embargo, esa tentativa merecia señalarse como indicacion de poder emplearse ruedas cónicas para la formacion de mecanismos del género de los que aquí nos ocupan. De lo que antecede podemos deducir que en la série de los capsulismos de ruedas figuran las ruedas cilíndricas, helicoidales y cónicas; la sola variedad que falta todavia, es la de las ruedas hiperboloides, para las cuales la realizacion de la hermeticidad presentaria las mayores dificultades. Mas no queremos afirmar, sin embargo, que con el tiempo deje de surgir algun dia por el horizonte de la mecánica «una máquina de vapor rotativa hiperbolóidica.»

§ 104

Capsulismos de ruedas compuestos.

Ya nos hemos ocupado como de paso de los mecanismos compuestos, y el ejemplo que de ellos hemos dado en el párrafo 60, se referia al mecanismo $(C^{+}_{z_2} C''_{s})^{e}$, que representa la fig. 194. El propio mecanismo se ha dispuesto igualmente como capsulismo de ruedas, y en particular *Justice*, que lo empleó como

máquina de vapor (a). Ese inventor que construyó tambien un capsulismo de dos ruedas, hizo todas las ruedas *a*, *b*, *c* y *d*, de igual tamaño, estando además reunidas *b* y *c* en una sola rueda que engrana con las otras dos: el puente *e* constituye la cápsula y encierra las tres ruedas. La construccion de esa máquina es satisfactoria y revela la inteligencia de un mecánico esperto; más de ningun modo se ha probado que tenga las ventajas anunciadas por su autor (b). Un capsulismo compuesto formado de cuatro ruedas cónicas inventó igualmente *H. Davies* (en 1838) (c), que lo propuso como bomba y como máquina de vapor rotatoria. Una de las ruedas extremas, *a*, por ejemplo, lleva un diente muy largo que se estiende hasta la rueda opuesta *d*, en tanto que la rueda doble *bc* está provista de una hendedura que por sus bordes debe encajar con este diente, resultado que en la máquina en cuestion no se obtiene sino de una manera muy imperfecta. En el párrafo 91 hemos hecho ya alusion á esta máquina que ha caido completamente en olvido.

Si en el mecanismo compuesto $(C^{+}_{z_2}C''_3)$ se toman las líneas de los centros 1, 2 y 2, 3 de igual grandor, pueden hacerse coincidir los ejes de rotacion 1 y 3, obteniéndose así la cadena representada por la figura 344; *b* y *c* forman todavia un solo miembro (ternario) de la cadena, mientras que *a* y *d* quedan móviles uno con relacion al otro. Un mecanismo de ruedas de esa especie, en el cual el centro de la última rueda *d* se halla en cierto modo en el mismo punto de partida 1, puede designarse con el nombre de *rodaje recorrente*, y desempeña un papel muy importante en la práctica. Se ha usado particularmente como capsulismo, si bien en tal caso las ruedas en vez de la forma precedente, tienen un perfil *no circular*, de tal manera que la fórmula es: $(\widetilde{C}^{+}_{z_2}C''_3)$, y la del mecanismo: $(\widetilde{C}^{+}_{z_2}C''_3)^e$.

Si entonces hacemos igual á 1 la relacion media de trasmision entre *a* y *d*, dos radios de esas ruedas deben tener el uno con respecto al otro un movimiento oscilatorio (puesto que las axoides no son cilíndricas), en tanto que las dos marchan en el mismo sentido. Por consiguiente, dos sectores fijos en esas ruedas y encerrados en una cápsula formada con el puente *e*, pueden utilizarse como émbolos, es decir, pueden obrar sobre un órgano de presion debidamente dirigido, ó por el contrario recibir de ellos el impulso.

(a) Véase *Pract, mech. Journal*, tom. XIX, 1866-67, pág. 360, y *Propag. industrielle*, tom. IV, 1869, pág. 34.

(b) Se halla un capsulismo de tres ruedas más antiguo en Bataille y Jullen, *Machines à vapeur*, tom. I, 1847 á 49, pág. 442.

(c) Véase Newton, *London Journal of Arts and Sciences*, Conj, Series, tom. XIX, 1842, pág. 153.

El movimiento de los dos émbolos uno con respecto á otro se verifica en tal caso como en la máquina de la figura 294. Como ejemplos de los numerosos mecanismos de ese género nos limitaremos á mencionar la máquina de vapor rotatoria de *Smyth* (1829), que tiene ruedas no circulares de forma complicada (a), el ventilador de alta presion de *Ramey* con cuatro ruedas elípticas congruentes (b), la máquina de vapor de *Thompson* con cuatro ruedas ovales congruentes, de la cual figuraban dos ejemplares en la Exposicion universal de 1867 (c). Las dificultades de ejecucion, sobre todo al tratarse del vapor, son demasiado grandes para que las máquinas de esa especie puedan llegar un dia á tener alguna importancia práctica. Cumple, no obstante, añadir que es posible llegar á conseguir una hermeticidad satisfactoria con respecto á los émbolos, toda vez que cada uno de ellos forma con la cápsula un acoplo de cilindros. El ventilador de *Ramey* parece haber dado buenos resultados.

§ 105

Ruedas epiciclos en capsulismos de ruedas.

Fáltanos esponer todavia una postrera forma de capsulismos que hasta ahora habia permanecido incomprensible ú oscura para todos aquellos que habian intentado esplicarla, y que, como nosotros tenemos motivos para creer, no era mucho más clara para su inventor *Galloway* (d).

Cuando ménos en la descripcion que dió él mismo no indica en modo alguno la íntima conexion de su máquina con los mecanismos conocidos. Para llegar á conseguir que resalte esa conexion nos vemos precisados á tomar la cuestion desde muy léjos.

De la cadena simple de ruedas cilíndricas $(C_zC''_2)$, que hemos tomado como punto de partida en nuestro análisis desde el § 94, podemos á más del mecanismo ordinario $(C_zC''_3)^c$ sacar otros dos mecanismos, sujetando ó fijando en vez de *c* una de las dos ruedas dentadas *a* y *b*. Así obtenemos los mecanismos $(C_zC''_2)^a$ y $(C_zC''_4)^b$, que son de la misma especie, de suerte que podemos limitarnos á considerar uno solo, el primero, por ejemplo, que está representado por la fig. 345. La

(a) Véase Newton, *London Journal of Arts and Sciences*, second Series, tomo IX, 1834, pág. 152.

(b) Véase *Genie industriel*, tomo XXX, 1865, pág. 254.

(c) Véase *Rapports du Jury international*, tomo IX, pág. 81 y *Propag. industrielle*, tomo, IV, 1869, pág. 339.

(d) Véase Bataille y Jullien, *Machines à vapeur*, tomo I, 1847-49, página 431.

pieza de union c de las dos ruedas gira como un brazo ó un manubrio, alrededor del eje 1, mientras que b rueda sobre a. Para determinar la relacion entre los ángulos ω ω' descritos respectivamente por c y b, supongamos ante todo la rueda a igualmente móvil alrededor del eje 1, hagámosla girar del ángulo ω al propio tiempo que el brazo c, y luego dejando c en su puesto, volvamos la rueda a á su posicion primitiva. Entonces el rádio de la rueda b que primitivamente era vertical, se ha separado de su posicion inicial, primero de a y luego de $\frac{a}{b}\omega$ (siendo $\frac{a}{b}$ la relacion de los números de dientes), de suerte que en definitiva el ángulo total de que ha girado b es:

$$\omega' = \omega + \frac{a}{b}\omega = \omega\left(1 + \frac{a}{b}\right).$$

Si se designa por n y n' los números de vueltas en un tiempo determinado, 1 minuto por ejemplo, se tiene: $\omega = n.\,2\,\pi$ y $\omega' = n.\,2\,\pi$, de suerte que la relacion entre los números de vueltas tiene por espresion:

$$\frac{n'}{n} = 1 + \frac{a}{b}.$$

Si una de las dos ruedas fuese una rueda hueca, el movimiento de retroceso de la rueda a á su posicion inicial, acarrearia una disminucion para el ángulo de rotacion de la rueda b, y en tal caso se tendria:

$$\frac{n'}{n} = 1 - \frac{a}{b}.$$

Designaremos ese mecanismo simple con el nombre de *mecanismo epiciclo*. En la práctica encuentra algunas aplicaciones. Otro mecanismo del mismo género, que se emplea con más frecuencia, es el que se deriva del *rodaje recorrente*.

Fijando en a como lo indica la figura 346, el rodaje recorrente ($C_{z_2}C''_3$) del párrafo 104, obtenemos antetodo para el miembro ternario b c la misma relacion que antes entre los números de vueltas. Por otra parte vemos inmediatamente que al volver á su posicion inicial la rueda a despues de haberla hecho girar de ω, la rueda d, que habia igualmente recorrido ese ángulo ω, vuelve atrás de un ángulo igual á $\frac{a}{b}\frac{c}{d}\omega$, de manera tal, que finalmente el ángulo de rotacion ω_1 de la rueda d, tiene por espresion:

$$\omega_1 = \omega\left(1 - \frac{a}{b}\frac{c}{d}\right),$$

lo cual da por relacion entre los números de vueltas de la rueda d y del brazo c:

$$\frac{n_1}{n} = 1 - \frac{a}{b}\frac{c}{d}.$$

El mecanismo $(C_{z_2}C''_3)^1$, que tenemos aquí en presencia y que hemos obtenido por el procedimiento teórico normal de la inversion de una cadena, es el que en la práctica suele designarse con el nombre de *rodaje diferencial*. El haber escogido esa designacion se debe probablemente á la presencia del signo — en la fórmula precedente. No nos creemos en el deber de conservar ese nombre que puede dar márgen á falsas interpretaciones, y nos proponemos sustituirlo con el de *rodaje epiciclo compuesto*. En los casos ordinarios se podrá suprimir el calificativo «compuesto.»

Si uno de los dos acoplos de ruedas a, b y c, d encierra una rueda de dentaje interior, la fórmula precedente se trueca en:

$$\frac{n_1}{n} = 1 + \frac{a}{b}\frac{c}{d}.$$

En el caso en que cada uno de los dos acoplos tenga una rueda de ese género, se vuelve á la primera fórmula:

$$\frac{n_1}{n} = 1 - \frac{a}{b}\frac{c}{d}.$$

Designando por ζ la relacion de trasmision $\frac{a}{b}\frac{c}{d}$, la fórmula puede escribirse de una manera general:

$$\frac{n_1}{n} = 1 - \zeta,$$

con la condicion de tomar ζ positivo, es decir de conservar el signo —, si no existe alguna rueda hueca en el mecanismo, ó si existen *dos*, y por el contrario tomarlo negativo, es decir cambiar el signo en el caso de *una* rueda hueca.

El mecanismo precedente afecta formas muy variadas y da orígen á gran número de aplicaciones. Conviene observar que en el caso en que el signo — debe conservarse y en el que ζ sea > 1, la rotacion de d se

efectua en sentido contrario al de *e*. Para facilitar la discusion denominaremos ruedas centrales las dos ruedas *a* y *b*, especificando que *a* es la primera y *d* la segunda, en tanto que *b* será la primera rueda epiciclo (ó epicíclica) y *c* la segunda.

Como casos interesantes debemos señalar ciertos casos límites que se obtienen cuando algunas de las cuatro ruedas son infinitamente grandes. Entre esos casos límites hay uno que pondremos particularmente en evidencia. Supongamos ante todo que una de las ruedas (*a* ó *b*) del acoplo *a*, *b*, sea una rueda hueca, como lo indican los dos diseños de la fig. 347, en los que no se han indicado más que los cuatro círculos primitivos; ζ como sabemos, es entonces negativo, y la fórmula que da la relacion de los números de vueltas debe escribirse:

$$\frac{n_1}{n} = 1 + \frac{a}{b}\frac{c}{d}.$$

Si la rueda hueca es infinitamente grande, es necesario que la rueda que engrana con ella lo sea igualmente, si se quiere que subsista el engranaje. Los centros de esas dos ruedas quedan tambien como antes en 1 y 2. En cuanto á las dos coronas dentadas con su punto de contacto, se ocultan enteramente á nuestra observacion; *desaparecen del mecanismo y no quedan más que las dos ruedas de grandor finito, c* y *d*. El rodaje epiciclo se reduce por consiguiente á dos ruedas, una de las cuales gira alrededor de 1, mientras que la otra arrastrada, en el movimiento de rotacion del brazo *e* entorno de 1, gira sobre la primera. Por otra parte el mecanismo así reducido se diferencia del de la fig. 345, puesto que en este último caso la rueda central *a* era fija, en tanto que aquí la rueda *d* permanece rueda central y es móvil entorno de su eje. Ahora para que la cadena quede cerrada, es necesario introducir en el mecanismo una disposicion destinada á reemplazar las ruedas *a* y *b* que han desaparecido. Como el punto de engranaje de esas ruedas, ó el polo, se halla al infinito, esa disposicion debe ser tal, que *la rueda* c *no pueda efectuar en el espacio ninguna rotacion entorno de su eje*, lo que equivale á decir que un radio cualquiera de esa rueda debe quedar constantemente *paralelo* á su posicion inicial. La trabazon cinemática que ha de introducirse para producir ese resultado, puede designarse con el nombre de *guia paralela*.

Es evidente que para las rotaciones enteras de *d* podríamos tambien limitarnos á guiar *c*, de suerte que los radios de esa rueda no pudiesen efectuar oscilaciones sin girar nunca entorno del eje de la rueda. Lo mismo sucede por ejemplo con la *rueda planetaria* de *Watt* (fig 190), mecanismo en el cual la biela articulada con el balancin no permite á la rueda *c*, que está fija en ella, dar más que oscilaciones. Así pues, encontramos en la rueda planetaria una forma particular del mecanismo epiciclo $(C_{z_2}C''_3)^a$. *Watt* tomaba ordinariamente $c=d$ y tenia por consiguiente $\frac{n_1}{n}=2$.

Si entonces introducimos en el acoplo *c d* una rueda de dentaje interior, ζ es negativo, y si particularmente suponemos que la rueda hueca sea la rueda epiciclo *c*, el valor absoluto de $\zeta=\frac{c}{d}$ es siempre superior á la unidad; de modo tal que la direccion de la rotacion de la rueda central *d*, es negativa, es decir en sentido contrario á la del brazo *e* (a).

La máquina rotatoria de Galloway, que nos falta examinar, *no es otra cosa que un capsulismo de ruedas, formado por un mecanismo planetario, con una rueda epicíclica hueca.*

Las tres figuras siguientes (348, 349 y 350), en las cuales hemos introducido las letras, representan tres formas dadas por *Galloway* á su máquina de vapor, que él destinaba á la propulsion de barcos de hélice. En el émbolo de tres alas de la fig. 348, es fácil descubrir una rueda de tres dientes, la rueda central *d* del mecanismo planetario, y así mismo en *c* la rueda epicíclica de cuatro dientes que corresponde á la primera y es hueca. *Galloway* usaba un verdadero guiaje paralelo, que estaba constituido por tres manubrios paralelos é iguales *e e e*, destinados á guiar la rueda *c*, que al propio tiempo es la cápsula de vapor; en esos manubrios encontramos igualmente el mecanismo analizado en el párrafo 66, y al cual corresponde la fórmula $2(C''_2 \parallel C''_2)^a$. El perfil interno propiamente tal de la cápsula hubo de dar mucho que hacer al inventor. No es, sin embargo, otra cosa más que el dentaje de una rueda hueca de cuatro dientes *c*, la cual debe engranar (¡formando juntura hermética!) con la rueda de clavijas *d*. El inventor no considera en la descripcion que dió de su mecanismo como ruedas dentadas los cuerpos *c* y *d*, y por el contrario dice espresamente: «Lo que me he propuesto es reemplazar en la mayor parte de los casos las ruedas dentadas con un dispositivo que se halla indicado en las figuras, y respecto del cual voy á dar ahora algunas esplicaciones...»

(a) Es de notar que *Watt* en la primera peticion de privilegio relativa á la cuestion, habia indicado ya la posibilidad de emplear una rueda hueca en el mecanismo planetario. Véase *Muirhead*, pág. 50.

La figura demuestra asaz claramente que los espacios comprendidos entre los dientes *d* y *c* pasan alternativamente de un máximum á un mínimum y que por lo tanto pueden utilizarse para la admision y el escape ó salida de un órgano de presion. La relacion de las rotaciones de *d* y *e* es:

$$\frac{n_1}{n} = 1 - {}^4/_3 = -{}^1/_3,$$

es decir, que por tres vueltas del centro de la cápsula, ó lo que significa lo mismo, de los pequeños manubrios guias *e*, da *d* una vuelta en sentido contrario. *Galloway* se proponia ligar uno de los manubrios al árbol de la hélice para dar á esa última una velocidad de rotacion triple de la del émbolo. En las figuras 349 y 350 los valores de las relaciones $\frac{n_1}{n}$ son respectivamente $1-{}^3/_2$ y $1-{}^5/_4$. Conforme hace notar el inventor, podrian igualmente aplicarse los manubrios guias al émbolo *d* y elegir por eje de rotacion, el eje de la cápsula, es decir, tomar *c* como rueda llena y *d* como rueda hueca, lo que tendria por consecuencia hacer $1-\zeta$ positivo.

No cabe dudar que la disposicion precedente carece de todo valor práctico como máquina de vapor, por más que *Galloway* tuviera la intencion de construir una de 300 caballos de fuerza para un barco de hélice; pero en cambio ofrece un notorio interés bajo el punto de vista cinemático. En nuestro sentir, el analisis que acabamos de hacer es á propósito para darnos mucha luz sobre gran número de construcciones que á primera vista se ostentan con cierta apariencia de enigmas.

Por lo demás, la série completa de los ejemplos examinados en el presente capítulo revela la curiosa tendencia de la mecánica práctica á recorrer el ciclo entero de todas las soluciones posibles de un solo y mismo problema cinemático, siguiendo por otra parte sendas aisladas y enteramente independientes las unas de las otras. En razon misma de su aislamiento esas vias conducen á veces, como hemos observado, á los conceptos más estraños y á los procedimientos más estravagantes. Finalmente, hemos logrado demostrar que las dificultades vencidas soprepujan de mucho en general el valor de los resultados obtenidos, aun cuándo la conexion entre todas esas soluciones sea, no obstante, muy sencilla, como nos lo ha patentizado nuestro análisis.

CAPÍTULO XI

ANÁLISIS DE LOS ELEMENTOS CONSTRUCTIVOS DE LAS MÁQUINAS

§ 106

Elementos constructivos de las máquinas.

Despues de habernos ocupado en los capítulos anteriores de los mecanismos que sirven para formar las máquinas, nos falta estudiar los diferentes órganos de que están compuestas. A primera vista parece que volvemos hácia atrás, pero en realidad no hacemos otra cosa que continuar la senda que habíamos emprendido. En el fondo la existencia práctica de las construcciones mecánicas es en ciertos conceptos más difícil de comprender que las abstracciones esquemáticas á las cuales hemos reducido antes las máquinas de la mayor complicacion. Tan solo despues de haber establecido una forma bastante sencilla, casi por completo nueva, las consideraciones generales relativas á las propiedades fundamentales, hemos de llegar á descubrir en las formaciones complejas de las diferentes partes, lo que es el resultado de leyes invariables y separarlo de lo que no es más que accidental. Ese problema presenta en realidad muy grandes dificultades; pero reflexionándolo, no debe sorprendernos que el descubrimiento de la verdad exija tan notable preparacion. Solamente hoy la química, despues de un largo período de progresos sucesivos, se atreve á descomponer materias que hasta aquí se habian mirado como elementales; y eso es igualmente lo que debe hacer la ciencia cinemática, desembarazándose de toda preocupacion, si quiere llegar á comprender bien el valor de los órganos aislados que entran en la constitucion de las máquinas.

Hasta ahora en el dominio de la construccion, por decirlo así, la observacion nos ha conducido á conocer que las máquinas se componen de partes que se reproducen y que han sido designadas con los diferentes nombres de «órganos,» ó de «órganos simples,» «de elementos,» «de detalles de máquinas» ó bien «de elementos constructivos» de las máquinas, espresion que hemos propuesto hace ya varios años.

Dichos órganos se estudian cuidadosamente en los libros especiales destinados á la enseñanza, siendo, empero, incontestable que este asunto no se trata en ellos sino con cierta reserva. No se osa afirmar, como lo han hecho con «las máquinas simples,» que *todas las má-*

quinas pueden descomponerse en «elementos,» y se limita primero á confirmar que esos elementos se encuentran en ellas repetidos con frecuencia; más no deja de existir la idea primera, aunque esté disimulada; y sino está claramente espresada, es porque las ideas generales sobre las máquinas no eran hasta ahora á propósito para conducirnos á establecer principios positivos, y además porque el desarrollo progresivo del arte de la construccion mecánica ponia en evidencia cierta variabilidad en dichos elementos, que no dejaba de inspirar cierta desconfianza. Por esas razones nunca se ha llegado hasta ahora á una enumeracion clara y precisa de los «detalles de máquinas», ni tampoco se ha logrado dar una definicion de ellos propiamente tal. Si existe en realidad una limitacion más ó ménos determinada del número de los elementos, ó si á lo ménos se ha procedido siempre como si existiese dicha limitacion, es un resultado que no se puede atribuir más que al sentimiento, al instinto, si así podemos espresarnos.

Segun lo expuesto, es evidente que la enumeracion que sigue de los elementos de máquinas no puede abrigar la pretension de ser completa. Está simplemente destinada á indicar ó representar á rasgos generales la opinion dominante relativa á lo que llamamos los órganos de las máquinas. Consideramos como tales los elementos siguientes:

Tornillo y ensambles de tornillo;
Clavetes y ensambles de clavetes;
Remaches y pernos ó pasadores;
Gorrones, ejes, árboles;
Acoplamientos y acoplos;
Soportes, asientos, armaduras;
Ruedas de friccion;
Poleas y trasmisiones por correas;
Ruedas dentadas, ruedas de cadenas;
Volantes;
Palancas, manubrios, bielas;
Traviesas en cruz, guias y deslizaderas;
Cuerdas, correas, cadenas;
Ruedas de escape y trinqueteos;
Discos de freno y frenos;
Tubos y ensambles de tubos;
Cilindros de vapor y bombas;
Grifos ó llaves y válvulas;
Émbolos ó pistones y prensa-estopas;
Resortes.

Fuera de esos órganos que son de uso muy generalizado, hay todavia otros que se encuentran pricipalmente en ciertas máquinas, como por ejemplo las de hilar y tejer, las de las fábricas ó talleres en que se trabajan los metales, etc.; más como en ellas se encuentran con mucha frecuencia, se ha querido hacerlos entrar tambien en la categoria de los «órganos de máquinas.» Algunas veces se tiene, y parece justificada, establecida una distincion designando los primeros con el nombre de *órganos generales* y los otros con el de *órganos especiales*. Sin querer añadir aquí ningun ejemplo tomado de la segunda categoria, vamos á ocuparnos de la primera, con objeto de aprender á conocer los elementos generales bajo el punto de vista de su verdadero valor cinemático.

§ 107

Tornillos y ensambles de tornillos.

Cuando el tornillo y su tuerca se presentan bajo la forma ordinaria, como en la figura 351, constituyen indudablemente el acoplo de elementos (S) ó $S\overline{+}S\overline{-}$. Lo mismo acontece con otras aplicaciones del tornillo, ó como en las barras del taladro (fig. 352), el tornillo y la tuerca: forman respectivamente parte de una de las dos piezas que han de reunirse. Pero todo lo contrario sucede con los ensambles de tornillo, cuyo tipo ordinario representa la figura 353.

Aquí nos hallamos en presencia de cuatro piezas a, b, b_1, c, y el objeto que debemos alcanzar es la union invariable de b_1 con c. Comencemos por observar que el perno b se halla reunido á la pieza b_1, sin posibilidad de girar (véase § 19), merced al parapeto prismático que lleva cerca de su cabeza, de tal suerte que bajo el punto de vista de los movimientos de rotacion, b y b_1 deben considerarse como constituyentes de una sola pieza. Apretando fuertemente la tuerca a sobre la parte fileteada del perno b, la cabeza de ese último se aplica con fuerza á la pieza b_1. Ese resultado se produce por mediacion del acoplo (S), es decir, por medio de una clausura por acoplo, si hemos de servirnos de la espresion antes adoptada (§ 47). Por consiguiente las dos piezas b y b_1 se encuentran protejidas contra la rotacion por perfiles de apoyo adecuados, y contra la traslacion por una clausura de acoplo; segun la cual forman cinemáticamente una pieza única.

Admitiendo que el ensamble esté reducido á lo que indica la figura, la pieza c podria girar con respecto á b. Pero en realidad cuando el ensamble está debidamente ejecutado, ese movimiento de rotacion entorno del eje del émbolo queda impedido, ya sea por un segundo perno dispuesto paralelamente al primero, ya por cualquier otra disposicion; y el único movimiento que

le está permitido antes de que la tuerca esté apretada, se dirige en el sentido del eje del perno. En otros términos, *c* está *guiado prismáticamente* con respecto á bb_1, ó está acoplado con bb_1 por mediacion de un prisma paralelo al eje de *b*. De ahí resulta que la pieza bb_1 se compone en el fondo de dos elementos cinemáticos invariablemente trabados, un filete de tornillo S^+ y un prisma, P^+ ó P^-, paralelo al eje de ese filete.

A más del elemento S^- que está representado por su superficie interna, la tuerca *a* posee un segundo elemento cinemático que constituye la base plana por la cual reposa en *c*, ó hablando más exactamente, por la cual está acoplado con *c*.

Esta superficie de acoplamiento podria además no ser plana; pues de una manera general basta que afecte la forma de una superficie de rotacion conaxial con el eje del tornillo. El acoplo de rotoides entre *a* y *c* aquí no es independiente, pero si de clausura por acoplo. Sin embargo, presenciamos ahí un hecho accesorio, y el resultado sobre el que conviene especialmente llamar la atencion, es que la pieza *a* se compone de un elemento, S^-, y de una rotoide R, que es conaxial á S^- y cuyo elemento conjugado ó articulado pertenece á la pieza *c*.

Esa última pieza se compone igualmente de dos elementos, uno de los cuales es el prisma antes mencionado, que está acoplado con el de bb_1, y el otro la rotoide que acabamos de indicar y que tiene su eje paralelo al prisma.

Finalmente, como resultado de nuestro exámen encontramos que el ensamble de tornillos es *una cadena cinemática de tres miembros*, constituida por los acoplos (S), (R) y (P). Si escribimos esa cadena bajo su forma completa, sin hacer caso, empero, para mayor sencillez, de la no-independencia del acoplo (R), y reemplazando (R) por (C), lo cual nos es permitido segun el párrafo 57, obtenemos esta fórmula:

$$\overbrace{C^-\ldots \mid \ldots S^{\pm}_{=}S^+\ldots}^{a} \parallel \overbrace{\ldots P^{\pm}_{=}P^+\ldots}^{b} \parallel \overbrace{\ldots C^{+}_{=}}^{c},$$

la cual en virtud de la propiedad de inversion de los acoplos inferiores y de la equivalencia de los signos | y || puede en el caso actual escribirse tambien:

$$\overbrace{C^+\ldots \mid \ldots S^{\pm}_{=}S^-\ldots}^{a} \mid \overbrace{\ldots P^{\pm}_{=}P^-\ldots}^{b} \mid \overbrace{\ldots C^{-}_{=}}^{c}.$$

Esa última forma representa la cadena conocida ya de la fig. 154. La fórmula concentrada de esa cadena es (S'P'C'). Si se quiere indicar además que *b* es el miembro fijo y *a* el miembro conductor, debemos recurrir á la fórmula determinada: $(S'P'C')^{b}_{a}$.

En las aplicaciones del acoplo tornillo destinadas á producir ora un movimiento de traslacion como en los tornos, ora una presion como en las prensas, los tres miembros *a*, *b*, *c*, se muestran claramente dispuestos en el primer caso bajo la forma $(S'P'C')^{a}_{c}$, y en el segundo, las más de las veces, bajo la forma $(S'P'C')^{c}_{a}$. Con bastante frecuencia en los ensamblajes mismos de tornillos se cae en la forma de cadena indicada en la fig. 154, como por ejemplo, en el modo de ensamblar por tornillo de cabeza de la primera figura de las dos que llevan el número 140. Otro de los modos de ensamble de *b* y de b_1 que puede emplearse, se halla representado en la segunda de las figuras que llevan el mismo número 140. Pero siempre encontramos en los ensambles de tornillo de que aquí nos ocupamos especialmente, el acoplo $S^{\pm}_{=}S^-$, ingerido en la cadena (S'P'C').

La accion de la cadena no es la misma en los diferentes ejemplos que hemos indicado. Así en los tornos paralelos y las prensas de tornillo ó husillo, que bajo cierto punto de vista pueden compararse con ensambles de tornillo, corresponde dicha accion á las condiciones generales de las cadenas cinemáticas. Lo mismo sucede tambien, sin duda, por lo que toca á los ensambles de tornillo, pero solamente entre los restringidos límites de la muy corta carrera que basta para apretar una con otra las piezas *b* y *c;* y fuera de esa carrera la cadena deja de funcionar cinemáticamente. En una máquina en funcion la cadena contenida en el ensamble de tornillo, no actua ya como cadena, y por lo tanto no debe figurar especialmente en la fórmula cinemática de la máquina. Ha prestado simplemente un servicio momentáneo que ha consistido en reunir de un modo invariable dos ó más piezas de suerte tal, que puedan utilizarse como una sola y única. Funcion es esta por lo demás, que el ensamble de tornillo tiene que llenar amenudo en construcciones que por ningun estilo constituyen máquinas.

Un ensamble de tornillo que se utiliza para fijar la tapa de un cilindro de vapor en ese cilindro ó el segundo del soporte de un gorron sobre la armadura de una máquina, no desempeña por lo tanto ningun papel maquinal y llena simplemente una funcion de construccion. Realiza especialmente ese modo de union que en nuestro sistema de lenguaje simbólico se encuentra indicado por una *série de puntos.....;* ó en otros

términos, *en la cadena cinemática no sirve más que para la formacion de los miembros.*

Partiendo de ese modo de utilizar el ensamble de tornillo la cuestion de que debemos ante todo preocuparnos, es la de la resistencia. Por lo que toca á la forma, es indiferente bajo el punto de vista cinemático, con tal que satisfaga á la condicion de que los miembros de la cadena en sus movimientos relativos no se estorben unos á otros. Así se esplica la gran variedad de formas de los ensambles de tornillo, que sin embargo, deben satisfacer perfectamente las condiciones de construccion determinadas por la fórmula que anteriormente hemos indicado.

Más adelante volveremos á estudiar las partes accesorias de los ensambles de tornillo conocidas con el nombre de *dispositivos de seguridad.*

§ 108

Cuñas, clavijas, clavetes y ensambles de clavetes.

Hemos visto ya en el párrafo 64 que la cuña no es un elemento cinemático en el sentido que hemos dado á esa espresion, pero que en realidad se compone de elementos cinemáticos, de dos prismas, y que en sus aplicaciones conocidas se presenta como miembro de una cadena cinemática de tres miembros. Esa cadena que está representada por la fig. 201, corresponde á la fórmula.

$$\overset{a}{\overbrace{P^{+}\ldots\angle\ldots}}\ \overset{b}{\overbrace{(P)\ldots\angle\ldots}}\ \overset{c}{\overbrace{(P)\ldots\angle\ldots P^{=}}},$$

la cual puede ponerse bajo la forma concentrada $(P^{\angle}_{3})$. Los ensambles de cuñas ó de clavijas que se encuentran aplicados á las máquinas, ofrecen efectivamente todos esa composicion, prescindiendo de la clausura eventual de acoplos no independientes, por medio de fuerzas ó de otros acoplos.

El enclavijado ordinario de un cubo sobre un árbol ó eje (fig. 354) ostenta ya los tres miembros *a*, *b*, *c*. Los acoplos de prisma 1 y 2 se comprenden inmediatamente; ambos son acoplos no independientes que se cierran uno á otro. El acoplo 3 falta, pero el cubo al cual no permite el enclavijado moverse perpendicularmente al eje *c*, se halla privado, por clausura de fuerza, de tomar otros movimientos.

En la fijacion de un vástago ó árbol redondo en un cubo (fig. 355) encontramos los tres miembros *a*, *b*, *c* y los tres acoplos. Efectivamente, los acoplos 1 y 2 se encuentran en las fases delgadas de la clavija, en tanto que el acoplo 3 aparece en la superficie cilíndrica de contacto entre *b* y *c*, así como en los puntos de encaje de los flancos laterales de la clavija en *c*. Ese encaje ó ajuste realiza al propio tiempo la prismatizacion de *b* con respecto á *c*.

En el enclavijado de una cabeza de biela (fig. 356) el acoplo 3 es independiente, á la vez que los dos acoplos 1 y 2 no lo son. En el concepto cinemático las piezas b_1 y b_2 forman respectivamente con *c* y *b* una sola y misma pieza.

El ensamble de clavija es por consiguiente y en regla general como lo indican los ejemplos anteriores, una cadena cinemática de tres miembros, que de igual modo que el ensamblaje de tornillo no tiene que llenar funcion cinemática alguna en la máquina, ni sirve más que para la *formacion de los miembros.* Además, fuera de esa funcion la cadena $(P^{\angle}_{3})$ halla en la máquina, como en la cadena (S′P′C′) del párrafo precedente, numerosas aplicaciones para producir movimientos de traslacion ó ejercer presiones; pero entonces no debe ya contarse entre los elementos constructivos y constituye realmente verdaderos mecanismos.

§ 109

Empalmes ó pasadores y remaches.
Junturas forzadas.

Un empalme único que reune dos piezas (fig. 357) podria considerarse como la realizacion de un acoplo de cilindros $C^{\pm}C^{-}$, con la condicion de suponer el remache invariablemente ligado á una de las piezas ó planchas. Ambas piezas no pueden dar entonces con respecto una de otra más que movimientos de rotacion, como los elementos de un acoplo de ese género. Semejantes aplicaciones de empalmes ó remaches se encuentran efectivamente en la práctica, como por ejemplo, en las cadenas articuladas, pero en realidad los remaches de ese género más bien pertenecen á la clase de los gorrones de rotacion, de los cuales nos ocuparemos un poco más adelante. Los ensambles de remaches propiamente tales, ó los pasadores remachados, comprenden más de un empalme y no permiten ningun movimiento relativo de las piezas que juntan ó empalman. En el fondo no tienen ninguna significacion como elementos cinemáticos, toda vez que en tal caso son el resultado de una trasformacion plástica de las piezas que los componen, trasformacion producida por el procedimiento técnico de la forja. Como elementos constructivos de las máquinas sirven lo mismo que los ensambles de tornillo y de clavijas para la *formacion*

de los miembros de las cadenas cinemáticas. Utilízanse principalmente para la construccion de calderas, tubos, recipientes de todos géneros, ó sea de una manera general, para la formacion de receptáculos ó vasos V⁻ destinados á encerrar un órgano de presion líquido ó gaseoso.

En los ensambles de empalme ó remache los cuerpos que se han de reunir se aprietan en gran parte por la contraccion que sufren al enfriarse los pasadores aplicados en caliente. Por esa razon se colocan tambien en la clase de pernos ó pasadores remachados que se consideren como elementos de máquinas, varias otras formas de ensamblaje que consisten en reunir dos cuerpos ó simplemente en reforzarlos cercándolos de anillos ó aros.

Comunmente dichos aros se adaptan en caliente de manera que produzcan un ajuste muy enérgico por efecto de la contraccion debida al enfriamiento. Sin embargo, en estos últimos tiempos se ha logrado realizar esa presion ó ajuste por medio de la prensa hidráulica, sin necesidad de recurrir á calentar préviamente el aro; y la aplicacion de ese modo de estrechar dos ó más piezas se ha propagado á varios casos muy importantes, permitiendo así reemplazar con ventaja las antiguas formas que se usaban. Esto es lo que, por ejemplo, se efectua para calar los cubos de las ruedas de vagones en los ferro-carriles, los manubrios de locomotoras y sus botones, etc. Por regla general ese último procedimiento se parece mucho al primero, y puede admitirse que entre ambos existe la misma relacion que entre el empalme ó remache en frio y el remache en caliente. Importa por lo tanto no separarse de esos dos sistemas y abarcarlos juntamente bajo la designacion comun de *junturas forzadas*. Parece igualmente segun esto, estar uno autorizado á consagrarles un estudio especial entre los elementos de máquinas, como en efecto lo hacen algunos autores.

Consideradas bajo el punto de vista cinemático las junturas forzadas parece que deben clasificarse entre los acoplos de cilindros (C) ó de prismas (P), con la particularidad de que en estos empalmes se tocan los cuerpos con una energia tal, que bajo la accion de fuerzas ordinarias los elementos conjugados se ofrecen como un cuerpo único y pueden por lo mismo utilizarse para la *formacion de miembros de cadenas*. Esencialmente al roce producido por la presion debida al forzamiento, conviene atribuir la solidez del ensamblaje, conforme veremos más adelante cuando volvamos á estudiar ese punto.

§ 110

Gorrones, ejes, árboles.

En la ciencia de la construccion de las máquinas el cálculo de los *gorrones de rotacion* de todo género da márgen á un desarrollo muy considerable de fórmulas. Respecto de esos gorrones se manifiesta en una proporcion bastante estensa el dualismo de que ha sido cuestion en el párrafo 2, como quiera que por una parte se han de tener en cuenta fuerzas sensibles, y por otra parte fuerzas latentes. Bajo el punto de vista cinemático debe el gorron considerarse como *uno de los elementos* del acoplo $C^{\pm}C^{-}$; y es en realidad el elemento C^{+} de ese acoplo (C), ó si se quiere, el elemento R^{+} del símbolo más general (R). El acoplo $R^{\pm}R^{-}$ constituido por el gorron y su soporte es el de uso más generalizado en la construccion de las máquinas, como quiera que en efecto se halla en casi todas las cadenas cinemáticas de grandes y exíguas dimensiones, con velocidades débiles ó considerables, bajo las cargas más ínfimas lo mismo que bajo las más fuertes. En el párrafo 112 volveremos al exámen del elemento R^{-}

Los *ejes* son reuniones conaxiales de gorrones, ó sea de miembros de cadenas de la fórmula $C^{+}... \mid ...C^{+}$. Designanse especialmente con el nombre de *ejes de carga* los ejes que sobre todo tienen que resistir notables esfuerzos de flexion.

Los *árboles* son igualmente miembros de cadenas de la forma $C^{+}... \mid ...C^{+}$. Distínguense de los ejes de carga en que deben principalmente resistir esfuerzos de torsion; pero bajo el punto de vista cinemático no existe diferencia alguna entre los ejes y los árboles, que por lo demás se confunden muy amenudo en el lenguaje ordinario.

Cinemáticamente los tres elementos constructivos anteriores tienen, conforme acabamos de ver, una posicion claramente determinada en las máquinas.

§ 111

Acoplamientos.

Con el nombre de acoplamientos se distinguen ciertos dispositivos empleados para trabar entre sí cierto número de árboles y asegurar de ese modo la trasmision del movimiento de rotacion del uno al otro. No es tan fácil como en los casos anteriores asignar á cada uno de esos órganos su posicion cinemática, puesto que bajo el nombre de acoplamientos se comprenden

disposiciones de índole muy diversa: la trasmision del movimiento de rotacion de un árbol á otro se hace igualmente por medio de ruedas dentadas, poleas de correas etc.; pero esos órganos no deben contarse como acoplamientos; y no es ménos cierto que los acoplamientos propiamente tales, son amenudo mecanismos de varios miembros. En rigor puede definirse un acoplamiento de árboles como un intermediario destinado á trasmitir de un árbol á otro esos movimientos de rotacion que tienen lugar en el mismo sentido, con el mismo número de vueltas, en un tiempo igual y sin empleo de engranajes. Es preciso confesar que esa definicion no es muy exacta; pero esa falta de exactitud se halla igualmente en la nocion del acoplamiento mismo.

Los acoplamientos se dividen en acoplamientos *fijos*, *móviles* y de traslacion. Por de pronto nos ocuparemos únicamente de las dos primeras clases, reservándonos examinar la tercera un poco más adelante.

Los acoplamientos fijos están destinados á reunir dos árboles, de manera que puedan considerarse como formando un árbol único; se ejecutan por medio de ensambles de tornillo, ó de enclavijado, ó bien aun por medio de las dos disposiciones reunidas; en principio la trabazon ó remache no debe tampoco escluirse. La figura 358 representa un acoplamiento por manguito, en el cual es fácil conocer los tres miembros y los tres acoplos de la cadena ($P^{\angle}_{3}$). El acoplamiento de platos (figura 359) está constituido por la combinacion de dos enclavijados con un ensamble de varios tornillos. Otros acoplamientos fijos son el resultado de combinaciones aun más complejas. Pero todos poseen la propiedad fundamental de poder servir para la *formacion de miembros de cadena*, los cuales son de la forma $C^{+}... \mid ...C^{+}$.

Los acoplamientos móviles se subdividen en acoplamientos de movimiento longitudinal, trasversal y angular. Como ejemplo del primer tipo podemos citar el manguito de garras de *Sharp* (fig. 360). Está dispuesto como acoplo de prismas $P^{\pm}_{=}P^{-}$, puesto que las garras de las piezas A y B se encajan unas en otras, prismática y paralelamente á los ejes geométricos de los árboles *a* y *b*. De una manera accesoria se puede observar que las piezas A y B están ligadas invariablemente á los árboles *a* y *b* por medio de enclavijados.

Un acoplamiento de movimiento trasversal es el de *Oldham*, sobre el cual nos hemos estendido ya en el párrafo 72, y hemos visto que era un mecanismo de la forma $(C''_{4}P^{\perp}_{\frac{1}{2}})^{a}_{b}$, es decir, una corredera en cruz rotativa.

Por último, un acoplamiento angular ó juntura articulada es la juntura de *Cardan* (fig. 361), designada tambien con el nombre de juntura universal. En el curso de nuestras investigaciones lo hemos encontrado ya varias veces, y particularmente en el párrafo 62 lo hemos designado como juntura en cruz rotatoria con la fórmula $(C^{+}_{3}C^{\angle})^{a}_{b}$, y conviene no perder de vista que esa juntura está á veces representada, como en nuestra figura, sin el cuarto miembro $C^{-}...\angle...C^{-}$.

Esos ejemplos bastan para demostrar que en los acoplamientos móviles se encuentran en parte *acoplos de elementos* y en parte *mecanismos completos*, ó porciones de semejantes mecanismos, cuyos miembros pueden por sí solos en ciertos casos presentar un modo de formacion especial, realizado por medio de ensambles de tornillos y de enclavijados.

§ 112

Soportes, asientos de soportes, armaduras.

El asiento soporte completa el gorron C^{+}, para formar con él el acoplo de elementos $C^{\pm}_{=}C^{-}$, y constituye por lo tanto el *elemento cinemático conjugado* C^{-}. Bajo formas varias está armado de ensamblajes, de tornillos y de clavetes, así como de pequeños mecanismos auxiliares, algunos de los cuales están destinados á reunir las diferentes partes de la construccion, esto es, á realizar la *formacion de miembros*, y los otros á facilitar el engrase y asegurar la limpieza. Esos diversos órganos no deben por lo tanto entrar en la fórmula cinemática principal.

Los soportes de asiento no son otra cosa que los *puentes fijos* de cadenas cinemáticas, dispuestos para recibir por medio de ensambles de tornillos y de clavetes, elementos de la forma C^{+} ó C^{-}; y hasta á veces estos puentes no forman con tales elementos más que una sola pieza. La figura 362 representa un soporte dispuesto para recibir los asientos de dos árboles paralelos A y B. Si imaginamos esos asientos aplicados al soporte, el conjunto no constituye en el fondo más que un modo de realizacion práctica del puente $C^{-}...\mid...C^{-}$, representado por la figura 363.

El soporte de la fig. 364, que está dispuesto para dos árboles perpendiculares, se utiliza con frecuencia en las instalaciones de turbinas; suponiendo fijos los asientos E y F, el conjunto es cinemáticamente idéntico al puente $C^{-}...\perp...C^{-}$ de la fig. 365, ó tambien al puente $C^{+}...\perp...C^{+}$ de la figura 366, teniendo en cuenta la posibilidad de inversion de los acoplos inferiores. Los co-

jinetes, los pernos, el sombrero ó tapa, los pernos de fundacion, etc., no sirven más que para constituir por un lado el elemento C^{-}, y asegurar por otro la trabazon del conjunto con el suelo ó con los edificios. A un soporte compuesto, del género que representa la figura 367, podemos siempre sustituir el puente de la figura 368, que comprende cuatro elementos de la forma C^{-}, admitiendo por supuesto los asientos fijos en el soporte.

Segun esto, es evidente que todo constructor antes de emprender el trazado de una máquina deberia empezar por formarse una idea muy clara de los soportes de asientos y en general de la construccion de las armaduras, limitándose á considerarlos en toda la sencillez de sus formas cinemáticas. Así se concretaria á un trabajo de abstraccion cuyo resultado no dejaria de serle ventajoso bajo el punto de vista de la sencillez y de la buena disposicion del conjunto de la máquina. De una manera general ahora estamos en disposicion de comprender y aplicar el concepto tan sencillo de que los elementos de la máquina forman realmente parte de su constitucion cinemática. Importa, pues, no perder de vista, como por desgracia sucede muy amenudo, que las paredes, las vigas, el suelo, desde el momento en que reciben asientos, soportes, piezas de guiaje y otros órganos del mismo género, vienen á ser por lo mismo un miembro de la cadena cinemática de una máquina. Hemos hecho notar ya (§ 58) que en los dibujos á veces se prescinde de representar el puente fijo. Esa omision depende sin duda alguna de que el dibujante no tiene idea clara de ese miembro fijo, que igualmente pasa por alto al que examina el diseño. Realmente ese dibujo no suministra dato ni indicacion ninguna que permita darse cuenta de la manera como debe establecerse esa parte omitida, que sin embargo, tiene tan señalada importancia. ¿Quién, por ejemplo, al inspeccionar la figura 369, estraida de un tratado moderno de cinemática y que representa una máquina de vapor oscilante, podrá imaginarse claramente que los dos asientos de soporte A y B deben estar sólidamente trabados entre sí? En apariencia están de todo punto independientes. Fácil seria citar un gran número más de ejemplos del mismo género. Por lo tanto, no debe admirarnos que en la práctica encontremos trabazones de esa especie realizadas á veces de una manera muy imperfecta. Los ingenieros de cierta edad pueden recordar aún la sensacion que produjo el sistema de construccion adoptado por *Penn* en sus máquinas marinas oscilantes, y eso precisamente porque habia aumentado de una manera notable la resistencia de la armadura en cuestion por medio de contrapuntales en cruz. Y sin embargo, al obrar así *Penn* no habia hecho más que satisfacer la condicion sencillísima, cuya necesidad hemos venido demostrando desde el principio (§ 1) para todo miembro de la cadena cinemática.

Hoy vemos aplicar á las máquinas de vapor horizontales un procedimiento enteramente análogo, que ha tomado orígen en el Norte América y que consiste en el empleo de una pesada armadura en forma de viga que lleva el cilindro y el asiento del manubrio. Esa armadura de las máquinas de vapor de *Corliss*, *Allen*, *Tangye*, no es en definitiva otra cosa que el puente *d* del mecanismo de manubrio $(C''_3P^{\perp})^d$ de la figura 163. Apenas podria creerse que los constructores de máquinas no hacen más que llegar á ese modo de construccion y están todos más ó ménos admirados del «perfeccionamiento» que con él han aportado, cuando esa forma de armazon en definitiva dimana naturalmente de los principios fundamentales que hemos espuesto. El moderno constructor de máquinas, en virtud de las ideas generalmente dominantes considera amenudo como sencillo y evidente lo que es complicado y necesita demostrarse, mientras que contempla maravilloso lo que es la consecuencia indeclinable é inmediata de principios invariables. Ahí tenemos una prueba de la evidente potestad que caracteriza á todo sistema verdaderamente lógico.

Podria citarse además otro gran número de ejemplos, que como el anterior pondrian en evidencia la falta de verdaderos principios á propósito para servir de guia en la construccion de las armazones ó armaduras de mecánica. A esa falta de principios se refiere íntimamente la tentativa de *Redtenbacher* para formar una clase especial con las máquinas de una armadura única (a). Al propio tiempo hemos observado que es posible tratar esa cuestion de una manera sencilla y fácil de comprender, y que por tanto no es necesario en modo alguno recurrir á una clasificacion especial.

§ 113

Cuerdas, correas y cadenas.

Anteriormente hemos demostrado (§ 41) que las cuerdas, las correas y las cadenas son verdaderos elementos cinemáticos y constituyen los órganos de traccion designados respectivamente por T_s T_p y T_z. Estos elementos (que se emplean con auxilio de ganchos, tornillos, chapas, remaches, etc.), dispuestos como ór-

(a) Redtenbacher habia propuesto designar estas máquinas con el nombre de *Möbelmaschinen*.

ganos sin fin ó reunidos con otros cuerpos, forman los miembros de ciertas cadenas cinemáticas, de las cuales vamos á ocuparnos en los párrafos siguientes. Las cadenas articuladas ó cadenas de *Galle* están constituidas realmente por la reunion de gran número de eslabones de la forma $C^{+}... \parallel ...C^{-}$, y forman cadenas cerradas merced á la adicion de un puente entre las ruedas dentadas sobre las cuales se arrollan esos eslabones.

§ 114

Ruedas de friccion, trasmisiones por correas y cables ó cuerdas.

Las ruedas de friccion son elementos cinemáticos de acoplos de clausura de fuerza. Dos ruedas de ese género reunidas como se indica en la figura 138, constituyen cabalmente un acoplo completo de elementos de órden superior de la forma R^{+}, R^{+} ó R^{+}, R^{-}.

Una polea que sirve para mover una cuerda ó una correa, ó que está puesta en movimiento por uno ú otro de esos órganos, forma con él un acoplo de elementos $R^{+}, T^{\pm}$ (fig. 370). Dos acoplos de ese género que, como sabemos, son de clausura de fuerza, forman al estar debidamente reunidos, una trasmision por correa ó por cuerda (fig. 160), con la condicion de armar de dos ejes las poleas, unidos á su vez por un puente (§ 44). Una polea aislada con su eje constituye un *miembro* de la cadena de que se trata, lo mismo que el órgano de traccion sin fin (cuerda ó correa). La ciencia de la construccion de las máquinas indica las reglas que han de seguirse para el establecimiento de esos miembros de cadenas.

§ 115

Ruedas dentadas, ruedas de cadenas.

Las ruedas dentadas son miembros de la cadena ($R_2C''_3$), de la cual suministra un ejemplo particular la figura 153, y es el de la cadena de ruedas cilíndricas ($C^{+}_{2}C''_{3}$). El puente *c* constituye el soporte de los asientos (véase § 112). La ciencia de la construccion de las máquinas enseña el modo de formacion del acoplo superior (R_2), así como la construccion de los miembros $R_2... \mid ...C$. Si acoplamos una rueda dentada con una cadena (fig. 147), obtendremos el acoplo $R_2, T^{\pm}_{2}$. La trasmision por cadena es el resultado de la reunion de dos acoplos de ese género.

§ 116

Volantes.

Incidentalmente hemos indicado (§ 45) la significacion cinemática de los volantes. Están constituidos, como hemos visto, por masas pesadas, dispuestas en forma de rotoides que se aplican á los miembros de la fórmula $C^{+}... \mid ...C^{+}$, para efectuar el paso de los puntos muertos, en virtud de su fuerza viva, ó bien, para regularizar simplemente el movimiento de tales miembros. Los volantes no admiten ninguna designacion simbólica especial como elementos ó miembros de cadena, puesto que nuestro sistema de notacion no puede dar ninguna indicacion sobre las masas de los diferentes órganos.

§ 117

Palancas, manubrios, bielas.

La ciencia de la construccion de las máquinas distingue las palancas simples de las palancas compuestas. Las palancas son miembros de cadenas que están armados de gorrones y que ejecutan movimientos de oscilacion. Segun su disposicion y su modo de empleo, la palanca simple ordinaria corresponde al *oscilador c* $=C^{+}... \parallel ...C^{+}$ en la cadena (C''_4). La palanca compuesta es un miembro de cadena formado de palancas simples y es, por ejemplo, de la forma:

$$C^{+}... \begin{cases} \cdot \parallel ...C^{+} \\ \cdot \parallel ...C^{+} \end{cases}$$

El manubrio es un miembro de la forma $C^{+}... \parallel ...C^{+}$, destinado á ejecutar rotaciones enteras alrededor de uno de sus gorrones, y que corresponde por lo tanto, al miembro *a* de la cadena (C''_4) ó (C''_3P^{+}), etc.

La biela es un miembro constituido por dos elementos cilíndricos, y generalmente es de la forma $C^{-}... \parallel ...C^{-}$. Corresponde al *lazo b* en el mecanismo $(C''_4)^d$ ó $(C''_3P^{+})^d$. Bajo el punto de vista de la forma cinemática no se distingue del soporte de la figura 362 (§ 112).

En resúmen, aquí nos encontramos en presencia de una série completa de miembros de cadena, que difieren por su construccion, pero que son de todo punto equivalentes en el concepto cinemático; y esos miembros no tienen una importancia diferente, sino á causa de las diferencias de posiciones que ocupan en la cade-

na. Por su parte las palancas compuestas tienen una significacion análoga á la de las armazones compuestas (§ 112) con las cuales tienen de comun las posiciones respectivas de los elementos C.

§ 118

Traviesas en cruz, guias y deslizaderas.

El atravesaño ordinario designado tambien con los nombres de traviesa ó cabeza en cruz no es otra cosa más que el miembro *c* de la cadena $(C''_3P^{\perp})$, para el que nosotros hemos adoptado la designacion especial de «correderita.» Es de la forma C...⊥...P. A la traviesa corresponde la pieza *guia* ó *deslizadera* que en la práctica afecta un gran número de formas y no es en realidad más que el prisma 4 (fig. 163) que pertenece al puente *d* del mecanismo $(C''_3P^{\perp})^d$. Por regla general la deslizadera es un prisma hueco P^{-}, pero á veces se presenta tambien bajo la forma de un prisma lleno P^{+}. En la figura 371 el cuerpo D en forma de marco representa ese prisma, mientras que la pieza C es la traviesa correspondiente, es decir, la correderita *c* de la figura 163. En la práctica la traviesa ha revestido sucesivamente muy gran número de formas diferentes, todas las cuales llevan impreso el sello de un estudio laborioso. El problema, que teóricamente parece tan sencillo, de asegurar un movimiento rectilíneo en un mecanismo dado, no ha llegado á una solucion práctica sino al cabo de prolongado período (véase § 3).

En suma, el manubrio, la biela, la traviesa, la deslizadera (añadiendo á esta última los soportes del eje del manubrio), y por último, la palanca, son los miembros de los mecanismos de manubrio $(C''_3P^{\perp})^d$ y $(C''_4)^d$.

§ 119

Ruedas de escape y dispositivos de paro.

Las ruedas de escape ó de paro no están clasificadas con regularidad entre los elementos generales de las máquinas. Comunmente se consideran como órganos especiales que se aplican con preferencia á las máquinas elevatorias; pero en realidad tienen un carácter mucho más general. Cuando se las quiere tratar de una manera rigurosa, se tropieza con un gran número de problemas de grandísima complicacion, y ese es el motivo sin duda, porque en general no se ha creido que debiesen figurar en el número de los elementos «simples» de las máquinas. Sin querer aquí estudiar la cuestion de una manera completa, examinaremos, no obstante, algunos de los casos que ofrecen más interés.

Entre las numerosas formas bajo las cuales se presentan en la práctica, los mecanismos de escape, que más propiamente se denominarian de paro ó detencion, la más usada es la de la *rueda de dientes*, con un *trinquete* ó *gatillo* (figs. 372 y 373). Este mecanismo se compone de tres miembros: la rueda: *a*=C... | ...C_1, el trinquete ó gatillo *b*=Z... ‖ ...C, y el puente *c*= C... ‖ ...C, que es el miembro que se ha de suponer fijo. El diente Z, como hemos dicho ya en el párrafo 43, se encaja, con clausura de fuerza, en los vacios de la rueda *a*, estando el gatillo *b* aplicado firmemente por su propio peso ó por la accion de un resorte. Cumple además observar que *b* no está acoplado cinemáticamente con *a* sino para un solo sentido de rotacion de la rueda (á la izquierda en la figura 372, y á la derecha en la figura 373): cuando la rotacion tiende á efectuarse en el sentido contrario el trinquete ó gatillo *b*, al cabo de un instante en estremo corto, que corresponde al escaso juego que existe entre su estremo y el diente, detiene la rueda, la mantiene fija, formando por decirlo así, con ella y el puente *c* una pieza única.

Los dos mecanismos de las figuras 372 y 373 parece á primera vista que no presentan más que una diferencia de construccion, que consiste en que el trinquete en la primera figura actua por presion, á la vez que por el contrario en la segunda obra por traccion; pero un exámen más detenido permite notar que cuando en la figura 372 la rueda gira en el sentido de la flecha, las rotaciones del trinquete ó gatillo y de la rueda son de sentido contrario, mientras que en la otra figura siguen una misma direccion. En otros términos, la relacion entre la rueda y el gatillo cuando este último obra por presion, es la misma que entre dos ruedas dentadas esteriormente, en tanto que cuando el gatillo obra por traccion, esa relacion es análoga á la que existe entre una rueda dentada llena y una rueda vacia. Por consiguiente debemos consignar con Z^{+} el diente del gatillo de presion y con Z^{-} el del gatillo de traccion.

Otra propiedad, que conviene espresar con un símbolo, es la que tiene la rueda de no poder girar más que en un solo sentido. Para indicarla intercalaremos en vez de una simple coma, *un punto y coma*, como signo de acoplamiento entre C_1 y Z, de suerte que poniendo igualmente en evidencia la clausura de fuerza del diente Z, el acoplo se escribirá: $C_1;\frac{Z^{+}}{f}$ ó $C_1;\frac{Z^{-}}{f}$. El *punto* indica aquí la inmovilidad de la cadena en un sentido; y la *coma*, la movilidad en el otro sentido.

Suponiendo fija en *c* la cadena, debe la fórmula completa escribirse:

$$\overbrace{C^{+}\ldots \parallel \ldots C_{z}}^{a}\ ;\ \overbrace{Z\ldots \parallel \ldots C^{\pm}}^{b}\underbrace{C^{-}\ldots \parallel \ldots C^{=}}_{c}$$

Para dejar á esá fórmula un carácter de mayor generalidad no se ha añadido á Z su símbolo de forma; é igualmente se ha omitido el signo de la clausura de fuerza, pero en realidad esa omision puede efectuarse sin inconveniente, puesto que el signo *punto y coma* indica ya que se trata de un acoplo no ordinario. Esa última circunstancia permite además escribir el acoplo C_z; Z, en forma concentrada, con uno solo de los signos de elementos, anotando C_z; $Z{=}(C_z;)$. Esa notacion que ofrece un grado de claridad muy suficiente, está por otra parte perfectamente justificada, si se compara con el símbolo (C_z) del acoplo de ruedas dentadas C_z, C_z, toda vez que el gatillo C... ‖ ...Z puede en realidad considerarse como una fraccion de una rueda dentada.

Segun esto el mecanismo de detencion ó de escape con vástago rectilíneo de la figura 374, puede escribirse de una manera completa:

$$\overbrace{P^{+}\ldots \parallel \ldots P_{z}}^{a};\ \overbrace{Z^{+}\ldots \parallel \ldots C^{\pm}}^{b}\underbrace{C^{-}\ldots \perp \ldots P^{=}}_{c}$$

y bajo forma concentrada: $(CPP_z;)^e$, etc.

Al lado del género de mecanismos de escape que acabamos de examinar, existe otro que difiere esencialmente de ellos. La figura 375 nos suministra un ejemplo de ese último género, en el cual encontramos igualmente, como en los dispositivos anteriores, una rueda dentada, un gatillo de paro y un puente; si bien aquí el gatillo se encaja en la rueda de manera que su diente produce la detencion en los dos sentidos del movimiento rotatorio. El gatillo *b* es, por decirlo así, el resultado de la reunion de los dos trinquetes de las figuras 372 y 373, puesto que obra por una parte con presion, y por otra con traccion, para impedir respectivamente las rotaciones á derecha é izquierda. Los dos primeros mecanismos son en definitiva de *simple efecto*, mientras que el segundo es de *doble efecto;* pudiendo así designarlo con el nombre de *trinqueteo fijo* ó de *reposo*, reservando el de *trinqueteo móvil ó corriente* para cada uno de los dos primeros, en los cuales el trinquete se desliza por los dientes de la rueda durante el movimiento retrógrado de esa última. El trinqueteo de reposo encuentra cierto número de aplicaciones y particularmente en los campaniles de péndulos y de otros relojes análogos.

Para designar simbólicamente el mecanismo de doble efecto nos vemos en la necesidad de introducir un nuevo signo. En primer lugar el diente por razon de su doble modo de accion, debe representarse con el símbolo $Z^{\pm}$; en segundo lugar el signo *punto y coma* puede reemplazarse por *dos puntos*. De ese modo el acoplo de elementos formado por la rueda y el trinquete de doble efecto se representará con $C_z : Z^{\pm}$ ó en forma concentrada, con el símbolo $(C_z:)$. Por consiguiente, la fórmula del mecanismo completo de la figura 375 será: $(C''_3C_z :)^e$.

Ese último mecanismo $(C''_3C_z :)^e$ es muy diferente del anterior $(C''_3C_z ;)^e$. En este último caso la rueda *a* puede girar sin impedimento en el sentido de la flecha; el trinquete entonces *se levanta automáticamente* al paso de cada saliente de la rueda, y luego vuelve á su puesto por clausura de fuerza. Si se quiere que la rueda gire en sentido inverso, es preciso tener levantado el trinquete *por medio de una disposicion especial*, ó lo que es lo mismo, «desendentar» el trinqueteo. En el mecanismo $(C''_3C_z :)^e$, por el contrario, *ninguno de los dos movimientos de rotacion puede efectuarse sin desendentar de antemano el trinquete*. Si en este último mecanismo despues de dejar libre el trinquete se le abandona de nuevo á la accion de la fuerza de clausura (fig. 376) durante el movimiento de rotacion, este movimiento no continua sino hasta el momento en que el hueco más cercano de la rueda llega precisamente á colocarse debajo del diente del trinquete. En dicho momento se efectua otra vez una brusca detencion, de manera que la rueda, el gatillo y el puente comienzan de nuevo á obrar como si formasen una sola pieza. Con el trinqueteo corriente (fig. 377) en las mismas circunstancias y á causa de la forma dada á los dientes de la rueda, el trinquete se instala poco á poco en uno de los huecos, antes que se efectue la detencion definitiva. Luego, se encuentra en muy buenas condiciones para producir de una manera segura el paro de la rueda.

Si despues de producir el desengranaje de un trinqueteo cargado, es decir, de un trinqueteo tal que la pieza de detencion esté solicitada á girar adelante por la accion de una fuerza motriz, no se deja inmediatamente en libertad, es decir, á la accion de la fuerza de clausura, la rueda de paro *a* continua su movimiento adelante y con una velocidad tanto más pronunciada cuanto más enérgica es la fuerza que la solicita. Ese movimiento que constituye lo que puede llamarse un *disparo*, puede servir para desarrollar en un momento

dado un trabajo mecánico préviamente acumulado en el mecanismo, el cual debe entonces tomar el nombre de *mecanismo de disparo*.

De tales dispositivos que tienen numerosas aplicaciones uno de los más generalizados es el de los rastrillos de fusil. En ese mecanismo las dos muescas del piñon son los dientes de la rueda de paro y el disparador es el órgano que produce el desendentaje de la patilla. Mecanismos de igual género se usaban ya en las ballestas de la Edad Media, así como en las balistas y catapultas de la antigüedad, para utilizar repentinamente un trabajo acumulado. Por otra parte, esos mecanismos prestan tambien muy grandes servicios en ciertas máquinas modernas, como por ejemplo, en las máquinas automáticas de las hilanderias, donde se encuentra gran número de dispositivos de disparo destinados especialmente á determinar en momentos dados los cambios de movimientos necesarios.

§ 120

Movimiento retrógrado en el trinqueteo corriente.

Las aplicaciones de los dos géneros de ruedas de detencion que acabamos de examinar son, como se ve, numerosas é importantes, mucho más importantes aun de lo que á primera vista pueda parecer. Así pues, creemos indispensable dedicarnos á un detenido exámen de los mecanismos que de aquellas derivan. Varias de esas aplicaciones permiten llegar á conclusiones de verdadera importancia sobre ciertos detalles de las máquinas, lo cual nos obliga á salir de los límites en que por regla general se han encerrado hasta ahora los elementos constructivos.

Admitiendo que los trinqueteos pueden utilizarse lo mismo en el sentido *progresivo* que en el *retrógrado*, debemos comenzar por examinar brevemente lo que se produce en la marcha retrógrada de la pieza de detencion y en particular el movimiento del trinquete.

Si la pieza de detencion *a* es una rueda que gira alrededor de su eje, comunica al trinquete C... || ...Z un movimiento de rotacion, cuya ley depende esencialmente de la forma del dorso del diente. Y efectivamente, ese dorso es en general una porcion de disco *a* (figura 378) que cuando presenta un perfil curvo contínuo en todo su contorno, como en la figura, imprime al trinquete un movimiento de oscilacion entorno de su eje. Si el trinquete tiene un radio de grandor infinito (fig. 379) se trasforma en correderita, á la cual en la hipótesis de mantenerse la clausura de fuerza, el disco curvilíneo *a* imprime un movimiento vertical alternativo. Tambien en este caso nos encontramos en presencia de una cadena de tres miembros cuya fórmula es:

$$\overbrace{C^{+}\ldots \parallel \ldots \tilde{C},}^{a}\ \overbrace{\frac{Z}{f}\ldots \perp \ldots P^{+}_{=}P^{-}\ldots \perp \ldots}^{b}\ \overbrace{C_{=}}^{c}$$

El mecanismo que suministra esa cadena cuando se la fija en *c*, pertenece á una série de mecanismos que se presentan bajo formas muy variadas, y puede designarse con el nombre de *mecanismos de impulsion de brazos*. Existen diferentes procedimientos que permiten sustituir una clausura por acoplo á la clausura de fuerza por Z. Uno de tales procedimientos consiste en aplicar al estremo de la correderita ó del trinquete en el punto en que toca la curva, un elemento de perfil cilíndrico cuyo contorno es una curva equidistante del punto en cuestion (fig. 380), y en dejar deslizar ese elemento por una ranura del disco *a*, constituida por dos curvas equidistantes de la curva del perfil primitivo (véase § 35).

Segun esto, *la clausura por fuerza del trinquete* ó de *la correderita no constituye una propiedad esencial y fundamental de los mecanismos de impulsion á brazos ó de brazos; pues no es más que una propiedad eventual y no necesaria*. Ahí se encuentra justificada la omision que hemos hecho en el párrafo anterior del símbolo de la clausura de fuerza. Por lo demás, no debemos llevar más adelante la discusion de ese punto, puesto que así llegaríamos á penetrar en uno de los dominios más vastos de la cinemática aplicada. Nos contentaremos con haber establecido la rueda de detencion con su perfil de puntas, que en rigor pertenece á la clase de mecanismos de impulsion de brazos, los cuales á su vez en ciertas circunstancias pueden entrar en la categoria de los mecanismos de ruedas dentadas. Ahora entraremos de lleno en el exámen de algunos mecanismos compuestos que deben considerarse como derivados de los mecanismos de escape ó detencion.

§ 121

Trinqueteos.

Los trinqueteos en sus formas ordinarias desempeñan en la constitucion de las máquinas un cometido que en apariencia es secundario; y en realidad son de uso muy general, más nunca, por decirlo así, se ha tenido clara idea del alcance de su modo particular de actuar por clausura de fuerza. Sin embargo, no por

ello dejan de merecer la mayor atencion, conforme iremos demostrando, y ese es el motivo porque nos parece conveniente esponer con claridad sus propiedades fundamentales.

Cuando un órgano de máquina tiene un movimiento progresivo, más no contínuo, ó sea, con períodos alternativos de reposo, el mecanismo al que se debe la produccion de ese movimiento, constituye lo que puede llamarse un trinqueteo. Un mecanismo de ese género actua de una manera periódica y exije por consiguiente que en los intérvalos grandes ó pequeños comprendidos entre las fases de accion, se impida el movimiento retrógrado del órgano accionado, lo cual se consigue en la mayoria de los casos con la adicion de un paro de trinquete. Un mecanismo completo que sea susceptible de producir un movimiento progresivo con períodos de reposo, se compone, pues, si no siempre, á lo menos la mayor parte de las veces, de un trinqueteo propiamente tal y de un dispositivo de detencion ó paro. Entre los mecanismos de ese género uno de los que están más generalizados por el uso, es el representado por la fig. 381, que está destinado á producir la elevacion de un vástago a_1. Como dispositivo de detencion obra aquí el mecanismo $(CPP_2;)^e$ que hemos examinado ya en el párrafo precedente, y como trinqueteo un dispositivo enteramente semejante pero fijo en a, cuyo vástago dentado a_1 coincide con el del mecanismo de detencion y es móvil con respecto al puente c. Durante el descenso de c_1 el vástago ó cremallera dentada aa_1 se mantiene en reposo por efecto del trinquete b, en tanto que el trinquete b_1 salta cierto número de dientes; y en el movimiento de ascension en cambio b_1c_1 y a_1 funcionan como si formasen una sola pieza, en tanto que b permite que el vástago dentado se eleve.

Si manteniendo el movimiento relativo de las dos piezas c y c_1 se da á cada una de ellas como movimiento absoluto la mitad del movimiento de c_1, se obtiene un trinqueteo de doble efecto que está representado por la fig. 382. Aquí dos cremalleras a y a_1 en vez de estar superpuestas se hallan opuestas una á otra, dejando entre sí una abertura prismática que se desliza por un prisma fijo y asegura así el guiaje. Las dos correderitas c y c_1 que llevan los trinquetes, se ponen en movimiento por mediacion de las bielas articuladas con una doble palanca de brazos iguales (en la práctica, en que el uso de este mecanismo está bastante generalizado, se tiene la costumbre de sujetar los trinquetes ó gatillos directamente á los brazos de la doble palanca, lo cual permite suprimir completamente las correderitas y las bielas). En esa disposicion no existe ya, por decirlo así, mecanismo de detencion, sino más bien dos trinqueteos de accion recíproca, cada uno de los cuales se desengrana mientras que el otro funciona. Es de observar que los dos trinquetes, por más que su carrera no llegue sino á la mitad de la del trinquete c_1 del dispositivo anterior, recorren en su movimiento retrógrado por cada cremallera el mismo camino que en el trinqueteo simple, admitiendo, por supuesto, que la carrera total sea la misma en cada período.

Otro trinqueteo de doble efecto es el que representa la fig. 383. En ese mecanismo que lleva el nombre de palanca de *Lagarousse*, una sola correderita hace mover dos trinquetes, el uno de presion y el otro de traccion, que obran alternativamente sobre la rueda de escape a. Para cada simple carrera de la correderita c uno de los trinquetes hace girar la rueda de un cierto número de dientes, en tanto que el otro salta precisamente un número doble. Es una propiedad que merece llamar la atencion y sobre la cual tendremos que volver más adelante.

Los mecanismos de detencion de trinquetes móviles que, conforme hemos visto, se prestan muy bien á la formacion de trinqueteos, ofrecen naturalmente ventajas para los *escapes* de relojeria, que constituyen una subdivision muy importante de ese género de mecanismos. Los escapes se fundan por regla general en la accion alternativa de engranaje y desengranaje de un trinquete, con relacion á una rueda dentada que de una manera contínua se halla solicitada por una fuerza motriz. Si esas alternativas de accion se efectuan á intérvalos tan iguales como sea posible, el escape puede regularizar el movimiento de un mecanismo de relojeria, haciendo recorrer á las ruedas del rodaje ángulos iguales en tiempos iguales.

Tomaremos por ejemplo el escape de áncora de *Graham* para relojes de péndulo (fig. 384). En ese escape de uso tan generalizado, hay dos mecanismos de detencion reunidos de suerte tal, que los dos trinquetes b_1 y b_2, el uno de presion y el otro de traccion, parecen formar una sola pieza que lleva el nombre de *áncora*. Cuando á efecto del movimiento del péndulo el trinquete b_1 se levanta, b_2 penetra entre dos dientes y detiene al punto el movimiento de la rueda de escape contínuamente solicitada por la fuerza motriz. En el movimiento del áncora en sentido inverso b_2 escapa, y la detencion de la rueda se encuentra producida por b_1. Entre dos paros consecutivos la rueda de escape gira de un ángulo correspondiente á un semi-paso. Una disposicion accesoria especial de los relojes consiste en que la rueda de escape al momento en que deja de estar detenida por el trinquete, va á su vez á obrar sobre el plano inclinado que termina dicho trin-

quete (la paleta), y así le comunica un pequeño impulso que se trasmite al péndulo. Por otra parte esa disposicion no es necesariamente conexa con el escape y no se encuentra más que en cierto número de sistemas de escape, y especialmente en los de reciente creacion. Así por ejemplo, en ciertos escapes de construccion muy delicada, como en los de los cronómetros, se emplea un solo trinquete, el cual á cada doble oscilacion del péndulo se halla en libertad y al punto se encaja en un vacio de la rueda para producir la detencion del diente que sigue. Lo mismo sucede con el escape empleado en el cronoscópio de *Wheastone*. En este escape (fig. 385), que ha sido perfeccionado por *Hipp* y que funciona con una velocidad verdaderamente estraordinaria, el trinquete de detencion se reduce á un resorte vibrante capaz de efectuar mil oscilaciones completas por segundo. A cada una de esas oscilaciones deja pasar un diente de la rueda de escape para detener inmediatamente despues el que le sigue. Así vemos utilizada con buen éxito en las máquinas más delicadas que se hayan construido, una propiedad de la detencion por trinquete, que á primera vista parece un mecanismo bastante tosco y poco idóneo para dar el grado de precision necesaria en la construccion de las máquinas.

La fig. 386 nos da el ejemplo de un trinqueteo con paro de reposo. Para que la rueda a pueda ponerse en movimiento, es indispensable que antes se levante el trinquete b, resultado que se obtiene por medio de un diente d_1 que está reunido al diente de impulsion a, animado de un movimiento de rotacion, y que al encajarse en la pequeña saliente b_1, levanta el trinquete. Mientras se efectua esa elevacion, el diente d se encaja en un vacio de la rueda a y la empuja adelante en una cantidad igual á un paso entero; y al fin de ese movimiento el diente d_1 abandona á su vez la saliente b_1, el trinquete b cae de nuevo, y al punto se restablece la detencion. La rotacion de la pieza dd_1 puede efectuarse adelante y atrás, de manera que la rueda pueda ponerse en movimiento tanto en un sentido como en otro.

Aumentando indefinidamente el radio de la rueda a y operando como lo hemos indicado antes (§§ 69 y 71), esa rueda acaba por trasformarse en árbol prismático, el cual, suponiendo tambien la pieza dd_1, *el declique* (a), debidamente modificada, se convierte en un árbol ó vástago de trinqueteo susceptible de moverse adelante y atrás con detencion de reposo.

No queremos entrar aquí en el exámen de otras formas de trinqueteo con detencion de reposo y nos limitaremos á indicar brevemente una aplicacion en estremo generalizada del mecanismo que acabamos de estudiar. Nos referimos á las cerraduras empleadas para cerrar las puertas. En los utensilios de ese género, ya sean simples ó compuestos, ya productos medianos ú obras de arte, el pestillo, puesto en movimiento por la llave, forma precisamente parte de un trinqueteo de la clase que acabamos de examinar en último término. Podemos ante todo observar que el cierre ordinario de pestillo de golpe constituye ya por sí mismo un mecanismo de paro corriente, segun la definicion que antes hemos dado. El pestillo de resorte lo mismo que el pestillo simple, forma con la caja de la cerradura, la armella y la puerta misma un mecanismo de detencion que pertenece al género representado por las figs. 372 y 373. La única diferencia consiste en que despues de introducido el pestillo simple ó el pestillo de golpe, queda impedida toda rotacion ulterior de la puerta entorno de su eje por causa del batiente; de suerte que una vez cerrada la puerta el mecanismo de detencion corriente se halla trasformado en mecanismo de detencion de reposo.

El pestillo de una cerradura de llave es casi siempre un vástago de detencion a de la forma P... ‖ ...P_2; la pieza que se llama resorte de la cerradura, constituye el trinquete de reposo b, que en las cerraduras de precision para aumentar la seguridad, se halla reproducido varias veces; la llave dd_1 es el órgano de impulsion y de desplace; y por último la caja de la cerradura es el puente c. Además, el pestillo a forma con la puerta y la caja un mecanismo de detencion especial que es de reposo. En las cerraduras de varias vueltas, es decir, en aquellas en que el pestillo para llegar al término de su carrera exige más de una vuelta de la llave, el vástago a lleva más de un diente. Para impedir todo movimiento del pestillo es necesario quitar de la cerradura el órgano de *declique*, es decir, la llave. Tambien á veces la llave sirve únicamente para producir el disparo de la detencion, en tanto que para lograr el movimiento del pestillo se utiliza otro órgano de empuje, como un boton, un puño, mano, etc. Para hacer imposible ó cuando ménos muy difícil la abertura de la cerradura con una llave estraña, se tiene el cuidado de dar una disposicion muy complicada al trinquete b y al arco de desencaje ó desendentaje b_1.

El exámen de la fig. 387, que representa el diseño de una cerradura *Chubb*, en el cual se han conservado

(a) *Declique*, palabra que hemos tenido necesidad de importar á causa de no tener en español ninguna que pueda espresar la misma idea. Por lo demás, su significacion se comprende con solo examinar la fig. 386. *(Nota del Traductor).*

para los diferentes órganos las mismas letras que en la figura 386, permite comprobar inmediatamente la exactitud de las consideraciones anteriores, las cuales son igualmente aplicables á las cerraduras de precision muy conocidas, de *Bramah*, *Hobbs*, *Yale*, etc. En definitiva, la construccion de las cerraduras de seguridad, que se ha llevado hoy hasta el más alto grado de perfeccion y que produce tan gran número de ingeniosos inventos, ha quedado estrictamente en el espíritu de la ciencia cinemática, puesto que ha aplicado sus leyes con estremada exactitud.

§ 122

Frenos.

Las poleas de frenos son miembros de cadenas cinemáticas, generalmente de la forma C... | ...R, que en virtud del rozamiento desarrollado en su contorno, sirven para moderar ó detener completamente el movimiento de los miembros de cadenas que les están enlazados. Una de esas poleas, con las mandíbulas ó la faja apretadas contra su periferia y los otros órganos accesorios constituye lo que se llama un *freno*. Organos de máquinas que se mueven en línea recta ó en una curva cualquiera, pueden igualmente armarse de frenos.

Una particularidad que merece señalarse consiste en que en un freno, antes de que él paro se produzca, las mandíbulas, la boca ó la faja forman con la pieza (disco, árbol, etc.), á la cual aprietan, un *acoplo de elementos cinemático*. Además, segun sea una polea, una barra, etcétera, la pieza del freno, se tiene el acoplo (R), el acoplo (P), etc. Cuando la accion del freno está á punto de pasar por completo, el movimiento se traduce, pues, en definitiva, por la *supresion de la actividad de un acoplo de elementos*, supresion que dimana de hallarse los dos elementos reunidos entonces el uno al otro, de manera que formen cinemáticamente una sola pieza. De consiguiente los frenos funcionan en ciertos casos enteramente como mecanismos de detencion ó escape; pero se diferencian en que la estincion completa del movimiento relativo de los elementos del acoplo, se encuentra siempre precedida en los frenos de una disminucion gradual de ese mismo movimiento.

Como otra analogia con los mecanismos de paro puede notarse que existen frenos de dos especies distintas, de los cuales unos actuan igualmente bien en ambos sentidos, como los paros de reposo, en tanto que los otros no trabajan más que en un solo sentido, como las detenciones corrientes, ó á lo ménos ejercen acciones desiguales en ambos sentidos; esto es lo que sucede, por ejemplo, en el freno de bandas de la fig. 388. Esos diversos puntos de analogia entre los frenos y los mecanismos de detencion exigen un exámen más completo que tendremos ocasion de hacer un poco más adelante.

§ 123

Trabamientos y destrabamientos.

Entre los elementos de máquinas de que nos hemos ocupado hasta ahora, hay varios que pueden disponerse especialmente de manera que permitan pasar ó restablecer cuando se quiera el funcionamiento de una parte de la máquina. Las disposiciones que se utilizan con tal objeto, constituyen lo que se llaman trabamientos y destrabamientos. Es sin disputa muy importante formarse idea clara y general de las variaciones que producen tales dispositivos en la cadena cinemática y darse exacta cuenta de la manera como funcionan, lo cual vamos á intentar con algunos ejemplos.

Un método utilizado con frecuencia para producir el destrabamiento consiste *en separar uno de otro los dos elementos de un acoplo*, de manera que deje de existir el acoplamiento. Como ejemplos de aplicacion de ese modo pueden citarse: las ruedas de friccion que se apartan lijeramente una de otra; las trasmisiones por correas en las que se afloja la correa apartando un rodillo tensor (fig. 389); las ruedas dentadas cuyo contacto se suprime haciendo deslizar una de ellas á lo largo de su eje (fig. 390) ó apartándolas una de otra en su plan comun (fig. 391); así como las trasmisiones por correa en las cuales se hace caer la correa de una de las poleas ó de ambas á la vez. Despues de la supresion de los acoplamientos el miembro de cadena conducido deja forzosamente de funcionar, aun cuando el miembro conductor continue en su movimiento. Tocante al trabamiento se efectua volviendo á reunir los elementos separados.

Otro método consiste en el empleo de manguitos móviles. Ante todo consideraremos los manguitos de dientes, de los que las figuras 392, 393, y 394 representan las tres formas más importantes.

La pieza *a* está sujeta ó fija en el árbol A, en tanto que la pieza *b* está acoplada prismáticamente en el árbol B; el primer árbol trasmite su movimiento al segundo cuando los dientes de *b* están engranados en los huecos de los dientes de *a*. Puede notarse que estos dientes están formados como los de los mecanismos de paro. En realidad las piezas *a* y *b* son verdaderos órganos de un mecanismo de paro, que es de reposo en el primer

ejemplo, corriente en el segundo (§ 119), y que finalmente debe considerarse en el tercero como paro corriente ó como paro de reposo, segun el trabamiento sea parcial ó completo. En definitiva los manguitos de dientes son aparatos de *declique* que se destraban ó traban segun sea necesario interrumpir ó restablecer el movimiento del órgano conducido; si bien se distinguen aparatos de *declique* antes considerados, en que la pieza que en estos últimos permanece fija, aquí se encuentra móvil. Por otra parte los movimientos relativos son exactamente los mismos en ambos casos.

Lo mismo puede decirse de los manguitos de acoplamiento para máquinas motrices, como por ejemplo, el manguito de *Pouyer* y el de *Uhlhorn;* si bien aquí es el órgano conducido (*b* en la fig. 393) el que siendo puesto en movimiento por otra fuente de fuerza motriz, suprime por sí mismo su trabazon con *a*, y entonces los dientes de *b* se deslizan por los de *a*.

En los manguitos de trabamiento por friccion, de los cuales la fig. 395 representa un dispositivo, la presion de la pieza *b* sobre la pieza *a*, que se produce por medio de la palanca indicada en la figura, determina entre sus superficies de contacto un rozamiento tal, que el árbol motor A arrastra en su movimiento el árbol B. Suprimiendo la presion se efectua naturalmente el destrabamiento. Prescidiendo de la accion ejercida sobre la cadena, el mecanismo que estamos estudiando no es otra cosa más que un freno; más no podemos decir lo propio de los otros manguitos ó mangas de trabamiento por friccion.

En resúmen, vemos que los manguitos de trabamiento y destrabamiento considerados en sí solos como mecanismos, son aparatos de *declique* ó frenos que en vez de ligar como anteriormente una pieza móvil con otra fija, estan destinados á reunir dos piezas móviles. Por otra parte, su modo de accion en la máquina es bastante notable para que una vez producido el trabamiento, obren las partes acopladas enteramente como una sola pieza ó como un órgano cinemático único. Así los árboles A y B que antes del trabamiento constituyen dos árboles perfectamente distintos, despues del acoplamiento ya no forman más que un árbol solo C... | ...C. El trabamiento tiene, pues, por efecto reunir las partes A y B para formar de ellas un miembro de cadena, mientras que en cambio el destrabamiento produce la separacion de los elementos del miembro así formado. Por consiguiente el destrabamiento y el trabamiento en el método que acabamos de indicar, consisten respectivamente *en la separacion y la reunion de los elementos de un miembro de una cadena cinemática.*

Segun la manera que tienen de actuar las partes separadas durante el período del destrabamiento, pueden admitirse diferentes subdivisiones del procedimiento. Pero á la cinemática aplicada atañe considerar estos casos particulares, y nos debemos contentar con haber sentado aquí el principio general de la construccion de esos aparatos. Al terminar, pues, nos limitaremos á notar que los *dispositivos de seguridad* de los ensambles de clavetes y de tornillos no son realmente otra cosa que dispositivos de detencion del género de aquellos que acabamos de examinar.

§ 124

Resúmen de los métodos para el disparo y el paro.

Acabamos de ver que los trabamientos y destrabamientos se producen con una accion ejercida sobre *acoplos* ó sobre miembros de una cadena cinemática. El objeto que en tal caso se propone, es siempre el de poner en movimiento ó detener una parte de un mecanismo. Si consideramos que los frenos y aparatos de *declique* se utilizan tambien amenudo con el mismo fin, si bien que con la sola diferencia de que el efecto que se ha de producir se aplica en este caso á todo el mecanismo, nos vemos naturalmente inclinados á reconocer la utilidad de presentar una recapitulacion de los diferentes métodos usados para el disparo y el paro de los mecanismos.

Hemos hecho notar ya que los dispositivos de paro, lo propio que los frenos, obraban sobre los acoplos de elementos con el objeto de formar en definitiva un solo cuerpo con los elementos de un mismo acoplo. Semejante reunion de los elementos de un acoplo constituye lo que puede llamarse una *clausura excesiva* del mismo; y entonces se ve que el paro de un dispositivo ó de una de sus partes puede efectuarse por los medios siguientes:

(*a*) Por la clausura excesiva de un acoplo de elementos de la cadena cinemática (dispositivos de paro, frenos);

(*b*) Por la desunion de un acoplo de elementos de la cadena (desengranaje de ruedas dentadas, caida de una correa, alzamiento de articulaciones de palancas, etcétera);

(*c*) Por la desunion de un miembro de la cadena

(manguitos de destrabamiento, desenganche de mangos ó vástagos de bombas por estraccion de un clavete, etc.)

El disparo se efectua restableciendo el estado desmodrómico primitivo.

Esa clasificacion, conforme veremos más adelante, es aplicable tambien á los órganos de presion, de modo que en realidad se estiende á todas las partes del dominio que debemos esplorar; y en efecto, cuando de una manera general se examina la série de procedimientos que es posible utilizar para hacer activa ó inactiva una cadena cinemática sin destruir ninguna de sus partes, es preciso confesar que todos se hallan comprendidos en los métodos que venimos estudiando.

§ 125

Tubos, cilindros de vapor y de bombas, émbolos y stuffing-box.

Conforme hemos visto en el párrafo 41, los tubos son los elementos conjugados indispensables de los órganos de presion; sus junturas sirven cabalmente para formar los miembros de las cadenas cinemáticas en que figuran tales órganos. Los cilindros de vapor y los cilindros de bombas constituyen las cápsulas V^- para los órganos de presion y por consiguiente tienen como elementos conjugados los émbolos V^+. Los stuffing-box y los vástagos de émbolo forman igualmente acoplos de elementos con los órganos de presion, á la vez que por otra parte se presentan como simples acoplos de prismas $P^{\pm}P^-$. En realidad los tubos constituyen el sistema de recipientes necesarios para los órganos de presion, mientras que los otros cuatro elementos de máquinas representan para esos mismos órganos las disposiciones de recipientes que más amenudo se encuentran en uso, en parte bajo la forma de elementos aislados y en parte bajo la de miembros de la cadena cinemática. A esa misma categoria de elementos se agregan esencialmente las cápsulas de las bombas y de las máquinas de vapor rotativas, los saetines ó canales de las ruedas hidráulicas, las cámaras de las turbinas, etcétera.

§ 126

Obturadores.

Los obturadores son los órganos que parecen prestarse más difícilmente á una definicion cinémática; á causa de la gran variedad de formas que presentan, parece á primera vista que pueden colocarse en una série de clases, más no se tarda en conocer que esa clasificacion no es completamente rigurosa. Realmente se encuentran en la práctica válvulas de charnela, válvulas circulares, válvulas de émbolo, compuertas, grifos, cajones de rotacion cónicos, planos y cilíndricos, los cajones de movimiento rectilíneo de las máquinas de vapor, válvulas equilibradas de alzamiento ó de deslizadera, válvulas automáticas ó no, tales como la válvula de garganta, la catarata, las compuertas ordinarias y de galetes para ruedas hidráulicas y de turbinas, las puertas de esclusas, etc. Todos esos órganos son verdaderamente obturadores, es decir, sirven para producir en un momento dado una division en una capacidad que encierra un órgano de presion; pero tienen formas tan variadas y ostentan cinemáticamente tan notorias diferencias, que parece casi imposible abarcarlos todos en un mismo concepto. A mi entender hasta ahora no se ha hecho ninguna tentativa en este sentido. Semejante omision en asunto de tal importancia no puede esplicarse, como no sea por la esclusion de que generalmente han sido objeto las máquinas de órganos de presion en casi todos los tratados de cinemática. En otras publicaciones (a) he intentado establecer una clasificacion de los obturadores fundada en sus propiedades *constructivas* que puedan considerarse como características ó que se hallen siempre utilizadas en las diversas aplicaciones. Así he logrado distinguir:

1.° Los OBTURADORES POR DESLIZAMIENTO, que comprenden como subdivisiones:

a. *Las espitas ó grifos y los cajones de rotacion.*
b. *Los cajones de movimiento rectilíneo.*

2.° Los OBTURADORES POR ALZAMIENTO, que comprenden á su vez:

a. *Las válvulas de articulaciones*;
b. *Las válvulas de alzamiento rectilíneo.*

La principal diferencia entre esas dos clases consiste en que en la primera la presion del fluido no tiende á rechazar ni aproximar de la abertura que debe cerrar la parte móvil del obturador, mientras que eso es cabalmente lo que sucede con los obturadores de la segunda clase, que se abren en un sentido y se cierran en el otro por efecto de la corriente del fluido. Por esa

(a) Especialmente en *el Constructor*, conforme veremos más adelante.

razon son muy á propósito para suministrar órganos automáticos, lo cual no sucede con los primeros.

Por mucho que esa division sea en ciertos conceptos muy satisfactoria y hasta ofrezca cierto carácter de profundidad, no responde á todas las exigencias; pues en realidad está basada en los resultados de un exámen esterior por completo. Como clasificacion viene á ser tambien insuficiente para ciertos casos estremos; y así por ejemplo, ciertas válvulas de alzamiento ó elevacion que se construyen como válvulas equilibradas, no tienen evidentemente la propiedad que hemos indicado como característica de los obturadores por elevacion, en general. Por otra parte, esa clasificacion queda en definitiva en el terreno del antiguo sistema descriptivo, como quiera que la definicion á que corresponde no esplica verdaderamente nada y sobre todo no asigna de ninguna manera á los obturadores el lugar que les conviene en la série de los dispositivos cinemáticos. Ahora que nos hemos familiarizado con los conceptos cinemáticos por una série de ejercicios analíticos y que tenemos establecidos los principios generales, nos es posible dar una definicion que penetre realmente hasta el fondo del asunto, definicion que es la siguiente:

Los dispositivos de obturacion son los mecanismos de paro y en ciertas circunstancias los frenos de los órganos de presion.

Por otra parte, entre esos mecánismos de paro encontramos las dos variedades examinadas anteriormente. Las válvulas automáticas constituyen en efecto mecanismos de paro corrientes, es decir, aquellos en que el movimiento de la pieza de paro, impedido en un sentido, es posible en la direccion opuesta, mientras que se han de contar entre los mecanismos de paro con reposo los obturadores por deslizamiento y las válvulas equilibradas sobre las cuales es necesario ejercer una accion esterior para reducirlas á la posicion de cierre ó á la de abertura.

La válvula usual de bomba (fig. 396) corresponde al trinqueteo corriente con trinquete ordinario (fig. 374). La válvula *b* de la figura anterior es el trinquete que impide al órgano de detencion *a*, el agua, tomar un movimiento descendente. El tubo *c*, que afianza la articulacion de la válvula *b*, corresponde al puente *c* de la cremallera dentada de la fig. 374. Debe considerarse como enteramente secundaria la circunstancia de que en la válvula de cuero la articulacion se halla sustituida con un cuerpo flexible. En efecto, en la práctica se utilizan igualmente válvulas cuyas articulaciones están constituidas por verdaderos acoplos de cilindros. La ductilidad del órgano de presion sustituye aquí los dientes de la pieza que se ha de detener.

El cierre de espita ó grifo (fig. 397) corresponde á un mecanismo de paro con reposo, como por ejemplo, al que representa la fig. 375. El dispositivo de paro de la fig. 398 que se encuentra en la máquina de calcular (aritmómetro) de *Thomas*, ofrece igualmente una analogia completa con el grifo. La pieza de paro *a* (que puede girar alrededor de su centro fijo) corresponde al agua en la fig. 397; la pieza *b* cuando ha girado de cierto ángulo, no pone el menor obstáculo al movimiento de la rueda *a;* pero en la posicion indicada en la figura, impide toda rotacion de esa rueda en un sentido ó en otro. El puente *c* contiene dos elementos destinados á guiar respectivamente *a* y *b*, del mismo modo que en la fig. 397.

La válvula interpuesta en un conducto de agua ó de vapor (fig. 400) corresponde al dispositivo de paro con reposo de la fig. 399; *a* es la pieza de paro, *b* el registro ó el diente de detencion, y *c* el puente que sirve para guiar las dos piezas.

Las válvulas equilibradas de todo género son órganos de paro dispuestos de la manera que la presion del fluido afecte lo ménos posible sus movimientos. Fácil le será al lector hallar gran número de esas analogias, puesto que aquí no se trata simplemente de una semejanza de forma, sino más bien de una verdadera correspondencia de efectos.

Si se abre una válvula de cantidad bastante exígua para que el órgano de presion, al pasar por la abertura, esté obligado á tomar una gran velocidad, el mecanismo de paro llega á funcionar como freno. Los dos géneros de mecanismos se convierten, pues, aquí el uno en el otro; y anteriormente hemos hecho ya una observacion (§ 122) análoga respecto de mecanismos compuestos de elementos rígidos.

La analogia entre los mecanismos de paro formados de cuerpos rígidos y los mecanismos de paro fluidos existe igualmente cuando estos últimos se utilizan en mecanismos completos y en máquinas. Al trinqueteo de la fig. 381, de que antes hemos tratado, corresponde el mecanismo de la fig. 401, que no es otra cosa más que una bomba elevatoria ordinaria. El barrilete ó cuerpo de bomba *c* corresponde al puente *c* del trinqueteo; la válvula de aspiracion, al trinquete inferior *b;* la válvula del émbolo, al gatillo superior b_1; y por último, el acoplamiento prismático-cilíndrico del émbolo y del cuerpo de bomba, al acoplamiento prismático entre la correderita *c*, y el puente *c*.

El trinqueteo de doble efecto de la fig. 382, que ya hemos estudiado, tiene exactamente su contraparte en la bomba de *Stoltz* (fig. 402). Esta bomba está en efecto reproducida pieza por pieza en el trinqueteo; los

dos émbolos con sus vástagos c_1 y c corresponden á las dos correderitas c y c_1; las válvulas b y b_1, á los trinquetes b y b_1; los cuerpos de bomba con su armazon, á las deslizaderas y á la armazon del trinqueteo. Encuéntrase igualmente en la bomba el retroceso de cada gatillo sobre un número de dientes doble del que avanza la pieza; pues el agua encuentra en efecto el émbolo aspirante con una velocidad doble de la que tiene durante la repulsion. La yuxtaposicion de los cuerpos de bomba tal como existe en la figura, no constituye una condicion esencial; pues, en efecto, existen ciertas disposiciones en las que los cuerpos de bombas están establecidos uno sobre otro y tienen el mismo eje; en cuyo caso uno de los vástagos del émbolo puede penetrar, por ejemplo, en la parte inferior del primer cuerpo de bomba, y el otro vástago en la parte superior del segundo (a).

El trinqueteo de doble efecto de *Lagarousse*, representado en la fig. 385, halla su contraparte en la bomba de doble efecto de *Vose* (fig. 403). La analogia corresponde aquí detalle por detalle; lo mismo que el trinquete b_1 la válvula b_1 en su movimiento retrógrado, se desplaza, con relacion al órgano a, del doble de su carrera; ó en otros términos, la velocidad de cada uno de los dos émbolos con relacion al agua es igual al doble de la velocidad absoluta de dichos émbolos.

De igual modo seria fácil demostrar la analogia de otros tipos de bombas con trinqueteos. Entre esas dos especies de mecanismos las únicas diferencias que pueden ó deben existir, son las que dimanan de la ductilidad del órgano de presion. Así pues, en resúmen, puede decirse que *las bombas de émbolo y válvula son trinqueteos líquidos.*

Esa proposicion que nos permite abarcar de una sola ojeada los diferentes sistemas de construccion de las bombas, nos parece perfectamente instructivo y susceptible de simplificar de una manera singular toda la cuestion. Un punto que merece consignarse es el de que los trinqueteos corrientes, lo mismo que las bombas de émbolo y válvulas, habian alcanzado ya cierto grado de perfeccion antes de inventarse la máquina de vapor; y conviene añadir que los trinquetes de paro y de trinqueteo ó juego de relojeria, lo propio que las válvulas de alzamiento, que son dispositivos de clausura de fuerza, entraron muy pronto en el curso natural del desarrollo de las máquinas. Cúmplenos igualmente hacer constar que actualmente existe una tendencia marcada á sustituir al movimiento automático y de clausura de fuerza de las válvulas un movimiento desmodrómico, de la cual se encuentran elocuentes ejemplos en las bombas de cajones y en otros sistemas análogos.

Las máquinas de columna de agua y las de vapor, bajo su forma ordinaria ofrecen de una manera general la misma disposicion que las bombas de émbolo y válvulas, es decir que los trinqueteos fluidos, y son igualmente de simple ó de doble efecto. Bajo el punto de vista del funcionamiento se diferencian en que el órgano de presion ya no es el órgano desplazado, sino que por el contrario constituye *el órgano motor del mecanismo*. En tales condiciones los obturadores no pueden ser ya automáticos y deben ponerse en movimiento con clausura por cadenas. No obstante, la relacion general de su movimiento con el émbolo es la misma que en las bombas. Para que ese movimiento pueda, además, efectuarse sin acarrear gran desperdicio de fuerza, se usan dispositivos de paro fluidos con reposo, es decir, obturadores de alzamiento equilibrados y (lo que es preferible para las máquinas de vapor en particular) obturadores de deslizamiento, á los cuales el mecanismo de distribucion comunica el movimiento necesario. De ahí, pues, que podamos decir que *las máquinas de vapor de émbolo, las máquinas de columna de agua, etcétera, son trinqueteos fluidos invertidos.* Nos reservamos volver á esa cuestion más adelante.

§ 127

De los resortes considerados como elementos de máquinas.

En virtud de nuestras investigaciones precedentes conocemos el papel que los resortes desempeñan en las cadenas cinemáticas. Segun el párrafo 42, los resortes son verdaderos elementos cinemáticos dúctiles y pueden disponerse para una direccion cualquiera de la fuerza de clausura, en tanto que los órganos de tractraccion y presion no son susceptibles de utilizarse más que para una sola direccion de esa fuerza. Armados de ganchos, para trabarse, ó de otros órganos de fijacion, los resortes vienen á ser miembros de cadenas cinemáticas. De las consideraciones precedentes resulta indudablemente que los resortes deben comprenderse en la série de los elementos constructivos de las máquinas.

(a) En la bomba de *Prunier*, que figuraba en la Exposicion de Viena de 1873, los dos cuerpos de bomba son conaxiales y el vástago del émbolo superior que es hueco, está atravesado por el vástago del émbolo inferior, de tal suerte que estos vástagos penetran ambos por la parte superior del cuerpo de bomba.

§ 128

Conclusiones del análisis anterior.

El análisis de los elementos constructivos de las máquinas que antecede, nos ha conducido á un gran número de resultados que distan mucho de carecer de importancia. En primer lugar nos ha demostrado que todo lo que se comprende generalmente con la designacion comun de órganos, de detalles ó de elementos constructivos de máquinas, constituye en realidad una mezcla de cosas muy diferentes bajo el punto de vista cinemático. Hemos encontrado con efecto verdaderos *elementos cinemáticos* (gorrones, soportes, silletas, tubos, émbolos, stuffing-box, cuerdas, correas, cadenas, resortes), *miembros* de cadenas cinemáticas (ejes, árboles, sillas de asientos, palancas, manubrios, bielas, traviesas en cruz, cilindros de vapor, etc.), *acoplos de elementos completos* (ruedas de friccion, ruedas dentadas), y por último *fracciones de cadenas cinemáticas* (trasmision por cuerdas y correas, mecanismos de paro, frenos, manguitos de trabamiento y destrabamiento, obturadores, etc.), y hasta *cadenas cinemáticas completas* (ensambles de tornillos y de clavetes). La conclusion general que de ahí puede sacarse, es que bajo la designacion de «elementos constructivos» se ha tratado hasta ahora, en la ciencia de la construccion, de *los acoplos de elementos y los miembros de cadenas cinemáticas que se encuentran empleados con más frecuencia*. Por lo que toca á las partes que forman por sí mismas cadenas cinemáticas completas, como los ensambles de tornillos y de clavijas, los remaches, los acoplamientos fijos, etcétera, se consideran mucho ménos bajo el punto de vista de los movimientos que son susceptibles de producir (movimientos de las cadenas que representan), que bajo el de los ensambles fijos, ó de las formaciones de miembros de cadenas que permiten realizar. En las trasmisiones por correas ó cuerdas se está en presencia de cadenas cinemáticas casi completas, toda vez que el empleo de elementos dúctiles en cadenas cerradas no es posible más que en los casos en que forman por sí mismos clausura de cadena. Algunos acoplamientos móviles, frenos, mecanismos de paro, etc., son más complejos, y parece, á decir verdad, que deben clasificarse como cadenas completas. Sin embargo, como amenudo se encuentran en cadenas más importantes bajo una forma tan secundaria, que relativamente á estas últimas, parece que en cierto modo no son más que órganos elementales, debe considerarse por lo mismo su introduccion entre los elementos constructivos como bastante justificada.

Ahora se presenta la cuestion de saber si partiendo del punto de vista en que nos hemos colocado, nos es posible ó no establecer una clasificacion lógica de los elementos constructivos, basada en su verdadera índole cinemática. Realmente puede esto hacerse, y el asunto es bastante importante para merecer al ménos un exámen sumario.

Ante todo debe entenderse muy bien que no es posible llegar á una clasificacion *sistemática absolutamente rigurosa*. Esa clasificacion debe basarse en uná série de compromisos juiciosos; debiéndose estar dispuesto á formarse el cargo de que á veces se ostentará insuficiente para satisfacer ciertas exigencias de las numerosas cuestiones que la práctica suscita. No es eso propiamente hablando un defecto, sino más bien en realidad una consecuencia de la naturaleza misma del problema que tenemos que resolver, y no por ello deja de ser posible conservar intactas las bases científicas que la cinemática proporciona para resolver la cuestion.

Hecha esta observacion debemos ante todo establecer entre los elementos rígidos y los elementos dúctiles, una separacion más completa que la establecida hasta ahora. En la clasificacion de los primeros, que es aquella por la cual parece conveniente empezar, nos guardaremos muy mucho de eliminar tal ó cual órgano, con el simple pretesto de que contiene en realidad más de uno ó de dos elementos, y más bien recordaremos que la formacion de los miembros supone ya por lo mismo el empleo de cadenas cinemáticas. Como por otra parte la formacion de miembros suministra ciertas combinaciones no móviles, que deben considerarse como más simples que los acoplos de elementos, éstas son las que conviene colocar en primera línea, conforme lo hemos hecho hasta ahora. A continuacion pondremos los elementos cinemáticos, los acoplos de elementos y los miembros destinados á formar combinaciones móviles: entre estas últimas piezas se encuentran tambien con frecuencia los ensambles no móviles de que acabamos de tratar.

Así llegamos á formar una primera série de elementos constructivos que se hallan indicados en el siguiente cuadro:

I.—Elementos rígidos.

a. *Ensambles (formaciones de miembros)* . . . { Remaches y empalmes; Clavijas y ensambles de clavetes; Ensables forzados; Tornillos y ensambles de tornillos, de donde se pasa á:

b. *Elementos acoplados y reunidos en miembros*.. . . . . :
- Tornillo y tuerca (para la produccion de un movimiento);
- Gorrones;
- Asientos, silletas;
- Ejes y árboles;
- Acoplamientos fijos;
- Palancas simples;
- Manubrios.
- Palancas compuestas;
- Bielas.
- Traviesas en cruz y deslizaderas.
- Ruedas de friccion;
- Ruedas dentadas;
- Volantes.

Falta discutir si á los acoplamientos fijos convendria agregar los acoplos móviles y de destrabamiento, ya que segun hemos visto antes, tales acoplamientos cuando sus partes están aproximadas, no proporcionan en realidad más que miembros rígidos. Más si hay aquí una razon séria para comprenderlos en los acoplamientos fijos, conviene al propio tiempo no olvidar que encierran gran número de órganos accesorios bajo la forma de palancas, gatillos ó trinquetes, piezas de frenos, etcétera, y que su estudio presenta por lo mismo dificultades particulares; y como por otra parte esos órganos accesorios se encuentran en su mayoria tratados especialmente despues de los acoplamientos fijos, parece preferible abarcar las dos otras especies de acoplamientos en la categoria de los mecanismos completos.

Llegamos ahora á la segunda série de los elementos constructivos, con las cadenas más sencillas que puedan formar:

II.—Elementos dúctiles.

a. *Organos de tension, y sus aplicaciones con clausura por cadenas.*
- Correas y trasmisiones por correa;
- Cuerdas ó cables y trasmisiones por cuerdas ó cables;
- Cadenas y trasmisiones por cadenas.

b. *Elementos conjugados ó articulados de los órganos de presion.*
- Tubos;
- Embolos y sumerjedores;
- Cilindros de vapor y de bombas;
- Stuffing-box;
- Obturadores;

c. *Resortes*. . . . . .
- Resortes de traccion;
- — presion;
- — flexion;
- — torsion;

Aquí tambien se presenta un punto dudoso. Los obturadores que figuran en la categoria *b*, II, ¿nó podrian comprenderse en una categoria siguiente, desde el momento que corresponden, como lo hemos visto, á los mecanismos de paro? Parece efectivamente, segun esto, que encontrarian en buena lógica su lugar despues de los trinqueteos formados de elementos rígidos. Por otra parte su reunion con los émbolos y los stuffing-box (que en el fondo pertenecen á su vez á los mecanismos de paro y á los trinqueteos) parece tan natural y se usa desde tanto tiempo, que en definitiva nos parece conveniente conservarla. Este caso es precisamente uno de aquellos en que se debe guardar uno de querer establecer una clasificacion teóricamente rigurosa, prescindiendo de otras consideraciones.

Los resortes se encuentran aquí rigurosamente en su lugar, máxime si se conceptuan como elementos constructivos. Sin embargo, su cálculo se relaciona tan íntimamente con los problemas de la resistencia de los materiales, que pueden igualmente estudiarse considerándolos casi únicamente bajo el punto de vista de la resistencia. Segun esto, el modo de tratamiento que ha de aplicarse á los resortes, debe evidentemente estar determinado por las circunstancias esteriores en cada caso particular.

A los elementos clasificados podemos aun añadir los mecanismos que hemos mencionado muchas veces y que si bien constituyen cadenas más ó ménos completas, entran de lleno en la composicion de las máquinas como grupos de partes elementales. Así llegamos á una tercera clase que es la siguiente:

III.—Mecanismos.

Mecanismos de paro (bajo la forma más simple),
Frenos,
Acoplamientos móviles y manguitos de destrabamiento.

Esos mecanismos forman una especie de transicion entre los elementos constructivos y las máquinas completas. Por otra parte, cúmplenos hacer notar que esas tres clases de mecanismos no son las únicas que figuran entre los elementos constructivos. Otros, como por ejemplo, el mecanismo de tornillos $(S'P'C')^c$, se han colocado ya entre los elementos rígidos, sin que espresamente lo hayamos hecho observar. Lo mismo podemos decir de los mecanismos de correas, de cuerdas y de cadenas que figuran á la cabeza de la clase segunda. Sabemos por otra parte que los manguitos de destrabamiento son tambien mecanismos de paro y frenos (V. § 123), mientras que los acoplamientos móviles son mecanismos formados de acoplos inferiores de elementos, de suerte que su introduccion en este lugar se encuentra suficientemente justificada.

En resúmen, vemos que sosteniendo nuestro punto de vista cinemático hemos logrado clasificar de una

manera diferente los elementos constructivos, más sin modificar su número, de suerte que no hemos suscitado ninguna nueva dificultad. Además nuestro exámen ha suministrado aclaraciones bastante importantes sobre ciertos puntos del asunto que nos ocupa, de manera que nuestra clasificacion debe por lo mismo facilitar notablemente su estudio.

A causa de los resultados suministrados por el análisis ciertos elementos de uso muy generalizado y que se consideran como perfectamente conocidos, se ostentan bajo un aspecto tan nuevo como inesperado. Eso es lo que especialmente sucede con los obturadores y con la importante série de máquinas provistas de ese género de órganos, tales como las bombas, las máquinas impelentes, las máquinas de vapor de émbolo, etcétera. Las aclaraciones que hemos obtenido, no solamente nos han facilitado conocer que ciertas propiedades particulares de esas máquinas tienen entre sí estrecha conexion, sino que además nos han facilitado singularmente su comprension. Ahora nos hallamos en el caso de esplicar claramente ciertas analogias que hasta aquí habíamos tal vez presentido, pero no demostrado. Por lo tanto hemos llegado definitivamente á realizar una verdadera simplificacion del asunto, puesto que sin dejar de ensanchar el círculo de las analojias, hemos reducido notablemente el número de las categorias. Las ventajas de esta simplificacion serán particularmente sensibles para los problemas de la cinemática aplicada.

Nuestro análisis nos ha dado además sobre otra cuestion, que es la de las *cerraduras*, aclaraciones cuya necesidad se dejaba sentir muy amenudo. Hasta ahora no se sabia exactamente el lugar que convenia señalar á los dispositivos de ese género. Durante mucho tiempo estaban comprendidos sin motivo determinado en la tecnologia mecánica, ora en una categoria, ora en otra. Hemos dado á comprender que sus principios cinemáticos son por estremo sencillos y por lo tanto su estudio parece que debe entrar naturalmente en el dominio de la cinemática aplicada.

Así mismo para los *dispositivos de disparo* (cuyas propiedades especiales no habian sido claramente definidas hasta hoy) y para los escapes, hemos llegado á darles el verdadero lugar entre los demás mecanismos, y á tratarlos bajo un punto de vista general en vez del punto de vista particular comunmente adoptado. Tendremos que volver sobre estos mecanismos un poco más adelante. Y lo mismo puede decirse de las máquinas hidráulicas, de las máquinas de vapor y otras completas, para las cuales podríamos indicar varios puntos de vista nuevos; pero preferimos reservar para el capítulo siguiente el exámen detallado de esas máquinas.

Finalmente, otro resultado de nuestras investigaciones que no juzgamos ménos digno de atencion porque tiene gran importancia teórica, es el que se refiere á la naturaleza general de la clausura de una cadena cinemática, ó de un acoplo de elementos. Hemos visto que tocante á la cadena cinemática, desde la más compleja hasta la más sencilla (la de dos miembros ó el acoplo de elementos), pueden distinguirse *tres modos de clausura*, á saber:

1 La clausura desmodrómica normal;
2 La clausura incompleta (no desmodrómica);
3 La clausura escesiva.

En los tres casos se encuentra satisfecha la doble condicion de que la cadena vuelva sobre sí misma, y que el acoplamiento tenga debido efecto entre los elementos de los miembros consecutivos.

Con la *clausura desmodrómica* todos los movimientos relativos de los miembros, están perfectamente determinados.

Con la *clausura incompleta* los movimientos relativos de los movimientos de la cadena, están indeterminados.

Por último, con la *clausura escesiva* queda suprimida la movilidad relativa de los miembros.

Esas tres especies de clausura se utilizan en la práctica. La primera, que es la más importante, se encuentra en toda máquina y constituye, por decirlo así, un carácter esencial. La segunda está en uso en los aparatos de destrabamiento y tiene por lo tanto como resultado el suspender ó restablecer la actividad de una parte de la máquina. Por lo que toca á la tercera puede llenar el mismo objeto que la segunda, y sirve además para suprimir la movilidad de un miembro dado. La clausura desmodrómica normal se presenta en cierto modo como comprendida entre las otras dos; y ahí, como vemos, hay la indicacion de la senda que debe adoptarse para conocer entre todas las disposiciones de clausura que son posibles para los miembros de una cadena, la que corresponde al caso especial de la trabazon desmodrómica.

El trabajo del que estudia un proyecto de máquina consiste al parecer en utilizar debidamente esos tres modos de clausura para los diversos resultados que desea obtener. Realmente esa utilizacion no constituye para él más que un medio de resolver el problema particular que se encuentra planteado en cada máquina completa. En cuanto al establecimiento mismo de la máquina, se halla sometido á ciertos principios generales que nos proponemos investigar en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO XII

ANÁLISIS DE LAS MÁQUINAS COMPLETAS

«Bueno es respetar las antiguas fundaciones, más no por ello se debe renunciar al derecho de establecer otras nuevas.»

GŒTHE.

§ 129

Exposicion de las ideas dominantes

Merced á los medios que nos ha suministrado el análisis cinemático, hemos podido someter á un exámen crítico la composicion de las máquinas en grupos de elementos constructivos, así como la naturaleza misma de tales elementos, faltándonos ahora únicamente proceder al exámen de la máquina completa considerada en su conjunto. Así llegaremos á cerrar el círculo, que hemos abierto en el capítulo primero, en que partiendo de la máquina completa la hemos supuesto descompuesta en miembros, á fin de poder examinarla bajo todos los puntos de vista, que habíamos reconocido pertenecer al dominio de la cinemática. En el fondo es de suponer que en ese estudio debemos haber aprendido á conocer las propiedades de las máquinas completas, y puede decirse que así ha sucedido realmente, si bien con la restriccion de que dichas propiedades se nos han presentado separadamente, *ut disjecta membra*, sin ninguna trabazon de cualquiera de ellas con las otras. Debemos ahora, al considerarlas en su conjunto y con sus relaciones mútuas, someterlas á una revision cuyo objeto principal ha de ser suministrarnos sobre la clase y uso de las máquinas, conclusiones que hasta ahora no hemos podido introducir en el círculo de nuestras consideraciones.

Debemos naturalmente comenzar por resumir ante todo las ideas hasta ahora dominantes, para ver hasta qué punto son aplicables, ó cuales son las rectificaciones que conviene darles. En la *Introduccion* hemos aludido ya á un concepto por estremo generalizado, de la naturaleza de la máquina completa, que especialmente hizo resaltar *Poncelet* y que, gracias á la autoridad de tan ilustre sábio, se ha introducido sobre todo en la escuela francesa. Segun ese modo de concebir, una máquina completa es de una manera general el resultado de la combinacion de tres partes ó grupos de partes, á saber:

Receptor, trasmision y operador.

Con el nombre de receptor se entiende aquella parte

ó el grupo de partes en que se ejerce directamente la accion de la fuerza motriz natural para trasmitirle el trabajo mecánico que ha de utilizarse; el operador, herramienta ó útil, es la parte por medio de la cual ese trabajo se halla directamente repartido para producir las modificaciones necesarias en el cuerpo que ha de trabajarse; y en fin, entre el receptor y el útil cuyos movimientos no son idénticos en la mayor parte de los casos, existe la tramision destinada á comunicar el movimento del primero al segundo. Ese concepto se presenta bajo forma tan sencilla y hasta podria decirse tan natural, que ya desde primera vista parece prevenir en su favor. *Poncelet* mismo habla de esa forma con una calma y seguridad convincentes de todo punto (a). Pero no espresaba así una idea que para su tiempo fuese enteramente nueva, pues casi no hacia verdaderamente más que resumir lo que era ya conocido y más ó ménos aceptado, dándole la forma de proposiciones determinadas que han venido á ser los verdaderos fundamentos del estudio de las máquinas en Francia. No puede, empero, negarse que existan en favor de ese concepto tan sencillo en apariencia y tan fácil de comprender, ciertas razones bastante sérias, entre las cuales una de las más importantes estriba en las analogias que presenta con otros puntos de investigacion, analogias á que da fácilmente lugar la division en tres partes (principio, medio y fin) ó bien aun la existencia de dos partes principales con un miembro intermedio destinado á reunirlas, etc. En gran número de casos corresponde esa division muy claramente á la division natural de las máquinas. A pesar de esto, ó mejor dicho, precisamente á causa de esto nos vemos obligados á someter ese concepto fundamental á un profundo exámen. Internándonos más en el antiguo órden de ideas sobre el cual acabamos de decir algunas palabras, vemos que las partes que han de clasificarse con el receptor en el concepto de utilizar la fuerza motriz de la mejor manera posible, se consideran generalmente como constituyendo por sí mismas un grupo especial que puede comprenderse bajo la designacion de *máquinas motrices*, ó más simplemente de *motores:* tales son, por ejemplo, las máquinas de vapor, las ruedas hidráulicas, las turbinas, etcétera. Con otra limitacion enteramente análoga puede formarse un grupo de máquinas, en las que todas las partes se relacionan más ó ménos con el operador para ponerlo en las mejores condiciones de empleo; grupo que está formado por las *máquinas de trabajo* ó *máquinas herramientas* que pueden designarse tambien simplemente con el nombre de *útiles*, dando á esa palabra el sentido más lato.

Si examinamos más de cerca esa latitud del concepto fundamental, vemos inmediatamente que marchamos por senda insegura. Y efectivamente, si toda máquina completa ha de tener un motor en el sentido antes indicado (motor de vapor, de aire, de agua, de gas, etc.), es evidente que un torno, una máquina de acepillar, y en general todas las máquinas herramientas que trabajan en un taller cualquiera, cuando se toman aisladamente, no constituyen máquinas completas, sino solamente partes de máquinas completas. Segun esto, nos veríamos obligados á sacar la consecuencia de que el lenguaje técnico ordinario que concede á estos dispositivos el nombre de máquinas, induce á craso error, ó que á lo ménos la definicion técnica se halla en contradiccion con la realidad.

Una dificultad exactamente del mismo género se encuentra en el caso de las máquinas motrices. En su mayor parte esas máquinas, consideradas en sí mismas, no tienen ningun órgano destinado á efectuar un trabajo sobre un cuerpo cualquiera, lo que equivale á decir que están desprovistas de un útil propiamente dicho, y no podrian, segun esto, considerarse como máquinas completas. Los grandes talleres destinados especialmente á la construccion de las máquinas de vapor, de las turbinas, de las máquinas de gas, etc., no producirian, pues, en definitiva más que partes de máquinas. La propiedad de ser una máquina de vapor verdaderamente completa no perteneceria más que á los martinetes de vapor, á las cizallas de vapor, á los laminadores de accion directa, en tanto que las otras máquinas antes indicadas, fuese cual fuere el esmero de su ejecucion, no tendrian el derecho de llevar dicho nombre, á ménos de estar combinadas con otros dispositivos.

No cabe duda que todo eso está en contradiccion con la idea natural que teníamos de una máquina completa, y que aquí podríamos aplicar directamente, si no encontrásemos la oposicion de las definiciones teóricas, ó dicho en otros términos, esa idea natural es susceptible de llamar la atencion sobre el valor de las consideraciones teóricas admitidas hasta hoy y de hacer muy discutible su autoridad.

Hay además un tercer punto que da pié á importantes reflexiones del mismo género. Consideremos una máquina de hilar, en la que el hilo efectua para estenderse, torcerse, arrollarse, etc., una série de movimienque no podria ejecutar, si no funcionase *en sí misma* como órgano de trasmision de movimiento. ¿Debe en tal caso conceptuarse solamente el hilo como cuerpo

(a) *Tratado de Mecánica Industrial*, III parte, § 11. «La ciencia de las máquinas juzgada así, se compone pues de la CIENCIA DE LOS ÚTILES, de la CIENCIA DE LOS MOTORES y de la CIENCIA DE LOS COMUNICADORES Ó MODIFICADORES DEL MOVIMIENTO.

que se ha de elaborar ó como «comunicador» ó como «útil?» ¿Dónde empieza y donde acaba cada uno de esos tres caractéres? Incertidumbres del mismo género existen en todas las máquinas análogas ¿Cómo se esplica que la máquina de hilar y de una manera general todas las máquinas que se utilizan para el trabajo de las materias textiles, no puedan entrar exactamente en la definicion teórica? ¿Es ello un defecto de tales máquinas que todo el mundo está conteste en juzgar muy perfectas, ó es por el contrario un defecto de la teoria?

Tomemos como otro ejemplo un aparato muy conocido, el ariete hidráulico de *Montgolfier*. El agua elevada aquí por la máquina es una porcion de la masa de agua que obra como fuerza motriz. Por lo tanto, nos hallamos evidentemente en presencia de una máquina completa; pero ¿qué es lo que debe considerarse como receptor, como trasmision y como útil? ¿Debe la corriente de agua representar los tres á la vez? Y en este caso, ¿qué son las otras partes de la máquina? O en fin, ¿se ha de admitir que *Montgolfier*, al legarnos su invento, nos dejó una paradoja complicada, un enigma mecánico, en vez de una máquina séria, capaz de dar cuenta de la legitimidad de su orígen (50)?

Vemos así acumularse cuestion sobre cuestion, duda tras duda, cuando intentamos formalmente aplicar la clasificacion teórica ó la subdivision de las máquinas admitida hasta ahora. Y no obstante, aquí se trata en realidad de un asunto para el cual el modo de concepcion nada tiene de indiferente; asunto que en efecto es uno de los factores más importantes de la civilizacion moderna, una de las ramas de la actividad humana que se encuentran más ó ménos directamente relacionadas con todas las demás; en cuyas condiciones no debe vacilarse en hacer los mayores esfuerzos para darle una base científica, firme y segura. De ahí se desprende que tengamos el mayor interés en empezar por someter la subdivision actual de las máquinas á un exámen profundo, y eso cabalmente es lo que nos proponemos realizar en el párrafo siguiente.

§ 130

La herramienta ó el útil.

Comenzaremos nuestro exámen por el cuerpo que ejecuta directamente el trabajo, es decir, por el útil, demostrando cual es la parte que en algunas máquinas importa considerar como merecedora de este nombre. En el torno, en la máquina de desbastar, en la sierra de tablas., etc, la cosa es fácil; el cincel, el buril, la sierra, etc., se presentan claramente como los órganos destinados á operar la transformacion de los cuerpos confiados á esas diferentes máquinas. En la máquina de filetear existen ordinariamente varias piezas, los cojinetes, que se reunen para formar el útil, y por lo mismo se debe designar, y se designa en efecto, como útil, el conjunto de cojinetes y de la pieza que los contiene, la terraja. En los laminadores el útil está constituido por los cilindros que hacen avanzar la pieza metálica que ha de trabajarse, y modifican su forma. En los molinos el útil está formado por las piedras que reducen los granos á polvo, y conducen á su periferia la harina producida. En la máquina en que se fabrican las puntas de Paris, se encuentra un primer útil compuesto, que sirve para mantener el alambre, otro igualmente compuesto, que lo corta, un tercero que forma la cabeza, y por fin otros órganos destinados á llevar adelante una nueva porcion de alambre, ó bien á llevarse la punta terminada.

En las máquinas de fabricar las cardas trabajan sucesivamente varios útiles, ya sea sobre la banda de cuero para taladrarla, ya sobre el hilo metálico para cortarlo, encorvarlo en diferentes ángulos é introducirlo en el cuero, mientras que otros actuan á la vez sobre la banda y el alambre, para sujetar firmemente la porcion de alambre introducida. Por lo tanto, aquí encontramos una série de útiles, cada uno de los cuales tiene una funcion y un modo de actuar diferentes, y que además se hallan asociados de manera tal, que es difícil decir donde acaba el uno y donde comienza el otro.

Cumple aquí observar que la unidad del útil, lo mismo que la del cuerpo que ha de labrarse, no se presenta como una condicion necesaria de la máquina. Convendria, pues, para ser completamente riguroso, tener en cuenta esta circunstancia en el establecimiento de las definiciones; y por ese motivo ciertos autores como *Redtenbacher*, por ejemplo, que pretendian llegar á un verdadero rigor científico, se han visto precisados á dar descripciones muy estensas en vez de simples definiciones. Sin embargo, antes de detenernos á discutir esa cuestion especial, parécenos conveniente examinar algunos otros ejemplos.

En las máquinas destinadas á elevar pesos enormes, como por ejemplo, la grua, se designa como útil el gancho al cual se sujeta el cuerpo que ha de elevarse. Esa designacion parece perfectamente justa y conforme á la definicion, ya que el gancho es sin duda alguna la parte que ejecuta directamente el trabajo de elevacion. Pero si suponemos suprimido el gancho y arrollada la cuerda en torno de la pieza que ha de elevarse con una fijacion por nudo, la máquina será evidentemente ca-

paz de levantar la carga como antes, y ejecutar absolutamente de igual manera el trabajo á que está destinada; no teniendo aquí á todas luces la necesidad de tomar en consideracion la comodidad, ó la seguridad más ó ménos grande del modo de suspension. Segun lo dicho, el gancho podria muy bien dejar de ser el útil de la grua, y de todas las máquinas elevatorias, puesto que de otro modo la supresion de una pieza tan esencial como el útil, deberia en una máquina tener sin ningun género de dudas el resultado de hacer inutilizable esa última. Verdad es que podria objetarse que en tal caso la eslinga improvisada por medio de la cuerda, es en realidad el gancho primitivo, cuya materia y modo de construccion han podido cambiarse, sin que no obstante se haya modificado en nada su esencia. La objecion es bastante especiosa; pero con todo es posible destruirla. Supongamos al efecto que se suprime la carga, y que despues de haber dejado descender la cuerda á una gran profundidad, se la vuelve á subir. ¿Nó trabajará la grua en tal caso en las mismas condiciones exactamente que antes? ¿Nó tendrá que levantar igualmente una carga? Las ruedas, los tambores, los trinquetes, los manubrios, ¿no obrarán todos como en el primer caso anunciado? Y sin embargo, aquí ya no existe ahora gancho, ni eslinga, ni siquiera carga especial, y es simplemente el peso mismo del órgano de traccion el que constituye la carga de la máquina; es decir, el cuerpo que ha de levantarse ha venido á ser miembro de la cadena cinemática misma; y así el útil en el sentido de la definicion que hasta ahora hemos admitido, ha desaparecido por completo.

Pasemos ahora al exámen del mismo punto en la locomotora. Los ganchos de acoplamiento ó los otros dispositivos empleados para sujetar el tren á la máquina, se consideran comunmente como constituyendo el útil. Es ya bastante singular que exista tan gran número de sistemas diferentes de sujecion, con los cuales una sola y misma máquina puede siempre trabajar para un solo y mismo objeto. ¿Cambía tal vez la naturaleza de la máquina con cada uno de ellos? Segun las ideas que actualmente están en boga, eso precisamente es lo que debiera suceder, como quiera que, segun ellas, el útil es una parte esencial constitutiva de la máquina.

Para ilustrarnos más completamente sobre esta cuestion supongamos que se destraba todo el tren y se deja correr sola la locomotora con su ténder, ó mejor dicho, para no tener que ocuparnos del acoplamiento del ténder, supongamos el combustible y el agua cargados en la lacomotora misma. Si en tales condiciones esa locomotora-ténder tiene que subir por una pendiente bastante rápida, puede hallarse en la necesidad de desarrollar un trabajo precisamente igual al que debia hacer en una via horizontal cuando tenia que remolcar todo el tren. Más en tal caso el gancho de sujecion no tiene conexion alguna con dicho trabajo, y por consiguiente no puede ser en verdad el útil de la máquina. Realmente podria objetarse que la locomotora-ténder es una máquina incompleta, toda vez que no transporta mercancias ni viajeros ¿Pero qué se hace de esa objecion, si esa misma locomotora es una máquina que lleva asientos destinados á recibir viajeros, ó si como en la disposicion de *Fairlie*, la prolongacion de la armadura permite reservar cierto espacio con el mismo objeto? ¿Dónde se encuentra entonces el útil? Nadie puede decirlo: y en todo caso es lo cierto que el gancho de sujecion no representa ya nada bajo ese punto de vista. El cuerpo que ha de trabajarse no existe cerca de la máquina ó fuera de ella; ha pasado realmente á la máquina misma, puesto que el soporte de esa última es al propio tiempo la armazon de la parte que recibe los viajeros.

Otras máquinas existen para las cuales las condiciones son exactamente las mismas que en la locomotora; tal es, por ejemplo, el barco de vapor, donde es imposible hallar nada que corresponda al útil. Máquinas de dimensiones muy exiguas dan igualmente márgen á comprobaciones del mismo género; y así verbigracia en el reloj de bolsillo seria difícil indicar la parte que constituye el útil ¿son acaso las saetillas? ¿En dónde se hallaria en tal caso el cuerpo al cual trasmiten directamente el trabajo mecánico de la máquina? Por otra parte, las agujas no son absolutamente necesarias; pues en efecto, se pueden sustituir con discos móviles en los cuales se encuentre marcada la hora merced á un índice fijo; una simple señal en una rueda del rodaje hecha visible, seria en rigor suficiente para el objeto que ha de llenar. En definitiva, el útil de dichos relojes no está constituido por las agujas, y por otra parte es imposible determinar la pieza que desempeña las funciones de ese órgano.

Así pues, las precedentes investigaciones nos llevan á la conclusion de que *el útil no constituye en modo alguno una parte esencial de la máquina*. Si en ciertas máquinas se encuentra verdaderamente bajo una forma muy clara, en otras es mucho ménos fácil conocerle, y aun en otras no existe enteramente.

Si procuramos establecer el carácter comun de esta última clase de máquinas, de las cuales hemos citado como ejemplos la grua, la locomotora, el barco de vapor y el reloj, nos hallamos con que se trata en cada caso de un *desplace* de ciertos cuerpos, que es lo mismo que decir que todas esas máquinas, tienen por objeto

efectuar un trasporte ó una alteracion en la posicion de un cuerpo ó de una série de cuerpos. La grua, la locomotora y el barco de vapor son máquinas que tienen por funcion llevar cargas de una posicion á otra, haciéndolas mover en sentido vertical, horizontal, ó en ambos sentidos. Lo mismo puede decirse en verdad del reloj, cuyo objeto especial estriba en permitir la evaluacion del tiembo trascurrido por la medida del desplace correspondiente.

Las primeras máquinas consideradas en las cuales existe efectivamente el útil, presentaban en cambio la propiedad característica de hacer sufrir á los cuerpos que han de trabajarse, *una alteracion de forma,* ó sea, producir una trasformacion, division, separacion, reunion, etc. El torno, la máquina de acepillar ó de pulir, la máquina de filetear, la sierra de cinta, etc., trasforman los cuerpos sobre los cuales actuan, quitando una parte de la materia de los mismos. La máquina de fabricar puntas, los laminadores, etc., realizan un agrupamiento de las moléculas de estos cuerpos, diferente del que existia antes de su accion; amen de que efectuan al propio tiempo un trasporte de esos cuerpos. Lo mismo sucede con la máquina de fabricar las cardas. Las ruedas de molino dividen los cuerpos en partículas muy menudas y al mismo tiempo los trasportan. Todas esas máquinas tienen uno ó varios útiles. La dificultad que hemos señalado anteriormente respecto de la determinacion de esos útiles, depende de que en una misma máquina se hallan reunidas la operacion del cambio de forma y la del trasporte. Haciendo caso omiso de esa circunstancia, podemos ahora dividir las máquinas bajo el punto de vista de sus funciones en dos grandes clases:

I. *Máquinas para cambios de posicion, ó máquinas de desplace ó de trasporte.*

II. *Máquinas para cambios de forma, ó máquinas de trasformacion.*

Los límites entre esas dos clases no están claramente deslindados, puesto que como hemos visto, varias trasformaciones se hallan necesariamente sujetas á un cambio de posicion, y que hasta en ciertos casos, como por ejemplo, en los molinos de trasformacion y el trasporte tienen sensiblemente igual importancia. Por otra parte, se vé que las máquinas de trasformacion tienen una propiedad más que las máquinas de desplace, como quiera que poseen un útil, en tanto que las otras no tienen ninguno. Las máquinas de desplace, pues, son las más sencillas y por esá razon se han colocado en primera línea.

La idea dominante hasta aquí, en virtud de la cual toda máquina debiera poseer el útil como elemento constitutivo, no es, pues, exacta más que para una parte de las máquinas, las de la segunda de nuestras dos clases principales, y así podemos sacar la siguiente conclusion: *El útil no es un elemento esencial de la máquina, sino solamente un elemento eventual, y su nocion no puede servir de base para la compresion de la máquina completa.*

§ 131

Significacion cinemática del útil.

Ahora que hemos demostrado lo que el útil *no es* en la máquina, réstanos determinar cual es la verdadera significacion cinemática de ese órgano en la clase de las máquinas de trasformacion en que hemos comprobado su existencia, y cuales son las leyes cinemáticas generales á que está sometido.

Al efecto comenzaremos por examinar el modo de accion del útil, en una máquina determinada. Supongamos, por ejemplo, que se trata de tornear una barra de hierro cilíndrica en un torno paralelo ordinario. El cincel cogido en las mandíbulas ó boca del soporte, tiene un movimiento de traslacion paralelo al eje del torno, á la vez que la pieza que ha de tornearse, tiene el mismo movimiento de rotacion que el árbol del torno en que está fija, movimiento que da por resultado llevar al corte del útil las partes del contorno de la pieza, que se encuentran enfrente de ese útil. El movimiento relativo del cincel con respeto á la barra, es un movimiento helicoidal, como si el útil fuese una porcion de una tuerca ordinaria S^{-}, de la cual seria el filete correspondiente S^{+} la barra que ha de tornearse. Segun nuestro sistema de notacion, el cincel y la barra ofrecen, pues, el movimiento del acoplo $S \overline{=} S^{+}$. Ese acoplo por otra parte no existe al principio del trabajo, pero como el cincel está formado de una materia más dura que la pieza que ha de tornearse, quita en su movimiento progresivo las pequeñas partes del contorno de la barra que se encuentran fuera de la superficie de encaje, S^{+}, que describe con respecto á esa barra. La parte de la barra por la que ha pasado el útil, se encuentra forzosamente así obligada á tomar la forma del elemento S^{+}, cuyo elemento conjugado S^{-}, es llevado por el cincel en una pequeña anchura.

Por consiguiente, si por ejemplo, se hace volver atrás el cincel, forma verdaderamente con la parte torneada de la barra un acoplo de elementos $S \overline{=} S^{+}$. El apoyo

entre los dos elementos, tal como existe aquí, no es por sí mismo suficiente (§ 18), si bien esa insuficiencia está compensada con la *clausura de cadena* (§ 43) que suministra el torno mismo.

Cumple notar que la cuchilla del cincel tiene desde el principio de la operacion el perfil de la tuerca S^-, á la vez que la barra solo toma poco á poco la forma de S^+ á medida que va adelantando la torneadura. Durante toda la operacion el acoplamiento $S \overline{=} S^+$ no hace más que prepararse, y únicamente al terminarse esta operacion, es cuando los dos cuerpos se hallan realmente ligados por un acoplamiento de ese género.

Acabamos de decir que la barra torneada es de la forma S^+. Eso es lo que se produce visiblemente en lo que se llama la operacion del desbaste, para la cual se da al corte del útil la forma de una punta. En la segunda pasada destinada á terminar la pieza, el cincel tiene como perfil una porcion de línea recta paralela al eje, de suerte que el cuerpo torneado acaba por presentar la forma de un cilindro (§ 15), pero en el concepto de su acoplamiento con el cincel, no puede ménos de considerarse como constituyendo un filete de tornillo.

Lo que acabamos de observar en el torno, es decir la asociacion del útil y del cuerpo que ha de trabajarse para formar un acoplo de elementos, se encuentra tambien en la máquina de acepillar ó desbastar metales y la sierra de cinta, en cada una de las cuales se realiza el acoplo $P \overline{\pm} P^-$; y lo mismo sucede con la máquina de filetear ó terrajar que da orígen al acoplo $S \overline{\pm} S^-$ ó al acoplo $S \overline{=} S^+$, segun se utilice para la fabricacion de tuercas ó para la de tornillos ó pernos arroscados. Vemos que en cada uno de dichos casos el cuerpo que ha de trabajarse, figura como elemento cinemático, como parte de un miembro ó bien como miembro completo de una cadena. Lo que se ve sobre todo muy claramente en el ejemplo de la máquina de terrajar, ó generalmente el tornillo, á medida que se va produciendo, se utiliza precisamente para continuar el movimiento del útil. De donde resulta que el cuerpo que debe trabajarse, no se ha de considerar como existente *fuera* de la máquina, sino más bien como *formando parte* de esta máquina. Por lo mismo nos parece conveniente dar un nombre especial á ese cuerpo, del que aun tendremos que ocuparnos amenudo, y proponemos el de *pieza de obra*.

En los ejemplos que acabamos de citar la pieza de obra no figura más que como elemento de acoplos de encaje ó de acoplos inferiores; pero esta es una circunstancia puramente accidental que dimana de la índole de las máquinas escogidas como ejemplos. Con efecto, existen otras máquinas en las que forma parte de acoplos superiores ó de formas envolventes más generales. En los laminadores, por ejemplo, la pieza de obra está acoplada con los dos cilindros para formar el acoplo superior R^+, P^+, y constituye un miembro completo de cadena. En la máquina de cardar la lana los ganchos dispuestos regularmente en los tambores obligan á las fibras de lana que están enredadas y entremezcladas, á tomar la forma envolvente que corresponde á su movimiento, ó sea, á disponerse en líneas paralelas. En los molinos forman las ruedas con cada grano un acoplamiento superior muy complicado, en el cual desempeña un papel asaz importante la fuerza de clausura.

En suma, de nuestro análisis podemos deducir la ley siguiente:

En las máquinas de trasformacion la pieza de obra se presenta como una parte de un miembro de cadena ó como un miembro completo; forma con el útil un acoplamiento ó encadenamiento cinemático, en el que por virtud de la disposicion dada á la materia que constituye ese útil, se halla remplazada su forma primitiva con la forma envolvente que corresponde á ese modo de trabazon.

Esa ley está exenta de todas las ambigüedades que se encuentran á cada instante en el modo antiguo de conceptuar la máquina. En primer lugar hacemos constar que la cadena cinemática de la máquina no está interrumpida en el punto en que trabaja el útil, y que por el contrario en ese punto conserva su marcha normal. Luego, la cadena no acaba allí donde se opera el trabajo, por más que haya allí relativamente al objeto que debe llenar la máquina, un punto de importancia especial, un punto que llama la atencion (51). En segundo lugar, aquí encontramos tambien la respuesta á las numerosas preguntas formuladas en el párrafo 129. Así, por ejemplo, el hilo en la máquina de hilar es forzosamente órgano de trasmision de las fuerzas, como miembro de la cadena cinemática; el huso en cuya parte superior se arrolla el hilo para desarrollarse despues, forma en ese punto un acoplamiento superior y actua como útil. Por otra parte, las diferentes fibras del hilo obran igualmente como útiles con respecto unas de otras. Para mayor sencillez consideremos solamente dos fibras de esas tendidas entre la punta del huso P y el banco de estirar B (fig. 404); despues de una rotacion de media vuelta del huso ó de 180 grados, se hallan simplemente cruzadas dos fibras; pero con una rotacion más prolongada esas dos fibras se arrollan en espiral mútuamente, y cada una de ellas es entonces el útil con respecto de una á otra. *La forma helicoidal de cada fibra constituye su forma envolvente con relacion á la segunda fibra.* Aquí vemos que el útil no está

forzosamente formado de una materia más dura que la de la pieza de obra, y que además, no siempre es posible fijar una distincion entre esas dos piezas; más todo ello no afecta en nada á la proposicion que hemos sentado y en virtud de la cual la pieza de obra pertenece á la máquina como miembro ó parte de miembro de la cadena cinemática.

Podemos igualmente hacer constar aquí que entre las dos grandes clases en que hemos dividido las máquinas, existe con relacion á la pieza de obra un punto comun verdaderamente esencial. Cuando para las máquinas de desplace hemos visto desaparecer lo que en la antigua teoria se llamaba el útil, hemos hecho notar que el cuerpo que debia desplazarse, la pieza de obra, era una parte de la máquina; en otros términos, *en las máquinas de desplace la pieza de obra es igualmente la parte de un miembro ó un miembro completo de la cadena cinemática*. Ambas clases de máquinas presentan, pues, sobre ese punto la más perfecta concordancia.

En fin, de los principios establecidos sobre la naturaleza del útil se deduce una proposicion de verdadera importancia, que encuentra numerosas aplicaciones en la cinemática aplicada y la tecnologia mecánica, y que es la siguiente: *Para obtener con el empleo de una máquina un cuerpo de forma determinada es necesario adoptar para el útil la forma envolvente de la que se determine*. Con objeto de fijar esa forma envolvente se necesita conocer y determinar préviamente el movimiento relativo del útil con relacion á la pieza de obra; problema que puede resolverse de diferentes maneras y que generalmente encierra otros varios. Pero en todo caso es de gran importancia poder comprender en un concepto útil y determinado todas las relaciones cinemáticas que existen entre el útil y la pieza de obra.

§ 132

El receptor.

Por lo que atañe al cuerpo designado con el nombre de receptor, se han limitado las ideas á un campo más restringido que para el útil, por la razon de que el número de cuerpos motores no es muy considerable. Compréndense generalmente como tales el agua, el viento, el vapor y algunos otros fluidos aeriformes, los pesos, los resortes y los séres animados. Insiguiendo la manera de ver admitida hasta ahora, comunmente se considera el receptor de una máquina completa como la parte destinada á tomar del cuerpo motor en las condiciones más favorables la fuerza natural que contiene. Importa examinar aquí lo que caracteriza el modo de accion del motor y del receptor en los diferentes casos correspondientes á los cuerpos que acaban de mencionarse.

Si consideramos primero las ruedas hidráulicas y las turbinas, vemos que el receptor está representado por las ruedas de paletas y señaladamente por esas paletas. Consideraciones anteriores (§ 43) nos han evidenciado ya que la rueda no constituye por sí sola un aparato completo susceptible de ser utilizado, y que sus paletas forman con el agua un acoplamiento cinemático, en tanto que por otra parte el agua se encuentra acoplada con el canal de conduccion ó saetin. El cuerpo motor es aquí, pues, sin duda alguna un miembro de la cadena cinemática. La misma observacion podemos hacer sobre las diferentes variedades de otro género de motores hidráulicos, las máquinas de columna de agua. Tambien en esas máquinas el agua, acoplada con el émbolo, encerrada en el cilindro ó barrilete y guiada por las válvulas de distribucion, entra como miembro de la cadena cinemática, formando además un mecanismo que hemos estudiado ya (§ 126) y que hemos comprendido ser un trinqueteo. En cuanto al receptor no es posible determinar aquí rigurosa y lógicamente lo que le constituye; y todo cuanto en realidad podemos decir de él, es que está representado por el émbolo, ó por el cilindro, ó por esos dos órganos á la vez, ó tambien aun por ambos órganos completados por la distribucion.

En las máquinas de viento se encuentra, aunque el órgano de presion motor sea de clausura de fuerza, un acoplamiento cinemático que tiene efecto entre el viento y la superficie de las alas ó aspas, acoplamiento que es el de un acoplo superior de tornillo.

El vapor de agua y demás fluidos aeriformes que obran por expansion, se utilizan generalmente en máquinas de émbolo, y á veces, si bien que raramente, en máquinas cuyas disposiciones ofrecen cierta analogia con las de las turbinas; pero en todo caso el cuerpo motor forma con el receptor un acoplo ó una cadena cinemática, en los cuales es muy difícil discernir la parte que conviene considerar como receptor.

Los cuatro motores que acabamos de mencionar, el agua, el viento, el vapor de agua y los otros fluidos aeriformes, son órganos de presion. Si procuramos formarnos una idea de la série completa de máquinas fundadas en su utilizacion é intentamos clasificarlas segun sus propiedades características, nos hallamos en presencia de un hecho de bastante importancia, que no debemos pasar en silencio. Para utilizar el motor existen verdaderamente dos métodos claramente distintos que corresponden á dos clases diferentes de má-

quinas motrices. Una de ellas comprende las máquinas de émbolo; y en el capítulo anterior hemos deducido ya la conclusion general de que esas máquinas son *trinqueteos* y segun nuestra espresion, *trinqueteos de movimiento retrógrado*. La otra clase, á la cual pertenecen las máquinas hidráulicas, las turbinas, los molinos de viento, etc., presenta la particularidad de que el movimiento de la corriente fluida es contínua ó á lo ménos, muy sensiblemente contínua. Esa corriente no ejerce una accion periódica ó intermitente; entra de una manera contínua en un punto de la máquina, y de igual modo sale por otro punto; en las ruedas hidráulicas su accion es análoga á la de una cremallera (§ 61); en los molinos de viento y en algunas turbinas se parece su accion á la del tornillo, en tanto que en otras turbinas puede asimilarse á la de una cuerda que se arrolla y desarrolla, etc. La diferencia entre las dos clases de máquinas puede ponerse en evidencia adoptando para las de la segunda clase el nombre de *motores contínuos* ó *corrientes*, que corresponde al género de movimiento de su órgano más importante. De donde resulta que *todas las máquinas motrices destinadas á utilizar los órganos de presion, pueden dividirse en motores corrientes ó contínuos y en motores discontínuos ó de trinqueteo ó de vaiven.*

Si dirigimos por un momento la vista atrás sobre los capsulismos de manubrio y de ruedas, de que antes hemos hecho mencion (Cap. IX y X), podemos observar que en parte pertenecen á una de esas clases y en parte á la otra. De las máquinas derivadas de los capsulismos de manubrio, bombas ó maquinas motrices, unas son de trinqueteo ó de vaiven, las otras mecanismos corrientes, y algunas pueden hasta considerarse como constituyendo formas de paso de una clase á otra. Los capsulismos de ruedas son esencialmente mecanismos contínuos. Bajo el punto de vista de la práctica las máquinas contínuas presentan en gran número de casos la muy importante ventaja de que sus movimientos de rotacion pueden utilizarse fácil y directamente. *Las tentativas hechas para crear máquinas de vapor ó bombas rotatorias han tenido esencialmente por objeto trasformar en máquinas contínuas las máquinas intermitentes de órgano de presion.*

El reloj ordinario puede servirnos como ejemplo de una máquina movida por la accion de un *peso*. A primera vista parece incontestable que en esa máquina ha de considerarse el peso como motor, á la vez que debe tomarse como receptor la cuerda ó la cadena de la cual está suspendido ese peso. Pero examinando más de cerca la cuestion se presentan reflexiones análogas á las que hemos hecho (§ 130) respecto del útil en la grua. Si suponemos en efecto que se ha suprimido la pesa del reloj y que al propio tiempo se alarga lo bastante la cuerda ó la cadena para que la parte añadida sea equivalente á la pesa suprimida, el movimiento del reloj será mantenido sin duda por la cuerda sola. De donde resulta que el peso no puede ser el motor, puesto que se puede prescindir de la pesa, como tampoco la cuerda, cuya naturaleza no se ha modificado, puede ser el receptor en el primer caso. Pero lo incontestable es que la cuerda es un miembro de la cadena cinemática y que está acoplada con el tambor por el cual se arrolla durante la operacion de *dar cuerda*. Las máquinas movidas por pesas gozan, pues, como las máquinas anteriores, la propiedad de que el cuerpo que sirve para trasmitir la fuerza motriz, pertenece como miembro ó como elemento, á la cadena cinemática.

El *resorte* empleado como motor en los relojes y algunas otras máquinas de exíguas dimensiones constituye, conforme hemos visto (§ 44), un elemento cinemático ó un miembro de cadena. Por lo demás, aquí es todavia difícil, por no decir imposible, indicar la pieza de la máquina que corresponde á la definicion admitida hasta ahora para el receptor; pero en cambio vemos distintamente que la pieza por la que se hace la introduccion del esfuerzo motor, figura en la cadena cinemática que constituye la máquina.

Despues de sentar que todas las máquinas motrices tienen esa propiedad general, podemos, colocándonos bajo otro punto de vista, deducir de nuestras investigaciones una division de tales máquinas en *dos clases generales*. En todas las máquinas motrices cuyo motor es un órgano de presion, se efectua verdaderamente (en los canales, tubos, válvulas, intérvalos entre los alabes ó paletas, etc.) un *cambio de forma*, que á veces es muy marcado, como en la máquina de vapor, y que se halla más ó ménos combinado con un cambio de lugar. Con los motores de resorte el cambio de forma se efectua solo, mientras que con los motores de pesas no se tiene más que un *cambio de lugar*. Aquí nos encontramos sin duda en frente de la misma diferencia específica que hemos encontrado antes en el párrafo 130, cuando se trataba del objeto de la máquina ó de lo que podemos llamar ahora el tratamiento de la pieza de obra. Por lo tanto, *teniendo en cuenta el modo de cambio sufrido por el órgano de presion durante su accion*, podemos igualmente dividir las máquinas en MÁQUINAS DE CAMBIO DE FORMA y en MÁQUINAS DE CAMBIO DE LUGAR.

Esa conclusion no debe alterarse en nada por la circunstancia de ser relativamente muy corto el número de máquinas de cambio de lugar.

La division en dos clases tiene en el fondo una importancia real, en cuanto hace desaparecer la incompatibilidad que parecia existir entre las máquinas motrices y las máquinas de trabajo y en cuanto, además, permite esplicar varias analogias muy notables.

Vamos ahora á pasar al exámen de los *motores animados*, es decir, al empleo de la fuerza muscular de los hombres y de los animales para dar el movimiento á las máquinas. Nos detendremos primero en las máquinas movidas por el hombre. Segun el concepto admitido hasta ahora, una máquina de ese género está provista de un receptor, cuya forma y modo de movimiento están debidamente determinados en vista de la accion de la parte del cuerpo humano que debe desarrollar la fuerza; y que segun los casos es la mano, el brazo, el pié, etc. Así, por ejemplo, en la rueda ó piedra de afilar, de manubrio y de pedal, este pedal debe considerarse como el receptor, en tanto que el pié ó la pierna del obrero es el motor. Pero eso es meramente una apariencia, y la constitucion de la máquina en el fondo es completamente distinta. Con efecto, no cabe dudar que alargando simplemente el boton del manubrio la piedra podria ponerse en movimiento por la mano del obrero obrando directamente sobre ese gorron; é igualmente podria efectuarse el movimiento de rotacion por medio de una cuerda arrollada entorno del gorron y sobre la cual ejerciese el obrero esfuerzos de traccion alternativos (a). Por consiguiente el pedal no debe considerarse como una parte indispensable de la máquina. Sin embargo, los tres modos de poner en movimiento tienen de comun *que el cuerpo del obrero forma una cadena cinemática con la máquina.* En ciertas circunstancias puede esa cadena ser muy complicada; pero en el caso actual puede determinarse con bastante exactitud. En primer lugar, el manubrio *a* (fig. 405) forma con la biela *b*, el pedal *c* (el oscilador), y la armadura *d*, el mecanismo $(C''_4)^d$ que conocemos ya, y que antes hemos designado (§ 65) con el nombre de manubrio de impulsion rotatorio. Como *c* es aquí el miembro conductor, la fórmula especial de ese mecanismo debe escribirse: $(C''_4)\frac{d}{c}$. En segundo lugar el obrero pone el pié en la prolongacion *c'* del oscilador *c*, de suerte que (suponiendo que el centro 1′ de la articulacion del muslo no se desaloja) esta pieza *c'*, el muslo *a'* y la pierna *b'* forman respectivamente los tres miembros (oscilador, manubrio y lazo) de un segundo manubrio rotatorio $(C''_4)^{d'}$, cuyo puente *d'* está constituido por la pierna del obrero que se mantiene fija. La articulacion de la rodilla en movimiento forma el acoplo 2′ y la del pié, el acoplo 3′. La articulacion 4 es comun á los dos mecanismos, que con su reunion constituyen lo que hemos llamado un mecanismo completo; y lo mismo puede decirse del puente *dd'* que lleva los elementos fijos de los acoplos 1, 4 y 1′. El obrero dirigiendo á su voluntad la accion de sus fuerzas musculares, produce en las articulaciones 1′ 2′ y 3′, los movimientos oscilatorios necesarios para el funcionamiento de la máquina. El pié, cuyos músculos de las articulaciones concurren á este resultado, forma parte del oscilador *c'*. La fórmula especial del segundo mecanismo es segun esto: $(C''_4)\frac{d'}{a'\ b'\ c'}$, con la observacion de que el miembro *a'* es aquí simplemente un miembro oscilante y no rotatorio, como el miembro *a* en el primero. En definitiva vemos que el obrero forma con su cuerpo un mecanismo completo por sí própio, que se une cinemáticamente con el mecanismo que ha de ponerse en movimiento.

Un obrero que actua sobre un manubrio con ambas manos á fin desarrollar un esfuerzo más considerable, establece una trabazon cinemática muy complicada entre el mecanismo formado por sus propios miembros y aquel á quien pertenece el manubrio. Conforme quiera, puede modificar á cada instante, segun las necesidades, la accion de la fuerza de clausura, utilizando más ó ménos ciertas articulaciones.

Una complicacion del mismo género se encuentra para el movimiento del cuerpo humano en la rueda de pernos ó clavijas, y en mayor grado para el cuerpo del animal de tiro en la noria ó malacate, etc. Pero en todo caso se patentiza la misma union, por cadena cinemática, del cuerpo animado con la máquina. Por lo que hace á la existencia del receptor tal como se ha definido hasta aquí, no es más fácil de conocer que en todos los ejemplos examinados anteriormente. De todas esas investigaciones, pues, deducimos el derecho de sacar la consecuencia de que *el receptor no constituye una parte esencial de la máquina completa.*

§ 133

Interpretacion cinemática de la máquina completa.

Hemos encontrado antes que el «útil» considerado hasta aquí como un elemento esencial de toda máquina, no existe verdaderamente en una parte de las máquinas conocidas. Despues hemos visto que el segundo elemento, indicado tambien como esencial, «el recep-

(a) Ese modo de trasmision de movimiento se utiliza en la rueda ritual de los sacerdotes calmucos y en la devanadera de la seda entre los japoneses.

tor,» no es susceptible de ser definido en muy gran número de casos. De donde se infiere ser muy poco probable que pueda llegarse á una conclusion diferente para el tercer elemento de la antigua teoria, «el comunicador ó la trasmision.» Verdaderamente ese elemento no es más susceptible que los otros de estar aislado por do quiera, aunque existan algunos ejemplos en que la trasmision pura y simple del movimiento se encuentre claramente indicada como la única funcion de un grupo de órganos bastante complejo. *Todos* los miembros de la cadena cinemática sirven para trasmitir más ó ménos gran número de esfuerzos de un punto á otro de la máquina, y *todos* pueden considerarse como comunicadores entre la fuerza motriz y las resistencias. Como por otra parte en la mayoria de los casos es imposible decir donde empieza y donde acaba la funcion del comunicador, nos vemos precisados á deducir que hay igualmente motivo de renunciar á considerar la trasmision como una subdivision especial de toda máquina.

En suma, las tres categorias, receptor, comunicador y útil *pueden* encontrarse en una máquina y ser fáciles de distinguir, pero no deben en general designarse lógicamente como órganos esenciales de las máquinas, y conviene comprenderlas en el número de sus miembros eventuales, para los que más adelante tendremos que establecer otra clasificacion.

Lo que resalta como conclusion de todas nuestras investigaciones, lo que se ostenta como principio fundamental de todas las concepciones bastante oscuras que hemos examinado, es que *la máquina completa es una cadena cinemática cerrada*. El cuerpo motor y el cuerpo que ha de trabajarse son ambos á dos, miembros ó á lo ménos elementos cinemáticos de esa cadena. Las leyes en virtud de las cuales el motor efectua sus movimientos en la máquina, son en sustancia las mismas que aquellas á que obedecen la pieza de obra y el útil (cuando éste existe); y en definitiva son las mismas que aquellas que rigen todos los movimientos relativos entre los elementos cinemáticos y los miembros de la cadena que acabamos de estudiar. Sin embargo, nos parece necesario hacer aquí una distincion que puede tener por resultado el alterar la sencillez de la conclusion precedente. Trátase en verdad de la distincion entre las máquinas de cambio de forma y las máquinas de cambio de lugar; pues el objeto que nos proponemos, exije de nosotros un exámen más profundo sobre el antagonismo que parece existir entre esas dos clases de máquinas.

Hemos visto que el acoplo ó el encadenamiento entre el útil (en las máquinas de cambio de forma) y la pieza de obra, es tal, que esa pieza se halla obligada á tomar finalmente la forma-envoltura del movimiento relativo, forma que es el resultado del trabajo de la máquina-útil. Lo mismo sucede con el cambio á que se encuentra sometido el motor en las máquinas motrices de cambio de forma. Consideremos en tales condiciones un acoplo cualquiera de elementos, inferior ó superior, como por ejemplo, el de un gorron en su soporte, de un tornillo en su tuerca, de un émbolo en su cilindro ó barrilete, de dos ruedas dentadas en funcion, etcétera; podemos observar que á causa de la accion recíproca de los dos elementos acoplados, se efectuan cambios de forma en el uno ó en el otro y hasta en entrambos. Esos cambios son de dos clases: los unos temporales y los otros permanentes; los primeros corresponden á las deformaciones elásticas que sufren todos los cuerpos, siquier sean los más resistentes, bajo la accion de las fuerzas sensibles, mientras que los segundos se deben á una separacion definitiva de cierto número de partículas. De ahí resulta que el *desgaste* da por resultado modificar poco á poco la forma de los elementos acoplados. En esa trasformacion los elementos toman constantemente las formas-envolturas recíprocas que corresponden á su movimiento relativo, ó sea que obedecen siempre la misma ley que rige el cambio de forma entre el útil y la pieza de obra. Pero en este último caso procuramos obtener del modo más rápido posible, el cambio de forma, que es el *objeto* y *fin* mismo del movimiento dado á la máquina, mientras que en el primero el cambio de forma que se efectua en los acoplos de elementos cuyo conjunto constituye la cadena cinemática de la máquina, es un *efecto perjudicial*, que por lo tanto se procura *limitar* en todo cuanto es posible. Pero no es ménos cierto que el cambio de forma existe en ambos casos.

En suma, *los cambios de forma que se realizan entre el útil y la pieza de obra, son de igual índole que aquellos que se efectuan entre los elementos de los otros acoplos de la máquina, y de los cuales no se diferencian sino por su intensidad.*

Así vemos pues que todas las máquinas completas sin escepcion obedecen á la misma ley general; pero al propio tiempo nos encontramos reducidos á volver á la definicion de la máquina que hemos dado en el párrafo 1, y que á decir verdad ha sido el punto de partida de todas nuestras investigaciones. Esa definicion que con toda razon podemos reproducir en toda su integridad, es la siguiente:

Una máquina es un conjunto de cuerpos resistentes dispuestos de manera que obliguen las fuerzas mecánicas naturales á obrar dando orígen á movimientos determinados.

La «disposicion de los cuerpos» aquí indicada es precisamente el encadenamiento cinemático. El movimiento se efectua en la máquina, porque varias partes de la cadena cinemática se hallan en proporciones en donde no pueden sostenerse bajo la influencia de la fuerza mecánica natural á que se encuentra sometida la máquina. Por otra parte el movimiento así producido es un movimiento determinado por efecto de la existencia de la cadena. En las máquinas de cambio de lugar se utiliza ese movimiento para producir el desplace ó traslacion de la pieza de obra, lo mismo que en las máquinas de trasformacion sirve para producir la alteracion de forma, efectuándose esos cambios de posicion y de forma en las condiciones determinadas por la disposicion de la cadena cinemática. Los dos resultados, el simple trasporte siguiendo líneas dadas y en virtud de leyes determinadas y la modificacion de forma (que se verifica al propio tiempo que el trasporte), constituyen las formas bajo las cuales la máquina obliga las fuerzas naturales á «ejercer su accion.»

Aquí debemos aducir algunos ejemplos generales.

En el reloj de pesas cuando queremos darle cuerda, ponemos á ésta, cargada con su pesa, en una posicion que le permita bajar, al desarrollarse del tambor, y comunicar, por ende, á cada parte de la cadena cinemática el movimiento que le es propio. En el sistema ordinario de construccion las cosas están dispuestas de manera que el reloj se para mientras dura la operacion de darle cuerda y que por consiguiente el reducir la cadena á una posicion «instable» afecta á la partes todas de esa cadena. En los relojes grandes se procura evitar el error que de ahí puede resultar para la medida del tiempo, procurando antes de dar la cuerda poner una palanca cargada con un peso en una posicion tal, que pueda bajar y mantener por lo tanto el mecanismo en movimiento. En otros términos, durante la operacion de dar cuerda al reloj se coloca una cadena cinemática en una posicion instable, es decir, susceptible de sostener ó continuar dicho movimiento.

En la rueda hidráulica se da por abajo, por la abertura de la compuerta, acceso en la rueda al órgano de presion, el agua, que en razon de la disposicion de las partes forma inmediatamente con esa rueda un acoplamiento cinemático, que al punto determina el movimiento, puesto que el agua tiende siempre á descender por la accion de la gravedad. En la turbina helicoidal la gravedad solicita igualmente el agua que se acopla con el tornillo positivo que está constituido por la rueda para formar un acoplo de tornillo $S^{+}S^{-}$ y determinar el movimiento de esa rueda.

En la máquina de vapor de émbolo la abertura de la válvula de admision permite á la columna de vapor entrar inmediatamente en la cadena cinemática (que pertenece al género de los trinqueteos, como lo hemos visto en el párrafo 126) y determinar el movimiento regular que corresponde precisamente á la forma de dicha cadena. La introduccion constante del elemento motor, ó si se quiere, la longitud indefinida de la columna de vapor se obtiene con la condicion de mantener sin cesar el mismo estado físico en la caldera que produce el vapor. — En los motores hidráulicos ejecuta la renovacion contínua de la parte del agua motriz que se ha utilizado, un efecto meteorológico, formando en cierto modo un ciclo contínuo, en el que el agua que ha pasado (ó la parte del miembro de la cadena motor que ha abandonado la máquina) se halla nuevamente conducida á la parte superior.

El ariete hidráulico que hemos mencionado en el párrafo 129 no nos ofrece ya ninguna dificultad ahora. En esa máquina el agua está encadenada cinemáticamente con las otras partes y forma en verdad con ellas un trinqueteo. Siempre y cuando ese trinqueteo está movido por la columna de agua que obedece á la accion de la gravedad, tiene un movimiento retrógrado; pero se convierte en movimiento directo cuando empieza á levantar una parte de esa misma agua á cierta altura. La ductilidad del agua (el órgano de presion) permite esta separacion en dos corrientes distintas. Podemos, además, hacer constar que aquí nos es indiferente de todo punto, bajo el concepto de nuestra definicion, que la corriente líquida sea no solo el elemento motor y el elemento puesto en movimiento, sino tambien el comunicador del movimiento. En ese último caso como en todos los demás, vemos que el cuerpo motor entra como miembro en la cadena cinemática, en contra de las ideas admitidas hasta ahora, segun las cuales se consideraba como estando totalmente fuera de la máquina propiamente dicha.

§ 134

Máquinas motrices y máquinas de trabajo.

Ahora nos hallamos en el caso de responder á la cuestion suscitada en el párrafo 129 y determinar si la máquina de vapor, la rueda hidráulica y la turbina, así como las máquinas de tornear, rebajar ó acepillar,

la máquina de hilar, la grua, etc., deben conceptuarse ó nó en sí mismas como máquinas completas.

Por lo que atañe á las tres primeras podemos contestar inmediatamente *que son máquinas completas;* pertenecen cabalmente á la clase de las máquinas de traslacion ó desplace, que por medio de un encadenamiento cinemático conveniente pueden dar á sus propios órganos un movimiento determinado, susceptible de utilizarse para el objeto que se quiera. Una máquina de vapor, por ejemplo, puede emplearse para mover máquinas de índole estremadamente variada sin exigir la menor modificacion en su modo de actuar. La locomóvil puede servir como ejemplo de la estremada variedad de objetos á que puede aplicarse la máquina de vapor. En el sitio del motor de una fábrica, siempre puede instalarse otro sin ningun cambio en las máquinas puestas en movimiento, con la sola condicion de que el nuevo motor se halle en estado de poder comunicar á la trasmision general el mismo trabajo y la misma velocidad que el anterior. En otros términos, el objeto de la máquina en tal caso se reduce á dar á un miembro de la cadena cinemática un movimiento de rotacion ó hacer sufrir á los diferentes puntos de ese miembro traslaciones ó desplaces sobre líneas circulares. Por consiguiente, tratando las máquinas motrices ó los motores como máquinas completas en sí mismas, se ve que se hace una cosa no solo conveniente para la práctica sino tambien perfectamente correcta en la teoria.

Por lo que toca al torno, la máquina de acepillar el metal y la máquina hilandera, la respuesta parece ser algo ménos fácil. Supongamos que esas tres máquinas están dispuestas de modo que reciban su movimiento por correa y que al efecto estén provistas de las poleas convenientes. Podemos, sin duda, decir que esas máquinas son completas desde el momento en que las correas se hallan colocadas sobre las poleas con tensiones suficientes. Por otra parte es de todo punto indiferente bajo el concepto del encadenamiento cinemático y de la accion de cada máquina, que la cadena correspondiente sea sin fin ó nó, que esté puesta en movimiento por medio de pesas ó por la fuerza muscular (como con la cuerda de nudos de *Berthelot*, fig. 406, y en la escala flexible be *Borgnis*, fig. 407), ó en fin, por mediacion de un árbol trasmisor. En cada caso la correa es realmente el *motor* de la máquina, como el vapor lo es en la máquina de vapor. Así tambien en este último caso es indiferente que el vapor motor provenga directamente de una caldera ó que sea proporcionado, como vapor de escape, por otra máquina que trabaje á presion alta (como conviene á veces), así como tambien es indiferente que la correa se ponga en movimiento por uno ú otro medio: en todo caso el vapor es el motor de la máquina.

En la industria de las minas y para los trabajos de perforacion de túneles están hoy en uso máquinas motrices cuyo órgano motor es aire comprimido, suministrado por bombas de aire hidráulicas (como en el túnel del Mont Cenis) ó por medio de bombas que el vapor hace mover. Estas máquinas son indudablemente completas desde el momento en que se encuentran provistas de la cantidad necesaria de su motor gaseoso, el cual es una columna de aire contenido en tubos y puesto á su vez en movimiento por otra máquina motriz. Esa columna de aire comprendida entre las dos máquinas se halla precisamente en la misma posicion que la correa entre la máquina de vapor y un torno ú otra máquina á la que haga mover. Nuestras anteriores investigaciones nos han demostrado (§ 44) que tales casos no son simplemente análogos, sino esencialmente idénticos.

Como por otra parte es por completo indiferente que de dos máquinas que se siguen así, la segunda sea una máquina motriz como la primera, ó una máquina destinada á efectuar directamente un trabajo mecánico, resulta que *las máquinas de que antes ha sido cuestion, tomadas con su correa de trasmision son tambien máquinas completas*. La misma conclusion se aplica igualmente á las bombas (que son simplemente máquinas de cambio de lugar), á los telares mecánicos, á las sierras (que á la vez son máquinas de cambio de forma y de lugar), etc.; y de una manera general es aplicable á todas las máquinas dispuestas para ponerse en movimiento con máquinas motrices. Estas máquinas son, como vemos, las que se designan muy convenientemente con el nombre colectivo de máquinas de trabajo, ó como máquinas útiles, y que se consideran con razon como máquinas independientes. Así se encuentra justificada por razones rigurosamente teóricas la opinion de los constructores que desde mucho tiempo consideraban esos dispositivos como constituyendo máquinas completas, hallándose, por tanto, en oposicion con los conceptos de los teóricos de la antigua escuela.

Ahora debemos considerar las máquinas de trabajo puestas en movimiento por fuerzas animadas. Antes hemos visto que en esas máquinas el cuerpo del hombre ó del animal forma con el mecanismo dado un encadenamiento cinemático muy complicado á veces. Esa complicacion especial dimana de la parte orgánica de la cadena, puesto que la produccion de los movimientos necesarios en los miembros de esa cadena exige

una concordancia particular entre las acciones de las fuerzas interiores, puestas en juego por la voluntad. Si observamos ahora que en los ejemplos citados, la piedra de afilar dotada de pedal, la grua, etc., lo mismo que en la rueda de escala; la bomba de mano, la noria movida por una caballería, etc., el mecanismo que debe ponerse en movimiento por la fuerza muscular pertenece á una cadena cinemática cerrada, vemos que la relacion entre el sér orgánico motor y la máquina inorgánica es *precisamente la misma que la existente entre una máquina motriz y la máquina que mueve.* El sér animado, pues, debe conceptuarse como una máquina motriz susceptible de utilizarse para mover convenientemente una máquina operadora, merced al movimiento que puede tener una cualquiera de sus partes, el brazo, la mano, el pié, etc. Con frecuencia se ha comparado la locomotora á un caballo y se ha designado con el nombre de caballo de vapor. Podemos invertir la comparacion y considerar el caballo enganchado á un malacate (fig. 408) como la locomotora de ese mecanismo. Verdaderamente en tal caso el caballo no efectua directamente otro trabajo que el de moverse venciendo cierta resistencia. Lo mismo sucede con respecto al hombre en la rueda de escala ó en la escala de *Borgnis*; en ambos casos el hombre encaramándose por los peldaños ó escalones, no hace más que elevar constantemente su propio peso. Su intervencion en el procedimiento de trabajo consiste entonces en un esfuerzo meramente físico y de ningun modo pone en juego su inteligencia; ninguna necesidad tiene de conocer el producto que debe dar la máquina para llenar la tarea que le incumbe y que en definitiva podria llenar tambien un motor inanimado que diese el movimiento á esa misma máquina.

Por consiguiente, *las máquinas movidas por el hombre ó los animales pueden considerarse tambien como máquinas completas, desde el momento que llenan la condicion de formar por sí mismas cadenas cinemáticas cerradas, y no es necesario distinguirlas de las máquinas puestas en movimiento por otras fuerzas naturales.*

Preséntase aquí una importante cuestion que hasta la actualidad no se habia comprendido en la teoria de las máquinas, por mas que hubiese todo el derecho para ello. Esa cuestion es la que se refiere al concurso de la fuerza animal y especialmente de la mano del hombre en el trabajo *productivo* de una máquina. Desde el momento en que la ciencia de las máquinas estudia de una manera tan completa las propiedades del sér animado que consideramos como motor ó como máquina motriz, parece indudable que no habria debido pasar por alto la accion maquinal de la mano del hombre en la preparacion del producto de la máquina, ó en otros términos, *que habria debido igualmente estudiar al hombre como máquina de trabajo.* No abrigamos la pretension de reparar por completo esa omision de la ciencia de las máquinas; pero nos parece útil dejar aquí sentados ciertos principios generales que nos permitan sacar legítimas consecuencias con respecto á las máquinas en que el hombre interviene como cooperador para la trasformacion de la pieza de obra.

En algunas máquinas el concurso de la mano del hombre es esencial para la confeccion del producto definitivo. Tal es el caso, por ejemplo, para el huso á la mano; la hiladora es la que ejecuta y regula una parte importante del cambio de forma que deben sufrir las fibras de la materia textil. Su mano se agrega en tal caso como órgano al mecanismo, formando un encadenamiento cinemático muy complicado, cuyos movimientos están dirigidos por su voluntad. Así pues, nos hallamos aquí en presencia de un procedimiento que por su índole es enteramente análogo al de que antes ha sido cuestion por lo que toca á la piedra de afilar. En el torno de hilar en que el movimiento es debido al pié, la accion maquinal del sér animado es doble. Por otra parte la rueda de afilar es otro ejemplo de la doble accion del hombre en una máquina inanimada.

Exactamente lo mismo podemos decir de la máquina de coser. En algunas de las disposiciones de esa máquina, una de las manos de la obrera mueve el mecanismo, en tanto que la otra guia la tela; en otras por el contrario, y es el caso más comun, el mecanismo se pone en movimiento por esfuerzo de los piés, y ambas manos están ocupadas en dirigir la pieza que se cose, ocupacion que es á veces bastante complicada.

En el acto de afilar las agujas en la piedra ó rueda, la accion del obrero es en realidad una accion enteramente maquinal. Colocado delante de la piedra á la cual no tiene que dar el movimiento rotatorio, pasa por su superficie alternativamente en ambos sentidos, las agujas reunidas en paquetes, procurando hacerlas rodar con regularidad entre el pulgar y los dos dedos siguientes, de manera que logre darles finalmente en la punta la forma cónica que presentan en el comercio, y que es precisamente la forma-envoltura del movimiento que describen con respecto á la superficie cilíndrica de la piedra.

En las fábricas de agujas de reciente instalacion el concurso del obrero para la operacion maquinal de afilar se encuentra notablemente reducida; el movimiento de arrastre y rotacion de las agujas se obtiene en efecto por medio de un mecanismo particular, en el que

la piedra aguzadora presenta por sí misma la forma envoltura correspondiente á la que debe tener la punta de cada aguja. Así tambien las máquinas de coser, para gran número de trabajos, están dotadas de mecanismos inanimados que deben dar el movimiento y dirigir las piezas de coser. Por último, á consecuencia de prolongados y profundos estudios los constructores de máquinas han alcanzado reemplazar la accion de la hiladora con la de la máquina de hilar. Más no por ello deja de ser cierto que la piedra de afilar, la máquina de coser y el huso á mano deben conceptuarse *máquinas completas por sí solas*. Esas tres máquinas pueden servir para ejecutar trabajos definidos sin intervencion de la mano del hombre. La piedra puede pulir piezas cilíndricas, la máquina de coser puede hacer costuras rectas, y por fin, el huso permite torcer y arrollar los hilos que se le presenten en forma de mechas. El hombre no hace más que añadir á la accion de la máquina dada la que le es propia, esto es, la accion de una verdadera máquina operadora dirigida por la voluntad; esas dos máquinas reunidas permiten naturalmente obtener en el trabajo mucha más variedad que con la máquina inanimada actuando sola.

§ 135

Subdivisiones principales de las máquinas completas. Análisis descriptivo.

La discusion á que nos hemos consagrado en los párrafos anteriores, nos demuestra que era imposible conservar por más tiempo la subdivision de la máquina completa en receptor, comunicador y útil, tal como se habia admitido hasta el dia. Con efecto, hemos visto que existe una série de casos en que falta á lo ménos uno de esos elementos, lo cual quita á esa subdivision todo carácter de generalidad, y que por otra parte hemos de volver al fin y al cabo al principio abstracto de la cadena cinemática cerrada, que permanece en vigor siempre y sin escepcion ninguna. No se puede además disimular que al encontrarnos en presencia de una máquina dada, esa abstraccion con su carácter de claridad y vigor, tiene algo que es poco satisfactorio, y hasta podria decirse ingrato, y que no parece especialmente á propósito para suministrar al mecánico práctico un recurso tan eficaz como podria convenirle. Es sin duda cosa muy importante saber ya, que en un caso cualquiera, sea cual fuere su complicacion, se tiene en pos de sí una ley rigurosamente general, y poder esplicar inmediatamente el mal éxito de ciertas combinaciones por el hecho de una violacion de esa misma ley, es decir, por la falta de la clausura de la cadena. Queda, sin embargo, el derecho muy natural de trasponer el principio general de la constitucion de las máquinas y determinar á lo ménos las grandes líneas del desarrollo y de la aplicacion de ese principio. Bajo este último punto de vista las tres categorias de la antigua teoria han sido verdaderamente de alguna utilidad, por más que el exámen crítico que de ellas hemos hecho, no tuviese por objeto satisfacer ese deseo. Debíamos ante todo comenzar por despejar completamente el terreno, á fin de hallarnos en disposicion de trazar enseguida la verdadera senda que ha de seguirse para salir con toda seguridad al encuentro de las necesidades de la práctica. En la actualidad hemos avanzado realmente bastante para poder fijar las diferencias características de ciertas partes, ó de ciertos grupos de partes, que se presentan claramente á nuestra vista como efectuando funciones bien definidas en la máquina.

Ante todo resulta del exámen crítico al cual nos hemos dedicado, que aparecen claramente dos elementos como formando parte de la gran mayoria de las máquinas, aunque hasta ahora se hayan considerado en general como hallándose fuera de ellas; nos referimos al *motor* y á la *pieza de obra*. En la máquina de vapor reconocemos inmediatamente como motor la columna de vapor de presion; la pieza de obra se deja distinguir ménos fácilmente, toda vez que segun los casos, consideramos como tal el árbol del volante ó una rueda dentada sujeta á ese árbol, ó bien una polea montada sobre ese mismo árbol. En cambio, la pieza de obra se vé inmediatamente en el torno, mientras que el motor es más difícil de apreciar. De una manera general el motor es el más fácil de conocer en las máquinas motrices, mientras que en las máquinas de trabajo es la pieza de obra. Esa es, por lo demás, una circunstancia que se halla claramente evidenciada en las denominaciones habituales de las diferentes máquinas. Así, por ejemplo, se encuentra en las primeras la máquinas *de vapor*, las máquinas *de gas*, la *rueda hidráulica*, la máquina *de columna de agua*, etc., y en las segundas la máquina *de hacer papel*, la máquina *de roblar*, etcétera. Puede incidentalmente notarse aquí que la práctica comprendia de ese modo el motor y la pieza de obra entre los elementos de la máquina, contra la teoria en boga que los consideraba fuera.

Debemos igualmente conceptuar como parte esencial de la máquina, ó más exactamente hablando, como grupo de partes esencial, el mecanismo en virtud del cual se realiza en el motor ó en la pieza de obra, el cambio de forma ó de lugar, ó bien los dos cambios á

la vez. Así es, por ejemplo, como distinguimos la máquina de vapor *de émbolo*, de la *rueda de reaccion* de vapor, la rueda hidráulica *con alabes*, de la *turbina*, el batan *de cilindros*, del batan *de mazos*, etc. Designaremos con el nombre de *mecanismo principal* de la máquina el mecanismo que desempeña esa importante funcion. Los ejemplos que acabamos de citar demuestran igualmente aquí que la práctica atribuye realmente un valor particular al destino de ese mecanismo; viéndose además que el establecimiento de la generalizacion anterior conduce directamente á esa distincion especial.

Con el concepto del mecanismo principal de una máquina y su determinacion rigurosa nos hallamos en presencia de una cuestion que la antigua teoria pretendia resolver valiéndose de las nociones del *receptor* y del *útil*. Uno ú otro de ambos se encuentra siempre en el mecanismo principal, ó bien los dos, cuando verdaderamente existen en las máquinas, y entonces es fácil ponerlos en evidencia, si se quiere.

Nos creemos además en el deber de hacer notar que de una manera general el mecánico práctico nunca se ha preocupado mucho hasta ahora de llegar á una determinacion exacta del receptor, en tanto que ha tenido inmediatamente idea de lo que acabamos de distinguir con el nombre de mecanismo principal, así que el nombre que indica la especie de una máquina se ha pronunciado delante de él. Ahí, pues, se ve una razon más del porqué nos esforzábamos en determinar claramente lo que encierra esa nueva nocion teórica.

En nuestra máquina de vapor ordinaria de manubrio el mecanismo principal es un trinqueteo ó movimiento de vaiven, constituido por el émbolo, la cápsula, con los dispositivos de obturacion, y por el mecanismo de manubrio de impulso $(C''_3 P^{-1})\frac{d}{c}$. En la grua ordinaria de los muelles el mecanismo principal es un mecanismo contínuo formado de una cadena, de un tambor y de una série de engranajes. En ciertas máquinas de peinar está constituido por un acoplo de cilindros de peines, con el mecanismo que los pone en movimiento; en la hilandera selfacting se compone de cilindros estiradores y del huso con los mecanismos de movimiento correspondientes, etc.

En otro gran número de máquinas se encuentra, como en las anteriores, que el mecanismo principal se compone de varias partes ó bien que varios mecanismos principales se hallan reunidos para entrar sucesivamente en accion uno tras otro. En ciertos casos es periódica esa accion, y hasta á veces cuando el mecanismo principal es sencillo, se efectua una *série periódica de fases de movimiento* reguladas por un mecanismo particular. Los mecanismos de ese género pueden estimarse como constituyentes de un grupo especial de órganos. Forman lo que en varias máquinas se denomina ya *la distribucion*, nombre que puede adoptarse para todas las máquinas que tienen mecanismos de la misma especie. Segun esto, *la distribucion* ó *el distribuidor* será para nosotros el conjunto de dispositivos que obligan los *movimientos de una máquina* á sucederse en un órden determinado.

En la máquina de vapor que acabamos de mencionar, la distribucion está constituida por el mecanismo muy conocido que produce en los momentos debidos la abertura y el cierre de la admision y del escape (a).

En la máquina de acepillar puesta en movimiento por mediacion de una cremallera, el mecanismo de distribucion determina el cambio periódico de direccion en la marcha de la tabla que ha de acepillarse. En la máquina de hilar el distribuidor es un mecanismo muy complicado, que conforme lo espresó *Stamm* teóricamente por vez primera (b), produce la sucesion de los diversos movimientos que respectivamente se designan con los nombres de *salida*, *torsion*, *despuntaje* y *revaciado*.

En el mecanismo de distribucion se encuentra con mucha frecuencia una disposicion especial que tiene por objeto someter con regularidad á la accion de la máquina nuevas porciones de la materia destinada á formar la pieza de obra. En las cardas de lana ese resultado se obtiene por medio de una tela sin fin y de un cilindro de alimentacion; en las máquinas de preparar el algodon la materia bruta es conducida por medio de peines ó de cilindros armados de puntas; en los molinos se usan á veces cilindros estriados para distribuir con regularidad el grano por las muelas; en la máquina de aguzar las agujas la alimentacion se hace por medio de una rueda dotada de muescas. En varias máquinas existen igualmente dispositivos del mismo género destinados á poner contínuamente en accion nuevas porciones del motor. Todos esos mecanismos pueden comprenderse bajo la designacion comun de *mecanismos de alimentacion*. Bajo esa misma denominacion comprendemos naturalmente tambien los dispositivos usados para producir la traslacion del útil, en las máquinas de acepillar, tornear, taladrar, et-

(a) Belidor, *Arch. hydraulique*, 1729, tomo II, pág. 241, llama «regulador» el mecanismo de distribucion en las máquinas de vapor y de columna de agua.

(a) V. Stamm, *Tratado teórico de las máquinas de hilar automáticas*, Paris, 1861.

cétera, así como aquellas á que se recurre para alimentar las calderas de vapor.

Con bastante frecuencia se encuentra otro dispositivo de trasporte que está destinado á llenar una funcion enteramente opuesta á la de la alimentacion, es decir, que tiene por objeto llevarse fuera de la máquina operatriz la pieza de obra cuando ésta ha terminado. Los dispositivos de ese género pueden denominarse de una manera general con el nombre de *mecanismos de estraccion* ó de *mecanismos abductores;* y como ejemplos pueden citarse: en la máquina de hacer ladrillos la tela sin fin que se lleva los productos fabricados; en la carda, el tambor abductor que arrastra la lana preparada, y en los dispositivos más recientes de esa última máquina, otro tambor de construccion muy complicada que aleja los resíduos de lo que se llama los sombreros; en las máquinas de fabricar roblones el mecanismo especial que saca afuera los roblones preparados, etc. La alimentacion y la abduccion constituyen, pues, en cierto modo puertas de entrada y salida para la máquina. La materia bruta entra en el mecanismo por la primera, y sale por la segunda en el estado de producto fabricado. Fácil es comprender que esencialmente en las máquinas de trabajo la construccion de los dispositivos de abduccion ha llegado á su completo desarrollo.

A la par de los mecanismos de distribucion encontramos en gran número de máquinas completas otra especie de mecanismos de un carácter especial, que sirven para regular la introduccion de la sustancia motriz ó bien de la materia destinada á formar la pieza de obra, es decir, que tienen por objeto regular, *segun las necesidades, la cantidad de materia introducida ó exportada en la unidad de tiempo.* Pueden designarse tales mecanismos con el nombre de *aparatos de regulacion* ó *reguladores*. En tanto que el distributor determina el órden en que se suceden los movimientos en la máquina, el regulador interviene para regular su *cantidad.* Numerosos ejemplos encontramos de dispositivos de esa última clase en los reguladores propiamente dichos de las máquinas motrices, que están destinados á regular el movimiento ó la introduccion del órgano motor, y por ende á regularizar la velocidad de toda la máquina. Las formas bajo las cuales se utilizan esos mecanismos en las máquinas de vapor, las ruedas hidráulicas, las turbinas, etc., son variadas en estremo. En la máquina de vapor de *Cornouailles*, el regulador está constituido por lo que se llama la catarata; en los aparatos de relojeria, los reguladores son los escapes entre los cuales se distinguen los escapes libres, de reposo, de retroceso, de áncora, etc. Existen tambien aparatos de regulacion en cierto número de máquinas de trabajo ó máquinas-útiles; así, por ejemplo, en el telar mecánico el movimiento progresivo del urdimbre, es decir, de la pieza de obra, está regulado por un mecanismo que lleva cabalmente el nombre de regulador; en la máquina del papel el movimiento de la pasta está regularizado por un aparato del mismo género; en los conductos de aire, vapor, gas, etc., el curso de esos fluidos se hace uniforme con el empleo de reguladores de presion, que dan por resultado mantener á una proporcion determinada la presion del fluido, etcétera.

A veces es necesario, máxime en las máquinas operadoras, que el regulador pueda cuando convenga, suspender completamente la accion del motor; tal, por ejemplo, es el caso en que son de temer grandes irregularidades en el trabajo de la máquina. El aparato de regulacion actua entonces en condiciones particulares y conviene darle el nombre de *mecanismo de paro.* Entre las numerosas formas que afectan los mecanismos de esa especie, pueden citarse: el dispositivo que en el telar hace pasar la máquina al reposo cuando la hebra de la trama no ha pasado; el dispositivo que en las máquinas de hilar para el mecanismo cuando se rompe uno de los hilos; los dispositivos de las máquinas elevatorias hidráulicas del aceite, etc. La distribucion y la regulacion suelen presentarse en conexion íntima; tal es, por ejemplo, el caso para gran número de máquinas de motor modernas, en que el regulador actua directamente sobre el distributor y así influye en el movimiento del órgano motor de la máquina; si bien que aun en este caso es posible considerarlos separadamente. En las máquinas que están dotadas de aparatos de regulacion y distribucion, existen además con rarísimas escepciones órganos especiales destinados á trasmitirles el movimiento; órganos que constituyen lo que puede llamarse *mecanismo de trasmision* de la máquina. Un mecanismo de ese género suele tambien encontrarse intercalado entre una máquina motriz y la máquina útil que pone en movimiento.

En suma, dando de mano á varios otros mecanismos auxiliares de la máquina completa que en rigor podrian clasificarse separadamente, pero que en su mayor parte pueden tambien agregarse sin dificultades al uno ó al otro de los grupos que hemos examinado, vemos que en un gran número de casos, á más del *motor* y la *pieza de obra* se separan claramente como mecanismos distintos:

a. El *mecanismo principal* en el que puede hallarse el *receptor* y el *útil;*

b. La *distribucion* con sus subdivisiones, *alimentacion* y *abduccion;*

c. La *regulacion*, con su subdivision, *mecanismo de paro;*

d. El *mecanismo de trasmision*, ó la *trasmision*.

Esa clasificacion que, conforme se ve, comprende las funciones generales de los mecanismos reunidos en una máquina, constituye lo que llamaremos el análisis descriptivo de la máquina.

Bajo el punto de vista del *conjunto de los efectos* que debe producir una máquina, la division en dos clases de que antes se ha tratado, máquinas de cambio de forma y máquinas de cambio de lugar, puede prestar grandes servicios, mayormente en los casos en que los cambios afectan á la pieza de obra: tiene una importancia mucho más práctica cuando esos cambios se refieren al motor (§ 132). Así pues, esa division puede utilizarse con ventaja en la ciencia de las máquinas; si bien no debe perderse de vista que no constituye una division esencial, de forma que no siempre es posible decir con certeza si una máquina dada pertenece á la una ó á la otra de las dos clases. Por otra parte, en cada caso particular el mecanismo principal es un guia indispensable para esa clasificacion, y ese es un motivo más para investigar lo que caracteriza este mecanismo.

Esa clasificacion, limitada así á su objeto especial, no constituye en el fondo una idea completamente nueva; propiamente hablando no es más que el desarrollo sistemático bajo una forma determinada, de un método de que se ha usado ya cuando menester ha sido, en la mecánica práctica. Fácil seria en efecto demostrar que para la esplicacion de cierto número de máquinas, algunos se han colocado bajo un punto de vista que se parece mucho al nuestro. De una manera general nos parece muy de desear que en la descripcion de una máquina, se reserve siempre el primer puesto al análisis descriptivo tal como lo acabamos de indicar. El análisis completo ó abstracto que tiene por objeto el exámen de los mecanismos en todos sus detalles, no debe venir hasta despues. En gran número de casos este último análisis déjase completamente á un lado; y así debe hacerse, por ejemplo, cuando los diferentes mecanismos que componen una máquina han sido estudiados y son por lo tanto conocidos.

Antes de pasar adelante debemos presentar aquí en forma de resúmen dos observaciones bastante importantes; en primer lugar las subdivisiones que hemos establecido no tienen ni deben tener un carácter absoluto, es decir, los diversos mecanismos que les corresponden, no se encuentran necesariamente todos en cada máquina completa; y en segundo lugar, puede accidentalmente ocurrir, conforme hemos dicho, que ciertas disposiciones establecidas en una máquina en atencion á ciertas exigencias particulares, no entren exactamente en esas mismas subdivisiones.

§ 136

Ejemplos de análisis descriptivo de máquinas completas.

Conviene dar ahora algunos ejemplos de análisis descriptivo á fin de poder demostrar más exactamente en qué consiste en cada caso particular, y decir hasta qué punto se estienden las conclusiones que puedan sacarse. Tomaremos ante todo como ejemplos algunas máquinas motrices.

Rueda hidráulica.—Una rueda, llamada de *lado*, con destino á dar movimiento á un taller, tiene por mecanismo principal uno cuya fórmula es $(C'Cz\lambda V\lambda)\frac{c}{b}$ (Véase § 62) y que se compone de una rueda dentada y de un órgano de presion líquido, que desempeña el papel de una cremallera. Este órgano mueve la rueda y encuentra su guia (el canal) en la armadura misma de esta rueda. Como el movimiento producido es contínuo, el mecanismo principal pertenece á la clase de los mecanismos contínuos; el motor es el órgano de presion, el agua. No existe dispositivo alguno de distribucion ó de alimentacion. La alimentacion de la rueda es el resultado de una operacion física ó meteorológica, que suministra contínuamente nuevas porciones de fluido motor, sin ninguna cooperacion de la máquina. En cuanto al regulador, cuando existe, está generalmente dispuesto de manera que obra sobre la compuerta de introduccion del agua.

Turbina Jonval.—El mecanismo principal es aquí un mecanismo de tornillo, en el que la tuerca está representada por el agua que constituye el motor de la máquina. No tiene distribuidor, pero puede tener un regulador, como en la rueda hidráulica. Puede igualmente emplearse un aparato de paro, como por ejemplo, en las turbinas instaladas junto al Rhin, cerca de Schaffouse, en las que cuando ocurre la rotura del cable destinado á trasmitir la fuerza á la orilla opuesta, el regulador mismo cierra bruscamente la compuerta de admision del agua.

Máquina de vapor. Consideremos una máquina de vapor de alta presion, tal como la que está representada esquemáticamente con la figura 409. Fuera del

mecanismo principal aquí encontramos un regulador y un distribuidor. El motor es la columna vaporosa, á la vez que la pieza de obra es el árbol del volante. A es el mecanismo principal (en forma de cilindro dotado de canales de admision y de salida, con émbolo, biela, manubrio, eje, traviesa y armadura); es un trinqueteo de movimiento retrógrado y de doble efecto (§ 126), formado del mecanismo $(C''_3P^{\perp})\frac{d}{c}$ y del cajon ó placa de distribucion, el vapor hace las veces de trinquete, y el émbolo, el de pieza de escape (son respectivamente los miembros *a* y *c* de las figuras 401 y 404). B es la distribucion que consiste en un mecanismo $(C''_3P^{\perp})\frac{d}{a}$, constituido por un escéntrico, un vástago de escéntrico, otro vástago de cajon ó placa y una armadura. Ese mecanismo mueve la placa de distribucion, que á su vez está constituida por la combinacion de cuatro obturadores, que corresponden á los cuatro trinquetes que exige el trinqueteo de doble efecto de que hemos hecho mencion poco há. En la máquina de vapor de *Corliss* y en las análogas se ha vuelto, como sabemos, al empleo de cuatro obturadores completamente separados. C es el mecanismo de regulacion, que comprende el regulador de péndulo cónico (cuya composicion cinemática no indicamos aquí) y la válvula de garganta, con las piezas accesorias que constituyen los órganos de trasmision de movimiento y los soportes.

La bomba alimenticia D exige especial mencion. Puede en rigor considerarse como formando por sí sola una maquina que recibe su movimiento de la máquina de vapor; pero si suponemos que á esta última máquina corresponde una caldera que le esté especialmente afectada, podemos tambien conceptuar la bomba como parte esencial del conjunto de la máquina de vapor. Entonces constituye esa subdivision del distribuidor que hemos denominado la alimentacion. El dispositivo de alimentacion es en tal caso un trinqueteo directo y de simple efecto que se compone del mecanismo $(C''_3P^{\perp})\frac{d}{a}$, así como de las válvulas de aspiracion é impulsion que representan los trinquetes de paro y de impulso. Estas válvulas suben y bajan alternativamente en tiempo oportuno bajo la influencia del fluido del movimiento, el agua. Por lo tanto aquí nos hallamos en presencia de un segundo trinqueteo que no se diferencia del que forma el mecanismo principal sino en ser de simple efecto y no tener distribucion. Sin embargo, podríamos suponer que la tiene, y para ello bastaria imaginar la bomba de alimentacion provista de un cajon ó placa movida por un escéntrico. En ese caso tendríamos una disposicion notable, en la que el mecanismo principal seria un trinqueteo de movimiento inverso y el mecanismo *de alimentacion* un trinqueteo de movimiento directo, estando ambos dotados de convenientes dispositivos de distribucion. Más el primero seria de doble efecto con un órgano de presion gaseoso, mientras que el segundo seria de simple efecto con un órgano de presion líquido. Pero semejantes diferencias son de aquellas que podemos pasar por alto. Aquí se plantea la cuestion de saber por qué de los dos trinqueteos es inverso el uno y directo el otro, por más que los dos estén relacionados con la misma columna de presion (la de la caldera). Puede aun preguntarse de una manera más general cuales son las condiciones que hacen un trinqueteo de distribucion directo ó inverso. La respuesta á esa última pregunta es muy sencilla. *El trinqueteo es directo cuando el esfuerzo ejercido en el sentido directo es superior á la resistencia, y es inverso en el caso contrario.* El mecanismo principal (émbolo y órganos accesorios), considerado como trinqueteo es de movimiento inverso, porque la fuerza ejercida por el vapor obra en direccion opuesta al sentido directo del trinqueteo, y es superior á la resistencia trasmitida por el manubrio, y por el contrario el trinqueteo de la bomba es de movimiento directo, porque el esfuerzo motor sobre el manubrio de esa bomba (el escéntrico *a''*) es superior á la resistencia que sufre el émbolo (a). Si en momento dado la resistencia trasmitida á la biela por el manubrio fuese superior al esfuerzo practicado en sentido contrario por el vapor sobre el émbolo, la máquina debiera girar en sentido contrario, es decir el trinqueteo que representa el mecanismo principal vendria á ser directo; el émbolo impeleria entonces á la caldera primero el vapor contenido en el cilindro y luego el aire aspirado por el tubo que antes servia para el escape. Frecuentes ejemplos de esa inversion se encuentran en las locomotoras y particularmente en la marcha á contra vapor.

Como quiera que la distribucion da, segun vemos, al trinqueteo la propiedad de funcionar en un sentido ó en otro, conforme á la relacion que existe entre las fuerzas agentes del mecanismo, le da por lo tanto esa movilidad que tiene ya el mecanismo de movimiento contínuo sin adicion de otro órgano. La distribucion tiene, pues, por resultado quitar al trinqueteo la propiedad de ser monocinemática (vease § 41) y hacer desaparecer por consiguiente una de las diferencias que

(a) Nos reservamos tratar más completamente en otra ocasion esa cuestion interesante y otras que se relacionan directamente con ella.

existen entre ese mecanismo y el de movimimiento contínuo.

El paro de la máquina se consigue interrumpiendo la llegada del vapor por el cierre de la válvula de admision E. Esa válvula forma con los accesorios que le corresponden, un mecanismo particular, dispuesto para ser maniobrado á la mano.

Es el aparato del paro de la máquina, y por este motivo forma parte de la regulacion. Pasando por alto los órganos accesorios, tales como los grifos de engrasacion, clavetes de fijacion, etc., hallamos que en definitiva nuestra máquina de vapor encierra: 1 mecanismo principal, 1 de distribucion, 1 de alimentacion, 1 regulador automático y 1 regulador de mano, total 5 mecanismos.

Pasaremos ahora á las máquinas operadoras y ante todo consideraremos una *grua de muelle* ordinaria, con plataforma giratoria. En esa máquina hallamos inmediatamente dos mecanismos principales, que pueden ponerse en movimiento á la mano independientemente uno de otro, á saber: el tren de ruedas dentadas con el tambor de polea y las cadenas guias para elevacion de la carga, y luego un mecanismo de ruedas para la rotacion de la plataforma en torno de su eje. La máquina no tiene distribucion, sino un simple mecanismo regulador que se ostenta en forma de freno, y permite bajar despacio la carga levantada. Tiene además un mecanismo de paro que está destinado á impedir todo descenso intempestivo de la carga, y que por consiguiente pertenece á la regulacion, siendo por otra parte automático y hallándose en conexion con el mecanismo principal.

El *péndulo mural de campanil* tiene igualmente dos mecanismos principales, el uno para el movimiento de las agujas, y el otro para el movimiento del aparato del campanil. Ambos mecanismos suelen tener un motor especial cada uno bajo la forma de cuerdas ó poleas móviles, cargadas con una pesa: con todo existe entre ellos íntima trabazon cinemática. El mecanismo para el movimiento de las agujas, es un mecanismo de ruedas compuesto, cuyo movimiento va dirigido por un regulador, que es un escape de péndulo. Hemos visto en el párrafo 121 que los escapes en los aparatos de relojeria son trinqueteos que obran por destrabamiento periódico de los trinquetes. La rueda del campanil con el correspondiente dispositivo de palanca, constituye la distribucion de la máquina. Merced á esa distribucion la série de los movimientos en una rotacion completa de la rueda de las horas, se halla regulada de manera tal, que despues de cada rotacion de un dozavo de vuelta el martillo da un golpe en la campana ó el timbre (para las medias horas), mientras que el número de los golpes dados en medio de esos intérvalos para las horas, va creciendo en proporcion aritmética de 1 á 12. Puesta en movimiento por el mecanismo de las agujas la distribucion produce periódicamente en el mecanismo del campanil el destrabamiento de un trinquete y pone por lo mismo en accion el mecanismo del martillo. Para que éste pueda actuar de una manera uniforme, el campanil está dotado de un regulador especial que se presenta comunmente bajo la forma de un volante de aletas. Los tambores para las cuerdas motrices se hallan unidos á sus ejes por mediacion de ruedas de escape, de suerte que se les pueda dar á la mano un movimiento retrógrado y volver á arrollar así las cuerdas ó cadenas de las pesas motoras que han bajado, para permitirles obrar de nuevo.

En realidad esas ruedas de escape no son más que mecanismos auxiliares que tienen por objeto permitir la alimentacion de la máquina en fuerza motriz. A más de esas piezas hay una palanca que se maniobra á la mano y por medio de la cual se puede, cuando se quiere, poner en accion el mecanismo del campanil ó detenerle por completo: esa palanca con los órganos correspondientes constituye un mecanismo de distribucion á mano.—En suma, hallamos en el péndulo mural: dos mecanismos principales, dos distribuciones, una automática y otra móvil á la mano, dos dispositivos de alimentacion á mano y dos reguladores; ó sea en total, ocho mecanismos, cinco de los cuales son automáticos.

Una *sierra de hoja*, que pone en movimiento una máquina motriz cualquiera por medio de una trasmision por correa, tiene como mecanismo principal el formado por el manubrio, la biela y el bastidor móvil, mecanismo que tiene por fórmula $(C''_3 P^{\perp})\frac{d}{a}$. La hoja de la sierra, que forma el útil, está fija en la correderita *c*. La masa que debe aserrarse constituye la pieza de obra. Con respecto á esa última pieza, la hoja describe su forma-envoltura, el corte de la sierra, quitando con sus dientes las nuevas partes de materia que se le presentan á cada avance. El movimiento de la pieza de obra necesario al efecto se realiza por medio de un mecanismo de trinqueteo, que está gobernado por el manubrio y que produce un movimiento de avance periódico del carro, en el cual está fija la pieza de obra: este trinqueteo constituye aquí el mecanismo de alimentacion. El regulador se reduce á un simple dispositivo de destrabamiento, que permite al conductor de la máquina hacer pasar la correa por la polea loca.

En el *telar Jacquard* existen dos mecanismos prin-

cipales, el de la lanzadera y el que produce la insercion de la trama. El mecanismo *Jacquard* forma por sí solo una distribucion muy complicada; é igualmente tiene un dispositivo de alimentacion para el movimiento de avance del urdimbre, un regulador (que hemos ya mencionado) para la tension de los hilos del urdimbre, y por último uno ó varios dispositivos de destrabamiento.

El *ariete hidráulico*, que hemos tenido ocasion de mencionar varias veces, se presta fácilmente al análisis descriptivo. El motor es la columna de agua HAB (figura 410), á la vez que la pieza de obra está constituida por la prolongacion DE de la misma columna; entrambas se hallan por lo demás encerradas en capacidades convenientes. El mecanismo principal es un trinqueteo con dos paros ó escapes, formados por las válvulas K y D. No hay distribucion, pero el recipiente de aire R constituye un regulador.

La particularidad que ostenta el ariete hidráulico y que consiste en formar la pieza de obra una porcion del motor, se encuentra igualmente en otras máquinas, como, por ejemplo, en la rueda elevatoria de los chinos, mencionada en el párrafo 48, y otras ruedas elevatorias del mismo género, tales como la noria (§ 49), en las que la máquina consiste en un mecanismo principal, de movimiento contínuo, que funciona sin distribuidor ni regulador. La cadena que forma la base de esas últimas máquinas, se compone únicamente de tres miembros, la rueda, el agua y la armadura con el canal.

En el análisis descriptivo de gran número de máquinas es amenudo posible sin perjudicar la claridad, indicar la máquina motriz como formando un todo, cuando la índole de esa máquina se encuentra conocida y analizada. Así, por ejemplo, en el barco de vapor de ruedas, puede indicarse sumariamente que el mecanismo principal consta de la máquina de vapor (jemela) y de las ruedas de paletas, acopladas con el agua: el timon y el mecanismo de gobernalle constituyen aquí el mecanismo destinado á regular la sucesion de los movimientos, es decir, el distribuidor: rara vez tiene regulador automático, y lo más usual es emplear un dispositivo que se maniobra á la mano y que sirve para producir el paro. En cuanto á la máquina de vapor, considerada en sí misma, posee naturalmente dispositivos de distribucion y alimentacion conforme hemos indicado ya.

Los ejemplos que acabamos de citar, bastan para demostrar de que manera puede aplicarse nuestro análisis y para dar una idea de los resultados que puede proporcionar. En la mayoria de los casos que hemos examinado, la antigua subdivision de la máquina en receptor, comunicador y útil habria sido completamente infructuosa. Basta procurar aplicarla á la máquina de vapor, al reloj y á la máquina de hilar para convencerse de que no puede servir de ningun recurso. De todos modos, los teóricos de la antigua escuela no han intentado jamás aplicar su clasificacion á las máquinas que presentan la menor complicacion.

Antes de terminar debemos señalar especialmente las conclusiones á que nos han conducido los ejemplos citados respecto de la accion de la mano del hombre en las máquinas. Vemos en efecto que en caso conveniente interviene todavia en la distribucion y regulacion, pero rara vez en el mecanismo principal. Por lo demás, á medida que la perfeccion de las diferentes máquinas aumenta, sus mecanismos de distribucion y regulacion tienden más y más á ser automáticos.

Si nos referimos á la historia del desarrollo de las máquinas, podemos afirmar que desde el jóven *Potter* inventando para la máquina de *Newcomen* una primera forma de la distribucion automática, hasta el ingeniero de los barcos de vapor norte-americanos que desde su camarote puede con tres palancas regular los diferentes elementos de la marcha; desde el tornero de principios de este siglo maniobrando á la mano el carro porta-útil, hasta el obrero del torno de revólver, que actuando simplemente sobre un distribuidor consigue ejecutar en la pieza que debe tornearse cinco ó seis operaciones sucesivas, siempre se produce el mismo fenómeno, si bien que en grados diferentes de desarrollo, fenómeno que consiste en la contínua disminucion de la accion directa de la mano del hombre en la máquina, ó si se prefiere, en el aumento de automatismo en la máquina. Ese fenómeno, por lo demás, ha comenzado á producir el orígen de la máquina misma en los tiempos primitivos. Existe en efecto una relacion no interrumpida entre las primeras tentativas del hombre para obligar dos cuerpos colocados uno fuera de otro, á efectuar movimientos relativos determinados, y la produccion mucho más complicada de la industria moderna. Las líneas de ese desarrollo que se ha efectuado bajo el imperio de una sola y misma ley fundamental, poco pronunciada al principio, se acentuan más y más á medida que nos aproximamos á la época actual.

En definitiva, las máquinas que importa considerar como más perfectas y completas, son aquellas en que (conforme hemos observado en el capítulo IV) la accion del hombre no es necesaria sino para poner en marcha é interrumpir el procedimiento maquinal. Generalmente á ese grado de perfeccion ideal tienden las

máquinas y existen algunas que han llegado á conseguirlo poco á poco por completo.

§ 137

Importancia de las máquinas bajo el punto de vista social.

A consecuencia de las últimas observaciones que hemos hecho, nos vemos obligados á dejar por un momento el terreno de nuestras investigaciones especiales y examinar el papel que desempeña la máquina en la vida moderna, abordando así directamente la cuestion candente de nuestra época, la *cuestion obrera*. Sean cuales fueren las dificultades y complicaciones de esa cuestion, nos consideramos en el deber de tratarla aquí utilizando los resultados que nos proporcionan nuestras investigaciones sobre la constitucion de las máquinas, para ayudarnos á formular un juicio acerca de su valor, bajo el punto de vista social.

No es dudoso que la forma actual de la industria en los pueblos civilizados, data de la introduccion de la máquina de vapor. Verdad es que en la antigüedad existian industrias importantes y prósperas, como las de alfareria, vidrieria, tejidos, tintoreria, sin contar las que correspondian á la preparacion de los productos alimenticios; los vasos de Egina y de Atenas, los servicios de mesa saguntinos, los vidrios y tejidos de lana del Egipto, las vestiduras bordadas de Frigia, gozaban de indiscutible fama, lo propio que una infinidad de otros productos que se remontan á dos mil ó más años; pero tambien es verdad que los métodos de produccion eran esencialmente diversos de los que hoy están en uso. Por regla general estaban basados en la subdivision de la poblacion obrera y correspondian á lo que puede titularse la industria á domicilio, tal como se encuentra todavia en la actualidad entre aquellas tribus que no han entrado en la corriente de la civilizacion moderna. Sin embargo, el gérmen de las fábricas propiamente dichas aparece ya en el empleo de los obreros especiales que cada patrono tiende á agregarse en una proporcion siempre creciente, y desde la Edad Media podemos afirmar la fundacion de semejantes establecimientos en muy vasta escala. Instaláronse con preferencia junto á las corrientes de agua, ya en las vertientes de las montañas, de manera que se pudiese disponer de grandes caidas ó saltos de agua, ya en las llanuras, donde la velocidad más suave de la corriente iba compensada con la mayor anchura del cauce. Así fué como los puentes de las ciudades se cubrieron de fábricas que tomaban directamente la fuerza motriz á las corrientes. Sobre todo á últimos del siglo pasado fué cuando esa accion de concentracion se operó con grande energia, y se llegó rápidamente á las vastas dimensiones de las fábricas modernas, donde se encuentran amontonados centenares de obreros y obreras rigurosamente sujetos á un trabajo regular. La cantidad de los productos fabricados ha aumentado en muy grande proporcion, las riquezas naturales se han utilizado mucho mejor, y hasta el cultivo de la tierra ha sacado de ahí un desenvolmiento muy ventajoso. El bienestar y pujanza de las naciones se han aumentado á proporcion, de suerte que los gobiernos han tenido que considerar más y más el desarrollo de la industria como cuestion de primer órden que merecia toda su atencion.

En cuanto á la causa determinante de los grandes resultados obtenidos, creyóse haberla encontrado en el principio de la *division del trabajo*, y con esa idea se llevó la aplicacion de ese principio hasta sus límites extremos.

No obstante, como contraparte de las ventajas conocidas de la organizacion industrial, hubo necesidad de hacer constar poco á poco los inconvenientes que acarrea, y que son la consecuencia inevitable de la aglomeracion en un solo taller de gran número de obreros, del efecto depresivo de un trabajo limitado y siempre igual, dando esto orígen á veces á salarios insuficientes, y en fin, de la supresion más ó ménos completa de la vida de familia. Tales inconvenientes se traducen de vez en cuando por verdaderas crisis, siempre difíciles de resolver, y que por lo mismo llaman la atencion sobre ideas opuestas á las que hasta hoy han dominado. Verdaderamente el economista y el legislador se encuentran enfrente de un mal, cuyo dessarrollo han fomentado ellos mismos creyendo hacer bien; procuran sondear toda su profundidad con la esperanza de llegar á librarnos de él; pero las dificultades parecen aumentar cada dia, y á pesar de su actividad y de su estado próspero, la sociedad moderna no puede librarse de las sombrias preocupaciones de la cuestion obrera.

Si bajo nuestro punto de vista especial estudiamos ahora las trasformaciones que la máquina ha introducido en el trabajo del hombre, podemos afirmar que han seguido dos direcciones principales que nos son muy conocidas y que corresponden la una á la *forma del movimiento*, la otra, á la *fuerza* (§ 51)

En la primera direccion eran posibles variados progresos: algunos fueron ya realizados por la antigüedad; pero especialmente la industria de la Edad Media, es la que nos suministra numerosos ejemplos. Sin embargo, tales progresos están en íntima conexion con el desar-

rollo de la habilidad manual producida á fuerza de un trabajo contínuo. La industria no era á la sazon mas que industria de arte en la gran mayoria de sus manifestaciones. La industria esclusivamente utilitaria, tal como hoy existe, era casi enteramente desconocida, ó á lo ménos, casi no podia considerarse como aislada de la idea del arte. Por eso los antiguos productos de la industria presentan en su mayoria un carácter abiertamente artístico, como se evidencia, por ejemplo, con las obras de cerrajeria, picaportes, mangos, etc., que formaban parte de construcciones de alguna importancia. En particular para las construcciones de ese género la cerradura de la Edad Media no podia concebirse más que como un objeto ricamente decorado, provisto de un complicado mecanismo. Igual carácter artístico predominaba en los muebles, las telas, los vestidos, los relojes, en los instrumentos de matemáticas y de astronomia, y por último, en la mayor parte de los utensilios más usuales.

En cambio hoy se da más importancia á la utilidad, á la conveniencia de la forma: tal es el carácter distintivo de la industria de nuestra época. En las artes plásticas no hemos logrado aventajar á los antiguos, y hasta en ciertas partes hemos quedado bastante inferiores á ellos, para que algunas de sus creaciones constituyan á nuestros ojos un ideal que no nos está permitido alcanzar. Por el contrario, en lo tocante á los productos de utilidad propiamente dichos, los hemos dejado á inmensa distancia detrás de nosotros, resultado que se debe esencialmente á los perfeccionamientos realizados en las máquinas. En esos productos la idea artística se halla subordinada y aun á veces sacrificada á la cuestion de utilidad (á lo menos en apariencia, porque en la mayor parte de las producciones se encuentran ciertos indicios del sentimiento artístico, al cual se ha obedecido sin tener conciencia de ello). La cerradura de precision moderna constituye un mecanismo perfecto en estremo; pero su forma esterior, rigurosamente limitada á lo que es indispensable, es por demás sencilla, y aun á veces se procura ocultar ó disimular. En los muebles, vasos, instrumentos, etc., el lado artístico queda con frecuencia sacrificado, limitándose sobre todo á tenerlos muy simétricos, torneados, ajustados, etcétera, condiciones que son las que permite realizar rigurosamente el trabajo de las máquinas. La introduccion de ese sistema data precisamente del momento en que el descubrimiento de la máquina de vapor vino á dar una importancia inesperada á la segunda de las dos direcciones de desarrollo que acabamos de indicar, la de la fuerza.

Hasta entonces la industria no habia tenido, conforme hemos visto, á su disposicion otras fuerzas motrices que las desarrolladas por el hombre, los animales, los saltos de agua y el viento, fuerzas que por su naturaleza misma son demasiado limitadas y variables ó que no existen mas que en puntos determinados. Con el vapor por el contrario, una fuerza en cierto modo ilimitada se puso á disposicion de la humanidad.

Si de una sola ojeada abarcamos el periodo que trascurrió desde la introduccion de la máquina de vapor, podemos observar que á la abundancia de la nueva fuerza se debe el rápido desenvolvimiento de las máquinas. Por un lado, en efecto, la utilizacion misma de la fuerza se estiende más y más; pues no solo aumentan rápidamente el número y las dimensiones de las máquinas de vapor, sino que tambien á la par se desarrolla la instalacion de las máquinas hidráulicas, por efecto de las mayores facilidades de construccion que encuentra y por otro lado la máquina de vapor permite multiplicar las aplicaciones del movimiento, puesto que ya no se han de sufrir las consecuencias del paro producidas por la falta de fuerza motriz. En suma, una máquina motora, la de vapor, engendra una legion de máquinas de trabajo y viene á ser por lo mismo dueña principal de la situacion. Ahí está el orígen del desarrollo industrial que estamos presenciando y por consiguiente el manantial de las ventajas é inconvenientes que ofrece.

La esplotacion de las minas, en la que desempeña la fuerza un papel tan preponderante, es la primera industria de que se apoderó la máquina de vapor. Utilizada á la vez para los trasportes verticales y los agotamientos, encuentra allí en abundancia el elemento que sirve á su alimentacion, el combustible. La revolucion que ha producido en la esplotacion de las minas es verdaderamente estraordinaria. Allí donde antes no existia más que una sola galeria de escasa profundidad, ni habia otra máquina de agotamiento mas que una rueda hidráulica, á veces insuficiente, y que se hallaba subdividida en una infinidad de concesionarios, cada uno de los cuales operaba por su cuenta, la máquina de vapor ha dado la posibilidad de practicar escavaciones á grande profundidad, con la condicion, empero, de disponer de un capital considerable. A la sazon se vieron desaparecer las pequeñas concesiones aisladas cediendo el puesto á grandes compañias que eran las únicas capaces de organizar esplotaciones en grande escala. A trueque de alcanzar ricos filones no se vaciló en bajar á profundidades muy considerables á veces, y practicar insiguiendo trazados metódicos, galerias inmensas, en las que los nietos de los explotadores primitivos trabajan hoy como obreros y constituyen una

clase especial que segun los paises se encuentra más ó ménos completamente privada de las condiciones de la vida normal.

El segundo dominio de que ha tomado posesion la máquina de vapor es el de los hilados y tejidos. Ante todo no pudo apoderarse más que de los telares destinados á los tejidos sencillos ó á la llana; pero rápidamente los condujo á un aumento de produccio nenteramente inesperado. En cuanto á los telares destinados á la reproduccion de los dibujos en ricos tejidos, no se le pudieron confiar hasta el momento en que *Jacquard* los trasformó por la introduccion de su delicado mecanismo de distribucion. Hoy en principio todos los telares pueden recibir su impulso de la máquina de vapor; más la toma de posesion no es todavia completa, por más que cada dia tienda más y más á serlo.

En cambio dentro de la hilatura la máquina de vapor ha conseguido absorberlo todo, hasta los pequeños procedimentos de fabricacion. Dicha trasformacion ha creado para la clase obrera de las industrias textiles, condiciones generalmente poco satisfactorias. En esos inmensos edificios en que un motor único distribuye la fuerza por doquier, la reunion de gran número de jóvenes de ambos sexos acarrea inconvenientes de más de un género, que nos parece inútil precisar y que han llamado ya la atencion de los legisladores de todos los paises.

La máquina de vapor ha implantado sucesivamente su dominio en una série de otras industrias y continua haciendo cada dia nuevas conquistas. En la mayor parte de los casos su principal resultado es el de sustituir *la concentracion á la diseminacion de los centros de trabajo*. Cuando la máquina de vapor se introduce en una industria que tenga larga existencia, casi siempre la vemos producir esa consecuencia deplorable de hacer desaparecer al *pequeño fabricante*, al hombre del oficio, que antes trabajaba en su propia casa, en el seno de la familia. Absorbido por la fábrica, inmediatamente si es hábil, ó un poco más tarde si es débil ó torpe, el obrero llega á no formar más que un elemento ínfimo del gran organismo de la fábrica y pierde toda su individualidad. Así nos esplicamos la falta cada dia creciente de buenos obreros que en ciertas ciudades populosas, como Berlin, por ejemplo, es tan sensible, que á veces de rechazo afecta á los mismos que no quieren ver ni oir hablar de los sufrimientos de la vida social.

La introduccion de las máquinas en la industria produjo otra consecuencia deplorable que en parte se relaciona con la precedente y que se ha acentuado sobre todo en estos últimos tiempos. Ha acarreado *una disminucion sorprendente en la habilidad de los obreros*. Esa disminucion que es fácil de comprobar en varias ramas de la industria, es particularmente sensible en las que utilizan muy gran número de máquinas-útiles. Como prueba de ello nos limitaremos á citar el solo hecho de que en varias localidades se han tenido que someter los obreros á pruebas de exámen y admitir con preferencia aquellos que han salido de tales pruebas de una manera satisfactoria. La libertad de oficios no puede invocarse más que en muy escasa medida para esplicar ese fenómeno; la verdadera causa debe buscarse en la estension dada á la aplicacion de las máquinas en la elaboracion de los productos. Es evidente que en tales condiciones la mano del jóven obrero encuentra cada dia ménos ocasion de practicarse, de adiestrarse. En los diez últimos años se han introducido muchas máquinas-herramientas que conduce la materia hasta el estado de producto, por decirlo así, completamente acabado, y en las cuales la mano del hombre no interviene casi para nada, como no sea para la distribucion y regularidad del trabajo.

De donde resulta naturalmente que hasta en la fabricacion de productos de calidad superior, es preciso contentarse con obreros de una habilidad mediana. Así se ha ido rebajando al obrero hasta convertirlo en mero guardian de la máquina, y poder por lo mismo utilizar para ello en gran número de casos muchachas y hasta niños. Por medio de las nuevas máquinas operatrices estos últimos con un trabajo relativamente poco cansado llegan á proporcionar productos muy superiores á los de los antiguos procedimientos de fabricacion, en los cuales la cooperacion del obrero era mucho más importante. Ya en la Exposicion universal de París de 1867 llamábamos la atencion sobre la introduccion de ese nuevo modo de trabajar, que propusimos caracterizar denominándolo con la espresion *maquinofactura* ó *maquinofacturar*, reservando la de *manufactura* ó *manufacturar* usadas hasta ahora, para los casos en que el trabajo del hombre desempeña un papel importante en la fabricacion de los productos. En verdad está perfectamente justificada esa distincion. A la maquinofactura debemos, por ejemplo, la difusion de las máquinas de coser, tan notables por su buena ejecucion como por su baratura. Ella tambien es la que nos ha permitido llegar á resultados verdaderamente estraordinarios para la fabricacion de las armas de fuego, la de los vagones de ferro-carril, de las locomotoras y de una manera general para todas las fabricaciones en que se trata de establecer un gran número de máquinas sobre un mismo modelo, ó á lo ménos, con un número de tipos bastante limitado. No sola-

mente el sistema de la maquinofactura hace cada vez ménos necesarios los servicios de obreros inteligentes y diestros, sino que en cierto modo encuentra en la falta de obreros de ese género una causa de su desenvolvimiento. El industrial que no logra proporcionarse buenos obreros en número suficiente, ó que por razon de las variaciones de la produccion, no puede siempre mantener sus talleres con el suficiente número de operarios, se ve naturalmente obligado cuando los pedidos abundan, á recurrir al fabricante de máquinas de trabajo, que en plazo muy corto le proporciona obreros de hierro, cuyo trabajo es más económico y hasta en la mayoria de los casos más satisfactorio que el de los buenos obreros que primitivamente ocupaba. La série de productos que es posible obtener con tales máquinas, es verdaderamente un poco limitado al principio, pero ese es un inconveniente que no tarda en desaparecer.

Las naciones que se dedican á la industria en grande, avanzan hoy rápidamente en la direccion que debe ir á parar al desarrollo completo del sistema de la maquinofactura.

Las esposiciones universales son las grandes revistas de los ejércitos de máquinas; los diversos cuerpos de tropas industriales acuden allí á hacer alarde de sus armamentos y equipos manifestando á la par la increible rapidez con que progresa la maquinofactura. El desarrollo verdaderamente estraordinario que ha tomado estos últimos años depende esencialmente de la nueva direccion tomada por los inventores. En vez de esforzarse como antiguamente en reproducir con las máquinas los procedimientos del trabajo á la mano ó de la naturaleza, hoy tienen una tendencia más y más notable á solicitar la solucion de cada cuestion á procedimientos particulares que las más de las veces se diferencian por completo de los procedimientos de la naturaleza. Durante mucho tiempo los esfuerzos hechos con objeto de crear la máquina de coser quedaron infructuosos, porque se abrigaba la tenaz pretension de querer reproducir la costura á la mano; pero á contar del momento en que se decidió introducir un nuevo método de costura más en relacion con las exigencias mecánicas, quedó roto el sortilegio y la máquina de coser no tardó en pasar al dominio de la práctica. El laminador, cuyo modo de trabajo es tan diferente de la forja al martillo, contribuyó en grande escala á desarrollar la produccion del hierro. Ciertos molinos en los que se habia intentado imitar las funciones de los dientes humanos, han tenido siempre el éxito más desdichado.

El método antiguo que seguian los inventores, fundábase en un concepto de filosofia natural, en el dogma teológico de la prevision de la naturaleza ó de la conveniencia perfecta de los medios que emplea. Desde el dia en que la mecánica dejó de tomar ese dogma como guia de sus investigaciones, entró en la via del desenvolvimiento que hoy estamos presenciando. Solamente los ilusos soñadores son casi los únicos que de vez en cuando pretenden imitar los procedimientos naturales y que con sacrificios desproporcionados de tiempo y dinero llegan á convencerse de que el estudio riguroso de la naturaleza debe tener por único objeto el descubrimiento de sus leyes.

De lo dicho se infiere que debemos esperar que la maquinofactura en un porvenir poco lejano venga á ser la regla que trasforme toda la mecánica práctica. De un modo más general podemos decir aun que hoy se ha llegado á sacar del principio fundamental de las máquinas, con una rapidez siempre creciente, las consecuencias que en él se encuentran contenidas desde su orígen. Fáltanos ahora examinar la maquinofactura bajo un punto de vista especial, el de la cuestion obrera.

Los diferentes ejemplos que hemos citado demuestran que la maquinofactura en su desenvolvimiento no ha encontrado ó á lo ménos ha evitado las dificultades de todo género que se han presentado en el problema de la fuerza. Así tambien la máquina-herramienta ha llegado hoy á tal grado de perfeccion, que puede considerarse como igual de la máquina motriz, cuyo orígen es, sin embargo, más antiguo. La maquinofactura que hasta esos últimos años no habia tenido más que un desarrollo muy lento, ha logrado por decirlo así, salvar de un solo salto en lo concerniente á la variedad de las aplicaciones del movimiento, la distancia que le separaba del adelanto enteramente comparable con el que la máquina motriz no ha salvado sino hasta despues de siglo y medio de constantes esfuerzos. Ambas tienden al mismo objeto, ó sea la trasformacion más y más completa del modo de trabajar del hombre, y quizás en ello hay para la sociedad una causa de peligro, sobre la cual conviene no hacerse demasiado el sordo ni escusarse de examinarla.

Séanos permitido hacer observar como de paso, que el principio de la maquinofactura se halla, particularmente al ménos, en contradiccion con el de la division del trabajo. Con una máquina-útil moderna la cooperacion del obrero ya no consiste verdaderamente en la ejecucion de una parte, más y más restringida cada vez, del conjunto del producto, como lo quiere el tan decantado principio de la division del trabajo. Por el

contrario, es patente que el mismo operario se halla encargado de varias operaciones para las cuales ejerce principalmente el cargo de vigilante, en tanto que la máquina efectua, sino la totalidad, á lo ménos la mayor parte del trabajo. De consiguiente, nos parece indispensable que los economistas introduzcan como nuevos factores los principios enteramente especiales que nos hemos esforzado en establecer de una manera científica y sobre los cuales está basada la teoria general de las máquinas. Esa necesidad se impone más particularmente todavia á los economistas aquellos para quienes es una máxima fundamental el que todos los principios que están en pugna han de acabar por acomodarse al beneficio de la mayoria dentro de la sociedad. Para nosotros no es dudoso que nunca se han dado ellos exacta cuenta del poderio positivo de las máquinas y de las consecuencias que tienden á producir.

Hoy la máquina ha llegado en ciertos casos á tal grado de automatismo, que casi se la podria suponer dotada de dicernimiento; pues á veces llega hasta el punto de sustituir casi completamente al hombre; el genio del que la inventó, parece que anima todos sus órganos y les obliga en cierto modo á realizar con una lógica inexorable, una série de concepciones más ó ménos complicadas, mientras que por amarga y cruel ironia, el hombre que la sirve desciende á la categoria de máquina (52). En las fábricas modernas más perfeccionadas se tiene por regla general la costumbre de hacer permutar los obreros que sirven ó vigilan los diferentes aparatos, de forma que se interrumpa para ellos la monotonia del trabajo, que acabaria por hacerse intolerable, y además permitir á un mismo obrero que se familiarizara escesivamente con una serie de máquinas; así se encuentra utilizada su actividad en las condiciones enteramente opuestas á las que impone el principio de la division del trabajo. Creemos de nuestro deber llamar especialmente la atencion sobre una situacion que de dia en dia la vemos tomando mayores proporciones.

En los diferentes ejemplos que acabamos de citar, y fuera de esos lados brillantes de incontestable esplendor, la máquina ostenta, como acabamos de ver, ciertos puntos negros que no dejan de causar alguna inquietud. Pero hay otros ejemplos para los cuales no existen en cierto modo más que esos lados brillantes; son aquellos que corresponden á la importante categoria de los *trasportes por máquinas*, ó si se quiere, á la clase de *máquinas de cambio de lugar*, para servirnos de una espresion que antes hemos adoptado (§ 117).

La navegacion de vapor y las vias férreas, que constituyen dos de las aplicaciones más importantes de la máquina de vapor, no acarrean por lo que toca á los obreros cuyo concurso reclaman aquellas, ninguna de las tristes consecuencias de que antes ha sido cuestion, y puede decirse que han prestado á la sociedad los mayores y más útiles servicios. La posibilidad de salvar los mares con barcos de vapor, relacionar los diferentes paises por medio de los ferro-carriles, la rapidez de las comunicaciones que es la consecuencia inmediata de esos dos modos de trasporte, han introducido una trasformacion completa en la vida de las naciones, creando para ellas condiciones enteramente nuevas y mejorando las antiguas. Si evaluamos con el auxilio de los datos suministrados por la estadística la fuerza que la máquina de vapor pone en este punto al servicio de la humanidad, llegamos á confirmar el hecho notabilísimo de que en la Europa Central el consumo de vapor para el movimiento de las locomotoras y de los barcos representa *dos ó tres veces* la que es menester para el funcionamiento de todas las fábricas. En Inglaterra dicha proporcion no es tan elevada, ya que la fabricacion lleva la ventaja; pero en el Norte América no es seguramente menor. Ocioso fuera insistir aquí sobre la importancia de tales cifras. Una fraccion muy considerable de la populacion obrera se halla empleada en esos dos modos de trasporte con condiciones que lejos de rebajarla en principio, de deprimirla ó de comprometer su salud, más bien le son generalmente favorables. En ese terreno especial, de consiguiente, la máquina de vapor ha ejercido una accion doblemente bienhechora, pudiendo además añadir que en este mismo terreno la cuestion obrera no existe propiamente hablando, ó que á lo ménos si existe, no presenta ninguno de los puntos negros que la caracterizan en las industrias que antes hemos examinado.

Puede comprobarse la existencia de condiciones casi análogas para los grandes talleres de construccion consagrados al establecimiento é instalacion de las locomotoras, máquinas de vapor, vagones, máquinas de barcos, calderas, buques, etc. En los talleres de esa índole el trabajo á que está sujeto el obrero podrá ser cansado, pero no insalubre ni monótono, amen de que por regla general está bastante remunerado. Las prudentes medidas tomadas por cierto número de gefes ó principales inteligentes han dado en ese género de industria magníficos resultados. Allí donde para el obrero existian condiciones de trabajo desventajosas se ha llegado en estos últimos tiempos á mejorar su situacion por medio de una série de disposiciones humanitarias, aumentando los salarios, disminuyendo el número de horas de trabajo, etc.; y si no se ha llegado á estirpar el mal en totalidad, se ha demostrado á lo ménos que

era posible ponerle remedio. De ahí resulta con toda evidencia que la legislacion, si quiere concebir una idea justa de las cosas, está hoy en el deber de suprimir los inconvenientes que aun existen y prevenir aquellos que amenazan producirse.

Fácil nos seria hallar otros ejemplos análogos á los que acabamos de citar; pero estos últimos son suficientes para inculcarnos la conviccion de que *no es en el principio mismo de la máquina* donde reside la causa por la cual parece en ciertos casos ser hostil al bienestar de la humanidad. Es evidente, segun esto, que el mecánico tiene el deber de investigar si existe ó no en la máquina misma un remedio para el mal que ha introducido en la sociedad, con sus beneficios, é indicar enseguida de qué manera conviene aplicar dicho remedio.

Las dos direcciones generales segun las que el funcionamiento de la máquina se muestra desfavorable á la organizacion obrera, es decir, la direccion de la fuerza y de la maquinofactura, ofrecen á la par el inconveniente de someter el obrero al poder del *capital*. La accion de la máquina de vapor es tanto más ventajosa, ó sea tanto más económica cuanto más considerable es su fuerza; y por ello tiene una tendencia natural á tomar mayores proporciones cada vez. Una industria destinada á dar un producto sencillo, como por ejemplo, el calicó, cae necesariamente en poder del capital, que es el único que se halla en la facultad de establecer esas inmensas fábricas por medio de las cuales puede llegarse á preparar el producto en condiciones bastante económicas. Las fábricas de hilados y tejidos han alcanzado hoy tan grandes proporciones, que cuerdamente no podrian sobrepujarse sin esponerse á hacer ineficaz toda vigilancia: con las dimensiones actuales queda dueño absoluto el capital. Enfrente de él el pequeño tejedor ó el hilador aislado es impotente, y si quiere persistir en trabajar en su casa, se ve obligado á bajar sus precios hasta el límite impuesto por el capital. De donde dimana que el capital se encuentra en la facultad de aniquilar en un momento dado la prosperidad de comarcas enteras ó concentrarla en un solo punto. Cumple además observar que en el dominio del tejido ó de las industrias textiles, por regla general el poderoso medio de la cooperacion nunca ha producido resultados satisfactorios para los obreros.

Si examinamos más detenidamente la cuestion de los tejidos, al punto vemos que el elemento preponderante es mucho ménos la máquina-útil ó sea el telar, cuyo precio es poco elevado, que la máquina de vapor. Solo el capital permite procurarse y hacer trabajar una poderosa máquina motriz, alrededor de la cual se agrupan las otras partes de la instalacion, para las cuales el papel del capital es ménos importante. Por ese motivo la industria del tejido á domicilio ó *á la mano* ha podido, si bien que no sin sufrimientos, sostener tan largo tiempo la lucha contra el poderío de la máquina de vapor.

Salta á la vista que aquí nos hallamos en presencia de un principio. En gran número de casos la máquina operatriz ó de trabajo no es única y se encuentra reproducida en la misma fábrica en un número de ejemplares más ó ménos considerable, que la máquina de vapor sirve para reunir, sin hacer de ellas, empero, un todo indisoluble. Cada una de esas máquinas-herramientas no tiene en general un costo muy elevado, y ménos desde que merced á la fabricacion mecánica los talleres de construccion llegan á darlas en condiciones más y más económicas, á medida que las van perfeccionando sin cesar.

En los casos en que se puede recurrir á las máquinas útiles de un precio moderado, se tiene la posibilidad de sustraerse á la preponderancia del capital con la condicion de hacer *la fuerza independiente del capital mismo*. El pequeño tejedor de que acabamos de hacer mencion, estaria en efecto libre de la presion del capital, si se le pudiese proporcionar la fuerza motriz necesaria para el movimiento de su telar. Podria intentarse algo semejante en el dominio de la hilatura, por más que esta última se encuentra ya, bajo el punto de vista de la fuerza motriz, en condiciones mucho ménos propicias que el tisaje, porque la máquina de hilar tiene como la máquina de vapor, una tendencia natural á tomar proporciones más estensas cada dia, como quiera que trabaja tanto más económicamente cuanto mayor es. Consideraciones del mismo género son igualmente aplicables á cierto número de profesiones, tales como la carpinteria, la cerrajeria, la hojalateria, la pasamaneria, la cepilleria, la fabricacion de las bombas, etc. De los dos elementos que suelen faltar á esos oficios, la fuerza motriz y la máquina útil, el artesano podria hoy procurarse con bastante facilidad el segundo, y en condiciones de precio relativamente muy económicas; más no puede decirse lo mismo del primero. El carpintero á quien se proporcionase la fuerza motriz necesaria para poner en movimiento una sierra circular, una sierra de cinta, una máquina de cepillar la madera y otra de encuadrar ó frisar, podria trabajar en su casa tan bien como en los grandes talleres de muebles ú otros semejantes que hoy tienen absorbidos á los obreros. Como tendria que utilizar su pequeño grupo de máquinas de la manera más variada, conseguiria ó adquiriria esa *habilidad* que pierde ó no consigue como obrero de fábrica. Lo mismo

sucederia con los demás oficios que acabamos de mencionar. A pesar de ciertas ventajas que tiene la gran industria, el pequeño fabricante se hallaria en la disposicion de hacerle la competencia, como quiera que habria de encontrar un apoyo enérgico no solamente en la colaboracion de los miembros de su familia, sino tambien en el elemento moral que seria la consecuencia del trabajo dentro de su casa. Formaria con el grupo de sus ayudantes y aprendices un organismo industrial completo, bastante análogo al de los antiguos oficios, aunque se diferenciara por la introduccion de la máquina. A partir del momento en que la competencia hubiese empezado á ser posible, se modificaria con rapidez la situacion obrera en virtud del alza de los salarios que se introduciria en el mercado de donde toma los obreros la grande industria. En tales condiciones el capital se hallaria naturalmente obligado á abandonar los trabajos para los cuales podria satisfacer la pequeña industria los pedidos, y á renunciar de consiguiente por sí propio á sus tentativas de centralizacion.

De ahí resulta que para obviar á una parte de los inconvenientes que la centralizacion tiende á producir, la mecánica debe llegar *á suministrar pequeñas fuerzas motrices económicas, ó en otros términos, inventar máquinas motrices de escasa potencia susceptibles de ponerse en movimiento á poca costa.* Desde el momento en que se pudiera dar al pequeño fabricante la fuerza motriz en condiciones de economia sensiblemente equivalentes á las que la máquina de vapor de gran potencia proporciona al capital, se lograria instituir una clase social importante, reforzándola allí donde existe todavia y restableciéndola allí en donde ha desaparecido. Esa utilidad de ayudar al pequeño fabricante á que se rehaga y represente su debido papel en la sociedad, no se limita solamente al asunto que nos ocupa, sino que tambien empieza á sentirse en otros dominios, como por ejemplo, el del arte industrial.

A la cuestion del pequeño fabricante está íntimamente unida la de la industria doméstica caracterizada por la alternativa de un trabajo industrial con otras ocupaciones. Ese género de industria se ha mantenido por fortuna, bajo una forma que merece conservarse, en ciertas localidades en que la grande industria ha llegado á un alto grado de desenvolvimiento. Así por ejemplo, en Lion y en las poblaciones circunvecinas se encuentra aun gran número de tejedores á domicilio; y lo mismo se nota en ciertas comarcas de Suiza y Alemania. En la Lombardia la fabricacion de la seda ha quedado hasta ahora en estado de industria doméstica entre las manos de cierto número de habitantes del campo, que tienen un telar y una máquina de bobinar ó de llenar canillas. Esta situacion es eminentemente favorable, y sin embargo, amenaza por desgracia modificarse, si se llega á realizar el deseo bastante generalizado de ver elevarse grandes fábricas de tejidos. Algunas tentativas se han hecho ya en tal sentido, y seria de desear que pudiesen detenerse á tiempo. No se llamará jamás bastante la atencion de las autoridades sobre semejantes tentativas que á primera vista parecen ofrecer sérias ventajas, por más que en el fondo sean las más apropósito para crear una situacion preñada de peligros. Natural es que el campesino crea que debe preferir los salarios elevados de la fábrica á las exíguas sumas que gana en su casa; pero proporciónesele á domicilio un pequeño motor económico, y se habrá resuelto el problema de realizar una industria que permanece estacionada, sin introducir las perniciosas consecuencias de la gran industria.

La idea de la oportunidad de una subdivision de la fuerza se manifiesta en diversos parajes y bajo varias formas diferentes. Una de esas formas es la de *alquilar fuerza motriz*, que se ha aplicado con muy buen éxito en algunas populosas ciudades. Pero esa forma da por consecuencia la aglomeracion de gran número de obreros en un mismo edificio, la reunion de los miembros de una misma familia y de sus auxiliares en locales que á veces son bastante insalubres, de suerte que dicha aglomeracion, aunque *voluntaria*, reproduce bajo nueva forma una parte de los inconvenientes que antes hemos señalado con relacion á las grandes fábricas. En todo caso ese modo de division de la fuerza es sin duda alguna muy inferior al que consiste en el empleo de pequeños motores distintos, de que se han logrado ya algunos tipos bastante satisfactorios, entre los cuales se pueden citar las *máquinas de gas de alumbrado*, las máquinas de aire caliente, las *maquinitas de columna de agua*, y en fin, las *máquinas de gas de petróleo*, cuyos primeros ensayos están llenos de esperanzas para lo venidero.

Esas máquinas *por su índole misma* no pueden casi aplicarse más que á la produccion de fuerzas poco considerables, y no tienen por lo tanto ninguna tendencia á tomar grandes dimensiones. En los límites de su esfera de accion, de 1 á 3 caballos de fuerza, pueden verdaderamente luchar con ventaja con la máquina de vapor. Por consiguiente conviene *clasificarlas entre las máquinas modernas más importantes, y considerarlas como llevando en sí los gérmenes de una trasformacion completa de una parte de la industria.*

Las primeras tentativas practicadas para la introduccion de motores pequeños, se deben al genio de *Ericson*. Despues de haber fracasado casi por completo al

poner en ejecucion la idea que habia tenido primeramente de inventar una poderosa máquina de aire calentado, destinada á reemplazar la máquina de vapor, no vaciló en volver sus esfuerzos á la construccion de maquinitas caloricas de 1 á 2 caballos. Verdad es que no tuvieron un buen éxito de larga duracion, pero suministraron la prueba de que las nuevas máquinas eran prácticamente posibles, y respondian á una verdadera necesidad. De ahí el orígen de toda una série de motores pequeños que el trabajo incesante de los inventores trasforma poco á poco, y acaba por pasar del estado embrionario al de las máquinas realmente prácticas. Los hombres que se han consagrado al estudio de esa categoria de máquinas, y que á veces han hecho sacrificios considerables á trucque de darles un éxito seguro, han trabajado para la consecucion de un gran fin, y merecen por tal motivo toda nuestra gratitud. En cuanto á los que por el contrario han preferido quedarse con los brazos cruzados, limitándose á afirmar con la sabiduria de *Ben Akibas*, que no hay nada nuevo bajo el sol, no han comprendido la menor cosa del espectáculo maravilloso del desarrollo de una idea nueva que se está cumpliendo en el dominio de la mecánica.

La máquina de columna de agua dificilmente será susceptible de aplicacion, porque el agua comprimida cuesta en general muy cara. Existen, sin embargo, algunos casos particulares en que se presenta bajo condiciones bastante económicas, para que se la pueda utilizar con ventaja. Las máquinas de gas y de aire caliente son en cambio aplicables casi en todas partes, y se hallan además en vias de progreso contínuo.

Estas últimas son las verdaderas *máquinas motrices del pueblo;* pueden instalarse á precios muy módicos; son fáciles de gobernar, y han dado ya pruebas de los servicios que son susceptibles de prestar á la pequeña industria Por donde se comprende que nunca se llamará bastante sobre ellas la atencion de las autoridades, de las corporaciones de utilidad pública y de las sociedades profesionales.

De las consideraciones anteriores resulta que para una clase de oficios bastante considerable es posible mantener ó volver á su vigor el antiguo estado de cosas y evitar así su decadencia y ruina; pero el procedimiento que debe utilizarse para obtener ese resultado, no es aplicable á otras clases que se encuentran sometidas á ciertas condiciones deplorables. Tal es el caso sobre todo para la industria de la explotacion de las minas y de todo cuanto á las mismas se refiere. Es una industria para la cual no es absolutamente posible la subdivision; pertenece á la clase de las que no pueden elevarse á su desarrollo sino en virtud de la centralizacion, á la accion bien coordinada de fuerzas numerosas y al auxilio del capital. Respecto á los inconvenientes perniciosos que acarrea para los obreros, se debe confesar que no le están unidos de una manera indisoluble. Los legisladores y las autoridades tienen el deber de impedir en este punto los abusos y vigilar la organizacion del trabajo, para que no sea escesivo ni insalubre. La industria de las minas en ciertas regiones ha probado que era posible dirigir la explotacion de manera que no comprometiese la salud del obrero ni le rebajase en su dignidad de hombre.

Por su parte la mecánica tiene tambien el deber de aminorar el fatigoso trabajo del minero, dando un gran desarrollo á las máquinas útiles. Las máquinas de perforar, escavar y orear, así como las destinadas á los trasportes y otros servicios análogos, deben ser hoy el objeto de los estudios más sérios, debiendo confesarse en verdad que los grandes talleres de construccion se han consagrado á tan noble tarea con la más firme energia. La importancia de la máquina bajo el punto de vista social y humanitario se ostenta aquí en todo su esplendor; pues llena con efecto en tal caso una de sus más nobles funciones, la de aligerar la ruda tarea cotidiana de toda una clase de trabajadores.

Las consideraciones anteriores, en las que hemos procurado de intento no salir del círculo de ideas especial al asunto que nos ocupa, nos conducen, en suma, á deducir que la mecánica debe tomar su puesto en la cuestion obrera y que el problema de las máquinas no recibiria la misma solucion en todos los casos.

Algunas grandes industrias basadas en el empleo de las máquinas ofrecen bajo todos conceptos condiciones satisfactorias bajo el punto de vista de las exigencias de la vida social. En tal caso el desarrollo de la mecánica, ora se traduzca por la estension, ora por el perfeccionamiento de los útiles de trabajo, no ofrece en sí peligro ninguno.

Otras grandes industrias presentan ciertos inconvenientes para la clase obrera; pero aun pasando por alto la accion que la legislacion puede ejercer sobre ellas, tales inconvenientes pueden atenuarse y hasta suprimirse por completo á consecuencia de un progreso mecánico ulterior.

Finalmente, una tercera clase de industrias, á causa del empleo de máquinas de gran potencia, ha tomado un desenvolvimiento que por un lado es contrario á la poblacion obrera interesada, y que por otro amaga la existencia de la pequeña industria. El remedio para ese mal se encuentra en la descentralizacion y en una série de medidas que no tienen en verdad nada contrario al movimiento económico general. En este órden de ideas

la mecánica debe considerar como una de sus funciones más importantes la difusion y el perfeccionamiento de pequeñas máquinas motrices que han comenzado á trillar el camino de esa gran mejora de la humanidad que se vislumbra en lontananza. El objeto que es preciso proponerse, estriba en la subdivision de las industrias de ese género en gran número de organismos industriales, que intercalados entre los organismos mas importantes de incontestable utilidad, podrian lograr con el concurso de estos últimos que llegara la industria á un estado floreciente y satisfactorio bajo el punto de vista social.

CAPÍTULO XIII

SÍNTESIS CINEMÁTICA

In magnis et valuisse sat est.
PROPERCIO.

§ 138

Objeto de la síntesis cinemática

El análisis cinemático, de que nos hemos ocupado estensamente hasta aquí, tiene por contraparte la síntesis cinemática. Mientras que el procedimiento analítico tiene por objeto determinar las propiedades de los movimientos desmodrómicos que tienen las máquinas formadas por la reunion de acoplos de elementos, de cadenas cinemáticas y de movimientos dados, el procedimiento sintético está destinado á resolver la cuestion inversa, relativa «á la solucion general del problema de las máquinas» que hemos indicado ya en el párrafo 3, y que consiste en hallar los acoplos de elementos, las cadenas cinemáticas y los mecanismos que conviene combinar para realizar un movimiento desmodrómico determinado.

Considerado en sí mismo ese problema se presenta como uno de los más elevados, por no decir como el más significado de cuantos hemos estudiado hasta aquí, puesto que se refiere directamente al invento ó á la creacion de nuevas máquinas, y por lo tanto, al desarrollo progresivo de la mecánica. Como por otra parte su solucion supone el prévio conocimiento del análisis, vemos que la síntesis debe considerarse como la última de las cuestiones que importa estudiar en la cinemática teórica, y en cierto modo, como la clave de bóveda del monumento que nos hemos propuesto edificar.

El lector que nos haya seguido hasta aquí sin interrupcion, habrá tenido ocasion de observar la exposicion de algunas proposiciones sintéticas, ya sea en las consideraciones generales á que ha dado márgen la historia del desenvolvimiento de las máquinas, ya sea en las consideraciones particulares relativas á los diferentes acoplos de elementos, así como en una série de clases de mecanismos y de máquinas completas.

Tales proposiciones han tenido por objeto deslindar cada vez más el sendero que debíamos seguir para llegar á la solucion del problema de que se trata; y el resultado á que puede conducir la síntesis, se halla por lo tanto indicado desde ahora á rasgos generales.

Sin embargo, en el punto á que hemos llegado, la

cuestion puede tratarse de varias maneras diferentes, y por lo mismo debemos procurar ante todo determinar cuál es la forma de aplicacion de la síntesis más propia para dar buenos resultados para el conjunto de los problemas que podemos examinar.

Para llegar al objeto que nos proponemos, existen, al parecer, dos métodos principales que constituyen lo que puede llamarse la *síntesis directa* y la *síntesis indirecta*. Cada una de ambas se subdivide á su vez en dos ramas, segun se trate de una aplicacion *general* ó *especial*. Vamos á procurar determinar *á priori* las ventajas é inconvenientes del empleo de esas diferentes formas de síntesis.

§ 139

Síntesis cinemática directa.

La síntesis directa y *general* deberia indicar inmediatamente cuales son los mecanismos que importa aplicar á cada caso, para realizar en una pieza de trabajo un cambio de lugar ó de forma, ó bien utilizar en una máquina, una fuerza natural dada. Pero es fácil ver que no es posible llegar con ese método á resultados susceptibles de utilizarse con ventaja. Efectivamente, sabemos por esperiencia y por las indicaciones del análisis, que un mismo movimiento puede realizarse de varias maneras diferentes. La síntesis debiera por lo tanto suministrarnos de una sola vez varias soluciones diferentes de un mismo problema y hasta indicarnos inmediatamente la mejor de las soluciones posibles. Verdaderamente este último resultado no puede alcanzarse, puesto que la apreciacion del valor práctico de cada solucion queda completamente escluido del círculo de la cinemática (§ 3). Dos máquinas de vapor, por ejemplo, pueden en distintas circunstancias, ser igualmente buenas, igualmente beneficiosas, igualmente prácticas, y sin embargo, presentar muy grandes diferencias bajo el punto de vista cinemático. Por esos diversos motivos la síntesis directa y general no nos seria de ninguna utilidad y debemos renunciar á ella.

Pasemos ahora á la síntesis directa y *especial*, entendiendo así el procedimiento que permite determinar inmediatamente un acoplo de elementos susceptible de producir un cambio de lugar ó de forma dado. Esa determinacion es generalmente posible, pues desde el momento en que se conoce el movimiento que ha de producirse, puede determinarse (segun lo espuesto en el capítulo II) las axoides de los elementos del acoplo, y luego (segun el capítulo III) las formas de perfiles que hay que dar á esos elementos.

Ese método no seria aplicable ya para los casos en que las trayectorias polares tuviesen brazos que se estendieran hasta el infinito (§ 9), y seria entonces necesario recurrir á un modo de tratamiento particular, que ofreciera las mismas dificultades que la síntesis general directa. Fuera por lo demás bastante inútil estendernos más sobre este asunto, porque sabemos que en el mayor número de casos la solucion de los problemas de movimiento por medio de los *acoplos* de movimiento, tiene un valor práctico muy inferior al que se funda en el empleo de una *cadena* cinemática. Por consiguiente, debemos considerar en difinitiva ese segundo método sintético como careciendo de importancia bajo el punto de vista práctico.

§ 140

Síntesis cinemática indirecta.

El método sintético indirecto consiste en determinar de antemano las soluciones de todos los problemas entre los cuales puede caer el problema dado; lo que equivale á decir que debe *resolver préviamente todos los problemas de la cinemática de las máquinas*. A primera vista semejante cuestion parece tan vasta é ilimitada, y la idea de resolverla tan atrevida, que no parece constituir más que una simple proposicion teórica. Más no es asi en realidad: algunas de nuestras anteriores investigaciones nos han demostrado ya efectivamente que el dominio de los problemas de la cinemática de las máquinas dista mucho de carecer de límites; nos circunscribiremos á citar únicamente como pruebas corroborantes, el escaso número de acoplos inferiores (§ 15) y el limitado número de mecanismos que pueden formarse con una cadena dada (§ 3). Examinando más detenidamente la cuestion se logra en verdad el convencimiento de que el dominio de los problemas cinemáticos no es tan estenso que no pueda abarcarse en su conjunto. Luego, si no se quieren tener pretensiones demasiado elevadas, debe considerarse la cuestion planteada como susceptible de solucion. No cabe duda que las dificultades que deben encontrarse, son grandes, pero no invencibles, sobre todo limitándose á los problemas que entran en el dominio ordinario de la construccion de las máquinas.

Los resultados á que nos han conducido nuestras investigaciones analíticas, nos permiten afirmar inmediatamente que la *síntesis indirecta especial* es verdaderamente practicable. Su funcion es indicar cuáles son los acoplos de elementos cinemáticos que actualmente existen. Sabemos ya (§ 56) que el número de elementos no

es muy considerable y que hemos logrado espresarlos todos por medio de un número moderado de símbolos. Es evidente, segun esto, que el número de acoplos que puede formarse con tales elementos, debe ser á su vez relativamente limitado, y en efecto, eso es lo que sucede: luego, aquí encontramos, en suma, un campo para la aplicacion de la síntesis cinemática.

La síntesis indirecta *general* está destinada á constituir para las cadenas cinemáticas lo que la síntesis *especial* hace para los acoplos. A primera vista el gran número de casos posibles parece que debe constituir un obstáculo; pero un exámen más detenido permite averiguar que no hay en ello, en resúmen, más que una dificultad secundaria. En primer lugar el número de cadenas cinemáticas *simples*, es decir, de aquellas en que ningun miembro abraza más de dos elementos, dista mucho de ser tan considerable como podria imaginarse; y realmente la determinacion de las cadenas *simples* posibles constituye ya una parte muy importante de la cuestion que en la actualidad nos conviene resolver.

En cuanto á las cadenas *compuestas* que puedan formarse, su nombre es con toda evidencia ilimitado, de suerte que realmente es imposible llegar á tratar todos los casos á que pueden dar orígen. Más tienen en principio los mismos derechos al exámen que las cadenas simples; pero cumple notar que en las máquinas existentes la composicion de las cadenas nunca se exagera demasiado. Por otra parte, en el caso en que esa composicion exista, casi siempre es posible separar los efectos que corresponden á los diferentes grupos de órganos, es decir, subdividir el conjunto de manera que se reemplace la consideracion de las cadenas compuestas por la de una série de *mecanismos sucesivos*, ninguno de los cuales ofrece en sí mismo una gran complicacion. El método descriptivo (§ 135) nos ha suministrado ya, tocante el particular, indicaciones bastante extensas y satisfactorias; pero un poco más adelante hallaremos la ocasion de esponer un método más exacto aun para la subdivision de las cadenas compuestas. No es raro además encontrar cadenas de ese género que se presentan como unidades no susceptibles de ser subdivididas; entre las cuales algunas muy importantes pueden desde ahora encontrar sitio en el dominio de las investigaciones sintéticas, sin que por ello sea necesario estenderlo más de lo conveniente; y en cuanto á otros, podrán aplicárseles con el tiempo esas mismas investigaciones.

En suma, vemos que el procedimiento de la síntesis indirecta es en verdad capaz de suministrarnos algo de provecho, y que por ende podemos aplicarlo á nuestra cuestion con la esperanza de obtener resultados de un valor verdaderamente práctico.

§ 141

Diagrama de los procedimientos sintéticos.

La importancia de la materia que nos ocupa, es tan grande, que nos parece oportuno presentar al lector, bajo una forma fácil de comprender, un cuadro destinado á hacer resaltar la conexion de los diferentes procedimientos sintéticos, tal como resulta de las consideraciones anteriores. Con ese objeto hemos trazado el diagrama de la figura 411.

La síntesis cinemática considerada como un todo, se divide, conforme hemos visto, en directa é indirecta, pudiendo cada una de esas subdivisiones ser general ó especial.

El papel de la síntesis directa consistiria en combinar los elementos cinemáticos puestos á su disposicion para deducir, segun las leyes de formacion antes indicadas, cadenas y acoplos adecuados en cada caso al objeto que se propone. Pero ese método ofrece el doble inconveniente de tropezar con grandes dificultades y suministrar resultados generalmente inaplicables, de suerte que en realidad no tiene ningun valor práctico.

La síntesis indirecta sirve en primer lugar (como síntesis especial) para formar y clasificar todos los acoplos posibles de elementos, y en segundo lugar (como síntesis general) para reunir los acoplos de elementos formando con ellos cadenas cinemáticas. De las séries, ordenadas con regularidad, de acoplos y cadenas, deduce y pone en evidencia la combinacion más adecuada á cada caso particular. Es la induccion que constituye el procedimiento general que debe utilizarse para la eleccion que conviene hacer entre las diferentes combinaciones que se presentan.

Vamos ahora á pasar al exámen de los resultados que proporciona la aplicacion del método de síntesis indirecta.

§ 142

Síntesis de los acoplos inferiores de elementos.

Los símbolos de especie que hemos admitido (§ 55), para los elementos cinemáticos, son en número de doce, de los cuales hay diez para los elementos rígidos:

S Tornillo (espiral),
R Cuerpo de rotacion,
P Prisma,
C Cilindro,
K Cono,
H Hiperboloide,
G Esfera,
A Arco (porcion de rotoide),
Z Diente, saliente,
V Vaso, recipiente,

y dos para los elementos dúctiles:

T Organo de tension,
Q Organo de presion.

Primero nos ocuparemos de los elementos rígidos y de su empleo en los acoplos. Debemos, pues, comenzar por prescindir aquí del elemento V, ya que no puede acoplarse sino con el órgano de presion Q. En segundo lugar G es el símbolo de un cuerpo de rotacion particular, y A el de una porcion de un elemento del mismo género, de suerte que ambos se encuentran ya comprendidos en el símbolo R. Por tanto falta solo considerar bajo el punto de vista de su empleo sintético estos siete elementos únicamente:

S, R, P, H, K, C, Z.

Tres de los acoplos que pueden formarse con estos elementos nos son perfectamente conocidos, á saber, los *tres acoplos de encaje*, ó *acoplos inferiores:*

$S^{+}_{=}S^{-}$ ó (S) el acoplo de tornillos,
$R^{+}_{=}R^{-}$ ó (R) el acoplo de rotoides,
$P^{+}_{=}P^{-}$ ó (P) el acoplo de prismas.

En todo rigor el adjetivo *inferior* debiera añadirse á cada uno de los dos primeros acoplos, más ya hemos visto que en la mayor parte de los casos puede omitirse sin el menor inconveniente esa clasificacion. El símbolo (R) suele tambien encontrarse reemplazado por (C), que representa el acoplo de cilindros; si bien, empero, podemos volver siempre á la forma (R), que es más general.

Los dos acoplos (R) y (P), segun hemos visto en el párrafo 3, pueden considerarse como casos particulares de la forma (S). Si en efecto, ponemos como esponente en el símbolo S el tamaño de la tangente del ángulo de inclinacion, como lo hemos hecho ya (§ 56, para la hiperboloide), tenemos: $(S^{0})=(R)$ y $(S^{\infty})=(P)$. De consiguiente siempre y cuando se trate sólo de determinar una distincion entre las clases de elementos, podemos comprender los tres acoplos inferiores bajo el símbolo (S); en otros términos, para una clasificacion enteramente general como la que puede necesitarse para la síntesis basta considerar únicamente el acoplo inferior (S).

§ 143

Acoplos superiores de los elementos más sencillos.

El elemento C, que entra en la composicion del acoplo de encaje (C), sirve igualmente para formar acoplos superiores, como por ejemplo, el de las ruedas de fricciones cilíndricas (fig. 138), el cual está representado por la fórmula C,C, ó de una manera más general por $\widetilde{C}$, $\widetilde{C}$. El acoplo C,C, es un caso especial del acoplo que está compuesto de dos hiperboloides cualesquiera, y que está representado por la fórmula $\widetilde{H}$, $\widetilde{H}$. De ese mismo acoplo derivan igualmente los dos acoplos constituidos por conos y cilindros no circulares, $\widetilde{K}$, $\widetilde{K}$ y $\widetilde{C}$, $\widetilde{C}$. Hemos visto ya (§§ 21 y siguientes) numerosos ejemplos de esa última especie de acoplos ($\widetilde{C}$, $\widetilde{C}$), del cual ofrece un caso general la fig. 88.

El acoplo C,C es el resultado de una simplificacion aun más pronunciada en la forma de los acoplos de esa especie, siendo al propio tiempo determinada y general la forma que presenta. Conforme hemos hecho varias veces, nos proponemos representar esos acoplos con una *sola* mayúscula, lo cual puede hacerse sin ninguna dificultad, toda vez que los dos elementos conjugados tienen siempre el mismo símbolo de nombre. Debemos simplemente evitar que en el caso de los cuerpos de rotacion pueda confundirse el acoplo superior con el acoplo de encaje (ya que el símbolo de nombre es el mismo); para lo cual bastará *poner una coma al lado del símbolo de nombre.* Así obtenemos la especie:

$\widetilde{H}$, $\widetilde{H}$, ó $(\widetilde{H},)$ que representa el acoplo general de hiperboloides con las subdivisiones siguientes:

$\widetilde{K}$, $\widetilde{K}$ ó $(\widetilde{K},)$ acoplo de conos no circulares,
$\widetilde{C}$, $\widetilde{C}$ ó $(\widetilde{C},)$ acoplo de cilindros no circulares.

De ahí se deducen las tres formas siguientes de una gran sencillez:

H,H ó (H,) acoplo de hiperboloides de revolucion,
K,K ó (K,) acoplo de conos circulares,
C,C ó (C,) acoplo de cilindros circulares.

Entre las formas generales y especiales hay formas intermedias, tales como la del acoplo H,S, representada con la figura 31, ó bien aun la del acoplo H°,K, que resulta de la combinacion de una hiperboloide plana con un cono. Esas formas pueden indicarse respectivamente con los símbolos $(\widetilde{H},)$ y $(H,)$ porque en la figura 31 el tornillo entra por su propiedad como *superficie regulada*, y puede por lo tanto representarse con $\widetilde{H}$, mientras que su propiedad como tornillo S no se ostenta sino en segunda línea.

El acoplo C,C debe distinguirse del acoplo de cilindros de encaje, á cuyo fin conviene usar el símbolo (C,) para el acoplo superior. El acoplo C,P es un caso particular del acoplo (C,), que corresponde á la hipótesis de un radio infinito para uno de los cilindros. Como indicacion abreviada para ese acoplo puede emplearse el símbolo $(C,_p)$, en el cual la coma intercalada entre C y *p* indica suficientemente que existe un acoplamiento superior entre C y *p*.

§ 144

Síntesis de los acoplos de ruedas dentadas.

Las ruedas dentadas podrian igualmente comprenderse en la clase $(\widetilde{H},)$, pero la repeticion de los mismos perfiles constituye en estos órganos un carácter tan marcado, que parece conveniente formar una clase separada; cosa que por lo demás se ha hecho hasta ahora en la práctica. Importa no perder de vista que el uso de los acoplos de ruedas dentadas no trae consigo necesariamente el empleo de la clausura por cadenas. Hemos visto ya (párrafos 43 y 50) que tambien puede utilizarse la clausura por acoplos, como por ejemplo la de la figura 152.

Si consideramos ante todo las ruedas dentadas de *trayectorias polares circulares*, podemos comprenderlas bajo el símbolo H_z, H_z ó (H_z), que corresponde á las ruedas dentadas hiperboloides, y considerar como casos especiales de esta clase general:

K_z, K_z ó (K_z) el acoplo de las ruedas cónicas;
C_z, C_z ó (C_z) el acoplo de las ruedas rectas ó cilíndricas.

Los dientes de esas ruedas están generalmente limitados por superficies reguladas que presentan los mismos caractéres que las axoides correspondientes. Si las generatrices de esos dientes son helicoidales, H_z debe reemplazarse con H_s. La clase más general tiene en tal caso el tornillo superior $\widetilde{S}$ como forma de dientes, y debe por tanto escribirse $H, \widetilde{s}\,\widetilde{H}\,\widetilde{s}$ ó $(H\,\widetilde{s})$. Como casos especiales de esta clase tenemos entonces:

(K_s), las ruedas helicoidales cónicas;
(C_s), las ruedas helicoidales cilíndricas.

El acoplo de elementos S, S ó (S,) representado en la fig. 412, está comprendido en la segunda de esas subdivisiones. Para ese acoplo generalmente es preferido el símbolo (C_s). Sin embargo podríamos muy bien utilizar el símbolo (S,) y su forma superior $(\widetilde{S},)$, observando que de ese acoplo de tornillos (que se envuelven recíprocamente), considerado como *clase general*, se puede deducir como subdivision el acoplo general de encaje (S).

Tenemos aun que designar otras especies superiores de ruedas dentadas y mayormente aquellas cuyas *trayectorias polares no son circulares*. Tenemos entonces como casos generales:

$$(\widetilde{H}_z) \text{ y } (H\,\widetilde{s})$$

que encierran como casos especiales $(\widetilde{K}_z)$ y $(\widetilde{K}\,\widetilde{s})$, $(\widetilde{C}_z)$ y $(\widetilde{C}\,\widetilde{s})$.

Las formas intermedias H^o_z, K_z (rueda plana hiperboloide con rueda cónica) y H_z,S_z, correspondientes á la figura 31, pueden comprenderse en el símbolo de la clase. Lo mismo sucede con los acoplos en que una rueda cilíndrica se halla convertida en cremallera P_z, puesto que P puede considerarse como una forma particular de C.

§ 145

Acoplos de brazos.

El acoplamiento entre los miembros *a* y *b* en los mecanismos de brazos de las figuras 378 y 379 puede considerarse como constituyendo un caso particular comprendido en la clase $(\widetilde{H},)$: en ambas figuras se trata de un cilindro no circular $\widetilde{C}$, acoplado con un diente Z, correspondiendo sin duda el caso general al acoplamiento de una hiperboloide no circular $\widetilde{H}$ con un diente de un perfil igualmente general $\widetilde{Z}$. Ese acoplo puede designarse con el nombre de *acoplo general de brazos* y debe escribirse:

$$\widetilde{H}\,,\widetilde{Z} \text{ ó } (\widetilde{H},\,\widetilde{z}).$$

Fuera de $(H,_r)$ tenemos aquí como subdivisiones:

$(\widetilde{K},\widetilde{z})$ y $(K,_z)$
$(\widetilde{C},\widetilde{z})$ y $(C,_z)$

Entre los acoplos de brazos debemos contar así mismo los que hemos encontrado en los mecanismos de trinqueteos (§ 120) y que están representados con las figuras 376 y 377.

Bajo la forma más general esos dos géneros de acoplos pueden representarse con:

$(\widetilde{H}_{z};)$ y $\widetilde{H}_{z}:)$,

dando lugar esas dos clases á las mismas subdivisiones que las ruedas dentadas y en particular á la de los trinqueteos de cremallera que corresponden al cambio de C en P.

§ 146.

Recapitulacion de los acoplos de elementos rígidos.

Los acoplos que pueden formarse con los elementos rígidos son, en vista de lo que antecede, susceptibles de ser sometidos á una clasificacion sistemática, establecida de modo que cada forma especial sea una subdivision del caso más general á que se refiere naturalmente.

En ese modo de clasificacion la forma superior más general constituye la *clase*, la cual sigue inmediatamente despues de la *especie*, y en fin, la última subdivision, el *género*. Reuniendo así los acoplos de elementos antes indicados obtenemos el siguiente cuadro:

ACOPLOS DE ELEMENTOS RÍGIDOS.

CLASES.	ESPECIES.	GÉNEROS.
I. $(\widetilde{S},)$	..... (S)	..... (S) , (R) , (P)
II. $(\widetilde{H},)$	... $(\widetilde{H},)$	$(\widetilde{K},)$, $(\widetilde{C},)$ ... (H,) , (K,) , (C,)
III. $(\widetilde{H}_{z})$	... $(\widetilde{H}_{z})$	$(\widetilde{K}_{z})$, $(\widetilde{C}_{z})$ ... (H_{z}) , (K_{z}) , (C_{z})
IV. $(\widetilde{H}\,\widetilde{s})$	... $(\widetilde{H}\,\widetilde{s})$	$(\widetilde{K}\,\widetilde{s})$, $(\widetilde{C}\,\widetilde{s})$ ... (H_{s}) , (K_{s}) , (C_{s})
V. $(\widetilde{H},\widetilde{z})$	... $(\widetilde{H},_{z})$	$(\widetilde{K},\widetilde{z})$, $(\widetilde{C},\widetilde{z})$ ... $(H,_{z})$, $(K,_{z})$, $(C,_{z})$
VI. $(\widetilde{H}_{z};)$	.. $(\widetilde{H}_{z};)$	$(\widetilde{K}_{z};)$, $(\widetilde{C}_{z};)$ ... $(H_{z};)$, $(K_{z};)$, $(C_{z};)$
VII. $(\widetilde{H}_{z}:)$	... $(\widetilde{H}_{z}:)$	$(\widetilde{K}_{z}:)$, $(\widetilde{C}_{z}:)$ ... $(H_{z}:)$, $(K_{z}:)$, $(C_{z}:)$

Tenemos aquí siete clases que comprenden todos los acoplos que hemos examinado, con sus numerosas variedades de ejecucion. Las especies particulares y los géneros que se consiguen con el cambio de C en P, de H en H^{o}, y de K en K^{o}, pueden considerarse como variedades de las especies y de los géneros que acabamos de indicar.

Ciertos casos que en apariencia son por estremo complicados, como por ejemplo, los patrones ó rosetas de las máquinas de guillochar, entran, sin embargo, en nuestra clasificacion; y esos acoplos que á veces se ejecutan con las formas más arbitrarias, deben contarse en la clase II. Así tambien la clase I puede en caso necesario comprender varias formas completamente libres. En suma, el número de clases á que hemos llegado es bastante exíguo, por más que no hayamos vacilado en subdividir algunas formas especiales, que en todo rigor habrian podido reunirse, como verbigracia, las de las clases VI y VII; más para que nuestra clasificacion pueda utilizarse fácilmente en la práctica, nos ha parecido conveniente hacerla todo lo clara posible.

§ 147

Acoplos de elementos que contienen órganos de tension.

Considerados bajo el punto de vista de la manera como entran en la formacion de los acoplos de elementos, los órganos de tension, correa T_{p}, cuerda T_{s}, alambre T_{c}, cadena de mallas T_{z}, cadena articulada T_{r}, se encuentran bastante caracterizados por el símbolo único T; y por lo tanto podemos limitarnos al empleo de ese símbolo en la formacion de las clases de que tenemos que ocuparnos aquí. El acoplamiento de T con otros elementos siempre se verifica, conforme hemos visto, con clausura de fuerza producida por tension. En otros términos, el órgano T no puede acoplarse más que con elementos rígidos «positivos» (véase § 56), sobre los cuales se arrolla más ó ménos, por cuyo motivo deben presentar formas especiales.

Si aquí tambien comenzamos por el tornillo encontramos que la reunion de T con S suministra gran número de acoplos, superiores é inferiores, de uso muy generalizado. El tambor de cadena ordinaria de una grua nos ofrece el acoplo S,T, que podemos representar con la notacion abreviada (S,t); y la misma fórmula general se aplica exactamente al tambor de cuerda cilíndrica, entorno del cual se arrolla en hélice, como quiera que en tal caso el cilindro debe considerarse como un tornillo (véase § 15).

Los casos de acoplamiento de tornillos superiores $\widetilde{S}$ con T no son raros; pues se encuentran otros ejemplos en la rueda espiral de reloj de bolsillo (fig. 413), en los tambores de cuerdas cónicas que desde algunos años están en uso muy frecuente en las máquinas de eleva-

cion de minas, en el huso de las máquinas *Robert* para la hilatura (fig. 414), en la conoide con su cuerda arrollada en hélice (fig. 144). Esos diferentes acoplos de elementos son otros tantos representantes de la clase $(\widetilde{S},\iota)$, que comprende como forma de órden inferior la especie (S,ι) de que acabamos de hacer mencion. Si pasamos á R, es decir al caso límite de S, obtenemos el género (R,ι), del cual representa dos ejemplos la figura 142.

La clase más aproximada á la anterior está suministrada por el acoplamiento de T con $\widetilde{H}$, y en consecuencia debe representarse por $(\widetilde{H},\iota)$. Como representante del género $(\widetilde{C},\iota)$ podemos citar el acoplo formado por un tambor ordinario y por una cuerda que se arrolla sobre él dando cierto número de vueltas en espirales superpuestas.

Con $\widetilde{H}_z$ se deja acoplar la cadena T_z para suministrar la clase $(\widetilde{H}_z,\iota)$, de la que existen numerosas aplicaciones.

Las combinaciones del elemento T con los elementos rígidos $\widetilde{H}_{\tilde{s}}$ y $\widetilde{H}_s$ pueden comprenderse en la clase $(\widetilde{S},\iota)$, y por consiguiente es inútil hacer de ellas un exámen especial.

Ciertos *mecanismos de paro* que contienen órganos de tension, se han generalizado bastante esos últimos años. Pueden ser de simple accion (mecanismos corrientes), como en las muflas, de doble accion ó de reposo, perteneciendo á esa última categoria el muy conocido tambor de *Fowler* (fig. 415) que presta tan señalados servicios en la labranza al vapor y en las operaciones de halar por medio del cabrestante. Debemos por ende considerar las dos clases $(\widetilde{H},\iota)$; y $(\widetilde{H},\iota:)$ no solo como teóricamente posibles, sino tambien como generalizados y de uso práctico. Si en un mecanismo de escape ó paro de ese género, T se utiliza bajo la forma T_z, es decir, bajo la forma de cadena de eslabones, como por ejemplo, en el elevador de *Bernier*, el elemento H_z toma el puesto de H. Luego, tenemos que añadir á las precedentes las dos clases $(\widetilde{H}_z,\iota;)$ y $(\widetilde{H}_z,\iota:)$.

Nos encontramos que hemos apurado así las siete clases de elementos rígidos, y hemos demostrado para cada una de ellas la posibilidad del acoplamiento con un órgano de tension. Por tanto nos falta examinar solamente un acoplamiento, el de los órganos de tension entre sí. Hemos mencionado ya un acoplamiento de ese género en lo tocante á los procedimientos de la hilatura (§ 131); y tenemos además otro ejemplo en el resorte de torsion de la fig. 150, para el cual tenemos indudablemente el acoplamiento T,T, que se utiliza desde mucho tiempo. El símbolo para esa clase de acoplos de elementos es (T,).

§ 148

Acoplos de elementos con órganos de presion.

Hemos visto en el párrafo 56 que el órgano de presion Q puede tomar varias formas especiales: la forma líquida Q_λ, la forma gaseosa Q_γ y la forma granular $Q_{\tilde{g}}$ ó Q_g. Por más que esas formas no dejen de presentar diferencias bastante importantes, todas pueden, sin embargo, bajo el punto de vista cinemático, representarse con el símbolo general Q.

En virtud de su propiedad característica de no presentar resistencia más que en una sola direccion, la de la compresion, el elemento Q puede acoplarse con elementos rígidos de gran número de maneras. Segun esto se le puede combinar con todos los elementos de los acoplos comprendidos en las clases I á V (§ 146), sustituyendo á uno de los dos elementos de cada acoplo. Las turbinas, las hélices de barcos de vapor, las ruedas hidráulicas, los capsulismos de ruedas, las máquinas de malaxar, etc., dan ejemplos tan numerosos como variados de acoplos que contienen un órgano de presion. Así obtendremos las clases

$$(\widetilde{S},_q),\ (\widetilde{H},_q),\ (\widetilde{H}_z,_q).$$

Rigurosamente podrian distinguirse todavia las clases $(\widetilde{H}_{\tilde{s}\,q},)$ y su forma inferior $(\widetilde{H}\ ,_q)$, más nada impide comprenderlas en la notacion $(\widetilde{S},_q)$.

Con los órganos de presion se puede igualmente, como lo hemos observado en el párrafo 126, formar mecanismos de paro, ya sea corrientes, ya de reposo, y de los cuales los más importantes son las válvulas. Si aquí concebimos tambien la pieza de paro como un diente Z (lo que es muy admisible en atencion á las formas de la misma pieza en los mecanismos de elementos rígidos), obtenemos dos nuevas clases de acoplos que podemos representar por los símbolos.

$$(Q,_z;)\ \text{y}\ (Q,_z:).$$

En ninguno de los casos citados puede el acoplamiento tener efecto sin que exista al propio tiempo otro entre el órgano de presion y la cápsula ó el vaso V^- (fig. 145) que lo contiene. Fuera de ese acoplamiento, se encuentra además el del mismo órgano con el émbolo V^+ (fig. 146), de modo que la clase de acoplos de que se trata puede en general representarse por

$$(V,_q).$$

Antes hemos hecho notar (§ 41) que ese género de acoplamiento puede igualmente estenderse y realmente se ha estendido á los órganos de tension: la cadena de *Galles*, guiada en un tubo (fig. 147), y el freno de hoja delgada (fig. 148) nos dan ejemplos de ello. Sabemos tambien que el mismo principio se halla utilizado en ciertas máquinas destinadas á la fabricacion de objetos de alambre. Sin embargo, no estamos en la obligacion de constituir para la forma $(V,_\iota)$ una clase especial, puesto que efectivamente podemos hacerla entrar en la clase $(V,_q)$, observando que en los ejemplos anteriores el elemento dúctil utilizado puede considerarse como un órgano de presion.

Otro acoplamiento de Q que merece señalarse, es el que forma con T; y en realidad ese acoplamiento se hace muy fácilmente cuando el órgano de tension es de la forma T_z ó T_r, es decir, cuando está constituido por una cadena de eslabones ó de articulaciones. Numerosos ejemplos existen de acoplos de ese género, entre los cuales pueden citarse las norias hidráulicas de cangilones ó de discos que forman émbolo, los elevadores de los molinos harineros, las dragas, etc. Seria posible indicar con un signo especial la construccion particular de la cadena designando por T_v, por ejemplo, un órgano de tension dotado de cangilones ó de vasos; pero esa adicion no es necesaria, porque la indicacion de un acoplamiento entre T_z y Q espresa ya por sí sola que el órgano de tension está debidamente dispuesto para poder conducir el órgano de presion; ó en otros términos, el establecimiento de una fórmula para un acoplo entre T y Q supone implícitamente la posibilidad de ese acoplamiento ó acoplo. Por otra parte, no siempre es indispensable que el órgano de tension esté dotado de una disposicion para el arrastre del órgano de presion; y así por ejemplo, en la bomba de Vera una simple cuerda T_s es la que eleva el agua por adhesion (a). Como se vé, aquí nos hallamos en presencia de una clase de acoplos de elementos que ofrece en la práctica numerosas aplicaciones y que podemos designar con el símbolo $(T,_q)$.

Por último, podemos hacer entre dos órganos de presion Q, Q, un acoplamiento análogo al de T con T, que antes hemos examinado. Acoplamientos semejantes suelen encontrarse con frecuencia bajo una forma que puede designarse con el símbolo $(Q\gamma,\lambda)$; hállanse ejemplos de esto en el recipiente de aire de las bombas y de las máquinas de columna de agua, en las bombas espirales, en los fuelles de agua, etc. Pueden comprenderse de una manera general todos los acoplos de esta clase bajo el símbolo $(Q,_\iota)$.

(a) La bomba de cuerda suele atribuirse á *Brunel*, el constructor del túnel del Támesis; pero en realidad tiene un orígen mucho más antiguo. Véase Langsdorf, *Maschinencunde*, II, pág. 266, y Hachette, *Traité elem.*, pág. 134.

§ 149

Recapitulacion de los acoplos que contienen elementos dúctiles.

En la recapitulacion de los acoplos de elementos que hemos hallado en los dos párrafos precedentes podemos contentarnos con relacionar los símbolos generales de clases, puesto que actualmente conocemos el procedimiento que debe seguirse para la subdivision en especies y en géneros, procedimiento que hemos indicado con motivo de los acoplos formados de elementos rígidos. A las siete clases distintas que hemos encontrado entonces, debemos añadir ahora:

a Para los órganos de tension, seis clases:

VIII. $(\widetilde{S},_\iota)$	XI. $(\widetilde{H},_{\iota;})$
IX. $(\widetilde{H},_\iota)$	XII. $(\widetilde{H},_{\iota:})$
X. $(\widetilde{H}_z,_\iota)$	XIII. $(\widetilde{T},)$

b Para los órganos de presion, ocho clases:

XIV. $(\widetilde{S},_q)$	XVIII. $(Q,_{z:})$
XV. $(\widetilde{H},_q)$	XIX. $(V,_q)$
XVI. $(\widetilde{H}_z,_q)$	XX. $(T,_q)$
XVII. $(\widetilde{Q},_{z;})$	XXI. $(Q,)$.

En el caso en que fuese necesario indicar que el órgano de presion es un fluido, podria reemplazarse el símbolo q con λ ó γ (líquido ó gas).

Para una gran parte de los acoplos de elemplos contenidos en las 21 clases anteriores seria posible dar ejemplos tomados á la práctica de las máquinas; y para algunos en cambio no existen todavia aplicaciones. Sin querer entrar aquí en el exámen detallado de los diferentes acoplos, exámen que estaria completamente fuera de lugar, nos limitaremos á hacer constar como resultado de nuestras investigaciones que el número de los acoplos de elementos posibles es limitado y que la série entera de tales acoplos puede determinarse sintéticamente. Considerando como adquirido este último resultado, vamos á proceder ahora á la investigacion sintética de las cadenas cinemáticas.

§ 150

Modos de investigacion de las cadenas simples

Para la investigacion de las cadenas cinemáticas no es posible seguir un procedimiento tan directo y definido como el que hemos usado en el caso de los acoplos de elementos. Efectivamente, en este último caso la série de las formas de axoides, tal como la hemos expuesto en el capítulo II, nos ofrecia una base sólida y muy determinada, en la cual podíamos apoyarnos directamente; en tanto que aquí este recurso no puede utilizarse más que de una manera accesoria, como quiera que los movimientos relativos de los miembros de cadenas muy diferentes pueden, conforme sabemos, ser idénticos y corresponder por lo tanto á una misma especie de axoides. Podríamos en rigor alcanzar el resultado que nos proponemos, buscando todas las combinaciones posibles de 2, 3, 4 ó más acoplos, y haciendo variar de una manera sistemática las posiciones relativas de los acoplos para cada combinacion. Pero cumple hacer presente que la aplicacion de ese método seria muy penosa y tendria además el inconveniente de suministrar un gran número de combinaciones inutilizables ó imposibles; por lo cual parece muy preferible recurrir al empleo de otros métodos, aunque en apariencia sean ménos regulares.

De una manera general adoptaremos, como se hace amenudo en las investigaciones matemáticas, un procedimiento de induccion, y en cada série de problemas escogeremos el modo de tratamiento que nos parezca más adecuado á las condiciones particulares, lo que equivale á decir que procuraremos llegar á la solucion por *todos los medios*. No debemos perder de vista que aquí no se trata de establecer completamente la síntesis de las cadenas y que más bien debemos indicar una direccion general. Por todos esos motivos daremos ante todo de mano á las cadenas compuestas y examinaremos en primer lugar las cadenas simples todas, cuyas propiedades características de alguna importancia conocemos perfectamente. La conclusion á que hemos llegado al final del capítulo XI nos será de suma utilidad para ese estudio; ya que en efecto tenemos á la vista en la série de las combinaciones de miembros que pueden ejecutarse, que la cadena desmodrómica halle su puesto entre la cadena de clausura escesiva. Segun esto puede una cadena de este último género convertirse en cadena desmodrómica, merced á un aditamento de miembros por via inductiva, y el mismo resultado puede obtenerse de una cadena de clausura incompleta con una supresion de miembros. En el tratamiento de las cadenas procuraremos conservar en general el órden que hemos adoptado para la clasificacion de los acoplos de elementos, pero sin contraernos á él de una manera absoluta.

§ 151

La cadena de tornillo (S'_3).

Si se reunen en una cadena simple tres acoplos de tornillo que tengan el mismo eje, se obtiene la disposicion que está representada en la fig. 416 y puede designarse inmediatamente con la fórmula concentrada (S'_3). Esa cadena forma por sí misma una clase. Las tres fijaciones en a, b y c suministran tres mecanismos que no presentan entre sí ninguna diferencia esencial. Además, ignoramos si de ellas existen aplicaciones en la práctica.

Fuera de la especie que representa la clase (S'_3), da orígen á dos especies particulares, que se obtienen haciendo pasar uno de los tornillos á uno de los casos límites $S^\infty = P$ ó $S^0 = R$ ó C.

En la cadena de la fig. 417 los acoplos 1 y 2 han quedado acoplos de tornillos (S), en tanto que 3 se ha convertido en $(S^\infty) = (P)$; su fórmula viene entonces á ser (S'_2P'). Esa cadena no puede formar más que dos mecanismos distintos, pues los dos mecanismos $(S'_2P')^c$ y $(S'_2P')^b$ son semejantes. Constituyen dos variedades del *tornillo diferencial*, cuyo invento se atribuye á la vez á *Prony* y á *White*. Nuestras precedentes investigaciones ponen al lector en disposicion de conocer en la prensa de *Hunter* (a), en el tornillo diferencial del cerrajero (b), etc., simples modificaciones de $(S'_2P')^c$, que se deben á la inversion de los acoplos y á ciertas diferencias en el aspecto esterior de la forma constructiva. El mecanismo $(S'_2P')^a$ parece que no ha encontrado aplicacion hasta hoy dia.

Si se conservan 2 y 3 como acoplos de tornillo haciendo el acoplo $1 = (S^0) = (C)$ se consigue la cadena (S'_2C) de la figura 418, de la cual derivan los dos mecanismos $(S'_2C')^c = (S'_2C')^a$ y $(S'_2C')^b$. Este último mecanismo parece nuevo; por lo que toca al otro fué aplicado ya, y en particular por *Skinner* en un ingenioso mecanismo compuesto para la maniobra de un gobernalle (c).

Si se hace el acoplo $1 = (S^0) = (C)$, el acoplo 3=

(a) Moseley, *Mechanical principles, etc.*, vol. I.
(b) Moseley, *id... id.*, et Weisbach, *Mech.*, VIII.
(c) *Engineer*, 1868, vol. XVI, pág. 182.

$(S^{\infty})=(P)$, quedando solo el acoplo $2=(S)$, se obtiene la cadena (S'P'C') de la figura 154, que hemos encontrado ya diferentes veces. Proporciona los tres mecanismos $(S'P'C')^c$, $(S'P'C')^b$ y $(S'P'C')^a$, el primero de los cuales especialmente, como sabemos, recibió numerosas aplicaciones (véase §§ 43 y 107). En definitiva la síntesis nos ha dado aquí cuatro especies de cadenas que suministran seis mecanismos, tres de los cuales parecen ser enteramente nuevos. Fáltanos ahora aplicar nuestro método al caso en que uno de los elementos rígidos se halla reemplazado por un elemento dúctil.

La introduccion de un órgano de tension no suministra ningun resultado utilizable, pero sucede todo lo contrario con un órgano de presion. Si en efecto reemplazamos ante todo en la cadena que hemos encontrado en último lugar (S'P'C'), el miembro *b* por un líquido, conseguimos una cadena de la que es posible sacar varios mecanismos prácticos. La fórmula completa viene á ser en tal caso:

$$C^{+}\ldots \overset{a}{|}\ldots S,Q\ldots\ldots Q,P\ldots \overset{c}{|}\ldots C\overline{=}$$

y la fórmula concentrada:

$$(S,'_qP,'_qC')^e,$$

suponiendo fija la cadena en *c*.

Eligiendo *a* como miembro motor obtenemos la fórmula $(S,'_qP,'_qC')\overset{a}{\overline{c}}$, que representa varias máquinas: la bomba helicoidal, el tornillo de *Arquímedes*, el ventilador de tornillo, el mecanismo principal de la prensa de arcilla de *Schlickeysen*, etc.

Si en el mismo mecanismo el miembro motor es el órgano de presion *b*, la fórmula viene á ser: $(S,'_qP,'_qC')\overset{c}{\overline{b}}$ y representa entonces la turbina helicoidal sin directrices (a).

Con la cadena fija en *b* y con *a* como miembro motor se tiene la fórmula $(S'_q,P,'_qC')\overset{b}{\overline{a}}$, que representa el mecanismo principal de los barcos de hélice; *a* es el propulsor (la hélice), *c* el barco con el timon y *b* el agua.

El mecanismo de la fig. 418 está igualmente aplicado á una máquina conocida. Si en efecto reemplazamos el miembro *b* con un órgano de presion (aquí en particular con un líquido), la fórmula viene á ser:

$$C^{+}\ldots \overset{a}{|}\ldots S,Q\lambda\ldots\ldots Q\lambda,S\ldots \overset{c}{|}\ldots C\overline{=}.$$

Esa cadena fijada en *c* con $Q\lambda$ como miembro motor da el mecanismo $(S',\lambda_2C')\overset{a}{\overline{b}}$, que es el de la turbina de *Jonval* ó de *Henschel* (fig. 419). Con el fin de hacer la accion del agua eficaz los tornillos 2 y 3 se ejecutan como tornillos *superiores*, de suerte que rigurosamente la fórmula deberia contener $\widetilde{S},\lambda$, en vez de S,λ.

En suma, llegamos á colocar aquí unas al lado de otras una série de máquinas que en la práctica se diferencian mucho por sus formas y por las funciones que desempeñan, pero que en realidad derivan todas de una sola y misma cadena. Además, en el párrafo 154 encontraremos otras cadenas de tornillo.

§ 152

Cadenas de cilindros.

Hemos tenido ya ocasion en el capítulo VIII de estudiar las cadenas (C''_4) y (C'^{c}_{4}) y hemos hallado que podian dividirse en doce clases, á las cuales corresponden 54 mecanismos. Verdaderamente el método que entonces hemos seguido se parece bastante al procedimiento sintético, para que podamos dispensarnos de volverlos á estudiar. Consideraremos, pues, como adquiridos esos resultados, y nos limitaremos á investigar cuales son las otras cadenas simples que es posible formar con acoplos de elementos de la forma (C).

Si intentamos ante todo formar una cadena con tres acoplos de cilindros, inmediatamente vemos que conducen á una clausura escesiva (fig. 420) y que no hay por lo tanto ocasion de seguir más adelante nuestro exámen.

Cinco acoplos de cilindros cuyos ejes son paralelos ó están situados en un mismo cono, nos dan una cadena simple no desmodrómica, es decir, una combinacion que para nosotros carece igualmente de importancia.

Si reemplazamos uno de los acoplos paralelos con un acoplo normal ó cruzado normalmente, obtenemos una cadena que es desmodrómica y encierra cinco acoplos de cilindros, más ningun movimiento puede producirse en el acoplo normal. Este último acoplo puede en tal caso dejarse completamente á un lado, sin que afecte en nada al movimiento de la cadena, que así se

(a) Como por ejemplo la turbina del molino de Saint-Maur, descrita por *Leblanc*.

encuentra en realidad ser una cadena únicamente de cuatro miembros.

Si en vez de ser normal el acoplo, es oblícuo ó está cruzado oblícuamente como en la fig. 421, se tiene una cadena de clausura escesiva, en la que no puede ejecutarse ningun movimiento. Sin embargo no convendria deducir de lo dicho que hemos llegado al límite de las combinaciones posibles con los acoplos de cilindros; las dos últimas cadenas mencionadas pueden considerarse solamente como casos particulares de una cadena que contiene mayor número de miembros. Prosiguiendo nuestro estudio obtenemos primero con el aditamento de otra juntura en cruz y con la supresion del paralelismo de 1 y de 6, la cadena de seis miembros de la figura 422, que como la de la fig. 421, no es tampoco susceptible de movimientos. Con todo, es posible dar movilidad á los miembros de esa cadena dividiendo en dos el miembro que une las junturas en cruz, como se hace por ejemplo en la fig. 423, donde se encuentra intercalado un acoplo de cilindros cuyo eje comun pasa por 3 y 5. Los miembros *a* y *f* se mueven en planos diferentes, pero son de trabazon desmodrómica, merced al dispositivo de la pieza *bcde* que los reune.

La nueva cadena se compone de siete acoplos de rotoides y de una manera general puede designarse con el símbolo (C_7^+). Los mecanismos de manubrios cruzados que se forman con esa cadena, utilízanse con frecuencia en la práctica, como por ejemplo, en las máquinas de rebajar, para dar movimiento á la horquilla que haciendo pasar la correa de una polea á otra, produce el movimiento de vaiven del bastidor ó banco.

La cadena (C_7^+) da orígen á un gran número de casos particulares que permiten formar mecanismos y que merecerian un exámen completo y sistemático; pero ese exámen nos apartaria demasiado del asunto, como es fácil convencernos de ello remitiendo al lector á lo espuesto en el capítulo VIII para la cadena (C''_4), que es, sin ninguna duda, mucho más sencilla. Por tanto, debemos limitarnos á tratar brevemente algunos de los casos más interesantes que nos ofrece la práctica.

Bajo ciertas condiciones la cadena de seis miembros (C_6^+) puede tambien hacerse móvil y desmodrómica. Entonces halla en la práctica ciertas aplicaciones, que tampoco se presentan bajo una forma fácil de conocer. Cumple notar especialmente un punto, y es que en tales aplicaciones suele utilizarse generalmente *el principio de la reduccion del número de miembros.* (§ 76). Para lograr comprender bien los mecanismos de ese género es menester añadir ó suponer añadidos los miembros suprimidos.

Tomemos como ejemplo el mecanismo representado con la fig. 424 que aun á veces sirve para hacer girar en un cuarto de círculo los discos señales, suponiendo invariablemente unido el disco al miembro *e*. En el mecanismo reducido con la supresion de los miembros *b* y *d*, los miembros *c* y *f* están cruzados normalmente, y *a* y *e* tienen cilindros paralelos. A causa de esa disposicion los dos cilindros huecos 2 y 4 del miembro *c* tienen movimientos helicoidales con relacion á los cilindros llenos de *a* y *e* sobre los cuales giran. Para volver á tener completa la cadena sería preciso añadir los dos miembros *b* y *d*, que son ambos á dos de la forma C^-... ‖ ...P^+ y hacer de los elementos de *c* un acoplo de prismas huecos.

Otro ejemplo de la misma cadena nos proporciona el mecanismo de la fig. 425, propuesto por *Robertson* para una máquina de vapor (a). El miembro *a* tiene la forma C^+... ‖ ...C^+; el miembro *b*, C^-... ‖ ...P^+ está suprimido, pero el miembro *c* se conserva. En virtud de la supresion de *b* no se presenta bajo la forma que le es propia P... ⊥ ...C, sino bajo la forma C... ⊥ ...C. Se encuentra comprendido por el miembro *d*=C... ‖ ...C. *Robertson* utilizó ese último miembro como vástago de émbolo, es decir, como miembro motor de la cadena, suprimiendo por otro lado el miembro *e*=C... ⫴ ...P, de suerte que el émbolo está obligado á tomar un movimiento de rotacion oscilatorio alrededor de su eje, á la vez que un movimiento rectilíneo en sentido del eje del cilindro. La fórmula concentrada del mecanismo no reducido es:

$$(C''C''P^{\perp}C''C''P^{\perp})\frac{f}{d};$$

con la supresion de *b* y de *c* y la reunion de los símbolos de igual especie viene á ser:

$$(C''_2P^{\perp}C''_3P^{\perp})\frac{f}{d}-b-c.$$

No tenemos que examinar aquí el valor de esa máquina en el concepto práctico; y nos limitaremos á observar que ese ejemplo de síntesis empírico es muy á propósito para demostrar como la pasion de inventar llega á prescindir de todas las dificultades de construccion.

Robertson utilizó además para su máquina otra forma de la misma cadena, y se vió así inducido á la disposicion de la figura 426. En esta máquina solamente el miembro *e* está suprimido, si bien los miembros con-

(a) Véase Artizan, 1871, vol. XXIX, pág. 2; *Revue Industrielle*, 1874, página 192; Dinglers, *Journal*, 1874, vol. CCXIII, pág. 183.

servados están dispuestos en un órden diferente. La fórmula de la cadena no reducida es:

$$(C''C^{\perp}C^{\perp}P^{\perp}C''P^{\perp})\frac{f}{d};$$

y con la supresion de *e* y la reunion de los símbolos de igual género se trueca en:

$$(C''C^{+}_{2}P^{\perp}C''P^{\perp})\frac{f}{d}—e.$$

Fácil es encontrar otras formas de la cadena (C^{+}_{6}); pero dejamos al lector el cuidado de buscarlas, limitándonos á observar que algunas de esas formas han encontrado aplicaciones en la práctica.

La cadena de cilindros de siete miembros puede volverse desmodrómica con la adopcion de dispositivos diferentes de los que antes hemos mencionado; y eso es lo que demuestra, por ejemplo, la figura 427. Haciendo de longitud infinita uno ó varios miembros se puede alcanzar para esa cadena una variedad grandísima de formas. Como ejemplo muy interesante citaremos el mecanismo de la figura 428, que fué aplicado por *Brown* (a) como mecanismo principal de una máquina de vapor. Esa disposicion si no estamos equivocados, habia sido antes utilizada con el mismo fin por *Maudslay* (53). Aquí el miembro *a* es de la forma $C^{+}...\angle...C^{+}...$; el miembro *b* está representado por $C^{-}...\square...G$, lo que equivale á decir que se compone de un cilindro y de una esfera, cuyo centro se halla en una normal al eje 2, trazada por el punto de interseccion de 2 y de 1; esa esfera tiene su elemento conjugado en la pieza de corredera *e*.

La articulacion esférica que aquí encontramos, es simplemente el resultado de la supresion de uno de los tres acoplos de cilindros, cuyos ejes se cortan en ángulo recto en un mismo punto; y de consiguiente debe indicarse con 3,4,5. La correderita $f=P^{+}...\perp...P^{+}$ es en la máquina mencionada el vástago del émbolo, es decir el miembro motor. La fórmula concentrada del mecanismo debe, pues, escribirse:

$$(C^{\angle}\,C^{+}_{4}P^{\perp}P'')\frac{g}{f}—c—d.$$

Con objeto de hacer más fácil la comparacion con la forma general (C^{+}_{7}), hemos añadido la figura 429, en la que los dos acoplos de prismas (que podiamos ya considerar como R^{∞} ó C^{∞}) están reemplazadas con los acoplos de cilindros 6 y 7. La fórmula de ese mecanismo suponiéndolo fijo en *g*, es: $(C^{\angle}\,C^{+}_{4}C''C^{+})^{g}$.

(a) *Engineering*, febrero 1867, pág. 158.

Los ejemplos anteriores bastan para demostrar la importancia de las cadenas (C^{+}_{7}) y (C^{+}_{6}) y pueden conceptuarse como una introduccion á su síntesis completa. El número de los miembros que poseen esas formas parece además ser el mayor que pueda utilizarse en una cadena simple desmodrómica formada de acoplos inferiores de elementos.

§ 153

Cadenas de prismas.

Varias veces (§§ 64 y 108) hemos tenido ya ocasion de examinar la cadena cinemática de prismas de tres miembros $(P^{\angle}_{3})$ que puede llamarse tambien cadena de cuñas. La fig. 201 reproduce esta cadena bajo una forma que nos es familiar; la fig. 430 representa una cadena de igual género bajo una forma distinta en la que los tres acoplos de prismas son acoplos cerrados. Si en vez de tres acoplos se intenta no combinar más que dos, resulta un acoplo único de prismas ó una cadena de clausura excesiva.

En cambio, con cuatro acoplos de prismas, se puede fácilmente formar una cadena simple, como la de la figura 431, cuya fórmula es $(P^{\angle}_{4})$. Puede imaginarse la cadena $(P^{\angle}_{3})$ como derivada de esta última, suponiendo que el ángulo entre los acoplos 3 y 4 mengüa hasta el punto de llegar á ser nulo. La cadena $(P^{\angle}_{4})$ puede además considerarse en sí misma como un caso particular de la cadena (C''_{4}), en la que los cuatro miembros vendrian á ser de una longitud infinita. Estudiando más á fondo la cuestion, es fácil notar que la cadena $(P^{\angle}_{4})$ no es de clausura desmodrómica. Efectivamente, si suponemos por ejemplo, que los miembros *b* y *c* están fijos los dos á la vez (lo cual da por resultado hacer inmóvil el acoplo 3), se ve que la cadena permanece, no obstante, susceptible de movimiento y se reduce simplemente en este caso á la cadena de la figura 201.

§ 154

Cadena de tornillos cruzada y oblícua.

En los desenvolvimientos relativos á la cadena de cilindros (§ 152) hemos hallado que el límite del número de los miembros para una cadena simple de esa especie era siete. Pero no habíamos llegado por decirlo así al caso más general, puesto que el acoplo de cilindros no constituye en realidad la forma más elevada de los acoplos de encaje (ó acoplos inferiores), y que

esa propiedad pertenece, como sabemos, al acoplo de tornillos (S). De ahí resulta que debemos llegar á la forma más general de las cadenas formadas con acoplos inferiores reemplazando por doquiera (C) con (S) en la cadena de cilindros más desarrollada; y esa forma más general deberá por lo tanto corresponder al símbolo (S_7^+). El exámen sintético completo de esa última clase de cadenas en que verdaderamente entran como casos particulares todas las cadenas discutidas en los párrafos 151 á 153, contituye sin duda una de las cuestiones que debe tratar todavia la cinemática sintética. Más adelante volveremos á esa cuestion. Por de pronto no creemos que debamos limitarnos á la indicacion del símbolo de esa cadena, y vamos á examinar algunas de las formas bajo las cuales se encuentra aplicada en la práctica.

Si nos referimos á la cadena (C_7^+) que representa la figura 427, podemos observar que el cilindro 2 en vez de estar dispuesto normalmente puede establecerse oblícuo ó cruzado, como por ejemplo, en la fig. 432, por medio de la cual puede realizarse un movimiento muy complicado. Sin ahondar el exámen de esa cadena podemos observar lo que viene á ser en el caso particular en que los cilindros 1 y 2 son *conaxiales*; y entonces obtenemos la cadena representada por la fig. 433. Esa cadena no es de clausura desmodrómica; pues el miembro *a* puede girar alrededor de su eje (el eje comun de 1 y 2), sin que por ello resulte ningun movimiento para los otros miembros, en tanto que relativamente á los mismos esta cadena es de clausura excesiva, como quiera que en su movimiento relativo á *a*, actuan como un miembro único, ó mejor dicho, como un simple elemento.

Pero esas condiciones pueden modificarse enteramente si se convierte uno de los acoplos de cilindros 1 y 2 en acoplo de tornillos, es decir, si se trueca (C) en (S). Si por ejemplo, suponemos que el acoplo así trasformado sea el acoplo 2 y que al propio tiempo los miembros estén ligados de suerte que los ejes de 6 y 4 no estén en el mismo plano, obtendremos una cadena que está representada en elevacion y en planta por las figuras 434 (1.ª y 2.ª). Esa cadena que viene á ser de clausura desmodrómica puede designarse con el nombre de *cadena de tornillos cruzada*. Su fórmula (comenzando por el acoplo 1) es: ($C'S^+C_{\frac{1}{2}}^+C^+C^+$).

Un caso más general de la misma cadena puede considerarse como constituido por la cadena de la figura 432. Cumple notar que una condicion de movilidad de esa cadena estriba en que los ejes de los acoplos 4 y 2 se corten constantemente, así como los de los acoplos 6 y 1.

Si en la cadena de la fig. 433 se reemplaza el acoplo de cilindros 2 con un acoplo de tornillos dejando aun los ejes de 4 y de 6 en un mismo plano, no puede producirse movimiento alguno en los acoplos 4 y 6, que pueden por lo tanto suprimirse. La cadena toma en tal caso la forma representada en la fig. 436.

Aquí en vez de los siete miembros no tenemos más que cinco; puesto que *f* y *e* se encuentran efectivamente reunidos para formar un solo miembro lo mismo que *d* y *c*. La fórmula de la cadena es: ($C'S^+C''_2C^+$). Esa cadena de cinco miembros encuentra en la práctica numerosas aplicaciones. Fijándola por ejemplo en *d*, se alcanza un mecanismo que se utiliza en las distribuciones de tornillos para locomotoras; y así tambien la fijacion en *e* suministra un mecanismo que se emplea para la maniobra del timon de un barco, en las prensas articuladas, etc.

Si en la cadena anterior suponemos además que el miembro *c* es infinitamente largo, caemos en el dispositivo de la fig. 437, que encuentra igualmente un gran número de aplicaciones. Su fórmula es: ($C'S^+C^+P^+C^+$).

Suponiendo ahora que el miembro *e* sea igualmente infinito, ó en otros términos, que el eje 5 se halle á una distancia infinita, la cadena toma la forma representada en la fig. 438. El ángulo variable comprendido entre los miembros *b* y *c* en la fig. 437, es aquí constante, y por consiguiente el acoplamiento cilíndrico 3 es supérfluo, de tal manera que en definitiva obtenemos una cadena de cuatro miembros ($C'S^{\angle}P_{\frac{\angle}{2}}^{\angle}$), que se puede designar con el nombre de *cadena de tornillo oblícua*. Esa cadena fija en *d* proporciona un mecanismo que ha encontrado una aplicacion muy ingeniosa en la máquina de dividir de *Nasmyth* (a) que está representada en la fig. 439. El punto *d* es aquí la plataforma de la máquina de dividir y *c* el carro. Haciendo variable el ángulo comprendido entre los acoplos 3 y 4, el movimiento de avance del carro puede hacerse con cada vuelta de rotacion del tornillo sumamente pequeño entre límites bastante estensos.

La cadena general (S_7^+) se presta como vemos, á gran número de aplicaciones prácticas bastante notables, sin contar que se halla igualmente utilizada en varias cadenas compuestas.

§ 155

Sustitucion de acoplos superiores á los acoplos de rotoides.

Hemos visto antes que las cadenas (C_7), (C_6), (C_5) y

(a) *Civil Ingenieur*, 1863, pág. 215, y 1864, pág. 21.

(C_4), con sus diferentes casos particulares, pueden considerarse como derivados de la cadena (S_7), que es la forma más elevada de las cadenas formadas de acoplos de encaje. En cuanto al elemento C, puede considerársele como un caso particular, no solamente de S, sino tambien de otras formas superiores, máxime de los cilindros y conos de bases cualesquiera $\widetilde{C}$ y $\widetilde{K}$, que conforme hemos visto en el capítulo III (§ 21 y siguientes) pueden entrar en la composicion de los acoplos de elementos del órden superior. Así pues, si introducimos el acoplo ($\widetilde{C}$) en las cadenas en que se encuentra el acoplo (C), las leyes de los movimientos de esas cadenas se hallarán esencialmente modificadas. De ese modo podemos llegar á formar una clase de cadenas en estremo numerosa y realizar de consiguiente una grandísima variedad de movimientos desmodrómicos.

La sustitucion de ($\widetilde{C}$) en lugar de (C) en la cadena general (C_7), no es, sin embargo, posible en todos los casos. Así por ejemplo, no puede efectuarse con la cadena (C^4_4) ni en general siempre y cuando se trate de dos acoplos de cilindros inclinados uno á otro, para los cuales es esencial que los ejes de los dos elementos conjugados *coincidan*, condicion que no puede llenarse con elementos de acoplos de cilindros superiores. Por lo demás, en los casos de ese género puede suprimirse la dificultad recurriendo á un acoplamiento por conos, ó sea reemplazando (C) con ($\widetilde{K}$), puesto que los ejes instantáneos de un acoplo de esa especie se cortan siempre en un mismo punto.

Además, no se ha de creer que la introduccion de ($\widetilde{C}$) ó de ($\widetilde{K}$) en vez de (C), constituya un procedimiento puramente especulativo. Efectivamente, se encuentran en la práctica varias cadenas de la clase (C''_4), en las cuales figura el acoplamiento ($\widetilde{C}$). Como ejemplo muy difundido puede citarse el mecanismo de *Hornblower* (fig. 440), enfrente del cual se halla el mecanismo de manubrio, del cual se deriva (fig. 441). Este último mecanismo es «un manubrio de corredera rotatorio» disminuido (Véase §§ 72 y 76), cuya fórmula es: $(C''_1P^{\perp}_2)^d$—*b*. En el mecanismo de la figura 440 el triángulo curvilíneo $\widetilde{C}$ que antes hemos estudiado (§ 26), se introduce en vez del gorron 2. Su elemento conjugado y de seccion cuadrada está suprimido, como el miembro correspondiente *b* en la otra cadena: Su fórmula, pues, será: $(C''\widetilde{C}P^{\perp}_2)^d$—*b*.

Volviendo las dos cadenas al estado completo con la reintroduccion de los miembros suprimidos, se obtienen los dos mecanismos representados en las figuras 442 y 237. Las trayectorias polares entre *a* y *c* son bastante complicadas; más no es esta la ocasion de examinarlas aquí. El mecanismo de que acabamos de hacer mencion, se ha empleado algunas veces en la práctica sin reduccion de miembro alguno. A lo ménos podemos citar un caso en que el acoplo 2 se encuentra en realidad completamente utilizado. La figura 443 representa ese mecanismo bajo forma esquemática y con las letras que hemos adoptado para representar los diferentes miembros: su fórmula es: $(C''\widetilde{C}''C''P^{\perp})^{\frac{d}{a}}$. Sirve para mover la placa de distribucion de una máquina vertical de *Woolf* (a), de la fuerza de 100 caballos. Para hacer más fácil la comparacion hemos representado al lado el mecanismo $(C''_3P^{\perp})^{\frac{d}{a}}$ que ya conocemos. En ambos mecanismos se ha hecho uso, para el acoplo 2, del procedimiento de ensanche (§ 71).

Cumple mencionar aquí como de paso, que toda la série de las formas que suministran los *ensanches de gorrones* en la cadena (C''_4), puede utilizarse directamente en las cadenas superiores que acabamos de examinar. Es una observacion que hasta hoy se habia escapado á la práctica, de donde ha resultado forzosamente que no se ha podido sacar partido de un gran número de formas que, sin embargo, presentan ciertas ventajas bajo el punto de vista de la construccion. En realidad, conforme lo demuestra el ejemplo precedente, existen varios casos para los cuales los mecanismos de discos curvilíneos pueden utilizarse con tanta facilidad y ventaja como el escéntrico ordinario de las máquinas de vapor.

Entre las cadenas de la clase (C_7) ninguna de las que contienen más de un acoplo superior de cilindros ha sido utilizada hasta hoy, á lo ménos que sepamos. Sin embargo, es muy probable que podrian hallarse útiles aplicaciones para una parte de las formas en estremo numerosas que hemos comprendido ser posibles. Por lo demás, aquí debemos limitarnos á las indicaciones generales que acabamos de dar.

§ 156

Cadenas simples de ruedas.

De las cadenas simples que pueden formarse con ruedas, sus ejes y ciertos accesorios (§ 43), preséntase en primera línea de cadenas de ruedas de friccion. Las ruedas circulares con el puente que cierra el acoplo, suministran la cadena ($C^+_2H_1$), con las formas espe-

(a) Instalada por *Ad. Hirn*, en la fábrica del Logelbach.

ciales ($C_2^{\perp}K_1$) y (C''_1C_1) Rara vez se emplean las ruedas hiperboloides; pero no carecen absolutamente de aplicaciones. Se encuentran tambien ciertos ejemplos de utilizacion de formas aun más elevadas; pues la prensa de *Dick* para el algodon tiene ruedas de friccion espirales. Las ruedas de ese género, por lo demás, casi no se encuentran más que en cadenas compuestas. No queremos hacer más que señalarlas aquí en razon de su importancia en algunas industrias y particularmente en la del laminaje, donde hasta los cilindros laminadores son verdaderas ruedas de friccion.

Por lo que toca á la cadena simple de ruedas dentadas ($C_2\widetilde{H}_2$), con toda la série de sus formas especiales, podemos sin duda alguna dispensarnos de estudiarla, como quiera que hemos examinado ya (§ 144) las diferentes formas que puede afectar el acoplamiento $\widetilde{H}_2$. Sin embargo, debemos señalar aquí con respecto á esa cadena el empleo de un órgano de presion. Los capsulismos de ruedas que hemos examinado en el capítulo XI, pertenecen á las cadenas compuestas; si bien existen cadenas simples en las que un fluido (órgano de presion) sustituye una de las ruedas, por tomar el acoplamiento de ese fluido con la cápsula el lugar de uno de los acoplos de cilindros. Como ejemplos de cadenas de ese género podemos citar la rueda hidráulica ordinaria, la rueda elevatoria, la rueda de palas de los barcos de vapor (párrafos 61 y 62), así como algunas turbinas y varias bombas centrífugas.

§ 157

Cadenas de brazos.

Hemos dicho ya (§ 120) algunas palabras sobre las cadenas de brazos y hemos hecho resaltar la necesidad de constituir con ellas una clase especial. La figura 378 representa una cadena de ese género, cuya fórmula debe escribirse: (C''_2C_2,); la coma colocada á continuacion de C_2 está destinada á indicar que no se trata de un verdadero acoplo de ruedas dentadas. Las formas especiales en que puede convertirse esa cadena son muy numerosas, y sin embargo, la forma de la figura 378 es de un grado muy inferior relativamente á la forma más elevada. Esa última forma es la de la cadena ($C_2^{+}\widetilde{H}_3^{\sim}$), constituida por dos acoplos del género (R)=(C), clase I, y de la forma superior de la clase IV (§ 146). Se consigue una forma superior todavia más general, reemplazando, conforme hemos indicado en el párrafo 155, (C) con ($\widetilde{C}$) ó con ($\widetilde{K}$); siendo este un procedimiento que aun para las cadenas simples de ruedas dentadas, conduce á los problemas del órden más elevado.

De esa forma más general de las cadenas de brazos derivan como casos particulares los mecanismos muy importantes que hemos designado con el nombre de mecanismos de escape ó paro. Y se obtienen introduciendo en la cadena de que se trata, los acoplos de las clases VI y VII (§ 146), lo cual da las cadenas:

$$(C_2\widetilde{H}_2;) \text{ y } (C_2\widetilde{H}_2:)$$

con sus simplificaciones diversas por estremo numerosas, cuyas formas típicas hemos podido conocer en el capítulo XI. Por esa razon podríamos considerar el asunto como terminado ó apurado; pero en el concepto de las aplicaciones nos parece interesante examinar brevemente una forma especial de paro, de la cual representan dos disposiciones las figs. 445 y 446, disposiciones que pueden utilizarse ambas á la par como trinqueteos. La de la fig. 445 fué designada por *Redtenbacher* con el nombre de *rueda de un diente;* si bien la denominacion más generalizada es la de *cruz de Malta,* sacada de la forma de la rueda *b;* y lleva tambien el nombre de *escape de Ginebra,* á causa de su empleo en los mecanismos de cajas de música, de las cuales Ginebra es el centro principal de la fabricacion. Como puede verse por la fig. 446, la presencia de un solo diente en la rueda *a,* no constituye en modo alguno una condicion esencial de ese mecanismo. Con todo, en el mayor número de casos la rueda *b* compuesta de una série de segmentos se parece á la forma de una estrella, y por esa razon se ha propuesto igualmente dar al mecanismo el nombre de *rueda de estrella* (a). Es evidente que aquí nos encontramos en presencia de una forma especial de la cadena ($C_2\widetilde{C}_2$,) ó bien, si se prefiere, de ($C_2\widetilde{H}_2$,) y que se puede representar con una fórmula particular, á fin de impedir toda confusion con las otras cadenas de ruedas. Como el carácter más saliente de esa rueda es su dentaje en segmentos, podemos utilizar el símbolo A y representar el género de cadenas de que se trata aquí con la fórmula (C_2A_2:) ó bien de una manera más general con ($C_2\widetilde{A}_2$:).

Si en el mecanismo (C''_2A_2:) se hace infinito el radio de la rueda *b* esa rueda se trasforma en barra que lleva las muescas curvilíneas y las cavidades destinadas á recibir los dientes. La fórmula se trueca entonces en: ($C^{\perp}P^{\perp}A''_2$:). Como ejemplo interesante podemos citar el mecanismo de movimiento del pestillo en la cerradura de *Bramah* (fig. 447). La pieza ABCD per-

(a) Véase *Polyt. Zentralblatt,* 1864; Aster, *Sternräder.*

tenece al pestillo *b;* la curva 2 que lleva, corresponde al diente 2 de la pieza *a;* AB y CD son muescas curvas adyacentes practicadas en la misma pieza *b*, que corresponde á las muescas circulares de la rueda *b* en la figura 446. La pieza *a* se encuentra aquí desprovista de un segmento de cilindro conjugado con esas muescas ó rebajos, de suerte que es preciso contentarse con la accion del espigon 2, la cual parece, sin embargo, suficiente para el objeto propuesto. Análogas disposiciones se encuentran en otras cerraduras, si bien que bajo formas ménos distintas. En la cerradura de *Bramah* la pieza *a* se halla además sujeta á un mecanismo particular de paro en reposo, cuya ingeniosa disposicion es muy conocida de los especialistas.

En los mecanismos de brazos y los de trinqueteo, que son formas particulares de aquellos, suelen figurar órganos de presion; pero en tal caso siempre forman cadenas compuestas.

§ 158

Cadenas de poleas.

La propiedad particular que ofrecen los órganos de tension de obrar únicamente en un solo sentido, es decir, de ser monocinéticos, hace bastante difícil la utilizacion de esos órganos para formar de ellos cadenas simples, combinándolos con elementos rígidos (§ 41). No obstante, hallamos una cadena simple de ese género en la trasmision por correa y por cuerda (fig. 160), así como en la trasmision por cadena, en la que T se presenta bajo la forma de T_2. Pasando por alto la índole particular del órgano de tension, una cadena semejante debe escribirse: $(C_2R,_{t_2})$; la forma superior es $(\widetilde{C}_2\widetilde{H},_{t_2})$ ó $(C_2\widetilde{H},_{t_2})$; pero sus aplicaciones son raras en estremo. Cúmplenos consagrar aquí una mencion especial á un caso límite de la cadena $(C_2R,_{t_2})$. Si en una trasmision por correa cruzada (fig. 448) suponemos que los discos *a* y *c* se aproximan hasta el contacto y que el radio del disco *c* se vuelve infinitamente grande, el acoplo 4 se convierte en un acoplo de prismas y el órgano T se fija en ambos estremos del prisma en que se ha convertido *c*, conforme lo indica la fig. 449. Importa notar que á consecuencia de la fijacion del órgano T la cadena no tiene más que tres miembros en vez de cuatro. Su fórmula completa es entonces:

$$C^{+}.. \mid ...R,T^{\pm}.....P^{\pm}_{=}P^{-}...\perp...C_{=}$$

y su fórmula concentrada: $(C'R,_1P^{\perp})$. Esa cadena fijada en *c* ó en *d* da márgen á varias aplicaciones.

Las muflas ordinarias son cadenas no desmodrómicas, de simple clausura de fuerza, por cuyo motivo no deben encontrar aquí lugar á estudio. Si se las completa introduciendo una clausura por acoplo, se convierten en cadenas compuestas (aun cuando tengan la disposicion simplificada de poleas indicada en el párrafo 43). Las cadenas que así se obtienen son muy interesantes y sobre ellas diremos un poco más adelante (§ 160) algunas palabras. La misma observacion puede estenderse á un número asaz considerable de aplicaciones importantes de los órganos de tension.

§ 159

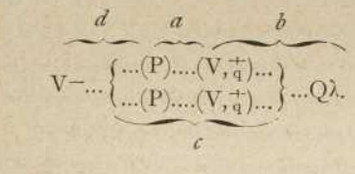
Cadenas con órganos de presion.

En las precedentes investigaciones hemos tenido que considerar varias veces el reemplazo de un elemento rígido por un órgano de presion, y de consiguiente, hemos tenido ocasion de examinar cadenas simples en las que los órganos de presion desempeñan importante papel. La propiedad monocinética de esos órganos se ostenta siempre en todas esas cadenas, como de la mayor importancia; y en el mayor número de casos se encuentra que es necesaria la clausura de fuerza. Si se quiere evitar, es forzoso recurrir á las cadenas compuestas. El establecimiento de cadenas simples desmodrómicas con órganos de presion parece imposible. Así la cadena simple de la fig. 146, cuya fórmula completa es:

$$\overbrace{P^{+}...}^{a} \mid \overbrace{...V^{+},Q\lambda.....Q,V^{-}...}^{b} \mid \overbrace{...P_{=}}^{c}$$

y la fórmula concentrada $(PV,^{+}_{q}V,^{-}_{q})$, es esencialmente de clausura de fuerza. En el caso de no existir esa clausura, el agua *b* se escaparia por el tubo. Conviene además añadir que esa última disposicion es utilizable, y realmente se utiliza, como bomba de mano.

Cerrando el tubo de escape con un segundo émbolo, se obtiene la disposicion muy conocida de la fig. 157. La cadena tiene entonces cuatro miembros en vez de tres, pero constituye ya una cadena compuesta, puesto que dos de sus miembros son ternarios; el agua *b* está acoplada con los tres elementos 2, 3 y 5, de igual modo que el cuerpo *d* lo está con los tres elementos 1, 4 y 5. Su fórmula es:



Esa cadena no es de clausura desmodrómica, toda vez que la clausura de fuerza sigue siendo una condicion de su existencia.

Un medio de introducir la clausura por acoplos en esa cadena y otras análogas consiste en lo que podemos llamar el *doblamiento* de la cadena. Hemos visto ya el empleo de ese procedimiento en la trasmision por correa (§ 44), y con ese motivo hemos indicado ya el doblamiento ó duplicacion de la cadena actual, tal como está representado con la figura 161. Todos los movimientos de esa nueva cadena son de clausura por acoplos; pero aun cuando no tenga más que cinco miembros, constituye una cadena compuesta más completamente todavia que la cadena anterior. Sea cual fuere el medio empleado para introducir la clausura por acoplos en la cadena de la figura 146, forzosamente se tiene siempre una cadena compuesta; y esto es lo que ocurre, por ejemplo, en el caso en que deba acudirse á la adicion de un mecanismo de palanca destinado á hacer los movimientos de ambos émbolos dependientes uno de otro.

Incidentalmente puede observarse que el principio de la duplicacion de las cadenas podria igualmente aplicarse al caso de la mufla, si se quisiera reducirlo á formar una cadena de clausura desmodrómica.

§ 160

Cadenas compuestas.

En el curso de nuestras investigaciones sintéticas relativas á las cadenas simples hemos llegado varias veces al límite en que comienza el dominio de las cadenas compuestas, y por ende hemos tenido que reconocer que no podriamos dispensarnos de abordar la síntesis de estas últimas cadenas, sin esponernos á pasar en silencio varios casos particulares de notoria importancia. Más como el número de las combinaciones que se pueden formar uniendo unas cadenas cinemáticas á otras, es casi ilimitado, conviene examinar si realmente es necesario someter á la síntesis cada uno de los problemas que pueden encontrarse en esa direccion, ó si por el contrario, existe entre las diferentes clases de problemas alguna distincion que permita simplificar el trabajo.

Afortunadamente hay una distincion de ese género que se funda en el modo mismo de composicion de las cadenas. Puede, en efecto, obtenerse una cadena compuesta por la yuxtaposicion de movimientos ó de cadenas simples ya conocidas, y en este caso no da ningun resultado nuevo, ó por el contrario, puede presentar una nueva disposicion enteramente nueva. Es muy obvio que el tratamiento debe ser esencialmente diverso, segun se haya obtenido la cadena por el uno ó por el otro de esos modos de composicion. Eso es lo pretendemos esplicar con algunos ejemplos.

Comenzando por un caso muy sencillo podemos observar que bajo el punto de vista cinemático nada nuevo se consigue si á una trasmision por correa se añade otra trasmision por correa, ó bien una trasmision por engranajes á otra trasmision del mismo género. Las velocidades de rotacion relativas de las diferentes partes pueden muy bien modificarse, pero la índole de esas rotaciones es exactamente la misma que la de las cadenas simples componentes, y no se saca de la composicion otra ventaja más que la de la utilizacion repetida de una sola y misma forma de mecanismo.

La figura 450 es la representacion esquemática del mecanismo principal de una máquina de vapor de balancin. La cadena que aquí encontramos se compone de siete miembros a, b, c, d, b_1, a_1, d_1, y es, sin duda alguna, una cadena compuesta. Está constituida por un manubrio de impulsion curvilíneo $a, b, c, d, = (C''_4)^d$ y un manubrio de impulsion desviado $(C''_3 P^+)^c$, que está representado con la fig. 244 bajo una forma que ya conocemos. La composicion consiste en la reunion de los miembros d y c_1, para formar una armadura única, y en la de los miembros c y b_1 en un solo miembro ternario que constituye el balancin. En virtud de esas trabazones los ángulos de oscilacion de c y de b_1 son iguales y el curso del miembro d_1 se encuentra en relacion determinada con el radio del manubrio a. Cada uno de los dos mecanismos, además, conserva cabalmente los movimientos que le son propios y puede considerarse enteramente separado.

Muy al contrario sucede con el mecanismo compuesto de la figura 167, que hemos tenido igualmente ocasion de estudiar antes. Este mecanismo es un acoplo de manubrios paralelos constituido por dos cadenas de la forma $(C''_2 \parallel C''_2)$, cuyos miembros d son iguales y están invariablemente trabados uno á otro, en tanto que los miembros a y c están combinados para formar miembros ternarios. Por lo que sabemos, esa cadena compuesta $2(C''_2 \parallel C''_2)$ goza de la propiedad de asegurar el paso de los puntos muertos (§§ 46 y 66). Esa propiedad es únicamente debida á la composicion

que ha dado de ese modo al resultado de la combinacion de las dos cadenas simples un atributo nuevo que no tenian tomadas separadamente.

Otro ejemplo nos proporciona el acoplo de manubrios antiparalelos (figura 171) que hemos estudiado ya en los párrafos 47 y 67. Entonces no hemos hecho notar que esa cadena era compuesta, por más que el número de miembros de la cadena (C''_4) fuese el mismo. Compónese de cuatro miembros conocidos *a*, *b*, *c*, *d* y de otra cadena cuyos miembros son A1B, C4D y *d*. Su fórmula completa puede escribirse:

$$C^{+}\overset{a}{...} \parallel ...(Z)... \overset{c}{\parallel} ...(C)... \overset{d}{\parallel} ...C\equiv.$$

El miembro *d* que constituye el puente, es idéntico al puente *d* de la cadena (C''_4); los dos miembros C... ‖ ...Z están reunidos con los miembros *a* y *c* para constituir miembros ternarios. Consideradas separadamente las dos cadenas no son susceptibles de un movimiento contínuo, como quiera que la cadena (C''_4) no está cerrada en los puntos muertos y la cadena (C''_2Z'') tampoco lo está fuera de esos puntos.

Tales ejemplos bastan para demostrar claramente la diferencia que existe entre las dos clases de cadenas compuestas. Proponemos designar las que hemos examinado en último término, con el nombre de cadenas *combinadas*, reservando el nombre de cadenas *mezcladas* (a) para las otras.

Las cadenas combinadas forman esencialmente parte del dominio de la síntesis cinemática, mientras que las otras no deben tomarse forzosamente en consideracion.

§ 161

Ejemplos de cadenas combinadas.

Teniendo las cadenas compuestas mayor número de miembros que las cadenas simples, los mecanismos que pueden formarse con ellas deben dar orígen á aplicaciones relativamente mucho más numerosas que los mecanismos derivados de esas cadenas simples. Su exámen por muy poco completo que fuese, nos llevaria á investigaciones demasiado extensas, para poderlas colocar en este párrafo. Por lo demás, el objeto que nos hemos propuesto es más bien el de indicar la existencia y naturaleza de los problemas, que el de tratarlos de una manera completa. Creemos, por lo tanto, que nos importa concretarnos á algunos ejemplos.

Un número inmenso de cadenas compuestas (combinadas y mezcladas) puede formarse por medio de las cadenas de la clase (C''_4) y de sus modificaciones. Entre las cadenas mezcladas que de ahí provienen, algunas pueden igualmente dar resultados nuevos, si están fijadas en ciertos miembros. La cadena representada por la figura 451 es una cadena combinada. Se compone de dos cadenas de la fórmula (C''_4); la primera es *a*, *b*, *c*, *d*, y la segunda *a*, *e*, *f*, *b*.

Si observamos que las longitudes de los diferentes miembros pueden todas variar entre límites muy estensos, y que á más pueden aumentar hasta el infinito, comprenderemos que el caso general representado en la figura pueda dar márgen á un número enorme de casos particulares. Por ejemplo, si suponemos que los miembros *e* y *f* se vuelven infinitos y que además los ejes de los acoplos en cada uno de los dos miembros ternarios (1, 2, 5 y 2, 3, 7), están en un mismo plano, se llega á la combinacion de la fig. 452. En el caso en que la cadena original (C''_4), en que *a*, *b*, *c*, *d* es un paralelógramo (como en la figura), se obtiene una cadena combinada que goza de algunas propiedades notables, por más que hasta ahora no se hayan utilizado. La línea 7,4′ paralela á 1,2,5 es constantemente igual á 1,2, y además la longitud 1,4′ es constante. Por lo tanto las líneas 5,6 y 1,4 prolongadas, se cortan siempre en un mismo punto O. Luego, si se fija la cadena en *d*, se obtiene un mecanismo que puede servir para guiar la barra *e*, de manera tal, que su eje pasa siempre por un punto que está fuera del mecanismo y que hasta puede ser inaccesible.

Dando una longitud infinita á *e* y haciendo infinitos los miembros *f* y 3,7, se consigue la cadena que está representada por la fig. 453 y que es esencialmente diferente de la anterior.

La combinacion de acoplos de cilindros, descrita ya en el párrafo 60 y representada en la fig. 195, es una cadena combinada. La adicion de los miembros 4,7 y 3,6 de la cadena (C''_4) hace desmodrómica la cadena de cinco miembros 1,2,3,4 y 5, que de otro modo se halla incompletamente cerrada. Esa cadena encuentra gran número de aplicaciones útiles en los mecanismos de movimientos paralelos, en que uno ó varios puntos deben moverse (exacta ó aproximadamente) en línea recta. Como ejemplos de mecanismos de ese género, formados con la cadena anterior, pueden citarse uno de

(a) Las palabras *combinado* y *mezclado* deben tomarse aquí en el sentido que tienen en el lenguaje químico. Tal vez dan más exacta idea que las empleadas por el autor *ächt* y *unächt* (real y aparente) que añade á compuesto.

Tchebyscheff (a) y otro de *Harvey* (b). Estos dos mecanismos están fijos en el miembro 6,7 y dan con mucha aproximacion el movimiento pedido. En los aparatos de pesar se utilizan tambien bajo formas muy diversas, cadenas compuestas formadas con cadenas de la clase (C''_4).

La cadena de tornillo oblícua que hemos examinado en el párrafo 154, se emplea igualmente desde algunor años en los tornos bajo un gran número de formas.

Otro ejemplo que aquí se halla en su lugar, es el de la cadena *de ruedas* $(C_{12}C''_3)$ que hemos estudiado ya en el párrafo 105. Podemos, empero, contraernos á mencionar esta cadena, puesto que hemos señalado ya en dicho párrafo el gran número de mecanismos que es susceptible de dar.

Como tercero y último ejemplo tomaremos la cadena de la figura 454 representada bajo su forma general y que puede dar una série de mecanismos sumamente notables. Es una cadena combinada que resulta de la composicion de la cadena simple de ruedas dentadas $(C_2C''_2)$ con dos miembros, cada uno de los cuales contiene dos acoplos de cilindros paralelos. Esa cadena, que es de cinco miembros, posee en definitiva seis acoplos, es decir, los cinco acoplos de cilindros 1, 2, 3, 4, 5 y el acoplo 6, que es de la forma (C_2). Su fórmula concentrada es pues: (C''_5C_2) y su fórmula completa:

$$C_2\ldots\begin{cases}\ldots \parallel \ldots(C)\ldots \parallel \ldots(C)\ldots \parallel \ldots(C)\ldots \parallel \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \mid \ldots(C)\ldots \parallel \ldots(C)\ldots \mid \ldots\ldots\ldots\end{cases}\ldots C_2.$$

$$\begin{matrix}6 & d & 1 & a & 2 & b & 3 & c & 6\\ & & & & d\ 5\ e\ 4\ c & & & & \end{matrix}$$

A fin de hacer más clara la fórmula le hemos introducido no solamente las letras que indican los miembros, sino tambien las cifras que corresponden á los acoplos. Esa fórmula patentiza de la manera más completa la disposicion perfectamente simétrica de la cadena. Cumple observar que pueden hacerse variar los tamaños de los diferentes miembros entre los límites más distantes, sin alterar la forma general de la cadena, con tal que, empero, se procure evitar que la clausura se vuelva excesiva ó incompleta. Mientras quede desmodrómica la cadena, se puede sacar, merced á la eleccion del miembro de fijacion y del miembro conductor, una gran variedad de mecanismos. Sin querer proceder de una manera rigurosamente sistemática, lo que no reportaria aquí mucha utilidad, vamos á pasar rápida revista de los más importantes. Para mayor sencillez se ha suprimido en las figuras que los representan, el endentaje de las ruedas, limitándose á indicarlas con sus círculos primitivos tan solo.

1.° Se supone la longitud 1,5 reducida á cero, sin suprimir, no obstante, los acoplos 1 y 5, que vienen á ser conaxiales. Fijando la cadena en *a*, obtenemos el *mecanismo de rueda planetaria, de Watt* (fig. 455) mecanismo para el cual hemos dado á conocer antes (§ 105) la ley de los movimientos. Partiendo del nombre que *Watt* dió al mecanismo especial $(C''_3C_2)^a$, proponemos dar á la cadena (C''_3C_2) el nombre de *cadena de rueda planetaria*. (a)

2.° Se hace, $1,5=3,4$, $a=b$ y las dos ruedas dentadas de igual dimension, en cuyo caso los miembros *c* y *d* son tambien iguales: la cadena es entonces rigurosamente simétrica con relacion á la línea 6,2 (figura 456) y fijada en *e* proporciona una guia del movimiento rectilíneo que se conoce con el nombre de Guia de *Cartwright*.

3.° Las longitudes 5,1, 1,2, 2,3 y 3,4 no son ya simétricas, pero tienen entre sí determinadas relaciones, lo propio que los radios de las ruedas dentadas. Fijando la cadena en *e*, se obtiene un mecanismo en el que el punto 2 se mueve muy aproximadamente en línea recta (fig. 457), cuando el ángulo de oscilacion de *d* no tiene un valor muy considerable. Ese mecanismo parece haber sido propuesto la primera vez por *Maudslay*.

4.° Las longitudes de ciertos miembros se suponen infinitas. Ante todo haremos *a* y *b* infinitos, introduciendo al propio tiempo la simplificacion empleada por *Watt* en su rueda planetaria, es decir, suponiendo nula la longitud 1,5. Entonces alcanzamos una cadena como la que está representada en la figura 458 y cuya fórmula concentrada es: $(C^{\perp}P^{\perp}C''_3C_2)$. Esta cadena fijada en *a* da *un mecanismo de rueda planetaria de curso rectilíneo*, que se encuentra en cierto número de aplicaciones.

Si *d* es una rueda de dentaje interior, la cadena toma una forma especial representada por la fig. 459. Bajo esa forma ha encontrado en estos últimos años varias aplicaciones curiosas, sin que no obstante se haya tomado cuenta de su orígen: entre tales aplicaciones merece mencionarse el mecanismo que *Caird* y *Robertson* utilizaron para la maniobra de los timones (b). La ca-

(a) Véase *Dingler's Journal*, 1862, vol. CLXIII, pág. 403.

(b) Véase *Practical mechanic's Journal*, 1850, vol. II, pág. 174.

(a) El mecanismo de rueda planetaria, que *Galloway* utilizó y del que se ha tratado en el párrafo 105, corresponde á una cadena de composicion más compleja que la de que se trata ahora. Conviene por lo tanto evitar toda confusion tocante al particular.

(b) Véase *Genie Industriel*, 1869, vol. XXXVII, pág. 29. *Caird* y *Robertson* aplicaron el mismo mecanismo á los cabrestantes.

dena en este caso se halla fija en *a* y recibe el movimiento por mediacion del miembro *e*, de suerte que su fórmula es: $(C^{\perp}P^{\perp}C''_3C_2^-)^{a}_{e}$. La proporcion de los radios de las ruedas dentadas se aproxima mucho á la unidad, lo cual conduce á un movimiento relativamente muy lento para el gobernalle. El eje de esa última pieza coincide con el de *d*.

El mismo mecanismo está igualmente en uso en ciertas máquinas de coser para dar el movimiento al porta-aguja; en cuyo caso la rueda es el miembro conductor.

Como otra aplicacion de la misma cadena se puede á más citar la polea diferencial de *Eade* representada esquemáticamente en la figura 460. (a) La fijacion de la cadena se efectua en *a* y su movimiento se trasmite por mediacion de *e*. El miembro *b*=C...⊥...P está suprimido; en lugar suyo está empleado el acoplamiento superior indicado en el párrafo 76 (figs. 260 y 261), debiendo por tanto escribirse así la forma concentrada:

$$(C^{\perp}P^{\perp}C''_3C_2^-)^{a}_{e}—b.$$

El mismo mecanismo con la supresion del miembro *b* fué sucesivamente utilizado por *Wilcox* (b) y por *Taylor* (c), para dos contadores de máquina.

5.° Si la longitud 3,4 es más corta que 4,5 en vez de ser más larga, como se ha supuesto hasta ahora, la cadena da un movimiento esencialmente distinto de los que se han utilizado en los ejemplos anteriores. La figura 461 indica la disposicion que corresponde á la nueva hipótesis. En las figuras 459 y 460 el desplace total de *b* con respeto de *a* (el miembro fijo) era el doble de la distancia 4,5 ó *2e*, mientras que en el caso actual no es más que el doble de 4,3. Hace algun tiempo propuse ese mecanismo como mecanismo principal para máquinas de taladrar, roblar ó acuñar, designándole con el nombre de Escéntrico dentado. (d) (Véase tambien la pág. 138, col. 2.ª).

6.° Los miembros *a* y *b* son tambien infinitos, pero la longitud 1,5 tiene un valor finito en vez de ser nula. Obtiénese entonces una cadena representada bajo una forma general en la figura 462. Si en esa misma cadena se hace $3,4<e$, se llega á la cadena de la figura 463, que hemos indicado antes como *el caso general* del Escéntrico dentado. (a) Para su fijacion en *a* esa cadena permite dar á un miembro, *b*, varios movimientos oscilatorios que presentan numerosas posiciones de máximum y de mínimum. Como caso interesante podemos citar el que se obtiene tomando las ruedas dentadas iguales, así como las longitudes 1,5 y 3,4, suponiéndolas además dispuestas simétricamente en *a*, como lo indica la figura 464. Propuse dar á ese mecanismo el nombre de *escéntrico dentado simétrico*. Las trayectorias polares entre *c* y *a*, lo mismo que las que hay entre *d* y *b*, son círculos de *Cardan*.

7.° En vez de *b* y *a* se pueden tambien suponer infinitos *b* y *c*. Entonces se tiene una cadena (fig. 465) muy diferente de las anteriores y cuya fórmula es: $(C''C^{\perp}P^{\perp}C''_3C_2)$. Con la fijacion en *c* y la guia de *e* se consigue para *b* un movimiento de oscilacion muy complicado. Entre las aplicaciones de ese mecanismo, citaremos la que hizo *Whitehill* para dar el movimiento á la aguja en una máquina de coser: en cuyo caso las ruedas dentadas son de igual tamaño.

Si *c* es una rueda hueca, se obtiene la cadena de la figura 466; y suponiendo además que el diámetro de la rueda *d* sea igual al radio de *c* y que las longitudes de 1,5 y 5,4 sean iguales, la cadena toma la forma indicada en la figura 467. El punto 1 como punto de la circunferencia de un círculo de *Cardan* se mueve siguiendo un diámetro del círculo primitivo *c*. De consiguiente fijando la cadena en *c* se consigue un mecanismo de guiaje en línea recta, la *guia hipocicloidal*, conocida desde mucho tiempo y descrita sucesivamente con el nombre de *guia rectilínea* por *Lahire* y *White:* aun hoy se emplea amenudo en las prensas de imprimir. El miembro *b* no tiene aquí ya la posibilidad de girar alrededor del gorron 2 y puede por lo tanto suprimirse enteramente.—Si la misma cadena en vez de fijarse en *c*, se fija en *a*, suministra otra guia de movimiento rectilíneo para el miembro *c*. Este último mecanismo no habia sido indicado hasta hoy, al ménos que nosotros sepamos.

Si los prismas introducidos en la cadena (C''_3C_2) en vez de ser normales á los ejes de los acoplos de cilindros, fuesen *oblícuos*, resultaria á todas luces una série de casos particulares, pero no obstante el interés que podrian ofrecer algunos de tales casos, creemos debernos limitar aquí á esa simple mencion.

§ 162

Consideraciones finales.

La síntesis de lás máquinas tal como acabamos de

(a) Véase *Engineering*, 1867, pág. 135.
(b) Id. id. 1869, Enero, pág. 38.
(c) Id. id. 1869, Julio, pág. 1.
(d) Véase *Civil Jngenieur*, 1858, pág. 4: «*Das Zahnexzentrik, ein neuer Bewegungsmechanismus.*» En ese artículo el autor trata toda la série de mecanismos de escéntricos dentados, sin haber reconocido su conexion con el mecanismo de rueda planetaria.

(a) Véase el artículo anterior.

señarla rápidamente, nos ha dado varios resultados notablemente diferentes de los que se habian deducido hasta aquí de los métodos en apariencia generales y científicos utilizados para el estudio de las máquinas. Hemos reconocido, y este es sin duda nuestro descubrimiento más importante, que el dominio de las combinaciones cinemáticas se hallaba en realidad comprendido entre límites mucho más cercanos de lo que se habia imaginado hasta hoy dia. Ese error no nos parece que deba atribuirse á la imperfeccion é inexactitud de las ideas que por tanto tiempo sirvieran de base á la enseñanza, puesto que aun nosotros, con el concepto claro y preciso de las combinaciones de elementos que ha servido de punto de partida para nuestro estudio, no podiamos casi preveer que la síntesis fuese capaz de darnos resultados de tanta importancia como hemos alcanzado.

Otro punto que merece consignarse especialmente bajo el concepto de la práctica y de la enseñanza es que los principales problemas relativos á la constitucion de las máquinas, se contraen en definitiva á un número relativamente muy reducido de cadenas cinemáticas, que son:

Las cadenas de tornillos,
— — ruedas,
— — manubrios,
— — brazos,
— — trinqueteos,
— — poleas,

y en fin, las cadenas que pueden derivarse de las anteriores con la sustitucion de elementos dúctiles por elementos rígidos. En cuanto á las otras cadenas casi no se encuentran más que en los problemas de una importancia secundaria.

En el párrafo 92 hemos señalado como dato bastante notable que todos los inventores de máquinas de vapor y de bombas «rotatorias» parecen haber coincidido en tomar los mecanismos de manubrios como bases de sus capsulismos. Esa circunstancia muy sorprendente á primera vista, es ahora de facilísima esplicacion. De todas las cadenas cinemáticas que acaban de mencionarse como susceptibles de aplicaciones, la *cadena de manubrio* es la que contiene los acoplos de elementos (acoplos de cilindros y de prismas) que mejor se prestan á la formacion de capsulismos y á mantener la hermeticidad.—*Los inventores, de consiguiente, hubieron de acudir ante todo á esa cadena de una manera, empero, inconsciente por completo.*

Al propio tiempo hemos visto que es por demás importante dar al tratamiento sintético el mayor desarrollo posible, puesto que se anuncia como susceptible de dar pingüe cosecha de mecanismos nuevos.

Ahora se presenta la cuestion de saber cual es la forma que importa adoptar para ese tratamiento, porque todo cuanto hemos visto hasta ahora en dicho órden de ideas, no nos ha llevado casi más que á los límites esteriores del asunto. Parece á primera vista que la mejor marcha que debiera seguirse, consistiria en hacer de la «cinemática sintética» un objeto especial de estudio y de instruccion, en hacerla materia de tratados distintos en los cuales se examinasen todas las combinaciones posibles, tomando sucesivamente todos los acoplos y todas las cadenas hasta apurar por completo la materia. Pero reflexionándolo un poco se ve fácilmente que ese sistema tendria sérios inconvenientes. Por ello creemos que es preferible constituir con el nombre de «cinemática aplicada» una ciencia especial, destinada á tratar bajo el doble punto de vista del análisis y de la síntesis, los diferentes mecanismos, los cuales á la sazon podrian clasificarse segun la índole de sus aplicaciones prácticas. Por lo demás, la síntesis no deberia ser sino meramente un medio de investigacion. Habria de utilizarse de consuno con otros métodos, de suerte que cada rama particular del asunto se hallase sometida al modo de tratamiento más ventajoso.

Fáltanos ahora presentar otra observacion. Nuestras investigaciones nos han llevado á conocer que el dominio de la cinemática no era ilimitado, y este es un resultado satisfactorio; pero ¿no es de temer en cambio que la materia tratada en virtud de los nuevos principios científicos dados á luz por nosotros quede rápidamente agotada? Cumple confesar que ese temor está justificado en cierto modo por la importancia en las simplificaciones á que paulatinamente hemos llegado, á medida que proseguíamos la senda de nuestras investigaciones; más por fortuna no es un temor de aquellos que haya de preocuparnos.

La altura que hemos alcanzado con la síntesis, nos permite abarcar de una sola mirada todo el dominio de la cinemática y comparar la parte que hemos esplorado con la que todavia no lo está. En esa última podemos afirmar que se ofrece á la inteligencia y al espíritu de investigacion una série de problemas estremadamente vasta.

Las someras indicaciones que hemos dado antes acerca de los mecanismos de ruedas planetarias, nos han mostrado uno de los mil puntos por los cuales se puede entrar en el dominio de las cadenas compuestas. Cúmplenos además observar que nos hemos limitado á la consideracion del mecanismo abstracto, compuesto

de elementos rígidos. Pero si á algunos de estos últimos sustituimos elementos dúctiles, y suponemos utilizados, para todos, los materiales actualmente empleados en las construcciones, con su naturaleza especial y característica cada uno, nos hallaremos enfrente de una multitud de condiciones que exigirian constantemente nuevas investigaciones para conducir á una representacion abstracta del mecanismo.

Por otro lado, en presencia de las innumerables exigencias de la práctica nos hallamos alentados por la conciencia de la estrema sencillez de los medios que debemos emplear. Nos sostiene la conviccion de que las numerosas cosas que falta hacer, pueden efectuarse con un corto número de medios, y que las leyes á que debemos conformarnos son para nosotros enteramente conocidas.

Al final de estas consideraciones llegamos á una cuestion de la que hemos dicho algunas palabras en la Introduccion, y de la cual nos hemos ocupado en este último capítulo, sin haberla no obstante mencionado esplícitamente. Esa cuestion es la de los *inventos de mecanismos*. Lo que pretendíamos decir cuando anunciábamos que en lo venidero el invento de nuevos mecanismos debiera hacerse de una manera científica, y en particular por via sintética, se halla actualmente esplicado con lo que precede, y creemos poder añadir que la exactitud de nuestro aserto se encuentra plenamente confirmada. Con todo, la síntesis cinemática no facilita evidentemente el descubrimiento de los mecanismos sino al que llega á un concepto científico de la cuestion, y entonces tiene, á más, la ventaja de dar al objeto buscado más amplitud y elevacion. La síntesis cinemática no disminuye pues el trabajo intelectual del inventor, sino que lo eleva; le permite ver con mayor claridad, no solamente el objeto que desea alcanzar, sino tambien los medios de que dispone para llegar hasta él, á la vez que le da á conocer el método mejor que ha de seguir para utilizarlos bien.

ACLARACIONES

(1) (pág. 11).

Esa carta lleva la fecha de 30 de Junio de 1784. Otras cartas relativas al mismo asunto y escritas antes de la toma del privilegio, llegan hasta el 22 de Julio, en tanto que la descripcion aneja á dicho privilegio va fechada en 28 de Abril del mismo año. Esas fechas, que se citan en la obra de *Muirhead*, son efectivamente contradictorias y reclaman una aclaracion.

(2) (pág. 13).

En 113 capítulos se encuentran repetidas las perífrasis que el autor se ve obligado á emplear para designar lo que nosotros llamamos una *bomba de agua*. Por ejemplo, en el capítulo L dice: «Esta es una clase de máquina con la que fácilmente y sin ningun ruido se hace subir el agua de una fuente ó de un rio á una proporcionada altura».... Cap. XVII: «Estotra clase de máquina con la que se hace subir igualmente el agua de un sitio bajo arriba».... Cap. LVII: «El efecto de esotra clase de máquina consiste en hacer subir el agua de un canal á una altura dada, etc.»

(3) (pág. 14).

En la obra *Cálculo del efecto de las máquinas*.

(4) (pág. 14).

En la *Introduccion á la mecánica industrial*. Véase por lo demás el párrafo 129 (Cap. XII) de esta Cinemática.

(5) pág. 15).

Rigurosamente bajo el punto de vista filológico la palabra «Cinemática» es incorrecta; AMPERE habria debido decir «Cinética» No se puede verdaderamente pensar en sustituir hoy esa segunda espresion á la primera, que á más de lo autoridad de *Ampere* tiene el derecho que da una posesion de medio siglo. Por otra parte la palabra cinética ha recibido en algunas naciones, y sobre todo en Inglaterra, un significado que conviene dejarle. En Alemania la palabra «Kinematik» se encuentra amenudo reemplazada con la de «Getriebelehre» que introdujo el profesor REULEAUX en sus diferentes publicaciones.

(6) (pág. 20).

Parerga, tom. II, Cap. III, párrafo 41 y *Wille* und *Vorst*, tomo II, Cap. XIV.

(7) (pág. 24).

El adjetivo «maquinal» se encuentra empleado aquí en su sentido enteramente literal con respecto á la Mecánica.

(8) (pág. 26).

Las diferentes definiciones que se han dado de la máquina, ese producto tan notable de la inteligencia humana, rara vez están de acuerdo unas con otras. Circunstancia es esa que admira y desde mucho tiempo habria debido dar lugar á serias reflexiones. Las siguientes citas son más que suficiente prueba para demostrar hasta que punto las nociones sobre las máquinas han quedado vagas é indeterminadas, aun entre los autores que se hallaban más en el caso de conocerlas.

WEISBACH. «Desígnase con el nombre de máquinas todas las disposiciones artificiales por medio de las que las fuerzas ejercen una accion diferente de la que sin ello habrian ejercido.» Segun esa definicion un instrumento cualquiera, como por ejemplo, una aguja, un lápiz, un palo, etc., constituirian otras tantas máquinas.

PONCELET. «Las máquinas industriales tienen por objeto la ejecucion de ciertos trabajos, con auxilio de motores ó de fuerzas motrices que tiene la naturaleza.» Esa definicion está llena de reticencias ó reservas y solamente indica una de las funciones de la máquina.

BRESSON. «Una máquina es un instrumento que tiene por objeto general trasportar el efecto de una fuerza desde su punto de aplicacion al punto en que debe operar para vencer una resistencia y ejecutar un trabajo que seria difícil y quizás imposible, si debiese emplearse directamente dicha fuerza.» ¿Qué es entonces un instrumento? ¿Y cómo puede admitirse la palabra «quizás» en una definicion científica?

RÜHLMANN, *Geostatik*, 3.ª edicion (1860.) «Con la espresion de máquina designamos la reunion de cuerpos sólidos, móviles é inmóviles que forman un sistema rígido invariable, independiente, en el que las fuerzas por modificaciones de tamaño y direccion pueden mantenerse mútuamente en equilibrio.» Por esa definicion una cadena de hierro colgada seria máquina, en tanto que una prensa hidráulica no lo seria, porque el agua no es cuerpo rígido.

RÜHLMANN, *Allgemeine Machinenlehre*, 1.ª edicion (1862.) «La máquina es una combinacion de cuerpos sólidos (casi esclusivamente) móviles é inmóviles que sirve para recibir las fuerzas físicas y trasmitirlas modificando, si es menester, sus direcciones y tamaños, de modo que vengan á ser aptas para efectuar trabajos mecáni-

cos determinados.» — El mismo autor dió tambien en la 2.ª edicion de su *Geostatik* (1845) otra definicion que se parece mucho á la de WEISBACH. ¿Cuál de esas tres definiciones es la que debe considerarse más conveniente?

KAYSER. «Las máquinas son disposiciones que sirven para trasmitir la accion de fuerzas dadas para equilibrar ó vencer otras fuerzas y para producir movimientos con objetos determinados.» Esto es vago y confuso.

SCHRADER. «Una máquina es una disposicion destinada á producir la modificacion de una fuerza dada.» Definicion breve y concisa, pero difícil de comprender.

WERNICKE. «Una máquina es una combinacion de cuerpos que tienen por objeto efectuar un trabajo cualquiera por medio de una fuerza disponible.» La primera parte de esa definicion es bastante exacta; pero el final presenta cierta indeterminacion.

POPPE. «Llamamos máquinas todos los dispositivos con que se pueda ventajosamente producir, mantener ó trasmitir movimientos en direcciones determinadas.» No se ve muy claro lo que puede hacerse de la palabra «ventajosamente» en la ciencia. En segundo lugar, no puede producirse ningun movimiento con dispositivos, etcétera.

DELAUNAY. *Mecánica analítica* (1868.) «Las máquinas son aparatos que sirven para trasmitir el trabajo de las fuerzas, ó bien para hacer actuar una fuerza en un punto que no se encuentra colocado en la direccion de esta fuerza.» Aquí tampoco nada claro, nada determinado, sino simplemente la esposicion de una propiedad.

WILLIS. «Una máquina consiste en un conjunto de piezas trabadas entre sí de diferentes maneras y de modo que si una de ellas se pone en movimiento, todas las demás toman igualmente movimientos cuyas relaciones con el de la primera dependen de la índole ó naturaleza de tales trabazones.» Aun cuando tambien es incompleta esa definicion, es sin disputa la que más se aproxima á la definicion dada por el profesor REULEAUX.

GIULIO. «Se designa con el nombre de máquina todo dispositivo destinado á recibir un movimiento de la accion de un motor, modificar ese movimiento y trasmitirlo así modificado á un instrumento dispuesto para ejecutar un trabajo cualquiera.» Esa no es una verdadera definicion de la máquina, sino una simple enumeracion de sus propiedades.

LABOULAYE. «Se da el nombre de máquinas á sistemas de cuerpos destinados á trasmitir el trabajo de las fuerzas, de modo que se aplique á una operacion útil, lo cual no puede en general efectuarse sino porque modifican la accion de esas fuerzas y dan movimientos convenientes como velocidad y direccion para el objeto que se quiere alcanzar.» ¿Qué es un sistema de cuerpos, y como basta que semejante sistema esté destinado á cualquier cosa? etc.

BELANGER. Una máquina es un cuerpo (?) ó un conjunto de cuerpos en contacto con uno ó varios apoyos fijos y destinado á recibir en algunos de sus puntos la accion de un motor, mientras que otros puntos cuyas velocidades difieren generalmente de las de los primeros sufren ciertas resistencias.» Aquí tambien encontramos más bien una descripcion de las propiedades de la máquina que una verdadera definicion.

HATON. «Una máquina es un aparato destinado á poner en relacion un motor con la materia que ha de trabajarse.» Tantos enigmas como palabras.

Diccionario universal de PIERER. «Máquina.—Aparato que permite producir un movimiento, es decir, un cambio de posicion ó un cambio de forma en un cuerpo, y por tanto, efectuar un trabajo ú obtener un efecto mecánico.» Esa definicion es tambien meramente descriptiva y puede aplicarse á una infinidad de cosas que no son máquinas.

Diccionario de LITTRÉ. »Máquina.—Instrumento á propósito para comunicar movimiento, ó tomar y poner en juego algun agente natural, como el fuego, el aire, el agua, etc.» Esa es una indicacion por cierto bastante vaga de los diferentes géneros de utilizacion de la máquina, pero de ningun modo una definicion.

En la enumeracion antecedente no figuran los nombres de ciertos mecánicos muy conocidos, tales como por ejemplo, MOSELEY, REDTENBACHER, KARMARSCH, etc., así como los de los autores más antiguos, como LANGSDORF, EYTELWEIN, etc., por la sencilla razon de que ninguno de ellos ha dado una definicion de la máquina. Parece que todos han querido evitar el hablar de ella entrando de lleno en las cuestiones de descripcion y clasificacion. Si hemos multiplicado los ejemplos ha sido únicamente para demostrar que no se ha llegado hasta hoy á una definicion que pueda servir de autoridad.

Las antiguas definiciones á la par de presentarse bajo una forma más sencilla que las modernas, no están desprovistas de interés. Nos limitaremos á citar como ejemplo el que da LEUPOLD (*Théatr. Mach.* 1724): «Una máquina es un dispositivo artificial por medio del que puede llegarse á efectuar un movimiento ventajoso,

es decir, á mover alguna cosa con economia de fuerza y tiempo, lo cual generalmente no seria posible de otro modo.»

Todas las definiciones que hemos citado, presentan de comun la particularidad de ser completamente *descriptivas*, ó á lo ménos el carácter descriptivo domina en ellas. Lo verdaderamente *esencial* en la máquina no se encuentra en dichas definiciones y figura á lo sumo en el desenvolvimiento accesorio dada á cada una de ellas.

Reuniendo todas esas definiciones no hemos tenido la intencion de criticarlas de una manera más ó ménos sutil; sino que nos hemos propuesto llamar la atencion sobre la importancia de las proposiciones que se eligen como fundamentos de una doctrina científica, puesto que siempre se comienza por definir el objeto mismo de esa doctrina. Verdad es que puede objetarse que la definicion casi no puede sentarse debidamente hasta que se ha terminado por completo el estudio científico del asunto, y que por ende tan solo valiéndose de un artificio, se puede dar una definicion desde un principio. Esa objecion está seguramente bien fundada, pero se aplica á una definicion cualquiera. El principio supone necesariamente el fin. La esposicion de una ciencia no es ni debe ser el relato cronológico de las investigaciones á que ha dado márgen. No es indispensable que el lector se dé desde el momento exacta cuenta de toda proposicion enunciada al principio. Las esplicaciones y desarrollos que encuentra sucesivamente á medida que avanza en el estudio de la materia, lo vuelven constantemente á la definicion, en la cual van á reflejarse como en un espejo las diferentes proposiciones que se presentan, luego acaba por llegar á un punto en que dicha definicion le parece enteramente justificada en todas sus partes, y le da entonces bajo forma concisa un resúmen de todo lo que ha aprendido durante el curso de su estudio.

Pero recíprocamente y por la misma razon, una definicion incompleta ó simplemente descriptiva colocada á la cabeza de una obra, debe reflejar fielmente el estado de la ciencia que en ella se trata. La máquina no ha llegado sino lenta y gradualmente á emanciparse de los problemas generales de la mecánica. El que estudia esa ciencia bajo un punto de vista puramente teórico, y para el cual la máquina no es en cierto modo más que un ejemplo, no da ninguna importancia á las imperfecciones de su definicion, porque no es ocasion de sentir sus inconvenientes. Hasta puede decirse que tales inconvenientes tampoco existen para el práctico que se consagra al estudio de la ciencia de las máquinas, puesto que hasta ahora esa ciencia no ha llegado á presentarse bajo la forma de proposiciones rigurosamente lógicas. En este último concepto no podemos hacer cosa mejor que reproducir aquí una notable observacion de MILL sobre el particular. (*Lógica* I, Libro I, Cap. VIII, § 4): Lo que es verdad para la definicion de un término científico cualquiera, es igualmente cierto para la definicion misma de una ciencia, y por tanto, la definicion de una ciencia debe necesariamente ser provisional y progresiva. Una estension cualquiera de nuestros conocimientos ó una modificacion en las opiniones dominantes sobre el objeto de una ciencia, pueden conducir á cambios más ó ménos importantes en las diferentes partes que abarca: si su composicion se encuentra así modificada, puede suceder que se encuentre una nueva combinacion de propiedades características, que permitan definir más exactamente el nombre de esa ciencia.»

(9) (pág. 31).

La importancia de esa proposicion no podrá ser bien comprendida del lector hasta más adelante, cuando haya visto las aplicaciones que de ella pueden hacerse. Hasta aquí la ley á que se encuentra sometida, habia quedado casi desconocida. Y no hemos encontrado sino algunos indicios leves de ello en CHASLES (*Aperçu historique sur l'origine des Méthodes en Géométrie*, 1837) acerca del torno elíptico de LEONARDO DE VINCI (Nota XXXIV, págs. 408 y siguientes). El caso de la fijacion de otro miembro de la cadena cinemática es para CHASLES la consecuencia de una gran ley de *Dualidad*, acerca de la cual entra en muy estensas consideraciones. Su razonamiento no nos parece sentado en una base bastante sólida y hasta puede inducir á error. Aquí no se trata de una *dualidad*, sino más bien de una *pluralidad* característica, que contiene naturalmente todas las consecuencias que CHASLES ha sacado ingeniosamente del principio de la dualidad y que además puede dar otro gran número de ellas.

En los sistemas de trabazones forzadas que en estos últimos años han dado á los trabajos tan interesantes de PEAUCELLIER, SYLVESTER, HART, etc., no se cuentan como miembros más que los miembros móviles. No cabe

duda que en esto hay un error; y el miembro que reune los dos puntos fijos debe contarse por la misma razon que los demás. El desarrollo dado en el cuerpo de la obra á ese punto nos dispensa de insistir más en él.

(10) (pág. 42).

Tocante al § 9, de la reduccion de las trayectorias polares, conviene llamar especialmente la atencion, ya que sobre la circunstancia de que las trayectorias polares correspondientes son absolutamente recíprocas, por lo tanto, ninguna de ellas puede tener (como trayectoria polar) una propiedad que la otra no tiene. A primera vista puede parecer que realmente no es así cuando una de las trayectorias (como en la fig. 11) se mantiene fija. Más del problema anterior resulta que esa diferencia puede siempre apartarse, y las dos trayectorias hacerse móviles, fijando otro miembro de la cadena. Así por ejemplo, precisamente en el mecanismo de que se trata (§ 9), el segundo acoplo de trayectorias se encuentra siempre con respecto al primero (una de cuyas trayectorias es accidentalmente fija), en una posicion tal que las condiciones son las mismas para entrambas figuras. La distincion que *Poinsot* estableció entre *Polodia* y *Herpolodia* y á la que habia sido inducido precisamente por la circunstancia de que una de las curvas estaba fija, no tiene ninguna otra razon de ser, cuando ménos para el estudio de las máquinas. No cabe duda que convendria renunciar á ella igualmente por lo que toca á las investigaciones de otra especie, toda vez que no existe diferencia real entre las dos curvas. La distincion que acabamos de espresar, casi no puede traer otra cosa que confusion, ya que involuntariamente deja suponer que en un sistema móvil no pueden existir mas que *dos* acoplos de trayectorias polares, mientras que en realidad puede haber mucho mayor número: en un mecanismo que hemos citado como ejemplo, hemos encontrado *seis* á la vez. Otro ejemplo que puede servir para demostrar igualmente que es inadmisible esa distincion, nos suministran los mecanismos del género de aquellos que se han examinado en el § 120. Allí las trayectorias polares de $a : c$, así como las de $b : c$, se reducen cada una á un punto, y se hallan por ende sustraidas á la observacion como curvas; por otra parte las trayectorias polares entre a y b, las únicas que quedan, son *móviles ambas*, en la hipótesis de fijar la cadena en c, y es por lo mismo imposible distinguir una de otra. Lo propio sucede con los miembros a y b de la cadena de ruedas dentadas de la fig. 149. Lógicamente hablando no está, pues, justificada la distincion, y en una ciencia, máxime si esta ciencia es nueva, interesa evitar con cuidado introducir so-pretesto de comodidad todo lo que no esté justificado. Si más adelante se reconoce la necesidad de distinguir una trayectoria polar inmóvil de una trayectoria móvil, nada impedirá añadirles respectivamente los epítetos de fija y móvil. Pero importa esencialmente no dejar prevalecer la idea de que las dos trayectorias difieren en sustancia una de otra.

(11) (pág. 43).

En los engranajes de desarrollantes los círculos primitivos de los arcos de desarrollantes son cabalmente trayectorias polares secundarias; la tercera trayectoria es la recta generatriz de tales arcos, que tiene con relacion á los dos círculos un movimiento de arrollamiento.

(12) (pág. 46).

Utilizando las coordinadas que se indican en la fig. 468 tenemos:

$$x = \frac{\omega}{2\pi}\, s \cos \alpha - r' \operatorname{seno} \omega \operatorname{seno} \alpha,$$

designando α el ángulo de proyeccion. Si reemplazamos la cantidad constante $\frac{s}{2\pi} \cos \alpha$ por r, esa fórmula es:

$$x = r \left(\omega - \frac{r'}{r} \operatorname{seno} \omega \operatorname{seno} \alpha \right)$$

y por otra parte se tiene:

$$y = r\left(1 - \frac{r'}{r}\cos\omega\right).$$

Esa doble ecuacion no se diferencia de la cicloide más que por el factor *seno* α, sin que por ello la curva que representa, sea la proyeccion de la cicloide. Suponiendo que las dos elipses concéntricas avanzan en el plano de la figura, de suerte que la más pequeña gira sobre A B C, pero que al mismo tiempo sus curvaturas se modifican de tal manera que en todas las posiciones sus contornos quedan congruentes con sus formas primitivas, un punto Q del perímetro de la elipse esterior describe la curva P Q R, que se puede llamar, como se hace en el texto, una cicloide elíptica. En nuestro caso tendremos una cicloide elíptica prolongada. Si en la ecuacion suponemos $\alpha = 0°$, la curva se convierte en una sinusoide; y si por el contrario se toma $\alpha = 90°$, se vuelve á la cicloide ordinaria.

(13) (pág. 48).

La espresion desmodrómica formada como hemos visto de δεσμος, lazo y δρομος, carrerra ó curso, reproduce bastante fielmente la palabra alemana «zwangläufig,» para la cual casi no existe otro equivalente hasta aquí que la espresion «de trabazones forzadas,» que es sin duda ménos sencilla.

(14) (pág. 61).

En su *Aperçu historique sur l'origine des méthodes en Géométrie* (1837), CHASLES cita la obra de CARDAN: «*Opus novum de proportionibus numerorum, motuum*, etc.

(15) (pág. 62).

Para las personas que no están bastante familiarizadas con ese género de problemas, es muy difícil formarse una idea clara de lo que sucede en este caso, á no valerse de un modelo tal como el imaginado por el profesor REULEAUX. En ese modelo el triángulo curvilíneo UTQ está grabado en una plancha de vidrio, en tanto que la figura biconvexa P V Q W está trazada en el plano R P S Q. A falta de un modelo puede tambien formarse una idea de los movimientos, recorriendo los lados del triángulo con las puntas de un compás, al que se haya dado una abertura igual á PQ; ennegreciendo una de las puntas de manera que pueda distinguirse fácilmente de la otra, se pueden seguir bastante bien los movimientos de la figura biconvexa en el triángulo.

(16) (pág. 63).

Para trazar estas *rodajas* ó cicloides y las figuras del mismo género, se puede usar un compás particular de tres brazos, tal como el que el autor mandó construir á J. KERN, de Aarau (Suiza). En este compás la tercera pierna tiene una articulacion y está dispuesta de manera que se le puede hacer variar fácilmente de longitud.

(17) (pág. 63, § 24).

Para demostrar cuan arraigada está esa preocupacion, nos creemos en el deber de citar en conformidad con el autor el siguiente pasaje de una obra de WEISSENBORN *(Cyklischen Kurven*, Eisenach, 1856): «Si el círculo descrito desde el punto m_0 (fig. 469) como centro gira sobre el círculo descrito desde el punto M y el punto describiente B_0 ha recorrido la curva $B_0\ P_1\ P_2$, y cuando el punto de contacto ha pasado de B_0 á *b*, es *evidente* que si se hace fijo el círculo hasta entonces móvil y se hace girar por él el círculo mayor en una direccion

opuesta á la precedente, el punto B_0 de este círculo máximo, que al principio coincidia con el punto B_0 del círculo pequeño, *describe la misma línea* $B_0 P_1 P_2$. En realidad B_0 describe la pericicloide $B_0 B' B''$ (indicada en punteado), que se diferencia esencialmente de la hipocicloide $B_0 P_1 P_2$.

Las trayectorias polares prestan igualmente muy grandes servicios al estudio de los movimientos planetarios y son muy á propósito para hacer desaparecer la oscuridad que suele envolver las nociones de los movimientos «reales» y «aparentes.» Si se intenta analizar las ideas que generalmente se han difundido tocante al particular, no se tarda en convencerse de la verdad de esta observacion de POINSOT (Introduccion de la *Teoria nueva de la rotacion de los cuerpos):* «Pero si se trata del movimiento de un cuerpo de *grandor sensible y de figura cualquiera*, es preciso confesar que no se ha formado de él más que una idea muy oscura.»

(18) (pág. 64).

Esas curvas han llamado con frecuencia la atencion de los matemáticos. Véase *Schlömich's Zeitschrift*, tom. IX, pág. 209 y DUREGE, *Sobre algunas especies particulares de curvas cíclicas.*

(19) (pág. 68).

Trayectorias polares cuadradas corresponden á la figura hueca cuadrada A B C D, cuando la trayectoria polar del disco curvilíneo afecta la forma de un lente biconvexo (véase fig. 120). Y esto es lo que sucede aquí cuando QT es perpendicular á P S. Con efecto, en virtud de la semejanza de los triángulos los ángulos 1 P Q y m_1 S P son iguales, y por tanto se tiene: $m_1 P = \frac{PR}{2}$ *cos* 1 P Q = P S seno 1 P Q, ó tang. 1 P Q = $\frac{1}{2}$. La forma del disco curvilíneo debe, pues, escogerse de manera que la tangente del ángulo m_1 S P sea igual á o'5, ó que $m_1 P = o'5$, m_1 S.

(20) (pág. 71).

WILLIS. *(Elements of mechanism*, 2.ª edicion, pág. 90) enuncia el principio de CAMUS así como sigue: Si se quiere que el piñon y la rueda giren ejerciendo uno sobre otro un esfuerzo constante, es preciso que el flanco A C H y la curva C Z del diente sean arcos de epicicloides, engendrados por una sola y misma curva, la cual debe rodar interiormente por la circunferencia primitiva H B del piñon, para decribir el flanco, y exteriormente por la circunferencia Z B de la rueda, para describir el perfil externo del diente, etc.

(21) (pág. 71).

Ann. Ph., 1706, pág. 379. LAHIRE enunció su principio en la forma siguiente: siempre es posible encontrar una curva que rodando sobre otra curva de base determinada engendre por uno de sus puntos otra curva dada, con la condicion de que las normales de todos los puntos de esta segunda curva encuentren la primera. Como ejemplo cita la generacion de una recta obtenida por el arrollo de una curva sobre una recta que corte la primera. Como puede verse fácilmente la curva generatriz es una espiral logarítmica cuyo polo describe la recta. Si las dos rectas son paralelas, la espiral se reduce á un círculo.

(22) (pág. 79).

Suponemos que las dos piezas *a* y *b* (fig. 470) están apretadas una á otra por una fuerza P, normal á sus superficies de contacto, y que estas superficies tengan asperezas que formen una especie de dentaje regular y ofrezcan todas un ángulo de base igual á φ; la resultante Q de todas las presiones que actuan sobre los flancos

de los dientes en sentido inverso del movimiento que se intenta producir, se descompone en dos fuerzas, la una P que representa la resistencia á la carga, y la otra F, la fuerza opuesta á la fuerza motriz; de donde resulta que se tiene F=P tang. φ. Segun esto, se podria deducir del valor de lo que llamamos coeficiente de rozamiento en el reposo, determinado por la esperiencia, el valor medio del ángulo de las asperidades de las superficies de contacto.

Séanos permitido llamar, tocante al asunto, la atencion sobre la manera bastante inexacta con que el frotamiento suele tratarse en las obras elementales de mecánica y sobre los inconvenientes que de ahí resultan bajo el punto de vista de la claridad.

En primer lugar debe observarse que se considera *el rozamiento como susceptible de impedir el movimiento y no de engendrarlo*. Esta es una idea teórica dominante en los libros de enseñanza. Así por ejemplo, en WEISBACH (*Théor. Méchan*, tom. 1) se halla un capítulo titulado: «*Las resistencias* del Frote y de la Rigidez» que contiene la frase siguiente: «Respecto al movimiento de los cuerpos, el frote se presenta como una *fuerza pasiva* ó como una *resistencia*, pues no hace más que impedir ó retardar los movimientos, sin poderlos nunca producir.» Sobre el mismo asunto KAYSER (*Statik* § 161) se espresa en estos términos: «El rozamiento puede considerarse como una fuerza pasiva que se opone simplemente al movimiento, pero que no lo produce ni lo favorece nunca.» No todos los autores se espresan con tanta claridad, pero en todos se encuentra en el fondo la idea dominante de que el frote es «una resistencia.» En nuestro apoyo nos limitaremos á mencionar las obras de RUHLMANN, MOSELEY, PONCELET, DUHAMEL, etc. No obstante la autoridad de tales autores, nos permitiremos decir que esa opinion no sostiene el exámen, puesto que en realidad se halla en contradiccion con el principio ó la ley de la conservacion de la fuerza. El rozamiento ó frote es una fuerza y es indispensable considerarla como á tal, sea cual fuere el modo como pueda derivar de otras fuerzas. No hay razon formal alguna para negar á semejante fuerza lo propio que á la rigidez de las cuerdas (que generalmente se trata del mismo modo), toda relacion sistemática con otras fuerzas, y afirmar que no tiene el carácter esencial de todas las fuerzas, es decir, la propiedad de producir ó secundar el movimiento. Nos hallamos aquí en presencia de un concepto de la antigua mecánica, de un resto del antiguo sistema de enseñanza, del cual ha logrado la mecánica científica desentenderse por completo en ciertos puntos y contra el cual tiene que luchar todavia en cuanto á otros.

La naturaleza y las aplicaciones de la mecánica nos dan, además, numerosas pruebas de la inexactitud de la idea tan generalmente admitida de que el frote no produce movimiento. El viento mueve por frote la superficie del agua; la velocidad misma del viento *mengua* con el frote que se desarrolla al contacto de esa superficie, en tanto que la velocidad del agua *aumenta*, por el contrario, con ese mismo frote. El arco del violin pone cada cuerda en vibracion á causa del frote y de la manera siguiente, segun HELMHOLTZ (Tonempfindungen, página 142): «Durante la mayor parte de cada vibracion la cuerda se adhiere al arco siendo arrastrada por él, luego se desprende de improviso, salta, y se encuentra cogida, por otro punto, al arco que nuevamente la arrastra, etc.» Cuando una correa animada de rápido movimiento se coloca en una polea que estaba en reposo, comienza primero por deslizarse por ella y tan solo gradualmente logra comunicarle su movimiento; la fuerza que aquí opera como fuerza *de arrastre*, para llevar los puntos de la circunferencia de la polea desde una velocidad nula á la de la correa, es el *frotamiento;* constituye una resistencia para el movimiento de la correa, á la par que acelera el de la polea. Si se examina á fondo la cuestion, se nota que en cada caso particular el frote destruye y produce á la vez movimiento, produccion que puede, empero, consistir únicamente en los desplaces que corresponden á las pequeñas alteraciones de la forma del cuerpo sobre el cual se opera. No creemos necesario recurrir, como podriamos, á las matemáticas puras para demostrar que la demora introducida en el movimiento, es por sí propia un indicio de produccion de un movimiento en sentido inverso del primero. Las nociones usuales sobre el frote son, pues, tan inexactas bajo el punto de vista práctico como en el concepto puramente científico, y seria muy de desear que se las rectificara. Sin embargo, no es fácil poderse alabar de conseguir pronto ese resultado, como quiera que esas ideas se unen á otra série de ideas igualmente erróneas que tienden siempre á inducir las inteligencias á la antigua manera de ver.

«Todo frote hace desaparecer fuerza viva» dice HELMHOLTZ en una de sus publicaciones (*Vorträge*, cuaderno II, pág. 129) de esa proposicion que es incontestable, se ha deducido harto fácilmente estotra que es errónea: «el frote tiene *siempre por único efecto* hacer desaparecer fuerza viva.» El que siempre destruya fuerza viva el frote no acarrea en modo alguno como consecuencia el que no pueda producirla. Verdaderamente hay aquí una proposicion que es verdad en sí misma, pero que importa guardarse de estremar, puesto

que, aun bajo su forma simple, puede conducir á consecuencias erróneas. Tomemos, por ejemplo, el émbolo de una máquina de vapor. Aplicándose el émbolo tan exactamente como sea posible á la superficie interna del cilindro, pierde una parte asaz considerable de la fuerza viva que tiene, á causa de su frote con las paredes. Y sin embargo, HIRN, á pesar de toda su habilidad de esperimentador, no ha logrado descubrir la más leve pérdida de fuerza viva de resultas de ese frote. Y además, da exactamente la razon de ello notando que la fuerza viva perdida por efecto del frote reaparece en forma de elevacion de la temperatura del vapor. Por tanto, el frote destruye fuerza viva por un lado para reproducirla al punto por otro y de manera tal que el resultado definitivo no se halla en nada afectado por ese modo de accion. *Tomada aisladamente* la proposicion «todo frote destruye fuerza» no podria al parecer confirmarse con la observacion. Si se la quiere usar para esclarecer las nociones sobre el frote, es indispensable completarla con la siguiente: «todo frote engendra tambien fuerza viva.»

Fáltanos discutir todavia el punto relativo á las *leyes* del frote. Si abrimos una obra cualquiera de mecánica, indudablemente encontraremos en ella bajo distintas formas estas tres importantes proposiciones: 1.°, *el frote es proporcional á la presion normal que se ejerce entre las superficies frotantes;* 2.°, *es independiente de la estension de tales superficies;* 3.°, *es independiente de la velocidad con que se efectua el deslizamiento.* Esas tres proposiciones son en conjunto las de COULOMB y de MORIN. Posteriores esperimentos, aunque muy antiguos ya, han demostrado que esas proposiciones no representan realmente los fenómenos del frote sino entre límites muy restringidos, y que en particular no son aplicables á las presiones y velocidades que suelen hallarse en la práctica de las máquinas, de modo que deberia decirse: el frote *no es proporcional, no es independiente,* etc. Es en verdad incontestable que obstinándose la práctica en sostener las leyes de COULOMB y MORIN, ha cometido gran número de errores y que con mejor acuerdo se ha decidido por desecharlas adoptando dimensiones de todo punto diferentes de las que indica. Seria realmente tiempo ya de hacer pasar al texto de los tratados de mecácica los esperimentos de RENNIE, HIRN, SELLA, BOCHET y tantos otros que hasta ahora casi no han sido mencionados sino en forma de notas. Parécenos que seria preferible para la dignidad de la ciencia y mucho más ventajoso para sus aplicaciones.

(23) (pág. 93).

La série de los fenómenos citados por LUBBOCK *(Origin of civilisation,* etc., Lóndres, 1870), en apoyo de la teoria de la unidad de la raza humana (que no debe confundirse con la descendencia de una sola pareja) es verdaderamente asombrosa y da á tal teoria un gran carácter de probabilidad.

(24) (pág. 94).

CHAMISSO (IV, 244) describe como sigue este procedimiento y algunos otros: «en las islas Carolinas se apoya normalmente en una pieza de madera fija en el suelo otra pieza terminada en punta y más ó ménos redonda, de un pié y medio de largo próximamente y una pulgada de diámetro, y se le imprime un movimiento de rotacion operando con las palmas de las manos. El movimiento, lento y mesurado al principio, va acelerándose, á la vez que la presion se hace más fuerte, así que el polvo de leña formado con el frote, acumulado alrededor de la punta de la pieza móvil, comienza á carbonizarse. Este polvo no tarda en encenderse. Las mujeres de Eap ponen en obra ese procedimiento con una habilidad verdaderamente asombrosa.»

«En Radack y en las islas Sandwich, sobre la pieza fija de leña se pone otra de un palmo de largo con punta embotada, que se mantiene apretada oblícuamente en un ángulo de 30°, encontrándose la punta más distante del operador que el otro estremo; el cual se sostiene con ambas manos y con los pulgares hácia abajo para poder apretar con más seguridad. Se imprime á la pieza en el plano del ángulo de inclinacion un movimiento rotatorio alternativo, de manera que con el frote determine una corta ranura de 2 á 3 pulgadas de longitud. Cuando el polvo así producido empieza á carbonizarse, se aumenta la presion y la velocidad.»

«Importa notar que en uno y otro sistema los dos pedazos de leña que se usan, son de la misma especie: los

leños de un tejido homogéneo, ni muy duros ni demasiado blandos, son los mejores. Ambos métodos exijen, empero, cierta costumbre, habilidad y paciencia.»

«El procedimiento empleado por los aleucianos no es otra cosa más que el primero de los dos espresados, mejorado bajo el punto de vista mecánico. Sírvense de un leño que hacen girar como un taladro, instrumento de que se sirven en algunos de sus oficios. Al efecto arrollan dos vueltas de cordon por dicho leño y tiran del cordon alternativamente en un sentido y en otro; la parte superior del leño gira en una pieza de madera debidamente preparada y que sostienen con la boca. Así hemos visto dar con dos pedazos de pino fuego en breves segundos, resultado que con otro sistema se habria necesitado un tiempo mucho más considerable.»

«La misma tribu utiliza tambien para proporcionarse fuego otro procedimiento que consiste en hacer chocar una con otra dos piedras untadas de azufre, encima de un pequeño monton de musgo seco salpicado con la misma sustancia.»

Esas descripciones son claras y fáciles de comprender, carácter que por desgracia no presentan los relatos análogos de otros viajeros. Seria de desear que los gefes de espediciones á comarcas remotas se penetraran bien de la importancia que encierra para la ciencia la observacion objetiva de los procedimientos técnicos de los indígenas, y por consiguiente se decidieran á describirlos de una manera tan exacta y completa como fuese posible, absteniéndose de toda adicion subjetiva. Los aparatos de producir fuego constituyen los instrumentos más interesantes de las tribus salvajes, porque en la mayor parte de los casos se remontan á remotísima antigüedad, y fueron el punto de partida de los instrumentos empleados para las otras operaciones técnicas. Cierto número de procedimientos utilizados para producir fuego, han escapado á los escritores especiales, por más que hayan sido objeto de observaciones por parte de los viajeros. Entre esos procedimientos mencionaremos someramente tres que fueron comunicados verbalmente al autor.

Segun M. Jagor, los malayos operan del siguiente modo: un palo de bambú seco, largo de un pié próximamente, se hiende de arriba abajo, y la médula que tapiza la pared interior se rasca, prensa y reune en una bolita que se dispone en medio de la cavidad de una de las mitades del bambú. Esa mitad se fija enseguida en tierra con la cavidad y la bola mirando arriba. El operador corta entonces la otra mitad del tubo de bambú, haciendo de ella una hoja recta y cortante como un cuchillo, luego la aplica trasversalmente á la otra mitad, dándole un movimiento alternativo, de modo que produzca una especie de aserradura. Al cabo de cierto tiempo se produce una muesca bastante honda y finalmente un agujero, estando entonces el filo de la hoja tan caliente que basta para efectuar la inflamacion de la bola con la cual se halla en contacto.

El profesor Neumayer vió emplear un procedimiento análogo en Nueva Holanda, si bien el bambú era reemplazado con leña. La pieza fija en el suelo era un leño provisto de una hendidura longitudinal, en la que se colocaba médula ú otra materia fácil de inflamar.

El consul Lindau tuvo ocasion varias veces de presenciar el siguiente procedimiento, que usan los naturales de Sandwich: varias piedras pequeñas de la especie de pedernales ó de aquellas que dan chispas con el choque, estaban colocadas en una hoja grande y seca al lado de menudas hojas fácilmente inflamables. Formando en cierto modo la hoja grande una especie de cucurucho, estaba sujeta al estremo de una varita. Haciendo girar esa varita en el aire con cierta destreza, las piedras al entrechocar unas con otras, llegaban á inflamar la hojarasca.

La cuestion del invento ó descubrimiento del fuego no se ha dilucidado todavia. Peschel en su notable obra (*Volkerkunde*, 1874) observa que los elementos de informacion son insuficientes para declararse con toda certidumbre. Gaspari (*Storia dell uomo primitivo*, 1873) desarrolla estensa y cuidadosamete la hipótesis de que el uso del trépano ó taladro puede haber conducido al invento del fuego. Esa misma hipótesis se encuentra repetida en la obra de Baer-Helwald sobre el hombre primitivo. Hállanse en esta última obra ejemplos muy notables de antiguos métodos para producir el fuego, que han sobrevivido y se han conservado en ciertos puntos de Inglaterrra, Alemania, Suiza, etc. Nos limitaremos á señalar entre todos esos ejemplos, el que observó el año 1828 Kuhn en Esséde (Hannóver). Tratábase de producir un fuego de alarma. Una gran barra de leña redonda horizontal cuyos estremos terminados en punta podian girar en dos agujeros practicados en postes verticales, estaba provista de una cuerda que se arrollaba en varias vueltas. Algunos individuos asidos de esta cuerda hacian girar alternativamente la barra en ambos sentidos, y el calor desarrollado por el frote llegaba á inflamar estopa colocada de antemano en uno de los agujeros de los postes verticales.

(25) (pág. 95).

Véase RAU, *Drilling in Stone without Metal*, Smithsonian Report, 1868.—Por amor á la ciencia arqueológica, RAU se impuso el sacrificio de practicar con sus propias manos el trabajo de perforar una roca sin el auxilio de útiles metálicos. Con un taladro de palo, semejante al que hemos descrito, consiguió barrenar una hoja de diorita de 45 milímetros de espesor, haciendo en ambas caras dos agujeros que acabaron por unirse próximamente en medio del espesor. Ese resultado se obtuvo al cabo de dos años de trabajo. La forma del agujero se encontró ser exactamente la misma que la de los agujeros de las hachas de piedra descubiertas en gran número en los diferentes paises de Europa.

A. R. WALLACE en su obra titulada *A. Narrative of travels on the Amazone and Rio Negro*, refiere en la página 278 la siguiente observacion: «Vi varios indios con su adorno más característico y apreciado, una piedra cilíndrica, blanca, opaca, que tienen el aspecto del mármol, pero que en realidad es cuarzo imperfectamente cristalizado. Esas piedras miden de 4 á 8 pulgadas de largo y una pulgada de diámetro. Están perfectamente redondeadas y terminan en superficies planas, lo que representa ya un trabajo muy considerable: cada una de ellas está además horadada en uno de sus extremos, y por ese agujero pasa un cordon que permite colgarla del cuello. Parece casi increible que los indios puedan practicar ese agujero en una sustancia tan dura, sin auxilio de instrumentos de hierro. Dícese que al efecto emplean la hoja, aguda y flexible, del plátano silvestre con ayuda de arena fina y agua. El abrir un agujero semejante en tales condiciones es tarea de varios años, y así lo creo. Más tiempo aun se necesita para horadar la piedra que el caudillo de una tribu lleva como distintivo de mando. Esa piedra, que por regla general tiene mayores dimensiones que las de los otros salvajes, se lleva trasversalmente sobre el pecho, lo cual exige que el agujero sea taladrado en toda la longitud. Segun las noticias que se me han dado, la duracion de ese trabajo no corresponde á ménos de dos generaciones. Hasta las piedras mismas provienen de puntos muy lejanos, probablemente de las cercanias de la fuente del rio, al pié de los Andes. Por ello se consideran tales piedras como de un valor muy grande, y es raro no poder lograr que se desprendan de ellas los que las poseen; y con respecto á los caudillos es casi imposible.»

(26) (pág. 96).

Esa cuestion está tratada de una manera muy completa en la obra de GINZROTH, *Wagen und Fahrwerke der Griechen, Römer und anderer alter Völker*, Munich, 1817. El carro de cuatro ruedas se utilizaba igualmente, máxime para el trasporte de pesadas cargas. Estaba armado de ejes fijos, lo cual le hacia ménos fácil de dirigir que el carro de dos ruedas. En la India se encuentran aun hoy usados entre los indígenas, carros de cuatro ruedas con un juego delantero que gira, y ese dispositivo debe mirarse como muy antiguo. Sábese que los carros de guerra de PORO iban tirados en las cercanias del campo de batalla por bueyes, para evitar que se fatigaran los caballos del ejército, y ese mismo procedimiento puede haberse seguido infinidad de veces despues del conquistador. Ahora bien, pudo suceder que alguna vez se reunieran dos carros vacios, atando la lanza del uno á la zaga del otro, y que así se constituyera una especie de vehículo compuesto de un avantren y de un carro propiamente dicho. La facilidad con que semejante vehículo podia dirigirse, llamaria por fin la atencion y conduciria á la adopcion de un avantren móvil para los carros ordinarios.

(27) (pág. 96).

Los carros de madera tomados en una batalla eran entregados á las llamas por el vencedor, porque generalmente carecia de caballos para podérselos llevar, y en cuanto á los carros de hierro, limitábase á mandarlos inutilizar rompiendo algunas de sus partes esenciales, del mismo modo que hoy se clavan los cañones que no pueden llevarse. En la Biblia se encuentran los siguientes pasages: (2. *Sam.* VIII, 4) «David hizo prisioneros mil setecientos soldados de á caballo y veinte mil de á pié, y luego inutilizó todos los carros no guardando más que ciento;»

y en otro (*Josué*, XI, 6). «Tu cortarás los jarretes á sus caballos y quemarás sus carros;» y más adelante: «Josué hizo lo que el Señor le habia ordenado, cortó los jarretes á sus caballos y entregó sus carros á las llamas.» Resulta además de un pasage del libro de Moisés (4, *Mos.* VII, 3 á 8) que los judios conocian desde mucho tiempo los carros de ruedas, pues en este pasage se trata de seis carros (de madera) tirados cada uno por un par de bueyes. Las ruedas del famoso carro de SALOMON eran enteramente de bronce, «sus ejes, sus cubos, sus llantas y sus radios eran de metal fundido.»

(28) (pág. 96).

El museo de Tolosa tiene dos ruedas de carros antiguos, de 0'54 metros de diámetro, que son de bronce y están notablemente conservadas: los cubos miden 40 centímetros de largo y 7 de diámetro interior. Cada una de esas ruedas tiene cinco radios, de seccion circular, y una llanta provista de una ranura profunda, en la cual se encajaban las cabezas de los roblones destinados á fijar el aro esterior de madera.

(29) (pág. 96).

De todas las piezas que entran en la construccion de una rueda, el calce esterior ha desempeñado en su desarrollo progresivo, un papel importante y muy digno de observacion. Es sin duda la guarnicion metálica, la única que hace capaz la rueda de correr rápidamente por vias difíciles sin gastarse demasiado pronto. Pero transcurrió un período larguísimo hasta que se llegase al aro de hierro de una sola pieza. HOMERO en su famosa descripcion del carro de JUNO, habla de aros de hierro, más nada prueba que los aros de hierro estuviesen en uso. En bajo-relieves asirios y persas hay representados carros de gran variedad de formas, en los que las más de las veces figura un aro liso que apenas se distingue del aro interior. Ciertos calces son particularmente notables en cuanto ofrecen una série de pequeñas partes salientes, de un aspecto análogo al de un collar de perlas (fig. 471). Segun el profesor LINDENSCHMIDT, de Maguncia, esas prominencias no son más que cabezas de clavos hundidos en hileras apretadas en la llanta de madera.

(30) (pág. 97).

Puede citarse como ejemplo el método seguido para el trasporte de las columnas del templo de *Artemisa* á Efeso, método descrito por Vitrubio (X, cap. II). El arquitecto CHERSIPHRON fijó gorrones de hierro en los estremos de enormes masas cilíndricas de piedra que se debian trasportar. Los gorrones de cada columna tenian sus soportes en una armazon de madera, á la cual se enganchó cierto número de pares de bueyes. Merced á ese procedimiento, pudieron llevarse arrastrando las columnas (como los rodillos compresores de nuestras carreteras) desde la cantera hasta el lugar en que debian colocarse en su sitio destinado.

(31) (pág. 97).

Procurando imitar los procedimientos de la antigüedad, se ha llegado á comprender que pueden utilizarse fragmentos de piedra dura, aun cuando sean obtusos para abrir agujeros cuando presentan aristas cristalinas.

(32) (pág. 98).

La palabra *tornator* que es bastante rara, se encuentra en este pasaje de JUL. FIRMICUS (*Mathesis*, IV, 7): «Facit quoque tornatores aut simulacrorum sculptores.»

(33) (pág. 98).

Entre los objetos del museo de Berlin que sin duda alguna pertenecen á la época de las primeras dinastias, hay varios que incontestablemente fueron trabajados al torno. El uso de ese instrumento era, por lo tanto, conocido de los antiguos egipcios 2.000 ó 3.000 años antes de nuestra era.

(34) (pág. 99).

Véase BÖCKLER, *Theatrum mechanicum novum*, Nuremberg, 1762, Láminas 35, 36 y 80.—En toda esa obra, que contiene 154 láminas, como ni tampoco en la de ROSBERG (*Kunstlichem Abriss*, etc., Nuremberg, 1610) no se encuentra el menor indicio de nuestro modo actual de trasmision por correa. Algunos ejemplos de trasmision por medio de una cuerda arrollada con dos, tres ó cuatro vueltas alrededor de una polea, están indicados en la obra de RAMELLI (*Arteficiose machine*, Paris, 1588, láminas 171, 175 y 183).

(35) (pág. 100).

Hay en el museo de Berlin muestras de husos antiguos egipcios. WILKINSON, que los reprodujo en su obra «*Ancient Egyptians*» puso á continuacion tres dibujos de ruecas que equivocadamente tomó por husos. Quizás se engañó á causa de una nota de un antiguo catálogo.

(36) (pág. 101).

«La palabra *Caduf, Chadouff* ó *Schaduff* viene de la raiz *Schadf* que significa *inclinar á un lado*. La máquina elevatoria de que se trata, se llama así, porque la palanca en la posicion de reposo, se encuentra siempre inclinado al lado que lleva el contrapeso de piedra. Esa máquina no existe en Siria: yo no la he visto más que en Egipto.» (Correspondencia del doctor WETZSTEIN). En la *Descripcion del Egipto* (XVIII, 2, pág. 539), el caduf lleva el nombre de *Delú*.

(37) (pág. 103).

Esa tendencia se muestra hoy todavia bastante acentuada en algunos pueblos poco civilizados. Así el baron KORFF vió en Egipto un armero que al propio tiempo que tenia ocupadas ambas manos en la preparacion de las piezas metálicas de un fusil, movia con los piés una sierra destinada á cortar la madera de la caja. Los tártaros de ambos sexos al entregarse á las ocupaciones domésticas, rara vez abandonan su bastidor de bordar. Si se observa, además, que aun hoy en Europa cierto número de mujeres hacen calceta sin dejar de ocuparse en otras tareas, se comprende que esta antigua costumbre se haya conservado hasta nosotros.

(38) (pág. 106).

Noria es una palabra española que deriva del árabe *nà-'ùrah*, que espresa el ruido ó especie de ronquido que producen los cangilones cuando se vacian. VITRUBIO conocia esas ruedas, que ya en su tiempo debian ser muy antiguas (X, cap. V):... Circa eorum frontes affiguntur pinnæ, quæ cum percutiuntur ab impetu fluminis, cogunt progredientes versari rotam, et ita modiolis aquam haurientes et in summum referentes sine operarum calcatura ipsius fluminis impulsu versatæ, præstant quod opus est ad usum.

(39) (pág. 106).

Un magnífico ejemplar de ese género de máquinas se halla en Zurich cerca de la Escuela politécnica, que forma un contraste muy notorio. Seria útil para enseñanza de las generaciones futuras conservar, á lo ménos con dibujos, tales testimonios de una época pasada, esos dinoterios y mammuts de la mecánica.

(40) (pág. 109).

Parece que generalmente se ignora que la mufla era conocida por completo de los griegos, y por esa razon creemos de nuestro deber recordarlo aquí. Los romanos recibieron de los griegos el nombre y la cosa (véase VITRUBIO, X, cap. II, *De machinis tractoriis)* la mufla de tres poleas se llamaba τρισπαστος (de tres cuerdas), el de cinco poleas πενταπαστος, y de una manera general el de varias poleas πολυπαστος. Esas designaciones eran seguramente preferibles á las nuestras; pues las investigaciones del párrafo 43 nos han demostrado que en efecto en las muflas importa considerar como partes características, no las poleas, sino las cuerdas tendidas.

(41) (pág. 109).

Cuando se quieren clasificar las ruedas dentadas segun la mayor ó menor complicacion de sus principios teóricos, parece necesario disponerlas en el órden siguiente: ruedas cilíndricas, ruedas cónicas, ruedas helicoidales, ruedas hiperboloides. Pero se corre el riesgo de equivocarse, si se admite que ese órden es el de su desenvolvimiento natural. Verdaderamente las ruedas dentadas con ejes cruzados no concurrentes, es decir, con axoides hiperboloides parece que son las más antiguas. Con efecto, encontramos ruedas dentadas de la forma más sencilla, es decir, constituidas únicamente por un eje y radios, en antiguas máquinas de elevar agua, en las que el eje horizontal de una rueda de cangilones habia de ponerse en movimiento, por un eje vertical (véase la figura 50 de *Hydraulic an other Machines,* EWBANK, 16.ª, edicion, Nueva York, 1870). Las ruedas helicoidales para árboles paralelos cuyo invento han atribuido los ingleses á WHITE, se encuentran ya en los cilindros usados desde mucho tiempo entre los indios para desgranar el algodon (véase un grabado en la obra de LEIGH, *Modern Coton Spinning,* Londres, 1873, así como varias máquinas completas en el museo indio de Londres). Cumple además observar que las ruedas dentadas para ejes concurrentes en forma de ruedas de corona y linterna, han encontrado en los antiguos molinos y hasta una época bastante cercana á nosotros, aplicaciones mucho más considerables que las ruedas cilíndricas, á las cuales en realidad corresponde ser las últimas de la série. El órden real del desarrollo histórico de las ruedas dentadas es, pues, exactamente el inverso del que pudiera suponerse *à priori,* y la conclusion que debe sacarse es que los dispositivos que bajo el punto de vista práctico se han presentado como más naturales y fáciles de aplicar, no son precisamente los que bajo el punto de vista geométrico son los más sencillos.

(42) (pág. 110).

Saquia (ó *Sakkiah)* viene de la espresion árabe *Sakai* que significa llevar agua, regar: el aguador en los paises orietales se denomina *Sakka.*

(43) (pág. 129).

Es interesante comparar las diversas opiniones que se han emitido tocante al asunto. Las citas siguientes hacen resaltar las discordancias que existen entre los principales tratados.

POPPE, *Maschinenkunde* (1821), pág. 81:

«Con el nombre de máquinas sencillas ó simples, ó el de potencias mecánicas, se comprenden la *palanca*, la *cabria*, la *polea*, el *plano inclinado*, la *cuña* y el *tornillo*. Sirven para constituir todas las máquinas, aun las más complicadas. Sin embargo, como la teoria de la rueda de la cabria y de la polea está basada en las leyes de la palanca, de igual modo que la de la cuña y del tornillo lo está en las leyes del plano inclinado, pueden en rigor reducirse á dos las máquinas simples, á saber: la *palanca* y el *plano inclinado*.»

Aquí se dice muy claramente y de una manera absoluta que «todas las máquinas, aun las más complicadas» se forman de máquinas simples y que éstas pueden reducirse á dos.

LANGSDORFF, *Maschinenkunde* (1826), tomo I, pág. 277:

«En los tratados, aun los más antiguos, encuéntranse las máquinas divididas en simples y compuestas, considerándose estas últimas como constituidas por la combinacion de cierto número de aquellas. Las máquinas simples en tales obras están limitadas á la *palanca*, la *polea*, el *plano inclinado*, la *cuña*, el *tornillo* y la *cabria*. Pero el plano inclinado cuando está en reposo, no deberia comprenderse en esa clasificacion, porque en tal caso no tiene el derecho de ser más considerado como máquina que la vertiente ó falda de una montaña. En la cuña se encuentra un plano inclinado móvil, más entonces es evidente que el *plano inclinado y la cuña no constituyen máquinas de especie diferente*, y propongo poner en lugar del plano inclinado el *cilindro*...»

Aquí se niega completamente al plano inclinado el título de máquina simple, mientras que en la obra anterior era considerado como la base de varias otras máquinas.

GERSTNER, *Handbuch der Mechanik* (1831), I, pág. 73:

«Las máquinas suelen dividirse en *simples* y *compuestas*. La más simple y que debemos tratar ante todo, es la *palanca*. Luego examinaremos por órden la *cabria*, la *polea*, la *mufla* (!), el *plano inclinado*, el *tornillo* y la *cuña*. Todas esas máquinas son *máquinas simples*. Las compuestas son siempre el resultado de la combinacion de varias máquinas simples, y por ese motivo importa tratarlas despues de estas.»

KAYSER, *Handbuch der Statik* (1836), pág. 460:

«Divídense tambien las máquinas en *simples* y *compuestas*. Rigurosamente hablando la *cuerda* (!), la *palanca* y el *plano inclinado* son las únicas máquinas simples. Sin embargo, es costumbre tratar á la vez como tales aquellas en que puede descomponerse toda máquina compuesta. Así se tiene la precision de contar siete máquinas simples: la *cuerda*, la *palanca*, la *polea*, la *cabria*, el *plano inclinado*, la *cuña*, y el *tornillo*. Desígnanse tambien con el nombre de *órganos de las máquinas* ó de *potencias mecánicas*. Varios autores no hacen figurar la *cuerda* entre las máquinas simples.»

RÜHLMANN, *Mechanik* (1860), pág. 231:

«Una máquina se llama simple cuando ninguno de sus elementos componentes constituye por sí solo una máquina; y en caso contrario es compuesta. Bajo la designacion de máquinas simples están comprendidas: la *máquina funicular*, la *palanca*, la *polea*, la *cabria*, el *plano inclinado* y la *cuña*. En rigor no deberian considerarse como máquinas simples más que *tres:* la *máquina funicular*, la *palanca* y el *plano inclinado*, ya que todas las demás pueden referirse á ellas.»

Esa definicion de las máquinas simples deja mucho que desear, y no es en el fondo más que una peticion de principios. Supone que la polea deriva de la palanca, lo cual es enteramente inadmisible.

SCHRADER, *Elemente der Mechanik und Maschinenlehre* (1860), pág. 26:

«La palanca y el plano inclinado son las bases de todas las máquinas simples. En efecto, de la palanca derivan la *polea* y la *cabria*, en tanto que el plano inclinado da la *cuña* y el *tornillo*. En la palanca la parte móvil de la máquina está animada de un movimiento de rotacion, mientras que en el plano inclinado tiene un movimiento rectilíneo.»

Aquí, como anteriormente, el modo de la concepcion de la polea es erróneo.

Nos limitaremos á tales citas añadiendo solamente que las definiciones dadas por los autores franceses é ingleses no están más acordes ni son más satisfactorias.

Es punto que merece señalarse particularmente en todos los estractos anteriores, escepto en el de *Langsdorff*, que la propiedad de ser máquina simple se niega al tornillo, á pesar de que cinemáticamente constituye el caso general de los tres acoplos y que por ese motivo deberia forzosamente figurar en toda clasificacion. La confusion verdaderamente estraordinaria que se nota en las ideas emitidas tocante al asunto que nos ocupa, es el resultado de una singular mala inteligencia que desgraciadamente se encuentra muy arraigada, para que podamos verla de-

saparecer pronto. Esa mala inteligencia consiste en que la semejanza de las relaciones que existe entre las fuerzas que entran en accion, se toma equivocadamente por una semejanza entre los objetos mismos. Por la razon de que ciertas relaciones entre las fuerzas en accion en el tornillo presentan analogia con las que se pueden encontrar en el plano inclinado, no se sigue en modo alguno que el tornillo entre en el plano inclinado. En vez de considerar las combinaciones de cuerpos en sí mismas, se limita el exámen á algunas de sus propiedades, que si bien tienen una importancia incontestable, deben tratarse lógicamente precindiendo de la naturaleza de las combinaciones de cuerpos á que se refieren. Por otra parte, al pasar los autores modernos en silencio las máquinas simples limitándose á tratarlas como «ejemplos,» ejercicios, aplicaciones, etc., han ido demasiado léjos, pues segun hemos visto en el texto, hay realmente algo verdadero en sus problemas.

Por más que no sea precisamente fácil determinar hasta qué punto conviene que la mecánica general se conforme con las indicaciones de la Cinemática, creemos poder decir que la mecánica elemental debe en particular proponerse tratar las máquinas simples en la medida que nosotros hemos indicado en virtud de nuestras investigaciones. Por lo demás, no puede dejar de sacarse mucha utilidad de ese estudio especial, merced á la sencillez y exactitud que caracterizan los métodos cinemáticos.

Es además muy diferente la importancia que ha de darse al estudio de las máquinas, segun se trate de mecánica elemental ó de mecánica superior. Para aquellos que solo necesitan nociones elementales, la mecánica se confunde con la teoria de las máquinas, pero la diferencia se acentua más y más á medida que se trata la cuestion desde un punto de vista más elevado. Por regla general los tratados elementales de mecánica dejan mucho que desear en el concepto de la disposicion lógica de las materias, careciendo muy amenudo de la claridad que hoy tenemos el derecho de exijir á la mecánica. Esa es una observacion que hemos tenido motivo de hacer ya al tratar del rozamiento. En todos los tratados que existen, el estudio de la resistencia de materiales se ofrece poco más ó ménos como si no tuviera ninguna relacion con las otras partes. En ninguno de ellos se muestra claramente que esa parte de la mecánica es para los sólidos lo que la hidrostática y la hidráulica son para los líquidos, la aerostática y la aereodinámica para los gases. Para ser de todo punto consecuente debiera por analogia adoptarse, tocante á esa parte, la espresion de *Estereostática* y *Estereodinámica*. Entre esas tres partes de la mecánica que corresponden respectivamente á los sólidos, líquidos y gases, existen analogias muy notables que habria gran interés en hacer resaltar.

(44) (pág. 148).

Uno de los notabilísimos servicios prestados por Willis es el de haber sido el primero en llamar la atencion sobre los mecanismos de manubrio cónicos y sobre su analogia con los mecanismos cilíndricos *(Principles of mechanism*, 2.ª edicion, 1870, pág. 249). Dió á esos mecanismos el nombre de *solid-angular linh-work* é indicó varias de sus propiedades más importantes, así como cierto número de formas que pueden afectar. Sin embargo, como no tenia nocion de la cadena cinemática, pasáronle por alto algunas propiedades fundamentales. Como todos los demás cinemáticos, en ninguna parte de sus descripciones mencionó el cuarto miembro de la cadena (el miembro fijo), como tampoco el principio de inversion y cierto número de aplicaciones prácticas muy notables.

(45) (pág. 153).

El estudio de las cadenas compuestas constituye una de las mayores dificultades de la cinemática. Volvemos á tratar de esa materia en el cap. XIII y señaladamente en el párrafo 160. Solamente en las aplicaciones de la cinemática se logra darse exacta cuenta de las ventajas que reporta el empleo del principio de la reduccion de las cadenas.

(46) (pág. 165).

Con los mecanismos citados, cuyo número es, sin embargo, bastante considerable, distamos mucho de haber agotado la série de los capsulismos que la práctica ha sacado del mecanismo $(C''_3P^{\perp})^3$. Cumple indicar aquí que en estos últimos tiempos la caldera del manubrio de impulsion desviado (§ 73) se ha utilizado generalmente para

formar capsulismos. La máquina de vapor de GIBSON (*American Artizan*, 1874, Febrero, pág. 30) es efectivamente el resultado de dos mecanismos de la forma $(C''_3P^+)\frac{a}{c}-b$.

(47) (pág. 174).

Para determinar las axoides de los miembros b y d en la cadena $(C\frac{+}{3}C^{\angle})$ tenemos las relaciones (Véase la figura 472):

$$\frac{w_1}{w}=\frac{r}{r_1}=\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\gamma_1}=\frac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\omega\operatorname{sen}^2\alpha}$$

Por otra parte tenemos:

$$\gamma_1=180-(\gamma+\alpha),$$

y por consiguiente:

$$\operatorname{sen}\gamma_1=\operatorname{sen}(\gamma+\alpha)=\operatorname{sen}\gamma\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\gamma$$

Si se plantea: $\frac{\cos\alpha}{1-\operatorname{sen}^2\omega\operatorname{sen}^2\alpha}=A$, la ecuacion anterior da:

$$\operatorname{sen}\gamma=A(\operatorname{sen}\gamma\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\gamma)$$

$$\frac{1}{A}=\cos\alpha+\operatorname{cotg}\gamma\operatorname{sen}\alpha,$$

de donde se saca:

$$\operatorname{cotg}\gamma=\frac{\frac{1}{A}-\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

ó reemplazando A por su valor:

$$\operatorname{cotg}\gamma=\frac{1\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\omega\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\omega}{\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{tang}\alpha\cos^2\omega,$$

relacion que puede tambien determinarse gráficamente con facilidad, como lo indica, por ejemplo, la figura 473. De esa relacion se deduce:

$$\cos^2\omega=\frac{x}{\operatorname{tang}\alpha}=x\operatorname{cotg}\alpha.$$

(48) (pág. 175).

No hay ningun inconveniente en hallar por procedimiento sintético nuevas formas que añadir á las ya muy numerosas que hemos mencionado. Los problemas de esa clase constituyen un género de ejercicios muy útil.

Para dar un ejemplo comenzaremos por observar que en ninguna de las doce máquinas que representan las figuras 317 á 329 y que se derivan de los mecanismos $(C\frac{+}{3}C^{\angle})^d$ y $(C\frac{+}{3}C^{\angle})^b$, figura el modo de formacion de émbolo y de cápsula indicado por el símbolo $(V^{\pm})=c, d$. Sin embargo, es posible aplicarlo, y de la manera siguiente: El elemento 4 del acoplo que pertenece al miembro d, en vez de estar dispuesto como en la figura 317 bajo la forma de un diafragma con guia-ranura para c, podria ejecutarse bajo la forma de un *sector cilíndrico* hueco, ligado á otras porciones de cilindros igualmente huecos (fig. 474). En la cápsula así formada, cuya seccion presenta la mayor analogía con la de la cápsula de sector esférico de que se ha tratado en el texto, podemos suponer colocado como émbolo el segundo elemento del acoplo 4 (el elemento *c*). La forma de ese elemento es la de una delgada seccion de cilindro encajada en un eje normal al plano de la figura y que puede prolongarse fuera de la cápsula. Las partes salientes de este eje están invariablemente reunidas por medio de una armadura esterior con el cilindro lleno (C^+) del acoplo 3. El miembro b lleva los cilindros huecos de los acoplos 3 y 2; siendo en suma, una biela terminada por dos orificios mútuamente perpendiculares, y que está acoplada en 2 con el manubrio $a=C^+\ldots\angle\ldots C^+$, el cual

como en la figura que hemos citado en el texto, está soportado en 1 por el miembro *d* (el puente). Así se logra constituir un capsulismo en el que el émbolo *c* tiene simplemente un movimiento de oscilacion alrededor de su eje. Sin querer discutir aquí la mayor ó menor ventaja que puede ofrecer esa forma de máquina, podemos obvervar que MORTON consiguió algo semejante en su máquina de discos (véase *Deutsche Gewerbezeitung*, 1857, pág. 31), debiendo añadir que bajo la influencia de las disposiciones de las máquinas de discos de creacion anterior, MORTON dió sin ninguna necesidad á su émbolo y á su cápsula la forma de secciones de esferas. En esa máquina el émbolo no tiene los movimientos estraños que tenia en las antiguas; no tiene hendidura, la cápsula no necesita diafragma, ni es necesario ocuparse de la hermeticidad, antes tan difícil de mantener. MORTON además hubo de adoptar para las paredes laterales de la cápsula, superficies planas, paralelas al eje del acoplo 4, en las cuales se apoya el émbolo en las dos posiciones estremas de su movimiento de oscilacion.

(49) (pág. 180).

Un año antes (1858) se habia tomado en Inglaterra un privilegio para una máquina de vapor rotatoria en la que los émbolos tenian la forma de una suela. Estos émbolos se hacen herméticos en las cimas de los dientes con piezas de guarnicion especiales (véase *Propagande industrielle*, IV, 1869, pág. 179).

(50) (pág. 212).

La division de la máquina completa en *receptor*, *comunicador* y *operador* ha encontrado en algunos autores una lijera oposicion. Así por ejemplo, se encuentra en WEISBACH (*Ing. u. Masch. Mech.* II, 1865, pág. 258) la siguiente observacion. «Esas tres partes principales no son claramente distintas en todas las máquinas; la parte intermedia sobre todo falta á veces por completo, porque la máquina motriz tiene ya el movimiento que es necesario para efectuar un trabajo determinado. En una carretilla ordinaria las tres partes principales se hallan completamente reunidas: las dos varas pueden considerarse como la parte que recibe la fuerza, los brazos como la parte que trasmite la misma, y en fin, la caja, como el operador, y no obstante las tres partes no constituyen más que un solo cuerpo.»

La eleccion de la carretilla como ejemplo, no es la más acertada, pues, por sí sola no constituye realmente una máquina y en su utilizacion hay que tener en cuenta la intervencion bastante complicada de la fuerza muscular del hombre, sobre la cual nos hemos esplicado en el párrafo 134. WEISBACH aborda además la cuestion en los siguientes términos: «En toda máquina se pueden distinguir *comunmente* tres partes principales,» y de antemano indica con esto, que no considera esa division como valedera en todos los casos. Pero en totalidad se confirma en la literatura técnica una tendencia á declarar de una manera más determinada cada vez la existencia de las tres partes que constituyen una máquina completa: esta subdivision ha pasado en cierto modo al estado de petrificacion, fenómeno que se reproduce á veces por lo que toca á ciertos conceptos del órden didáctico. Primero fué propuesta con circunspeccion, con reserva, y en cierto modo como una *tentativa* de solucion. La primera generacion que siguió, recibióla como principio demostrado, la segunda la aceptó como máxima fundamental, indiscutible. Segun nuestra opinion, la ciencia pura debe proponerse siempre hacer accesibles las fuentes de una doctrina, para que en momento dado pueda remontar hasta ellas y someter al exámen la exactitud de sus diferentes proposiciones.

(51) (pág. 215).

En ciertos tratados hállanse los autores involuntariamente conducidos á considerar como formando una verdadera série las tres subdivisiones que pretenden hallar en toda máquina. Así por ejemplo, en RÜHLMANN (*Maschinenlehre*, I) se encuentran las espresiones siguientes: *Vordermaschine* (máquina anterior), *Zwischenmaschine* (máquina intermedia) é *Hintermaschine* (máquina posterior). Espresiones análogas se habian utilizado ya mucho antes por LANGSDORFF (*Manchinenkunde*, I).

(52) (pág. 234).

En un artículo humorístico un autor inglés se divirtió tratando el desarrollo de las máquinas conforme con la teoria de DARWIN. Anuncia que un dia las máquinas llegarán á engendrarse completa y perfectamente unas á otras; que entonces formarán una raza poderosa, dotada de voluntad, y llegarán á someter á su yugo á sus antiguos amos, los hombres. ¡Quizás estaba ese chispeante escritor ménos distante de la verdad de lo que suponia!

(53) (pág. 250).

Un modelo del mecanismo representado por la figura 428 (copiado del gabinete cinemático del autor) se hallaba en la exposicion de Viena (1873) al lado de un modelo bastante análogo, designado con el nombre de disco oblícuo. El profesor SCHEDLBAUER dió una teoria de los movimientos en este mecanismo y ha demostrado que el miembro e tiene un movimiento oscilatorio espresado por $r.\ \text{tang}\ \alpha.\ \text{sen}\ \omega$. En esta espresion r es la distancia constante 1.6, α el ángulo comprendido entre 1 y 2, y ω el ángulo formado por el miembro giratorio a con el miembro fijo f. Segun esto, el movimiento del miembro e seria un movimiento de oscilacion puro y simple. Pero conviene notar que los datos constructivos que dió SCHEDLBAUER son algo diferentes de los que han servido de base para la figura 428 y para la ejecucion del modelo mencionado. Supone, en efecto, que el miembro b es de la forma C...⊥...P, y además, el eje del último prisma corta el del prisma 6 sobre una línea que permanece á una distancia constante de 1, lo que se encontraria realizado en el caso en que la composicion del mecanismo correspondiese á la fórmula $(C^{\prime}\,C^{\perp}P^{\perp}C^{\perp}P''C'')\frac{f}{a}$.

En realidad, con la disposicion de mecanismo indicado en la mencionada figura 428, el miembro e ejecuta movimientos que no son más que aproximadamente oscilaciones armónicas y que están representadas por la espresion:

$$y=\frac{(r\,\text{sen}\,\alpha)\,\text{sen}\,\omega}{\sqrt{\cos^2\omega\,\cos^2\alpha+\text{sen}^2\,\omega}}$$

en la que y es la distancia de un punto de e á una posicion media, r la longitud 2.4, designando α y ω los mismos ángulos que anteriormente.

Para un escaso valor de α la diferencia entre los dos movimientos es muy pequeña y puede generalmente despreciarse en las aplicaciones de la práctica.—Hemos tenido empeño en señalar este ejemplo como una prueba de lo que hemos adelantado en la nota 43, es decir, de que hasta ahora se encontraba dirigida la atencion á la ley, ó más exactamente, á una de las leyes del movimiento en un mecanismo, mientras que se dejaba sin exámen la combinacion en virtud de la cual se efectuaba el movimiento considerado. Esa combinacion es, sin embargo, en el caso actual la parte más importante, puesto que tenemos ya una série de mecanismos, en virtud de los cuales puede realizarse un movimiento rigurosa ó aproximadamente armónico, en tanto que la cadena (C^{+}_{6}) no se ha estudiado aun por completo bajo sus diferentes formas.

La máquina de vapor de ROBERTSON que hemos mencionado en la página 249, contenia una parte accesoria que merece señalarse. En el tipo, de fecha más reciente, ROBERSTON habia adoptado el mecanismo de trasmision que está representado por la figura 475, y que no dejó de causar cierto asombro. En este dispositivo c es una rueda dentada que recibe su movimiento de la rueda a (no dentada) por mediacion de un cuerpo líquido b, que está contenido en la cavidad anular de a, ó más exactamente que está acoplado con a; porque el líquido b resbala por el contorno de la rueda (ó rodezno) cuando la velocidad de esta última sufre variaciones. El aro de b puede, pues, tener un movimiento de rotacion uniforme, por más que la rueda a se mueva con variable celeridad, comunicada por el mecanismo de manubrio (C^{+}_{6}). Se pretende que el movimiento así se trasmite con mucha mayor suavidad, que al principio una pequeña cantidad de agua se halla proyectada fuera, pero que la fuerza centrífuga no tarda en ser suficiente para mantener el agua aplicada á la periferia interna de la rueda a. Aquí vemos una aplicacion del acoplo C_1, $Q\lambda$, ó (C_1,λ) perteneciente á la clase

XVI (§ 149.) El vaso V− con el cual está acoplado Qλ, por otra parte, tiene esencialmente la forma C− á causa del deslizamiento del anillo ó aro del agua. Por lo tanto, podemos representar el mecanismo así aplicado con la fórmula siguiente:

$$\overset{a}{C^{+}}\ldots \mid \ldots C^{-},Q\lambda\ldots\ldots O\lambda,\overset{b}{C_{z}^{+}}\ldots \mid \ldots \overset{c}{\underline{C^{+}\!\equiv\! C^{-}}}\ldots \parallel \ldots \overset{d}{\underline{C^{-}}}$$

Podemos igualmente notar otra vez la tendencia más y más pronunciada de la mecánica práctica á entrar en la via que hemos indicado de una manera general en nuestra síntesis. El acoplamiento de Qλ con C_z, no ofrece además, en sí mismo, conforme sabemos, nada nuevo, puesto que existe ya en la rueda hidráulica comun. Aquí no interesa más que como aplicacion á una trasmision de taller ó fábrica.

TABLA DE LAS MATERIAS

PRÓLOGO. 5

INTRODUCCION. 9

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE UNA TEORIA GENERAL DE LAS MÁQUINAS.

CAPÍTULO PRIMERO

Consideraciones generales

§ 1. Límites del problema de las máquinas. . . 22
2. La ciencia de las máquinas.. 26
3. Solucion general del problema de las máquinas. 29

CAPÍTULO II

Principios foronómicos

§ 4. Consideraciones preliminares. 36
5. Movimiento relativo en el plano. 37
6. Centro momentáneo de rotacion ó Polo. —Polígono regular.. 38
7. Trayectorias polares.—Rotacion cilíndrica. 39
8. Investigacion de las trayectorias polares. . 40
9. Reduccion de las trayectorias polares. . . 42
10. Rotacion entorno de un punto. 43
11. Rotacion cónica ó arrollamiento cónico. . 44
12. Forma más general del movimiento relativo de cuerpos sólidos.. 44
13. Viracion y arrollamiento de superficies reguladas. 44

CAPÍTULO III

Acoplos de elementos

§ 14. De las diferentes especies de acoplos de elementos. 48
15. Investigacion de los acoplos de encaje ó ajuste. 49
16. De los movimientos en los acoplos de encaje. 50
17. Apoyos necesarios y suficientes de los elementos. 52
18. Apoyo contra la traslacion. 53
19. Apoyo contra la rotacion. 55

20. Apoyos simultáneos contra la traslacion y la rotacion. 58
21. Acoplos superiores de elementos. . . . 59
22. Figura biconvexa de dos arcos de círculo en el triángulo. 60
23. Trayectorias de los puntos de la figura biconvexa con relacion al triángulo equilátero. 62
24. Trayectorias de los puntos del triángulo con relacion á la figura biconvexa. . . 63
25. Figuras de anchura constante. 64
26. El triángulo curvilíneo equilátero en el rombo. 65
27. Trayectorias de los puntos del triángulo curvilíneo con relacion al cuadrado.. . 66
28. Trayectorias de los puntos del cuadrado con relacion al triángulo curvilíneo.. . 67
29. Otros discos curvilíneos de anchura constante.. 67
30. Investigacion general de los perfiles de elementos para una ley de movimiento dada.. 69
31. Primer procedimiento. — Determinacion del perfil correspondiente á un perfil escogido al azar. 69
32. Segundo procedimiento. — Trayectorias polares auxiliares.. 70
33. Tercer procedimiento.—Trayectorias polares secundarias consideradas como generatrices de perfiles. 72
34. Cuarto procedimiento.—Trayectorias de puntos de elementos como perfiles. . . 72
35. Quinto procedimiento.—Perfiles formados por líneas paralelas á cicloides. . . . 73
36. Sexto procedimiento.—Trazados aproximativos de los perfiles por medio de de arcos de círculo.—Método de Willis. 74
37. Séptimo procedimiento.—Empleo de las trayectorias polares como perfiles de elementos. 75
38. Generalizacion de los procedimientos anteriores. 75

CAPÍTULO IV

Acoplos de elementos no independientes

§ 39. Clausura ó cierre de acoplos de elementos por medio de fuerzas sensibles . . . 78
40. Rotacion de axoides por clausura de fuerza.. 79
41. Elementos cinemáticos dúctiles. . . . 80
42. Los resortes. 81
43. Clausura de acoplos de elementos por las cadenas cinemáticas.. 82
44. Clausura cinemática completa de los elementos dúctiles. 84

CAPÍTULO V

Cadenas cinemáticas no independientes

§ 45. Puntos muertos en los mecanismos.—Modo de salvarlos por medio de fuerzas sensibles.. 86
46. Paso de los puntos muertos por clausura de cadena. 87
47. Clausura de cadenas cinemáticas por medio de acoplos de elementos. 88

CAPÍTULO VI

Ojeada sobre la historia del desarrollo de las máquinas

§ 48. Orígenes y desarrollo de las máquinas. . 92
49. Principio cinemático del perfeccionamiento de las máquinas. 104
50. Modo de desarrollo de la mecánica moderna.. 107
51. De las causas determinantes del desarrollo de las máquinas. 112

CAPÍTULO VII

Lenguaje simbólico cinemático

§ 52. Necesidad de un lenguaje simbólico para la cinemática. 115
53. Ensayos de notaciones anteriores. . . . 116
54. De las diferentes especies de símbolos necesarios. 117
55. Símbolos de especie ó de nombre. . . . 118
56. Símbolos de forma. 118
57. Símbolos de relacion. 119
58. Notacion de cadenas cinemáticas y de mecanismos simples. 121
59. Notacion abreviada.. 123
60. Notacion de cadenas compuestas. . . . 124
61. Notaciones de cadenas con órganos de presion. 125
62. Notacion concentrada en algunos mecanismos. 126

CAPÍTULO VIII

Análisis cinemático

§ 63. Objeto del análisis cinemático. 128
64. De las máquinas llamadas máquinas simples. 128
65. Cuadrilátero de manubrio cilíndrico (C''_4). 133
66. Manubrios paralelos. 134

67. Manubrios antiparalelos. 135
68. Mecanismo de manubrio isóceles. . . . 136
69. Cadena de manubrio de impulsion cilíndrica ($C''_3P^{\perp}$). 136
70. Cadena de manubrio de impulso isóceles. 139
71. Ensanche de las gorrones en la cadena del manubrio de impulsion. 140
72. Cadena de corredera en cruz rectangular ($C''_3P^{\perp}_2$). 143
73. Cadena de manubrio de impulsion desviada. 144
74. Cuadro recapitulatorio de los mecanismos de manubrio cilíndricos. 146
75. Cuadrilátero de manubrio cónico ($C^{\angle}_4$). . 148
76. Reduccion del número de los miembros de una cadena cinemática. 150
77. Aumento del número de miembros de una cadena cinemática. 153

CAPÍTULO IX

Análisis de los capsulismos de manubrio

§ 78. Encadenamiento de los mecanismos de manubrios con órganos de presion. . . 154
79. Capsulismos de manubrio derivados del manubrio de impulsion rotativa. . . . 155
80. Capsulismos de manubrio derivados del manubrio de impulso rotativo isóceles. . 159
81. Capsulismos de manubrio derivados de la corredera oscilante. 159
82. Capsulismos de manubrio derivados de la corredera rotatoria. 162
83. Capsulismo de manubrio derivado del manubrio de impulsion oscilante. 165
84. Capsulismo de manubrio derivado del manubrio de corredera en cruz rotatoria. 165
85. Capsulismos de manubrio derivados de la corredera en cruz rotatoria. 166
86. Capsulismos de manubrio derivados del manubrio rotatorio de impulso curvilíneo. 167
87. Capsulismo de manubrio derivados del manubrio doble rotativo. 168
88. Capsulismos derivados de los mecanismos de manubrio cónicos. 169
89. Capsulismos derivados del manubrio de juntura en cruz rotatoria 169
90. Capsulismos derivados de la juntura en cruz oscilante. 172
91. Capsulismos derivados de la juntura en cruz rotatoria. 172
92. Ojeada sobre los resultados de las precedentes investigaciones. 174

CAPÍTULO X

Análisis de los capsulismos de ruedas

§ 93. Encadenamiento de mecanismos de ruedas dentadas con órganos de presion. . 176
94. Capsulismo de ruedas de Pappenheim. . 177
95. Ventilador de Fabry. 179
96. Ventilador de Roots. 180
97. Contador de agua de Payton. 180
98. Capsulismo de ruedas de Evrard. . . . 181
99. Bomba de Repsold. 181
100. Capsulismo de ruedas de Dart ó de Behrens. 182
101. Capsulismo de ruedas de Eve. 183
102. Capsulismo de Revillion. 184
103. Otros capsulismos simples de ruedas. . . 184
104. Capsulismos de ruedas compuestos. . . 184
105. Ruedas epiciclos en capsulismos de ruedas. 185

CAPÍTULO XI

Análisis de los elementos constructivos de las máquinas

§ 106. Elementos constructivos de las máquinas. 189
107. Tornillos y ensambles de tornillos. . . 190
108. Cuñas, clavijas, clavetes y ensambles de clavetes. 192
109. Empalmes ó pasadores y remaches. Junturas forzadas. 192
110. Gorrones, ejes, árboles. 193
111. Acoplamientos. 193
112. Soportes, asientos de soportes, armaduras. 194
113. Cuerdas, correas y cadenas. 195
114. Ruedas de friccion, trasmisiones por correas y cables ó cuerdas. 196
115. Ruedas dentadas, ruedas de cadenas. . 196
116. Volantes. 196
117. Palancas, manubrios, bielas. 196
118. Traviesas en cruz, guias y deslizaderas. . 197
119. Ruedas de escape y dispositivos de paro. 197
120. Movimiento retrógrado en el trinqueteo corriente. 199
121. Trinqueteos. 199
122. Frenos. 202
123. Trabamientos y destrabamientos. . . . 202
124. Resúmen de los métodos para el disparo y el paro. 203

125. Tubos, cilindros de vapor y de bombas, émbolos y stuffing-box.. 204
126. Obturadores. 204
127. De los resortes considerados como elementos de máquinas. 206
128. Conclusiones del análisis anterior. . . 207

CAPÍTULO XII

Análisis de las máquinas completas

§ 129. Exposicion de las ideas dominantes. . . 210
130. La herramienta ó el útil.. 212
131. Significacion cinemática del útil. . . . 214
132. El receptor. 216
133. Interpretacion cinemática de la máquina completa. 218
134. Máquinas motrices y máquinas de trabajo. 220
135. Subdivisiones principales de las máquinas completas. Análisis descriptivo. . 223
136. Ejemplos de análisis descriptivo de máquinas completas. 226
137. Importancia de las máquinas bajo el punto de vista social. 230

CAPÍTULO XIII

Síntesis cinemática

§ 138. Objeto de la síntesis cinemática. . . 239
139. Síntesis cinemática directa. 240
140. Síntesis cinemática indirecta. 240
141. Diagrama de los procedimientos sintéticos.. 241
142. Síntesis de los acoplos inferiores de elementos.. 241
143. Acoplos superiores de los elementos más sencillos. 242
144. Síntesis de los acoplos de ruedas dentadas. 243
145. Acoplos de brazos.. 243
146. Recapitulacion de los acoplos de elementos rígidos.. 244
147. Acoplos de elementos que contienen órganos de tension. 244
148. Acoplos de elementos con órganos de presion.. 245
149. Recapitulacion de los acoplos que contienen elementos dúctiles.. 246
150. Modos de investigacion de las cadenas simples.. 247
151. La cadena de tornillo (S'_3).. 247
152. Cadenas de cilindros.. 248
153. Cadenas de prismas. 250
154. Cadena de tornillos cruzada y oblícua. . 250
155. Sustitucion de acoplos superiores á los acoplos de rotoides. 251
156. Cadenas simples de ruedas.. 252
157. Cadenas de brazos. 253
158. Cadenas de poleas. 254
159. Cadenas con órganos de presion. . . . 254
160. Cadenas compuestas.. 255
161. Ejemplos de cadenas combinadas. . . 256
162. Consideraciones finales.. 258

Aclaraciones. 261

TRATADO GENERAL

DE MECÁNICA

(CONSTRUCTOR)

TRATADO GENERAL

DE

MECÁNICA

PARA USO DE INGENIEROS, CONSTRUCTORES, MAQUINISTAS, ARQUITECTOS, &, &

COMPRENDE LAS OBRAS

CINEMÁTICA Y CONSTRUCTOR

DE

V. F. REULEAUX

CATEDRÁTICO DE LA ESCUELA POLITÉCNICA Y DIRECTOR DE LA ACADEMIA INDUSTRIAL DE BERLIN, COMISIONADO IMPERIAL EN LAS EXPOSICIONES INTERNACIONALES DE SYDNEY, MELBURNA, FILADELFIA &, &

TRADUCCION DE LAS ÚLTIMAS EDICIONES ALEMANAS

AUMENTADA CON LA

MECÁNICA PRÁCTICA Y APLICADA

MÁS MODERNA Y UNIVERSALMENTE ADOPTADA EN LAS NACIONES INDUSTRIALES

PUBLICADA BAJO LA DIRECCION DE

D. FRANCISCO NACENTE Y SOLER

AUTOR DE VARIAS OBRAS CIENTÍFICAS, EX-PRESIDENTE DEL «CENTRO INDUSTRIAL DE CATALUÑA,» PRESIDENTE HONORARIO DEL «FOMENTO INDUSTRIAL» DE BARCELONA

ILUSTRADA CON UNAS **7.000** Á **8.000** FIGURAS DE MAQUINARIA COMPRENDIDAS EN MÁS DE **800 LÁMINAS** GRABADAS PRIMOROSAMENTE EN LA PIEDRA É IMPRESAS CON SUMO ESMERO

TOMO PRIMERO

BARCELONA

F. NACENTE, EDITOR

PASEO DE GRACIA, 149

Esta obra es propiedad del Editor, quien se reserva todos los derechos de propiedad literaria y artística de la misma, y perseguirá al amparo de las leyes á todo aquel que la reimprima ó que reproduzca sus láminas fraudulentamente.

Imprenta y Litografía de F. Nacente.—Paseo de Gracia, 149.

EL CONSTRUCTOR

PRIMERA PARTE

RESISTENCIA DE MATERIALES

§ 1

Observaciones preliminares.

La Ciencia que se designa con el nombre de *Resistencia de Materiales* tiene por objeto el estudio de las resistencias que oponen los cuerpos sólidos á las fuerzas esteriores que actuan sobre ellos. A continuacion reunimos los términos más usuales de esta ciencia, esplicando el significado que les damos en el curso de esta obra.

La *Presion por unidad de superficie* es el cociente obtenido al dividir la presion total ejercida sobre una superficie por el número de unidades contenidas en esta superficie.

La *Tension por unidad de superficie* es así mismo la tension de las fibras moleculares reducida á la unidad de superficie.

El *Coeficiente ó Módulo de carga* es la tension que corresponde al límite de elasticidad. Segun la naturaleza de los esfuerzos ejercidos, pueden ser los coeficientes de carga por estension ó por compresion

El *Coefieiente ó Módulo de Rotura* es la tension capaz de producir la rotura de una fibra molecular.

El *Coeficiente ó Módulo de Elasticidad*, que constituye la medida de la *elasticidad de la materia*, es la tension bajo la cual un cuerpo prismático, sometido á un esfuerzo dirigido en el sentido de su longitud, se alargaria ó acortaria una cantidad igual á su longitud primitiva, suponiendo que semejante deformacion fuese posible.

El *Límite teórico de carga* es la fuerza que en un cuerpo sometido á un esfuerzo cualquiera (estension, presion, torsion, flexion, etc.), produce en la fibra más espuesta, una tension equivalente al módulo de carga; en otros términos, es la carga bajo la cual un cuerpo trabaja en su límite de elasticidad.

El *Límite práctico de carga* es el que corresponde al caso en que la tension anterior no tiene más que un cierto valor, considerado como admisible é inferior al límite de elasticidad.

El *Coeficiente de seguridad para la carga* es la relacion entre el límite teórico de carga y la carga real, ó lo que viene á ser igual, entre el módulo de carga y la tension mayor que se desarrolla.

La *Carga de Rotura* es la fuerza capaz de producir en la fibra que más trabaja, una tension igual al módulo de rotura; esta fuerza es, en definitiva, la que se necesita desarrollar para romper un cuerpo dado por traccion, incision, torsion, etc.

El *Coeficiente de seguridad contra la rotura* es la relacion entre la carga de rotura y la carga real.

En la construccion de Máquinas puede admitirse como regla general, que para una pieza sometida á esfuerzos estáticos, basta determinar la carga de modo que llegue á doblar el coeficiente de seguridad que corresponde á la materia empleada y cuyo valor se hallará más adelante. De todos modos, se puede en ciertos casos apartarse en más ó en ménos, de la observacion de esta regla y acercarse tanto más al coeficiente de seguridad cuanta mayor sea la exactitud con que se han calculado las fuerzas estáticas que actuan. En la práctica nunca debe permitirse que una pieza de máquina soporte una carga superior al límite teórico. No obstante, para ciertos materiales, como el hierro forjado especialmente, parece que no hay inconveniente en someterlos á cargas de prueba temporales mayores que su límite de elasticidad, sin que se acerquen mucho á la carga de rotura (V. § 2).

La determinacion de la carga de rotura y por consiguiente el uso del módulo de rotura, solo ofrecen interés, en general, en el caso en que se propone precisamente como objeto la rotura de un cuerpo (por choque, por instrumento cortante, etc.). En los cálculos relativos á las construcciones permanentes, lo que sobre todo importa conocer son los módulos de carga.

§ 2

Coeficientes de resistencia.

Los coeficientes reunidos en el cuadro siguiente son los promedios de numerosos esperimentos, practicados por varios observadores con materiales de muy diversas procedencias. Para la madera, los valores medios relativos á la encina, haya, pino y fresno, se diferencian muy poco unos de otros y se hallan espresados en la tabla por una sola cifra.

Los materiales cuyos módulos de carga y de rotura son muy diferentes, gozan en alto grado de la propiedad que se designa con el nombre de *tenacidad*. Numerosos esperimentos practicados con el hierro demuestran que una carga que no sea muy superior al límite de elasticidad y que produzca en realidad, una deformacion permanente, no modifica el coeficiente de elasticidad, sino que aumenta el módulo de carga, Así, por ejemplo, una varilla de hiero, despues de haber sido prolongada por una carga de 20^k por milímetro cuadrado, acusa, cuando se somete de nuevo á la misma carga, un módulo de carga de estension de 20^k, en lugar de 15 (esta propiedad se utiliza al estirar los alambres). La tenacidad es una propiedad preciosísima para los materiales de construccion: se puede medir, al ménos aproximadamente, por los cocientes $K : T$ y $K_1 : T_1$. La varilla de hierro anterior, como acabamos de ver, pierde inmediatamente parte de su tenacidad, si despues de haber sido alargada, se somete á una compresion superior al límite de elasticidad de compresion.

Cuando se calienta la varilla y enseguida se lamina, su módulo de carga recobra su valor primitivo.

TABLA DE LOS COEFICIENTES DE RESISTENCIA

MATERIAS.	COEFICIENTE DE ELASTICIDAD. E	COEFICIENTES DE CARGA por estension T	COEFICIENTES DE CARGA por compresion T_1	COEFICIENTES DE ROTURA por estension K	COEFICIENTES DE ROTURA por compresion K_1
Hierro forjado.	20000	15	15	40	22
Alambre de hierro.	20000	30	—	70	—
Palastro.	17000	—	—	32	—
Fundicion.	10000	7'5	15	11	63
Acero de resortes, templado. . .	20000	50 á 70	—	80	—
Acero fundido, no templado. . .	20000	25	—	80	—
Acero fundido, martillado. . . .	30000	65 á 150	—	100	—
Cobre roseta, batido.	11000	2'5	—	30	70
Alambre de cobre..	13000	12	—	40	—
Laton..	6500	4'8	—	12	110
Alambre de laton.	10000	13	—	50	—
Metal de campanas, bronce. . .	3200	9	—	13	—
Bronce fosforado.	—	1 á 5	—	36	—
Plomo.	500	1	—	1'3	5
Madera.	1100	2	1'8	9	5
Cuerda de cáñamo, nueva. . . .	250 (?)	5 (?)	—	12	—
Cuerda de cáñamo, vieja. . . .	50 (?)	1 (?)	—	5	—
Correa de cuero, ordinaria. . . .	15 á 20	1'6	—	2'9	—
Granito.	—	—	—	—	8
Caliza.	—	—	—	—	5
Cuarzo.	—	—	—	—	12
Asperon..	—	—	—	—	7
Ladrillos..	—	—	—	—	0'6
Mamposteria de piedra dura. . .	—	—	—	—	5
Mamposteria de asperon. . . .	—	—	—	—	1'5
Mamposteria de ladrillos. . . .	—	—	—	—	0'4

En los cálculos hechos con los valores dados por este cuadro, las medidas deben espresarse en milímetros y las fuerzas en kilógramos.

§ 3

Resistencia á la traccion y á la compresion.

Una varilla trabaja por estension, cuando la fuerza P que obra sobre ella, tiende á alargarla en el sentido de su longitud. Si, por el contrario, la fuerza tiende á acortarla, la varilla trabaja por compresion, escepto en el caso de que la longitud de esta varilla sea muy considerable con respecto á su seccion. (V. § 16.)

Si designamos por:

q la superficie de la seccion de la varilla considerada,

S la tension determinada en esta varilla por la fuerza P, tendremos, despreciando su peso, la relacion:

$$P = S\,q \qquad (1)$$

EJEMPLO. *Los pares de un cuchillo, en una techumbre, ejercen en su base un esfuerzo de* 10.000^k, *esfuerzo que se ha de neutralizar por un vástago horizontal redondo que forme tirante. Si se fija como tension admisible* $S = 5^k$, *deberemos poner para hallar el diámetro del tirante* d : $Sq = 5\frac{\pi}{4}$. $d^2 = 10.000$, *de donde* $d = 50{,}42$, *ó sea* 50^{mm}.

Las deformaciones principales que se producen en un cuerpo que trabaja por estension ó por compresion, consisten en alargarlo ó acortarlo. Un cuerpo prismático, sometido á un esfuerzo de traccion P, se alarga en virtud de este esfuerzo, y la cantidad λ, en que varia la longitud primitiva l del vastago, está dada por la ecuacion:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{S}{E} \qquad (2)$$

esta fórmula es aplicable siempre que S sea inferior al módulo de carga por estension T. Es igualmente apli-

cable á la compresion. En este caso, el límite para el cual la fórmula deja de ser aplicable, nos lo da el módulo de carga por compresion T_1.

EJEMPLO. *El vástago calculado anteriormente tenia antes de su colocacion una longitud de* 35^m; *una vez cargado, se alargará una cierta cantidad:* $\lambda = \frac{35000.5}{20000} = \frac{35}{4}$, *ó sea* 9^{mm}.

La fórmula (2) que es puramente esperimental, es la base fundamental de la resistencia de materiales.

Como en los esfuerzos de estension y de compresion, todos los elementos de una seccion trabajan igualmente, aun cuando se pase del límite de elasticidad, la fórmula (1) puede todavia en rigor, ser aplicable á este último caso y dar, por consiguiente, la fuerza necesaria para romper ó aplastar un cuerpo. Basta introducir en ella el módulo de rotura correspondiente.

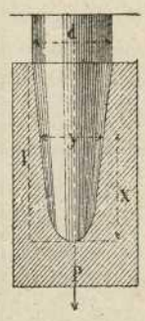
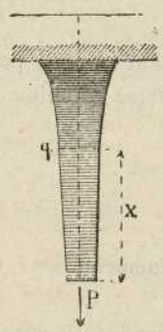
EJEMPLO. *Para romper el vástago ya calculado más arriba, es preciso ejercer un esfuerzo de traccion* $P = K.q$ *ó segun la tabla del párrafo* 2, $P = 40.50^2\frac{\pi}{4} = 78540^k$.—*Para aplastar una pequeña longitud de este vástago se necesitaria una fuerza* $P_1 = K_1 q = 22.50^2\frac{\pi}{4} = 43197^k$.

§ 4

Sólidos de igual resistencia á la estension y á la compresion.

Se obtienen formas de sólidos de igual resistencia eligiendo secciones sucesivas tales que, en todas ellas, el máximum de tension S conserve el mismo valor, lo cual permite un uso relativamente muy ventajoso de la materia. Raras veces se construyen estas formas con una exactitud rigurosa; habitualmente nos contentamos con una aproximacion; en gran número de casos son simples tipos de arquitectura destinados á dar á ciertas partes de una construccion la apariencia de piezas de igual resistencia, sin que esta propiedad exista realmente. De todos modos las formas exactas de igual resistencia tienen un interés real para el constructor. Una vez bien familiarizado con ellas y convencido de que no es indispensable conservar rigurosamente las curvas indicadas por la teoria, dibuja sin trabajo los perfiles convenientes para las partes cargadas de un edificio, haciendo intervenir el sentimiento artístico para corregir el tipo, con frecuencia poco agradable á la vista, que da el cálculo matemático.

Las formas que se acaban de indicar se refieren á las piezas que trabajan por traccion ó compresion. Como ejemplos de su utilidad técnica, citaremos los husillos de madera, los pernos, columnas, etc. Las condiciones especiales para las columnas las encontramos otra vez en las chimeneas de mamposteria cuyo fuste ó caña está lijeramente inclinado, los pilares de los puentes y viaductos, etc.

FORMA.	ECUACION.	OBSERVACIONES.
	$\frac{y}{d} = \sqrt{\frac{x}{l}}$ $d = \sqrt{\frac{4}{\pi}\frac{P}{S}}$	Carga P uniformemente repartida en toda la longitud de la pieza. Las secciones de ésta son circulares. Perfil parabólico. — Forma aproximada: tronco de cono terminado por una porcion de esfera cuyo diámetro es $\frac{d}{2}$.
	$\frac{y}{d} = \frac{x}{l}$ $d = \sqrt{\frac{4}{\pi}\frac{P}{S}}$	Carga P repartida de modo que decrezca uniformemente á partir de arriba. Seccion circular. Forma del cuerpo: cono recto.
	$q = \frac{P}{S}e^{\frac{p}{S}x}$ $e = 2'718\ldots.$ Base de los logaritmos naturales. $log.\ q = log.\ \frac{P}{S} + 0'434\ \frac{p}{S}x.$	Aparte de P la pieza tiene que soportar su propio peso que se supone igual á p por unidad de volúmen. Las secciones van creciendo hácia la seccion de encaje, siguiendo la misma ley que las abcisas de una curva logarítmica.

§ 5

Resistencia trasversal de resbalamiento ó cizalle.

Un cuerpo está sometido, en una de sus secciones, á un esfuerzo trasversal de *resbalamiento* ó *cizalle*, cuando la fuerza esterior P obra en el plano de esta seccion.

Si q es la superficie de esta secion y S la tension desarrollada, tendremos, para la carga, como en el caso de una compresion ó alargamiento:

$$P = Sq \qquad (3)$$

Se llega al límite de elasticidad, cuando S es igual á los $^4/_5$ del menor de los dos módulos de carga por estension y por compresion; así, para el hierro forjado, en que $T = T_1 = 15$, el límite se verifica cuando $S = 12$; en la fundicion, en que $T < T_1$ é igual á 7'5 corresponde á $S = 6$. La mayor tension no se produce realmente aquí en el plano de la seccion, sino que forma una inclinacion de 45° con este plano y tiene por valor los $^3/_4$ de S.

En el caso de un esfuerzo de resbalamiento la desviacion relativa que esperimentan dos secciones infinitamente próximas, es sumamente pequeña, mientras permanece bajo el límite de elasticidad, pero se hace sensible, cuando un gran número de secciones consecutivas esperimentan este efecto de resbalamiento, en el caso, por ejemplo, de una varilla que trabaja por torsion.

Si admitimos que la ecuacion (3) sea aplicable al caso en que se alcanza el esfuerzo capaz de producir la separacion, como por ejemplo, cuando el cuerpo es burilado, cizallado ó agujereado, esta ecuacion permitirá calcular la tension correspondiente á la rotura por cizalle. Esta tension difiere un poco del coeficiente de rotura por estension K, lo que se esplica por el hecho de que, en el cizalle, K y K_1 obran simultáneamente. Para el cálculo de las máquinas que trabajan en estas condiciones, basta tomar 1'1 K como valor del coeficiente de rotura.

§ 6

Resistencia á la flexion.

Líneas elásticas.

Una pieza trabaja por *flexion* cuando está sometida á fuerzas esteriores dirigidas perpendicularmente á su eje. Mientras no se pase del límite de elasticidad, se produce en cada seccion normal de la varilla, un equilibrio entre el momento de las fuerzas esteriores y el de las fuerzas moleculares desarrolladas en la seccion, tomándose estos momentos con relacion al *eje neutro* de la seccion. Este eje pasa por el centro de gravedad de la seccion y es perpendicular al plano de flexion; divide á la seccion en dos partes: en una de ellas todas las fibras, paralelas al eje de la varilla, están sometidas á un esfuerzo de traccion cuya intensidad es proporcional á la distancia de la fibra al eje neutro; en la otra, al contrario, las fibras trabajan por compresion, y la intensidad del esfuerzo es proporcional á su distancia al eje neutro. De aquí se deduce que las fibras situadas por ambas partes á la misma distancia del eje neutro, sufren deformaciones iguales, pero en sentido contrario. Como se vé, la resistencia á la flexion se compone de dos resistencias combinadas, una á la traccion y otra á la compresion, hallándose ambas complicadas por la rotacion alrededor de un eje.

Si llamamos:

M el momento estático de la resultante de las fuerzas que tienden á doblar la pieza en una seccion, tomándose este momento con relacion al eje neutro de esta seccion;

I el momento de inercia de la seccion con relacion á su eje neutro;

a la distancia de la fibra más apartada del eje neutro, ya esté en el lado que trabaja por compresion ó en el otro;

S el esfuerzo molecular desarrollado en esta fibra;

Tenemos:

$$M = S\frac{I}{a} \qquad (4)$$

El producto $S\frac{I}{a}$ es el momento estático de todas las tensiones moleculares con relacion al eje neutro y se llama *momento de tension* de la seccion considerada, ó tambien *momento de carga* de esta seccion para la tension S. Si la varilla doblada es prismática y designamos por P la resultante de las fuerzas que determinan la flexion, por x su brazo de palanca para cualquier seccion, la espresion $M = Px$ puede tener valores diferentes para las diversas secciones. Aquella en que Px adquiere el mayor valor, se llama *seccion peligrosa* y la fuerza P que determina en esta seccion, la tension positiva ó negativa S, está espresada por

$$P = \frac{SI}{x_m a} \qquad (5)$$

x_m representa el valor especial de x que hace que Px sea máximum.

Cuando la línea que une los centros de gravedad de las diferentes secciones está situada en el mismo plano que la resultante de las fuerzas esteriores, solo esperimenta dicha línea, por efecto de la flexion, un alargamiento nulo ó al ménos despreciable; queda simplemente encorvada y el rádio de curvatura correspondiente ρ está dado por la fórmula

$$\rho = \frac{EI}{M} \qquad (6)$$

La curva correspondiente se llama línea elástica, y su ecuacion entra en la espresion general

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \qquad (7)$$

En el cuadro siguiente se han reunido, para una varilla prismática sometida á una fuerza de flexion, que

obre en diferentes condiciones, los valores siguientes:

El momento M de la fuerza para el punto x,

La carga de flexion P, calculada por la fórmula (5),

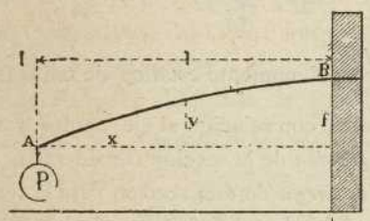
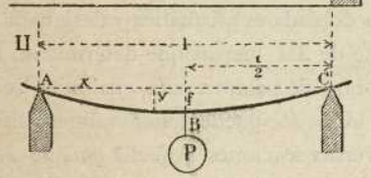
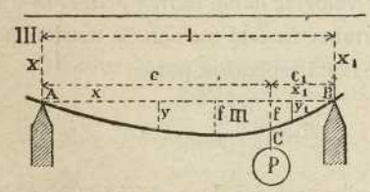
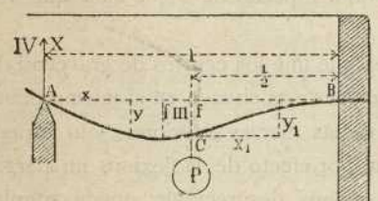
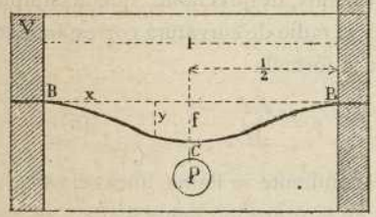
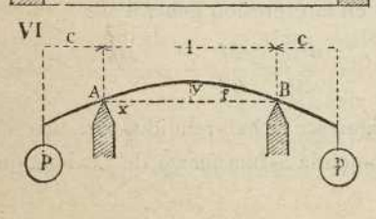
Las coordinadas x é y de la línea elástica,

El valor f de la abcisa y en el punto de aplicacion de la fuerza, en los ejemplos I á VI,

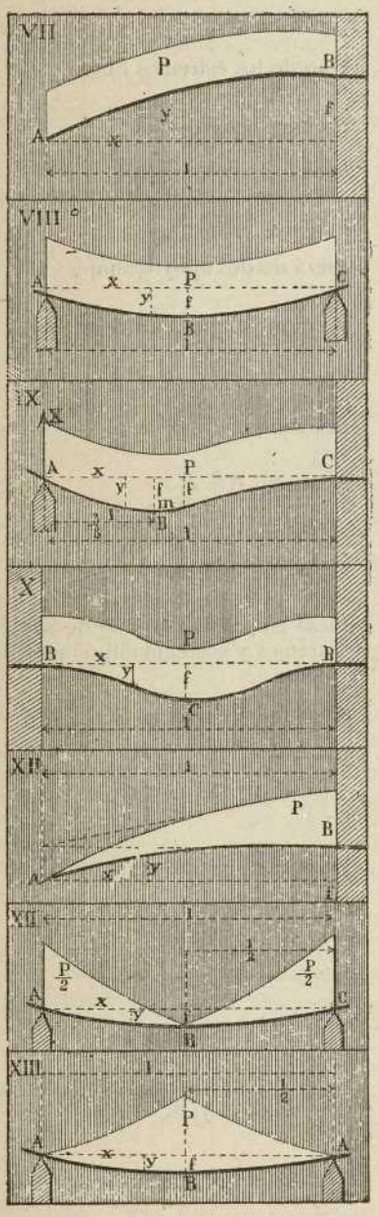
Y la flecha máxima f, en los ejemplos VII á XIII.

En todos los casos examinados, se ha despreciado el peso propio de la pieza, lo que, en muchas aplicaciones, sobre todo en la construccion de máquinas, es perfectamente admisible (no sucede lo mismo en los puentes y otras grandes construcciones). Los ejemplos VII á X indican, por lo demás, el modo de proceder teniendo en cuenta este peso.—Los números XI y XII demuestran que una reparticion desigual de la carga sobre una viga, puede aumentar notablemente en ciertas condiciones el límite de carga; en estos dos casos es una vez y media la de los números VII y VIII. A la vez el reparto de carga admitido en XI y XII da flechas menores que VII y VIII. Estas consideraciones son muy importantes en ciertos casos, como cuando se trata de erigir grandes cobertizos.—El modo de reparticion del número XIII es desventajoso bajo el punto de vista del límite de carga, que se halla reducido á los $^3/_4$ del del número VIII; además, la flecha es mayor.

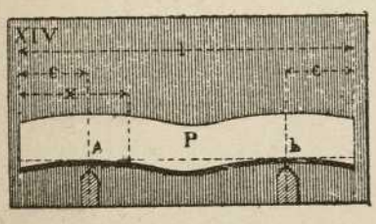
Conviene observar que la flecha f crece como los cubos de las longitudes y que, segun esté sostenida la pieza, esta flecha varia entre límites muy estensos.

MODO DE APLICACION DE LA CARGA.	MOMENTO FLEXOR M.	CARGA P.
	$M = Px$	$P = \frac{SI}{la}$
	$M = \frac{Px}{2}$	$P = 4\frac{SI}{al}$
	Para AC: $M = \frac{Pc_1x}{l}$ Para BC: $M = \frac{Pcx_1}{l}$	$P = \frac{l}{cc_1}\frac{SI}{a}$
	Para AC: $M = \frac{5}{16}Px$ Para BC: $M = Pl\left(\frac{5}{32} - \frac{11}{16}\frac{x_1}{l}\right)$	$P = \frac{16}{3}\frac{SI}{la}$
	$M = \frac{Pl}{2}\left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\right)$	$P = 8\frac{SI}{la}$
	Para AB: $M = Pc$	$P = \frac{SI}{ca}$

ECUACION DE LA LÍNEA ELÁSTICA.	FLECHA f.	OBSERVACIONES.
$y=\frac{P}{EI}\frac{l^3}{2}\left[\frac{x}{l}-\frac{1}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$	$f=\frac{P}{EI}\frac{l^3}{3}$	Uno de los estremos libre. Seccion peligrosa en B.
$y=\frac{P}{EI}\frac{l^3}{16}\left[\frac{x}{l}-\frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$	$f=\frac{P}{EI}\frac{l^3}{48}$	Pieza de dos apoyos simples. Seccion peligrosa en el medio.
$y=\frac{P}{EI}\frac{c^2c_1^2}{6l}\left[2\frac{x}{c}+\frac{x}{c_1}-\frac{x^3}{c^2c_1}\right]$ $v_1=\frac{P}{EI}\frac{c_1^2c^2}{6l}\left[2\frac{x_1}{c_1}+\frac{x_1}{c}-\frac{x^3}{c_1^2c}\right]$	$f=\frac{P}{EI}\frac{l^3}{3}\frac{c^2}{l^2}\frac{c_1^2}{l^2}$ máximum de f para $x=c\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{c_1}{c}}$	Seccion peligrosa en C. Reaccion $X=P\frac{c_1}{l}$ » $X_1=P\frac{c}{l}$
$y=\frac{P}{EI}\frac{l^3}{32}\left[\frac{x}{l}-\frac{5}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$ $y_1=\frac{P}{EI}\frac{l^3}{32}\left[\frac{1}{4}\frac{x_1}{l}+\frac{5}{2}\frac{x_1^2}{l^2}-\frac{11}{3}\frac{x_1^3}{l^3}\right]$	$f=\frac{P}{EI}\frac{7l^3}{768}$ $f_{max}=\sqrt{\frac{1}{5}}\frac{Pl^3}{48\,EI}$ para $x=l\sqrt{\frac{1}{5}}$	Pieza empotrada en uno de sus estremos y sostenida libremente en el otro. Seccion peligrosa en B. Reaccion $X=^5/_{16}\,P$.
$y=\frac{P}{EI}\frac{l^3}{16}\left[\frac{x^2}{l^2}-\frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$	$f=\frac{P}{EI}\frac{l^3}{192}$	Pieza doblemente empotrada. Seccciones peligrosas en B y C.
$y=f-\rho+\sqrt{\rho^2-x^2+l\left(x-\frac{l}{4}\right)}$ ó $\rho=\frac{EI}{Pc}$	$f=\frac{P}{EI}\frac{l^3}{8}\frac{c}{l}$	Seccion peligrosa en cualquier punto entre A y B.

MODO DE APLICACION DE LA CARGA.	MOMENTO FLEXOR M.	CARGA P.
		
VII	$M=\frac{Px}{2}\frac{x}{l}$	$P=2\frac{SI}{la}$
VIII	$M=\frac{Px}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right)$	$P=8\frac{SI}{la}$
IX	$M=\frac{Px}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{x}{l}\right)$	$P=8\frac{SI}{la}$
X	$M=\frac{Pl}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{x}{l}+\frac{x^2}{l^2}\right)$	$P=12\frac{SI}{la}$
XI	$M=\frac{Px}{3}\frac{x^2}{l^2}$	$P=3\frac{SI}{la}$
XII	$M=Px\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{l}+\frac{2}{3}\frac{x^2}{l^2}\right)$	$P=12\frac{SI}{la}$
XIII	$M=Px\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\frac{x^2}{l^2}\right)$	$P=6\frac{SI}{la}$

ECUACION DE LA LÍNEA ELÁSTICA.	FLECHA f.	OBSERVACIONES.
$y = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{6}\left[\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{8}$	Uno de los estremos libre. Seccion peligrosa en B.
$y = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{24}\left[\frac{l}{x} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P}{EI}\frac{5l^3}{384}$	Pieza de dos apoyos simples. Seccion peligrosa en el medio.
$y = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{48}\left[\frac{x}{l} - 3\frac{x^3}{l^3} + 2\frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{192}$	Seccion peligrosa en C. Flecha máxima. para $x = \frac{l}{16}(1 + \sqrt{33})$ Reaccion $X = {}^3/_8\ P$. Punto de inflexion en $x = {}^3/_4\ l$.
$y = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{24}\left[\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{384}$	Seccion peligrosa en B. Punto de inflexion para $x = \frac{l}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$
$y = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{12}\left[\frac{x}{l} - \frac{1}{5}\frac{x^5}{l^5}\right]$	$f = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{15}$	Uno de los estremos libre. Seccion peligrosa en B.
$y = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{12}\left[\frac{3}{8}\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right]$	$f = \frac{P}{EI}\frac{3l^3}{320}$	Seccion peligrosa en el medio.
$y = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{12}\left[\frac{5}{8}\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right]$	$f = \frac{P}{EI}\frac{l^3}{60}$	Seccion peligrosa en el medio.



XIV. Dada una varilla que descanse en dos apoyos simétricamente colocados y sometida á una carga P uniformemente repartida, se tiene para el momento flexor:

$$M = \frac{Px}{2}\left(\frac{x}{l} - 1 + \frac{c}{x}\right)$$

El límite de carga de la pieza varía con la posicion de los apoyos y por consiguiente con la relacion de c á l; es máximum cuando

$$c = l\left(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}\right) = 0'207\ l.$$

La carga es entonces aproximadamente:

$$P = 47\,\frac{SI}{al},$$

es decir, casi 6 veces mayor que en el caso N.° VIII. Esta clase de apoyo es, pues, muy favorable. Las secciones peligrosas corresponden á los puntos A, B y C.

§ 7

Tablas de secciones.

El valor del término $\frac{I}{a}$ en la ecuacion (4), depende simplemente de las dimensiones de la seccion de la pieza; y designaremos esta relacion con el nombre de *módulo de seccion*. Los cuadros siguientes contienen, para una série de formas de seccion, los valores:

Del momento de inercia I con relacion al eje neutro, el cual está representado por puntos en el dibujo;

De la desviacion máxima a de las fibras sobre el lado comprimido y el alargado, ó de las desviaciones a' y a'' para cada uno de los lados, cuando a' y a'' son diferentes, es decir, cuando la seccion no es simétrica con relacion á dos ejes;

Del módulo de seccion $Z = \frac{I}{a}$, para el cual existen tambien dos valores, cuando a' y a'' son diferentes;

De la superficie F de la seccion, superficie necesaria para calcular el peso de las piezas.

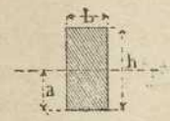
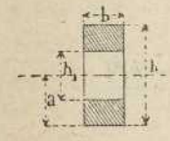
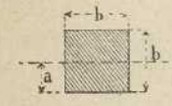
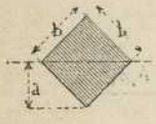
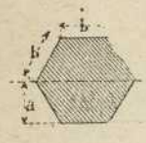
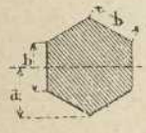
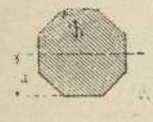
Cuando la columna que da el valor de a lleva la indicacion «determinable por esperimento ó por un trazado,» es que las espresiones analíticas son demasiado complicadas para poderse utilizar en la práctica. En este caso se hace un modelo de carton, de la seccion considerada y se determina el centro de gravedad por esperimento ó por los métodos de la grafostática (véase § 46).

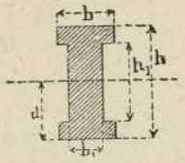
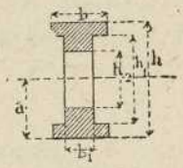
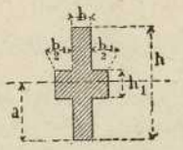
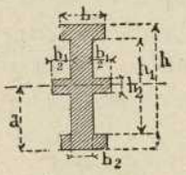
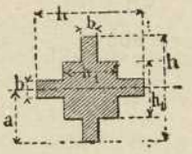
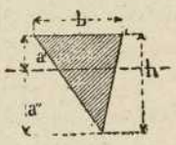
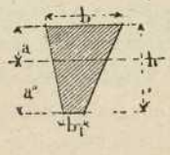
El uso de la tabla de las secciones se comprenderá sin trabajo con el siguiente

EJEMPLO. *Se busca el momento de inercia de una seccion circular de* 104 mm *de diámetro. Segun el N.° XX de la tabla, este momento de inercia tiene por valor* $I = \frac{\pi}{64}\cdot 104^4$, *ó sea* 5.742,500.

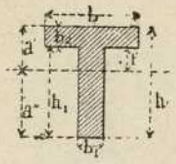
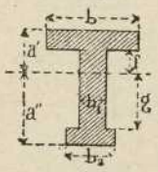
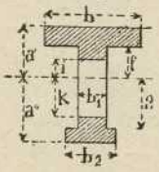
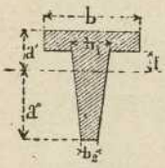
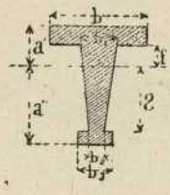
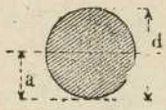
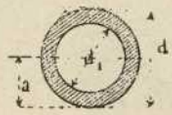
Dividiendo y combinando de una manera conveniente figuras de secciones dadas, se puede llegar á trasformarlas en otras, á las cuales se aplicarán directamente las fórmulas. Así, por medio de la seccion VIII, se hallará la fórmula de un tubo de seccion rectangular; con la seccion XI, la de una pieza en E, y así sucesivamente.—No es por otra parte inútil indicar aquí algunas conclusiones generales que se desprenden de nuestra tabla. Pone desde luego en evidencia la influencia considerable de la altura de las secciones y de las partes de estas secciones situadas á una gran distancia del eje neutro. Esto esplica las ventajas de los *nervios de refuerzo*, tan frecuentemente empleados sobre todo en las piezas de fundicion. En las piezas espuestas á la flexion, estas nervaduras ejercen, en efecto, una accion doble, que se refiere por una parte al exceso de materia que introducen; y por otra, la más importante, que consiste en alejar de la masa principal las capas neutras de las demás partes. Un ejemplo hará resaltar más claramente esta preciosa propiedad.

Supongamos que se dé una seccion de la forma número XV, con las relaciones $b = 8b_1$, $h = 12b_1$, $h_1 = 11b_1$ (pág. 18). Imaginemos ahora dividida esta seccion en dos partes, una vertical, otra horizontal, y supongamos que se considera aisladamente cada una de estas partes. Tendrán entonces por módulos de seccion $\frac{11^3 . b_1^3}{6} = \frac{121}{6} b_1^3$ y $\frac{8b_1^3}{6}$, ó sea en total $21'5b_1^3$. Pero la misma seccion considerada como formando un solo todo (§ 9), tiene por módulo $Z = 34'8b_1^3$; dicho de otro modo, la resistencia se halla en este caso aumentada en una mitad, y la nervadura vertical ha decuplado ó poco ménos la resistencia que hubiera tenido la parte horizontal, considerada aisladamente. Otros tipos de perfiles presentan con frecuencia resultados todavia más ventajosos.

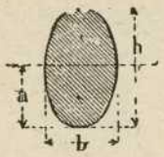
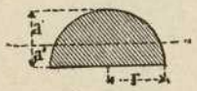
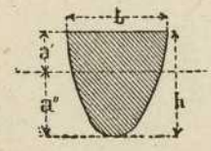
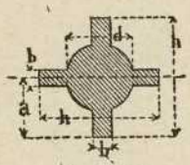
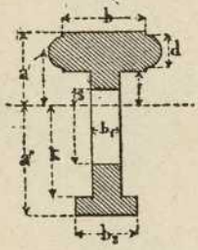
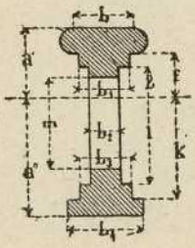
N.º	SECCION.	MOMENTO DE INERCIA I.	DISTANCIA a.	MÓDULO DE SECCION Z.	SUPERFICIE F.
I.		$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^2}{6}$	bh
II.		$\frac{b(h^3 - h_1^3)}{12}$	$\frac{h}{2}$	$\frac{b(h^3 - h_1^3)}{6h}$	$b(h - h_1)$
III		$\frac{b^4}{12}$	$\frac{b}{2}$	$\frac{b^3}{6}$	b^2
IV.		$\frac{b^4}{12}$	$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{12} b^3 = 0{,}118\, b^3$	b^2
V.		$\frac{5\sqrt{3}}{16} b^4 = 0{,}5413\, b^4$	$b\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}866\, b$	$5/8\, b^3$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 = 2{,}598\, b^2$
VI.		$\frac{5\sqrt{3}}{16} b^4$	b	$\frac{5\sqrt{3}}{16} b^3$	$\frac{3\sqrt{3}}{2} b^2$
VII.		$\frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} b^4 = 0{,}638\, b^4$	$0{,}924\, b$	$0{,}677\, b^3$	$2{,}828\, b^2$

N.º	SECCION.	MOMENTO DE INERCIA I.
VIII.		$\frac{bh^3 - (b - b_1)h_1^3}{12}$
IX.		$\frac{b(h^3 - h_1^3) + b_1(h_2^3 - h_3^3)}{12}$
X.		$\frac{bh^3 + b_1h_1^3}{12}$
XI.		$\frac{bh^3 - (b - b_2)h_1^3 + b_1h_2^3}{12}$
XII.		$\frac{bh^3 + (h_1 - b)h_1^3 + (h - h_1)b^3}{12}$
XIII.		$\frac{bh^3}{36}$
XIV.		$\frac{b^2 + 4bb_1 + b_1^2}{36(b + b_1)}h^3$

DISTANCIA a.	MÓDULO DE SECCION Z.	SUPERFICIE F.
$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3-(b-b_1)h_1^3}{6h}$	$bh-(b-b_1)h_1$
$\frac{h}{2}$	$\frac{b(h^3-h_1^3)+b_1(h_1^3-h_2^3)}{6h}$	$b(h-h_1)+b_1(h_1-h_2)$
$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3+b_1h_1^3}{6h}$	$bh+b_1h_1$
$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3-(b-b_2)h_1^3+b_1h_2^3}{6h}$	$bh-(b-b_2)h_1+b_1h_2$
$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^3+(h_1-b)h_1^3+(h-h_1)b^3}{6h}$	$bh+(h_1-b)h_1+(h-h_1)b$
$a'=\frac{h}{3}$ $a''=\frac{2}{3}h$	$Z'=\frac{bh^2}{12}$ $Z''=\frac{bh^2}{18}$	$\frac{bh}{2}$
$a'=\frac{b+2b_1}{b+b_1}\frac{h}{3}$ $a''=\frac{2b+b_1}{b+b_1}\frac{h}{3}$	$Z'=\frac{b^2+4bb_1+b_1^2}{12(b+2b_1)}h^2$ $Z''=\frac{b^2+4bb_1+b_1^2}{12(2b+b_1)}h^2$	$\frac{b+b_1}{2}h$

N.º	SECCION.	MOMENTO DE INERCÍA *I*.
XV.		$\frac{1}{3}\left[b(a'^3-f^3)+b_1(f^3+a''^3)\right]$
XVI.		$\frac{1}{3}\left[b(a'^3-f^3)+b_1(f^3+g^3)+b_2(a''^3-g^3)\right]$
XVII.		$\frac{1}{3}\left[b(a'^3-f^3)+b_1(f^3+g^3-i^3-k^3)+b_2(a''^3-g^3)\right]$
XVIII.		$\frac{1}{3}\left[\frac{b_1-b_2}{4(f+a'')}(a''^4-f^4)+b(a'^3-f^3)+b_2(f^3+a''^3)\right]$
XIX.		$\frac{1}{3}\left[\frac{b_1-b_2}{4(f+g)}(g^4-f^4)+b(a'^3-f^3)+b_2(f^3+g^3)+b_3(a''^3-g^3)\right]$
XX.		$\frac{\pi}{64}d^4=0'0491\,d^4$
XXI.		$\frac{\pi}{64}(d^4-d_1^4)=0'0491(d^4-d_1^4)$

DISTANCIA a.	MÓDULO DE SECCION Z.	SUPERFICIE F.
$a'=\frac{bh_2^2+b_1h_1(h+h_2)}{2[bh-(b-b_1)h_1]}$ $a''=h-a'$	$Z'=\frac{I}{a'}$ $Z''=\frac{I}{a''}$	$b_1h_1+bh_2$
Determinable por esperimento ó gráficamente.	$Z'=\frac{I}{a'}$ $Z''=\frac{I}{a''}$	$b(a-f)+b_1(f+g)+b_2(a''-g)$
Determinable por esperimento ó gráficamente.	$Z'=\frac{I}{a'}$ $Z''=\frac{I}{a''}$	$b(a'-f)+b_1(f+g-i-k)+b_2(a''-g)$
Determinable por esperimento ó gráficamente.	$Z'=\frac{I}{a'}$ $Z''=\frac{I}{a''}$	$b(a'-f)+\frac{b_1+b_2}{2}(f+a'')$
Determinable por esperimento ó gráficamente.	$Z'=\frac{I}{a'}$ $Z''=\frac{I}{a''}$	$b(a'-f)+\frac{b_1+b_2}{2}(f+g)+b_2(a''-g)$
$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{32}d^3$	$\frac{\pi}{4}d^2$
$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{32}\frac{d^4-d_1^4}{d}$	$\frac{\pi}{4}(d^2-d_1^2)$

N.°	SECCION.	MOMENTO DE INERCIA I.
XXII.		$\frac{\pi}{64} bh^3$
XXIII.		$0'110\, r^4$
XXIV.		(Segmento parabólico) $\frac{8}{175} bh^3 = 0'0457\, bh^3$
XXV.		$\frac{1}{12}\left[\frac{3\pi}{16} d^4 + b\,(h^3 - d^3) + b^3\,(h - d)\right]$
XXVI.		$\frac{1}{3}\left[b(a'^3 - f^3) + b_1(f^3 - g^3 + k^3 - l^3) + b_2(a''^3 - k^3)\right] + \frac{\pi}{64}(d^4 + 16 d^3 i^3)$
XXVII.		$\frac{1}{3}\left[b\,(a'^3 - f^3) + b_1\,(f^3 - g^3) + b_2\,(g^3 - i^3 + l^3 - m^3) + b_3\,(k^3 - l^3) + b_4\,(a''^3 - k^3)\right] + \frac{\pi}{64}\left[(a' - f)^4 + 8\,(a' + f)\,(a' - f)^2\right]$

DISTANCIA a.	MÓDULO DE SECCION Z.	SUPERFICIE F.
$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi}{32} bh^2$	$\frac{bh\pi}{4}$
$d' = 0'5755r$ $a'' = 0'4244r$	$Z' = 0'19r^3$ $Z'' = 0'26r^3$	$\frac{r^2\pi}{2}$
$a' = {}^2/_5 h$ $a'' = {}^3/_5 h$	$Z' = \frac{4}{35} bh^2 = 0'114bh^2$ $Z'' = \frac{8}{105} bh^2 = 0'076bh^2$	${}^2/_3 bh$
$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6h}\left(0'589d^3 + b(h^3 - d^3) + b^3(h-d)\right)$	$\frac{\pi}{4}d^2 + 2b(h-d)$
Determinable por esperimento ó gráficamente.	$Z' = \frac{I}{a'}$ $Z'' = \frac{I}{a''}$	$b(a'-f) + b_1(f-g+k-l)$ $+ b_2(a''-k) + \frac{\pi}{4}d^2$
Determinable por esperimento ó gráficamente.	$Z' = \frac{I}{a'}$ $Z'' = \frac{I}{a''}$	$b(a-f) + b_1(f-g)$ $+ b_2(g-i+l-m)$ $+ b_3(k-l) + b_4(a-k)$ $+ \frac{\pi}{4}(a'-f)^2$

§ 8

Valor de la tension.

En una pieza sometida á la flexion, el límite de elasticidad, sea por estension, sea por compresion, se alcanza cuando la tension desarrollada S, se hace igual á T ó á T_1. Importa, pues, no escederse de este límite en ninguno de los dos lados de la seccion. Para las secciones que presentan dos ejes de simetria, esta condicion se cumple tomando para S el menor de los dos valores T ó T_1, dividido por el coeficiente de seguridad; así, para la fundicion, deberemos tomar siempre T, es decir, el coeficiente de carga por estension.

Al contrario, para las secciones en que $a' \gtrless a''$, empezaremos por buscar cuál es el lado de la seccion que trabaja por estension, y cuál el que trabaja por compresion. Llamando

a á la separacion máxima de las fibras en el lado sometido á la estension, a_1 la parte sometida á la compresion,

T y T_1 los coeficientes de carga por estension y compresion,

M el momento flexor,

m el coeficiente de seguridad que, segun los casos, será 2, 3 ó 4,

Tendremos:

para $\frac{a}{a_1} > \frac{T}{T_1}$	$M = \frac{T}{m}\frac{I}{a}$
para $\frac{a}{a_1} < \frac{T}{T_1}$	$M = \frac{T_1}{m}\frac{I}{a_1}$
para $\frac{a}{a_1} = \frac{T}{T_1}$	$M = \frac{T}{m}\frac{I}{a}$ ó $\frac{T_1}{m}\frac{I}{a_1}$

EJEMPLO. *Para la fundicion tenemos* $\frac{T}{T_1} = {}^1/_2$; *por otra parte, en la seccion parabólica del N.º XXIV, la cuerda se halla colocada en el lado sometido á la estension y se tiene:* $a = {}^2/_5\,h$, $a_1 = {}^3/_5\,h$, $\frac{a}{a_1} = {}^2/_3$; de donde $\frac{a}{a_1} > \frac{T}{T_1}$: *por consiguiente, debemos tomar para S el valor* $\frac{T}{m}$ ó $\frac{7{\cdot}5}{m}$, *de donde* $M = \frac{7{\cdot}5}{m}\frac{4}{35}\,bh^2$. *Para el hierro forjado en que* $T = T_1$ *no es necesaria tal investigacion. La fundicion es, por lo demás, casi el único cuerpo para el cual, en el estado actual de nuestros conocimientos, hay que tener en cuenta valores diferentes para los dos módulos de carga.*

§ 9

Secciones de igual resistencia.

En las piezas destinadas á trabajar por flexion, como las vigas, para utilizar lo mejor posible la materia, conviene que se reparta todo lo léjos posible del eje neutro, conservando al mismo tiempo entre las diversas partes de la seccion los enlaces suficientes. Es ventajoso además el elejir formas de secciones tales que, para una carga llevada suficientemente léjos, las partes comprimidas y las alargadas lleguen á trabajar al mismo tiempo en su límite de elasticidad. Para esto debemos tomar:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{T}{T_1} \qquad (7)$$

Las secciones en que se verifica esta relacion se llaman *Secciones de igual resistencia*. Para el hierro forjado las secciones de dos ejes de simetria son las más ventajosas, porque $T = T_1$. Para la fundicion y en la hipótesis en que la fuerza flexora conserva una direccion constante, las secciones más favorables son aquellas en que $a_1 = 2a$, puesto que aquí se verifica: $T_1 = 2T$. Partiendo de esta relacion se han trazado las secciones siguientes, en las cuales b y b_1 pueden tener entre sí una relacion arbitraria (fig. 1, 2, 3. *Constructor.*)

Para estas secciones tenemos, si $b_1 = b$:

$I =$	$278b^4$	$440b^4$	$992b^4$
$Z =$	$34'8b^3$	$55b^3$	$102'4b^3$
$F =$	$19b^2$	$25b^2$	$40'8b^2$
$\varphi =$	1	0'97	1'04

El lado sometido á la estension es el que está más cerca del eje neutro, y el módulo de seccion vale entonces $\frac{I}{a_1}$, de modo que tendremos que tomar para S la relacion $\frac{T_1}{m}$. F designa la superficie de la seccion, φ el empleo proporcional de materia, tomando por unidad el que corresponde á la figura 1.

El valor de φ lo da de una manera general la espresion:

$$\varphi = \frac{\beta_1}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)^{2/3}\left(\frac{S}{S_1}\right)^{2/3} \qquad (8)$$

En esta fórmula las letras que llevan índice se refieren á la seccion que se estudia y las que no lo llevan á la seccion conocida, tomada como unidad de gasto de materia; debemos poner además, $F = \beta b^2$, $Z = \alpha b^3$ y $S = S_1$. S y S_1 solo tienen valores diferentes cuando

la relacion $\frac{a}{a_1}$ no es la misma en las dos secciones. La relacion (8) prueba por otra parte, que las pequeñas variaciones en esta relacion tienen escasa influencia.

Si la fuerza flexora obra alternativamente en direcciones opuestas, las secciones de dos ejes de simetria son, aún para la fundicion, las más ventajosas, y se debe tomar constantemente como valor límite de S el menor de los módulos de carga. Si la direccion de la fuerza cambia de una manera contínua, de tal suerte que el eje neutro gire pasando por el centro de gravedad de la seccion (árboles de trasmision), la seccion anular es la más ventajosa, pero se pueden adoptar tambien las secciones en cruz ó estrelladas, como las de los N.os X, XII y XXV del § 7, en atencion á que durante la rotacion, los elementos de seccion muy alejados del eje se hallan constantemente reducidos al plano de flexion.

EJEMPLO. *Se desea construir un brazo de fundicion, encajado como en el N.º* I, § 6; *para una carga* $P = 2500^k$, *de una longitud* $l = 2^m$. *Elegiremos la seccion indicada en la fig.* 2, *y haremos en la ecuacion* (4) $M = SZ$. *Pero* $M = 2500 \times 2000$, $Z = 55b^3$. *Admitiendo* 2 *por coeficiente de seguridad, tendremos* $S = 0'5.15 = 7'5$. *Introduciendo estos valores en la ecuacion resulta:* $2500 \times 2000 = 7'5.55b^3$, *de donde* $b = 100\sqrt[3]{\frac{5}{55.7'5}}$, *ó sea* $b = 23^{mm}$. *La superficie de la seccion es entonces* $25.23^2 = 13225^{mmc}$. *Las demás dimensiones se determinan por medio de los números proporcionales inscritos en la figura* 2.

§ 10

Sólidos de igual resistencia á la flexion.

Se obtiene un sólido de igual resistencia á la flexion, eligiendo las secciones sucesivas de tal modo que el máximum de tension, tanto en el lado comprimido como el alargado, tenga en todas partes el mismo valor. En virtud de la fórmula (4) la ecuacion que esprese la forma del cuerpo será:

$$\frac{Ma}{I} = \text{Constante.} \qquad (9)$$

Las formas de sólidos de igual resistencia á la flexion y sobre todo las formas aproximadas, hallan en la construcion de máquinas, numerosas aplicaciones. Las consideraciones del § 4 se aplican por otra parte, de una manera completa al caso actual. Reproducimos más abajo una série de estos perfiles.

La flexion que esperimenta un sólido de igual resistencia, bajo la accion de una carga esterior, es necesariamente mayor que para los sólidos prismáticos, con el mismo modo de aplicacion de la fuerza. Así, comparando los valores de las flechas que se hallan inscritas en el cuadro que sigue, se ve que la flecha es, en el N.º I, dos veces, en el N.º V, una vez y media lo que seria en una barra prismática, cargada en las mismas condiciones. En general, cuando el eje de un sólido, antes de la aplicacion de la carga, forma una línea recta, la línea elástica tiene por ecuacion:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_0 a_0}{IE_0 a_x}. \qquad (10)$$

En ésta fórmula

M_0 es el momento de la fuerza flexora para una seccion cualquiera, por ejemplo, en el punto de encaje;

I_0 el momento de inercia de la seccion;

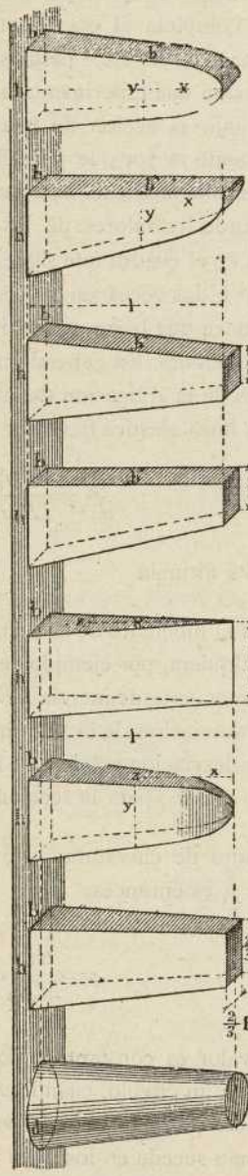
a_0 la desviacion de la fibra más alejada;

a_x la desviacion máxima de fibra (contada en el mismo lado que a_0) para la seccion situada en x.

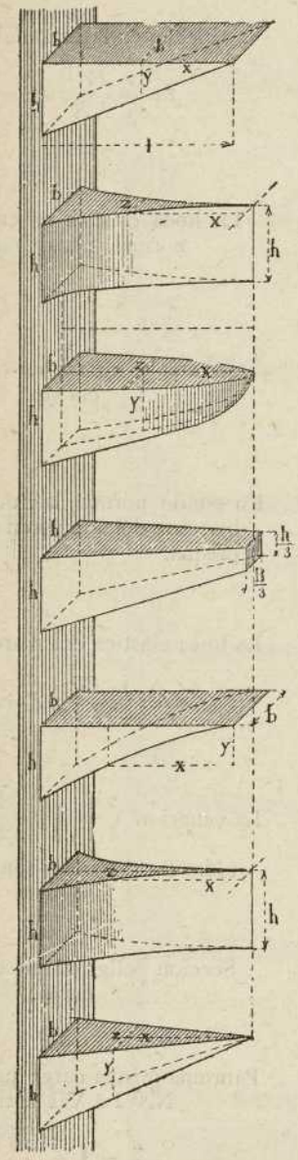
El radio de curvatura ρ de la línea elástica en el punto $x\,y$, es entonces:

$$\rho = \frac{EI_0}{M_0 a_0} a_x. \qquad (11)$$

Este valor es constante, y por consiguiente, la curva representa un círculo, cuando $a_x = a_0$, es decir, cuando la pieza presenta en todos sus puntos la misma altura, como sucede en los tipos V, X y XIV.

N.°	FORMA.	MODO DE APLICACION DE LA FUERZA	ECUACION.
I.		La carga P obra en la estremidad libre, caso N.° I, § 6.	Para la seccion rectangular: $\frac{zy^2}{bh^2} = \frac{x}{l}$, Caso I y II, $z=b$, $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$. Prisma redondeado parabólicamente.
II.			
III.			Aproximacion á la forma I. Prisma truncado.
IV.			Aproximacion á la forma II. Prisma truncado.
V.			$y = h; \frac{z}{b} = \frac{x}{l}$. Prisma recto.
VI.			$\frac{z}{y} = \frac{b}{h}; \frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$. Pirámide de vértice redondeado por una parábola cúbica.
VII.			Aproximacion á la forma VI. Pirámide de vértice truncado.
VIII.			Tronco de cono recto, forma aproximada á la rigurosa dada por la fórmula: $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$.

CARGA.	VOLÚMEN DEL CUERPO.	OBSERVACIONES.
$P=\frac{Sbh^2}{6l}$	$\frac{2}{3}bhl$	Flecha en la estremidad libre: $f=\frac{2}{3}\frac{Pl^3}{I_0E}$; $I_0=\frac{bh^3}{12}$.
$P=\frac{Sbh^2}{6l}$	$\frac{2}{3}bhl$	La línea elástica es en el estado normal, una parábola.
$P=\frac{Sbh^2}{6l}$	$\frac{3}{4}bhl$	Seccion peligrosa en el punto de encajé.
$P=\frac{Sbh^2}{6l}$	$\frac{3}{4}bhl$	En estado normal, la línea elástica es bisectriz del ángulo en el vértice del prisma.
$P=\frac{Sbh^2}{6l}$	$\frac{1}{2}bhl$	La línea elástica es un arco de círculo. $f=\frac{1}{2}\frac{Pl^3}{I_0E}$; $I_0=\frac{bh^3}{12}$.
$P=\frac{Sbh^2}{6l}$	$\frac{3}{5}bhl$	La ecuacion $\frac{y}{h}=\sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ se aplica si todas las secciones son semejantes.
$P=\frac{Sbh^2}{6l}$	$\frac{19}{27}bhl$	Seccion peligrosa en el punto de encaje.
$P=\frac{S\pi}{32}\frac{d^3}{l}$	$\frac{19}{108}\pi ld^2$	Para una misma carga que en los casos N.^{os} I á VII se tiene: $\frac{d}{h}=\sqrt[3]{\frac{16}{3\pi}\frac{b}{h}}$

N.°	FORMA.	MODO DE APLICACION DE LA FUERZA	ECUACION.
IX.		Carga P uniformemente repartida, Caso VII, § 6.	Para las secciones rectangulares, de una manera general; $\frac{zy^2}{bh^2}=\frac{x^2}{l^2}$; $z=b$; $\frac{y}{h}=\frac{x}{l}$. Cuña.
X.			$y=h$; $\frac{x}{l}=\sqrt[3]{\frac{z}{b}}$. Cuña de arista formada por dos parábolas.
XI.			$\frac{z}{y}=\frac{b}{h}$; $\frac{y}{h}=\sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}$ Pirámide redondeada por pirámides semi-cúbicas.
XII.			Aproximacion á la forma XI. Tronco de pirámide.
XIII.		Carga P uniformemente decreciente. Caso XI, § 6.	Para las secciones rectangulares, de una manera general; $\frac{zy^2}{bh^2}=\frac{x^3}{l^3}$; $z=b$; $\frac{x}{l}=\sqrt[3]{\frac{y^2}{h^2}}$. Cuña de arista segun una parábola semi-cúbica.
XIV.			$y=h$; $\frac{x}{l}=\sqrt[3]{\frac{z}{b}}$. Cuña de arista formada por parábolas cúbicas.
XV.			$\frac{z}{y}=\frac{b}{h}$; $\frac{y}{h}=\frac{x}{l}$ Pirámide.

CARGA.	VOLÚMEN DEL CUERPO.	OBSERVACIONES.
$P=\frac{Sbh^2}{3l}$	$\frac{1}{2}bhl$	Tipo admisible quitando la arista.
$P=\frac{Sbh^2}{3l}$	$\frac{1}{3}bhl$	La línea elástica es un arco de círculo. $f=\frac{1}{4}\frac{Pl^3}{I_0E}$; $I_0=\frac{bh^3}{12}$.
$P=\frac{Sbh^2}{3l}$	$\frac{3}{7}bhl$	Tipos ventajosos para repisas de piedra.
$P=\frac{Sbh^2}{3l}$	$\frac{13}{27}bhl$	Seccion peligrosa en el punto de encaje.
$P=\frac{Sbh^2}{2l}$	$\frac{2}{5}bhl$	Tipo arquitectónico satisfactorio.
$P=\frac{Sbh^2}{2l}$	$\frac{1}{4}bhl$	La línea elástica es un arco de círculo. $f=\frac{1}{6}\frac{Pl^3}{I_0E}$; $I_0=\frac{bh^3}{12}$.
$P=\frac{Sbh^2}{2l}$	$\frac{1}{3}bhl$	Forma sumamente sencilla.

Los tipos que acabamos de reproducir son los más sencillos que se pueden presentar; seria fácil aumentar su número indefinidamente, dándose, por ejemplo, una ley de variacion más compleja de las dimensiones en altura ó anchura. Así en el tipo N.° 1 suponiendo que la base sea parabólica, es decir que $\frac{z}{b} = \sqrt{\frac{x}{l}}$, se tiene $\frac{y}{h} = \sqrt[4]{\frac{x}{l}}$, (parábola bicuadrada), etc. Hallaremos ejemplos de fórmulas correspondientes á secciones más complejas en el estudio de los árboles. (Cap. VII). Los resortes de flexion, de que se hablará más tarde, responden igualmente á formas muy especiales, que consisten en que el eje neutro, en su posicion primitiva, no ser una línea recta.

§ 11

Resistencia al resbalamiento en la capa neutra.

En una pieza que trabaja por flexion, una de las partes de la seccion sólo esperimenta esfuerzos de traccion, al paso que la otra solo está sometida á esfuerzos de compresion. La capa neutra que las separa, está pues forzosamente sometida á un esfuerzo de resbalamiento y por consiguiente conviene no descender, en la anchura que hay que darle, más abajo de un cierto límite. Este límite es, en verdad, muy lejano, pero importa no obstante conocerlo. Si designamos por z_0 la menor anchura admisible y por R la resultante de las fuerzas esteriores, que obran á uno ú otro de los lados de una seccion, debememos tener, para que el esfuerzo de resbalamiento en la capa neutra no pase de un límite S_0

$$z_0 \geq \frac{R}{S_0} \frac{U}{2I}. \qquad (14)$$

En esta fórmula S_0 no debe exceder de los $^4/_3$ del menor de los dos coeficientes de carga de la materia (V. § 5). Por otra parte, I representa, como anteriormente, el momento de inercia de la accion, es decir, la suma de los productos de los elementos de superficie por los cuadrados de sus distancias al eje neutro. U es el *momento estático de la seccion*, es decir, la suma de los productos de todos los elementos de la superficie por las mismas distancias.

Para la seccion rectangular N.° 1 (pág. 15) se tiene:

$$U = \frac{bh^2}{4};$$

para la seccion en doble T, N.° VIII (pág. 16:)

$$U = \frac{bh^2 - (b - b_1)h_1^2}{4}.$$

R debe determinarse en cada caso particular. Así, para el modo de aplicacion N.° II (pág. 10), R es constante para todas las secciones entre B y C é igual á la reaccion de los apoyos $\frac{P}{2}$.

La relacion (14) no sirve tanto para determinar á z_0 como para comprobar si la anchura de la capa neutra no se ha tomado demasiado escasa. En efecto, este peligro no existe casi nunca en las construcciones ordinarias y sobre todo en los proyectos de máquinas. Si para fijar las ideas, tomamos para z_0, el valor dado por la ecuacion (14), y hacemos $S_0 = {}^4/_3 S$, esta ecuacion da:

$$S = \frac{5}{4} \frac{R}{z_0} \frac{U}{2I}.$$

Si introducimos este valor en la ecuacion (4), que se refiere á la misma seccion, se halla:

$$\frac{M}{R} = \frac{5}{8} \frac{U}{z_0 a} \qquad (15)$$

$\frac{M}{R}$ es el brazo de palanca de la fuerza R, y lo designaremos por A. Por otra parte, $U : z_0 a$ da una de las dimensiones en altura de la seccion; la ecuacion (15) da pues una relacion entre dos dimensiones de la pieza considerada. En el caso sencillo de una seccion rectangular, reemplazando U por su valor dado más arriba y haciendo, además, $z_0 = b$ y $a = \frac{h}{2}$, se tiene $\frac{h}{A} = \frac{16}{5}$.

Este es un valor del cual no se debe pasar para h, si no se quiere exponer á que el esfuerzo de resbalamiento sea superior á los esfuerzos de extension ó de compresion. Esta observacion es muy importante para la seccion peligrosa; en el caso del N.° II, por ejemplo, esta seccion corresponde al punto B; y como entonces tenemos: $A = \frac{l}{2}$, debemos tomar: $\frac{h}{l} = \frac{8}{5}$.

Esta relacion entre la altura y la longitud es tan grande, que no debe preocuparnos en los casos ordinarios. Mayor atencion debemos prestarle en las construcciones de vigas americanas de madera. En estas piezas, la existencia del enrejado reduce en una gran proporcion, á la mitad, por ejemplo, la resistencia de la capa neutra, lo que exige una disminucion correspondiente en la relacion $\frac{h}{l}$.

Para las secciones en doble T tenemos:

$$\frac{h}{A} = \frac{16}{5\left[\frac{b}{b_1} - \left(\frac{ó}{b_1} - 1\right)\left(\frac{h_1}{h}\right)^2\right]}.$$

En el denominador la parte comprendida entre paréntesis es necesariamete superior á la unidad, de tal modo que el límite superior de $\frac{h}{A}$ se halla disminuido en cierta medida: de todos modos el valor que conviene evitar $\frac{h}{A}$ permanece todavia por lo regular muy elevado.

En los hierros en forma de T existen tendencias á la rotura, que presentan alguna analogia con los que acabamos de estudiar, en los puntos de union del ánima con las suelas, pero rarísima vez hay necesidad de ocuparse de ellos.

§ 12

Vigas de carga comun.

Si suponemos dos vigas prismáticas, apoyada una en otra en su medio y sometidas en este punto á una carga P, mientras que sus estremos descansan en apoyos, estas vigas se doblarán y las reacciones P' y P'', resultantes de esta flexion, deberán equilibrar á la fuerza P. Estas reacciones se hallan en la relacion siguiente que se deduce de la fórmula de la línea II, 1.ª columna, pág. 11:

$$\frac{P'}{P''} = \frac{I'}{I''}\,\frac{E'}{E''}\,\frac{l'^3}{l''^3}.$$

Como por otra parte se tiene:

$$P' = 4\frac{S'\,I'}{a'\,l'}, \qquad P'' = 4\frac{S''\,I''}{a''\,l''},$$

se obtiene finalmente:

$$\frac{S'}{S''} = \frac{E'}{E''}\,\frac{a'}{a''}\left(\frac{l''}{l'}\right)^2 \qquad (16)$$

De aquí se deduce que las dos piezas que suponemos de la misma materia ($E' = E''$), no trabajarán con el mismo coeficiente de seguridad que si tenemos: $\frac{a'}{a''}\cdot\left(\frac{l''}{l'}\right)^2 = 1$. Luego si estas piezas tienen la misma longitud, debe ser $a' = a''$, es decir, que las alturas han de ser iguales, sin que sea necesario que esta igualdad se estienda á las dimensiones en anchura.

Ejemplo. *Un soporte de fundicion, en forma de cruz simétrica* (fig. 4), *debe llevar en el punto de cruzamiento, una carga P. Estando las longitudes en la relacion de* 3 *á* 2, *para que los cuatro brazos, supuestos prismáticos, trabajen en las mismas condiciones de seguridad, será preciso poner, segun la fórmula* (16):

$$\frac{a'}{a''} = \left(\frac{l'}{l''}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

En otros términos, la altura de la seccion de los brazos pequeños debe ser á la de los grandes como 4 *es á* 9. *Si se diese la misma seccion á los dos brazos, la relacion de las tensiones producidas en estos brazos seria* 9 : 4.

Las consideraciones que anteceden, demuestran que, para las planchas de fundicion rectangulares que reposan por sus bordes en apoyos y están cargadas, sea uniformemente, sea solamente en su centro, las fibras paralelas al eje menor trabajan mucho más que las fibras paralelas al eje mayor. Las vigas de carga comun, formadas de diferentes materiales, exigen, para ser ventajosamente utilizadas, ciertas relaciones entre su altura y longitud, como indica la fórmula (16). Así, en el caso en que se superpongan dos vigas, una de fundicion y otra de hierro, la resistencia total que presentan estas dos piezas, sólo llega á la suma de sus resistencias parciales cuando sus dimensiones se hallan en una relacion determinada. Importa tener en cuenta esta observacion en la consolidacion de construcciones ya existentes.

§ 13

Resistencia á la torsion.

Resistencia y ángulo de torsion.—Cuando una pieza está sometida á la accion de pares, que tienden á hacerla girar alrededor de su eje geométrico, se dice que trabaja por *torsion*. En una seccion normal, los elementos se hallan así sometidos á un esfuerzo de resbalamiento, y con tal de que no se pase de los límites de elasticidad, se produce un equilibrio entre el momento de las fuerzas esteriores de rotacion, por una parte, y los momentos de las tensiones en los diversos elementos de la seccion, por otra, tomándose estos momentos con relacion al eje polar del centro de gravedad de la seccion, es decir, al eje que pase por el cen-

tro de gravedad y perpendicular al plano de esta seccion. La resistencia á la torsion es, pues, una especie superior de resistencia al resbalamiento, y se halla, con relacion á esta última, en condiciones análogas á las de la resistencia á la flexion relativamente á la resistencia de estension ó de compresion.

Si llamamos:

M el momento estático de las fuerzas de rotacion que obran sobre una seccion de la pieza,

I_p el momento de inercia polar de la seccion, es decir, el momento de inercia tomando con relacion al eje polar del centro de gravedad,

a la distancia al centro de gravedad de la seccion del elemento más apartado,

S la tension de resbalamiento, desarrollada en este elemento, se tiene la relacion:

$$M = \frac{SI_p}{a} \qquad (17)$$

Si la pieza tiene una seccion uniforme, $\frac{I_p}{a}$ es constante. Si espresamos M en funcion de la fuerza P, que produce la rotacion, y de su brazo de palanca A, la seccion peligrosa es la que corresponde al máximum de M, y por consiguiente la fuerza que representa la resistencia á la torsion de la pieza, tiene por espresion:

$$P = \frac{S}{A_m}\frac{I_p}{a} \qquad (18)$$

designando A_m el valor que adquiere A para el máximo de M.

Lo mismo que para la resistencia al resbalamiento, se llega al límite de elasticidad cuando S es igual á los $^4/_5$ del menor de los dos módulos de carga de la materia que constituye la pieza (V. § 5). Importa tener presente esta condicion, al comparar entre sí los esfuerzos de flexion y de torsion.

Se designa con el nombre de ángulo de torsion la desviacion angular relativa de dos secciones de la pieza. Representado este ángulo por θ, tenemos, de una manera general, para dos secciones cuya desviacion es x:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{I_p G} \qquad (19)$$

G designa el módulo de elasticidad de torsion de la materia, que tiene por valor los $^2/_5$ del módulo de elasticidad E.

El cuadro siguiente contiene, para una série de modos de aplicacion de las fuerzas de torsion sobre un eje prismático:

El valor del momento M en un punto cualquiera (x) del eje;

La resistencia á la torsion P, segun la fórmula (18);

El ángulo de rotacion θ del eje, espresado en longitud de arco.

En estas fórmulas, PR representa la suma total de los momentos de las fuerzas de torsion. Además en el tipo N.° IV, O designa el punto de aplicacion de la resultante de las fuerzas que tienden á hacer girar el eje y referirlas todas al brazo de palanca R; l_0 es la distancia del punto O al punto de encaje del eje.

Los tipos que siguen se encuentran todos más ó ménos frecuentemente en las máquinas; y hallaremos algunos otros en el párrafo consagrado á los resortes. El tipo N.° IV en el cuadro de las siguientes páginas 32 y 33 es el de los árboles de transmision ordinarios. Los tipos V y VI tienen aplicacion en las construcciones de armazones y bastidores de máquinas.

§ 14

Momento de inercia polar y módulo de seccion.

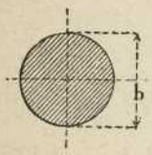
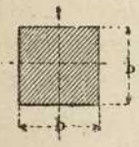
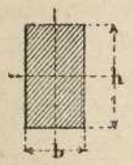
El momento de inercia polar I_p de una seccion se determina fácilmente por la relacion

$$I_p = I_1 + I_2 \qquad (20)$$

siendo I_1 é I_2 los momentos de inercia de la misma seccion con relacion á los dos ejes principales de inercia: sus valores están dados para diversas secciones, en la tabla del § 7. Se puede, pues, fácilmente calcular el *módulo polar de seccion* $\frac{I_p}{a} = Z_p$, para la mayor parte de los casos de la práctica; no obstante hay que esceptuar el caso de las secciones en que no se verifica que $I_1 = I_2$, igualdad que tiene lugar, por ejemplo, para los tipos III, VII, XII, XX, XXV, etc. (§ 7). Para estas secciones, las espresiones I_p é $\frac{I_p}{a} = Z_p$ deben sufrir una correccion, que exige largos cálculos, porque la deformacion de las secciones, á causa de la torsion, ejerce una influencia muy notable. Para el rectángulo, que constituye en la práctica la más importante de las secciones, hallaremos en el cuadro próximo los valores

corregidos de I_p é $\frac{I_p}{a}$. Para el círculo y el cuadrado que no necesitan correcciones, se obtienen directamente los valores por medio de la relacion (20).

EJEMPLO. *Una pieza cilíndrica de hierro forjado, de diámetro* $d = 100^{mm}$ *y de una longitud* $l = 1200^{mm}$, *está sometida á una fuerza* $P = 450^{k}$, *que obra en el estremo de un brazo de palanca* $R = 600^{mm}$ *y aplicada en las condiciones del N.º I del párrafo anterior. La tension S en la circunferencia es entonces* $S = \frac{a}{I_p} PR = \frac{16}{\pi} \frac{270000}{100^3} = 1'38$, *y el ángulo de torsion que resulta es* $\theta = \frac{1{,}38 \cdot 1200}{8000 \cdot 50} = 0'00414$, *lo que corresponde á un ángulo de* $0°{,}14'$. *Si queremos ahora reducir el diámetro d, de manera que S tenga por valor la mitad del módulo de carga por torsion, ó sea* $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 15 = 6$, *deberemos tomar:* $d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi S} PR} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 270000}{\pi \cdot 6}} = 61'2$; *el ángulo de torsion es entonces:* $\theta = \frac{6 \cdot 1200}{8000 \cdot 30'5} = 0'0294$ *ó, en grados,* $1°, 40'$.

N.º	SECCION.	MOMENTO DE INERCIA POLAR I_p.	MÓDULO DE SECCION POLAR $Z_p = \frac{I_p}{a}$.
I.		$\frac{\pi}{32} d^4$	$\frac{\pi}{16} d^3$
II.		$\frac{b^4}{6}$	$\frac{b^3}{3\sqrt{2}}$
III.		$\frac{1}{3} \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2}$	$\frac{b^2 h^2}{3\sqrt{b^2 + h^2}}$ aproximadamente $\frac{b^2 h^2}{3(0'4b + 0'96h)}$

§ 15

Sólidos de igual resistencia á la torsion.

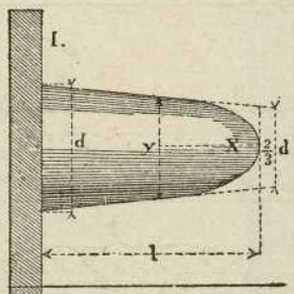
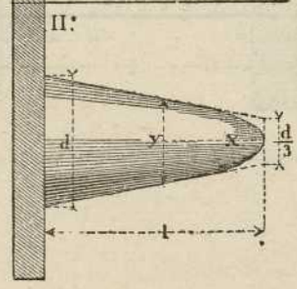
Se obtiene un sólido de igual resistencia á la torsion determinando las relaciones de las secciones por medio de la fórmula (17), en la cual se supone que S es constante, es decir, haciendo

$$\frac{Ma}{I_p} = Const. \qquad (21)$$

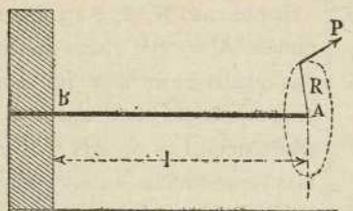
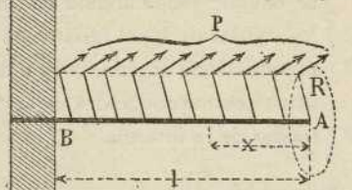
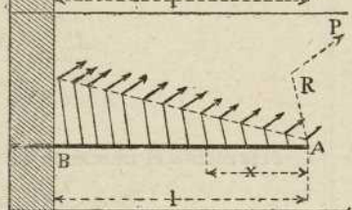
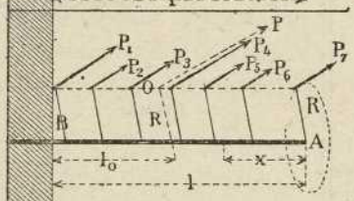
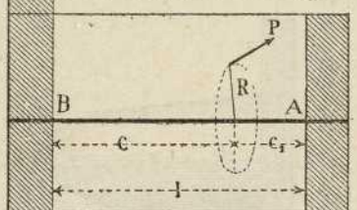
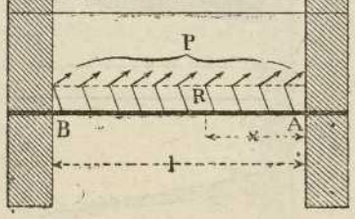
En el caso N.º I, § 13, tenemos para todas las secciones, $M = PR$. Estas secciones deben ser, pues, todas iguales entre sí, y por consiguiente, la pieza debe ser prismática, para satisfacer á la condicion de igual resistencia. Los tipos N.ºs II y III dan orígen á las formas reproducidas en el cuadro que sigue. Es claro, por lo demás, que el ángulo de torsion debe ser mayor en los sólidos de igual resistencia que en las piezas prismáticas. Este ángulo, cuyo valor está indicado por los dos tipos reproducidos aquí bajo, se determina por medio de la fórmula

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{I_x G} \qquad (22)$$

I_x representa el momento de inercia polar de la seccion en el punto x.

FORMA.	MODO DE ACCION	ECUACION Y ÁNGULO DE TORSION.
	Caso N.º II, § 13.	Seccion circular: $\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$; $PR = S\frac{\pi}{16} d^3$; $\theta = 3\frac{S}{G}\frac{l}{d}$ Forma aproximada: tronco de cono con un diámetro superior $= \frac{2}{3} d$.
	Caso N.º III, § 13.	Seccion circular: $\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}$; $PR = S\frac{\pi}{16} d^3$ $\theta = 6\frac{S}{G}\frac{l}{d}$ Forma aproximada: tronco de cono con un diámetro superior $= \frac{d}{3}$.

En el § 20, se hallarán, á propósito de los resortes de torsion otras formas de sólidos de igual resistencia.

N.º	MODO DE APLICACION DE LA FUERZA. (1)	MOMENTO DE TORSION M.
I.		$M = PR$ para todos los puntos entre A y B.
II.		$M = PR\frac{x}{l}$.
III.		$M = PR\frac{x^2}{l^2}$. PR = Momento total de las fuerzas de rotacion.
IV.		M = Suma de los momentos que obran sobre la longitud x.
V.		En la parte c: $M = PR\frac{c_1}{l}$. En la parte c_1: $M = PR\frac{c}{l}$.
VI.		$M = PR\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)$.

(1) Esta tabla es la demostracion de la teoria espresada en el § 13, pág. 29 y 30.

CARGA P.	ÁNGULO DE TORSION θ	OBSERVACIONES.
$P = \frac{SI_p}{aR}$	$\theta = \frac{PR.l}{I_p G}$ $= \frac{S}{G}\frac{l}{a}$	Todas las secciones entre A y B son igualmente resistentes.
$P = \frac{SI_p}{aR}$	$\theta = \frac{1}{2}\frac{PR.l}{I_p G}$ $= \frac{1}{2}\frac{S}{G}\frac{l}{a}$	Seccion peligrosa en B.
$P = \frac{SI_p}{aR}$	$\theta = \frac{1}{3}\frac{PR.l}{I_p G}$ $= \frac{1}{3}\frac{S}{G}\frac{l}{a}$	Las fuerzas de torsion decrecen uniformemente desde B hasta A. Seccion peligrosa en B.
$P = \frac{SI_p}{aR}$	$\theta = \frac{PR.l_0}{I_p G}$ $= \frac{S}{G}\frac{l_0}{a}$	Forma general para los casos I, II, III. Seccion peligrosa en B. El valor de θ para III se determina segun el de IV reemplazando l_0 por el valor correspondiente $\frac{l}{3}$, etc.
Si $c_1 < c$, se tiene $P = \frac{SI_p}{aR}\frac{l}{c}$	$\theta = \frac{PR}{I_p G}\frac{cc_1}{l}$ $= \frac{S}{G}\frac{c_1}{a}$	Seccion peligrosa en la parte más pequeña c_1.
$P = 2\frac{SI_p}{aR}$	$\theta = \frac{1}{8}\frac{PR.l}{I_p G}$ $= \frac{1}{4}\frac{S}{G}\frac{l}{a}$	Seccion peligrosa en A y B.

§ 16

Resistencia de piezas cargadas en pié.

Cuando una pieza prismática está comprimida en el sentido de su longitud y al mismo tiempo las dimensiones de la seccion son muy pequeñas con relacion á esta longitud, la pieza se halla sometida á esfuerzos mixtos de compresion y de flexion. Los esfuerzos de flexion se producen, por lo demás, en condiciones particulares: el brazo de palanca de la fuerza flexora no es ya, como en el caso de la flexion simple, la abcisa de la línea elástica, sino la ordenada de esta misma línea. De donde resulta que la fuerza de compresion P, desde el momento que es capaz de producir un principio de flexion, tenderá á aumentar la flecha indefinidamente, aun hasta la rotura, suponiendo que las leyes de la elasticidad perfecta sean aplicables hasta ese límite. En esta hipótesis, esa fuerza P, capaz de mantener la pieza doblada, será, pues, al mismo tiempo, la espresion de la fuerza de rotura.

El cuadro siguiente (pág. 35 y 36) contiene, para algunos de los más importantes modos de aplicacion de las fuerzas de compresion, las fórmulas relativas á la resistencia mixta de las piezas cargadas en pié. En estas fórmulas:

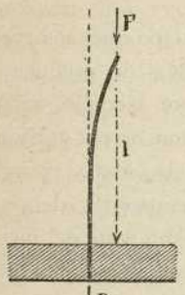
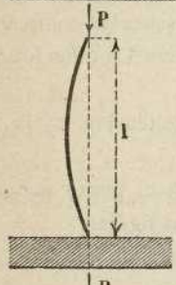
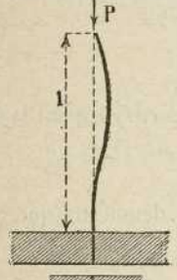
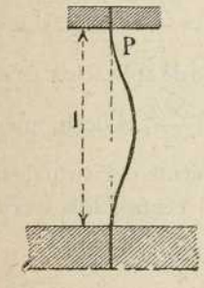
E designa el módulo de elasticidad de la materia, que constituye la pieza, supuesta prismática;

I el menor momento de inercia de su seccion con relacion á un eje que pase por el centro de gravedad; y así, para un rectángulo, cuyo lado menor es b y el mayor h, se tiene segun el § 7:

$$I=\frac{hb^3}{12}.$$

Importa observar aquí que los esperimentos de *Hodgkinson* dan, en general, una fuerza de rotura un poco inferior á la que darian nuestras fórmulas. Esta diferencia se esplica por la circunstancia de que nuestras fórmulas están establecidas solamente para el caso de cuerpos perfectamente elásticos; y así tan solo son exactas cuando la carga es una fraccion suficientemente pequeña de la fuerza de rotura P. Pero diferentes autores admiten coeficientes de seguridad muy variables. Para la fundicion y el hierro forjado se indica $^1/_4$ á $^1/_6$ (y aun ménos) de la fuerza de rotura teórica, como límite de carga admisible; para la madera el límite desciende de $^1/_8$ á $^1/_{10}$ ó $^1/_{12}$ de la fuerza de rotura. Estas diferencias dependen en su mayor parte, de que no siempre se puede determinar exactamente en la práctica, qué caso de los de la tabla que sigue, es el que se debe aplicar para la fórmula.

Los números de la columna 2 de este cuadro se han establecido admitiendo para el género de resistencia que consideramos, el mismo coeficiente de seguridad que para la resistencia á la comprension.

N.º	MODO DE APLICACION.	CARGA LÍMITE TEÓRICA Y FUERZA DE ROTURA.	OBSERVACIONES.	LA PIEZA DEBE CALCULARSE COMO RESISTENTE Á LA COMPRESION. Si la seccion es circular $\frac{l}{d}$ es menor que	Si la seccion es rectangular $\frac{l}{b}$ (siendo b el lado más pequeño) es menor que	NATURALEZA DE LA MATERIA EMPLEADA.
I.		$P=\frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{l^2}$	Soporte libre en un estremo. El estremo B está encajado. Seccion peligrosa en el punto de encaje.	5 12 6	5 3/4 14 8	Fundicion. Hierro forjado. Madera.
II.		$P=\pi^2\frac{EI}{l^2}$	Soporte libre. Los dos estremos se hallan en la direccion del eje primitivo de la pieza. Seccion peligrosa en el medio.	10 24 11 1/2	11 1/2 28 13 1/2	Fundicion. Hierro forjado. Madera.
III.		$P=2\pi^2\frac{EI}{l^2}$	Pieza encajada en uno de sus estremos, estando el otro sujeto á desviarse en la direccion primitiva del eje.	14 33 16	16 38 19	Fundicion. Hierro forjado. Madera.
IV.		$P=4\pi^2\frac{EI}{l^2}$	Pieza encajada en uno de sus estremos, los cuales se hallan en la direccion del eje primitivo. Seccion peligrosa en los estremos y en el medio.	20 48 23	23 56 27	Fundicion. Hierro forjado. Madera.

Los esperimentos de *Hodgkinson* han demostrado además que las columnas que descansan sobre bases enhiestas, se comportan casi como si estuviesen encajadas á lo alto de estas bases. En la tercera seccion se hallarán diversas aplicaciones de las fórmulas de la resistencia mixta que acabamos de estudiar.

§ 17

Formas de igual resistencia para las piezas cargadas en pié.

Se obtiene una forma de sólidos de igual resistencia, para las piezas cargadas en pié, haciendo decrecer las secciones, á partir de la peligrosa, de tal modo que suponiendo producida un pequeña flexion, el máximum de tension sea el mismo en todas las secciones.

Para el caso N.° II del párrafo anterior y suponiendo que la seccion sea un círculo lleno, nos podemos servir de la fórmula siguiente establecida por *Redtenbacher:*

$$\frac{\frac{x}{l}}{2} = \frac{2}{\pi}\left[arco\ sen\ \frac{y}{h} - \frac{y}{h}\sqrt{1-\left(\frac{y}{h}\right)^2}.\right]$$

Fórmula que se puede poner bajo una forma más fácil de apreciar, descomponiéndola en dos ecuaciones. Si hacemos, en efecto

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{h} &= sen\ \varphi\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ \frac{\frac{x}{l}}{2} &= \frac{1}{\pi}(2\varphi - sen\ 2\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

obtendremos:

Estas ecuaciones permiten construir gráficamente el contorno de la pieza. Tomando el ángulo φ como variable independiente, esta curva tiene por ecuacion de sus abcisas, la ecuacion de una cicloide, y para las ordenadas de una sinusoide. Se hallará más léjos, á propósito de las bielas, un modo de trazar esta curva. La forma de sólido que así se obtiene, está representada aproximadamente en el segundo trazado de la figura 5. La generatriz es aquí un arco de círculo, cuyo radio es el radio de curvatura de la curva real para el punto $x = \frac{l}{2}$. En general se puede reemplazar la curva real por una línea de poca curvatura. Esta aproximacion es completamente suficiente, porque en realidad la pieza no esperimenta flexion sensible. Su pieza anterior, supuesta libre, presenta los $^3/_4$ de la resistencia de una pieza cilíndrica de diámetro h y de la misma altura l.

§ 18

Resistencia compuesta.

Sucede amenudo que un cuerpo está sometido á la vez á varias fuerzas, susceptibles de producir efectos diferentes; que una seccion, por ejemplo, trabaja á la vez por compresion y por flexion, ó por torsion y por flexion, etc. La resistencia de la pieza y el máximum de tension que en ella se desarrollan, deben calcularse entonces de una manera diferente del método ordinario. En el cuadro siguiente se hallarán las fórmulas aplicables á los casos de resistencia compuesta que más frecuentemente se presentan. En estas fórmulas

S representa el máximum de tension en la seccion peligrosa;

Z el módulo de seccion en el punto peligroso, el cual está indicado con B en las figuras;

F la superficie de la seccion;

I su momento de inercia (§ 7);

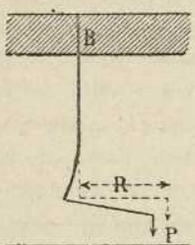
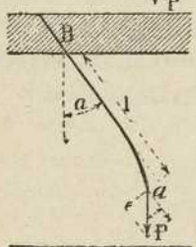
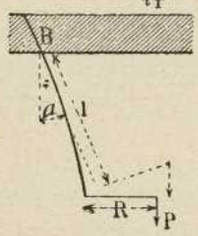
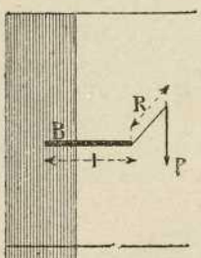
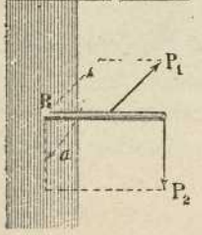
M_f un momento de flexion;

M_t un momento de torsion;

M_i un momento ideal que es $(M_f)_i$ para la flexion, y $(M_t)_i$ para la torsion.

El exámen de las fórmulas demuestra que con frecuencia es útil tener en cuenta la resistencia compuesta. Así, en el caso N.° I, si $R = \frac{h}{2}$, es decir, si la carga de un árbol ó eje tiene su punto de aplicacion en el borde de la seccion, se tiene $P = \frac{Sbh}{4}$, es decir, que la resistencia de la pieza es solamente el cuarto de la que seria si la fuerza obrase en el centro. Si la seccion es un círculo (d), se tiene $P = \frac{S\frac{\pi}{4}d^3}{1+8\frac{R}{d}}$, y haciendo $R = \frac{d}{2}$, es decir, suponiendo la carga aun aplicada al borde se halla $P = \frac{S}{5}\frac{\pi}{4}d^2$; y la resistencia es menor aun que en el caso de un rectángulo. Los casos I y II se deducen del caso III haciendo en él $\alpha = 0$ ó $R = 0$.

Los momentos ideales tienen una utilidad especial para las secciones elípticas y rectangulares, en que la mayor dimension h se supone, como sabemos, en el plano de flexion. Si se conoce á priori esta dimension, lo cual sucede amenudo cuando se da el perfil del soporte que hay que instalar, el momento ideal permite determinar fácilmente la resistencia compuesta, en atencion á que el término entre el paréntesis, á la derecha, da el brazo de palanca de la fuerza P para este momento ideal. Siendo generalmente fácil de determinar este brazo de palanca, sobre todo gráficamente, nos encontramos reducidos al caso de un esfuerzo de flexion simple. Si, por ejemplo, en el caso N.° II para $\alpha = 45°$, es $\cos \alpha = \operatorname{sen} \alpha = 0'707$, se da la altura h del rectángulo, y la seccion en B debe calcularse como si estuviese sometida á una fuerza flexora P, obrando con un brazo de palanca $0'707\, l + 0'707\, \frac{h}{6}$. En el caso número I se halla para $R = 0$ y para una seccion circular $(M_f)_i = P\frac{d}{8}$ y se debe tener $P\frac{d}{8} = S\frac{\pi}{32} d^3$, ó $P = S\frac{\pi}{4} d^2$, como era de preveer, puesto que, para $R = 0$, la varilla solo se halla sometida á la traccion. $\frac{d}{8}$ es pues el brazo de palanca que deberia tener una fuerza flexora P para ejercer sobre la pieza el mismo esfuerzo que una fuerza de la misma magnitud que obrase en la direccion del eje. Esto, por otra parte, solo es rigurosamente exacto con la condicion de despreciar los esfuerzos de resbalamiento en el cálculo de la flexion.— Las fórmulas IV y V presentan igualmente un gran número de aplicaciones útiles (véanse los cálculos de árboles y de ejes de máquinas.)

N.°	MODO DE ACCION.	CARGA DE LA PIEZA.
I.		$P = \dfrac{SF}{1 + R\dfrac{F}{Z}}$ Para una seccion rectangular *(bh)* $P = \dfrac{Sbh}{1 + 6\dfrac{R}{h}}$
II.		$P = \dfrac{SF}{\cos\alpha + \dfrac{F}{Z} l \operatorname{sen}\alpha}$ Para una seccion rectangular *(bh)* $P = \dfrac{Sbh}{\cos\alpha + 6\dfrac{l}{h}\operatorname{sen}\alpha}$
III.		$P = \dfrac{SF}{\cos\alpha + \dfrac{F}{Z}(l \operatorname{sen}\alpha + R\cos\alpha)}$ Para una seccion rectangular *(bh)* $P = \dfrac{Sbh}{\cos\alpha + \dfrac{l}{h}(\operatorname{sen}\alpha + \dfrac{R}{l}\cos\alpha)}$
IV.		$P = \dfrac{SZ}{{}^3/_8 l + {}^5/_8\sqrt{l^2 + R^2}}$ Pl es un momento de flexion M_f, PR un momento de torsion M_t.
V.		$1 = \dfrac{SZ}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2 M_1 M_2 \cos\alpha}}$ M_2 designa el momento (flexor) de P_1, M_2 el de P_2.

MOMENTOS IDEALES.

Momento flexor ideal para la tension S : $(M_f)_i = P\left(R + \frac{Z}{F}\right)$.

Para una seccion circular (d) : $(M_f)_i = P\left(R + \frac{d}{8}\right)$

Para una seccion elíptica (bh) : $(M_f)_i = P\left(R + \frac{h}{8}\right)$

Para una seccion rectangular (bh) : $(M_f)_i = P\left(R + \frac{h}{6}\right)$

Momento flexor ideal para la tension S : $(M_f)_i = P\left(l \operatorname{sen} \alpha + \frac{Z}{F} \cos \alpha\right)$.

Para una seccion circular (d) : $(M_f)_i = P\left(l \operatorname{sen} \alpha + \frac{d}{8} \cos \alpha\right)$

Para una seccion elíptica (bh) : $(M_f)_i = P\left(l \operatorname{sen} \alpha + \frac{h}{8} \cos \alpha\right)$

Para una seccion rectangular (bh) : $(M_f)_i = P\left(l \operatorname{sen} \alpha + \frac{h}{6} \cos \alpha\right)$

Momento flexor ideal para la tension S : $(M_f)_i = P\left(R \cos \alpha + l \operatorname{sen} \alpha + \frac{Z}{F} \cos \alpha\right)$.

Seccion circular (d) : $(M_f)_i = P\left(R \cos \alpha + l \operatorname{sen} \alpha + \frac{d}{8} \cos \alpha\right)$

Seccion elíptica (bh) : $(M_f)_i = P\left(R \cos \alpha + l \operatorname{sen} \alpha + \frac{h}{8} \cos \alpha\right)$

Seccion rectangular (bh) : $(M_f)_i = P\left(R \cos \alpha + l \operatorname{sen} \alpha + \frac{h}{6} \cos \alpha\right)$

Momento flexor ideal para la tension S :

$$(M_f)_i = {}^3/_8 M_f + {}^5/_8 \sqrt{M_f^2 + M_t^2}.$$

Momento de torsion ideal para la tension S :

$$(M_t)_i = {}^3/_5 M_f + \sqrt{M_f^2 + M_t^2}.$$

Momento flexor ideal para la tension S :

$$(M_f)_i = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2 M_1 M_2 \cos \alpha}.$$

En los casos IV y V se supone que la seccion de la varilla es una seccion tal que dos ejes principales rectangulares la dividen en cuatro porciones simétricas.

§ 19

Resistencia de las envolturas.

Los cuadros siguientes, que reproducen algunos de los casos más importantes en la práctica de las máquinas, permiten determinar la resistencia de las envolturas de seccion circular, en las cuales el espesor de las paredes es relativamente pequeño. La teoria de la resistencia de las envolturas no puede considerarse como completa, y es sobre todo discutible para los cilindros sometidos á presiones esteriores: así que solo damos las fórmulas relativas á las presiones interiores. En estas fórmulas:

P designa la presion efectiva (diferencia entre la presion interior y la presion en sentido inverso) por unidad de superficie sobre la pared.

S el máximum de tension desarrollado en la materia que constituye la pared.

E el módulo de elasticidad de la materia, r y δ el radio interior y el espesor de la envoltura.

Las fórmulas de los números I y II pueden aplicarse, pero simplemente como modo de aproximacion, hasta el límite de rotura.

1.er EJEMPLO. *Para un depósito cilíndrico, de hierro forjado, de* 1000^{mm} *de diámetro y cuya pared tenga* 10^{mm} *de espesor, se admite que la materia puede estar sometida á una tension* $S=8^k$. *Segun la fórmula* I, *este depósito puede soportar una presion interior efectiva de*

$$p=8\left(\sqrt{\frac{520}{500}}-1\right)=8\times 0{,}0198=0{,}158^k$$

por milímetro cuadrado. Esta presion representa sensiblemente en atmósferas, $100\times 0{,}158=15{,}8\ ^{atm}$. *Como tenemos* $K=40$, *el depósito reventaria, si la tension interior fuese* 5 *veces mayor ó sea de* 79 *atmósferas.*

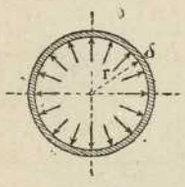
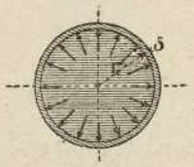
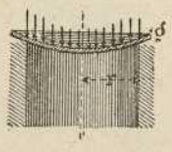
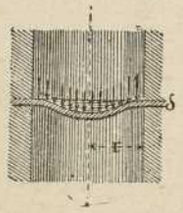
2.° EJEMPLO. *Un depósito esférico que tenga igualmente* 1000^{mm} *de diámetro y* 10^{mm} *de espesor, con* $S=8$, *podrá soportar, segun el N.°* II, *una presion* $p=\frac{16\times 10}{500}=0{,}32^k$ *por milímetro cuadrado ó sean* 32 *atmósferas.*

3.er EJEMPLO. *Un fondo llano, de hierro forjado, roblado sobre el cilindro del primer ejemplo, deberia, para* $S=8$ *y segun el N.°* IV, *tener como espesor:*

$$\delta=500\sqrt[1/3]{\frac{0{,}158}{8}}=500\cdot 0{,}816\cdot 0{,}14=57{,}12^{mm}.$$

4.° EJEMPLO. *La placa calculada en el 3.er ejemplo deberia pues, para* $E=20000$, *presentar una flecha*

$$f=\frac{57}{6}\left(\frac{500}{37}\right)^4\cdot\frac{0{,}158}{20000}=0{,}44^{mm}.$$

N.°	MODO DE ACCION.	PRESION p.	ESPESOR DE LAS PAREDES δ.
I. Cilindro.		$p=S\left(\sqrt{1+\frac{2\delta}{r}}-1\right)$	$\frac{\delta}{r}=\frac{p}{S}\left(1+\frac{p}{2S}\right)$
II. Esfera.		$p=2S\frac{\delta}{r}$	$\frac{\delta}{r}=\frac{p}{2S}$
III. Superficie plana circular.		$p=S\left(\frac{\delta}{r}\right)^2$	$\frac{\delta}{r}=\sqrt{\frac{p}{S}}$
IV. Superficie plana circular.		$p=\frac{3}{2}\left(S\frac{\delta}{r}\right)^2$	$\frac{\delta}{r}=\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{p}{S}}$

La flecha f, que presenta una placa redonda, tiene por valor, segun *Grashof*, para el caso N.° III:

$$\frac{f}{\delta}=\frac{5}{6}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\frac{p}{E} \qquad (24)$$

y para el caso N.° IV:

$$\frac{f}{\delta}=\frac{1}{6}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4\frac{p}{E} \qquad (25)$$

Las fórmulas que anteceden, no son aplicables, ó conducirian á resultados erróneos para las envolturas cuyas paredes, á causa de presiones interiores considerables, deben tener un gran espesor como en los cañones, los cilindros de las prensas hadráulicas, etc. En esas envolturas las tensiones de las fibras en los diversos puntos de un mismo radio pueden ser, en realidad, muy diferentes unas de otras; y la relacion entre estas tensiones ejerce una influencia notable sobre la resistencia de la pieza. Segun la ley que se admita para esta relacion de las tensiones, se alcanzan resultados muy diferentes para las espesores. *Brix* calcula las tensiones en los diversos puntos de un radio, suponiendo que, bajo la accion de la fuerza interior, el espesor de la pared no esperimenta ningun cambio. *Barlow* admite, por el contrario, una ley de variacion tal, que la superficie de la seccion anular (círculo) conserve una magnitud constante. *Lamé* no hace ninguna hipótesis preliminar y calcula rigurosamente las variaciones de tension, para las diversas moléculas de un mismo radio, en funcion de la presion interior. Este método de cálculo es seguramente el más exacto y el que conduce á las nociones más verosímiles para los diferentes elementos de la pieza. Conservando las notaciones anteriores, se deducen de las tres teorias las fórmulas siguientes:

VALORES.		BRIX.	BARLOW.	LAMÉ.
Cilindro hueco.	$p=$	$S\log.nat.e^{\frac{p}{S}}-1$	$\frac{S}{1+\frac{r}{\delta}}$	$S\frac{(r+\delta)^2-r^2}{(r+\delta)^2+r^2}$
	$\frac{\delta}{r}=$	$e^{\frac{p}{S}}-1$	$\frac{p}{S-p}$	$\sqrt{\frac{S+p}{S-p}}-1$
Esfera hueca.	$p=$	$2S\frac{\delta}{r}$	$\frac{2S}{1+\frac{r}{\delta}}$	$2S\frac{(r+\delta)^3-r^3}{(r+\delta)^3+2r^3}$
	$\frac{\delta}{r}=$	$\frac{1}{2}\frac{p}{S}$	$\frac{p}{2S-p}$	$\sqrt[3]{\frac{2(S+p)}{2S-p}}-1$

Para la tension S' correspondiente á la capa cuya distancia al centro es r', en lugar de r, los cálculos de *Lamé* le han conducido á la espresion:

$$S'=\frac{S}{2}\left[1+\left(\frac{r}{r'}\right)^2\right]-\frac{p}{2}\left[1-\left(\frac{r}{r'}\right)^2\right]$$

Si suponemos que r' sea precisamente el radio de la superficie esterior (cilíndrica) del depósito, de tal modo que, designando δ el espesor se tenga: $r'=r+\delta$, esta espresion se convierte en:

$$S'=\frac{S}{2}\left[\frac{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2+1}{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2}\right]-\frac{p}{2}\frac{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2-1}{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2} \qquad (26)$$

ó bien, reemplazando $\left(1+\frac{\delta}{r}\right)$ por m:

$$S'=\frac{S}{2}\frac{m^2+1}{m^2}-\frac{p}{2}\frac{m^2-1}{m^2}$$

EJEMPLO. *Para $\delta=r$, es decir $m=2$, esta fórmula da* $S'=\frac{5}{8}S-\frac{3}{8}p$. *Como por otra parte, en este caso, la fórmula del cuadro anterior da* $p=\frac{3}{5}S$, *resulta que tenemos:* $S'=\frac{5}{8}S-\frac{9}{40}S=\frac{2}{5}S$. *De aquí se deduce que en los depósitos de gran espesor, sometidos á una presion interior, la materia trabaja mucho ménos en el exterior que en el interior y que, por consiguiente, no se halla empleada en condiciones particularmente favorables.*

Las tres teorias se hallan de acuerdo en indicar que la mayor tension de la materia se produce en la pared interior: á ella pues se aplica el valor de S. La fórmula de *Lamé* y aun la de *Barlow* conducen además al notable resultado de que el aumento de espesor, más allá de ciertos límites no aumenta ya la resistencia de la pieza. Se llega al límite de carga práctico para la tension S, cuando $p=S$. Se llega tambien al límite teórico de carga, cuando p se hace igual al módulo de carga de la materia. La presion interior empieza por alargar de una manera permanente las fibras interiores y si continua elevándose hasta el valor del coeficiente de rotura, rompe las fibras. El límite teórico de carga se verifica cuando $p=T$, es decir,

	Fundicion.	Hierro forjado.	Acero fundido.
para p	$=7'5^k$	15^k	25^k
en atmósferas	$=750$	1500	2500

La falta de homogeneidad en la materia puede producir no solamente un alargamiento sino la rotura, bajo la accion de presiones muy inferiores á estos límites. Como en los cañones de gran calibre se producen

tensiones superiores á 2.500 atmósferas, se comprende que piezas de bronce ordinario no puedan resistir constantemente la accion de las cargas, y que aun piezas homogéneas de gran calibre de acero fundido no presenten siempre una solidez suficiente.

El desgaste de la cámara en los cañones de bronce ordinarios puede esplicarse ya, por la tension exagerada que sufre la primera capa anular en el interior de la pieza; conviene por lo demás observar que las acciones químicas, pueden igualmente desempeñar cierto papel.

A fin de dar á los cañones una resistencia suficiente se ha tenido la idea de formarlos de una série de capas concéntricas no homogéneas, de tensiones diferentes; y con este objeto se ha recurrido á varios procedimientos, entre los cuales conviene citar el sistema de birolas y el de guarniciones interiores endurecidas por compresion. El sistema de birolas que tiende á pasar por el más ventajoso, determina esencialmente una verdadera compresion en las capas próximas al ánima. Bajo la accion de las presiones ejercidas por los gases de la pólvora, estas capas empiezan primero por volver á su estado normal, para ser sometidas enseguida á la estension, y es fácil comprender que pueden en estas condiciones soportar esfuerzos de estension mucho más considerables que si estuviesen simplemente abandonadas á sus acciones moleculares naturales.

El cálculo de las condiciones de resistencia de los cañones birorados presenta grandes dificultades. Vamos á intentar, sin embargo, dar algunas indicaciones sobre esta importante cuestion. En el caso de un depósito sometido á la vez á una presion interior p y á una presion esterior p', se llega á la relacion siguiente, debida igualmente á *Lamé:*

$$\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2=\frac{S+p}{S-p+2p'} \qquad (27)$$

Si para abreviar, ponemos, como antes, $1+\frac{\delta}{r}=m$, tendremos:

$$p=S\frac{m^2-1}{m^2+1}+2p'\frac{m^2}{m^2+1} \qquad (28)$$

cuya relacion demuestra que, para un valor de p, el de S es tanto menor, y por consiguiente, en el caso que nos ocupa, tanto más ventajoso, cuanto mayor sea el valor de p'. Pero en un tubo birolado, el valor de p' no es invariable y constante; depende esencialmente de la accion que la pared del cilindro ejerce sobre la birola, en virtud de la presion interior p. Haciendo uso de las notaciones de la fig. 6 supondremos primero que en el estado normal, la birola esté en contacto con el tubo, sin ejercer ninguna presion, es decir que, para $p=0$ se tenga igualmente: $S'_1=S'_2=0$. En estas condiciones, si se produce una presion interior p, suponiendo nula ó despreciable la presion esterior p', las capas del tubo y de la birola, que se hallan en el radio r', se alargarán la misma cantidad, es decir, que sus tensiones serán las mismas y tendremos, por consiguiente $S'_1=S'_2$. Pero la tension S'_2 de la capa interior de birola da lugar á una presion p' dirigida hácia el interior y existe entonces entre esta presion y las tensiones de la materia en la birola una relacion dada por la fórmula (28) en la cual la presion esterior se supone nula. Haciendo $1+\frac{\delta'}{r'}=m'$, esta relacion es:

$$p'=S'_2\frac{m'^2-1}{m'^2+1} \qquad (29)$$

Este valor de p', introducido en la fórmula (28) da, observando que $S'=S'_2=S'_1$:

$$p'=S\frac{m^2-1}{m^2+1}+2S'\frac{m'^2-1}{m'^2+1}\frac{m^2}{m^2+1}$$

Pero segun la ecuacion (26), S' puede espresarse en funcion de p y de S, de tal suerte que despues de algunas trasformaciones se obtenga:

$$p=S\frac{m^2m'^2-1}{m^2m'^2+1}=S\frac{\left(1+\frac{r}{\delta}\right)^2\left(1+\frac{r'}{\delta'}\right)^2-1}{\left(1+\frac{r}{\delta}\right)^2\left(1+\frac{r'}{\delta'}\right)^2+1} \qquad (30)$$

Esta relacion demuestra que, como anteriormente, la tension S, de la capa estrema en el interior es siempre superior á p, pero la relacion $\frac{S}{p}$ se acerca, sin embargo, más á la unidad, como indica el cuadro siguiente:

$\frac{\delta}{r}$	$\frac{\delta'}{r'}$	m	m'	$\frac{p}{S}$	$\frac{S}{p}$	$\frac{S'}{p}$	$\frac{S'}{S}$
1	0	2	1	0'600	1'667	0'667	0'400
1	0'5	2	1'5	0'800	1'250	0'406	0'325
2	1	2	2	0'905	1'057	0'143	0'135

De aquí resulta que guarneciendo un cañon con una birola, formada de la misma materia y colocada sin forcejo se puede llegar ya á reforzarlo notablemente.

Pero si la birola está forcejeada en el cañon, produce en la pared una presion radial p', dirigida hácia el interior, que puede obrar de una manera muy eficaz y ventajosa sobre la magnitud de la tension S correspondiente á una presion interior p.

En efecto, si introducimos en la ecuacion (28) el valor de p' sacado de la fórmula (29), obtendremos:

$$p = S\frac{m^2-1}{m^2+1} + 2S'_2\frac{m'^2-1}{m'^2+1}\frac{m^2}{m^2+1} \qquad (31)$$

El valor de S'_2 depende á la vez de la presion p y del modo como el tubo se ha establecido. Veremos más léjos que esta última influencia tiene una gran importancia, pero por ahora debemos limitarnos á hacer algunas hipótesis.

Si suponemos, por ejemplo, que el tubo tiene precisamente una tension tal que, para el mayor valor de p, la tension S′ es igual á la tension S en el ánima de la pieza (que es ciertamente la hipótesis más favorable), la ecuacion (31) nos dará:

$$\frac{p}{S} = \frac{m^2-1}{m^2+1} + 2\frac{m'^2-1}{m'^2+1}\frac{m^2}{m^2+1} \qquad (32)$$

EJEMPLO. *Tomando* $\delta = r$, $\delta' = \delta = 0{,}5r'$, *lo que da* $m = 2$, $m' = {}^3/_2$ *se obtiene:* $\frac{p}{S} = {}^3/_5 + {}^{10}/_{13}\cdot{}^4/_5 = \frac{79}{65}$. *Aquí el valor de* S *permanece inferior al de p, ó en otros términos, p puede ser mayor que el módulo de carga de la materia, sin que la tension en esta última llegue á este módulo. Si sobre la primera birola se coloca una segunda, como se hace en los cañones de gran calibre, es fácil ver que se llega á dar una relacion entre p y* S *un valor todavia más ventajoso. Nuestro cálculo demuestra que para un cañon de acero fundido ordinario cuyo módulo de carga puede suponerse igual á 25, la tension de los gases de la pólvora no podria pasar de 30^k próximamente, ó sean 3.000 atmósferas, sin poner la pieza en peligro. Esta conclusion no parece enteramente conforme á los resultados observados en esperimentos recientes. Así, los nuevos cañones ingleses de Riesen han resistido tensiones de 25'8 toneladas por pulgada cuadrada ó cerca de 40^k por milímetro cuadrado. Pero creemos que semejantes tensiones deben ser consideradas como demasiado elevadas y peligrosas. Quizá deba suponerse que el módulo de carga de la materia empleada en la confeccion de estos cañones era muy superior al del acero fundido ordinario, es decir, á 25^k, ó acaso que la pared interior del ánima habia esperimentado un endurecimiento prévio, operacion que, bien ejecutada es muy recomendable.*

Cuando un tubo cilíndrico está sometido á una compresion esterior, las acciones que se producen en la pared pueden determinarse por medio de la fórmula (27). Si suponemos que p sea nula ó bastante escasa para ser despreciada, esta fórmula da: $(S + 2p')m^2 = S$ de donde se deduce:

$$p' = \frac{S}{2}\frac{1-m^2}{m^2}$$

ó

$$S = -p'\frac{2m^2}{m^2-1} = -p'\frac{2\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2}{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2 - 1} \qquad (33)$$

El signo (—) demuestra que la tension en la pared del ánima del tubo se ha convertido aquí en una compresion, al paso que antes era una traccion. La tension S′, sobre una superficie envolvente está dada por la fórmula (26) haciendo en ella $p = 0$; se tiene entonces $S' = \frac{S}{2}\frac{m^2+1}{m^2}$; ó reemplazando S por su valor sacado de (33):

$$S' = -p'\frac{m^2+1}{m^2-1} = -p'\frac{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2 + 1}{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2 - 1} \qquad (34)$$

Este valor de S′ es inferior al de S; y se tiene en efecto:

$$\frac{S'}{S} = \frac{1}{2}\frac{m^2+1}{m^2} = \frac{1}{2}\frac{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2 + 1}{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2} \qquad (35)$$

relacion que solo es igual á la unidad sino para $\delta = 0$. Así, en el caso de una simple presion esterior, la tension en la pared del ánima es igualmente más fuerte que en cualquier otra capa.

EJEMPLO. *Para* $\delta = r$ *la tension en la capa interior que limita el ánima* $S = -{}^8/_3 p'$; *por otro lado,* $S' = -{}^5/_3 p'$ *y por consiguiente,* $S' = {}^5/_8$ S. *La compresion desarrollada en la pared del ánima tiene un valor superior á la traccion que, en igualdad de circunstancias, se produce en la misma capa bajo la accion de una presion interior; y la fórmula* (30) *nos da, en efecto, para esta traccion:* $S = {}^5/_3 p$ *solamente.*

La construccion de las máquinas ofrece numerosos ejemplos de la aplicacion del procedimiento de forcejo, en la colocacion de las vilortas de los cubos de las ruedas, etc. Este procedimiento se halla íntimamente unido al anterior y vamos á dar su teoria para el caso más sencillo.

Sea *B* (figura 8) un anillo ó un cubo con una abertura cilíndrica, y que deba entrar á fuerza sobre el

árbol A, sea en frio ó en caliente. Designemos por r_1 el radio del árbol, antes de la operacion, por r_2 el de la abertura del anillo, y en fin por r el radio comun á las dos piezas, despues de su colocacion.

Sobre la pieza A, el forcejo da orígen á una compresion uniformemente repartida S_1 y sobre C, en la capa interior más próxima al eje, á una traccion S_2. Entre estas tensiones y módulos de elasticidad correspondientes, existen, segun la fórmula (2), las relaciones

$$\frac{S_1}{E_1}=\frac{r_1-r}{r_1} \qquad \frac{S_2}{E_2}=\frac{r-r_2}{r_2}$$

de donde se deduce, por adicion

$$r_1\frac{S_1}{E_1}+r_2\frac{S_2}{E_2}=r_1-r_2$$

Para el constructor es interesante saber qué relacion existe entre r_1 y r_2, que da el mejor resultado. Si designamos por q el cociente $\frac{r_1-r_2}{r_2}$ tenemos, segun lo que precede:

$$q=\frac{r_1}{r_2}\frac{S_1}{E_1}+\frac{S_2}{E_2}=\frac{\frac{S_1}{E_1}+\frac{S_2}{E_2}}{1-\frac{S_1}{E_1}} \qquad (36)$$

Pero entre S_1 y S_2 existe la relacion siguiente:

$$S_1=S_2\frac{m^2-1}{m^2+1}=S_2\frac{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2-1}{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2+1}$$

deducida de la fórmula de *Lamé*. Haciendo para abreviar, $S_1=S_2\rho$, se obtiene:

$$q=\frac{\frac{S_1}{E_1}+\frac{S_1}{\rho E_2}}{1-\frac{S_1}{E_1}}=\frac{\frac{S_2}{E_2}+\frac{S_2\rho}{E_1}}{1-\frac{S_2\rho}{E_1}}. \qquad (37)$$

En el caso en que las piezas A y B sean metálicas, se puede despreciar la fraccion que hay en el denominador al lado de la unidad, y resulta la fórmula utilizable en la práctica:

$$q=\frac{S_1}{E_1}+\frac{S_1}{\rho E_2}=\frac{S_2}{E_2}+\frac{S_2\rho}{E_1}. \qquad (38)$$

Por otra parte tenemos para

$\frac{\delta}{r}=$	0'5	0'6	0'7	0'8	1'0	1'5	2'0	3'0
$\rho=$	0'385	0'438	0'486	0'528	0'600	0'724	0'800	0'882.

De la ecuacion (38) se deduce tambien;

$$S_1=\frac{qE_1}{1+\frac{E_1}{E_2}\frac{1}{\rho}} \quad \text{y} \quad S_2=\frac{qE_2}{1+\frac{E_1\rho}{E_1}}. \qquad (39)$$

El valor de q es con frecuencia tan exíguo, que es necesario poner el mayor cuidado en el torneado de las piezas, para establecer exactamente la relacion conveniente entre r_1 y r_2.

EJEMPLO. *Arbol de hierro forjado con cubo de fundicion,* $E_1=20000$, $E_2=10000$; *supongamos que se tenga* $\delta=2r$, *de donde* $\rho=0'8$, *y pongamos como condicion que la tension* S_2 *producida por el forcejeo en el interior del cubo no esceda de* 5^k. *Debemos tomar entonces, segun la fórmula* (38), $q=\frac{5}{10000}+\frac{5\cdot 0'8}{20000}=\frac{7}{10000}=\frac{1}{1430}$. *Si tomásemos* $q=\frac{1}{600}$, *la tension correspondiente en el cubo seria, segun la fórmula* (39): $S_2=\frac{{}^1/_{600}\cdot 10000}{1+\frac{10000\cdot 0'8}{20000}}=\frac{100}{6\cdot 1'4}$, *ó sea próximamente* $11'5^k$. *El cubo estaria entonces espuesto á romperse.*

§ 20

Cálculo de los resortes.

Los materiales que se emplean en la construccion de las máquinas son todos más ó ménos elásticos; y no pueden, pues, resistir las fuerzas esteriores sino mediante una deformacion que, si las dimensiones de las piezas están convenientemente escogidas, desaparece cuando las fuerzas esteriores cesan de obrar. Se procura, en general, reducir los límites de esta deformacion (prolongacion, acortamiento, flexion, torsion) de manera que las piezas adquieran la mayor rigidez posible. Sin embargo, en los resortes se utiliza esta elasticidad de la materia, ya sea para amortiguar los choques (coginetes, resortes de vagon), ya para producir un movimiento (relojes), ó ya, en fin, para obtener apoyos que presenten á la par solidez y cierta blandura.

De ahí se deduce que los resortes deben componerse de sistemas de cuerpos susceptibles de esperimentar entre los límites de elasticidad variaciones de forma relativamente considerables, y como estas variaciones están sometidas á las leyes de la resistencia de los materiales, resulta que la teoria de los resortes halla aquí su lugar natural.

Las acciones directas de presion ó de traccion solo pueden ponerse en juego en los resortes cuando se trata de materias muy estensibles ó comprensibles, como el cauchú. Para las materias ménos deformables como la madera y sobre todo los metales, se utilizan con preferencia las resistencias á la flexion ó á la torsion. Hemos reunido en el cuadro siguiente (pág. 46) los tipos de resorte más importantes que obran por flexion ó por torsion, indicando brevemente sus propiedades principales.

Aunque la propiedad de deformacion sea en un resorte la propiedad esencial, puede ser útil tener en cuenta el gasto de materia que exige. Este elemento está indicado en la penúltima columna, suponiendo que, para todos los resortes, la carga ó el desvio del punto de aplicacion tenga el mismo valor. Se ha tomado por unidad el volúmen correspondiente á los resortes triangulares.

En las fórmulas de los cuadros siguientes,

E designa siempre el módulo de elasticidad,
G el módulo de elasticidad de torsion de la materia del resorte, que es igual á $^2/_5\ E$ (V. § 11).

Los coeficientes de resistencia de las materias que se emplean para los resortes, se han indicado anteriormente (§ 2). Pero importa observar que para hacer trabajar los resortes por torsion con la misma seguridad que los resortes por flexion, no se debe tomar para los primeros más que los $^4/_5$ de la tension S (véase § 5). Las fórmulas siguen siendo aplicables cuando la direccion de la fuerza P obra en sentido contrario al indicado en las figuras. En todos los casos examinados el volúmen V de los resortes está dado por la relacion.

$$V = C\,.\,(P.f)\,\frac{E}{S^2} \qquad (40)$$

designando C una constante que depende de la forma del resorte, y $(P.f)$ el producto de la carga por la flecha, ó en otros términos, el trabajo del resorte. De aquí se deduce que para todos los resortes pertenecientes al mismo tipo, compuestos de la misma materia, que presentan la misma seguridad y que dan lugar á un mismo trabajo, $(P.f)$ el peso no varia, cualquiera que sea la longitud l ó de cualquier manera que se elijan las dimensiones arbitrarias. El cociente $\frac{E}{S^2}$ demuestra que las materias más ventajosas para los resortes son las que tienen un escaso coeficiente de elasticidad y sobre todo un módulo de carga elevado. La tabla del § 2 da:

para el acero fundido templado y recocido. . . . . $\frac{E}{T^2} = \frac{30000}{65^2} = 7{'}10$

para el acero ordinario no templado. . . . . $= \frac{20000}{25^2} = 32{'}00$

para el laton. . . . . $= \frac{6500}{4{'}8^2} = 28{'}21$

para la madera. . . . . $= \frac{1100}{2^2} = 275{'}00$

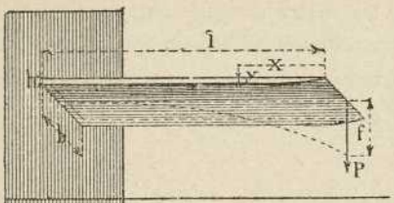
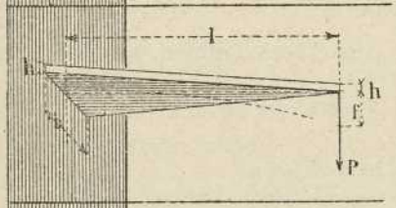
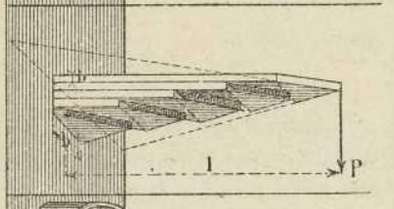
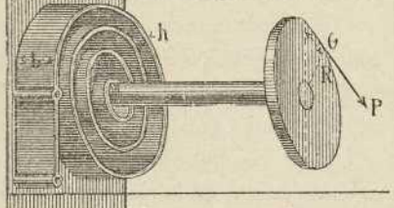
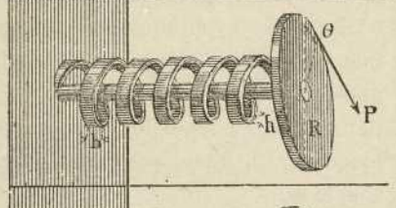
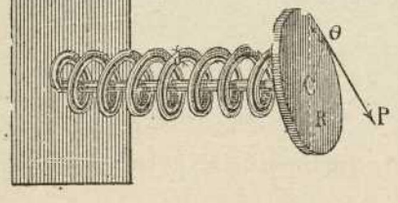
El acero templado y recocido es pues teóricamente la materia más ventajosa para los resortes; lo que por otra parte, confirma la práctica.

Conviene tambien señalar la propiedad, comun á todos nuestros tipos de resorte, de que su depresion ó la desviacion del punto de aplicacion de la fuerza, es proporcional á la carga.

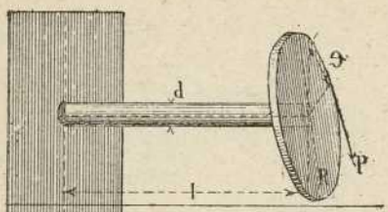
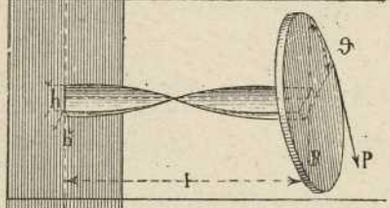
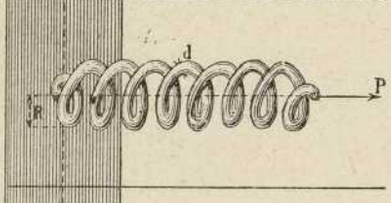
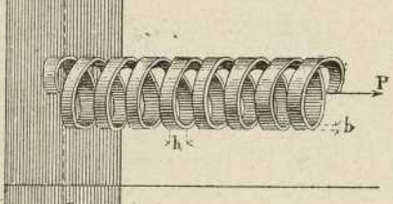
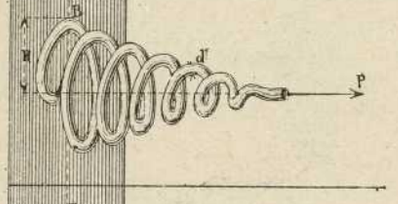
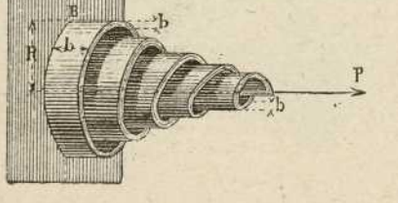
De ahí resulta que las oscilaciones de un resorte cargado entran en la clase de las oscilaciones simples ó pendulares y que su duracion puede calcularse fácilmente. Despreciando el peso propio de los resortes, cada uno de los que hemos estudiado, oscila bajo la accion de la carga P, como lo haria un péndulo simple de longitud f, de modo que el tiempo t de una oscilacion simple es:

$$t = \pi \sqrt{\frac{f}{g}}, \qquad (41)$$

$g = 9{'}81^m$ designa la aceleracion debida á la gravedad.

N.°	FORMA.	DESIGNACION.	CARGA.
I.		Resorte rectangular. Seccion longitudinal limitada por una parábola cúbica.	$P = \frac{S}{6}\frac{bh^2}{l}$
II.		Resorte triangular simple.	$P = \frac{S}{6}\frac{bh^2}{l}$
III.		Resorte triangular compuesto de láminas superpuestas.	$P = \frac{S}{6}\frac{ibh^2}{l}$ i número de láminas.
IV.		Resorte espiral de filete plano.	$P = \frac{S}{6}\frac{bh^2}{R}$
V.		Resorte de hélice de filete plano.	$P = \frac{S}{6}\frac{bh^2}{R}$
VI.		Resorte de hélice de filete redondo.	$P = \frac{S\pi}{32}\frac{d^3}{R}$

DEPRESION.	FLEXIBILIDAD.	VOLÚMEN.	OBSERVACIONES.
$f=6\frac{Pl^3}{Ebh^3}$	$\frac{f}{l}=\frac{S}{E}\frac{l}{h}$	$^3/_2$	En la ejecucion en lugar de $\frac{y}{h}=\sqrt{\frac{x}{l}}$, se toma como aproximacion un perfil trapezoidal con $^2/_3\,h$ por altura en el estremo.
$f=6\frac{Pl^3}{Ebh^3}$	$\frac{f}{l}=\frac{S}{E}\frac{l}{h}$	1	Cuerpo de igual resistencia á la flexion; en la práctica, el estremo libre debe estar reforzado.
$f=6\frac{Pl^3}{Eibh^3}$	$\frac{f}{l}=\frac{S}{E}\frac{l}{h}$	1	Se conduce como un resorte triangular simple, de base *ib* (en punteado); y puede considerarse obtenido cortando y superponiendo las partes de una misma pieza.
$f=R\theta=12\frac{PlR^2}{Ebh^3}$	$\frac{f}{R}=2\frac{S}{E}\frac{l}{h}$	1	*l* longitud de la lámina del resorte suponiéndolo desarrollado.
$f=R\theta=12\frac{PlR^2}{Ebh^3}$	$\frac{f}{R}=2\frac{S}{E}\frac{l}{h}$	1	Estas tres formas constituyen cuerpos de igual resistencia á la flexion.
$f=R\theta=\frac{64}{\pi}\frac{P}{E}\frac{lR^2}{d^4}$	$\frac{f}{R}=2\frac{S}{E}\frac{l}{d}$	$^4/_3$	El valor $\frac{f}{R}$ es el ángulo de torsion θ determinado por la carga *P*.

N.°	FORMA.	DESIGNACION.	CARGA.
VII.		Resorte de torsion simple: eje redondo.	$P=S\frac{\pi}{16}\frac{d^3}{R}$
VIII.		Resorte de torsion simple: eje plano	$P=\frac{S}{2R}\frac{b^2h^2}{\sqrt{b^2+h^2}}$ próximamente $(h>b)$ $P=\frac{S}{R}\frac{b^2h^2}{3(0{\cdot}4b+0{\cdot}96h)}$
IX.		Resorte de hélice de filete redondo.	$P=S\frac{\pi}{16}\frac{d^3}{R}$
X.		Resorte de hélice de hoja plana.	$P=\frac{S}{3R}\frac{b^2h^2}{\sqrt{b^2+h^2}}$ próximamente $(h>b)$ $P=\frac{S}{R}\frac{b^2h^2}{3(0{\cdot}4b+0{\cdot}96h)}$
XI.		Resorte cónico, filete redondo.	$P=S\frac{\pi}{16}\frac{d^3}{R}$
XII.		Resorte cónico, hoja plana.	$P=\frac{S}{3R}\frac{b^2h^2}{\sqrt{b^2+h^2}}$ próximamente $(h>b)$ $P=\frac{S}{R}\frac{b^2h^2}{3(0{\cdot}4b+0{\cdot}96h}$

DEPRESION.	FLEXIBILIDAD.	VOLÚMEN.	OBSERVACIONES.
$f=R\theta=\frac{32}{\pi}\frac{P}{G}\frac{R^2l}{d^4}$	$\frac{f}{R}=2\frac{S}{G}\frac{l}{d}$	$^5/_{12}$	En los tipos VII á X los resortes son sólidos de igual resistencia á la torsion.
$f=R\theta=3\frac{PR^2l}{G}\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}$	$\frac{f}{R}=\frac{S}{G}\frac{l\sqrt{b^2+h^2}}{bh}$	$^5/_8$	Los tipos VII y VIII convienen especialmente para formar resortes compuestos ó en haces.
$f=\frac{32}{\pi}\frac{PR^2l}{Gd^4}$	$\frac{f}{R}=2\frac{S}{G}\frac{l}{d}$	$^5/_{12}$	En los tipos IX á XII, l es siempre la longitud del hilo supuesto tendido.
$f=3\frac{PR^2l}{G}\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}$	$\frac{f}{R}=\frac{S}{G}\frac{l\sqrt{b^2+h^2}}{bh}$	$^5/_8$	El lado mayor de la seccion puede ser indiferentemente paralelo, normal ú oblícuo al eje.
Próximamente: $f=\frac{16}{\pi}\frac{PR^2l}{Gd^4}$	$\frac{f}{R}=\frac{S}{G}\frac{l}{d}$	$^5/_6$	Aquí, como en el N.° XII, se supone prolongado el resorte hasta el vértice del cono. En ambos casos, la seccion peligrosa está en B.
Próximamente: $f=\frac{3}{2}\frac{PR^2l}{G}\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}$	$\frac{f}{R}=\frac{1}{2}\frac{S}{G}\frac{l\sqrt{b^2+h^2}}{bh}$	$^5/_4$	Disminuyendo progresivamente la altura h de la seccion, á partir de B hasta el estremo, se acaba por llegar á un sólido de igual resistencia.

EJEMPLOS DE APLICACION DE LA TEORIA DE LOS RESORTES. 1. *Se quiere calcular un resorte triangular simple (tipo N.° II) para una carga* $P=50^k$ *y una flexion* $f=20^{mm}$. *Elijamos como materia el acero fundido con* $E=30000$, *y hagamos* $S=40^k$; *si tomamos por longitud del resorte* $l=400^{mm}$, *la columna 6 nos da:* $\frac{20}{400}=\frac{40}{30000}.\frac{400}{h}$, *de donde* $h=\frac{40.400.400}{20.30000}=10'66^{mm}$. *Pero segun la columna 4, se tiene:* $50=\frac{40}{6}\frac{b\,32^2}{400.3^2}$ *ó* $b=26'35^{mm}$ *ó* $26'5^{mm}$. *El volúmen correspondiente es* $V=\frac{bhl}{2}=\frac{26'5.32.400}{3.2}=56533$ *milím. cúbicos.*

2.° EJEMPLO. *Conservando la misma materia hagamos* $l=300$; *tendremos entonces* $h=\frac{40.300.300}{20.30000}=6^{mm}$, $b=\frac{6.300.50}{40.36}=62'5^{mm}$, $V=\frac{bhl}{2}=56250$ *milímetros cúbicos, es decir, que teniendo en cuenta las fracciones despreciadas para redondear los números, hallaríamos para V el mismo valor que en el primer ejemplo, conforme á la observacion hecha sobre la fórmula* (40).

3.er EJEMPLO. *Se quiere reemplazar el resorte anterior por un resorte cilíndrico en hélice (tipo N.° IX), fabricado con la misma materia. Como este nuevo resorte obra por torsion, debemos, para conservar la misma seguridad, reemplazar* $S=40$ *por los* 4/5 *de este valor, ó sea* 32. *Si tomamos además como diámetro del alambre de acero* $d=6^{mm}$, *la columna 4, N.° IX, da:* $50=\frac{32}{16}\pi\frac{6^3}{R}$, *de donde* $R=\frac{\pi.216}{25}=27'14^{mm}$ *ó* 27^{mm}. *Segun la columna 6, se debe tomar para longitud del hilo,* $l=\frac{6.20.0'4.30000}{32.2.27}=\frac{10000}{12}=833'3$, *lo que da para el número de vueltas* $i=\frac{l}{2\pi R}=\frac{833,3}{2.\pi.27}=4'91$ *ó sea* 5. *Si quisiéramos mayor número de espiras, seria preciso tomar d más pequeño. El volúmen del resorte es* $V_1=l.\frac{\pi}{4}.d^2=833'3\frac{\pi}{4}36=23562$ *milímetros cúbicos. Este volúmen comparado con el anterior da* $\frac{V_1}{V}=\frac{23562}{56250}=\frac{5}{11'99}$, *ó sea* 5/12, *valor que se halla indicado en la columna 7, N.° IX.*

4.° EJEMPLO. *En estos últimos años se ha empezado á utilizar en Alemania, como resortes de suspension para los vagones, los resortes de torsion bajo la forma que representa la fig. 9 debidos al americano Dudley. Cada resorte en forma de horquilla lleva dos brazos cilíndricos AB, unidos por medio de pernos á una pieza que carga la engrasadera; en A las dos barras redondas del resorte se hallan comprimidas contra la superficie inferior de un batiente que está fijo en el larguero del vagon y que les deja el juego necesario en el sentido transversal; en C el resorte está soportado por un gancho, fijo igualmente al larguero. Nos proponemos calcular la tension S que esperimenta la materia de los brazos A C del resorte, en las condiciones siguientes: diámetro* $d=29^{mm}$; *brazo de palanca R (proyeccion horizontal del brazo A B)* $=100^{mm}$; *carga media del resorte entero* 4500^k *(el cuarto de la carga del vagon* 10000^k + *el cuarto de la tara* 8000^k); *carga P de cada brazo A B* $=0'5.4500^k=2250^k$.

La columna 4 del N.° VII de la tabla anterior da para la tension buscada: $S=\frac{16}{\pi}\frac{PR}{d^3}=\frac{16}{\pi}\frac{2250.100}{29^3}=47^k$. *Parece ser que hasta ahora el acero de Sheffield es el único que se ha empleado para resortes de esta especie. El coeficiente de elasticidad de esta materia es relativamente muy escaso (circunstancia ventajosísima para el empleo de los resortes); apenas llega á* 17000^k, *lo que conduce á tomar por coeficiente de elasticidad de torsion* $G=2/5\ E=6800^k$.

Podemos segun esto determinar aproximadamente la depresion ó la flecha f por medio de la columna 6 del N.° VII, conociendo la longitud l; suponiendo $l=850^{mm}$, *se halla:* $f=\frac{100.2.47.850}{6800.29}=40'5^{mm}$.

El resorte tal como está representado en la figura 9, escala de $^1/_{12}$, *solo pesa* 11^k; *este peso solo es, pues,* $\frac{11}{4500}=\frac{1}{410}$ *de la carga bruta, ó* $\frac{11}{2500}=\frac{1}{227}$ *de la carga útil. Un resorte de hojas de dos brazos, equivalente al anterior, tendria segun la columna 4 del N.° III de nuestra tabla un peso de* 45^k, *peso que, como el otro, no comprende ningun herraje. El peso de este resorte de hojas es, pues, más que cuádruplo del de resorte de torsion equivalente.*

Desde el año 1857 habia el autor llamado la atencion, en su obra sobre los resortes (1), *acerca de la economia de materia que se debia obtener sustituyendo los resortes de torsion con resortes de hojas en la construccion de vagones. La lentitud con que esta idea se ha generalizado, debe atribuirse, por una parte á la diferencia que habia entre el antiguo y el nuevo sistema, y por otra á la dificultad de llegar á templar conveniente-*

(1) Konstruktion und Berechnung der wichtigsten Federarten.—Winterthur.

mente los resortes redondos. Parece que el resorte de Dudley ha resuelto completamente esta dificultad. Pero aun en esta hipótesis, insistimos en considerar preferible al resorte anterior, el simple resorte de hélice del número IX (trabajando por compresion en vez de trabajar por alargamiento); y este último resorte podria, en efecto, colocarse muy fácilmente entre las ramas de las placas de guarda de los soportes de los ejes, sin exigir ninguna disposicion especial del género de las que representa la fig. 9 para los botones en A y las articulaciones en B.

La fig. 10 enseña como puede sustituirse un resorte de este género por un resorte de hojas en un vagon de mercancias. En el larguero A están fijas las placas de guarda B, cuyas ramas sirven de guia al soporte C. El resorte D está destinado á permitir la trasmision de la carga de A á C; está arrollado simplemente en hélice, á escepcion de la parte inferior que, en una longitud de 3/4 de vuelta próximamente está en un plano perpendicular al eje, constituyendo una base de apoyo en la pieza E de la meseta ó soporte. En la parte superior penetra el resorte en una corona que forma tuerca en su interior y está fija con pernos al larguero. Al colocar el resorte, se introduce en la corona haciéndole girar hasta que esté convenientemente ajustado, y luego se fija invariablemente en esta posicion por medio del tornillo G. Cuando despues de un largo servicio pierde el resorte parte de su elasticidad, se quita y somete á una série de operaciones destinadas á devolverle el mismo valor que tenia al principio.

No siendo fácil el cálculo de un resorte helicoidal de esta especie, creemos útil dar aquí un ejemplo. Tomemos un vagon de mercancias de cuatro ruedas, cuyo peso propio se supone de 5000^k y la carga útil 10000^k. La carga P que en estas condiciones corresponde á cada resorte es 3750^k; admitamos que bajo esta carga la depresion f sea igual á 45^{mm}, que la tension S sea como anteriormente de 47^k y que el coeficiente G tenga igualmente por valor 6800. Como conviene obtener para el diámetro d del hilo un número redondo, podemos tomar, para este diámetro, un cierto número de valores y calcular los que corresponden al radio de arrollamiento R por la fórmula: $R=S\frac{\pi}{16}\frac{d^3}{P}$ *(N.º IX, col. 4, pág. 48).*

Hagamos sucesivamente:

$$d=26,\ 27,\ 28,\ 29^{mm}.$$

Para estos valores determinemos el número de vueltas n, que es preciso dar al resorte, de modo que la flecha f sea de 45^{mm} para P=3750^k. Observemos al efecto que aproximadamente se tiene: $2\pi Rn=l$ *(siendo l la longitud del hilo), ó bien, segun la fórmula del N.º IX (pág. 49, col. 2):* $f=2\frac{S}{G}\frac{2\pi R^2 n}{d}$, *de donde* $n=\frac{fG}{4\pi S}\frac{d}{R^2}$.

La distancia de la corona F á la plancha de apoyo E debe ser por lo ménos de nd+f; y por otra parte estando comprimido el resorte, conviene que quede entre las espiras cierto juego σ, con objeto de que el resorte pueda oscilar con libertad; tomaremos σ=8^{mm}. El paso s de las espiras del resorte, no cargado, nos lo da la fórmula:

$$s=\frac{nd+f+n\sigma}{n}.$$

La altura total del resorte, no cargado, tal como sale del taller, excede á ns en la cantidad 1'5 s+d, debiendo encajarse el resorte en la corona F, en una longitud correspondiente á 1 1/2 vueltas, perdiéndose además 1/2 d, por arriba y por abajo. Añadiendo, por fin, el espesor δ del fondo de la corona F y el de la placa E que podemos suponer suman ambos 13^{mm}, se obtiene la altura de todo el conjunto. Esta altura no puede exceder de la mayor distancia que queda disponible entre el larguero A y el soporte C. En la figura esta distancia es de 350^{mm}. El cuadro siguiente nos da los resultados de los cálculos que acabamos de indicar:

$d=$	26	27	28	29
$R=$ . .	43'30	48'40	54'10	60'03
$=$ . .	43'00	48'00	54'00	60'00
$n=$ . .	7'27	6'63	4'97	4'17
$nd=$ . .	189'02	176'01	139'16	120'93
$n\sigma=$ . .	58'16	53'04	39'76	33'36
$f=$ . .	45'00	45'00	45'00	45'00
$n(d+\sigma)+f=$ . .	292'28	277'05	223'92	199'29
$s=$ . .	40'20	41'79	45'05	47'78
$=$ . .	40'00	42'00	45'00	48'00
$1'5\ s=$ . .	60'00	63'00	67'50	72'00
$2\delta=$ . .	26'00	26'00	26'00	26'00
Altura total $=$ . .	404'28	393'05	344'42	326'29
$=$ . .	404'00	393'00	344'00	326'00

Los dos primeros valores de d son inadmisibles porque conducen á una altura total superior á la altura disponible 350^{mm}; y los dos últimos valores conducen por el contrario, á convenientes alturas; podemos pues tomar:

$d=28^{mm}$ *con* $s=45^{mm}$

ó $d=29^{mm}$ *con* $s=48^{mm}$

Como vemos, esta clase de resortes es de construccion sencillísima y permite realizar una economía muy importante de materia. Para los vagones de viajeros que exigen resortes mucho más flexibles (f está generalmente comprendido entre 150 *y* 170^{mm}) *es necesario á veces componer el sistema de tres resortes.*

El cauchú vulcanizado ó sulfurado se utiliza frecuentemente como materia para resortes, especialmente en los cojinetes de vagon, mazos-martillos, etc., empleándose generalmente en forma de discos superpuestos y separados por placas metálicas. Los esperimentos hechos hasta ahora para determinar como obra el cauchú al deformarse, son demasiado incompletos para poder deducir de ellos reglas de construccion. Sin embargo, para un limitado contorno y en particular para los resortes anulares de los cojinetes de vagones, podemos partir de las indicaciones siguientes (1).

Las figuras 11 y 12 dan las secciones más frecuentemente adoptadas para los anillos de los cojinetes. En una de las caras de cada disco hay un rodete anular, y en la otra una garganta correspondiente, en la cual se acomoda la placa intercalar evitando los desplazamientos transversales en la caja del cojinete.

Cuando se somete un resorte de este género á una compresion dirigida segun el eje, la esperiencia demuestra que el volúmen del resorte permanece invariable: el espesor disminuye, pero el diámetro aumenta. Las fibras que padecen más están en E, en la estremidad exterior y trabajan por estension. Y se producen desgarramientos en estos puntos cuando se pasa del límite de elasticidad.

Se alcanza próximamente este límite de elasticidad cuando la carga representa 0'5^{k} por milímetro cuadrado de la seccion inicial, medida normalmente al eje. El módulo de resisistencia T debe, pues, ser igual á 0'5$_{k}$ calculando que la pieza trabaja solo por compresion. Por lo demás, es algo más elevado este módulo para los cauchús de poca densidad, en los que sube hasta 0'55$_{k}$, descendiendo por el contrario hasta 0'45^{k} para los más densos. El peso específico varia con la cantidad de azufre, siendo igual á 1 en las especies más lijeras, y variable de 1'15 á 1'32 en las más pesadas.

Llegando al límite de elasticidad, la seccion media segun EF se halla casi duplicada con relacion á la superficie primitiva, y el contorno $ECDF$ es al contorno primitivo $ABCD$ como 4 es á 3.

(1) Se han utilizado los números deducidos de los esperimentos de *Werder*, ingeniero, director de la fábrica de *Klett* y *C.ª*, de Nuremberg.

Si la carga permanece inferior al límite de elasticidad, la compresion se efectua segun una ley que varia con la cualidad del cauchú, pero que puede espresarse aproximadamente por la fórmula empírica:

$$\lambda = \frac{l}{\gamma}\sqrt{\frac{P}{q}}, \qquad (42)$$

en la cual λ representa el acortamiento esperimentado por el espesor primitivo l, bajo la accion de la fuerza P; q la seccion inicial del toro, medida en un plano normal al eje; γ el peso específico de la materia.

Ejemplo. *Un resorte dispuesto segun el tipo de la figura* 11, *tiene* 142^{mm} *de diámetro exterior,* 74^{mm} *de diámetro interior, lo que corresponde á una superficie de seccion* q=11536$^{mm.q}$; *el espesor de los discos es* l=35^{mm} *y la densidad del cauchú* γ=1. *Está sometido á una presion de* 2500^{k}. *La carga por unidad de superficie de la seccion primitiva es entonces* $\frac{P}{q} = \frac{2500}{11536}$ = 0'217^{k}, *y se halla debajo del límite de elasticidad. Segun la fórmula* (42) *la compresion producirá una reduccion de altura igual á* $\lambda = 35\sqrt{0'217} = 35 \cdot 0'466$ =16'31^{mm}. *Los ensayos directos han dado* λ=16'75^{mm}.

El ingeniero belga Stevart ha hecho una série de esperimentos muy importantes sobre las propiedades del cauchú bajo el punto de vista de su resistencia. Todos esos esperimentos, tanto por estension, como por compresion, han venido á confirmar que el cauchú, cualquiera que sea la clase de esfuerzos á que esté sometido, no cambia sensiblemente de volúmen, es decir, que *es casi incomprensible, como el agua.* Los esperimentos relativos á la estension han dado un módulo de elasticidad igual á 0'084^{k}. Los de compresion hechos igualmente sobre anillos de cojinetes han conducido á Stevart á la fórmula, diferente de la anterior: $\frac{l}{l-\lambda} = \sqrt{aP+1}$, en la cual a designa un coeficiente que puede tener, para cada anillo separado, un valor diferente (ha encontrado, por ejemplo, a=0'96, 1'15, 1'50). Esta fórmula reproduce muy exactamente los resultados de esperimentos verificados por Stevart.

En los cojinetes de los caminos de hierro, se emplean de 4 á 7 rodajas, cuyas dimensiones son precisamente las del ejemplo anterior. La reduccion de altura total es entonces, como es fácil ver, igual á la de un anillo aislado multiplicado por el número de anillos.

En la práctica, se observa frecuentemente que los resortes de cauchú pierden rápidamente su elasticidad y acaban por trasformarse en una masa dura y quebradiza. Pero los resultados obtenidos en las nuevas instalaciones, ejecutadas con mucho cuidado, permiten asegurar que este inconveniente solo se produce cuando los anillos durante su deformacion, están espuestos á frotamientos por resbalamiento. Para evitar estos frotamientos, es preciso que las placas intercalares pasen del cauchú tanto interior como esteriormente una cantidad tal, que la materia despues de su deformacion, no frote contra la caja ni contra el eje central. Los cojinetes en que se cumplen estas condiciones, ofrecen una duracion muy satisfactoria.

Conviene dar á los anillos una forma tal que no se puedan formar pliegues en los bordes.—Estos pliegues que ocasionan un pronto desgaste, se producen fácilmente en las secciones análogas á las de la fig. 12 y toman entonces la forma indicada en F_1F_2. Los anillos de seccion rectangular, como los de la fig. 11, están al abrigo de este inconveniente y deben por consiguiente emplearse con preferencia.

SEGUNDA PARTE

NOCIONES DE GRAFOSTÁTICA

§ 21

Consideraciones preliminares.

El equilibrio de varias fuerzas que obran sobre un sistema de puntos materiales puede representarse por un trazado gráfico, con la condicion de reemplazar cada una de estas fuerzas por una línea recta que tenga la misma direccion, magnitud y posicion en el espacio. La direccion de una fuerza se determina por los ángulos que forma la recta que la representa con los ejes coordinados. La longitud de esta línea da la magnitud absoluta de la fuerza; el sentido en que tiende á producirse el movimiento se indica generalmente por una flecha; y por fin, la posicion de la recta en el sistema de ejes coordinados, da las constantes que entran en la ecuacion de la línea que indica la direccion de la fuerza. Esta representacion de las fuerzas por magnitudes geomótricas permite trasformar las cuestiones de estática en simples problemas de geometria aplicada, y llegar por consiguiente á soluciones mucho más sencillas en general que las del análisis algebraico, sobre todo en los casos en que ciertos elementos que queremos determinar son magnitudes geométricas que, en definitiva, deben ser referidos á uno ó más planos. Coordinando metódicamente las soluciones gráficas de este género de problemas, se ha llegado á formar un cuerpo de doctrina especial llamado *Estática gráfica ó grafostática* (1).

Es ciencia de gran utilidad para hacer proyectos de máquinas y tendremos muchas ocasiones de emplearla en el curso de esta obra para el estudio de las piezas elementales. Con objeto de hacer más inteligibles las aplicaciones que haremos de ella más tarde, recordaremos brevemente algunos de sus principios fundamentales.

Se pueden evidentemente eliminar de la grafostática los métodos de cálculo gráfico que se aplican á los casos en que los elementos sólo intervienen por sus

(1) V. Culmann. *Statique graphique*, Zurich, 1866. Esta obra de incontestable utilidad, espone la teoria de la grafostática y contiene gran número de problemas y aplicaciones tomados del *Arte del ingeniero*. A Culmann pertenece el honor de haber sido el primero en condensar en un cuerpo de doctrina el conjunto de soluciones de este género, y de haber introducido esta enseñanza en la práctica.

medidas, como por ejemplo, aquellos en que las fuerzas sólo entran por sus magnitudes, como unidades de órden cualquiera. Estos métodos llamados *Cálculo gráfico*, *Aritmética gráfica* ó *Aritmografía*, etc., deben formar siempre una subdivision (1). Empezaremos por recordar los principios relativos á estos problemas de pura aritmética gráfica. Nunca insistiremos bastante para que el lector se penetre bien de estos principios fundamentales de los que haremos uso constante.

§ 22

Multiplicacion de las líneas.

Las líneas usadas en la aritmética gráfica se miden con el compás y la regla métrica; pueden espresar por su longitud y segun la unidad que se elija, metros ó milímetros, litros, velocidades, monedas, etc. Las operaciones de adicion ó sustraccion se efectuan gráficamente sobre las mismas líneas, sin ninguna dificultad, y así se obtienen líneas que representan sumas ó diferencias de otras. El problema parece más complejo cuando se trata de multiplicar líneas que representan magnitudes. Pero como toda medida se reduce á comparar una magnitud dada con la unidad, el problema de la multiplicacion gráfica se reduce en realidad á encontrar una línea que esté á la dada por unidad en la relacion dada por otras líneas medidas con esta misma unidad; en otros términos, á multiplicar dos líneas a y b entre sí ó más exactamente, multiplicar una línea de longitud a por otra de longitud b, se reduce á hallar una línea x que contenga $a \times b$ veces la unidad con la cual se han medido las dos líneas (factores) dados. Este problema se resuelve de muchas maneras, y de un modo muy sencillo, con triángulos semejantes. Vamos á dar algunas de estas soluciones.

I. Se lleva sobre OE (fig. 13) la longitud tomada por unidad de medida; se levanta en E una perpendicular hasta su encuentro en B con el arco de círculo de radio $OB=b$; en la direccion de OE se toma $OA=a$; trácese AC paralela á EB y la longitud OC da el producto buscado x. Tenemos en efecto, $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OE}$ ó $x = \frac{a \times b}{1}$. Esta solucion supone que uno de los factores (b) sea mayor que la unidad.

II. Figura 14. Con una construccion análoga á la anterior se puede trazar EB oblícuamente á OA lo cual permite hacer el trazado en el caso en que los dos factores son menores que la unidad.

III. Tómense OE y OB (fig. 15), como anteriormente; llévese $OA=a$ sobre OB; trácese la recta AC de modo que los ángulos OAC y OEB sean iguales, es decir, que AC sea antiparalela á EB; OC será el producto buscado x, puesto que los triángulos OEB y OAC son semejantes. Para no tener que construir el ángulo en A se toma $OE'=OE$, $OB'=OB$, y se traza AC paralela á $E'B'$. (Haciendo girar el triángulo $BE'B'$ alrededor de un eje que pase por BB', hasta rebatirlo sobre la recta, los dos triángulos $BB'E'$ y $BB'E$ forman un paralelógramo: de aquí la espresion de antiparalelo). La construccion se simplifica tambien cuando EB es perpendicular á OE; pero esto solo es posible cuando $b > 1$.

IV. Tómese OE (fig. 16) igual á la unidad; llévese sobre OE, uno de los factores $OA=a$; por el punto E se traza una perpendicular ú oblícua, sobre la cual se toma $EB=b$, y por el punto A se traza una paralela á EB. Esta línea encuentra en C la prolongacion de OB, y se tiene $AC=x$, en virtud de la relacion $CA : OA=BE : OE$ ó $x : a=b : 1$, pudiendo ser a y b mayores ó menores que la unidad.—Se puede tambien tomar $EB_1=b_1$, trazar OB_1 hasta su encuentro en C_1 con la prolongacion de CA; $AC_1=x_1$ será entonces el producto de a y b_1; por consiguiente CC_1 será el producto de a por BB_1, y tendremos $x+x_1=a(b+b_1)$. El factor b puede llevarse, pues, hácia cualquier lado de la línea de unidad OE sobre la normal (ú oblícua) BE, y el producto buscado $ab=x$, se halla entonces medido por la longitud de la paralela á b, comprendida entre las líneas trazadas desde el punto O á los estremos de b.

V. Tómese (fig. 17) $OE=1$, $EB=b$, OB arbitraria, pero menor que $OE+EB$, y sobre OB llévese $OA=a$; en A se construye un ángulo OAC igual á OEB; la longitud AC es el producto buscado x, pues tenemos $CA : OA=BE : OE$ ó $x : a=b : 1$; a y b pueden ser mayores ó menores que la unidad.

VI. Tómese igualmente (fig. 18) $OE=1$; levántese en E una perpendicular sobre la cual tomaremos $EA=a$, $EB=b$; y trácese BB' perpendicular á OB. La recta AC, paralela á BB' determina en la prolongacion de OE un punto C tal, que $EC=x$. Tenemos, en efecto: $EC : EA=BE : OE$ ó $x : a=b : 1$.

Sucede amenudo en los dibujos que las líneas que hay que multiplicar entre sí, ocupan en el plano del dibujo una posicion que permite efectuar la multiplicacion sin necesidad de trasladar dichas líneas á otra po-

(1) V. H. Eggers, *Principes d'une arithmétique graphique*, Schaffouse, 1865.—Schlesinger, *Sobre las curvas de las potencias* (Zeitschrift des œsterr. Ing.-Verein, 1866).—E. Stamm, *Sul calcolo grafico* (Memorias del Instituto lombardo, cuaderno VI).

sicion más cómoda. Vamos á dar algunos ejemplos de los trazados que se pueden adoptar con frecuencia en casos de esta naturaleza.

VII. Figura 19. Las rectas $OA=a$, $BB'=b$ son perpendiculares ú oblícuas entre sí, cayendo el punto B' entre O y A. Se lleva entonces sobre OA la unidad OE y se traza la BE; en A trázase AC paralela á BE y por el punto C, la línea CC' paralela á BB'; $CC'=x$ es entonces el producto buscado, pues tenemos:

$$CC' : OA = BB' : OE \text{ ó } x : a = b : 1.$$

VIII. Figura 20. Se da como anteriormente $OA=a$, y $BB'=b$, siendo estas dos rectas normales ó inclinadas. A partir de O y sobre una paralela á BB', se lleva $OE=1$, se unen A y E, y por el punto B se traza BC paralela á EA; $B'C$ es el producto buscado; pues tenemos: $B'C : BB' = OA : OE$ ó $x : b = a : 1$.

IX. Figura 21. Se dan $AA'=a$ y $BB'=b$ perpendicular á AA'; prolónguese AB hasta su encuentro en E con la paralela á AA' trazada á la distancia $OE=1$; trazando EA' y su paralela BC, la longitud AC da el producto x; tenemos efectivamente: $AC : CB = AA' : A'E$ y por tanto $AC : BB' = AA' : OE$ ó $x : b = a : 1$.

X. Figura 22. Se da $AA'=a$ y $BO=b$, perpendicular á AA'; desde el punto O como centro, con un radio igual á la unidad, se describe un arco de círculo, que corta á AA' en E; trácese $A'C$ paralela á OE y desde el punto A, se baja AC perpendicular á $A'C$; la recta AC es el producto buscado x. En efecto, como el ángulo CAA' es igual al ángulo BOE, se tiene: $AC : AA' = OB : OE$ ó $x : a = b : 1$.

La recta AA' se ha proyectado aquí sobre una perpendicular á OE.

Esta clase de proyeccion se llama de una manera abreviada antiproyeccion de AA' sobre OE.

XI. Figura 23. Cuando las rectas dadas $AA'=a$ y $BO=b$ se cortan en ángulo recto, se traza por el punto B una paralela á AA', y desde el punto O con un radio $OE=1$ se describe un arco de círculo que corta á esta recta en E; trácese $A'C$ paralela á EO y AC perpendicular á $A'C$; AC es el producto buscado x, pues se verifica la relacion: $AC : AA' = OB : OE$ ó $x : a = b : 1$.

Los métodos de multiplicacion que acabamos de indicar y todos los que pudieren imaginarse son igualmente aplicables al caso en que el número de factores sea mayor que 2; y basta repetir la misma operacion para cada factor con la recta resultante del producto de los factores anteriores.

Supongamos, por ejemplo, que se quiera hallar el producto $a \cdot b \cdot c$ de tres rectas. Empezaremos por determinar, por medio del método (I), si se quiere, el producto $x_1=ab$ (fig. 24); rebátase $OC=ab$ en OC' sobre OA; á partir de O, se lleva $OD=c$ y en C' se levanta una perpendicular, que encuentra á esta recta en F; OF representa el producto buscado $x=abc$. Si se prefiere seguir el método (IV) despues de haber hallado $OC'=ab$, se toma $ED=c$ (fig. 25), se prolonga OD hasta su encuentro en F con una perpendicular á OC', trazada por el punto C' y entonces se tiene $C'F=x$, etc.

§ 23

Division de las rectas.

Siendo la division una operacion inversa de la multiplicacion, los métodos de efectuarla se deducen fácilmente de los anteriores. Dividir una recta a por una recta b, es hallar una tercera recta x que contenga $\frac{a}{b}$ veces la unidad comun de a y b. Vamos á indicar algunos de los procedimientos gráficos usados con este objeto.

I. Tomemos (fig. 26) $OE=1$; levantemos en E una perpendicular (ú oblícua) que encuentre en B al arco descrito con $OB=b$ (divisor) como radio y tomemos $OA=a$ (dividendo). Si se traza por el punto A una paralela á BE, esta recta determina sobre OE el cociente $OC=x$ en virtud de la relacion

$$OC : OE = OA : OB \text{ ó } x : 1 = a : b.$$

II. Se toma $OE=1$ (fig. 27); sobre OE se lleva $OB=b$, se levanta en B una perpendicular, que se corta con un arco de círculo $OA=a$ (dividendo). Si se traza una perpendicular á OB por el punto E, esta recta determina sobre OA el cociente $OC=x$, pues se tiene la misma relacion anterior:

$$OC : OE = OA : OB \text{ ó } x : 1 = a : b.$$

III. Se toma OB (fig. 28) igual al divisor b y sobre esta línea se lleva $OE=1$. Perpendicularmente á OB, se toma AB igual al dividendo a, se une OA y por el punto E se traza una perpendicular á OE; así se determina el cociente $EC=x$, pues se tiene

$$EC : OE = AB : OB \text{ ó } x : 1 = a : b. \quad (1)$$

(1) Véase para otros detalles sobre las reglas de tres, la investigacion de denominadores comunes, etc., en la ya citada obra de *Eggers*.

§ 24

Multiplicacion y division combinadas.

Cuando hay que multiplicar un número a por una fraccion $\frac{b}{c}$, la operacion implica una multiplicacion de a por b, luego una division de $a \cdot b$ por c. Como la incógnita x que tiene por espresion $x = \frac{ab}{c}$, puede ponerse bajo la forma $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$, vemos que las dos operaciones pueden hacerse simultáneamente y reducirse á un trazado de multiplicacion, en el cual, en lugar de la unidad OE se introduce el denominador c. La línea a se halla entonces multiplicada por la relacion $\frac{b}{c}$ en lugar de serlo por $\frac{b}{1}$. Los ejemplos siguientes bastarán para indicar la marcha que se sigue.

I. Para multiplicar una longitud a por la fraccion $\frac{b}{c}$ se hace (fig. 29) $OA=a$, y sobre esta línea $OE=c$: se levanta en E una perpendicular á OE hasta su encuentro en B con el arco de círculo de radio $OB=b$; por el punto A se traza una paralela á EB y la longitud OC es el producto buscado, pues se tiene:

$$OC : OB = OA : OE \text{ ó } x : b = a : c$$

es decir, $x = \frac{ab}{c}$.

II. Si se desea obtener el producto $\frac{ab}{2}$, se toma (figura 30) $OA=a$, $OE=2$ veces la unidad, $EB=b$ y se une OB; la línea AC es el producto buscado x, pues $AC : OA = BE : OE$ ó $x = \frac{a \times b}{2}$.

El procedimiento que acabamos de indicar, y que puede aplicarse á todos los modos de multiplicacion del § 22, es muy cómodo, como veremos, para el cálculo de las superficies.

§ 25

Superficie del triángulo.

Siendo la superficie del triángulo la mitad del producto de su base por su altura, el cálculo gráfico de esta superficie por el método del párrafo anterior es muy fácil.

I. Figura 31. Despues de haber elegido por base del triángulo OAB, que queremos medir, uno de los lados $OB=b$, y sin trazar la altura $AA'=h$ se lleva sobre OB la recta OE igual á dos unidades (centímetro, decímetro, etc.). Se unen (ó se suponen unidos) los puntos A y E y por el punto B se traza una paralela á EA hasta su encuentro en C con la prolongacion de OA. La perpendicular CC', bajada del punto C es el producto $\frac{hb}{2}$, es decir, la superficie f buscada. (Véase § 22, VII, y § 24, II).

II. Figura 32. En el estremo de la base $OB=b$, se toma sobre la perpendicular en O, la longitud $OE=2$ unidades, se baja la altura $AA'=h$ y se traza por el punto A una paralela á EB; esta recta determina sobre OB el segmento $A'C$ que representa el producto $f = \frac{bh}{2}$ (Véase § 22, VIII, y § 24, II).

III. Se prolonga la base BC y el lado BA del triángulo ABC (fig. 33), hasta que estas rectas comprendan entre sí una longitud $OE=2$ unidades, medida paralelamente á la altura $A'A=h$. Se une EC y se traza por el punto A una paralela á EC que determina en la base el segmento BD; este segmento es el producto

$$f = \frac{bh}{2} \text{ (Véase § 22, IX y § 24, II).}$$

IV. Desde el vértice O del triángulo AOB (fig. 34) y con una abertura de compás $OE=2$ unidades, se describe un arco de círculo que corta en E el lado AB; se construye la antiproyeccion de AB sobre OE trazando BC paralela á OE y AC perpendicular á BC. La recta AC es el producto de la base b por la mitad de la altura $h=OO'$, es decir, representa la superficie del triángulo (V. § 22, X, y § 24, II).

Si la unidad adoptada es el decímetro, la medida de f en decímetros daria, en decímetros cuadrados, la superficie del triángulo; así, si $f=72$ milímetros, siendo la unidad el decímetro, la superficie será $0'72$ decímetros cuadrados ó $0'72 \times 10000 = 7200$ milímetros cuadrados.

§ 26

Superficie de los cuadriláteros.

En estos polígonos la superficie puede determinarse directamente (para el paralelógramo, por ejemplo), ó bien descomponiéndolos en triángulos que se calculan

separadamente; ó se puede en fin trasformar el polígono en un triángulo de superficie equivalente.

I. Medida del paralelógramo $ABCO$ (fig. 35). Eligiendo el lado OA por base, se toma OE=á la unidad, se levanta la perpendicular $EE'=h$, y (como en el párrafo 22, IV) se traza OE' hasta su encuentro en D con la perpendicular trazada por el punto A. La longitud AD da la medida de la superficie $f=bh$.

II. Si se traza en el cuadrilátero $ABCO$ (fig. 36) la recta CA' paralela á la diagonal OB, hasta su encuentro con la base AB, se forma un triángulo $A'OA$ de igual superficie que el cuadrilátero, pues los dos triángulos OBC y OBA' son equivalentes. Sentado esto y siguiendo el método IV, § 25, podemos tomar $OE=2$, y la recta AD, antiproyeccion de AA' sobre OE dará la medida de la superficie buscada f.

III. Figura 37. La diagonal $AC=b$ divide la superficie $ABCO$ en dos triángulos cuya altura total es OO' es decir, la antiproyeccion de OB sobre AC. La multiplicacion de OO' por $\frac{b}{2}$ puede efectuarse inmediatamente, segun los métodos XI, § 22, y II, § 24. Se traza $O'BE$ paralela á AC, se toma $OE=2$, y se tira AD paralela á OE; la recta ED normal á AD, es el producto buscado f, es decir, la superficie del cuadrilátero.

IV. Figura 38. El cuadrilátero $ABCO$ puede reemplazarse por un triángulo cuya altura sea 2 y la base $\frac{bh}{2}$.

Si describimos desde el punto O como centro un círculo de radio $OE=2$; trazamos una tangente á este círculo, que pase por el vértice B opuesto á O; y si en fin, por los otros dos vértices A y C se trazan paralelas á la diagonal OB, estas rectas determinan en la tangente un segmento $A'C'$ que no es más que la base del triángulo $A'OC'$, equivalente al cuadrilátero $ABCO$ y que tiene por valor f, esto es, la superficie misma del cuadrilátero.

Los ejemplos que acabamos de citar bastan para demostrar que siempre será posible resolver un problema cualquiera del mismo género con alguno de estos métodos.

§ 27

Superficie de los polígonos.

Para medir los polígonos se empieza por trasformarlos en triángulos equivalentes de la manera siguiente:

Por uno de los vértices O del polígono $OABCDE$ (figura 39), se tira la diagonal OB que va desde el punto O al vértice más próximo; por el vértice intermedio A, se traza la recta AB' paralela á OB, se prolonga el tercer lado CB hasta su encuentro en B' con la línea AB', y se une OB'; como los dos triángulos OBB' y OBA son equivalentes, el polígono $OB'CDE$ tiene la misma superficie que el primitivo, pero un lado ménos. Repitiendo la misma construccion para el vértice C, trazando OC, luego $B'C'$ paralela á OC y así sucesivamente, acabaremos por llegar á un triángulo final $OC'D'$, equivalente al polígono dado, y cuya superficie sabemos ya medir.

No hay necesidad de trazar las rectas ausiliares OB', etcétera. Este método se presta especialmente á la medida de los perfiles de los terraplenes de ferro-carriles ó carreteras.

Los polígonos regulares como el exágono (fig. 40), solo necesitan trasformarse en una de sus mitades; se miden entonces como paralelógramos.

§ 28

Potencias de las líneas.

Elevar una cantidad a á la n.ª potencia es buscar una cantidad x que contenga tantas veces la unidad de medida de a, como indique la n.ª potencia de a. Si el número n es entero, sea positivo ó negativo, el método de cálculo gráfico se reduce inmediatamente á la multiplicacion ó division gráficas, puesto que se trata de multiplicar ó dividir un cierto número de veces por a. Por otra parte, el trazado puede hacerse de muchas maneras, segun el tipo de construccion que se adopte de los anteriormente indicados.

I. (Véase I, § 22.) Se toma OE (figura 41), igual á la unidad y en la perpendicular en E se determina, con un arco de círculo de radio $OA_1=a$, el punto A_1. Sobre OE se lleva igualmente $OB_1=a$, sobre OB_1 se levanta en B_1 una perpendicular que corta en A_2 la prolongacion de OA_1; tenemos (I, § 22) $OA_2=a^2$. Rebatiendo esta longitud en OB_2 y trazando la perpendicular B_2A_3, se obtiene en OA_3 el valor de a^3, lo mismo que en OA_4 el valor de a^4, en OA_5 el valor de a^5, etcétera. De una manera general, correspondiendo OB_m á una potencia de a, la m^a por ejemplo, la perpendicular levantada en B_m determinará sobre OA_1 el segmento OA_{m+1}, que será la potencia $(m+1)$ de a. Inversamente, dada una potencia cualquiera de a, en OA_{m+1}, la proyeccion OB_m de esta recta sobre OE representa el valor de a elevado á la potencia de una unidad mé-

nos elevada que la que corresponde á OA_{m+1} (V. las reglas de la division I, § 23.)

De aquí se deduce que la perpendicular bajada desde A_1 determina el segmento $OE=a^0$ ó la unidad, lo que por otra parte es evidente segun la construccion del trazado. Si rebatimos OE en OA_0 y bajamos la perpendicular A_0B_{-1}, OB_{-1} medirá a^{-1} ó $\frac{1}{a}$, es decir, el valor recíproco de OA_1. Continuando de la misma manera, se obtendrá en OB_{-2} el valor de $\frac{1}{a^2}$, en OB_{-3} el de $\frac{1}{a^3}$, etc.

II. Combinando las reglas de multiplicacion I y III, § 22, se obtiene el siguiente trazado para las potencias. Tómese (fig. 42) $OE=1$ $OA_1=a$, levántese la perpendicular EA_1 y A_1 una segunda perpendicular en OA_1. Esta línea corta á OE en A_2 y se tiene $OA_2=a^2$. Trazando en A_2 la perpendicular A_2A_3 tendremos $OA_3=a^3$. Una nueva perpendicular en OA_1, dará, en OA_4 el valor de a^4, y así sucesivamente, dando las rectas medidas sobre OE las potencias pares positivas y sobre OA_1 las impares tambien positivas. Marchando hácia atrás, á partir de E se halla OA_{-1}, la recíproca de a ó $\frac{1}{a}$, en OA_{-2} el valor de $\frac{1}{a^2}$, etc., y espresando las líneas contadas en OA_1 las potencias negativas impares y las contadas sobre OE las potencias negativas pares.

Los dos métodos que anteceden, suponen $a>1$; los tres que siguen, se refieren al caso en que $a<1$.

III. Despues de haber tomado (fig. 43) $OE=1$, se lleva á OA la longitud a, de modo que AE sea perpendicular á OA; se trazan entonces las perpendiculares sucesivas $E1$, 1 2, 2 3, 3 4, etc., y tendremos $O1=\frac{1}{a}$, $O2=\frac{1}{a^2}$, $O3=\frac{1}{a^3}$... Repitiendo la misma construccion á la izquierda de E se obtienen los valores $O-2=a^2$, $O-3=a^3$, $O-4=a^4$.... Las potencias positivas de a se hallan, pues, medidas á la izquierda y las negativas á la derecha. (Véase III, § 22, y el método II arriba indicado).

Las rectas de construccion que van de un eje al otro formando línea angulosa, crecen como las potencias, siguiendo la misma ley, y se pueden utilizar del modo siguiente:

IV. Se toma (fig. 44) $OE=1$, $OA=a$ y el ángulo $OAE=90°$; se traza OB perpendicular á OE y se prolonga EA no solamente hasta su interseccion en B con OB, sino tambien en sentido opuesto (Véase el trazado de puntos de la fig. 43). Se traza enseguida como anteriormente, en ambos sentidos, la série de perpendiculares sucesivas y se obtienen los valores siguientes: $OA=a$, $A2=a^2$, 2 $3=a^3$, y así sucesivamente. Por otra parte tenemos: $OE=a^0$, $E-1=a^{-1}=\frac{1}{a}$, $-1-2=\frac{1}{a^2}$, $-2--3=\frac{1}{a^3}$, etc.

V. Sobre $OE=1$, como diámetro, se describe un semicírculo (fig. 45); se traza la cuerda $O1=a$, y desde el punto 1 se baja sobre OE la perpendicular 1 2, y se tiene $O2=a^2$ (Véase III, § 28). Descríbase un arco de círculo de radio $O2$, desde el punto O, el cual cortará la primera circunferencia en el punto 2, y desde este punto se baja la perpendicular 2 4 á OE; así se tiene $O4=a^4$, y continuando del mismo modo, se obtienen sucesivamente $O8=a^8$ $O16=a^{16}$. El punto de interseccion 3 de la perpendicular 2 4 con el radio $O1$ se halla á una distancia del punto O igual á a^3; en efecto, tenemos: $O3 : O1 = O4 : O2$ ó $O3 : a=a^4 : a^2$, es decir, $O3=a^3$. De manera que todas las perpendiculares á OE bajadas desde un punto de potencia de la circunferencia, cortan el radio vector anterior en un punto cuya distancia al O está representada por una potencia de a, cuyo índice es inferior en una unidad al que corresponde al punto de la circunferencia. Podemos, pues, obtener por medio de perpendiculares y de intersecciones de líneas las potencias de a comprendidas entre la primera, segunda, cuarta, octava, etc. Los puntos de interseccion mencionados se hallan situados todos en un nuevo círculo que pasa por O y tiene por diámetro a^2, etc. Vemos que el problema del trazado de la série de las potencias en el caso de $a<1$, se puede resolver de muchas maneras.

VI. El siguiente método puede aplicarse á valores cualesquiera de a mayores ó menores que la unidad. Tómese sobre el eje XOX (fig. 46), $OE=1$, levántese en O una perpendicular YOY, sobre la cual se lleva $OA=a$, y trácese (ó supóngase trazada) la recta EA. Si entonces se traza $A2$ normal á EA, la longitud $O2$, medida en el eje de las X, da el valor de a^2. Del mismo modo, trazando 2 3 perpendicular á $A2$, el segmento $O3$, sobre el eje de las Y da a^3; y continuando así, se halla en el eje de las X el valor de a^4, etc. En general se obtiene sobre el eje de las X las potencias pares y sobre el eje de las Y las impares de a. Siguiendo este mismo trazado en sentido inverso se disminuye el esponente en una unidad al pasar de un eje á otro. Así, yendo de A hácia E se halla en EO el valor $a^0=1$, luego en $O-1$ el valor $\frac{1}{a}$; lo mismo para $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, etc. (Véase VI, párrafo 22). Este procedimiento es de uso muy cómo-

do cuando se trata de elevar á una potencia cualquiera ciertas líneas figuradas de antemano en un dibujo.

§ 29

Potencias de las funciones trigonométricas.

Los métodos que acabamos de esponer para el cálculo de las potencias de las rectas, se aplican de una manera tan elegante como rápida, á las potencias de las funciones trigonométricas.

I. *Potencias de los cosenos y senos.*—Tómese (figura 47) $OE=1$, fórmese el ángulo EOA igual al ángulo φ, cuyas líneas trigonométricas deben elevarse á ciertas potencias, y bájese EA perpendicular á OA. Si ahora trazamos las perpendiculares sucesivas $A2$, 2 3, 3 4, etc., y luego E—1, —1—2, etc., tendremos:

$$OA=\cos\varphi,\ O2=\cos^2\varphi,\ O3=\cos^3\varphi,\ O4=\cos^4\varphi\ldots$$

$$O-1=\frac{1}{\cos\varphi},\ O-2=\frac{1}{\cos^2\varphi}\ \ldots$$

Si por otra parte trazamos las perpendiculares sucesivas

$$AII, II\text{-}III, III\text{-}IV\ldots, O-I, -I-II, -II-III\ldots$$

tendremos:

$$AE=\operatorname{sen}\varphi,\ AII=\operatorname{sen}^2\varphi,\ II\text{-}III=\operatorname{sen}^3\varphi,$$
$$III\text{-}IV=\operatorname{sen}^4\varphi\ldots,$$

$$O-1=\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi},\ -I-II=\frac{1}{\operatorname{sen}^2\varphi},\ II-III=\frac{1}{\operatorname{sen}^3\varphi}\ldots$$

II. *Potencias de las tangentes y cotangentes.*—Tómese (fig. 48) $EO=1$ y $OEA=\varphi$. Luego, á partir del punto A y en ambos sentidos, se trazan las perpendiculares sucesivas, como en el caso N.° VI, § 28; y se obtendrán los valores siguientes: $OA=\text{tang.}\,\varphi$, $O2=\text{tang.}^2\varphi$, $O3=\text{tang.}^3\varphi\ldots$, $OE=1=\text{tang.}^0\varphi$, $O-1=\text{cotang.}\,\varphi$, $O-2=\text{cotang.}^2\varphi\ldots$

El dibujo hace visible la convergencia ó divergencia de la série formada por las potencias sucesivas.

§ 30

Estraccion de raices.

La estraccion de la raiz cuadrada se hace de varias maneras muy sencillas por los procedimientos gráficos, considerando $\sqrt{a}$ como una media proporcional entre a y la unidad. Indicaremos aquí tres de los métodos que pueden seguirse.

I. Tómese (fig. 49) $OE=1$, $OA=a$; descríbase sobre OA un semicírculo y levántese en E una perpendicular que corte la circunferencia en C; se une OC, y esta recta da el valor buscado $x=\sqrt{a}$ (Véase § 28). Este método supone $a>1$, y el siguiente se aplica al caso en que $a<1$.

II. Tómese (fig. 50) $OE=1$, $OA=a$; descríbase un semicírculo sobre OE, levántese la perpendicular en A, y únase al punto O su interseccion con la circunferencia, lo que da $OC=x=\sqrt{a}$.

III. Tómese (fig. 51) $OE=1$, y en la prolongacion de OE, $EA=a$; sobre OA se describe una semicircunferencia que encontrará en el punto C á la perpendicular levantada en el punto E; EC será el valor buscado $x=\sqrt{a}$.

La estraccion de la raiz cuarta puede efectuarse por dos estracciones sucesivas de raices cuadradas y se puede seguir el mismo sistema para todas las raices cuyo índice es una potencia de 2.—La estraccion de las raices cúbicas, quintas, etc., es más complicada. *Culmann*, en su obra ya citada, se vale de la espiral logarítmica; *Schlesinger* (véase más arriba) utiliza una série de curvas trazadas segun principios análogos á los del § 28.—En esas obras se indica, además, una série de métodos diferentes más ó ménos complicados. Por nuestra parte, no insistiremos más en este asunto, en atencion á que en los problemas que nos proponemos resolver, no necesitamos hacer ninguna aplicacion de esos métodos de estraccion de raices de grado superior.

§ 31

Adicion y sustraccion de fuerzas.

En las operaciones de cálculo gráfico que acabamos de examinar, solo hemos tenido en cuenta la magnitud absoluta ó medida de las líneas, sin preocuparnos de su direccion en el plano ó en el espacio, ni de los puntos por donde podian pasar; en otros términos, para nada hemos tenido en cuenta la posicion y direccion de dichas líneas; y como estos últimos elementos intervienen necesariamente en el estudio del equilibrio de las fuerzas, vamos á considerar bajo este punto de vista un nuevo órden de problemas, que constituye verdaderamente la *Grafostática*.

Cuando varias fuerzas se aplican á un punto material, su resultante se determina sumando las proyecciones, sobre ejes coordinados, de las rectas que representan á dichas fuerzas. Geométricamente podemos trasladar estas fuerzas (estén ó nó en un mismo plano) de

modo que se toquen sucesivamente por sus estremos, conservando su magnitud y direccion, y construir así un polígono tal, que un punto que siga la direccion de las flechas puede recorrerlo todo sin pasar dos veces por un mismo lado. Si varias fuerzas 1, 2, 3..., 6 (fig. 52) se equilibran alrededor del punto *O*, la suma de sus proyecciones es nula y las rectas de 1 á 6 que representan estas fuerzas, forman un polígono cerrado (figura 53), llamado *Polígono de las fuerzas*.

El órden seguido en la colocacion de estas fuerzas es indiferente. Así, por ejemplo, en la fig. 53 se puede seguir el trazado 1, 2, 3, 4, 5, 6, ó el 1, 3, 4, 6, 5, 2, sin modificar el resultado. La sustraccion de fuerzas es el problema inverso de la adicion. Basta, por consiguiente, cambiar la direccion de las flechas de las fuerzas que se trata de restar, y sumarlas algebraicamente con las demás. La grafostática solo se aplica cómodamente á los casos en que el polígono de las fuerzas se halla en un mismo plano; pero los demás casos pueden reducirse al anterior por medio de descomposiciones adecuadas de fuerzas.

La multiplicacion y division de fuerzas puede efectuarse tambien de un modo gráfico, valiéndose de métodos análogos á los empleados en las operaciones con las rectas, pero como no tendremos ocasion de aplicar estos métodos, creemos inútil darlos á conocer.

§ 32

Resultante de un sistema de fuerzas.

Hasta aquí hemos supuesto que las fuerzas consideradas se mantenian mútuamente en equilibrio, de manera que el polígono formado por las rectas que representan estas fuerzas, quedaba cerrado.

Cuando un sistema de fuerzas de 1 á 5, por ejemplo (fig. 54), no da un polígono cerrado, estas fuerzas no se equilibran en su punto de aplicacion comun *O*. Para que el equilibrio exista, es preciso aplicar á este punto *O* una nueva fuerza 6, que se halla determinada en magnitud y direccion, por la recta 5 6 que cierra el polígono. Esta fuerza que equilibra á las dadas, es igual y de sentido contrario á la resultante *R*, y debe representarse por una flecha dirigida en sentido opuesto. De aquí resulta que en un polígono de fuerzas cerrado, cada una de las fuerzas, tomada en sentido contrario, representa la resultante de las demás fuerzas. En un polígono de fuerzas abierto la línea que lo cierra tomada en sentido contrario del movimiento, representa la resultante de las fuerzas. Así en la figura 54, *A2* es á la vez la resultante de 1 y 2 y de 3, 4, 5 y 6. Del mismo modo, 1 3 es la resultante de 2 y 3, así como de 4, 5, 6 y 1, etc. (1)

§ 33

Fuerzas que obran sobre un sistema material en un plano.—Polígono funicular.

Cuando varias fuerzas aplicadas á un cuerpo sólido se equilibran y no se encuentran todas en un mismo punto (lo que sucede frecuentemente, porque *n* fuerzas pueden tener $\frac{n(n-1)}{2}$ puntos de interseccion), el sistema anterior de representacion no es inmediatamente aplicable. No obstante, ese caso más complicado puede reducirse siempre al caso sencillo. En efecto, suponiendo que todas las fuerzas obren en un mismo plano, imaginemos reemplazado el cuerpo por un sistema de varillas rígidas que formen un polígono cuyos vértices estén situados en diferentes rectas que representen estas fuerzas; imaginemos además que estas varillas, capaces de resistir esfuerzos de traccion y compresion que obren en la direccion de sus ejes, tengan direcciones y posiciones tales que, cada una de las fuerzas parciales dadas se equilibre con las dos fuerzas que, dirigidas segun los lados del polígono concurran al mismo punto que ella,

el polígono así obtenido (fig. 55) se llama *polígono funicular* ó *articulado;* en las bóvedas constituye la llamada *curva de presiones*, hallándose en general los elementos de esta línea sometidos á esfuerzos de compresion.

Los vértices *K* de un polígono funicular son las articulaciones. Segun lo dicho, un polígono de este género puede servir para determinar las fuerzas desconocidas que obran en el cuerpo que representa, puesto que en cada articulacion hay equilibrio entre la fuerza esterior y las dos tensiones dirigidas segun los lados correspondientes: así, por ejemplo, si consideramos la articulacion K_2, las tensiones $S_{1.2}$ y $S_{2.3}$ dan por resultante una fuerza igual en magnitud y direccion á la fuerza P_2, pero de sentido contrario.

Los esfuerzos de traccion ó compresion que se ejercen en la direccion de los lados del polígono articulado, constituyen lo que puede llamarse *fuerzas interiores*.

---

(1) Las propiedades que acabamos de enunciar, son igualmente ciertas para todas las magnitudes en las cuales hay que tener en cuenta la direccion: así, pues, son aplicables á las velocidades reales ó virtuales, á las trayectorias que pasan por puntos determinados, á las líneas que, en una bóveda, pasan por los centros de gravedad de la clave, etc.

Cuando el polígono funicular es conocido, se pueden aplicar los procedimientos gráficos anteriores á la determinacion de las magnitudes de las fuerzas. Para determinar el polígono funicular correspondiente á un caso dado, tenemos que buscar las condiciones de equilibrio:

1.° de las fuerzas esteriores,

2.° de las fuerzas interiores,

suponiendo que en cada articulacion las fuerzas de la primera especie se equilibren con las correspondientes de la segunda.

§ 34

Equilibrio de las fuerzas esteriores en el polígono funicular.

Si tomamos la resultante de las fuerzas P_1 y P_2, la trasportamos á un punto conveniente de su direccion para componerla con P_3, y hacemos lo propio en esta nueva resultante y P_4, etc., es preciso, en el caso de que exista equilibrio, que la resultante obtenida con la antepenúltima fuerza P_{n-1} sea igual y de sentido contrario á la última fuerza P_n. Este modo de composicion conduce siempre al mismo resultado mientras la direccion y magnitud de las fuerzas permanezcan invariables. Podemos suponer, pues, nulas las distancias entre los puntos de interseccion, sin alterar el equilibrio de las fuerzas esteriores. Pero entonces se puede efectuar su composicion y construir el polígono de las fuerzas, exactamente como en el caso antes examinado en que todas las fuerzas concurrian á un mismo punto. Este polígono sirve igualmente para determinar las condiciones de equilibrio de las fuerzas que obran en puntos materiales distintos. El polígono queda cerrado si hay equilibrio; en el caso contrario da en magnitud y direccion la resultante total, y por consiguiente la fuerza que conviene introducir para llegar al equilibrio. El trazado del polígono de las fuerzas permite, pues, determinar dos incógnitas, la direccion y la magnitud de una fuerza, ó tambien las direcciones de dos fuerzas cuyas magnitudes sean conocidas; y es evidente que el mismo trazado puede dar la direccion de una fuerza y la magnitud (absoluta) de otra fuerza suponiendo conocidas la magnitud de la primera y la direccion de la segunda.—En estos casos, el último de los cuales pocas veces se presenta en las aplicaciones, podemos llegar á la solucion que buscamos por medio de los siguientes métodos.

I. *Determinar las magnitudes de las dos fuerzas cuando se conocen sus direcciones.* Para los puntos 4 y A del polígono (fig. 56), se trazan las dos direcciones dadas 4 5′ y A 6′ que se encuentran en 5; las longitudes 4 5 y A 5 representan las fuerzas buscadas 5 y 6. Si las direcciones pueden permutarse, el problema tiene dos soluciones: la segunda está representada (fig. 56) por las rectas $A\,V\,I'$ y 4 V' que dan para las fuerzas $A\,V$ y 4 V.

II. *Determinar las direcciones de las dos fuerzas conociendo sus magnitudes.* Desde los puntos 4 y A (figura 57) y con las magnitudes dadas de las fuerzas 5 y 6 se describen arcos de círculo que al cortarse determinen las direcciones buscadas. Como en general se cortan en dos puntos, el problema tiene dos soluciones, $4 \cdot 5$ con $5 \cdot A$ y $4 \cdot V$ con $V \cdot A$.

III. *Se conoce la magnitud de una de las fuerzas y la direccion de la otra.* Por el punto 4 (fig. 58) se traza la direccion dada 4 5, y desde el punto A como centro, con un radio igual á la magnitud de la fuerza 6, que se nos da, descríbese un arco de círculo que corta generalmente la primera línea en dos puntos 5 y V: hay, pues, tambien dos soluciones en este caso. Cuando los datos son incompatibles la circunferencia no da ningun punto de interseccion.

Los siguientes ejemplos enseñan como se aplican en las práctica estos principios tan sencillos.

Primer ejemplo. *Una grua ABC (fig. 59) está cargada en A por un peso L; la parte B es cilíndrica y está retenida en un soporte de galetes; la parte C reposa en una crapodina ó rangua. El cuerpo de la grua tiene un peso G, y su centro de gravedad está en S. Nos proponemos determinar las fuerzas P_1 y P_2 en B y C. Se conocen las direcciones de las fuerzas L y G que son verticales; la direccion de P_1 es horizontal, despreciando los frotamientos que se producen en B. Si imaginamos ahora que por un procedimiento adecuado (véase* § 39) *se haya determinado la posicion TQ de la resultante $Q=G+L$ de las fuerzas G y L* (1); *el punto de interseccion O de esta recta con la horizontal P_1 debe petenecer á la direccion de P_2. Esta fuerza debe pasar tambien por el centro del espigon en C, admitiendo como hasta aquí que la crapodina rodea el espigon. La direccion de la fuerza P_2 es, pues, CO, y por medio del polígono de las fuerzas (fig. 60) podemos determinar las magnitudes de P_1 y P_2. Basta para ello llevar sobre una vertical GP_2 la fuerza $Q=G+L$, trazar GP_1 paralela á OP_1 y P_2P_1 paralela á CO; y se obtienen*

(1) En las gruas ordinarias de los muelles, G, que varia especialmente con el tamaño del vuelo BA está comprendido entre $^1/_8$ y $^1/_4$ de la carga límite de la grua.

las fuerzas P_1 y P_2. La descomposicion de P_2 da enseguida las dos fuerzas horizontal y vertical, á las cuales se halla sometido el espigon C.

2.° EJEMPLO. *Una grua, cargada como anteriormente (fig. 61), se apoya en B sobre un espigon cilíndrico y está sostenido en C por un galete cónico, que rueda sobre un tronco de cono. Los dos conos tienen su vértice comun en medio del gorron B. Se conoce como antes, la resultante $Q=L+G$, así como la direccion de la presion P_1 que se ejerce en C normalmente á la superficie del cono; y se conoce, por consiguiente, el punto de interseccion O de las fuerzas P_1 y Q: y este punto debe pertenecer á la direccion de la reaccion P_2 del gorron. Podemos, pues, construir inmediatamente el polígono de las fuerzas (fig. 62), trazando una vertical igual á Q y paralelas á las fuerzas P_1 y P_2. La componente vertical de P_2 es aquí menor que la carga Q, mientras que en el primer ejemplo era igual. Esta diferencia consiste en que el cono sostiene una parte de la carga.*

3.er EJEMPLO. *En una grua del mismo género (figura 63) el vértice comun de dos conos se halla en D debajo del centro del gorron B. Se determina el punto O levantando CO perpendicular á DC y se construye el polígono de las fuerzas (fig. 64). En la hipótesis hecha sobre la posicion del punto D la fuerza P_2 que obra sobre el gorron, actua oblícuamente y hácia abajo, mientras que en el caso anterior obraba hácia arriba. Por esto debe estar provisto el gorron en B de un espaldon asaz resistente en el estremo superior* (1).

Si queremos proceder con más rigor en el estudio de una grua, debemos, como indica Culmann, admitir que la direccion de la resistencia en el sosten del galete (C en las figuras 61 y 63, B en la figura 59) es variable entre los límites del ángulo de frotamiento, y tomar la solucion que dé mayor carga en el gorron.

4.° EJEMPLO. *Tres fuerzas 70, 50 y 80^k obran en un plano, formando ángulos indicados en la figura 65, sobre un cuerpo AB, de modo que su resultante pase por el punto A. En este punto A obran otras dos fuerzas, una de 95^k y otra de 60^k que deben equilibrar á las anteriores: ¿qué ángulos deben formar con las primeras fuerzas?*

Despues de haber llevado de C á D (fig. 66) las fuerzas 70, 50 y 80^k, descríbanse desde los puntos C y D dos arcos de círculo con los radios 60 y 95 y obtendremos los puntos de interseccion E y E' F y F', lo cual da, para las direcciones de las fuerzas, DE y EC (correspondientes á F'C y DF') ó DF y FC (correspondientes á E'C y DE'). Ambas soluciones están indicadas en la figura 65.

5.° EJEMPLO. *Se quiere levantar un obelisco sobre su zócalo, por rotacion alrededor de una de las aristas A de su base (fig. 67), estando aplicada la fuerza motora en el estremo de arriba en una direccion dada. ¿En qué direccion debe obrar en A una fuerza de intensidad determinada para que el zócalo esté tan solo sometido á una presion vertical?*

Prolónguese la recta que pasa por el centro de gravedad S del obelisco y que representa el peso Q que hay que elevar, hasta su interseccion en O con la fuerza P_1; para que haya equilibrio es preciso que OA sea la direccion de la resultante de las fuerzas Q y P_1. Descompóngase enseguida esta resultante en dos fuerzas, una P_2 dirigida verticalmente, otra P_3 de magnitud dada.

Despues de haber llevado Q y P_1 (fig. 68) al trazado CQP_1, se tira por el punto P_1 una vertical P_1P_2, y desde el punto O, con una abertura de compás igual á P_3, se describe un círculo que, si el radio es suficiente, corta á P_1P_2 en dos puntos D y D'. El problema tiene dos soluciones, segun se tome para P_3 la magnitud P_1D y para P_3 la direccion DC, ó que se haga $P_3=P_1D'$, recibiendo entonces P_3 la direccion D'C. Es preciso, además, para que el problema sea posible, que P_3 sea por lo ménos igual á la perpendicular bajada desde C sobre P_1P_2. En la figura 67 se hallan las dos soluciones en AP_3 y AP'_3.—Pocas veces se presentan en la práctica problemas análogos á los de este último ejemplo, como hemos observado anteriormente.

§ 35

Equilibrio de las fuerzas interiores en el polígono funicular.

Con el nombre de fuerzas interiores designamos, como se ha dicho ya, las fuerzas que obran por traccion ó compresion, en la direccion de los lados del polígono funicular, y que están representadas en la figura 69 por $S_{1\cdot2}$, $S_{2\cdot3}$, etc. Las magnitudes de estas fuerzas deben ser tales que, en todas las articulaciones K_1, K_2, K_3, etc., haya equilibrio entre las dos fuerzas interiores que van á parar á ella y la fuerza esterior correspondiente. Por consiguiente, dos de estas fuerzas, $S_{1\cdot2}$, $S_{2\cdot3}$, por ejemplo, pueden determinarse por medio de su resultante P_2 conociendo sus direcciones, ó sus intensidades, ó la direccion de una y la intensidad de otra. Llevemos con este objeto al polígono de las fuer-

(1) Esta precaucion no se tiene en cuenta en gran número de modelos de gruas. El autor ha tenido ocasion de observar que una grua de 50 toneladas volcó bajo una carga de 20.000 kilógramos, porque el cojinete acabó por salirse del gorron que sólo se habia dispuesto para hacer de soporte.

zas P_1, P_2, P_3.... que, segun lo que antecede, debe estar cerrado á partir de los estremos 1 y 2 de P_2 (fig. 70), las direcciones de las fuerzas $S_{1\cdot 2}$, $S_{2\cdot 3}$, representadas en la figura 69. Estas dos rectas se cortan en O; $O1$ y $O2$ representan en magnitud y direccion las tensiones $S_{1\cdot 2}$ y $S_{2\cdot 3}$. Si pasamos ahora á K_3, de las tres fuerzas P_3, $S_{2\cdot 3}$ y $S_{3\cdot 4}$ que se equilibran en este punto, las dos primeras son conocidas; la tercera $S_{3\cdot 4}$ se obtiene, por tanto, uniendo el punto de interseccion ó polo O con el estremo 3 de la fuerza P_3 (fig. 70). Continuando así, las rectas trazadas desde el polo á los vértices del polígono de las fuerzas darán en magnitud y direccion las fuerzas interiores del polígono funicular. Vemos que para las fuerzas esteriores dadas basta conocer las direcciones de dos fuerzas interiores concurrentes á un mismo vértice para determinar todas las demás. Conociendo así las fuerzas interiores se podrá trazar inmediatamente el polígono funicular ó articulado. Para esto, á partir de un vértice cualquiera, se trazaran los lados del polígono funicular, paralelamente á los diversos radios polares del polígono de las fuerzas. En cuanto á la longitud de los lados se hallará determinada por las posiciones que deben ocupar en el plano las rectas que representan en magnitud y direccion las fuerzas esteriores. El polígono funicular da tambien entonces la posicion de todas las fuerzas interiores.

El polígono funicular tiene diferentes formas segun la posicion del punto elejido como orígen en la direccion de una de las fuerzas esteriores. En la figura 69, por ejemplo, están representadas por puntos otras dos formas de polígonos funiculares equivalentes al representado de trazo lleno. Los lados de estos nuevos polígonos son respectivamente paralelos á los del primero. Por lo demás, el problema que nos hemos propuesto (unir las fuerzas esteriores por un polígono articulado) tiene una segunda solucion, en virtud de la observacion hecha en el § 34, problema I.

Si en la figura 72 llevamos las direcciones de $S_{1\cdot 2}$ y $S_{2\cdot 3}$ haciendo partir cada una de ellas del estremo de la fuerza P_3 (1, 2) que en la figura 70 servia de punto de partida á la otra, se obtiene un nuevo polígono funicular (fig. 71), cuya forma difiere esencialmente de la anterior, como indica la figura, en la que se ha reproducido el primer polígono al lado del segundo. A escepcion de las de los dos primeros lados, que son las mismas en ambos polígonos, las direcciones de los demás lados son esencialmente distintas. Por donde se vé que dadas varias fuerzas, se puede construir el polígono articulado de infinitas maneras.

El polígono funicular, combinado con el polígono de las fuerzas, constituye lo que se llama plano gráfico de las fuerzas. En ciertos casos basta una sola de dichas figuras para resolver el problema propuesto (Véase § 48).

§ 36

Resultante de un sistema de fuerzas dispuestas de una manera cualquiera en un plano.

Si en un polígono funicular (fig. 73) suponemos cortados dos de sus lados K_1 K_6 y K_4 K_5, por ejemplo; y aplicadas en los puntos de seccion, en ambos sentidos, fuerzas de la misma magnitud que las que obraban en la direccion de estos lados, el equilibrio no quedará destruido. Pero entonces vemos inmediatamente que la resultante de las fuerzas $S_{1\cdot 6}$ y $S_{4\cdot 5}$ que ahora son fuerzas esteriores, equilibra las fuerzas que obran en el polígono á derecha é izquierda. La posicion de esta resultante se obtiene prolongando los lados hasta su interseccion M, punto por el cual debe pasar. La magnitud y direccion de esta resultante están dadas en el polígono de las fuerzas (fig. 74) por la diagonal 4 . 6 que une los estremos de las dos fuerzas $S_{1\cdot 6}=06$ y $S_{4\cdot 5}=04$. De modo que esta diagonal representa aquí por un lado, la resultante de las fuerzas P_5 y P_6, y por otro, la de las fuerzas P_1, P_2, P_3 y P_4. En general, *el punto de interseccion obtenido prolongando dos de los lados del polígono pertenece á la resultante de todas las fuerzas esteriores aplicadas entre estos lados; y la magnitud y direccion de esta resultante están dadas por el polígono de las fuerzas.*

Este teorema tiene frecuentes aplicaciones, como luego veremos. Haciendo recíproco su enunciado se deduce un medio de descomponer las fuerzas en virtud del polígono de las fuerzas y del polígono funicular. Así, para descomponer, por ejemplo, la fuerza 4 . 6 en otras dos P_5 y P_6 de direcciones dadas, se trazan estas últimas en el polígono de las fuerzas; en el polígono funicular se traza una paralela á una de ellas P_6, por ejemplo; esta recta corta á la resultante 4 . 6 en un punto N, por el cual basta trazar P_5 paralelamente al lado 4.5 del polígono de las fuerzas. La posicion K_6N aquí elegida, no tiene nada de absoluto; se puede hacer que resbale paralelamente á sí misma, sobre MN, hácia adelante ó hácia atrás, sin modificar las condiciones de equilibrio.

§ 37

Condiciones de equilibrio de fuerzas dispuestas de una manera cualquiera en un plano.

En las anteriores consideraciones hemos admitido que las fuerzas cuyo equilibrio queríamos estudiar, estaban de tal manera dispuestas, que este equilibrio existia realmente; podemos, pues, segun la regla del párrafo anterior, referirlas á dos fuerzas iguales de opuesta direccion; pero para que esto suceda, no siempre basta que el polígono de las fuerzas sea una figura cerrada; es además preciso que el polígono funicular ó articulado sea tambien cerrado: en otros términos, la posicion de las fuerzas debe satisfacer ciertas condiciones. Si la disposicion de las fuerzas no es conveniente, el polígono funicular indica la que se debe adoptar para que el equilibrio exista y para que en último análisis el cuerpo no quede sometido á la accion de un par de fuerzas. (Véase § 38). Es preciso, para asegurar este resultado, que la posicion de una de las fuerzas sea arbitraria.

I. Sea P_6 (fig. 69) esta fuerza, que debe ser paralela á la direccion ZZ y cuya magnitud conocemos. Despues de trazar el polígono de las fuerzas (fig. 74), elegir un polo O y trazar los radios que van de este polo á los vértices de 1 á 6, se construye el polígono funicular trazando $K_1 K_2$, $K_2 K_3$, $K_3 K_4$... respectivamente paralelas á $1O$, $2O$, $3O$... hasta llegar á $K_5 K_6$. La recta que cierra el polígono funicular debe ser paralela á $6O$ y debe pasar por K_1. Su posicion queda, pues, determinada y su interseccion K_6 con $K_5 K_6$ es un punto de la fuerza P_6, la cual debe ser paralela á 5 . 6.

Si la última fuerza P_6 no está determinada en direccion ni en magnitud, y si además no se conoce la direccion y posicion de alguna de las otras, podemos determinar los elementos desconocidos de la manera siguiente:

II. Sea P_6 (fig. 75) la fuerza completamente desconocida y P_1 la fuerza de la que solamente conocemos la direccion $K_1 P'_1$ y un punto K_1.—Podemos trazar el polígono de las fuerzas (fig. 76) entre los puntos 1 y 5, limitándonos á figurar la direccion $A1$ de la fuerza 1. Se puede igualmente trazar el polígono funicular á partir de K_1 por medio de los puntos K_2, K_3, K_4, K_5 y K'_5. Si elegimos ahora una direccion como $K_1 L$, por ejemplo, para la recta de cierre, la interseccion de esta recta con $K_5 K'_5$ debe pertenecer á la fuerza buscada P_6. Para determinar la magnitud y direccion de esta fuerza tracemos (fig. 76) $O6$ paralela á $K_1 L$, y unamos los puntos 5 y 6; la recta 5 . 6 da la magnitud, el sentido y la direccion de la fuerza P_6, mientras que 6 . 1 determina la magnitud, hasta aquí indeterminada, de la fuerza P_1.

§ 38

Pares.

Si una figura plana está únicamente sometida á la accion de pares dirigidos en su plano, es decir, á la accion de un sistema de fuerzas iguales y paralelas dos á dos, pero de sentido contrario, el polígono de las fuerzas siempre quedará cerrado, sin que esto signifique necesariamente que el equilibrio exista. En este caso las condiciones de equilibrio pueden establecerse de la manera siguiente:

Las fuerzas $P_1 P_3$ y $P_2 P_4$ (fig. 77) forman un polígono cerrado 1, 2, 3, 4 (fig. 78) pero no se equilibran; tienden á hacer girar la figura alrededor de uno de sus puntos con un movimiento estático igual á la suma de los momentos de los pares $(P_1 — P_3)$ y $(P_2 — P_4)$. Para restablecer el equilibrio es preciso introducir un par de sentido opuesto $(P_5 — P_6)$ cuyo momento sea igual á la suma de los otros dos y cuyas componentes estén dirigidas en el sentido de las rectas paralelas VV y $VI\ VI$ (figura 80).

Tracemos ahora á partir del punto A (fig 79) el polígono de las fuerzas $A1$, 2, 3, 4, con los pares dados: este polígono debe completarse por la adicion de las fuerzas 5 y 6; si hacemos partir una de estas fuerzas del punto A, la otra debe volver á pasar por el mismo punto y cubrir exactamente la primera. De aquí se deduce, como ya habíamos dicho anteriormente, que estas dos fuerzas deben ser iguales, paralelas y de sentido contrario, y que por lo tanto solo hay un par que sea capaz de equilibrar los pares dados, desde el momento en que, para producir el equilibrio, solo se quieren introducir en el sistema dos fuerzas nuevas. La magnitud de las componentes del par adicional no es conocida, pero no sucede lo mismo con su direccion, que podemos llevar en sentido de AZ. Si elegimos además un polo arbitrario O, podremos trazar los radios OA, $O1$ $O2$, $O3$, $O4$ $(=OA)$, y proceder por consiguiente al trazado del polígono funicular (fig. 80).

Para esto, observemos que la fig. 77 nos da las direcciones II, $II\ II$, etc., hasta $VI\ VI$. Para un punto cualquiera K_1 tomado sobre $I\ I$, tracemos paralelas á los radios OA y $O1$ (que dan por resultante la fuerza P_1), hasta su interseccion en K_6 con $VI\ VI$ y en K_2 con $II\ II$. Tracemos enseguida $K_2 K_3$ paralela á $O2$,

$K_3\ K_4$ paralela á $O3$, y $K_4\ K_5$ paralela á $O4$, que cortan las rectas *III III*, *IV IV* y *V V* respectivamente en K_3, K_4 y K_5.—Solo falta entonces trazar la recta de cierre del polígono funicular, para lo cual basta unir el punto K_5 al punto K_6 obtenido anteriormente. La construccion de esta recta permite trazar el radio polar $O5$, que debe serle paralela (Véase § 37, II) y cerrar por consiguiente el polígono de las fuerzas. La fuerza P_3 se halla entonces representada en magnitud y direccion por la recta $4 . 5$ $(=A5)$ y la fuerza P_6 por la recta $5A$. En cuanto al polígono, está dado por el trazado $A1, 2, 3, 4, 5A$, en el cual los dos lados 4, 5 y $5A$ debe suponerse que forman en el vértice 5 un ángulo infinitamente pequeño.

Los problemas sobre el polígono de las fuerzas y el polígono funicular, hasta aquí tratados, enseñan el modo de determinar las condiciones de equilibrio de las fuerzas divergentes que obran en un plano. Si las fuerzas obran en planos diferentes que se corten ó sean paralelas, las reglas dadas permiten establecer separadamente el equilibrio para cada plano y los resultados que así se obtienen, pueden con frecuencia simplificarse, como veremos en ejemplos posteriores.—Por ahora no nos ocuparemos más de los principios generales y entraremos ya en la aplicacion del cálculo gráfico á las fuerzas paralelas.

§ 39

Equilibrio de tres fuerzas paralelas.

Para determinar el equilibrio de fuerzas paralelas nos podemos valer del método puramente aritmográfico ó de los procedimientos de adicion y de sustraccion geométricas (polígono de las fuerzas y polígono funicular), y es evidente que se debe elegir en cada caso el procedimiento más cómodo. Examinaremos primero el caso más sencillo en que una fuerza Q que obra sobre un cuerpo, debe equilibrarse por dos fuerzas P_1 y P_2 que le sean paralelas.

Si trazamos una recta ABC normal á las fuerzas (figura 81) el equilibrio exige que tengamos: $P_1 . AB = P_2 . BC$ ó $P_1\ a_1 = P_2\ a_2$, y además $P_1 + P_2 = Q$. Para representar gráficamente $P_1 = P_2 \frac{a_2}{a_1}$ podemos servirnos del procedimiento del párrafo 24 tomando (fig. 82) $OE = a_1$, $OA = a_2$, $EB = P_2$ (supuesto conocido); la recta AC paralela á EB da la fuerza P_1; pero el triángulo CAO puede tambien colocarse en la posicion punteada $O'BA'$ y tenemos entonces evidentemente: $A'E = P_1 + P_2 = Q$. Bajo esta última forma el trazado de la figura 82 puede aplicarse sin dificultad á la figura 81 y resulta el siguiente procedimiento.

I. En uno de los puntos de aplicacion de las fuerzas P_1 y P_2, A por ejemplo (fig. 83) se lleva la fuerza Q en sentido AD, se une el punto D al tercer punto de aplicacion C y se prolonga la fuerza Q hasta su interseccion en F con DF paralela á AC. Entonces se tiene, segun lo que antecede, $BE = P_1$, $EF = P_2$. La figura 84 representa el mismo trazado para el caso en que la recta ABC esté inclinada con relacion á la direccion de la fuerza Q.—En la figura 85 el punto de aplicacion B de esta fuerza Q se supone fuera de AC.

II. Se puede descomponer la fuerza Q en dos componentes que pasen por los puntos de aplicacion A y C (figs. 86 á 88); se obtienen así dos fuerzas oblícuas cuyas componentes, paralelas á Q, son las fuerzas de equilibrio buscadas, al paso que las componentes paralelas á ABC se destruyen.—En las tres figuras se tiene: $BF = P_1$, $FD = P_2$.

III. Si se construye el polígono de las fuerzas con $AD = Q$ y un polo cualquiera O (fig. 89 á 91) y trazamos los lados del polígono funicular Ab y bc respectivamente paralelas á AO y DO, trazando la recta de cierre cA y su paralela OE, en el polígono de las fuerzas, se obtiene $EA = P_1$, $DE = P_2$. El polígono funicular se reduce aquí á un ángulo. Si queremos que la recta de cierre coincida con ABC ó le sea paralela tracemos el polígono funicular AbC; entonces CA es la recta de cierre, Ab el primer radio de este polígono para la fuerza $AD = Q$, y Cb el segundo. Luego, el polo O debe hallarse en la interseccion de AB con la recta DO paralela á Cb; llevando enseguida OE paralela á bA se obtiene $EA = P_1$ y $DE = P_2$.

En los diferentes casos que acabamos de tratar, la fuerza Q es igual y de sentido contrario á la resultante de las fuerzas P_1 y P_2. Si conociésemos las fuerzas P_1 y P_2 y quisiéramos hallar la fuerza Q, bastaria recurrir á métodos análogos á los anteriores.

Construyendo primero la figura auxiliar $OEACB$ (fig. 92) que hemos utilizado ya (I) y trasladando el triángulo CAO á $BA'O'$, si trazamos $B'C'$ paralela á OA, $O'C'$ y OB' paralelas á $A'B$, se tiene $B'B = a_1$, $BC' = a_2$, $B'O = P_2$, $O'C = P_1$; lo que conduce al siguiente procedimiento:

IV. En las perpendiculares á AC (fig. 93) se toman las longitudes $AD = P_2$ y $EC = P_1$; se une DE que determina en B el punto de aplicacion de la fuerza Q, cuya magnitud es $ED' = P_1 + P_2$, siendo DD' paralela á AC.

En la figura 94 se ha supuesto que las fuerzas P_1 y P_2 estaban dirigidas en opuesto sentido: su suma alge-

bráica $D'E$ es, pues, la diferencia de las magnitudes absolutas de P_1 y P_2. La fuerza Q cae en este caso fuera de AC.

V. Del trazado (II) se puede deducir el procedimiento siguiente: Por el estremo a de la longitud $Aa = P$ (fig. 95) se traza una paralela á AC sobre la cual se toma una longitud arbitraria aA', que se lleva en sentido inverso á cC' sobre una segunda parelela á AC trazada por el estremo c de la recta $Cc = P_2$. Las rectas $A'A$ y $C'C$ se cortan en un punto F que pertenece á la direccion FB de la fuerza resultante Q. Esta última, que tiene por valor $P_1 + P_2$ puede considerarse al mismo tiempo como la resultante de $DE = CC'$ y de $EF = AA'$.

VI. La figura 96 da un método que resulta del trazado (III). Se lleva á EA el valor de P_1, á ED el de P_2; se toma un polo arbitrario O, y se traza la recta de cierre OE del polígono de las fuerzas. Trazando Ac, cb y Ab respectivamente paralelas á EO, OD y AO, el punto de interseccion b pertenece á la direccion de la fuerza resultante $Q = DA$.

§ 40

Resultante de un número cualquiera de fuerzas paralelas

Si varias fuerzas paralelas Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.... obran en un mismo plano sobre un cuerpo, para determinar su resultante podemos hacer uso de los métodos que preceden, componiendo sucesivamente las fuerzas de dos en dos, hasta llegar á la última.

Con frecuencia el procedimiento de uso mas cómodo es el (IV) del párrafo anterior.

I. Despues de haber trazado una recta AF (fig. 97) perpendicular á la direccion comun de las fuerzas Q_1, Q_2..... Q_4, se componen Q_1 y Q_2, luego su resultante $Q_1 + Q_2 = bc$ con Q_3, de lo que resulta $dd' = Q_1 + Q_2 + Q_3$. Esta última, compuesta con Q_4 da, en M la resultante general $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$. Este procedimiento es utilísimo en gran número de cálculos de construccion, sobre todo cuando las fuerzas Q_1, Q_2.... deben determinarse sucesivamente, como por ejemplo, en la investigacion del reparto de la carga de una locomotora en sus diferentes ejes.

El uso del polígono funicular y del polígono de las fuerzas conduce tambien de una manera muy sencilla al mismo resultado.

II. Con las fuerzas dadas Q_1, Q_2.... Q_6 (fig. 98) se forma un polígono de fuerzas llevando, á partir del punto A, las fuerzas $A1$, 2, 3, 4, 5, 6, unas á continuacion de otras. La resultante Q queda inmediatamente determinada en magnitud por la longitud $6A$, pero falta fijar su posicion. Para esto se toma como polo fuera de $A5$ un punto cualquiera O, se unen OA, $O1$, $O2$.... $O6$, luego se trazan bb', bc, cd..... gg', respectivamente paralelas á AO, $1O$, $2O$.... $O6$. La recta gg', (V. § 35) corta á bb' en un punto q que pertenece á la direccion de la resultante Q.

Refiriéndose á los desarrollos del § 36 se vé que la figura así obtenida permite determinar muy fácilmente la resultante de dos ó de varias fuerzas sucesivas. Así, el punto de interseccion c' de dc y bq da el punto de aplicacion de la resultante de Q_1 y Q_2 que está representado por $A2$ en el polígono de las fuerzas. Así mismo e' es el punto de aplicacion de la resultante de Q_4 y Q_5.

§ 41

Descomposicion de fuerzas en dos ó más fuerzas paralelas.

La descomposicion de fuerzas en fuerzas paralelas por medio del polígono funicular, constituye el problema inverso del anterior. Si en el polígono $aqbcd$ (fig. 99) se conoce el lado correspondiente á una fuerza Q, la cual hay que descomponer en otras dos Q_1 y Q_2 que pasen por e y f, se reunen los puntos de interseccion e y f de las direcciones de Q_1 y Q_2 con los lados aq y bq; $aefb$ (fig. 99) será entonces la parte de polígono funicular que corresponde á las nuevas fuerzas, cuya magnitud se determina trazando $O1$ paralela á ef en el polígono de las fuerzas. Si las fuerzas buscadas Q_1 y Q_2 están situadas á un mismo lado de Q (fig. 100), el procedimiento no varía. Basta prolongar aq hasta su encuentro en e con Q_1 y trazar ef. Se puede igualmente utilizar la interseccion de Q_1 con qb y de Q_2 con qa. El polígono toma entonces la forma $ae'f'b$. El polígono de las fuerzas da en el primer caso $Q_1 = A1$, $Q_2 = 1.2$; en el segundo $A1' = Q_2$ y $1'2 = Q_1$.

Si la pieza AG sometida á la accion de cargas paralelas Q_1, Q_2.... Q_5 debe estar sostenida por dos fuerzas P_1 y P_2 aplicadas en A y G (fig. 101), se puede buscar primero la resultante Q de las diversas cargas, como en el § 40, á fin de determinar esas fuerzas, y por medio del método anterior descomponer la resultante Q en otras dos P_1 y P_2. Pero podemos prescindir de determinar Q, puesto que conocemos las direcciones de P_1 y P_2, así como tambien la de su resultante (V. § 37). Se forma el polígono de las fuerzas $K1$, 2....$5O$, se trazan todos los radios polares y sus paralelos en el polí-

gono funicular, y se unen los puntos de interseccion a y g de los lados de este último polígono, paralelos á KO y $O5$, con las direcciones de las fuerzas P_1 y P_2; la recta ag cierra el polígono funicular y la paralela $O6$ en el polígono de las fuerzas da $P_1 = 5 . 6$ y $P_2 = 6 . 7$. Si en lugar de tomar los puntos de interseccion a y g nos hubiésemos valido de otros dos puntos a' y g', la solucion hubiera sido la misma, pues las dos rectas $a'g'$ y ag son paralelas. El polígono funicular hubiera presentado entonces la forma $a'g'mbcdefma'$, perteneciendo el punto m á la direccion de la resultante de las fuerzas $Q_1, Q_2 . . . . Q_5$, que es tambien la de la resultante de P_1 y P_2.

Cuando una pieza cargada debe descansar en un número de apoyos igual ó superior á tres, si tenemos en cuenta la resistencia de la pieza, deben estar dispuestos estos soportes á alturas rigurosamente determinadas, para poder hallar el valor de la reaccion ejercida por cada uno de ellos, pues sin esto, el problema quedaria indeterminado. De todos modos, la indeterminacion puede desaparecer introduciendo soportes intermedios. Supongamos, por ejemplo, que una pieza BCD (figura 102) sometida á una carga O en M debe equilibrarse por tres fuerzas verticales P_1, P_2, P_3, aplicadas á los puntos B C y D; podemos principiar por hacer una hipótesis sobre la relacion de dos de estas fuerzas P_1 y P_2 por ejemplo. Podemos suponer estas fuerzas aplicadas á un soporte intermedio B_1C_1 en el cual descanse la primera pieza en EE_1. La relacion $E_1C_1 : E_1B_1$ debe ser igual á la otra $P_1 : P_2$. Si repartimos ahora Q entre los apoyos E y D por medio del polígono de las fuerzas emd y del polígono funicular $A\,O\,1\,.\,2$, tendremos: $A1 = Q$, $1\,2 = P_2$, $2A = P_1 + P_2$, y esta última suma puede repartirse entre B_1 y C_1 por cualquiera de los métodos conocidos. Cada hipótesis especial sobre la relacion $\frac{P_1}{P_2}$ dará lugar á un valor diferente de P_3. Si se impone la condicion $P_1 = P_2$, E caerá en medio de BC y el soporte intermedio tiene entonces sus brazos iguales. Los resortes de láminas de los vagones y otros coches son resortes de brazos iguales. En muchos carruajes de lujo y aun en ciertas locomotoras se emplean tambien resortes de brazos iguales, y son los que se usan generalmente en las balanzas-básculas.

Si una carga debe repartirse en más de tres ó cuatro puntos, el problema puede resolverse por una combinacion conveniente de soportes intermedios, que es lo que se hace en las locomotoras, por ejemplo. Dada la carga total Q de la armazon de una locomotora aplicada á M (fig. 103), supongamos que se quiera repartir sobre tres ejes B, C, D, de manera que las presiones sean trasmitidas completamente á las cajas de estopas por el intermedio de los resortes, y que además las cargas de las ruedas C y D tengan entre sí una relacion determinada: este resultado puede obtenerse estableciendo tres resortes y un soporte intermedio rígido á cada lado del armazon; resultando en total ocho soportes intermedios. Como las fuerzas P_2 y P_3 deben tener entre sí una relacion determinada $p : q$, empezaremos por dividir en la misma relacion la distancia de los ejes C y D, y por el punto de division así obtenido, se traza una vertical Ee. Por un punto cualquiera e' de esta recta se trazan los radios que van á los puntos de presion de las ruedas C y D, es decir, á los puntos de aplicacion de las fuerzas P_2 y P_3 ejercidas por los rails en las ruedas. Las longitudes comprendidas entre la recta Ee y los dos radios anteriores, dan precisamente las longitudes de los brazos de palanca para el soporte intermedio ced que se halla sobre una horizontal; al mismo tiempo, las distancias de los puntos c y d á las perpendiculares C y D representan los brazos de palanca correspondientes de los soportes de resortes c_1c_2 y d_1d_2. En cada uno de los resortes los dos brazos deben ser iguales, á fin de que los esfuerzos ejercidos en los dos estremos sean iguales; la longitud de los brazos del resorte C puede, por lo demás, tomarse arbitrariamente. Una vez elegida la relacion $p : q$ y dada la distancia de los ejes, la eleccion de la longitud del soporte intermedio no puede modificar en nada la relacion de P_1 á la suma $P_1 + P_2$, como lo demuestra el exámen del polígono funicular $bmcd$. Obrando los resortes como soportes intermedios deben tener una fuerza en relacion con las cargas que tienen que soportar y deben disponerse, por medio de pernos de suspension, hasta que sus resistencias tengan valores convenientes, atendidas las condiciones en las cuales se ha establecido el soporte rígido intermedio.

Los problemas análogos al anterior pueden resolverse de muchas maneras; y en la práctica se encuentran gran número de ejemplos. Así, los dos resortes sobre los cuales obra el soporte intermedio rígido, pueden reunirse en uno solo, como indica la fig. 104. En esta disposicion, los ejes C y D se hallan cargados directamente por medio del soporte intermedio rígido bec; este último está cogido por el resorte $b_1e_1c_1$, cuyos estremos están suspendidos en el armazon. Los brazos b_1e_1 y c_1e_1 de este resorte tienen longitudes desiguales que están precisamente en la misma relacion $p : q$ que los brazos del soporte intermedio bec. Si las longitudes de los brazos del soporte no están convenientemente elegidas, ó si la reparticion de la carga de la locomotora se aparta mucho de la que se ha admitido de antemano, el soporte intermedio toma una posicion oblícua.

§ 42

Fuerzas paralelas uniformemente repartidas.

Cuando una pieza está sometida á una carga uniformemente repartida, los métodos anteriores no sirven para el trazado de los polígonos funiculares ni de las fuerzas. En efecto, en este caso el polígono funicular se convierte en una curva, para cuya determinacion hay que recurrir á otro procedimiento, como el siguiente, por ejemplo. Imaginemos reemplazada la carga dada por una série de fuerzas iguales que obren en puntos igualmente separados, 1, 2..... 9 (fig. 105) y supongamos trazado el polígono funicular; es evidente que el punto de interseccion de los lados aM y bc de este polígono deberá hallarse á igual distancia de las rectas $1a$ y $2b$ y caer por consiguiente en medio de ab', puesto que las fuerzas 1 y 2 son iguales. Del mismo modo los lados cd y aM se cortarán en un punto igualmente distante de $3c$ y de $1a$, es decir, en b' sobre la recta $2b$, etc. En definitiva, los diversos puntos de interseccion de los lados del polígono con aM é iM se hallarán equidistantes en estas dos rectas. De aquí se deduce, segun un teorema conocido, que los lados del polígono tienen por envolvente una parábola, cuyo vértice se halla aquí sobre la recta media EM á una distancia $Ee=\frac{EM}{2}$. Si pasamos ahora al caso de una carga uniformemente repartida, el polígono funicular se confunde con esta parábola. Considerando el triángulo AMB como el polígono correspondiente al caso en que la carga total esté aplicada en E, se vé inmediatamente que este triángulo da el medio de trazar fácilmente la curva. Si las fuerzas estuviesen inclinadas sobre la recta AEB, como en la figura 106, los intérvalos en AM serian tambien iguales entre sí; lo mismo sucederia con los intérvalos de MB; aunque en este caso el valor de una division de AM seria diferente del de BM. El punto e es, como anteriormente, el medio de EM pero no es ya el vértice de la parábola.

El polígono funicular se trasforma así mismo en curva, cuando se trata de cargas que ruedan sobre una pieza. La curva es tambien en este caso la envolvente de los polígonos sucesivos correspondientes á cada posicion de la carga. El cálculo de los puentes de ferrocarriles ofrece numerosos ejemplos. El cálculo de las deslizaderas, para las varillas de los émbolos, en las máquinas de vapor, conduce á trazados análogos aunque mucho más sencillos.

§ 43

Momentos estáticos de las fuerzas paralelas.

Cuando varias fuerzas paralelas Q_1, Q_2... Q_4, P_1 y P_2 (figura 107) obran normalmente sobre una pieza, es necesario, para evaluar su resistencia, determinar los momentos estáticos de las fuerzas esteriores. El polígono funicular y el de las fuerzas permiten obtener fácilmente este resultado.

Una vez trazados estos dos polígonos $abcdef$ y AO_4, supongamos que se pide el momento estático M para el punto S de la pieza. Este momento es el producto de la resultante de todas las fuerzas que se hallan á un mismo lado (derecha é izquierda) de la recta SS_1, paralela á la direccion general de las fuerzas y de la distancia l de esta resultante á SS_1. La magnitud de esta resultante está dada por la recta $hi=1-5$ del polígono de las fuerzas, que se halla comprendida entre los radios $O1$ y $O5$, paralelos á bc y fa. Su posicion se obtiene prolongando los dos lados anteriores del polígono hasta su interseccion g. Si trazamos la recta gg_0, normal á SS_1, esta recta será el brazo de palanca l de la fuerza resultante $P=hi$, que tiende á doblar la pieza en S. Tenemos, pues, $M=P\,.\,l$.

Esta multiplicacion tambien puede efectuarse gráficamente. Si trazamos, en efecto, la perpendicular Ok en el polígono de las fuerzas, esta recta será la altura del triángulo Ohi, semejante al triángulo gss_0, de altura l. Tenemos, pues, $hi : Ok = ss_0 : gg_0$ ó bien, designando Ok por H, y ss_0 por t:

$$P : H = t : l,$$

y por tanto

$$M = Pl = Ht.$$

Los momentos estáticos, en los diversos puntos de la pieza son, pues, entre sí como las ordenadas del polígono funicular paralelas á las fuerzas, puesto que H es constante. Si tomamos H por unidad, el método que acabamos de esplicar se reduce al método de multiplicacion del § 22 (I), y el momento M tiene entonces por medida la ordenada t. Como vemos, una vez trazado el polígono funicular, no es necesario buscar la posicion (g) de la fuerza resultante; y si se trata simplemente de establecer relaciones entre los diferentes momentos estáticos, es indiferente que H se haya establecido de antemano ó no como unidad de medida. Más tarde tendremos ocasion de aplicar frecuentemente esta importante propiedad del polígono funicular para las fuerzas paralelas. En el cálculo de los árboles

y en otros muchos casos, es tanto más preciosa cuanto que no exige ninguna modificacion ni adicion á los trazados y que en realidad los momentos de las fuerzas se hallan directamente por las operaciones que sirven para determinar esas mismas fuerzas. En las aplicaciones es ventajoso reforzar con una lijera tinta la recta que limita las ordenadas que representan los momentos.

§ 44

Composicion y descomposicion de los momentos estáticos.

Segun lo que antecede, los momentos estáticos de las fuerzas paralelas pueden representarse por rectas de magnitud, posicion y direccion determinadas, exactamente lo mismo que las fuerzas simples. Por consiguiente, si una pieza se halla sometida en uno de sus puntos á la accion de dos momentos estáticos, que obren en la misma ó diferente direccion, pueden sumarse gráficamente estos momentos como lo hemos hecho con las fuerzas, en el § 31. Si ABC y ADC (fig. 108) son los polígonos funiculares de dos séries de fuerzas paralelas que obran en un cuerpo giratorio AC normalmente á su eje de rotacion en las direcciones $A'B'$ y $A'D'$, que forman entre sí un ángulo φ, se obtiene el momento resultante para un punto S del eje del cuerpo construyendo el triángulo $T_1ST'_2$, de modo que el ángulo en S sea suplemento del ángulo φ, y $T_1\ T'_2 = ST'_1 = t$ será el momento buscado. La composicion completa de los polígonos funiculares ABC y ADC, los cuales, segun lo dicho anteriormente, pueden tambien llamarse *superficies de los momentos*, da la superficie de los momentos resultantes $ATOC$. Aquí los lados AT y CU son rectas, al paso que TU es una curva y en el caso actual una hipérbola. En la práctica puede reemplazarse esta curva por su cuerda; por lo demás, su construccion no ofrece dificultad.

Invirtiendo el problema resulta la descomposicion de un momento estático t, de direccion dada, en otros dos t_1 y t_2, cuyas direcciones conocemos igualmente.

§ 45

Composicion gráfica de los momentos de torsion y de flexion.

Además de los esfuerzos de flexion, ciertas piezas de máquinas tienen que soportar esfuerzos de torsion, y con frecuencia están sometidas simultáneamente á esas dos clases de esfuerzos. Los momentos de torsion, como es fácil comprender, pueden representarse por superficies análogas á las que acabamos de indicar para los momentos de flexion. Así, siendo $ABCD$ (fig. 109) el eje de un cuerpo de rotacion, sostenido en A y D y sometido en B y C á fuerzas que tienden á producir flexion, podemos construir como anteriormente el polígono de las fuerzas AO_2 y la superficie de los momentos $AbcD$. Si el cuerpo está además sometido entre B y C á un esfuerzo de torsion P, cuyo brazo de palanca sea R, tendremos que determinar la superficie del momento correspondiente. Segun el § 43 y la regla de multiplicacion del § 22, I, para obtener la recta representativa de PR debemos llevar primero P de A á p en el polígono de las fuerzas y unir Op trazando paralelamente á Ap una recta que se halle á la distancia R del punto O; la prolongacion de los dos radios polares OA y Op determinan sobre esta recta una longitud qr, lo cual da el momento PR, espresado en la unidad OE, que ha servido ya para el polígono $AbcD$. La superficie de los momentos para la torsion, entre B y C, se halla representada por el rectángulo $BCuv$ en el cual $Bu = Cv = qr$. En los problemas prácticos generalmente hay que comparar y combinar este rectángulo de torsion con los momentos de las fuerzas de flexion que obransim ultáneamente, y conviene por tanto reemplazarlo por un momento de flexion equivalente, es decir, correspondiente á la misma seguridad para la pieza. Segun el § 18, este momento de flexion debe ser igual á $^5/_8$ del momento de torsion. Si tomamos pues $Bu_1 = Cv_1 = {}^5/_8\ Bu$, el rectángulo Bu_1v_1C que se obtiene, representa en la misma escala que el polígono $AbcD$, la superficie de los momentos flexores susceptibles de reemplazar los momentos de torsion entre B y C.

Si los momentos flexores así obtenidos deben combinarse con los demás momentos flexores, basta efectuar una adicion gráfica de las dos superficies para llegar al resultado anteriormente dado por las fórmulas del § 18.—Segun estas fórmulas, el momento ideal de flexion M_i que en cada punto puede sustituirse al momento de torsion M_t y al momento de flexion M_f, tiene por espresion:

$$M_i = {}^3/_8 M_f + {}^5/_8 \sqrt{M_f{}^2 + M_t{}^2}.$$

Para representar este valor, tomemos $Bb_1 = {}^5/_8 Bb$, $Cc_1 = {}^5/_8 Cc$, $Ee_1 = {}^5/_8\ Ee$, etc.; rebatamos Bu_1, Cv_1, Ew, sobre AD y sumemos las hipotenusas $b_1u'_1$, c'_1v_1 y Ew_1 respectivamente con las rectas bb_1, cc_1 y ee_1. Las sumas así obtenidas representan las magnitudes de las

ordenadas en los puntos BC y E del polígono funicular ideal $Bbb'e'c'cD$, que corresponde al conjunto de todas las acciones á las cuales está sometido el cuerpo.

§ 46

Determinacion del centro de gravedad por medio del plano de las fuerzas.

La determinacion del centro de gravedad de una superficie plana puede efectuarse, de una manera muy sencilla con frecuencia, por medio del plano de las fuerzas, para lo cual se empieza por dividir la figura en capas delgadas de la misma anchura, de modo que la superficie de cada capa pueda considerarse proporcional á su longitud media. Si construimos con estas diversas longitudes un polígono de las fuerzas y un polígono funicular, la direccion de la resultante dará una recta que pase por el centro de gravedad. Si la figura no tiene eje de simetria, deberá repetirse el trazado anterior adoptando otra direccion para las capas; y así obtendremos una segunda recta que por su interseccion con la primera dará el centro de gravedad. En ciertos casos en lugar de capas delgadas puede hacerse uso de superficies de cierta dimension, determinar sus medidas de un modo cualquiera y utilizar estas últimas en el trazado gráfico.

Supongamos, por ejemplo, que se quiera determinar el centro de gravedad de una seccion cuya forma sea la de la fig. 110. Siendo la figura simétrica con relacion al eje YY, el centro de gravedad debe hallarse ya sobre esta recta. Descompongamos ahora esta figura en tres rectángulos cuyas superficies representadas respectivamente por $b \times c$, $b_1 \times c_1$, $b_2 \times g$ tienen sus centros de gravedad en sus puntos medios. Si suponemos que $c = 1'5 b_4$, $c_1 = b_2$ las fuerzas correspondientes á las superficies anteriores pueden espresarse por $1'5 \times \frac{b}{2}$, $\frac{g}{2}$ y $\frac{b_1}{2}$ y llevadas unas á continuacion de otras á $A\,1\,2\,3$. Eligiendo un polo O y trazando las rectas K'_1K, K_1K_2, K_2K_3, $K_3K'_3$, respectivamente paralelas á OA, $O1$, $O2$ y $O3$, el punto de interseccion M de los lados $K_1K'_1$ y $K_3K'_3$ es un punto del eje vertical MM' que pasa por el centro de gravedad buscado. Este punto S se halla, pues, determinado por el encuentro de esta recta con el eje de simetria YY.

§ 47

Resultante de las acciones del agua en una rueda hidráulica.

En el estudio de una rueda hidráulica es con frecuencia esencial conocer la posicion de la resultante de las acciones ejercidas por el agua; y puede determinarse fácilmente por medio de los principios que acabamos de esponer y que vamos á aplicar como ejemplo á una rueda de canjilones.

Si representamos en corte (fig. 111) la mitad de una rueda de esta especie, el tercer canjilon, á partir de arriba, recibe el agua motriz y se llena una cierta fraccion de su volúmen, fraccion variable con ciertas circunstancias de instalacion, como la forma del canjilon, la velocidad de rotacion, etc. Si admitimos que en el movimiento de descenso queda horizontal el nivel del agua en cada canjilon (lo que no es rigurosamente exacto), es fácil determinar la posicion del canjilon para la cual el agua empezaria á salir si el canal KL no se opusiera á ello. Si despreciamos las pérdidas de agua debidas al juego que existe entre este canal y la rueda, todos los canjilones, desde el tercero hasta el décimo inclusive (suponiendo sea 10 el número de canjilones de la mitad de la rueda) contendrán la misma cantidad de agua y en todos ellos el peso de esta agua estará naturalmente aplicado al centro de gravedad del prisma líquido correspondiente. Admitiremos, por otra parte, que en la posicion de la figura, el canjilon XI esté ya vacio.

I. *Determinacion de la longitud del arco del canal KL.*—La capacidad de un canjilon es sin disputa equivalente á la de la parte de la corona comprendida entre los dos planos trazados por el eje de la rueda y por las líneas de division de los fondos de dos canjilones próximos. Supongamos ahora que el coeficiente de llenura sea 0'4, es decir, que cada canjilon reciba una cantidad de agua igual á los dos quintos del volúmen que acabamos de definir. Si en el canjilon I tomamos el arco kl igual á 0'4 de la division de los canjilones, y trazamos el radio lm, la seccion $klmn$ será equivalente al perfil que ofrezca el agua en el canjilon. En el canjilon II esta seccion se halla reemplazada por el cuadrilátero equivalente $rput$, uno de cuyos vértices t coincide con el estremo de la paleta rt. El ángulo ktu representa el valor buscado del ángulo KML del canal y utM el complemento KMN de este ángulo.

La trasformacion del perfil $klmn$ se efectua de la

manera siguiente: se construye primero el triángulo rectángulo *opq* tomando el lado *op* igual á la anchura media *klmn* y el segundo lado $pq=2 \cdot lm$; de este triángulo se pasa enseguida al triángulo equivalente *rps*, trazando *os* paralela á *rq* y uniendo los puntos *r* y *s* (V. § 25). Si trazamos ahora la recta *st* y su paralela *ru*, basta unir los puntos *u* y *t* para obtener el cuadrilátero buscado *rput* (el arco *pu* puede ser considerado como una recta por su poca curvatura). Se toma luego el ángulo *KMN* igual á *utM* y se prolonga el canal una cierta cantidad *KJ* para tener en cuenta los remolinos del agua.

II. *Determinacion del nivel del agua en los canjilones.*—Hagamos primero el trazado para el canjilon IV, para lo cual empezaremos por llevar sobre este canjilon el cuadrilátero *rput* y por el estremo *t'* se traza una recta arbitraria *t'v* á la cual se tira una paralela *u'w* por el punto *u'*; y haciendo variar la direccion de *t'v*, despues de varios tanteos se acaba por obtener una recta *vw* horizontal, que da en este caso el nivel buscado. Así se ha determinado la recta indicada en la figura lo mismo que las rectas análogas de los canjilones V, VI y VII.

En el canjilon III, la figura *rput* se ha trasformado primero en un segundo cuadrilátero que tiene por lado superior *px*, y luego este cuadrilátero ha sido á su vez reemplazado por un pentágono, cuyo lado superior horizontal es *yz*.

Para el canjilon VIII se ha empleado otro método: el cuadrilátero primitivo *rput* trasformado, ha dado primero la figura terminada por la recta p_1x_1 y luego la que está limitada por el lado horizontal y_1z_1. Se ha procedido de la misma manera para los canjilones IX y X.

III. *Plano de las fuerzas para los volúmenes de agua de los canjilones.*—Se empieza por determinar los centros de gravedad *A*, *B*... *H* de los ocho canjilones llenos, valiéndonos de las reglas dadas en la seccion cuarta de esta obra. Las ocho fuerzas iguales así obtenidas permiten trazar el polígono de las fuerzas *AO*8 y el funicular *abeafghi*. El punto *i* pertenece á la direccion de la resultante de todas las fuerzas parciales. Se puede observar en el dibujo, que hallándose los centros de gravedad *C* y *D* sobre verticales muy próximas, se pueden componer las dos fuerzas allí aplicadas y trazar *id* y *db* respectivamente paralelas á *OA* y O_2, sin tener necesidad de trazar una paralela á O_1.

Es fácil hallar ahora el centro de gravedad real de todos los prismas líquidos. Despues de haber trazado horizontales por los puntos *A*, *B*, *C*..., supongamos que se haga girar 90 grados el polígono de las fuerzas *AO*8 y formemos con las paralelas á los nuevos radios polares un segundo polígono funicular ó, lo que conduce de una manera mas sencilla al mismo resultado, tracemos los lados de este polígono normales á los radios polares de *AO*8, y obtendremos así el segundo polígono funicular *a'b'c'd'e'f'*.... *i'*. El centro de gravedad buscado debe hallarse en la horizontal trazada por el punto *i'*; y estará pues determinada por la interseccion de esta recta con la vertical trazada por el punto *i*.

La posicion de la recta *iP* debe variar evidentemente un poco con la posicion de los canjilones; pero en una rueda bien construida esta variacion es pequeñísima. El procedimiento que acabamos de indicar tiene, pues, la gran ventaja de dar de un modo sencillo y rápido una solucion que sin ser rigurosamente exacta, le falta muy poco para serlo.

§ 48

Planos de las fuerzas en las armazones.

En los diversos géneros de construcciones se emplean piezas ensambladas, compuestas de partes rectas cuya reunion constituye sistemas invariables; tales son por ejemplo, las vigas, las armaduras de puentes y techumbres, los balancines, etc. Los esfuerzos de tension ó compresion que se ejercen en estas piezas, pueden representarse de un modo sencillo por medio del plano de las fuerzas que forman el polígono de las fuerzas y el polígono funicular. Vamos á dar aquí algunos ejemplos de aplicacion del método. En los diversos casos que vamos á examinar consideraremos cada junta como una articulacion perfecta ó por lo ménos no tendremos en cuenta su resistencia á la flexion.

Para construir el plano de las fuerzas en un sistema de piezas ensambladas cuya disposicion indique el dibujo, se debe empezar por determinar la distribucion de las fuerzas segun las condiciones del problema y luego partir de una de estas piezas para descomponerla en la direccion de las piezas rectas que constituyen la ensambladura correspondiente. Las fuerzas parciales así obtenidas, trasportadas á los puntos de ensambladura próximos, deben componerse respectivamente con las fuerzas esteriores, aplicadas en cada uno de estos puntos; y cada resultante debe á su vez descomponerse en la direccion de las piezas de la ensambladura correspondiente, etc. Los triángulos ó cuadriláteros consecutivos así obtenidos, constituyen el plano de las fuerzas.

Para que desaparezca toda incertidumbre sobre la direccion de las componentes que deben reemplazar una fuerza dada ó anteriormente determinada, basta

tener en cuenta las propiedades del polígono de las fuerzas (§ 32), dos de las cuales recordaremos aquí:

Para descomponer una fuerza en dos ó mas se debe invertir la flecha que indica su direccion y tomarla entonces por recta de cierre S' (fig. 112) del polígono de las fuerzas componentes.

Si reemplazamos dos ó más fuerzas dadas por otras diferentes, el polígono de las primeras fuerzas y el de las nuevas tendrán la misma recta de cierre S (figura 113).

Esta última regla contiene por lo demás á la primera como caso particular, en atencion á que una fuerza única puede considerarse en un trazado como un polígono de fuerzas no cerrado cuya línea terminal se obtiene precisamente volviendo al punto de orígen, es decir, andando en sentido opuesto al de la fuerza.

Para determinar con seguridad en un proyecto de armazon el modo de trabajar de una pieza, basta en caso de duda, imaginarla cortada, y que en los dos extremos se apliquen fuerzas esteriores cuya accion sea igual á la de las fuerzas interiores. La direccion de estas fuerzas esteriores da á conocer inmediatamente el modo como trabaja la pieza en cuestion.

§ 49

Planos de las fuerzas para las vigas armadas.

I. *Viga de un solo contrapuntal* (fig. 116).— La viga ABC que en su medio B, lleva una carga $2P$ normal á AC, descansa en A y C sobre dos apoyos simples, cada uno de los cuales produce una reaccion igual á P, puesto que $AB=BC$. Propongámonos determinar los esfuerzos que soportan las diversas piezas del sistema 1, 2.... 5.

En el pequeño plano designado por a, ab representa la fuerza P que obra en A de abajo arriba. Esta fuerza debe descomponerse siguiendo AB y AD en otras dos que representen fuerzas interiores del conjunto del sistema. Para mayor sencillez designaremos estas fuerzas interiores con los números de las fuerzas correspondientes y trazaremos 1 y 2 respectivamente paralelas á AB y á AD. Para que la recta de cierre del triángulo de las fuerzas así obtenido tenga la direccion de P (es decir para que la resultante de las fuerzas 1 y 2 esté dirigida en sentido contrario de la fuerza P, (véase § 48) deben estar dirigidas las fuerzas como indican las flechas de la fig. 114 a. La pieza AB trabaja por compresion, mientras que la AD está sometida á una traccion. Para mayor claridad en este ejemplo y los sucesivos adoptaremos la convencion siguiente: en las piezas que trabajan por compresion, las fuerzas estarán representadas por trazo doble, y en las sometidas á esfuerzos de traccion por trazo sencillo.

Por la misma razon en el trazado de construccion daremos una anchura apreciable á las piezas que tienen que resistir esfuerzos de compresion, al paso que los tirantes estarán representados por simples rectas.

Admitida esta convencion, tenemos que componer $2P=abc$ con 1, y para esto hay que construir el triángulo dac, observando que en la pieza 1 la compresion se ejerce de A hacia B; y descomponiendo la recta de cierre del triángulo (representado por puntos) horizontal ó verticalmente, obtendremos las dos fuerzas 3 y 4, que ambas son compresiones; y la composicion de 2 y 3 da la fuerza 5, que es una traccion. El plano de las fuerzas se compone aquí de dos partes simétricas, como era de preveer *á priori* á causa de la simetria de la viga con relacion á su medio. Habríamos podido por lo tanto limitarnos al estudio de una sola de sus mitades.

Si suponemos que la carga $2P$ en lugar de estar aplicada en un solo punto B, esté uniformemente repartida en toda la longitud ABC, cada una de las partes AB y BC da lugar á un esfuerzo $\frac{P}{2}$ en cada uno de los puntos de ensamble ABC, de modo que en definitiva puede considerarse como sometida á dos fuerzas $\frac{P}{2}$ en A y C, y á una fuerza P en B. Se obtiene entonces el plano de las fuerzas b, que es geométricamente semejante al anterior, pero con dimensiones lineales de la mitad de tamaño.

II. *Viga de dos contrapuntales* (fig. 115).—(Esta disposicion se emplea frecuentemente en los puentes de báscula, vagones, etc.) En B y C obran dos fuerzas verticales P, en A y D otras dos fuerzas iguales á las primeras pero dirigidas en sentido contrario. Tómese $ab=P$ en el plano de las fuerzas a, trácense las rectas 1 y 2 paralelas respectivamente á AB y AE y obtendremos así las fuerzas 1 y 2 que representan, como anteriormente, la primera una compresion y la segunda una traccion. Esta última fuerza, descompuesta en dos, paralelas á BE y á EF da dos nuevas fuerzas, una traccion 5 y una compresion 3. Las fuerzas 3, 1 y P compuestas en B dan la fuerza de compresion 4. Como la segunda mitad de la viga es simétrica de la primera, no nos ocuparemos de ella.

Si las fuerzas verticales en A y B no tienen la misma intensidad, lo cual ocurre con frecuencia en la práctica,

no es admisible la articulacion en B, á no ser que se añadan piezas de refuerzo como EC y BF. El plano b corresponde á esta disposicion. Si $P_1=a_1b_1$ obra en A, $P_2=a_1c_1$ en B, la descomposicion de 2 paralelamente á EB y á EF, da una fuerza vertical 3 diferente de la que se obtiene descomponiendo la resultante de P_2 y de 1 segun las mismas direcciones EB y EF. Si se suprimen los tirantes en cruz, el ensamblado tenderia á deformarse y las piezas acabarian por tomar, unas con relacion á otras, inclinaciones como las que resultan de los dos modos de descomposicion anteriores y el mismo valor para la compresion 3. Se vé, segun esto, que en gran número de casos es necesario añadir tirantes dispuestos en diagonal para la carga del medio.

III. *Vigas de tres contrapuntales* (fig. 116).—El trazado que representa la viga indica cómo están repartidas las fuerzas. Se empieza por descomponer la fuerza $3P=abc$ en dos fuerzas 2 y 1 ó ce y ea; se compone enseguida 1 con $ab=2P$ y se descompone la resultante be segun ef y fb, lo que da 3 y 4; la resultante fc de 2 y 3 da por su descomposicion, en fg y gc, las fuerzas 5 y 6. Como las dos tracciones 6 y 10 deben ser iguales, trazando ch paralela á GH é igual á eg se obtiene $gh=7$. En virtud de la simetria de la pieza y de las cargas, la otra parte del plano de las fuerzas es la reproduccion de la que acabamos de indicar.

IV. *Otra disposicion de viga de tres contrapuntales* (fig. 117).—La bovedilla BC tiene una longitud doble de la de la bovedilla AB, y la carga $12P$ se supone uniformemente repartida, lo cual da para los diversos puntos de ensamble, las fuerzas indicadas en la figura 117.

En el plano de las fuerzas se toma $abc=5P$ y se descompone esta fuerza segun ae y ec, lo que da 1 y 2; las fuerzas 1 y $3P$ (ensamble B) dan una resultante que descompuesta segun ef y fb produce 3 y 4; y del mismo modo se obtienen las fuerzas 5 y 6 paralelas á FC y FG por medio de la resultante cf de las dos fuerzas 2 y 3. Aquí la fuerza 5 es una compresion, mientras que en el ejemplo anterior era una traccion. La composicion de las dos fuerzas iguales 6 y 10 da la presion $gh=7$ para el contrapuntal del medio. La disposicion simétrica de la figura con relacion á esta recta permite reducir el plano de las fuerzas á la parte que acabamos de trazar.

V. *Vigas armadas de varios contrapuntales* (figura 118).—Supongamos la viga AJ dividida en ocho bovedillas iguales uniformemente cargadas. En este caso las cargas se hallarán repartidas en los diferentes puntos de ensamble, como lo indica la fig. 118.

En el plano de las fuerzas $ae=7P$ se descompone en 1 y 2 (af y fe); del mismo modo la resultante bf de 1 y de $ab=2P$ da 3 y 4 (fg y gb). La resultante ge de 2 y 3 descompuesta paralelamente á KC y KL, produce 5 y 6 (gh y he). Para los puntos L y C se presenta una dificultad que no existia en los casos anteriores; tenemos en efecto que descomponer, segun tres direcciones dadas, sea la fuerza 6, ó sea la resultante de las fuerzas $2P$, 4 y 5, lo que constituye un problema indeterminado. Para hacer desaparecer la indeterminacion nos vemos obligados á hallar primero la magnitud de una de las fuerzas, la de 7, por ejemplo. El contrapuntal CL se halla comprimido segun su direccion por las componentes verticales de 5 y 9 y por la carga directa $2P$; las dos fuerzas 5 y 9 son iguales, puesto que son simétricas con relacion á CL y que sostienen piezas igualmente cargadas BK y DM. En el plano de las fuerzas la recta hi destinada á representar la fuerza 7 debe tener, pues, una longitud igual á $2P$, dos veces la proyeccion de 5 sobre la vertical; la resultante ie de hi y de $he=6$ descompuesta en im y me da las dos fuerzas 10 y 11. Volviendo al punto C se puede descomponer la resultante de 4, 5 y $2P$ paralelamente á CL, CM y CD, lo cual proporciona las fuerzas 8 y 9 en el trazado $hikc$. Continuando de la misma manera se determinan las demás fuerzas de 12 á 15 y se completa así la mitad del plano de las fuerzas. Importa observar que en la disposicion de la figura, la viga AJ se halla igualmente comprimida en todos sus puntos.

§ 50

Plano de las fuerzas para los cuchillos.

Los cuchillos presentan numerosos ejemplos de piezas armadas. En las diversas disposiciones que vamos á examinar supondremos los pares sometidos á una carga vertical uniformemente repartida de tal modo que cada bovedilla soporte una carga proporcional á su longitud.

I. *Cuchillo sencillo con pares sin contrapuntales* (figura 119).—Cada par lleva una carga uniformemente repartida $2P$; las fuerzas esteriores que obran sobre el cuchillo en los puntos A, B y C son entonces respectivamente P, $2P$ y P.

Si en el plano de las fuerzas se toma $ab=P$ y se trazan ac y bc paralelas á AB y AC, estas dos rectas dan las fuerzas 1 y 2; la primera es una compresion, la segunda una traccion; la fuerza bc descompuesta en las dos rectas ce y be, una vertical y la otra paralela á CD, da las fuerzas de traccion 3 y 5. Para terminar el trazado basta descomponer las fuerzas 1, $2P$ y 3. La

recta *de* que cierra el polígono *ecad*, representa la fuerza 4.

II. *Cuchillo con pares provistos de contrapuntales* (figura 120).—La disposicion de este cuchillo puede deducirse de la anterior por la adicion de dos contrapuntales *CE* y *CF*. Si las dos bovedillas *AE* y *EB* se suponen en la relacion de 3 á 2, las cargas que les corresponden son $6P$ y $4P$, y entonces resulta para las fuerzas esteriores, en los diferentes puntos de ensamble, el reparto indicado por la figura.

En el plano de las fuerzas descompongamos $ac=7P$ en 1 y 2 siguiendo las rectas *ad* y *dc* paralelas á *AE* y *AC*. Tomemos enseguida la resultante de las fuerzas 1 y $5P$ y descompongámosla paralelamente á *EB* y *EC*; y así obtendremos las fuerzas 3 y 4 que son compresiones ambas. La composicion de las fuerzas 2, 3 y de sus simétricas 8, 7 por medio del polígono *cdefg*, da $cg=5$. Esta última fuerza podria obtenerse igualmente descomponiendo por *BC* y *BF* la resultante de las fuerzas 4 y $4P$.

III. *Otra disposicion de cuchillo con pares apuntalados en un solo punto* (fig. 121). Esta disposicion se deduce de la anterior suponiendo los contrapuntales *EC* y *CF* colocados horizontalmente. Se han supuesto iguales las dos bovedillas *AE* y *EB*; la carga, es, pues, igual en cada una de ellas y las fuerzas esteriores en *A* y *D* tienen por valor $3P$. Este último valor llevado de *a* á *c* en el plano de las fuerzas, permite obtener en *da* y *cd* las fuerzas 1 y 2. La resultante *db* de 1 y $2P$ da por su descomposicion en *de* y *eb*, las compresiones 3 y 4. Por otra parte, tenemos evidentemente $7=3$ y $8=2$, y por tanto, se obtiene la fuerza 5 tomando la recta de cierre *cf* del polígono *cdedf* ó de *cdf*. Se podria determinar tambien el valor de 5 componiendo las fuerzas 4, 6 y $2P$. Si suprimimos el tirante *BC*, lo cual se hace con frecuencia en la práctica cuando no existe ninguna articulacion en *C*, solo puede sostenerse *ECF* con la condicion de que sus dimensiones sean suficientes para impedir la flexion; si bien en este caso los pares tienden á abrirse en *B*, si el ensamble en este punto no está dispuesto de manera que queden sólidamente unidos.

IV. *Tercera disposicion de cuchillo con un contrapuntal único en cada par* (fig. 122).—En este cuchillo el tirante vertical de las figuras anteriores se halla reemplazado por el triángulo *BCD*. Como las bovedillas *AF* y *FB* se suponen de igual longitud, el reparto de las fuerzas en los diversos puntos de ensamble es idéntico al de la fig. 123.

En el plano de las fuerzas la descomposicion de $abc=3P$ da, como anteriormente, las fuerzas 1 y 2. Del mismo modo se obtienen en *de* y *be* las fuerzas 3 y 4 por medio de la resultante de 1 y $2P$; la resultante *ec* de las fuerzas 2 y 3 da, en *cf* y *ef*, las fuerzas de traccion 5 y 6. La segunda mitad de la figura es simétrica de la primera.

V. *Cuchillo de dos contrapuntales para cada par* (figura 123).—Esta disposicion de cuchillo se deduce de la de la fig. 120 desdoblando el contrapuntal de manera que sostenga el par en dos puntos. En la figura, las bovedillas, que se suponen iguales, soportan cada una una fuerza uniformemente repartida $2P$; y las fuerzas esteriores, en *A* y *D* tienen entonces por valor $5P$.

Tómese en el plano de las fuerzas $ad=5P$, descompóngase por *de* y *ea* paralelas á *AE* y *AC*, y se obtendrán las fuerzas 1 y 2; la resultante *eb* de 1 y de $ab=2P$ da 3 y 4 por su descomposicion por *ef* y *fb*. Del mismo modo, la resultante *fc* de las fuerzas 4 y $2P$ da segun *fg* y *gc* las dos fuerzas 5 y 6. Para terminar el trazado de la mitad del plano basta determinar la fuerza 7 que se puede obtener por la composicion de $2P$ y de las dos fuerzas simétricas 6 y 8; siendo por tanto la mitad de esta fuerza igual á la proyeccion vertical de 6, disminuida de *P*, y está representada por la recta *dh*.

VI. *Cuchillo de varios contrapuntales* (fig. 124).—En la disposicion representada en esta figura, los contrapuntales están igualmente inclinados y los tirantes verticales. Suponiendo la carga igualmente repartida é igual á $2P$, para cada bovedilla, las fuerzas esteriores en *A* y *D* tienen por valor $7P$.

Tómese en el plano de las fuerzas $ac=ab+bc+cd+de=3\times 2P+P=7P$, y descompóngase esta fuerza paralelamente á *AE* y *AL* lo que da, en *fa* y *ef*, las fuerzas 1 y 2. De la descomposicion de la resultante *fb* de 1 y $ab=2P$ se obtienen en *fg* y *gb* las fuerzas 3 y 4; y lo mismo se obtienen 5 y 6 (*gh* y *he*) descomponiendo paralelamente á *LF* y *LM* la resultante *ge* de 2 y 3. Continuando de la misma manera, se obtienen sucesivamente las diversas fuerzas hasta la 1 2 ó *ld*, cuya proyeccion vertical *dm*, disminuida de $de=P$, da en *me* la mitad de la fuerza 1 3, es decir, la mitad de la tension del tirante del medio *BC*. La segunda mitad de la figura es por lo demás idéntica á la primera.

VII. *Cuchillo curvo* (figura 125).—Los cuchillos del género representado en la figura *ABCDEFGH* se han usado mucho en estos últimos tiempos para cubrir salas de dimensiones trasversales considerables y de gran altura. Se pueden considerar como modificaciones del tipo anterior obtenidos reemplazando por un polígono las piezas rectas que forman los pares. En este cuchillo, la parte de carga que se refiere á la techumbre propia-

mente dicha está determinada y debe suponerse proporcional á la longitud de los lados, pero no sucede evidentemente lo mismo con las cargas accidentales. Así, la nieve se reparte muy desigualmente y la carga que le corresponde es evidentemente mucho menor en los estremos AB y GH que en los lados CD y DE. Debemos pues dejar indeterminadas las fuerzas P_1, P_2, P_3, que están aplicadas á los vértices B, C, D, E, F, G y á las cuales deben equilibrar como fuerzas exteriores las reacciones Q de los apoyos A y B, de modo que tenemos:

$$Q=P_1+P_2+P_3.$$

En el plano de las fuerzas $ab=P_1$, $bc=P_2$, $cd=P_3$ y por consiguiente $ad=Q$, la descomposicion de ad paralelamente á AB y AJ da en ea y de las fuerzas 1 y 2; del mismo modo la resultante de 1 y de P_1 da siguiendo ef y fb, las fuerzas 3 y 4. Del conocimiento de 2 y 3 se deduce fácilmente 5 y 6 (gf y dg). La resultante ge de las tres fuerzas 4, 5 y P_2 por su descomposicion en las dos direcciones paralelas á CK y CD da 7 y 8. Se continua así hasta llegar en kd á la fuerza 1 2, que completa la primera mitad del plano de las fuerzas. Las piezas KL, DL, EL y ML trabajan todas por traccion.

§ 51

Plano de las fuerzas de un cuchillo teniendo en cuenta la presion del viento.

Cuando se quieren establecer con precision cuchillos de gran estension, hay que tener en cuenta no solamente las cargas resultantes del peso del mismo techo y del de la nieve, sino tambien de la accion del viento, accion que en ciertos casos dista mucho de ser despreciable.

Para demostrar con un ejemplo, como se puede aplicar la grafostática á la solucion de este problema, volvamos al cuchillo de la fig. 124 y supongamos que esté sometido además de las fuerzas verticales á la presion W del viento (fig. 126).

Tendremos que determinar primero las fuerzas Q_1 y Q_2 en los puntos A y D, suponiendo que la presion del viento solo se ejerza sobre una de las caras de la techumbre, AB por ejemplo. Sea W la resultante de las acciones del viento dirigida normalmente á AB y P la carga vertical total en esta misma cara; la composicion de las dos fuerzas P y W da una resultante dirigida por FS, cuya magnitud está representada en el plano de las fuerzas por cc_1. El otro par BD está únicamente sometido á la fuerza vertical P, aplicada á su punto medio J.

Si se prolonga la direccion de esta fuerza vertical hasta su encuentro con la resultante anterior, el punto de interseccion S pertenece á la resultante de todas las fuerzas que obran sobre la techumbre. Si tomamos en el plano de las fuerzas $c_1a=P$, la recta ac representa la direccion de esta resultante que se puede trasladar sobre el plano de construccion del cuchillo en ST. Para determinar las fuerzas Q_1 y Q_2 recordemos las consideraciones del § 34. Hemos visto que en el caso en que se dan como incógnitas dos fuerzas que deben satisfacer á la condicion de cerrar el polígono, es necesario tener dos datos por lo ménos para esas dos fuerzas. Aquí tenemos elementos suficientes para determinar las direcciones de Q_1 y Q_2.

La presion del viento da lugar á un empuje horizontal que debe ser contrarrestado por la resistencia de los apoyos (paredes, pilares, postes, etc). Tendremos que examinar en cada caso particular si estos dos apoyos son susceptibles de desplazarse horizontalmente la misma cantidad, ó si por el contrario sus desplazamientos deben ser diferentes; en cuyo caso el empuje deberá repartirse proporcionalmente á estos desplazamientos. Hecho esto, en el punto de interseccion de ST y AD descompondremos ac en la vertical y la horizontal, y luego determinaremos (§ 39) las componentes de la primera fuerza para los dos apoyos y compondremos estas fuerzas con las que provienen de las acciones horizontales.

Sucede amenudo que uno de los apoyos no es susceptible de esperimentar una desviacion horizontal, que es el caso de un cuchillo que descansa en una columna ó en un pilar aislado; pues entonces toda desviacion horizontal debe referirse al otro apoyo, que conviene por consiguiente reforzar. Así se han establecido por ejemplo los tinglados de los ferrocarriles en los cuales se supone que el apoyo D sólo puede ofrecer resistencia en la direccion de la vertical. Esta hipótesis permite determinar la direccion de la otra fuerza. Si en efecto se prolonga la vertical de D hasta su encuentro con ST y se une el punto de interseccion al punto A, se obtendrá la direccion de la fuerza aplicada á este punto A. Esta fuerza y la del punto D no representan todas las fuerzas esteriores que obran en los puntos de apoyo; y es preciso agregarles las componentes que provienen de la carga de la techumbre. Para determinar estas incógnitas, descompongamos la resultante de P y W en los diversos puntos de ensamble de AB y la fuerza P en los de BD. Así obtendremos la fuerza P_1

para el punto A, y P_2 para los puntos E, F y G. En el punto B obra la fuerza P_3, en los puntos H, J y K la fuerza $P_4=\frac{P}{4}$ y en fin, en D la fuerza vertical $P_5=\frac{P}{8}$.

Si hacemos ahora en el plano de las fuerzas $cd=P_1$, $de=ef=fg=P_2$, $gh=P_3$, $hi=ik=kl=P_4$, $la=P_5$, obtendremos finalmente las rectas bl y bd que representan, la primera la reaccion Q_2 en D, y la segunda la reaccion Q_1 en A.

La determinacion de las fuerzas parciales que obran en los diferentes puntos de ensamble es muy sencilla. La descomposicion de $bd=Q_1$ paralelamente á AE y AL da en bm y md las fuerzas 2 y 1; y de la misma manera se determinarán sucesivamente todas las demás fuerzas, hasta la tension del tirante BC, para la cual se obtiene $rs=13$, siendo el punto s la interseccion de la vertical rs con la recta hs trazada por el punto h paralelamente á BD. Hallaremos enseguida sin trabajo las fuerzas 15, 16.... 25 de la segunda mitad del cuchillo. Es fácil reconocer por lo demás, en el plano de las fuerzas, que las piezas simétricamente colocadas no están sometidas á los mismos esfuerzos.

Tambien puede efectuarse la determinacion de las fuerzas parciales empezando por la fuerza 25 que nos daria el triángulo xbl, y como deberemos volver á hallar de este modo los valores anteriores, esta segunda operacion constituye una comprobacion de la primera. Estando el punto x determinado por la interseccion de las rectas bx y lx que se pueden trazar desde el principio, hallamos una comprobacion inmediata de la exactitud del primer trazado en el hecho de que la última recta de la construccion wx trazada paralelamente á KO debe pasar por el punto x. Prácticamente, para obtener esta comprobacion, es decir, para que el último triángulo se cierre, es preciso que el trazado se haya efectuado con el mayor esmero.

Si comparamos las fuerzas dadas por el trazado de la fig. 126 con las de la fig. 124 (construidas en la misma escala) vemos que la influencia de la presion del viento dista mucho de ser despreciable. Para terminar por completo el estudio de la armadura anterior habria que hacer un segundo trazado, suponiendo que la accion del viento se ejerciera en la segunda cara BD.

§ 52

Plano de las fuerzas para una pieza enrejada, libre en uno de sus estremos.

Las piezas enrejadas de hierro ó fundicion tienen muchas aplicaciones en la construccion de máquinas; se usan en los balancines, brazos de gruas, etc. Vamos á indicar con algunos ejemplos el cálculo de este género de piezas.

I. *Soporte enrejado formado de piezas rectas* (figura 127).—Consideremos una pieza fija en uno de sus estremos en B y C y que soporte en el otro, en A, una fuerza P perpendicular á un eje con relacion al cual supondremos la pieza simétrica. El diagrama de las fuerzas puede establecerse de la manera siguiente: se toma $ab=P$ y se descompone esta línea en las direcciones de las piezas 1 y 2; ac y bc representan entonces las fuerzas 1 y 2. Cada una de estas fuerzas se descompone á su vez en otras dos, 1 en 3 y 4, 2 en 5 y 6 por medio de los triángulos bec y adc. Para obtener la resultante de las fuerzas 3 y 5, basta llevar $5=dc$ segun fe; la recta fb es la resultante buscada que, por su descomposicion da las fuerzas 7 y 8. Continuando de la misma manera, el trazado obtenido es simétrico con relacion al eje gc; y podemos pues en rigor contentarnos con una sola mitad. Las rectas ga y gb, que se obtienen en último lugar como resultantes de 15 y 17 despues de 18 y 19, pueden considerarse como representantes de las fuerzas esteriores que, aplicadas en B y C, bastarian para asegurar la fijeza de la pieza en estos puntos, en la hipótesis de existir completa libertad de eleccion para las direcciones de estas fuerzas exteriores.

II. *Soporte cargado en dos puntos* (fig. 128).—La pieza fija en los puntos B y C está sometida en A y D á dos fuerzas verticales P_1 y P_2 dirigidas en sentido inverso como indican las flechas; está limitada por dos líneas poligonales AB y AC. Para todas las fuerzas, desde 1 hasta 13, se efectua el trazado como en el caso anterior. En D las dos piezas que se cruzan se suponen invariablemente unidas, de manera que la fuerza P_2 pueda obrar en 15 y 16; al mismo tiempo que la fuerza P_2, obran en el punto de ensamble D las fuerzas 12 y 13. Si añadimos, pues, en d al trazado 13—12 la fuerza P_2, la distancia comprendida entre el extremo de esta fuerza y el orígen de 13 representará la resultante de las tres fuerzas 13, 12 y P_2, resultante que se puede reemplazar por las dos componentes 15 y 16. Continuando de la misma manera se obtienen sucesivamente las demás fuerzas hasta 20, y finalmente en bf y ea, las fuerzas esteriores Q_1 y Q_2 que equilibran á P_1 y P_2.

III. *Pieza enrejada para brazo de grua* (fig. 129).—Se usan con frecuencia piezas curvas de este género en las gruas de gran potencia. En A y D obran las fuerzas P_1 y P_2; en B debe aplicarse una fuerza esterior Q_1 dirigida horizontalmente, y en C otra fuerza esterior Q_2 cuya direccion hay que determinar. Por medio del plano de las fuerzas es fácil hallar los valores de las

acciones interiores y esteriores. Para estas últimas debemos empezar por determinar la direccion aún desconocida de Q_2, para lo cual se prolonga P_1 y P_2 hasta su encuentro en E; en el plano de las fuerzas, el triángulo abc da ac por resultante de P_1 y P_2, y la recta EF trazada por el punto E paralelamente á ac, es la direccion de esta resultante; si tomamos ahora el punto de interseccion G de esta recta con la fuerza Q_1 prolongada, y lo unimos al punto C, la recta CG representará la direccion de la fuerza Q_2. Construyendo con ayuda de esta direccion y la de Q_1 el triángulo adc, se obtiene inmediatamente $cd=Q_1$ y $da=Q_2$. —Hecho esto, la descomposicion de $P_1=ab$ nos da las fuerzas 1 y 2; reemplacemos esta última por sus componentes 3 y 4, tomemos la resultante de 3 y 1 y descompongámosla en 5 y 6. Continuando así, llegaremos á determinar las fuerzas 8 y 9, cuya resultante produce en su descomposicion las fuerzas 11 y 12. Se añade enseguida la fuerza P_3 á las fuerzas 10 y 11 y se reemplaza su resultante por 13 y 14. En nuestra figura la fuerza 11 tambien deberia haberse aplicado á e, pero el trazado hubiera salido confuso por la excesiva aproximacion de las rectas 12 y 2: por cuyo motivo hemos aplicado primitivamente la fuerza 11 en a_1; pero ahora podemos sin inconveniente trasladarla á su verdadera posicion ef y construir el polígono $11—10—P_2$ cuya línea de cierre cf puede descomponerse y dar 13 y 14. Las fuerzas 15 y 16 se deducen de la resultante de 13 y 12, y por fin la fuerza 17 se obtiene uniendo el punto d al punto de interseccion de 15 y 16, puesto que 16 y 17 deben tener por resultante $Q_2=ad$. Si el trazado se ha hecho con cuidado, la recta 17, en el plano de las fuerzas, debe ser paralela á BC; teniendo pues un medio precioso de comprobar la exactitud del trazado.

§ 53

Observaciones finales.

Despues de la série de aplicaciones de la aritmografia y la grafostática que acabamos de indicar y que de tanta importancia son para el objeto que en esta obra nos hemos propuesto, solo nos falta insistir particularmente sobre el cuidado y la exactitud con que conviene hacer los trazados. El principiante debe guardarse bien de sobrecargar los dibujos con letras y números, ó por mejor decir, debe apuntar los ménos posibles; y siempre habria que hacer las inscripciones indispensables con un lapiz fino. Ciertas cosas accesorias, como lápices bien afilados, de diferentes durezas, un buen tablero, escuadras y reglas de gran precision, un buen compás, buen papel colado y una regla exactamente dividida, son otros tantos elementos que no conviene descuidar en ningun caso. La resolucion rápida y segura de los problemas requiere cierta práctica que se adquiere fácilmenle si se tiene cuidado de no perder nunca de vista el objeto que nos proponemos y procuramos darnos constantemente cuenta de las construcciones auxiliares. Siguiendo este camino se obtienen rápidamente resultados que reunen á la exactitud, la ventaja de presentar la forma más conveniente, que es la de los trazados que hablan á la vista, y que con solo unas cuantas líneas reemplazan una larga y pesada série de cálculos.

TERCERA PARTE

CONSTRUCCION DE ELEMENTOS DE MÁQUINAS

Consideraciones preliminares.

Con el nombre de *elementos constructivos* ó *elementos simples de las máquinas*, se designan las piezas aisladas ó los grupos de piezas que se encuentran y repiten en mayor ó menor número en todas las máquinas. La série de estas piezas no es muy estensa; y no puede por otra parte limitarse de una manera rigurosa, porque no existen principios bien fijos que permitan determinar entre todas las combinaciones posibles de piezas aisladas, las que forman un verdadero grupo. De todos modos, se designa comunmente como elementos constructivos de las máquinas, los que hemos reunido en este capítulo y que vamos á estudiar sucesivamente.

En las dos primeras partes de esta obra (1) todas las fórmulas se han podido representar de una manera general, pero aquí es necesario adoptar una unidad de medida. Las dimensiones lineales las referiremos al milímetro y los pesos al kilógramo, salvo algunos casos particulares en los que se hará observar así. Las velocidades se espresarán por metros, siendo el segundo la unidad de tiempo. El número de vueltas se referirá al minuto. Como unidad de medida del trabajo tomaremos el kilográmetro por segundo reservándonos para los trabajos considerables el caballo de 75 kilográmetros.

(1) El mismo *Constructor*.

CAPÍTULO PRIMERO

ROBLADURAS

§ 54

Roblones.

Los roblones sirven para asegurar la trabazon invariable de los cuerpos en forma de placa, como el palastro, y utilízanse tambien para fijar vástagos de hierro planos y piezas limitadas por superficies planas que entran en la composicion de las vigas metálicas y otras construcciones análogas. Deben considerarse los roblones en el límite del dominio de los elementos de máquinas, puesto que en la operacion misma de colocarlos esperimentan un cambio de forma muy marcado y que en realidad sólo quedan terminados despues de esta operacion.

Las figuras siguientes (130 á 134) representan las diversas formas que pueden tener los roblones. El roblon ordinario, de hierro forjado, se compone de una primera cabeza (fig. 130) preparada antes de la colocacion y de una segunda cabeza (fig. 131) que se obtiene por la operacion de la róbladura, rebatiendo la porcion del cuerpo cilíndrico que en la fig. 130 sale fuera del palastro; esta salida que varia de 1'3 á 1'7 del diámetro del cuerpo del roblon, debe ser evidentemente tanto menor cuanto mejor llene este cuerpo el agujero de las planchas que ha de unir. Cuando la cabeza de cierre se hace á mano con el martillo, sin ningun instrumento intermedio, presenta forma cónica como la de la fig. 131; pero cuando se hace uso de un cuño ó remachador, la cabeza tiene casi siempre forma esférica (fig. 133) ó parecida á la de un conoide (fig. 132). Los dos pequeños rebordes que presentan los estremos del cuerpo del roblon en la fig. 133 tienen por objeto aumentar fuertemente la resistencia.

La forma que representa la fig. 132, que se compone de un doble tronco de cono, puede obtenerse fácilmente en el taladro de los agujeros á máquina con la condicion de dar á la matriz un diámetro superior al del punzon. Resulta, en efecto, de los esperimentos de *Reiche*, que un punzon cilíndrico da un agujero cónico de bordes muy limpios, cuando el diámetro de la matriz excede al del punzon en una cantidad igual al cuarto del espesor del palastro. La fig. 134 representa un roblon de cabeza sesgada ó frisada, forma que se utiliza

en ciertos casos y sobre todo en las robladuras de las planchas destinadas á formar las paredes de los buques de hierro.

Para las robladuras de las piezas de los puentes conviene poner el mayor cuidado en la determinacion de los diferentes elementos de los roblones. Las figs. 135 á 137 representan las dimensiones proporcionales que se han adoptado para la robladura del puente de *Dirschau* despues de ensayos muy notables efectuados por el ingeniero *Krüger*. La fig. 135 presenta la cabeza del roblon normal; la fig. 136 la cabeza semisesgada, y por fin la fig. 137 la enteramente sesgada.

Los roblones cuyo cuerpo tiene 25 á 30^{mm} de diámetro, pueden ser rebatidos con un martillo de 4 á 4'5^{k} de peso; y para dar á la cabeza su forma definitiva, por medio del remachador, se usa un martillo de peso más considerable, hasta 7'5^{k}. Segun *Molinos* y *Prosnier* una brigada de obreros ejercitados, trabajando en piezas colocadas horizontalmente (piezas de puentes) puede colocar por dia:

200 á 250	roblones de	18^{mm}	de diámetro.
180 á 200	—	20	—
100 á 125	—	22	—
90 á 100	—	25	—

Para las piezas colocadas verticalmente solo debemos admitir los tres cuartos de estos números.

En la fábrica de calderas de *Piedbœuf* (Aquisgram) el número de roblones colocados por brigada, en calderas completamente preparadas, es mucho más considerable; este número es, en efecto, para una jornada de 11 horas:

350	roblones de	14 á 16^{mm}
325	—	17 á 18
300	—	19 á 20
280	—	21 á 22
260	—	23 á 24
240	—	25 á 26
220	—	27 á 28
200	—	29 á 30

Para las calderas cilíndricas de más de un metro de diámetro deben aumentarse estos números en un 10 por 100, mientras que por el contrario deben disminuirse un 10 por 100 en los casos de formas incómodas y difíciles de trabajar. Una brigada completa de obreros se compone de un roblador, dos forjadores ó golpeadores, y dos manobreros, uno para calentar los roblones y otro para rechazar con un martillo desde el lado opuesto al que forma la cabeza; para los roblones de 14 á 16 ^{mm} de diámetro basta un solo golpeador.

En estos últimos años va adquiriendo cada vez más desarrollo el roblado á máquina. Ofrece la ventaja de que el cuerpo del roblon toma rápidamente su forma definitiva, lo cual es esencialmente favorable á la resistencia; y además, en ciertos casos es mucho más económico. En la robladura de las vigas de puentes, la máquina, despues de haberse utilizado en el puente de Conway y despues de haber recibido ciertas modificaciones, ha llegado hoy á tener un vasto campo de aplicaciones; y por otro lado, gracias á los numerosos ensayos que se han hecho para perfeccionarla, parece destinada á disminuir cada vez más la parte de trabajo manual en las operaciones de roblamiento de las calderas de vapor (1).

§ 55

Resistencia de las robladuras.

Los ensambles por roblones deben satisfacer á condiciones muy diversas segun la naturaleza de las obras. En ciertos casos debe exigirse sobre todo gran solidez (vigas de palastro, llenas ó enrejadas, cuchillos, etc.); en otros casos (depósitos de poca presion interior, navios, gasómetros, etc.) se debe atender principalmente á la hermeticidad; y puede suceder que se necesiten á la vez solidez y hermeticidad (calderas de vapor). Distinguiremos pues las robladuras de fuerza y las de hermeticidad.

Las robladuras de fuerza, cuando están juntas en

(1) Entre las máquinas de roblar vigas y otras piezas del mismo género, debe colocarse en primer lugar la robladora hidráulica de *Tweddell*. Se halla descrita bajo diferentes formas en gran número de artículos de Revistas: *Engineering*, 1875, Enero, pág. 76; la máquina de *Tweddell* perfeccionada por *Sellers*, Journal of the Franklin Inst., 1876, pág. 305: la máquina *Tweddell* sobre grua, Scientific American, 1876, Abril pág. 226; máquina de *Tweddell* para talleres, Revue industrielle 1876,, pág. 349.

Las grandes máquinas fijas de roblar, de vapor ó de presion hidráulica son: la máquina de *Garforth*, V. Imp. Cyclopædia de *Johnson*, página 42; la hermosa máquina de *Gouin*, que como la anterior se mueve por el vapor, véase *Molinos* y *Prosnier*, Ponts métalliques, pág. 180; la Robladora hidráulica de Creuzot (que da una presion de 20 á 80 toneladas en los roblones y produce de 2 á 25 piezas por minuto), véase Revue industrielle, 1875, pág. 369; la gigantesca máquina de roblar de presion hidráulica de M. *Kay* y M. *George* (en la cual la presion sobre los roblones puede llegar hasta 120 toneladas), Engineering, 1875, Marzo, pág. 223. Como disposicion nueva y al parecer muy ventajosa, se puede citar la máquina de roblar, de vapor ó de aire, de *Allen* destinada á las robladuras de calderas. En esta máquina, el enlace entre la pieza que lleva el punzon y la que hace resistencia, está hábilmente combinado por una varilla que pasa por uno de los agujeros de los roblones que están aún libres. Esta máquina que ha figurado en la Exposicion de Filadelfia de 1876 y en la de Paris de 1878, coloca 3 y más roblones por minuto.

una sola cara de las planchas (fig. 138 y 139) llevan el nombre de robladuras de cubierta, mientras que constituyen robladuras de cadena, cuando la union se verifica en las dos caras (fig. 140): esta última forma de robladura se usa principalmente en las vigas de los puentes. La robladura de la fig. 139 se designa comunmente con el nombre de robladura de union plana y tiene numerosas aplicaciones en la construccion de tubos, chimeneas, etc. La union plana debe considerarse como una hoja de palastro.

Suponiendo constante el espesor δ del palastro, es evidente que una robladura no puede presentar nunca una resistencia tan grande como el del mismo palastro macizo; y sin embargo, es posible aproximarse suficientemente, haciendo que las robladuras tengan dimensiones que estén en relaciones convenientes. Admitiendo que el borde del palastro sea bastante sólido, el caso más ventajoso es aquel en que los roblones y el palastro comprendido entre los agujeros presentan el mismo grado de resistencia, es decir, poseen el mismo coeficiente de seguridad. Por consiguiente, si suponemos que los roblones y el palastro estén formados de la misma materia, la tension en la seccion de los roblones debe, segun el § 5, ser igual á o'8 de la tension en el palastro. Conforme á esta hipótesis se han establecido las formulas siguientes en las cuales no se ha tenido en cuenta el frotamiento de las diversas partes de la robladura.

Designando por

δ el espesor del palastro,
d el diámetro de un roblon,
a la separacion (de eje á eje) de dos roblones consecutivos de una misma fila,
n el número de filas de roblones,
σ resistencia á la estension,
φ el módulo de fuerza de la robladura, es decir, la relacion de la resistencia de la robladura á la del palastro macizo, obtendremos las relaciones más ventajosas bajo el punto de vista de la resistencia, tomando:

en el caso de la robladura de cubierta:

$$\frac{4}{5}\sigma n\frac{\pi d^2}{4}=\sigma(a-d)\delta$$

ó bien

$$n\frac{\pi}{5}d^2=a\delta-d\delta$$

luego

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{\delta}&=n\frac{\pi}{5}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2+\frac{d}{\delta}\\ \text{de donde}\qquad \varphi&=1-\frac{d}{a}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}\frac{5}{\pi}\frac{\delta}{d}}\end{aligned}\right\}\qquad(43)$$

pues

$$\left(\varphi=\frac{a-d}{a}=\frac{n\frac{\pi}{5}\frac{d^2}{\delta}}{n\frac{\pi}{5}\frac{d^2}{\delta}+d}\right)$$

en el caso de la robladura:

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{\delta}&=2n\frac{\pi}{5}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2+\frac{d}{\delta}\\ \text{de donde}\qquad \varphi&=1-\frac{d}{a}=\frac{1}{1+\frac{1}{2n}\frac{5}{\pi}\frac{\delta}{d}}\end{aligned}\right\}\qquad(44)$$

El borde del palastro se halla sometido á dos esfuerzos á la vez: uno de cizalla y otro de flexion. Designemos por b' la anchura necesaria para resistir al primer esfuerzo y por b'' la que exige el segundo, suponiendo medidas estas distancias desde el borde del palastro al centro del roblon más próximo. Para obtener una resistencia que sea próximamente igual á la del palastro agujereado, debemos tomar:

en el caso de la robladura de cubierta

$$\left.\begin{aligned}\frac{b'}{\delta}&=\frac{5}{8}\frac{a-d}{n\delta}=\frac{\pi}{8}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2\\ \frac{b''}{\delta}&=\left(o'5+o'56\sqrt{\frac{d}{\delta}}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(45)$$

en el caso de la robladura de cadena:

$$\left.\begin{aligned}\frac{b'}{\delta}&=\frac{5}{8}\frac{a-d}{n\delta}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2\\ \frac{b''}{\delta}&=\left(o'5+o'79\sqrt{\frac{d}{\delta}}\right)\frac{d}{\delta}\end{aligned}\right\}\qquad(46)$$

Como anchura del borde, prácticamente utilizable, que deja un espacio suficiente para la cabeza del roblon, podemos tomar en los dos casos:

$$b=1'5\,d\ \text{ó}\ \frac{b}{\delta}=1'5\frac{d}{\delta}\qquad(47)$$

Otro elemento interesante es la presion por unidad de superficie p que ejerce el cuerpo del roblon en la superficie cilíndrica del agujero, en el cual se halla alojado. Designando por S_2 la tension en el palastro agureado tenemos:

en el caso de la robladura de cubierta:

$$\frac{p}{S_2} = 0{,}2\,\pi\,\frac{d}{\delta} \qquad (48)$$

en el caso de la robladura de cadena:

$$\frac{p}{S_2} = 0{,}4\,\pi\,\frac{d}{\delta} \qquad (49)$$

El cuadro siguiente contiene una série de valores numéricos dados por las fórmulas anteriores, valores representados en forma sensible en la escala de proporciones que acompaña á dicho cuadro.

§ 56

Tabla y escala de proporciones para las robladuras de fuerza.

	$d/\delta =$	1'0		1'5		2'0		2'5		3'0		4'0	
	$n =$	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Robladuras de cubierta.	$a/\delta =$	1'63	2'22	2'92	4'33	4'52	7'04	6'43	10'37	8'67	14'33	14'07	24'14
	$b'/\delta =$	0'39	0'39	0'88	0'88	1'57	1'57	2'54	2'54	3'53	3'53	6'28	6'28
	$b''/\delta =$	1'06	1'06	1'78	1'78	2'58	2'58	3'46	3'46	4'31	4'31	6'48	6'48
	$\varphi =$	0'39	0'55	0'49	0'65	0'56	0'72	0'61	0'76	0'65	0'79	0'72	0'83
	$p/S_2 =$	0'63	0'63	0'94	0'94	1'26	1'26	1'57	1'57	1'88	1'88	2'51	2'51
Robladuras de cadena.	$a/\delta =$	2'26	3'52	4'33	7'15	7'04	12'05	10'37	18'21	14'33	25'61	24'14	44'21
	$b'/\delta =$	0'79	0'79	0'96	0'96	3'14	3'14	4'91	4'91	7'07	7'07	12'56	12'56
	$b''/\delta =$	1'29	1'29	2'20	2'20	3'24	3'24	4'37	4'37	5'60	5'60	8'32	8'32
	$\varphi =$	0'56	0'72	0'65	0'79	0'72	0'83	0'76	0'86	0'79	0'90	0'83	0'94
	$p/S_2 =$	1'26	1'26	1'88	1'88	2'51	2'51	3'14	3'14	3'77	3'77	5'03	5'03

El exámen de la tabla y de la fig. 141 demuestra que es difícil obtener en la práctica módulos de fuerza poco elevados para los roblones de que se trata y que para eso seria preciso recurrir á roblones de gran diámetro, los cuales ofrecen inconvenientes bastante graves. La robladura de cubierta seria la que mejor se prestaria á este uso. En la de cadena que á primera vista parece la más ventajosa, nos hallamos en presencia de una dificultad, y es que la presion p crece muy rápidamente, de manera que, ya para $d = 3\delta$ se llega al módulo de rotura por compresion del hierro (22^k), cuando la tension en las partes próximas á los clavos es de 6^k. Así se esplica en parte el abandono de las robladuras en las construcciones destinadas á soportar cargas sometidas á frecuentes variaciones. Parece conveniente en las robladuras de cadenas no tomar para d/δ un valor muy superior á 2. *Fairbairn*, á quien sus esperimentos han conducido á resultados conformes á los números de la tabla, ha propuesto dar á las planchas, en toda la parte roblada, un espesor mayor, igual á $(1 : \varphi)\,\delta$; esta proposicion no ha sido adoptada por las dificultades de ejecucion que presenta (1).—En cuanto á la distancia del centro de un roblon al borde del palastro, debe considerarse el valor $b = 1{,}5\,d$ como muy conveniente, puesto que coloca el borde en condiciones de seguridad satisfactorias, tanto bajo el punto de vista de la flexion como de la cizalla, por lo ménos en el caso de la robladura de cubierta.

(1) La cuestion que ha sido recientemente tratada en Alemania, con motivo de las cubiertas de proteccion de las turbinas de las fábricas de azúcar, podria conducir á tratar de esta proposicion, si no se quiere adoptar un medio que es más preferible y que consiste en soldar estas cubiertas.

§ 57

Robladuras de fuerza, con disposicion convergente de los roblones.

En el caso en que se puede establecer más de dos filas de roblones, se puede obtener una robladura de gran resistencia, sin recurrir al empleo de roblones de un diámetro exagerado, disponiéndolo de manera que el número de los roblones en cada fila decrezca en progresion aritmética, á partir de la fila del medio. Los números de los roblones en las filas sucesivas, se hallan entonces en las relaciones:

1 : 2 : 1	Total 4
1 : 2 : 3 : 2 : 1 . .	— 9
1 : 2 : 3 : 4 : 3 : 2 : 1 .	— 16

Las figuras 142, 143 y 144 representan robladuras

de esta clase que para abreviar podemos designar con el nombre de robladuras convergentes, y solo se aplican á los ensambles de palastro para cubiertas. Los espacios en los cuales se reproduce regularmente la disposicion de los roblones, se hallan indicados por rectas punteadas. En el sentido de la longitud de las filas, es uniforme el reparto de los roblones. Si designamos por m el número de roblones contenidos en la fila del medio, entre dos trazos de division, la suma de todos los roblones comprendidos entre estos mismos trazos será igual á m^2 (1).—Este número m puede en rigor servir para designar con más precision la robladura correspondiente; y segun esto, la fig. 142 representa una robladura convergente de dos filas, la fig. 143 de tres filas, etc. En oposicion á las robladuras convergentes los ensambles por roblones anteriormente examinados pueden designarse con el nombre de robladuras paralelas.

Si suponemos, como antes, que la tension P ejercida en la parte del ensamble comprendida entre dos divisiones, se halle uniformemente repartida entre todos los roblones, se obtienen las condiciones más ventajosas para los roblones de la primera fila, observando la relacion siguiente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{\delta} &= m\frac{\pi}{5}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2+\frac{1}{m}\frac{d}{\delta} \\ \text{ó}\qquad \frac{a}{d} &= m\frac{\pi}{5}\left(\frac{d}{\delta}\right)+\frac{1}{m} \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

Si designamos ahora por $S^1{}_2$, $S^{II}{}_2$, $S^{III}{}_2$, $S^{IV}{}_2$...., las tracciones ejercidas en el palastro superior agujereado, segun las rectas I, II, III, IV..., (fig. 144), tenemos:

$$\left.\begin{aligned} P &= S^1{}_2\,(ma-d)\,\delta \\ &= S^{II}{}_2\,(ma-2d)\,\frac{m^2}{m^2-1}\,\delta \\ &= S^{III}{}_2\,(ma-3d)\,\frac{m^2}{m^2-3}\,\delta \\ &= S^{IV}{}_2\,(ma-4d)\,\frac{m^2}{m^2-6}\,\delta \\ &= S^{V}{}_2\,(ma-5d)\,\frac{m^2}{m^2-10}\,\delta \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

En el caso en que $S^1{}_2$ sea igual á $S^{II}{}_2$, resulta:

$$\frac{a}{d}=\frac{m^2+1}{m} \qquad (52)$$

(1) Tenemos, en efecto; $\frac{1}{2}\,[1+m]\,m+\frac{1}{2}\,[1+(m-1)]\,(m-1)=m^2$.

y en la misma hipótesis:

$$\frac{S^{III}{}_2}{S^1{}_2}=\frac{m^2-3}{m^2-2},\quad \frac{S^{IV}{}_2}{S^1{}_2}=\frac{m^2-6}{m^2-3},\quad \frac{S^{V}{}_2}{S^1{}_2}=\frac{m^2-10}{m^2-4}$$

es decir, que las tensiones ejercidas en las rectas III, IV, V..... son entonces inferiores todas á $S^1{}_2=S^{II}{}_2$. De donde resulta que la hipótesis anterior puede utilizarse, pues introduciéndola en la fórmula (50), se obtiene:

$$\frac{d}{\delta}=\frac{5}{\pi}=1'5916 \text{ ó } 1'6 \qquad (53)$$

esto significa que $\frac{d}{\delta}$ es constante y que debemos tener el valor 1'6.

Por otra parte, designando por S_1 la traccion en el palastro macizo, tenemos para el módulo de fuerza φ:

$$\varphi=\frac{S_1}{S^1{}_2}=1-\frac{d}{ma}=\frac{m^2}{m^2+1} \qquad (54)$$

La presion p por unidad de superficie en los roblones está representada por

$$p=\frac{P}{m^2\delta d}=S^1{}_2 \qquad (55)$$

Todas estas relaciones son muy favorables; para diversos valores de m se obtienen los siguientes resultados:

$m=$	2	3	4	5
$\frac{d}{\delta}=$	1'6	1'6	1'6	1'6
$\frac{a}{d}=$	2'50	3'33	4'25	5'20
$\frac{a}{\delta}=$	4'00	5'32	6'80	8'32
$\varphi=$	0'80	0'90	0'94	0'96

Para el ensamble de placas de gran longitud es conveniente limitarse al empleo de la robladura convergente de dos filas ($m=2$), al paso que la robladura de tres filas lo más, conviene en las uniones de barras de seccion rectangular, como las vigas; y en ambos casos la robladura se hace ordinariamente á union plana. La figura 145 representa una robladura de este género de dos filas y la fig. 146 una robladura de tres filas.

Además de las robladuras convergentes que acabamos de examinar, existen otras, como por ejemplo, aquellas en que la union plana tiene un espesor supe-

rior al de las placas que cubre. En este caso particular, el cálculo se deduce fácilmente del anterior. (V. § 59 al fin).

§ 58

Ribeteado de las calderas de vapor.

En el ensamble del palastro de las calderas de vapor solo se usan de ordinario robladuras paralelas. Como en este caso la hermeticidad es cosa muy esencial, debemos evitar que los roblones estén demasiado separados; si el palastro es grueso deben ser los roblones de mayor diámetro y en mayor número que cuando el palastro es delgado. En todas estas clases de robladuras, los bordes del palastro y las cabezas de los roblones deben estar pulidas con gran esmero; para lo cual hay que preparar de antemano los bordes de una manera especial: el método más antiguo consiste en practicar con el buril una ranura longitudinal en el canto que termina uno de los palastros, normalmente al otro (fig. 147) y en pulir enseguida la parte inferior de esta ranura. En los métodos más recientes, los palastros están cortados oblícuamente con la cizalla, en todo el espesor de la seccion, como en la fig. 148, de manera que la operacion del pulimiento puede hacerse inmediatamente sin trabajo preparatorio. El ángulo de corte es de 18° $^1/_2$ próximamente, lo que corresponde á una inclinacion de $^1/_3$. Segun el americano *Connery* se hace el pulimiento en las mejores condiciones, usando un instrumento muy redondeado (fig. 149); esta forma de herramienta tiene la ventaja de evitar acciones perjudiciales en el otro palastro, resultado que no siempre se obtiene con la antigua forma, y al mismo tiempo contribuye á producir un contacto más estenso entre ambos palastros.

Siendo la cuestion de hermeticidad la más importante de todas cuando se trata de calderas de vapor, no es posible determinar las dimensiones proporcionales como lo hemos hecho anteriormente, y hay que recurrir á las indicaciones de la práctica. Segun *Lemaitre* en los casos de robladura sencilla, se debe tener:

$$\left.\begin{array}{l} d = 4 + 1{,}5\delta \\ a = 10 + 2d \\ b = 1{,}5d \end{array}\right\} \qquad (56)$$

Tambien se utiliza en las calderas la doble robladura de cubierta. Empléase ventajosamente en los ensambles de palastro de las calderas cilíndricas, en el sentido de la longitud, al paso que las robladuras trasversales son sencillas; y eso es muy racional, puesto que el esfuerzo á que se hallan sometidas las secciones longitudinales, es sensiblemente doble del que se ejerce en las secciones trasversales.

Conservando para d el mismo valor que anteriormente, podemos tomar, en el caso de robladura doble, es decir, de robladura paralela en dos filas, para la separacion ó distancia a_1 de los roblones:

$$a_1 = 20 + 3d, \qquad (57)$$

mientras que la distancia de una de las filas al roblon más próximo de la segunda permanece igual á $10 + 2a$ como anteriormente. Algunos constructores conservan este último valor para la distancia de los roblones en cada fila. (Véase más léjos fig. 151).

Bajo el punto de vista del módulo de fuerza φ conviene observar que, en las robladuras de que se trata, los roblones y el palastro agujereado no tienen el mismo grado de resistencia. Debemos por consiguiente determinar separadamente los módulos de fuerza de cada uno de estos elementos y considerar al más pequeño como representante del módulo de fuerza de la robladura.

Si designamos por:

φ' el módulo de fuerza del palastro agujereado,
φ'' — — de los roblones,

tendremos, para los valores de estos módulos correspondientes á las fórmulas anteriores:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi' = \dfrac{a - d}{a} \\ \varphi'' = \dfrac{\pi}{5} n \dfrac{d^2}{a\delta} \end{array}\right\} \qquad (58)$$

En cuanto á la presion por unidad de superficie p del cuerpo del roblon, se obtiene con las relaciones anteriores, así para la robladura sencilla como para la doble.

$$\frac{p}{S_2} = \frac{\pi}{5}\left(\frac{4}{\delta} + 1{,}5\right) \qquad (59)$$

Se admite generalmente que en las calderas de vapor la tension S_2 en el palastro agujereado no pasa de 3 á 4^k.—Los principales resultados dados por las fórmulas anteriores se hallan reunidos en la tabla siguiente y en la escala de proporciones que la acompaña.

§ 59

Tabla relativa á las robladuras de las calderas de vapor.

δ	d	ALTURA. $0'6\,d$	DIÁMETRO. $1'8\,d$	ALTURA. $0'8\,d$	DIÁMETRO. $2\,d$	LONGITUD DEL CUERPO.	a SENCILLA.	a_2 DOBLE.	MÓDULOS DE FUERZA. φ'	φ''	φ''_2	PESOS DE 100 ACOPLOS DE CABEZA.
2	7	4'2	12'6	5'6	14	16	24	41	0'71	0'63	0'75	0'49
3	8'5	5	15	7	17	20	27	45	0'69	0'56	0'67	0'81
4	10	6	18	8	20	25	30	50	0'67	0'52	0'63	1'43
5	11'5	7	21	9	23	30	33	55	0'65	0'50	0'60	2'11
6	13	8	23	10	26	34	36	59	0'64	0'49	0'60	3'03
7	14'5	9	26	12	29	39	39	64	0'63	0'48	0'59	4'41
8	16	10	29	13	32	43	42	68	0'62	0'48	0'59	6'04
9	17'5	11	32	14	35	48	45	73	0'61	0'48	0'59	7'84
10	19	11	34	15	38	52	48	77	0'60	0'47	0'59	9'87
11	20'5	12	37	16	41	57	51	82	0'60	0'47	0'59	13'22
12	22	13	40	18	44	61	54	86	0'59	0'47	0'59	15'12
13	23'5	14	42	19	47	66	57	91	0'59	0'47	0'59	18'22
14	25	15	45	20	50	71	60	95	0'58	0'47	0'59	22'98
15	26'5	16	48	21	53	75	63	100	0'58	0'47	0'59	27'25
16	28	17	50	22	56	80	66	104	0'57	0'47	0'59	32'57
17	29'5	18	53	24	59	84	69	109	0'57	0'47	0'59	37'40
18	31	19	56	25	62	89	72	113	0'57	0'47	0'59	42'59

La longitud del cuerpo del roblon se ha tomado igual á $2\delta+1'7d$; y corresponde por consiguiente á un roblon destinado á unir dos palastros de espesor δ, con una adicion suficiente para tener en cuenta el exceso de diámetro en el taladro de agujeros de los palastros (V. § 54). La última columna da números que se pueden utilizar en la construccion de anteproyectos.

La fig. 150 da en forma de trazados, la sucesion de los principales valores de la tabla anterior. La inspeccion de esta figura muestra que en la robladura sencilla el módulo de fuerza φ'' de los roblones es siempre menor que el módulo φ' del palastro agujereado y queda casi constantemente inferior á 0'50. De aquí se deduce que las robladuras sencillas de calderas presentan una resistencia que ordinariamente no es ni la mitad que la del palastro entero. Cuando se dobla la robladura ó ribete conservando para la separacion de los roblones, el valor $a=10+2d$, el módulo φ'' tiene segun la fórmula (58), un valor doble del que indica la tabla y puede llegar á ser superior á 1 si el espesor δ es pequeño. Pero en este caso el módulo φ' es el menor de los dos, y por consiguiente debemos considerar que representa la resistencia de la robladura; de donde resulta que doblando los roblones se consigue solamente elevar el módulo de fuerza hasta el valor indicado por φ'. Si en una robladura paralela doble determinamos la distancia a_2 de los roblones por la fórmula (57), φ' y φ'' toman valores superiores á los que tenian anteriormente. El menor de los dos módulos es el de los roblones; y designándolo por φ''_2 se tiene:

$$\varphi''_2=2\,\frac{\pi}{5}\,\frac{d^2}{a\delta}. \qquad (60)$$

Sus diferentes valores, que se hallan comprendidos entre 0'75 y 0'59, han sido trasladados á la tabla y á la escala de proporciones; los de φ'_2 no figuran en ella. —La fig. 150 da tambien curvas de presion por unidad de superficie p; y estas curvas demuestran que esa presion no pasa nunca de los límites admisibles.

La fig. 151 representa una robladura doble, en la cual la separacion de los roblones se ha tomado igual $10+2d$, mientras que en la fig. 152 la separacion a_2 de los roblones en cada fila es igual á $20+3d$.

La robladura de union plana, fig. 139, que anteriormente hemos indicado como utilizable á veces en la construccion de calderas de vapor, ya sea como robladura sencilla, ya como doble, no se emplea nunca por los constructores americanos en esa especie de aparatos; prefieren el modo de ensamble representado por la figura 153, que no es más que una combinacion de la robladura paralela con la robladura convergente.—La banda de cubierta está aplicada en la pared interior de la caldera y fija por tres líneas de roblones; los roblones de las dos rectas estremas tienen el mismo diámetro que los de la línea principal, pero su separacion es doble. Esta disposicion tiene el inconveniente de no poder pulir la union inferior de la robladura principal, pero en cambio aumenta la resistencia.

Para esta clase de ensamble, los módulos de fuerza φ' y φ'' están dados por las fórmulas:

$$\varphi' = \frac{2a-d}{2a}, \qquad \varphi'' = 0{,}3\pi\frac{d^2}{a\delta};$$

falta determinar en cada caso particular el menor de esos valores que debe tomarse como resistencia de la robladura; y conviene observar que esta resistencia es superior á la de nuestra robladura doble.

Si consideramos las 4 robladuras en rombo que forman una série, los dos roblones de la robladura principal se hallan (en la hipótesis de una reparticion uniforme) sometidos á un esfuerzo igual á $^1/_3 P$; y lo mismo sucede con los otros dos roblones: la banda de palastro de union, que pasa por la robladura principal, no ejerce ningun esfuerzo en los dos roblones de esta robladura, puesto que los otros dos roblones ejercen en esta banda esfuerzos iguales y de sentido contrario. Segun esto, tenemos para los roblones: $\frac{P}{3} = \frac{\pi d^2}{4} S'_3$ y para el palastro macizo $P = S_1 . 2a\delta$. El módulo de fuerza $\varphi'' = \frac{S_1}{S_3} = \frac{S_1}{^3/_4 S'_3}$ (puesto que se trata de cizallamiento) será $\varphi'' = {}^4/_5 . {}^3/_4 \frac{\pi d^2}{2a\delta} = \frac{0{,}3 . \pi d^2}{a\delta}$. Para la robladura principal tenemos: $\varphi' = \frac{S_1}{S''_2} = {}^3/_2 \frac{(2a-2d)\delta}{2a\delta} = \frac{3(a-d)}{2a}$: este valor es evidentemente superior á $\frac{2a-d}{2a}$ y por tanto nunca hay necesidad de calcularlo.

Ejemplo. $\delta = 8$, $d = 16$, $a = 10 + 2d = 42$. *Se halla* $\varphi' = \frac{84-16}{84} = 0{,}81$ *y* $\varphi'' = 0{,}3\pi\frac{256}{8 . 42} = 0{,}72$. *Debemos observar aquí que los constructores de calderas americanos adoptan en general para separacion de los roblones, valores superiores á los que nosotros acostumbramos. Como prueba podemos citar las dimensiones siguientes, tomadas de tres robladuras ejecutadas en el Norte América:*

1.° *Robladura sencilla:* $d = 17{,}46$, $a = 47{,}62$, $\delta = 9{,}52$: *la fórmula* $a = 10 + 2d$ *daria simplemente* $a = 44{,}92$.

2.° *Robladura sencilla:* $d = 22{,}23$, $a = 66{,}67$, $\delta = 9{,}52$: *la fórmula anterior daria* $a = 54{,}46$.

3.° *Robladura doble:* $d = 19$, $a_2 = 85{,}7$, $\delta = 9{,}52$: *la fórmula* $a = 20 + 3d$ *daria* $a_2 = 77$.

Gasómetros. Bajo el punto de vista del espesor del palastro y del género de robladura, los gasómetros presentan pocas variaciones. En gran número de aparatos de este género, despues de haber sufrido la prueba del tiempo hallamos roblones de 7^{mm} á $7{,}5^{mm}$ (puestos en frio) con una separacion de 25^{mm} y una distancia al borde del palastro de 13^{mm}: la hermeticidad está asegurada por una guarnicion de cáñamo impregnado de minio, que se halla bajo la cubierta esterior.

§ 60

Tabla de los pesos de las planchas metálicas.

ESPESOR de la PLANCHA (en milímetros).	PESO EN KILOGRAMOS POR UN METRO CUADRADO.					
	HIERRO.	FUNDICION.	LATON.	COBRE.	PLOMO.	ZINC.
1	7'79	7'24	8'51	8'79	11'35	6'86
2	15'58	14'49	17'02	17'58	22'70	13'72
3	23'36	21'73	25'52	26'36	34'06	20'58
4	31'15	28'97	34'03	35'15	45'41	27'44
5	38'94	36'22	42'54	43'94	56'76	34'31
6	46'73	43'46	51'05	52'73	68'11	41'17
7	54'52	50'70	59'56	61'52	79'46	48'03
8	62'30	57'94	68'06	70'30	90'82	54'89
9	70'09	65'19	76'57	79'09	102'17	61'75
10	77'88	72'43	85'08	87'88	113'52	68'61
11	85'67	79'67	93'59	96'67	124'85	75'47
12	93'46	86'92	102'10	105'46	136'22	82'33
13	101'24	94'16	110'60	114'24	147'58	89'19
14	109'03	101'40	119'11	123'03	158'93	96'05
15	116'82	108'65	127'62	131'82	170'28	102'92
16	124'61	115'89	136'13	140'61	181'63	109'78
17	132'40	123'13	144'64	149'40	192'98	116'64
18	140'18	130'37	153'14	158'18	204'34	123'50
19	147'97	137'62	161'65	166'97	215'69	130'36
20	155'76	144'86	170'16	175'76	227'04	137'22
21	163'55	152'10	178'67	184'55	238'39	144'08
22	171'34	159'35	187'18	193'34	249'74	150'94
23	179'12	166'59	195'68	202'12	261'10	157'80
24	186'91	173'83	204'19	210'91	272'45	164'66
25	194'70	181'08	212'70	219'70	283'80	171'53

El peso de un metro cuadrado de una plancha es igual al peso de un decímetro cúbico de la materia de que está formada (ó igual á su peso específico), multiplicado por el espesor de la plancha en milímetros.

§ 61

Otras formas de ensamble con roblones.

Formacion de superficies de union. La fig. 154 representa el modo de ensamble de tres hojas. Para asegurar la colocacion de estas hojas unas sobre otras, el palastro número 2 está adelgazado en el borde y el número 1 encorvado. En la fig. 155 que representa un ensamble de cuatro hojas, los palastros números 2 y 3 están terminados por biseles, mientras que los palastros números 1 y 4 no están adelgazados ni encorvados.

En la construccion de las calderas de vapor se da á los diversos anillos la forma cilíndrica como en la figura 156, ó la de tronco de cono, como en la 157. De estos dos sistemas de encaje el segundo ofrece la ventaja de que todas las salidas se presentan de la misma manera, con relacion á la direccion de la llama, pero exige que se dé una lijera curvadura á los dos bordes del palastro que deben formar las bases de cada tronco de cono, así como á las dos filas de roblones: esta curvadura se determina como sigue:

Si designamos por:

D el diámetro de la caldera (fig. 157),
B la anchura de una hoja (fig. 158) medida sobre la circunferencia,
L la longitud de esta hoja medida entre las líneas de roblones trasversales,
f el valor buscado de la flecha del arco B deberemos tomar:

$$\frac{f}{\delta} = \frac{1}{4}\frac{B}{D}\frac{B}{L} \qquad (61)$$

Ejemplo. *En los tubos que á causa de su pequeño diámetro pueden formarse de una sola hoja (hervideros, tubos de agua, etc.) se tiene* $B = \pi D$. *En este caso si la longitud* L *fuese igual á* 1^m, *y la anchura* B *igual á* 2^m, *deberiamos tomar* $\frac{f}{\delta} = 0'785 \cdot 2 = 1'570$, *es decir, que* f *tendria un valor lijeramente superior á* $1\ ^1/_2$ *del espesor del palastro.*

Cuando se hace uso de robladuras con bandas de cubierta, se debe poner atencion especial en los puntos de cruce, para obtener una hermeticidad perfecta. Un medio fácil para obtener buenos resultados consiste en colocar las bandas de cubierta de las robladuras longitudinales en una de las caras del palastro y las de las robladuras trasversales en la otra cara. Sin embargo, en las cajas de ténders se hallan numerosos ejemplos de robladura, en las cuales las bandas de cubierta se hallan dispuestas á un mismo lado y se traban unas con otras en los puntos de cruce.

Rigidez.—Para dar rigidez al palastro se ha recurrido con frecuencia á cantoneras y hierros en forma de T. —Las fig. 159 á 161 representan dos cantoneras, una interior, otra esterior, y la fig. 160 un hierro en forma de T.—Las dimensiones inscritas en la fig. 159 son muy convenientes en general. Las formas de secciones de hierros en forma de T, que se encuentran en la práctica, son muy numerosas, y seria de desear que se llegase pronto á una inteligencia en la eleccion de los calibres que hay que adoptar.

Para unir dos planchas paralelas bastante próximas y mantener constante su separacion, se usan roblones con filetes ó tirantes. Las figuras 162 y 163 representan, antes y despues de la operacion de la robladura, los roblones de este género, de cobre, que se emplean comunmente en los fogones de las locomotoras y de las calderas de los barcos de vapor. El agujero longitudinal hecho en el eje de cada roblon tiene por objeto prevenir á tiempo toda rotura que empiece á declararse.—La figura 164 representa un roblon de hierro destinado á llenar el mismo objeto que el anterior. Una birola de hierro formando tirante, impide la aproximacion de las dos planchas. Esta birola está formada simplemente por un pedazo de palastro arrollado que se deja abierto en toda su longitud, para que el agua circule constantemente alrededor del cuerpo del roblon; y éste está cubierto de cobre para que no se oxide.

Formacion de aristas (figs. 165 á 168).—Para ensamblar dos palastros en ángulo recto, se puede encorvar uno de estos palastros de modo que forme un reborde que se aplique sobre el segundo, ó bien recurrir al uso de cantoneras. En la fig. 165 uno de los palastros está encorvado interiormente, mientras que en la figura 166 el reborde es esterior. En ambas figuras h representa la altura de brazo de la parte encorvada que hace en realidad el oficio de una cantonera. La figura 167 indica el empleo de un hierro cantonera ordinario colocado en el interior; y en la fig. 168 el hierro cantonera está en el esterior.

Formacion de rinconeras.—La formacion de rinconeras en los ensambles de roblones, presenta grandes dificultades; y se adoptan disposiciones diferentes segun se empleen para las aristas uno ú otro de los modos de ensamble de que acabamos de tratar. Las figuras 169 á 172 representan algunos de los tipos principales usados en la construccion.

En la figura 169 la arista vertical está colocada como en la fig. 165; la plancha 2 está adelgazada en su parte inferior y se halla reunida lo mismo que la 1, á la plancha 3 por una cantonera abovedada.—En la figura 170 las tres aristas se hallan formadas por cantoneras: la vertical está encorvada y roblada en la cantonera horizontal.

En la disposicion representada por la fig. 171 las tres aristas están constituidas por cantoneras soldadas juntas en su punto de encuentro. Esta operacion que es muy delicada, tiene la ventaja de dar uniones muy satisfactorias bajo el punto de vista de la hermeticidad, al mismo tiempo que produce cierta rigidez; y sin embargo, las cantoneras soldadas se emplean casi esclusivamente en las construcciones de poca importancia. —En la fig. 172 la arista vertical que se ha colocado como en la fig. 167, está lijeramente redondeada en su parte inferior; las aristas horizontales están formadas por una cantonera esterior, como en la fig. 168; y este modo de construccion, que es bastante sencillo, produce junturas herméticas y de gran solidez.

CAPÍTULO SEGUNDO

BIROLADOS Y CALZADO

§ 62

Birolados y calzados en caliente.

Los ensambles designados con el nombre de *birolados* sirven para establecer uniones invariables entre las diversas partes de una máquina. Para conseguirlo, uno de los organos, generalmente en forma de anillo, rodea al otro en condiciones de tension tales, que el frotamiento de las superficies comprimidas sea suficiente para impedir todo movimiento relativo de los dos órganos. El anillo se halla entonces sometido á un esfuerzo de estension, al paso que la otra pieza resiste á la compresion. En la mayoria de los casos, se da á las dos piezas la forma de cuerpos de rotacion *(rotoides)*, es decir, la forma de cilindros ó troncos de cono.

Para producir la presion necesaria en un birolado, se recurria antes casi esclusivamente á la dilatacion del anillo por el calor; y todavia se emplea hoy este método con frecuencia, pero tiende á ceder el lugar al birolado en frio (Véase § 64).

La dilatacion relativa que corresponde á la temperatura del rojo vivo llega á $^1/_{80}$ próximamente en el hierro y acero; mientras que la producida por una traccion llevada hasta el límite de elasticidad, solo alcanza á $^1/_{1300}$ para el hierro y la fundicion, y á $^1/_{650}$ para el acero fundido.

Segun esto, para birolar en caliente un cubo de fundicion en un árbol de hierro, se debe alisarlo hasta un diámetro inferior de ménos de $^1/_{1300}$ al del árbol; ó en otros términos, la diferencia relativa debe hallarse comprendida entre $^1/_{1599}$ y $^1/_{1800}$. En estas condiciones el cubo podria colocarse á la temperatura del rojo oscuro. En las birolas de hierro y acero (calce de las ruedas) la determinacion del diámetro no exige las mismas precauciones, puesto que estas dos materias y la primera sobre todo pueden soportar un alargamiento permanente moderado, sin que por ello resulte ningun inconveniente. Sin embargo, aún en este caso, se debe obrar con tanto más cuidado, cuanto ménos susceptible de ceder á la presion es el órgano que forma el cubo, si no queremos esponernos á roturas de birolas, sobre todo en los grandes frios.

Cuando las birolas de hierro han de servir para fijar

gorrones de hierro en árboles de madera, como en la figura 173, por ejemplo, se empieza por dar forma cónica al estremo del árbol, luego se empujan las birolas con el martillo en el tronco de cono, despues de haberlas préviamente calentado hasta el rojo oscuro. La inclinacion, es decir, la tangente del semi-ángulo del vértice del cono, puede considerarse igual á $^1/_{20}$ próximamente. La forjadura de las birolas cónicas presentaria grandes dificultades, pero pueden evitarse por el método de *Clerk*, que permite trasformar anillos cilíndricos en cónicos. En este método, el anillo calentado al rojo se sumerge primero en la pila de la forja hasta la mitad de su altura solamente, y enfriado, se sumerge rápidamente por completo. La mitad inferior del anillo enfriada al principio reacciona sobre la parte superior todavia caliente y la obliga á ensancharse; repitiendo la operacion varias veces con el mismo anillo, se consigue darle forma cónica cada vez más pronunciada. Los esperimentos emprendidos en la Academia industrial de Berlin han dado los siguientes resultados:

Dimensiones iniciales (fig. 174): $h=40^{mm}$, $\delta=7^{mm}$, $d=215^{mm}$.

Despues del	primer	enfriamiento.—	Inclinacion	$^3/_{80}$
—	segundo	—	—	$^4/_{80}$
—	tercero	—	—	$^5/_{80}$
—	cuarto	—	—	$^7/_{80}$
—	quinto	—	—	$^{13}/_{80}$
—	sexto	—	—	$^{16}/_{80}$

Valores de d despues de la última inmersion, 201^{mm} y 217^{mm}.

La fig. 175 representa un ensamble de vástagos realizado en Seraing, por medio de una birola colocada en caliente, que ha dado excelentes resultados. Los cubos de las ruedas dentadas de los laminadores, máquinas de agotamiento, etc., están comunmente asegurados con birolas.—En el caso en que los cubos se hallen fundidos en dos ó más piezas, las birolas producen el efecto de convertirles en una pieza única, susceptible de gran resistencia.

§ 63

Birolados y calzados en frio.

En lugar del birolado y calzado en caliente se usa amenudo desde hace algunos años el calzado en frio hecho por medio de prensas para anillos de un diámetro relativamente poco considerable, como por ejemplo, los cubos de las ruedas y de los manubrios, cubos ó mangos de palanca, gorrones de manubrios, etc. Despues de haber alisado y torneado cilíndricamente (1) el anillo y el cubo, se redondean lijeramente los bordes de entrada. La diferencia entre los diámetros de alisado y torneado debe ser muy pequeña y se determina por el método de cálculo indicado en el § 19.

Bajo el punto de vista del esfuerzo que hay que ejercer en el calado haremos las siguientes observaciones. Es evidente que la presion necesaria á la clausura del ensamble aumenta á medida que el núcleo va penetrando en la parte hueca y que para una pieza cilíndrica homogénea, debe ser sensiblemente proporcional al avance, puesto que en definitiva tiene que vencer el frote que se produce en las dos superficies al deslizarse una sobre otra. La presion por unidad de superficie p entre estas últimas superficies es precisamente igual á la presion (radial) S_1 en la periferia del cubo. Por consiguiente, si designamos por r el radio y por l la longitud de la parte alisada, por f el coeficiente de frotamiento, el máximum de valor que puede alcanzar la presion de calzado está dada por la espresion:

$$Q=2\pi r l S_1 f \qquad (62)$$

Si hacemos $f=0{,}2$ valor que parece puede tomarse como promedio, esta fórmula da

$$p=S_1=\frac{5Q}{2\pi r l} \qquad (63)$$

Para la tension tangencial S_2 en la superficie interior del anillo, tenemos segun el § 19 (fórmula 37):

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{\rho} \qquad (64)$$

Para un espesor δ de la pared del anillo el valor de ρ es:

$$\rho=\frac{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2-1}{\left(1+\frac{\delta}{r}\right)^2+1} \qquad (65)$$

Esta relacion da para ρ la série de valores:

$\frac{\delta}{r}=0{,}50$	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	1,00
$\rho=0{,}385$	0,415	0,438	0,463	0,486	0,508	0,528	0,548	0,566	0,600
$\frac{\delta}{r}=1{,}1$	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
$\rho=0{,}630$	0,658	0,682	0,704	0,724	0,744	0,759	0,774	0,787	0,800

(1) Hay constructores que prefieren dar leve conicidad á las dos piezas como en los cubos de ruedas que figuran con los números 15 á 17 de la siguiente tabla. Esa conicidad es de 1 milímetro.

Hemos reproducido en la siguiente tabla como ejemplos, ciertos datos sobre las presiones de calzado usadas en varias compañías de ferro-carriles. En esta tabla, $2r$ representa el diámetro del cubo, l su longitud, δ el espesor de su pared y Q la presion de calzado. Entre las presiones indicadas algunas han sido medidas y otras son las que prescriben las instrucciones ó pliegos de condiciones.

TABLA RELATIVA A LAS PRESIONES DE CALZADO EN LOS FERRO-CARRILES

Números.	INDICACION DE LA POSICION DEL CUBO.	DIMENSIONES.			NATURALEZA DE LA MATERIA.		Q EN KILÓG.	OBSERVACIONES.
		$2r$	l	δ	CUBO.	NÚCLEO Ó CENTRO.		
	Ferro-carril del Este prusiano.							
1	Ruedas motoras y ruedas pareadas de locomotoras.	190	200	100	Hier. forj.	Acer. fund.	73000	Con clavete. Pres. prescr.
2	— portadoras de locomotoras.	190	170	75	id.	id.	75000	Sin — —
3	— de ténders.	140	170	65	id.	id.	54000	— — —
4	— de vagones con brazos. .	130	235	59	id.	id.	50000	— — —
5	— de disco de acero fundido para vagones.	130	200	50	Acer. fund.	id.	50000	— — —
6	— — acero fundido para locomotoras.	183	177	53	id.	id.	70000	— — —
	Ferro-carriles de la Alta Silesia.							
7	Ruedas motoras de locomotoras. .	185	170	92'5	Hier. forj.	Acer. fund.	100-150000	Con clavete. Pres. medida.
8	— portadoras de locomotoras.	160	180	80	id.	id.	75-100000	— — —
9	— de ténders.	145	185	85	id.	id.	50- 60000	Sin — —
10	— de disco de acero fundido para vagones.	130	170	40	Acer. fund.	id.	50- 60000	— — —
11	— de brazos de hierro para vagones.	130	185	60	Hier. forj.	id.	60- 70000	— — —
	Ferro-carril del Este de Hannóver.							
12	Ruedas motoras y ruedas pareadas de locomotoras.	191	178	82'5	Hier. forj.	Acer. fund.	75- 80000	Con clavete. Pres. prescr.
13	— portadoras de locomotoras.	172	172	73	id.	id.	65- 70000	Sin — —
14	— normales de provision para vagones.	130	203	47	id.	id.	40- 50000	— — —
	Ferro-carril de Magdeburgo.							
15	Ruedas de vagones.	130	200	55	Hier. forj.	Acer. fund.	50- 60000	Sin clavete. Pres. medida.
16	— —	130	215	115	Acer. fund.	id.	50- 60000	— — —
17	— de locomotoras.	180	170	82	Hier. forj.	id.	80- 90000	— — —
	Ferro-carril de Saarbrouck.							
18	Ruedas motoras y ruedas pareadas de locomotora.	176	190	212	Fundicion.	Acer. fund.	62700	Con clavete. Pres. medida.
19	— — — —	177	203	65	Hier. forj.	id.	112500	— — —
20	— — — —	193	186	98'5	id.	id.	112500	— — —
21	— portadoras de locomotora.	151	152	75	id.	id.	90000	Sin — —
22	Ejes de ténders.	132	174	159	Fundicion.	Hier. forj.	62200	— — —
23	— —	150	194	57'5	Hier. forj.	id.	76400	— — —
24	— —	150	150	50	id.	Acer. fund.	90c00	— — —
25	Ruedas normales de provision para vagones.	130	200	65	id.	id.	75-80000	— — —
26	— de séries para vagones de via.	130	215	117'5	Fundicion.	Hierro de grano fino.	75000	— — —
27	— — — de carbon.	131	183	65'5	Hier. forj.	—	88000	— — —
28	— — — de viajeros.	105	190	85	Fundicion.	Acer. fund.	50-75000	— — —

Números.	INDICACION DE LA POSICION DEL CUBO.	DIMENSIONES.			NATURALEZA DE LA MATERIA.		Q EN KILÓG.	OBSERVACIONES.
		$2r$	l	δ	CUBO.	NÚCLEO Ó CENTRO.		
	Ferro-carril de Riga-Dünabourg.							
29	Ruedas motoras y ruedas pareadas, *Stephenson.*	178	187	95	Hier. forj.	Hierro de grano fino.	41000	Con clavete. Pres. medida.
30	— portadoras de locomotoras, *Stephenson.*	165	165	70	id.	id.	41000	— — —
31	— de ténders, *Stephenson.* .	136	178	78	id.	id.	39000	— — —
32	— motoras pareadas y portadoras, *Borsig.*	175	154	82'5	id.	id.	41000	— — —
33	— de ténders, *Borsig.* . . .	138	178	—	id.	id.	39000	— — —
34	— de vagones de viajeros, *Ashbury.*	120	165	56	id.	id.	31000	— — —
35	— — de mercancias, *Zypen.*	131	260	—	id.	id.	35000	Sin — —
36	— — de mercancias, *Zypen.*	131	224	—	id.	Acero Bessemer.	40000	— — —
	Talleres de construccion de locomotoras de Borsig.							
37	Ruedas portadoras de locomotoras y ruedas de ténders.	150-200	160-180	60- 80	Hier. forj.	Hier. forj. ó acero.	75-100000	Con clavete. Pres. medida.
38	Ejes motores y ejes pareados de locomotoras.	170-200	180-200	80-100	id.		100-150000	— — —
39	Gorrones de manubs. de estos ejes.	100-150	180-200	50- 60	id.		50- 75000	Sin — —
	Talleres de construccion de locomotoras de Wöhler.							
40	Ruedas motoras y ruedas pareadas de locomotoras.	190	200	95	Hier. forj.	Hier. forj. ó acero.	100000	Con clavete. Pres. medida.
41	— portadoras de locomotoras.	190	170	75	id.		100000	Sin — —
42	— de ténders.	140	170	65	id.		60000	— — —
	Ferro-carril del Norte de Francia.							
43	Ruedas pareadas y portadoras de locomotoras, *Stephenson.*	—	—	—	Hier. forj.	Hier. forj. ó acero.	80000	Presion prescrita.
44	— pareadas y portadoras de locomotoras, *Clapeyron.*	—	—	—	id.		80000	— —
45	— de ténders con cubos fuertes.						80000	
46	Botones de manubrios.	—	—	—	id.		15000	— —
	Ferro-carril de Paris-Lion-Mediterráneo.							
47	Ruedas motoras de locomotoras. .	—	—	—	Hier. forj.	Hier. forj.	35-40000	Con clavete. Pres. medida.
48	— portadoras de locomotoras.	—	—	—	id.	id.	25-30000	Sin — —
49	— de ténders.	—	—	—	id.	id.	25-30000	— — —
50	— de vagones.	—	—	—	id.	Hier. forj. ó acero.	18-22000	— — —
51	— —	—	—	—	Fundicion.		10000	— — —
52	Botones de manubrios.	—	—	—	Hier. forj.	Acer. fund.	30000	— — —

En la mayoria de los casos en que la presion de calce se indica como «medida» la determinacion se efectua introduciendo en una rueda un eje de repuesto.

En el caso n.° 12 *la fórmula* (63) *da el valor* $S_1 = 5.80000 : 191.\pi.178 = 3'8^k$; *la fórmula* (64) *da* $\rho = 0'53$, *y de* (65) *se deduce:* $S_2 = 7'17^k$.

En el caso n.° 10, *se halla* $S_1 = 5.100{,}000 : 130.\pi.170 = 7'2^k$; $\rho = 0'44$ *y* $S_2 = 16'3^k$.

Para el n.° 37 *tenemos:* $S_1 = 5.100{,}000 : 190.\pi.170 = 4'86^k$; $\rho = 0'526$ *y* $S_2 = 9'24^k$.

Para el n.° 16 *con* $Q = 60000$ *se obtiene:* $S_1 = 3'41^k$; $\rho = 0'77$, $S_2 = 4'43^k$ *y para el n.°* 17, $S_1 = 4'68^k$, $\rho = 0'569$ *y* $S_2 = 8'2^k$. *En dos de estos casos, las tensiones tienen valores que parecen demasiado elevados.*

Los cubos que se han separado de sus ejes, no llegan á adquirir, al volverlos á colocar, un ajuste tan enérgico como al principio, resultado que se esplica naturalmente por el desgaste que esperimentan las superficies comprimidas una contra otra en la doble operacion de entrada y salida. No obstante, se puede conseguir que ajusten bien, aplicándoles flejes de hierro.

En las ruedas de los ferro-carriles, las birolas de esta clase tienen secciones rectangulares de 50^{mm} de ancho por 25^{mm} de espesor, de 55^{mm} por 20^{mm}, de 40^{mm} por 30^{mm}, etc. De un modo general, podemos observar que en los ferro-carriles, los pliegos de condiciones tienen tendencia á especificar valores cada vez más considerables para las presiones del calce de ejes. Así, mientras antes y aún en estos últimos tiempos nos contentábamos, en el calce de ruedas de vagones, con una presion comprendida entre 30,000 y 40,000 kilógramos, no titubeamos hoy en llegar de 40,000 á 50,000 kilógramos. Para las ruedas de locomotora parece que se tiende hacia 100,000 kilógramos y todavia más. Esta presion exagerada en el calce de orígen, tiene en realidad por objeto hacer posible que las ruedas esperimenten cierto número de descalces, sin que quede un ajuste imperfecto al volver á calzarlas.

Al lado de los procedimientos de calce basados en el empleo de la prensa ó de la calefaccion á alta temperatura (§ 62) conviene mencionar otro procedimiento que se ha empezado á usar desde hace algunos años, y que consiste en efectuar el calce de las piezas despues de haberlas calentado hasta el punto de ebullicion del agua. Este método merece fijar la atencion, porque asegura gran uniformidad en la calefaccion de las piezas y evita cierto número de inconvenientes ó dificultades inherentes al calce á temperaturas elevadas. Ha sido utilizada con grande éxito en los ferro-carriles rusos en la colocacion de las llantas de ruedas de discos llenos. Los calces preparados exactamente en las dimensiones necesarias (con una reduccion de diámetro de $^3/_4{}^{mm}$ próximamente por metro) se sumergen por medio de una grua en un depósito de palastro lleno de agua, donde una corriente de vapor conserva constantemente la temperatura de ebullicion. Una inversion de 10 á 15 minutos basta para calentar los discos á 100° y ensanchar su diámetro de manera que puedan colocarse en los discos. Tres obreros en 11 horas de trabajo pueden calzar 12 á 14 ruedas (1). Quizá este método podrá servir para calzar los cubos de las ruedas ventajosamente.

(1) *Eng. u. Mining Journal*, New-York, Junio 1878, pág. 424.

§ 65

Cálculo de los anillos ó aros calzados en frio.

Aunque los cubos de las ruedas no afectan siempre la forma cilíndrica, es sin embargo conveniente hacer uso de las fórmulas indicadas anteriormente para determinar aproximadamente las tensiones desarrolladas. Estas mismas fórmulas pueden igualmente utilizarse para calcular los espesores que hay que dar á las piezas que deben calzarse en frio (cubos, duelas, cilindros, etc.) á fin de prevenir la rotura en la operacion del calce. Sustituyendo en la fórmula (62), la tension tangencial S_2 á la tension radial S_1 se obtiene: $Q = 2\pi r l f S_2 \rho$, relacion que combinada con la fórmula (65) da:

$$\frac{\delta}{r} = \sqrt{\frac{2\pi r l f S_2 + Q}{2\pi r l f S_2 - Q}} - 1 \qquad (66)$$

En esta fórmula Q representa el máximum de la fuerza que tiende á impedir todo deslizamiento longitudinal y toda rotacion del cubo en su árbol. Luego si el cubo exige un momento de rotacion PR para girar alrededor del eje, debemos tener: $Qr \geqq PR$. De aquí resulta que la relacion $\frac{Qr}{PR}$ puede considerarse como representante de la seguridad contra el resbalamiento por rotacion. Por otro lado, para que el valor de δ sea real, es decir, para que la construccion sea posible, es preciso que la cantidad sub-radical sea positiva, es decir, que se tenga: $2\pi r l f S_2 > Q$. Los valores de S_2 y de Q deben, pues, satisfacer á esta desigualdad; pero además de esta condicion, pueden elegirse más ó ménos arbitrariamente entre ciertos límites, y segun los valores admitidos, resultarán espesores de paredes muy diferentes.

Ejemplo. *Locomotora de gran velocidad de Borsig, en la Exposicion universal de Viena.—Dos pares de ruedas motoras pareadas de* 970^{mm} *de radio, sin claveteo; diámetro del émbolo* 432^{mm}, *presion del vapor* 10 *atmósferas, es decir,* $0'1^k$ *por milímetro cuadrado, brazo del manubrio* $R = 279^{mm}$. *En la hipótesis del resbalamiento de tres de las ruedas, toda la accion de la presion del vapor sobre el émbolo se halla reducida á una sola rueda y tenemos entonces:*

$$PR = 432^2 . 0'785 . 0'1 . 279 = 14657 . 279 = 4089303.$$

Dimensiones del vacio del cubo: $r=98^{mm}$, $l=200^{mm}$; *de donde* $PR: r=4089303^{k}:98=41730^{k}$. *El frotamiento sobre la única rueda que no resbala, debe ser suficiente para impedir el efecto del momento* 4089303 *y resulta que se debe tener forzosamente* $Q>41730^{k}$. *Supongamos que se desee* $Q=70000^{k}$ *y que por otra parte, como el cubo es de hierro, se tome* $S_2=5^{k}$, *entonces resulta para* $f=0{'}2$ *(como más arriba):*

$$\frac{\delta}{r}=\sqrt{\frac{2\pi\,.\,98\,.\,200\,.\,0{'}2\,.\,5+70000}{2\pi\,.\,98\,.\,200\,.\,0{'}2\,.\,5-70000}}-1$$

$$=\sqrt{\frac{193150}{53150}}-1=\sqrt{3{'}61}-1=0{'}9$$

de donde se deduce: $\delta=98\,.\,09=88{'}2^{mm}$.—*En la ejecucion se ha tomado* $\delta=90^{mm}$.

Conviene observar que la pieza destinada á producir el ajuste no tiene exactamente la forma de un anillo. Como ejemplo de aplicacion de una forma diferente podemos citar el ensamble de rebordes de *Ehrhardt* (1) que representa la figura 176.

(1) Privilegio prusiano de 23 mayo 1876, núm. 159. Sistema de union de rebordes indicado por dibujo, descripcion y modelo.

La clausura del ensamble en este sistema está producida por una série de mandíbulas ó corchetes de acero fundido y templado. Los rebordes, lijeramente salientes, entre los cuales se halla interpuesta una rodaja (de cauchú, cuero, plomo, etc.), se hallan comprimidos unos contra otros por la accion de esas piezas elásticas, que se quitan y ponen por medio de una tenaza de tornillo de forma conveniente. Los esperimentos sobre los conductos de vapor y de aire (en las fundaciones de pilas de aire comprimido), así como los ensayos con la prensa hidráulica, han demostrado la eficacia de este ensamble.

Las aplicaciones del ensamble de junturas forzadas son cada dia más numerosas, y parece probable que se llegarán á utilizar tambien en cierto número de construcciones. Esperamos que la prensa de calce (1) será dentro de poco un aparato indispensable en toda fábrica de construccion de alguna importancia.

(1) La casa Schäffer y Budenberg construye excelentes manómetros para esta clase de prensas.

CAPÍTULO TERCERO

CLAVETEADO

§ 66

Clavetes de ensamble.

El ensamble por clavetes más sencillo comprende tres partes, las dos piezas que hay que unir y el clavete. En los ensambles de este género, uno de los lados del perfil longitudinal del clavete y con frecuencia los dos lados, forman un ángulo obtuso con la direccion del movimiento que puede tomar, una con relacion á otra, las dos piezas que hay que unir; cada lado forma un ángulo agudo con la direccion segun la cual puede resbalar el clavete, y la tangente trigonométrica de este ángulo constituye lo que se llama inclinacion del clavete. En la práctica se distinguen dos géneros de claveteados, segun que la inclinacion exista en un solo lado del clavete (fig. 177) ó en los dos lados (fig. 178): para los claveteados de la segunda especie, supondremos siempre las inclinaciones iguales en ambos lados.

Si designamos

α el ángulo de inclinacion,
P el esfuerzo desarrollado por el claveteo,
Q el esfuerzo que se debe ejercer en el clavete normalmente á P, para formar el ensamble,
Q' el esfuerzo que se ejerce en sentido inverso para destruir el ensamble,
$f = \operatorname{tang} \varphi$ el coeficiente de frotamiento entre las superficies de los tres elementos del claveteo,

tenemos, en el caso de un clavete inclinado en un solo lado:

$$\left.\begin{aligned} Q &= P \operatorname{tang} (\alpha + 2\varphi) \\ Q' &= P \operatorname{tang} (2\varphi - \alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (67)$$

Para que el valor de Q' no sea negativo, es decir, para que el clavete no salga por sí mismo, debemos tener $\alpha < 2\varphi$; suponiendo $f = 0{,}1$ se deduce $\operatorname{tang} \alpha < {}^1/_5$.

En el claveteo con inclinacion en los dos lados del clavete, tenemos (aproximadamente):

$$\left.\begin{aligned} Q &= P.\ 2 \operatorname{tang} (\alpha + \varphi) \\ Q' &= P.\ 2 \operatorname{tang} (\varphi - \alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (68)$$

De la última fórmula se deduce que todas las inclinaciones tienen valores inferiores á f, para que el en-

samble no se abra por sí mismo. La inclinacion total, por consiguiente, debe conservar sensiblemente el mismo valor que en el caso anterior.

En la práctica, en los clavetes destinados á ensambles permanentes, la inclinacion total varia de $^1/_{30}$ á $^1/_{50}$ y desciende á veces á $^1/_{100}$ y más abajo, mientras que para las que están espuestas á ser quitadas con frecuencia, varia esta inclinacion de $^1/_{24}$ á $^1/_{12}$ y llega en algunos casos á $^1/_6$.

La carga determinada por la fuerza P en el clavete, tiende á producir la desunion de las piezas y puede obrar en direcciones cualesquiera, segun la disposicion adoptada. Entre estas direcciones se pueden distinguir tres principales, cada una de las cuales puede ser positiva ó negativa. La primera es la direccion QK (fig. 179) normal á la base de apoyo del clavete: es la direccion de P en las figuras 177 y 178. El clavete dispuesto para resistir á este modo de carga se llama *clavete trasversal.* La segunda direccion principal KL es perpendicular al plano longitudinal QKH y el clavete correspondiente constituye lo que se llama *clavete longitudinal.* En fin, la tercera direccion HK es normal al plano de altura QKL del clavete; por analogia con las dos denominaciones anteriores, hace mucho tiempo en uso, adoptaremos para el clavete así cargado el nombre de *clavete de altura.*

§ 67

Ensambles de clavetes trasversales.

El ensamble de clavetes que representa la fig. 180 ofrece en la práctica numerosas aplicaciones. El vástago es de hierro, lo mismo que el clavete, mientras que el cubo ó mango es de fundicion. A consecuencia de la traccion P que se ejerce en el vástago, el ensamble se halla sometido simultáneamente á diversas clases de esfuerzos: una flexion del clavete, en las condiciones del caso del n.° VIII, pág. 10 (tension S_1), un corte de esta misma clavija al nivel de la pared interior del cubo (tension S_2), y en fin una estension del vástago en las secciones, en forma de segmentos, que deja á los dos lados el orificio del claveteo (tension S_3). Si conforme á las indicaciones del § 2, tomamos $S_2 = 0'8\ S_1$ y $S_1 = S_3$, obtendremos para las relaciones de las dimensiones principales:

$$\left.\begin{aligned} h &= \frac{6}{5}\,d \\ b &= 0'267\,d \text{ ó } \frac{d}{4} \end{aligned}\right\} \qquad (69)$$

Para las demás dimensiones podemos tomar $h_1 = 0'8d$, $h_2 = d$ y $\delta = 0'5d$.

La fig. 181 representa la union de dos vástagos de hierro por medio de dos clavetes trasversales; y como aquí los estremos son de hierro, conviene tomar $\delta = 0'25\ d$.

La fig. 182 da un ensamble de clavete trasversal, análogo al de la figura 180, con la diferencia, sin embargo, que el clavete, en lugar de atravesar el manguito, se halla colocado hácia delante.

La fig. 183 representa un ensamble en el cual el clavete se halla colocado en un corte hecho en el lado del vástago, y por este motivo puede designarse con el nombre de clavete rasante.

La presion por unidad de superficie que ejerce el clavete en la parte del cubo que recibe directamente su accion puede calcularse en el caso de la figura 180 por la fórmula:

$$p = P : 2b\delta = P : bd = (0'785\ d^2 - bd)\ S_3 : bd,$$

de donde

$$p = 2'14 S_3 \qquad (70)$$

Valor en realidad muy elevado, que puede ser doble cuando se toma $\delta = 0'25\ d$, como en el caso de la figura 181. La presion es aun mayor para el clavete rasante (figura 183); conviene pues en este caso hacer de modo que S_3 tenga un valor bastante pequeño. Llegamos á este resultado por un lado, disminuyendo el valor de S_3 reforzando la seccion á la altura del agujero del clavete y por otra añadiendo cuñas con rebordes ó contra-clavetes (fig. 184). Entonces el clavete puede tener dimensiones menores que las anteriormente dadas. Este sistema se emplea frecuentemente en los tirantes, sobre todo en las ruedas hidráulicas.

La fig. 185 representa una disposicion de *clavetage* por pernos de fundacion en áncora. Los contra-clavetes tienen aquí esencialmente por objeto reforzar el clavete. El cálculo de las dimensiones debe hacerse segun las indicaciones del § 12, y para obtener más ventajas se adopta la misma altura en el medio para las tres piezas. En la parte inferior del macizo de fundacion, el perno se apoya en la contraplaca por una tuerca, que se hace girar á mano hasta que el perno haya llegado á una posicion tal, que empujando el clavete con fuerza se obtenga un ensamble perfectamente rígido y que el clavete tenga sensiblemente la misma salida en sus dos estremos.

§ 68

Ensambles con clavetes longitudinales.

Los clavetes longitudinales sirven principalmente para fijar cubos en los ejes á los árboles. Bajo el punto de vista de su forma y del sitio de colocacion, se pueden dividir en tres especies principales:

Los clavetes vaciados ó clavetes huecos 1, fig. 186.
Los clavetes planos 2, 4, 5, fig. 186.
Los clavetes encajados 3, fig. 186.

Los clavetes huecos se usan en las piezas que trabajan sin choques y no tienen necesidad de fijarse sólidamente, como por ejemplo, las poleas de trasmision por correas: produce por su presion el efecto de un forcejo.

El clavete plano, aun cuando solo se emplee uno para fijar una pieza, puede resistir ya á esfuerzos de sacudimientos bastante considerables; cuando se emplean varios á la vez, como en las disposiciones de la figura 186, se obtiene una fijacion escelente, que ofrece una completa seguridad.

Un clavete empotrado, único, da igualmente para un cubo un modo de enlace muy sólido, si el cubo está bien alisado y el clavete bien ajustado en sus dos alojamientos. Se usa bastante amenudo este género de clavetes para los órganos de las máquinas sometidos á violentos choques; pero entonces, por prudencia, se multiplica el número de clavetes.

La comparacion de las dimensiones proeminentes en gran número de clavetes hace resaltar diferencias muy pronunciadas, fáciles de esplicar, puesto que la determinacion de esas dimensiones se hace de una manera completamente empírica. Sin embargo, pueden establecerse ciertas reglas que bastan para los casos ordinarios de la práctica. Bajo el punto de vista de la materia que hay que emplear conviene adoptar esclusivamente el acero. Por otro lado debemos distinguir el caso en que el cubo con clavete esté simplemente sometido á una carga, y aquel en que se encuentra el eje que esté además sometido á esfuerzos de torsion. En el primer caso tenemos clavetes de carga y en el segundo clavetes de torsion. Designando por D el diámetro de la cabeza del árbol, por s la anchura del clavete y por s_1 el espesor medio resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Para el clavete de carga: } s=6+\dfrac{D}{7},\ s_1=4+\dfrac{D}{12}\\ \text{Para el clavete de torsion: } s=4+\dfrac{D}{5},\ s_1=4+\dfrac{D}{10}\end{array}\right\}\ (71)$$

La inclinacion que solo existe por un lado y que está reproducida en el cubo, puede considerarse igual á $^1/_{100}$.

Así se obtiene la série de valores siguientes:

$D=$	30	50	100	150	200	300	400	500
Para los clavetes de carga:								
$s=$	10	13	20	27	35	49	63	77
$s_1=$	7	8	12	17	21	29	37	46
Para los clavetes de torsion:								
$s=$	10	14	24	34	44	64	84	104
$s_1=$	7	9	14	19	24	34	44	54

Para $D<30^{mm}$ se toma $s=\dfrac{D}{3}$, $s_1=\dfrac{D}{5}$. En el caso en que se empleen varios clavetes, se conserva amenudo en cada uno de ellos las dimensiones del clavete único. En los cubos que están colocados en sus ejes con forcejo, y que por esta causa, podrian ya quedar fijos sin auxilio de clavete, se dan á los clavetes de torsion dimensiones menores que las del cuadro; se pueden adoptar, por ejemplo, las que da el cuadro para los clavetes de carga.

§ 69

Ensambles de clavetes de altura.

Cuando la carga de un clavete obra normalmente á las secciones trasversales de este clavete, su direccion puede ser positiva ó negativa, y existe una diferencia esencial entre los dos casos. Si la carga tiene la direccion H (fig. 187) debe considerarse el ensamble falto de seguridad. En efecto, solo obra cuando el clavete produce un forcejo entre las dos piezas que hay que unir. La fuerza H', que obra en sentido opuesto, produce por el contrario, una verdadera clausura de ensamble, si la superficie de la base del clavete es rugosa y la superficie oblícua pulimentada.—Una aplicacion de este género es el dispositivo de clavete de *Kernaul* (figura 188) que se utiliza para fijar manguitos de acoplo en los árboles de trasmision. Si el manguito gira con relacion al cubo en la direccion de la flecha, el clavete de arco obra como H' en el caso anterior y da un ensamble satisfactorio. Para producir el ajuste del clavete se obra sobre un tornillo hundido a, mientras que, para deshacer el ensamble, se obra sobre otro tornillo análogo b (V. más léjos los manguitos de acoplo).

§ 70

Ensambles de clavetes en las hélices de los barcos.

En las hélices de los barcos de vapor se usan ensambles de clavetes hechos con el mayor cuidado. La figura 189 indica la disposicion adoptada por *Rennie* para fijar las dos alas de la hélice del *Griffith*. Aquí se emplea un clavete trasversal, que atraviesa un gorron cilíndrico unido al ala y que está ajustado por medio de cuatro calzos, para que la inclinacion de la hélice tenga el valor que la esperiencia ha indicado como más conveniente. Los calces auxiliares se mantienen en su posicion por casquetes en los cuales hay dos tuercas (V. § 71). Las alas y el cubo son de bronce.

Primer ejemplo. *En una aplicacion hecha por Penn é hijos se halla* $d=380^{mm}$, $h=190^{mm}$, $b=64^{mm}$.

Fig. 190.—Modo de fijar el cubo de la hélice en su árbol empleada por *Maudslay* hijo y *Field*, *Ravenhill* y *Hodgson*, etc.—Los órganos de fijacion se componen aquí de dos clavetes rasantes, que se hallan sometidos á dos géneros de esfuerzos: una carga trasversal, determinada por la introduccion del cubo en la cabeza del árbol y una carga en altura debida á la presion del agua en las aletas de la hélice. El cubo es de bronce.

Segundo ejemplo. *En el «Lord Warden» d es igual en el medio á* 483^{mm}, $l=1346^{mm}$, $h=218^{mm}$, $b=80^{mm}$; *en el «Lord Clyde»* $d=512^{mm}$, $l=1372^{mm}$, $h=254^{mm}$, $b=76^{mm}$.

Fig. 191.—Fijacion del cubo de la hélice por medio de dos clavetes longitudinales, dispuestos en un mismo plano que pase por el eje. La cabeza del árbol es muy cónica; para empujar el cubo en este cono se usa una tuerca de bronce de ocho caras de modo que los clavetes no obren en realidad más que como simples clavetes longitudinales (clavetes de torsion).

Tercer ejemplo. *En el «Minotauro» cuya máquina se ha construido por Penn é hijos, d es igual en el medio á* 470^{mm}, $l=1216^{mm}$, $s=76^{mm}$.

El clavete trasversal ordinario y el de la fig. 182 se utilizan igualmente para la fijacion de los cubos de las hélices (1).

(1) Véase sobre este objeto la obra de N. P. Burgh *Modern Screw Propulsion*, London, 1869.

§ 71

Clavetages descargados.

En un ensamble de clavetes ciertas piezas de construccion independientes del mismo clavete, pueden disponerse especialmente para soportar la accion de la fuerza P; el ensamble puede entonces considerarse como no sometido á ninguna carga. Este sistema de clavetes ofrece naturalmente mayor seguridad y exige en general dimensiones de clavetes muy inferiores á las que hasta aquí hemos considerado.—Vamos á dar algunos ejemplos de esta clase de clavetes.

Fig. 192.—Modo de union usado en los vástagos de bombas: las partes salientes soportan enteramente el esfuerzo de traccion al cual está sometido el vástago; el clavete hueco que rodea el ensamble, solo sirve para sostenerlo, y obra simplemente como clavete de ajuste.

La fig. 193 representa un ensamble de vástago de puente suspendido. El manguito consta de dos partes, y los rebordes cónicos hechos en el interior soportan todo el esfuerzo de traccion.

Fig. 194.—Ensamble de dos barras planas en cruz una sobre otra de *Bayliss* (1).

El clavete de altura (fig. 187 H) puede tambien disponerse de manera que aquel quede descargado y que resulte así un ensamble completamente seguro.

§ 72

Disposiciones de seguridad para los clavetes.

Para que un clavete no se vea espuesto á salir bajo la accion del esfuerzo estático que se ejerce sobre él, es necesario que suponiendo el coeficiente de frote igual á $^1/_{10}$ la inclinacion sea inferior á $^2/_{10}$ cuando solo existe por un solo lado é inferior á $^1/_{10}$ en cada uno de los lados cuando ambos están igualmente inclinados. Pero cuando ocurren choques ó vibraciones, los clavetes ordinarios están espuestos á aflojarse si su inclinacion no está muy por debajo del límite que acabamos de indicar. A fin de evitar estos accidentes, y en casos particulares, poder utilizar mayores inclinaciones, se ha recurrido al uso de ciertas disposiciones de seguridad.

La disposicion mas comunmente utilizada en los clavetes trasversales y que proporciona en la mayoria de

(1) Utilizada por el inventor para parrillas, enrejados, etc. V. *Pract. Mech Journal*, vol. III, 3.ª série, p. 342.

los casos una seguridad suficiente, consiste en hender el estremo menor del clavete y abrirlo cuando esté colocado. Cuando el clavete forma parte de órganos sometidos á movimientos vibratorios, se puede armar de un rodete tambien hendido.

En los clavetes de cabeza de biela se hace siempre uso de disposiciones de seguridad del género de los que representan las figuras 195 á 199. Las figuras 195, 196 y 197 dan las disposiciones de clavetes de seguridad con tornillos de traccion.

En las locomotoras y máquinas de los barcos de vapor (los de guerra sobre todo) se aumentan todavia las garantias de seguridad, impidiendo que la tuerca se afloje por medio de otra contra-tuerca (Cap. IV).

La fig. 198 da una disposicion de clavete con tornillo de presion; este tornillo se encaja en una ranura de poca profundidad practicada en una de las caras del clavete; es evidente que aun cuando este tornillo no ejerciese una presion suficiente para oponerse á todo desplazamiento del clavete, impediria al ménos que fuese proyectado al esterior. El uso de una ranura ofrece además la ventaja de que las rugosidades producidas en el metal por la presion del tornillo, se hallen debajo de la superficie lateral del clavete, y no puedan por consiguiente impedir su movimiento de ajuste, como las debidas á un tornillo que obrase directamente sobre esta superficie.

La fig. 199 representa un clavete de seguridad con pernos de ajuste.—El perno está ajustado en el fondo sobre dos placas especiales aplicadas en las caras del clavete y protegidas por otras piezas contra todo desplazamiento longitudinal; una muesca practicada en el espesor del clavete sirve de paso al perno.

La fig. 200 indica una disposicion de seguridad empleada por *Maudslay* para los clavetes rasantes destinados á la fijacion del cubo de la hélice que representa la figura 190. Una pequeña pieza trasversal fija por un tornillo al estremo del clavete constituye una especie de reborde que se opone al desplazamiento de este clavete.—La traviesa y la cabeza del clavete están cubiertas con una tapa de bronce fija igualmente por tornillos.

CAPÍTULO CUARTO

PERNOS Y ENSAMBLES DE PERNOS

§ 73

Principios geométricos de los pernos de tuerca.

En la construccion de las máquinas los pernos se utilizan de tres maneras diferentes: sirven para ensamblar ó fijar, para ejercer presiones y para trasmitir movimientos. Solo nos ocuparemos aquí de los dos primeros géneros en uso. Bajo el punto de vista de las formas de secciones usadas para los filetes se distinguen:

el filete cortante ó triangular,
el filete plano ó cuadrado,
el filete trapezoidal.

Para estas tres especies de filetes, la forma geométrica pertenece esencialmente á la superficie helicoidal regulada, llamada axial (1). Esta superficie es, como sabemos, la que describe una recta *ABC* (fig. 201) cuando uno de sus puntos recorre con movimiento contínuo una directriz rectilínea, el eje *OD*, mientras que la generatriz gira á su vez alrededor de este mismo eje cantidades proporcionales á los desplazamientos del punto director, formando constantemente el mismo ángulo α con el eje. El ángulo α constituye lo que se llama ángulo de pendiente; y es complementario de β, ángulo en la base del helicoide. Este puede ser de ángulo obtuso ó recto, segun que el ángulo α sea á su vez obtuso ó recto. El cilindro recto que tiene por eje *OD*, que contiene la parte de helicoide que tenemos delante, está dividido por la generacion de esta superficie en una série de filetes helicoidales, que se encajan unos en otros de modo que dos consecutivos se hallan siempre en la relacion del tornillo á su tuerca.

El camino que recorre sobre el eje el punto director, mientras que la generatriz da una vuelta completa, constituye la altura del paso ó paso de helicoide (s); el ángulo que la tangente al hélice descrita por un punto de la generatriz forma con el plano de base del cilindro de esta hélice, es lo que se llama ángulo de inclinacion (σ). Segun esto, las hélices esteriores de los filetes helicoidales sucesivos de un helicoide tienen el mismo paso, pero diferentes ángulos de inclinacion.

La superficie del filete, en los tornillos de filete

(1) Véase el artículo del autor *Ueber einige Eigenschaften der Regelschraube*, Berliner Verhanlungen, 1878. P. 16.

triangular se halla generalmente formada por dos porciones de superficies helicoidales, descritas por generatrices que forman con el eje ángulos de pendiente suplementarios; y muy pocas veces pertenece la superficie á un solo y mismo helicoide, aunque esto sea posible como lo demuestra la fig. 201. Los filetes cuadrados están generalmente formados por simples superficies helicoidales de generatrices normales al eje. En el tornillo de filete trapezoidal encontramos á la vez una superficie helicoidal de generatriz oblícua al eje y otra de generatriz normal.

§ 74

Dimensiones de los filetes en los tornillos de filete triangular.

Si suponemos que una fuerza dada P obra sobre un tornillo en una direccion paralela al eje, se halla sometido el núcleo á diferentes géneros de esfuerzos (caso n.° 1, pág. 38); pero podemos no tener en cuenta más que la resistencia á la traccion, con la condicion de tomar para la tension S un valor suficientemente pequeño. — Haciendo $S=2'5^k$ en el caso de un tornillo de hierro, se obtiene para el diámetro d_1 del núcleo:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= 0'7\sqrt{P} \\ P &= 2d_1^2 \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

La tuerca tiene comunmente seis caras, pocas veces cuatro: aquí nos limitaremos á la primera de estas formas. La altura de la tuerca es generalmente igual al diámetro d del perno. Con estas condiciones la resistencia de los filetes es mucho más que suficiente (1); pero se necesita que la tuerca tenga cierta altura para que la presion por unidad de superficie entre los filetes conserve un valor muy pequeño y no pase en lo posible de 1^k.

Designando por t la profundidad de los filetes, por n el número de pasos en la altura de la tuerca, hallamos para la presion por unidad de superficie p en los filetes triangulares y cuadrados:

$$p=\frac{S}{4}\frac{1}{n}\frac{d}{t}\left[1-3\frac{t}{d}+\left(\frac{t}{d}\right)^2\right] \qquad (73)$$

(1) Además de los resultados que nos da el cálculo sobre este asunto, conviene citar los notables esperimentos que se han hecho recientemente en el Instituto Stevens (Hoboken), los cuales han demostrado que bajo el punto de vista de la resistencia una altura de tuerca igual á $0'45\ d$ ó $0'4\ d$ seria suficiente. Véase sobre este asunto *Railroad Gazette* (New York), 1877, Nov. pág. 483.

Introduciendo el paso s y haciendo $ns=d$, se obtiene

$$p=\frac{S}{4}\frac{s}{t}\left[1-3\frac{t}{s}\frac{s}{d}+\left(\frac{t}{s}\right)^2\left(\frac{s}{d}\right)^2\right] \qquad (74)$$

En ambas fórmulas el tercer término del paréntesis puede generalmente despreciarse.

Designando por β el ángulo de inclinacion de la hélice de diámetro d, la superficie de los filetes para n pasos es aproximadamente:

$$\left(\frac{\pi d}{\cos\varphi}+\frac{\pi(d-2t)}{\cos\varphi}\right)n\frac{t}{2}.$$

La componente paralela al eje de la presion p es $p\cos\varphi$. Tenemos pues:

$$P=p\pi t(d-t)n$$

de donde

$$p=S\frac{\pi}{4}d_1^2:\pi n\frac{t}{d}\left(1-\frac{t}{d}\right)d^2$$
$$=\frac{S}{4}\frac{1}{n}\frac{d}{t}\left(\frac{d-2t}{d}\right)^2:\left(1-\frac{t}{d}\right).$$

Efectuando la division y despreciando las potencias de $\frac{t}{d}$ superior á la 2.ª, volvemos á obtener la fórmula (73); y p es segun esto, igual á la presion por unidad de superficie sobre la proyeccion de los filetes.

Bajo el punto de vista del valor de un filete, el frotamiento juega un papel bastante importante, que conviene tener en cuenta. Si designamos por

Q el esfuerzo que se ejerce en el estremo del radio del filete medio en una direccion normal al plano que pasa por el eje,

σ' el ángulo de inclinacion de la hélice de este filete medio,

$f=\operatorname{tang}\varphi$ el coeficiente de frotamiento,

y suponemos que aparte de la fuerza P solo hay que vencer los frotamientos de los filetes, tenemos para el tornillo de filetes cuadrados, en el caso en que el desplazamiento se verifica en sentido contrario de la direccion en P:

$$Q = P\frac{f + \operatorname{tang}\sigma'}{1 - f\operatorname{tang}\sigma'} = P\operatorname{tang}(\varphi + \sigma')$$

En el caso en que el desplazamiento se verifica en sentido contrario, el esfuerzo Q' necesario para producir aflojamiento es (75)

$$Q' = P\frac{f - \operatorname{tang}\sigma'}{1 + f\operatorname{tang}\sigma'} = P\operatorname{tang}(\varphi - \sigma')$$

Para el tornillo de filetes triangulares, los esfuerzos que hay que ejercer en los dos casos análogos están dados por la espresion de doble signo:

$$Q = P\frac{f' \pm \operatorname{tang}\sigma'}{1 \mp f'\operatorname{tang}\sigma'} = P\operatorname{tang}(\varphi' \pm \sigma') \quad (76)$$

en la cual $f' = f : \cos\beta$. Si además hay que vencer el frotamiento en la base de la tuerca, el esfuerzo necesario Q tiene un valor casi doble. Podemos reemplazar las fórmulas, sin error sensible, tang σ' por tang σ. Este último valor es en general bastante pequeño para que el frotamiento pueda considerarse como la parte principal de la resistencia y para que Q' tenga siempre un valor positivo.

§ 75

Sistema de filetes de Whitworth.

Con el nombre de sistema de filetes se designa un conjunto de reglas fijas que sirven para determinar en los pernos los detalles de forma del perfil de los filetes, los pasos y las gradaciones de los diámetros. *Whitworth* es el primero que en 1841 propuso la adopcion de reglas de esta naturaleza. Mas tarde la cuestion ha sido objeto de sérios estudios, y en estos últimos años ha dado origen á vivas discusiones en Alemania, cuando se introdujo el sistema métrico en este pais. Votos muy autorizados se han pronunciado por la adopcion completa del sistema *Whitworth*, mientras otros ingenieros son de opinion favorable al establecimiento de un nuevo sistema basado en el empleo de medidas métricas. Hay aquí evidentemente dos tendencias distintas que tendremos en cuenta en lo que sigue.

En el sistema propuesto por *Whitworth* el filete se halla limitado por un triángulo isóceles, cuya base es igual al paso y el ángulo en el vértice de 55°, lo que da para la altura del triángulo $t_0 = 0{,}96\,s$. En el interior y en el esterior el filete debe estar redondeado en una longitud igual á $^1/_6\,t$, de suerte que tengamos, para la profundidad real, $t = 0{,}64\,s$. El ángulo en el vértice de que acabamos de hablar es doble del ángulo en la base 6 de la generatriz de la superficie helicoidal del filete. *Whitworth* determinaba los pasos por medio de una tabla (1) en la que estaban inscritos los valores de estos pasos frente á los de los diámetros. En este sistema el establecimiento de la seccion del filete da lugar á algunas dificultades y las gradaciones de los diámetros y de los pasos presentan ciertas imperfecciones que habian acabado por hacerse sensibles con el tiempo. El mismo *Whitworth* no estaba satisfecho completamente de la gradacion de los diámetros, y en 1857 se decidió á reemplazar su antigua escala por otra nueva que desde entonces se ha adoptado en Inglaterra para todos los pernos (2).

En el cuadro que sigue hemos insertado los valores de la antigua y nueva escala de *Whitworth*. d y s están espresadas en pulgadas inglesas. Los valores $^5/_{16}$ y $^7/_{16}$ de pulgada, que en esta tabla están escritos entre paréntesis, no entran más que aproximadamente en la nueva escala.

---

(1) *Briggs* ha llegado á espresar el valor del paso en el sistema *Whitworth*, de una manera relativamente exacta, con la fórmula:

$$s = 0{,}1075d - 0{,}0075d^2 + 0{,}024.$$

(2) V. *Eng. u. Arch. Journal*, 1857, pág. 262, y 1858, p. 48. V. tambien *Shelley Workshop Appliances*. London, 1876, p. 102.

En las discusiones que han tenido lugar recientemente en la Sociedad de Ingenieros civiles en Alemania, no ha sido señalado por nadie este cambio de escala.

NUEVA ESCALA. d	ANTIGUA ESCALA. d	$\frac{1}{s}$	NUEVA ESCALA. d	ANTIGUA ESCALA. d	$\frac{1}{s}$	NUEVA ESCALA. d	ANTIGUA ESCALA. d	$\frac{1}{s}$
0'100		48	0'675		11	3'250	3 1/4	3 1/4
0'125	1/8	40	0'700		11	3'500	3 1/2	3 1/4
0'150		32				3'750	3 3/4	3
			0'750	3/4	10	4'000	4	3
0'175		24	0'800		10			
0'200		24	0'875	7/8	9			
0'225		24	0'900		9	4'250	4 1/4	2 7/8
0'250	1/4	20	1'000	1	8	4'500	4 1/2	2 7/8
0'275		20				4'750	4 3/4	2 3/4
						5'000	5	2 3/4
0'300	(5/16)	18	1'125	1 1/8	7			
			1'250	1 1/4	7			
0'325		18	1'375	1 3/8	6	5'250	5 1/4	2 5/8
0'350		18	1'500	1 1/2	6	5'500	5 1/2	2 5/8
0'375	3/8	16	1'625	1 5/8	5	5'750	5 3/4	2 1/2
0'400		16	1'750	1 3/4	5	6'000	6	2 1/2
0'425		14	1'875	1 7/8	4 1/2			
0'450	(7/16)	14	2'000	2	4 1/2		1/8	28
0'475		14					1/4	19
0'500	1/2	12	2'125	2 1/8	4 1/2		3/8	19
			2'250	2 1/4	4		1/2	14
0'525		12	2'375	2 3/8	4		3/4	14
0'550		12	2'500	2 1/2	4		1	11
0'575		12	2'675	2 5/8	4		1 1/4	11
0'600		12	2'750	2 3/4	3 1/2		1 1/2	11
0'625	5/8	11	2'875	2 7/8	3 1/2		1 3/4	11
0'650		11	3'000	3	3 1/2		2	11

Apéndice.—Filetes de Whitworth para tubos de gas.

Bajo el punto de vista de la regularidad en la progresion, los valores de esta tabla dejan que desear. Esta imperfeccion se halla puesta en evidencia, bajo una forma más sensible, en las figuras 203 y 204 que se han construido tomando por abcisas los valores de los diámetros y por ordenadas los de los pasos; las cifras inscritas en la línea quebrada son las del cuadro, es decir, las inversas de los pasos $\left(\frac{1}{s}\right)$. La figura 203 representa las variaciones de los pasos para los valores de los diámetros comprendidos entre 1 y 6 pulgadas inglesas, mientras que la figura 204 da estas mismas variaciones para los valores de los diámetros desde el décimo de pulgada hasta una pulgada. La causa de las irregularidades que se observan aquí en las gradaciones de los diámetros y de los pasos, consiste evidentemente en el sistema de las medidas empleado. Notando los inconvenientes que presentaba su primera escala, *Whitworth* tuvo la intencion de adoptar el sistema decimal para las variaciones de diámetro; pero como por otra parte deseaba conservar en su série las subdivisiones 1/4 y 1/8 (sacrificando simplemente el 1/16), ha tenido que introducir el 1/40 con sus múltiplos (figura 204).

La presion por unidad de superficie p se calcula por medio de la fórmula (74) *en la cual debemos hacer* $t=0'64s$ *y tendremos:*

$$\frac{p}{S}=\frac{1}{4.0'64}\left[1-1'9\,\frac{s}{d}+0'4\left(\frac{s}{d}\right)^2\right]$$

Tomando $S=2'5$ *los valores de p dados por esta fórmula para* $d=0'1''$, $3''$, $6''$ *son respectivamente* 0'60, 0'81 *y* 0'85^k *valores que deben considerarse como completamente satisfactorios. Los valores de tang* α *correspondientes á estos mismos valores de d son* 0'0663, 0'0303 *y* 0'0212.

§ 76

Sistema de filetes de Sellers.

Con objeto de terminar la confusion é inconvenientes que habia producido en los Estados-Unidos el empleo de sistemas diferentes, *William Sellers* propuso al instituto-Franklin (1) en abril de 1864 la adopcion de un sistema de dimensiones uniforme, y presentó al

(1) *Journal of the Franklin Institute*, 1864, vol. XLVII, pág. 344.

mismo tiempo una nueva série que habia estudiado. Conforme á las conclusiones del informe de la comision nombrada para el exámen de esta proposicion (1) el Instituto creyó deber recomendar á los constructores americanos la adopcion del sistema *Sellers*, que se halla hoy en uso en la mayor parte de las fábricas de los Estados-Unidos.

En este sistema el perfil del filete tiene la forma indicada por la fig. 205. El ángulo de los lados $2\beta = 60°$, la profundidad $t = 0'75\ t_0 = 0'65\ s$. El paso se calcula segun la fórmula $s = 0'24\sqrt{d} + 0'625 - 0'175$; pero como en el sistema de Whitworth, los resultados del cálculo deben modificarse lijeramente, de manera que el número de pasos para una altura de una pulgada inglesa, ó la recíproca del paso $\left(\frac{1}{s}\right)$ tenga un valor simple.

El cuadro siguiente da la série de dimensiones correspondientes adoptadas por el Instituto-Franklin para los diámetros y los pasos:

$d =$	$1/4$	$5/16$	$3/8$	$7/16$	$1/2$	$9/16$	$5/8$	$3/4$	$7/8$	1	$1\,1/8$	$1\,1/4$	$1\,3/8$	$1\,1/2$	$1\,5/8$	$1\,3/4$	$1\,7/8$
$\frac{1}{s} =$	20	18	16	14	13	12	11	10	9	8	7	7	6	6	$5\,1/2$	5	5
$d =$	2	$2\,1/4$	$2\,1/2$	$2\,3/4$	3	$3\,1/4$	$3\,1/2$	$3\,3/4$	4	$4\,1/4$	$4\,1/2$	$4\,3/4$	5	$5\,1/4$	$5\,1/2$	$5\,3/4$	6
$\frac{1}{s} =$	$4\,1/2$	$4\,1/2$	4	4	$3\,1/2$	$3\,1/2$	$3\,1/4$	3	3	$2\,7/8$	$2\,3/4$	$2\,5/8$	$2\,1/2$	$2\,1/2$	$2\,3/8$	$2\,3/8$	$2\,1/4$

El filete de *Sellers* puede compararse muy bien al de *Whitworth*, puesto que á pesar de la diferencia de perfil tiene casi exactamente la misma profundidad. Su ángulo es muy cómodo y el perfil tiene una forma tan sencilla, que toda fábrica provista de buen tren puede fabricar las terrajas necesarias. Todas estas ventajas esplican la estraordinaria rapidez con que se ha esparcido este sistema en América. La gradacion de los pasos es más contínua que en la serie de *Whitworth* y en particular el salto que existe en esta última, para $d = 1/2''$ queda evitado; y en efecto se llega á un valor conveniente para el filete del tornillo de media pulgada que era siempre un escollo en la antigua escala de *Whitworth*. Las diámetros de $5/16$ y $7/16$ que este último tuvo que desechar en 1857 se conservan en la nueva série, que contiene además el diámetro de $9/16$; ó en otros términos, la division propia de las medidas inglesas se halla representada rigurosamente por medio de fracciones que tengan por denominador el número 2 y de las potencias de 2. De aquí se deduce que la série de *Sellers* es, en suma, conveniente para el sistema de medidas inglesas.

§ 77

Sistema de filetes métricos.

Sin desconocer las ventajas del sistema de *Whitworth* varios ingenieros han procurado establecer séries de filetes fundados en las medidas métricas. Entre todos los sistemas propuestos que presentan entre sí diferencias bastante pronunciadas, conviene citar los catorce siguientes, conocidos con los nombres de sus inventores ó los de las fábricas que los emplean:

Armengaud, *Redtenbacher*, Ferro-carril de *Paris-Lion*, Ferro-carril del *Norte* (francés), *J. F. Cail* en Paris, Marina francesa, *Bodmer*, *Ducommun* y *Steinlen*, de Mulhouse (2 proposiciones), Sociedad de construccion de máquinas de Mulhouse, *Reishauer* y *Bluntschli*, de Zurich, Sociedad de los ingenieros alemanes de *Saarbruch*, *Delisle* (2 proposiciones).

Las fórmulas y las tablas para el cálculo de los pernos, que figuraban en la anterior edicion de este tratado se han considerado igualmente por algunas personas, pero sin razon, como constituyendo un sistema especial; el autor no tuvo la pretension de crear una nueva série; se habia limitado á establecer fórmulas de medidas métricas, partiendo de las bases del sistema de *Whitworth*.

El gran número de investigaciones á que ha dado lugar la cuestion de los sistemas métricos, de las que ya hemos enumerado las principales, permite reconocer ya que el problema presenta sérias dificultades y no es posible esperar llegar á una solucion superior á las que se han propuesto hasta aquí más que con la condicion de tener muy en cuenta las ventajas é inconvenientes de cada solucion. Si alguna vez se llega á adoptar un sistema uniforme de dimensiones para los pernos y tornillos, las condiciones siguientes son las que parece que incontestablemente deben observarse:

1.° *La forma del perfil debe poder ejecutarse fácil-*

(1) *Journal of the Franklin Institute*, 1865, vol. XLIX, pág. 53.

mente con toda la precision deseable. Bajo este punto de vista es de mucha importancia el redondeamiento de los angulos, tal como se practica en el sistema *Whitworth*, y parece preferible recurrir á un simple testero, como en el sistema *Sellers*.

2.° *El paso debe en lo posible deducirse de las fórmulas, sin que sea necesario redondear las cifras.* Los pasos de *Whitworth* y de *Sellers* no son recomendables, pues sus valores para que sean prácticos, se han de redondear casi todos (1).

3.° *Las gradaciones de los diámetros de los pernos deben establecerse de suerte que ninguno de ellos tenga fracciones de milímetro y que los diversos términos de la série no se separen mucho del sistema decimal.*

Estas tres condiciones deben en lo posible verificarse entre límites bastante estensos para los diámetros, desde un valor de d muy pequeño hasta $d=80^{m}/_{m}$ por lo ménos. En los catorce sistemas enumerados un poco más arriba, tres solamente pueden considerarse como susceptibles de tomarse en consideracion teniendo en cuenta esas condiciones. Conviene por tanto someterlos á un análisis especial.

§ 78

Sistemas de Delisle (n.° I), de la sociedad de los ingenieros de Saarbruck y de Delisle (n.° II).

Las tres figuras siguientes 206, 207 y 208 representan las rampas de los pasos en los tres sistemas propuestos, el primero (n.° I) y el último (n.° II) por el ingeniero *Delisle*, y el segundo por la sociedad de ingenieros de Saarbruk. En estas figuras los pasos estan ordinados cinco veces mayores que su tamaño natural, y los diámetros correspondientes de los pernos están inscritos al pié de estas ordinadas; todos los valores de d y s están además reunidos en un cuadro. El perfil del filete en los dos primeros casos es exactamente el mismo que en el sistema de *Sellers*, mientras que, en el último, el ángulo de base $\beta=26°34'$. Este valor es precisamente el que se obtiene cuando se supone la profundidad teórica del paso, es decir, la altura del triángulo igual al paso (s); y este ángulo tiene por consiguiente la ventaja de ser de un fácil trazado. Las aristas están cortadas como en el filete de *Sellers*.

«En una interpolacion de diámetro (fig. 206) entre dos términos de la série, se debe tomar por valor del paso, el correspondiente al término más sencillo» (V. la figura para $d=60$).

«En este sistema (fig. 207) no hay interpolaciones.»

«En una interpolacion entre dos términos (fig. 208) se debe tomar por valor del paso el correspondiente al término más elevado» (1) (V. la fig. para $d=60$).

Los tres sistemas que acabamos de esponer se distinguen por su sencillez y claridad. Estas cualidades consisten en gran parte en que la série de los pasos en lugar de estar espresada por una ecuacion única (parábola) lo está por dos ó más ecuaciones lineales distintas. En el segundo sistema solo existe marcada discontinuidad en el paso de 26 á 28. Y se esplica porque se han querido hacer filetes de pernos de diámetro inferior á 26 milímetros lijeramente más finos que los de los pernos de diámetros mayores. El segundo sistema de *Delisle* es algo más sencillo que el primero; pero se distingue principalmente por el distinto valor de su ángulo. Conviene observar que en los tres sistemas, la gradacion de los diámetros se verifica casi completamente por 2 y por 4 milímetros.

Bajo el punto de vista del ángulo de inclinacion, los tres sistemas pueden considerarse convenientes; lo mismo sucede con los valores de la presion por unidad de superficie. Si tomamos, en efecto, la fórmula (74) *y suponemos como anteriormente,* $S=2'5^{k}$, *veremos que los valores de p oscilan entre los límites siguientes:*

Delisle I	*entre* 0'60 *y* 0'80
Sociedad de Saarbruck	*entre* 0'60 *y* 0'78
Delisle II	*entre* 0'53 *y* 0'69

§ 79

Nuevos sistemas propuestos.

En una informacion hecha con el mayor cuidado por la sociedad de ingenieros alemanes ninguno de los sistemas que acabamos de mencionar ha recibido completa adhesion, y la cuestion entera ha quedado reser-

(1) En la antigua série de Whitworth los 33 valores de pasos estan redondeados; en la de Sellers hay 31 de los 34.

(1) El ingeniero *Delisle* en realidad ha previsto diámetros interpolados en sus dos sistemas; pero los hemos suprimido en la figura y en las tablas para obtener mayor claridad.

vada. Creemos que en estas condiciones debemos procurar hacer una nueva proposicion (1).

Para esto, seguiremos el procedimiento más rápido al parecer, que consiste en elegir uno de los tres sistemas anteriores, reservándonos la introduccion de los perfeccionamientos que parezcan necesarios. Dos cuestiones hasta aquí solo en parte tratadas, la de las gradaciones de los diámetros y la de los perfiles de filetes, exigen algunas esplicaciones más estensas.

La gradacion y la magnitudes efectivas de los diámetros tienen una importancia superior á la de la gradacion de los pasos. Como prueba de ello, podemos observar que en Prusia, por ejemplo, en que los perfiles de *Whitworth* estaban desde largo tiempo en uso, los pernos estaban graduados en pulgadas prusianas, y en estos últimos años se han adoptado para los diámetros la gradacion en milímetros, conservando los perfiles de *Whitworth*. Podemos, pues, considerar como una necesidad de primer órden para las gradaciones de los diámetros de pernos, que se adapten convenientemente al sistema decimal (3.ª condicion, § 77). Esta es una condicion á que no satisfacen por completo los tres sistemas anteriores, puesto que números tan naturales como 30, 50, 60, 70 no figuran entre los términos de sus séries. Sin duda no puede esperarse que desaparezca sin dificultad semejante defecto, pero la cosa es sin embargo posible.

En segundo lugar solo se puede apreciar convenientemente un sistema de filetes con la condicion de considerar al mismo tiempo las gradaciones de pasos y el perfil (en particular el ángulo del filete). No es posible afirmar que un filete es grueso ó delgado con solo observar la relacion $s : d$, sino que es indispensable al mismo tiempo considerar la otra relacion $t : d$. Un ejemplo aclarará la cuestion.

Ejemplo. *Si de los sistemas I y II de Delisle se toman dos diámetros iguales con alturas de pasos correspondientes iguales, los dos tornillos que se obtienen así no tienen el mismo grueso. Supongamos, por ejemplo, que tomemos en ambos casos* $d = 60^{mm}$, *lo que se puede hacer como hemos visto por interpolacion; entonces se halla para ambos pasos* $s = 5'6$ *(V. las rectas punteadas de las figs.* 206 *y* 208) *y se obtienen por consiguiente ángulos de inclinacion iguales para ambos tornillos. Pero no sucede lo mismo con las profundidades de los filetes t. Tenemos en efecto:*

$$\text{segun } I: t = {}^3/_4\, t_0 = 0'65\ s = 3'64^{mm}$$
$$\text{» } II: t = {}^3/_4\, t_0 = 0'75\ s = 4'20^{mm}.$$

De donde se deduce para el diámetro del núcleo:

en el caso $I: d_1 = 52'72^{mm}$ *y para la seccion* $: 2182^{mm \cdot c}$
» $II: d_1 = 51'60^{mm}$ » » $2091^{mm \cdot c}$,

lo que produce una diferencia de cerca de 5 $p.^0/_0$ *en la resistencia de los dos tornillos, uno de los cuales parece más fino que el otro. Vemos, segun esto, que en la eleccion de* $s : d$ *conviene tener en cuenta el perfil del filete que es lo que habia tenido cuidado de hacer el ingeniero Delisle, proponiendo al mismo tiempo dos sistemas completamente distintos.*

En cuanto á saber si el ángulo de 53'8° debe preferirse al ángulo de 60° de *Sellers*, nada puede decirse hasta aquí. Sin embargo, conviene observar que de los sistemas enumerados anteriormente dos se han pronunciado por este último ángulo, cinco por el primero y tres por un ángulo todavia menor; y debemos añadir que la investigacion de los ingenieros alemanes ha descubierto una tendencia á hacerse inferior más bien que superior al ángulo de 55° de *Whitworth*. Elegiremos, segun esto, para el ángulo de los filetes (fig. 29):

$$\left.\begin{array}{l} 2\beta = 53°,8' \text{ correspondiente á } t_0 = s \\ \text{y además: } t = {}^3/_4\, t_0 = {}^3/_4\, s. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \end{array}\right\} \quad (77)$$

En cuanto al paso lo determinaremos por las relaciones siguientes:

para $d =$ 4 hasta 40^{mm}: $\quad s = 0'4 + 0'1d \quad (78)$
— $d = 40$ — 80^{mm}, y más (1): $s = 2 + 0'06d \quad (79)$

(1) Al obrar así tenemos esencialmente por objeto presentar un sistema métrico de filetes, que pueda introducirse en la enseñanza politécnica, sin cuidarnos mucho de la cuestion de las aplicaciones, puesto que la introduccion de semejante sistema en la práctica de la construccion, produce mayores dificultades todavia que las que era de esperar antes de las diferentes tentativas que hemos mencionado. Pero en la enseñanza es preciso adoptar un sistema de filetes basado en las medidas métricas. Los partidarios del sistema de *Whitworth*, insisten en su adopcion como sistema internacional y con tanta más energia cuanta mayor estension va adquiriendo el sistema americano, el cual ha llegado á introducirse en algunos puntos de Alemania. Procuran evitar las dificultades resultantes del sistema de medidas, admitiendo que los diámetros se ejecuten en pulgadas inglesas, mientras que en el dibujo estarán representados por el número entero de milímetros que más se aproxima al valor real, escediéndole. Es poco probable que semejante procedimiento deje de acarrear en la práctica errores y confusiones: en todo caso, es cierto que en las escuelas es imposible su adopcion. Parece por lo demás que no se puede limitar mucho esta proposicion á la antigua escala de Whitworth, y por otro lado, la nueva escala, con su gran número de términos, se prestaria muy mal á un compromiso de este género. Un exámen comparativo de los tres diagramas del párrafo anterior y de los de las figs. 203 y 204, demuestra tambien que el querer conservar el sistema de Whitworth, seria abandonar lo sencillo para conservar lo complicado y eso á costa de esfuerzos que no estarian en relacion con el resultado obtenido.

(1) Hasta ahora en Alemania y Francia no se ha juzgado útil que d sea mayor de 80 milímetros; si llegásemos hasta $d = 150$ milímetros, que sensiblemente corresponde al valor superior de las séries *Whitworth* y *Sellers*, obtendriamos $s = 11$, valor completamente admisible. Véase párrafo 87.

y en fin adoptaremos para los diámetros la gradacion:

		4	5	6	7	8	9	10		
12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
	36	40	.	45	.	50	60	70	80	

La fórmula (78) *concuerda con la de Delisle (II) para valores de d comprendidos entre* 6 *y* 40^{mm}. *Nos parece supérfluo, para los diámetros, interpolarlos entre los términos de la série anterior; sin embargo, si se juzga útil hacerlo, no habria necesidad de apartarse de las fórmulas anteriores para s, puesto que los términos intermedios, en el segundo y tercer grupo de la série, dan aun como en los términos de esta misma série, valores redondos y en estas condiciones, la fabricacion de terrajas por medio del torno de filetear, no presentaria sérias dificultades.*

En el caso en que se desee hacer uso del ángulo de 60° *conservando las ventajas mencionadas, convendrá tomar:*

$$\left.\begin{array}{llll} \text{para } d=4 & \text{hasta } d=8^{mm} & s'=0{,}2d & (\text{con Delisle } I) \\ \text{» } d=8 & \text{» } d=40 & s'=0{,}8+0{,}1d & (\text{con Delisle } II) \\ \text{» } d=40 & \text{» } d=80 & s'=1{,}6+0{,}08d & \end{array}\right\} \qquad (80)$$

La última de estas espresiones permite hacer entrar de nuevo en série los términos 30, 45, 50, 60, 70, *y podria ciertamente utilizarse para valores de d superiores á* 80^{mm}. *Para comparar los resultados dados por esta última fórmula con los que da la fórmula* (79), *basta referirse á la fig.* 210 *en que están indicados los perfiles de los filetes deducidos de estas dos fórmulas. Los radios r_1 y r'_1 de los núcleos son sensiblemente iguales, así como las profundidades de los filetes, mientras que los perfiles son muy diferentes, como lo demuestran en mayor escala los triángulos ABC y DEF.*

Inútil nos parece dar á los filetes de nuestra série números de I á XXV y juzgamos preferible designar un filete por la indicacion de la cifra del diámetro del perno correspondiente haciéndole preceder de la abreviatura n.° Así, por ejemplo, el filete n.° 20 *seria aquel para el cual d=*20^{mm}. *Una fábrica de construccion de máquinas que no utilizase ciertos números de filetes, podria dejarlos á un lado, mientras que los mecánicos de gran precision, podrian intercalar nuevos números en la série, cuando de ello tuviesen necesidad, sin perder ninguna de dichas ventajas.*

§ 80

Tuercas, Rodajas, cabezas de pernos.

El espesor que hay que dar á la pared de una tuerca está en estrecha relacion con la profundidad de los filetes t y por consiguiente con el paso s. Por otro lado las fórmulas que hay que emplear en la determinacion de esta dimension, deben ser tales que los resultados del cálculo sólo exijan ligeras correcciones para convertirse en números redondos. En el caso en que la tuerca debe estar pulida, el diámetro D del círculo circunscrito al exágono que limita sus caras, se halla convenientemente determinado por la relacion.

$$D=1+d+5\,s. \qquad (81)$$

La presion por unidad de superficie en la base de la tuerca llega al máximum á 1'7^k (para $d=80$). Para las tuercas que deben quedar en bruto conviene darles dimensiones un poco mayores y tomar (1):

$$D_1=D+3=4+d+5\,s. \qquad (82)$$

Inferiormente á $d=10^{mm}$ es raro que las tuercas se dejen sin pulir. La interposicion de una rodaja se halla particularmente indicada siempre que la tuerca tenga que descansar en una superficie imperfectamente levantada. El diámetro U de esta rodaja y su espesor u (figura 211) están dados por la fórmula

$$\left.\begin{array}{l} U=d+10\,s \\ u=\frac{5}{4}\,s \end{array}\right\} \qquad (83)$$

La cabeza del perno, que tiene amenudo cuatro tableros, por más que sea preferible darle seis, conserva el mismo diámetro de círculo circunscrito que la tuerca D ó D_1 y su altura h es igual á 0'7 d.

En las tuercas pulidas, la superficie superior es ordinariamente una porcion de cono, cuyo diámetro y el ángulo de la base son respectivamente D y 30° (figura 212) ó una superficie esférica, cuyo radio es igual á $\frac{5}{3}\,D$ (fig. 213).—En las tuercas que deben permanecer sin pulir, se limita á quitar los ángulos vivos de las dos bases (fig. 214), segun una superficie cónica cuyos elementos son los mismos que los de la fig. 212.

§ 81

Tabla y escala de proporciones para los pernos.

La tabla siguiente contiene las dimensiones que hay

(1) Con *Sellers*, que al diámetro D le añade $\frac{1}{8}$ de pulgada.

que emplear para los pernos, las que se han determinado segun los desarrollos anteriores y en las condiciones de carga admitidas para la fórmula (72).

La fig. 215 es una escala de proporciones, que permite de una sola ojeada ver las variaciones de los más importantes elementos. Los pasos están representados por cinco veces su magnitud real.—Para mayor claridad la recta de la s' (80) está trazada de puntos.

Además de los valores de los pasos y de las presiones por unidad de superficie, el trazado anterior da tambien las dimensiones de las tuercas y de las cabezas para todos los pernos de la serie propuesta, cuyos diámetros están comprendidos entre 4 y 80^{mm}. Los pasos están representados á la vez por dos rectas (E) y (F) cuyas ordenadas son respectivamente 5 y 10 veces las magnitudes naturales; las ordenadas que representan los diámetros de los pernos (línea D) lo están por el contrario en verdadera magnitud: todas las ordenadas se cuentan á partir de la recta A.

Las rectas B y C están trazadas paralelamente á la recta D, la primera á una distancia de 1^{mm}, contada en la direccion de las ordenadas, la segunda á 4^{mm}; y en fin la porcion de ordenada comprendida entre las rectas A y G es siempre igual á 0'7 d.

Segun esto, si sobre la ordenada correspondiente á un diámetro del perno dado, se miden las longitudes comprendidas entre las diferentes líneas de que acaba de tratarse, se obtiene:

entre A y E el paso del filete aumentado cinco veces
» E y B el diámetro de la tuerca segun la fórmula (81)
» E y C » » » » (82)
» F y D el diámetro de la rodaja » » (83)
» A y G la altura de la cabeza del perno.

La tangente trigonométrica del ángulo de inclinacion para los valores de d comprendidos entre 4 y 80^{mm}, varia de 0'064 á 0'047, y la presion por unidad de superficie en los filetes tiene por límites estremos 0'47^{k} y 0'67^{k}.

PERNO	PASO	PROFUNDIDAD	NÚCLEO	TUERCA		RODAJA		CABEZA	CARGA
d	s	t	d_1	D	D_1	U	u	h	P
4	0'8	0'60	2'80	9	—	12	1	3	16
5	0'9	0'68	3'65	10'5*	—	14	1	3'5	27
6	1'0	0'75	4'50	12	—	16	1	4	41
7	1'1	0'83	5'35	13'5*	—	18	1'5	5	57
8	1'2	0'90	6'20	15	—	20	1'5	6	77
9	1'3	0'98	7'05	16'5*	—	22	1'5	6	99
10	1'4	1'05	7'90	18	21	24	1'5	7	125
12	1'6	1'20	9'60	21	24	28	2	8	184
14	1'8	1'35	11'30	24	27	32	2	10	255
16	2'0	1'50	13'00	27	30	36	2	11	338
18	2'2	1'65	14'70	30	33	40	3	13	432
20	2'4	1'80	16'40	33	36	44	3	14	538
22	2'6	1'95	18'10	36	39	48	3	15	655
24	2'8	2'10	19'80	39	42	52	3	17	784
26	3'0	2'25	20'50	42	45	56	4	18	841
28	3'2	2'40	23'20	45	48	60	4	20	1076
30	3'4	2'55	24'90	48	51	64	4	21	1240
32	3'6	2'70	26'60	51	54	68	4	22	1415
36	4'0	3'00	30'00	57	60	76	5	25	1800
40	4'4	3'30	33'40	63	66	84	5	28	2231
45	4'7	3'53	37'95	70	73	92	6	32	2880
50	5'0	3'75	42'50	76	79	100	6	35	3613
60	5'6	4'20	51'60	89	92	116	7	42	5325
70	6'2	4'65	60'70	102	105	132	7	49	7369
80	6'8	5'10	69'80	115	118	148	8	56	9744

* Estas cifras pueden redondearse lijeramente por exceso ó por defecto.

§ 82

Tablas de los pesos de las barras de hierro redondas.

Los pesos consignados en la siguiente tabla se han calculado por la fórmula:

$$G = 100.0'25\pi d^2.0'00000779 = 0'00061825 d^2,$$

en la cual se ha admitido 7'79 para el peso específico del hierro forjado. El peso de un cilindro de fundicion puede deducirse del del mismo cilindro de hierro, multiplicando este último por 0'93, y el de un cilindro de bronce reemplazando este coeficiente por 1'092 (relacion de los pesos específicos del bronce y hierro).

El peso de un prisma de base exagonal regular circunscrito en un círculo de diámetro d se obtiene multiplicando por 1'103 el peso del cilindro d de la misma altura y materia.

d	G	d	G	d	G	d	G	d	G	d	G
1	0'0006	41	1'028	81	4'014	121	8'958	161	15'859	201	24'718
2	0'0024	42	1'079	82	4'113	122	9'106	162	16'057	202	24'965
3	0'0055	43	1'131	83	4'215	123	9'256	163	16'256	203	25'213
4	0'0098	44	1'184	84	4'317	124	9'407	164	16'456	204	25'462
5	0'0153	45	1'239	85	4'420	125	9'560	165	16'657	205	25'712
6	0'022	46	1'295	86	4'525	126	9'713	166	16'859	206	25'963
7	0'030	47	1'352	87	4'631	127	9'868	167	17'063	207	26'216
8	0'039	48	1'410	88	4'738	128	10'024	168	17'268	208	26'470
9	0'050	49	1'469	89	4'846	129	10'181	169	17'474	209	26'725
10	0'061	50	1'530	90	4'956	130	10'340	170	17'682	210	26'975
11	0'074	51	1'591	91	5'067	131	10'500	171	17'890	211	27'239
12	0'088	52	1'654	92	5'178	132	10'660	172	18'100	212	27'498
13	0'103	53	1'719	93	5'292	133	10'823	173	18'311	213	27'758
14	0'120	54	1'784	94	5'406	134	10'986	174	18'524	214	28'019
15	0'138	55	1'851	95	5'522	135	11'151	175	18'737	215	28'282
16	0'157	56	1'919	96	5'639	136	11'316	176	18'952	216	28'545
17	0'177	57	1'988	97	5'757	137	11'483	177	19'168	217	28'810
18	0'198	58	2'058	98	5'876	138	11'652	178	19'385	218	29'076
19	0'221	59	2'129	99	5'996	139	11'821	179	19'603	219	29'344
20	0'245	60	2'203	100	6'118	140	11'992	180	19'823	220	29'612
21	0'270	61	2'277	101	6'241	141	12'164	181	20'044	221	29'882
22	0'296	62	2'352	102	6'365	142	12'337	182	20'266	222	30'153
23	0'324	63	2'428	103	6'491	143	12'511	183	20'489	223	30'425
24	0'352	64	2'506	104	6'617	144	12'686	184	20'714	224	30'699
25	0'382	65	2'585	105	6'745	145	12'864	185	20'940	225	30'974
26	0'414	66	2'665	106	6'874	146	13'042	186	21'167	226	31'249
27	0'446	67	2'746	107	7'005	147	13'221	187	21'395	227	31'527
28	0'480	68	2'829	108	7'136	148	13'301	188	21'624	228	31'805
29	0'515	69	2'913	109	7'269	149	13'583	189	21'855	229	32'085
30	0'551	70	2'998	110	7'403	150	13'766	190	22'087	230	32'366
31	0'588	71	3'084	111	7'538	151	13'950	191	22'320	231	32'648
32	0'627	72	3'172	112	7'675	152	14'136	192	22'554	232	32'931
33	0'666	73	3'260	113	7'812	153	14'322	193	22'790	233	33'215
34	0'707	74	3'350	114	7'951	154	14'510	194	23'027	234	33'501
35	0'749	75	3'442	115	8'091	155	14'699	195	23'265	235	33'788
36	0'793	76	3'534	116	8'233	156	14'889	196	23'504	236	34'076
37	0'838	77	3'628	117	8'375	157	15'081	197	23'744	237	34'366
38	0'883	78	3'722	118	8'519	158	15'274	198	23'986	238	34'656
39	0'931	79	3'818	119	8'664	159	15'468	199	24'229	239	34'948
40	0'979	80	3'916	120	8'810	160	15'663	200	24'473	240	35'241

§ 83

Tipos diversos de pernos fijos.

Las formas ordinarias de cabezas de pernos (de cuatro ó seis tableros) están en ciertas circunstancias reemplazadas por otras formas especiales, como las representadas por las figuras 216 á 220. En la última figura la cabeza está hundida. Todas llevan una parte adicional destinada á sostener la cabeza y á impedir que el perno gire, al obrar sobre la tuerca. Las figuras 219 y 220 son pernos con cabeza en forma de áncora que puede introducirse por arriba, gracias á la forma prolongada del agujero en las piezas que hay que unir.

La fig. 221 representa un perno de áncora con placa de fundicion y macizo de mamposteria. Este perno se coloca por la parte superior y luego queda en su posicion definitiva con una rotacion de 90° y una traccion vertical. La superficie de apoyo de la contraplaca de fundicion no debe ser inferior á $100\,d_1^2$.

La fig. 222 indica un perno de áncora para macizo de mamposteria con una hilada de sillares. La cabeza del perno está aquí reemplazada por una hendidura destinada á contener un clavete; la contraplaca de fundicion debe tener una superficie por lo menos igual á $25d_1^2$. Esta contraplaca es generalmente de hierro.

En las figuras 223 y 224 la cabeza se halla reemplazada por un clavete trasversal y un clavete rasante. Estas dos figuras indican al mismo tiempo dos maneras de dibujar en pequeño las tuercas; la segunda, que es la más sencilla, es la que debemos recomendar para todos los dibujos en pequeña escala. Sin embargo ambas representaciones se usan en las robladuras fileteadas cuyas tuercas tienen una de las formas indicadas por las figuras 212 á 214. Las figs. 225 y 226 son pernos de espolon. La fig. 227 representa un tornillo de cabeza. En esta clase de tornillos de cortas dimensiones la cabeza recibe la forma de un cilindro terminado por una superficie curva y lleva una ranura en la cual puede alojarse un atornillador. Entonces se designan con el nombre de tornillos de cabeza partida.

§ 84

Llaves de pernos ó de monturas.

Para cojer y hacer girar las tuercas ó las cabezas de los pernos se usan palancas de forma especial que se designan con el nombre de llaves. Las llaves simples, de las cuales la fig. 228 representa dos disposiciones, se compone de una parte hueca, en forma de horquilla terminada por un vástago de caras planas ó seccion circular; esta última forma se emplea con preferencia para las llaves que hay que manejar amenudo La figura indica las dimensiones que conviene dar á las diversas partes tomando por módulo ó por unidad el diámetro D de la tuerca determinado por la fórmula (81).

Las llaves dobles (Fig. 229) llevan una mandíbula en cada estremo del vástago. Dando á cada mandíbula, con relacion al eje del vástago, un declive tal que para una tuerca exagonal supuesta asida por la mandíbula, forme este eje ángulos de 15° y de 45° con dos radios consecutivos del exágono, nos colocamos evidentemente en las mejores condiciones de utilizacion, puesto que es aún posible servirse de semejante llave en los espacios restringidos que no permiten más que una rotacion de $^1/_{12}$ en cada maniobra (1).

§ 85

Disposiciones de seguridad para los pernos.

Los pernos fijos colocados segun las reglas que acabamos de indicar ú otras análogas, presentan un ángulo de inclinacion bastante débil ($3°\,^1/_2$ para $d=4^{mm}$, $1°\,^1/_2$ para $d=80^{mm}$) para que la presion que se ejerce segun el eje no sea capaz de vencer la resistencia del frotamiento y producir por lo tanto el desajuste de la tuerca. Sin embargo, puede suceder que en ciertos casos escepcionales bajo la accion de conmociones ó choques repetidos, acabe la tuerca por tomar cierto juego y se halle comprometida la seguridad del ensamble. Este efecto es todavia más temible cuando el perno no ha estado ajustado completamente á fondo, sino solamente de una manera moderada para asegurar á una de las piezas una posicion determinada, como en el caso de las fijaciones de soporte y otros ensambles análogos.— Esta inseguridad que presenta el modo ordinario de colocar los pernos y que se hace ya sensible en las máquinas de vapor fijas, es todavia más marcado en las locomotoras y máquinas de los barcos, sobre todo en las de los de guerra, á causa del recule de los cañones. En todos los casos análogos los pernos están provistos de disposiciones de seguridad, de las cuales vamos á dar algunos ejemplos elegidos convenientemente.

El empleo de una contra-tuerca (fig. 230) constituye uno de los dispositivos de seguridad más antiguos y

(1) Esta disposicion ha sido propuesta por el ingeniero *Proell*.

generalizados. Las superficies de contacto de ambas tuercas son planas y perfectamente lisas de manera que se apliquen con toda exactitud una á otra. Algunos constructores creen que por motivo de resistencia deben colocar la contra-tuerca debajo de la tuerca principal; pero ese dispositivo no es necesario, toda vez que bajo el punto de vista de la resistencia de los filetes bastaria dar á la tuerca una altura de 0'45 á 0'4 *d*. La seguridad que da la contra-tuerca ordinaria no es muy grande, pero puede aumentársela notablemente usando una contra-tuerca con filete á la izquierda, conforme veremos en un ejemplo más adelante (fig. 242).

En la figura 231 el perno está atravesado por un pasador hendido que frecuentemente se emplea á la vez que la contra-tuerca.—En la fig. 232 la seguridad del ensamble está garantida por un clavete de una manera muy satisfactoria, puesto que en el caso en que haya necesidad de volver á apretar la tuerca, puede hundirse más este clavete, de modo que siempre se apoye en él.—Con frecuencia tambien el pasador hendido y el clavete atraviesan directamente la tuerca ó se encajan en un hueco practicado en su cara superior. En estos tres casos está garantida la seguridad por una verdadera fijacion de la tuerca en el tornillo. Se produce un efecto del mismo género por medio de las tres disposiciones siguientes, en las cuales la cabeza y por consiguiente el tornillo están invariablemente unidos á la pieza que lleva el fileteado de la tuerca. La disposicion de la fig. 233 se usa para la suspension de los resortes en las locomotoras (*Borsig*), la de la fig. 234 para la clausura de cajas de aceite de las cabezas de bielas en las locomotoras y la fig. 235, que se utiliza para los pernos de fijacion de estas mismas cabezas de bielas, permite obrar en el ajuste de estos pernos por fraccion de $^1/_{12}$ de vuelta.

En las figuras siguientes las disposiciones adoptadas tienen simplemente por objeto impedir que gire la tuerca con relacion á una de las piezas que hay que unir, y suponen por tanto que el tornillo no puede tener ningun movimiento de rotacion.—La disposicion de la figura 236 se emplea para los pernos de sombrero de silleta; el pasador se apoya en su medio contra una salida que le impide encorvarse. El de la figura 237 se utiliza en los émbolos de las máquinas de vapor para los pernos que unen la cubierta al cuerpo mismo del piston.—La fig. 238 representa lo que se llama una llave de posicion en uso para los pernos de sombreros de silletas; y á causa de las aberturas que contiene permite esta llave dar á la tuerca rotaciones de un doceavo de vuelta, mientras que en las dos disposiciones anteriores, esta tuerca tenia que dar un sexto de vuelta para volver á una posicion fija.

La figura 239 indica una disposicion frecuentemente empleada para los pernos de las cajas de estopa, especialmente en las locomotoras. La pequeña rueda dentada que sirve para impedir el desajuste forma cuerpo con la tuerca. El empleo de tuercas con ruedas de roquete se encuentra en gran número de formas diferentes.

Figura 240.—Disposicion de seguridad para pernos de suspension de resortes de locomotoras (*Borsig*). La tension se produce por la rotacion del perno, en la cabeza del cual se halla colocada la chapa de seguridad, cuyas caras vienen á asir el cuadro que trasmite la carga al extremo del resorte; y como se ve, esta chapa permite rotaciomes de un sexto de vuelta.

Figura 241.—Tuerca con tornillo de ajuste: esta disposicion (debida á *Penn*) presenta sérias ventajas para las mesetas ó soportes, las suspensiones de resortes, etcétera, pues permite una rotacion tan débil como se quiera. Conviene dar á la tuerca dimensiones un poco superiores á las adoptadas ordinariamente, á fin de que la parte inferior correspondiente á la ranura no tenga un espesor demasiado débil. Tomaremos pues en general, para el diámetro de esta tuerca, el valor D_1 dado por la fórmula (82). El pequeño tornillo de ajuste debe ser de acero templado.—Esta disposicion de tuerca de seguridad es de uso muy generalizado en las máquinas de los barcos de vapor.

Entre una série de otras disposiciones de seguridad (1) debemos mencionar aquí las que obran aumentando la elasticidad de las partes comprimidas entre la cabeza y la tuerca. Las rodajas elásticas de *Paget* y otras son de uso general. El perno de *Parson* (2) pertenece á la misma clase. Gracias á una série de canales practicados en el sentido de su longitud, el cuerpo del perno llega á tener una seccion sensiblemente igual á la del núcleo del filete y desde entonces aumenta su elasticidad; de donde resulta que la tuerca debe girar un ángulo más considerable para llegar á ejercer en su base de apoyo la misma presion que con un perno de la misma longitud, cuya seccion de cuerpo fuese un círculo de diámetro *d*. La fig. 242 representa, á mitad de tamaño, el perno de *Parson* que el ingeniero *Gerber* (de la fábrica de construccion de

(1) V. Ludew g. «Ueber Schraubensicherungen.» *Bair. Industr. u. Gewerbebl.*, 1870, Pág. 17, 144, 283, V. tambien *Zeitschr des Vereins deutscher Ingenieure.*

(2) Engineer., Julio 1867 pág. 16 y Noviembre 1867, pág. 391; *Engineering*. Noviembre 1817, pág. 411; *Organ f. Eisenbaknwsen*, 1868, página 77 y 117.

puentes de Gustavsbourg) ha utilizado para el ensamble de los rails con las placas inferiores y las vigas longitudinales. A la seguridad que da la elasticidad del perno se añade la de una contra-tuerca con filete á la izquierda.—En lugar de acanalar el perno se puede achatarlo por los cuatro costados ú horadarlo, para producir la disminucion de seccion que se desea.

Las disposiciones de seguridad para los pernos tienen importantes aplicaciones en las hélices de los barcos cuyas aletas pueden quitarse; é importa en efecto, para la seguridad del servicio que el enlace de estas aletas con el cubo sea tan perfecta como si formasen una sola pieza con él. Pondremos algunos ejemplos.

La figura 243 representa en plano la grapa de una aleta de hélice que está representada en corte en la figura 190. Esta grapa está fija al cubo por 16 tornillos de cabeza; 4 tornillos de presion sirven para colocarla exactamente en la posicion que debe tener, gracias al lijero movimiento de rotacion que permite la ovalizacion de los agujeros de los tornillos de fijacion: cada uno de estos últimos tornillos está provisto de una disposicion de seguridad.

La figura 244 representa la disposicion empleada por *Penn* para tornillos de fijacion de este género. Estos tornillos (cuyo diámetro para la hélice del *Minotauro* llega á 83 milímetros) descansan, por sus cabezas, en una rodaja comun de forma anular. Cuando estos tornillos se han apretado tan fuertemente como es posible, se coloca en cada cabeza de seis tableros, un disco dentado, hueco, que encaja exactamente. La rotacion de los discos se evita por piezas de tope prismáticas, atornilladas en la rodaja anular; y en cuanto al desplazamiento de estos mismos discos en el sentido de los ejes de los tornillos está igualmente impedido por anchas tuercas atornilladas en las partes fileteadas que llevan las piezas de tope. Cada disco lleva 11 dientes, lo que permite dar á cada tornillo una rotacion de $^1/_{66}$ de vuelta solamente y proveerla de nuevo de su disposicion de seguridad.

Fig. 245.—Método de *Maudslay*.—En este método dos tornillos próximos se hallan mantenidos por una doble llave de posicion que permite dar á cada tornillo rotaciones de un $^1/_{18}$ de vuelta. No existe aquí rodaja anular, pero á cada par de tornillos corresponde una placa comun, en la cual la llave de posicion se ajusta por medio de un tornillo de cabeza.

La fig. 246 representa otra disposicion de *Maudslay*. En las placas mencionadas están fijas con tornillos de cabeza dos piezas de tope para los dos grandes tornillos bajo los cuales se halla intercalada esta placa; cada una de estas piezas se aplica fuertemente por uno de sus lados sobre una de las caras de la cabeza del tornillo correspondiente y se opone así á todo desplazamiento. Cada pieza de tope ocupa tres posiciones diferentes determinadas por tres agujeros practicados en la placa para recibir el tornillo de fijacion. Los ejes de estos tres agujeros están dispuestos en un arco de círculo á distancias angulares de 40°, con lo cual puede llevarse la cabeza exagonal del tornillo de una posicion de tope á otra, haciéndola girar un ángulo de 20° (60°—40°) es decir, $^1/_{18}$ de vuelta como en el caso anterior. La disposicion de *Penn* es, pues, en definitiva la que permite más pequeñas rotaciones.

§ 86

Filetes cuadrados y trapezoidales.—Tornillos de presion.—Tornillos ensanchados.

El filete cuadrado y el filete trapezoidal pueden tambien utilizarse para los pernos de fijacion; sin embargo el primero de estos filetes es ménos conveniente para este uso, pues para obtener el mismo número de pasos en la tuerca hay que dar á este órgano una altura superior á la que seria necesaria en atencion á lo insignificante de la presion por unidad de superficie. Bajo este punto de vista, el tornillo de filete trapezoidal seria por el contrario muy conveniente, puesto que para un mismo valor de la relacion $s : d$ la altura de la tuerca debe determinarse exactamente como la de la tuerca del tornillo de filete triangular de la fig. 209.

En realidad se puede considerar el filete de la figura 248 como derivado del de la figura 209, en el cual conservando la profundidad t y el paso s se haya reducido uno de los ángulos de base á 0° y el otro á 45°. Las dos formas de filetes representadas por las figuras 247 y 248 se usan principalmente en los tornillos de frenos, de prensas, de cojinetes de laminadores y en general en los tornillos que pueden llamarse de presion.

En los casos comunes el diámetro del núcleo d_1 para estos tornillos se calcula por la fórmula (72). Pero cuando hay mucho interés en obtener el menor diámetro posible, se puede utilizar otra fórmula con la condicion de tomar las precauciones necesarias para que la presion se ejerza siempre exactamente en todo el contorno de los filetes; y se puede entonces admitir que la tension S en la seccion del núcleo tiene un valor doble del que ha servido para establecer la fórmula (72); tomando $S=5^k$, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= 0{,}5\sqrt{P} \\ P &= 4\,d_1^{\,2} \end{aligned}\right\} \qquad (84)$$

La profundidad t para las dos formas de filetes se determina enseguida por la fórmula:

$$t = \frac{d}{10} = \frac{d_1}{8}$$

de donde se deduce: para los tornillos de filete cuadrado,

$$s = \frac{d}{5} = \frac{d_1}{4} \qquad (85)$$

para el tornillo de filete trapezoidal:

$$s = \frac{2}{15} d = \frac{d_1}{6}$$

La fórmula (84) puede igualmente utilizarse para los pernos de filete triangular de suspensiones de resortes de locomotoras, puesto que estos pernos están dispuestos de manera que aseguren una distribucion conveniente de la presion en toda la estension de los filetes. A fin de evitar que la tuerca sufra frotamiento demasiado considerable y quede espuesto á pronto desgaste debemos procurar que la presion por unidad de superficie p entre los filetes no esceda en lo posible de $0'5^k$. Recordando la fórmula (73) vemos que esta condicion se satisface siempre que el número n de pasos comprendidos en una tuerca de fundicion ó de bronce no es inferior al que da la fórmula siguiente (y esto aun cuando d_1 y t no se hubiesen determinado por el cálculo):

$$n = \frac{1}{2} S \frac{d}{t}\left(1 - 3\frac{d}{t}\right)$$

ó

$$n = \frac{2}{\pi} \frac{P}{d_1^2} \frac{d}{t}\left(1 - 3\frac{d}{t}\right) \qquad (86)$$

Para $t = {}^1/_{10}\, d$, se deduce:

$$n = 3'5\, S = 4'46\, \frac{P}{d_1^2} \qquad (87)$$

Ejemplo. *Para una presion de* 25000 *kilógramos* (*suponiendo realizadas las medidas de precaucion indicadas anteriormente*) *se saca de la fórmula* (84) : $d_1 = 0'5\sqrt{25000} = 0'5 \cdot 158 = 79$ *ó sea* 80^{mm}. *La fórmula* (85) *da entonces* $t = 10^{mm}$ *de donde se deduce* $d = 100^{mm}$. —*En cuanto al mínimo número de pasos que debe tener la tuerca está dado por la fórmula* (87) *haciendo* $S = 5^k$; *y entonces se obtiene:* $n = 3'5 \cdot 5 = 17'5$. *En la hipótesis del empleo de un filete cuadrado, la altura de la tuerca* $h = ns = 17'5 \cdot 20 = 350^{mm}$; *para un filete trapezoidal* $h = 17'5 \cdot {}^5/_3 \cdot 10 = 233^{mm}$.

Las fórmulas que hemos dado hasta aquí se aplican á los tornillos que podemos considerar como normales; y en cierto número de casos hay que dar á los tornillos diámetros mayores que los correspondientes al tornillo normal sometido á la misma carga: esto es lo que se verifica, por ejemplo, en ciertas cajas de estopas, en algunos ensambles de tubos, etc. Esta clase de tornillos por oposicion al tornillo normal hasta aquí considerado puede designarse con el nombre de tornillo ensanchado. Podemos admitir como regla para la determinacion de las dimensiones de los filetes que en el tornillo ensanchado, la seccion del filete y la altura de la tuerca deben tener el mismo valor que en el tornillo normal equivalente, es decir, sometido á la misma carga y formado de la misma materia, y esto porque en este caso, las causas de desgaste tienen próximamente la misma importancia para ambos tornillos.

Ciertos tornillos de prensas tienen una longitud bastante grande para hallarse bajo el punto de vista de la resistencia, en las condiciones de las piezas cargadas en pié; conviene entonces darles un diámetro superior al que indica la fórmula (84) y hacer por tanto lo que acabamos de llamar tornillos ensanchados.

§ 87

Ensambles por pernos.—Ensambles con rebordes.

En los ensambles por pernos se puede distinguir el caso en que la fuerza que tiende á destruir el ensamble obra sobre los pernos en la direccion de sus ejes y aquel en que se ejerce, por el contrario, una accion trasversal. Este último modo de accion, cuyo efecto es esponer el cuerpo á la rotura por corte, existe en los ensambles representados por las figuras 249, 250 y 251. Si suponemos que se ha determinado préviamente el diámetro d del tirante teniendo en cuenta el esfuerzo á que está sometido el diámetro d' del perno, puede espresarse en funcion de d. En el ensamble de la figura 249 se ha tomado $d' = d$, en el de la figura 250 $d' = 1'4\, d$ y en el de la figura 251 otra vez $d' = d$. Para los pernos es indiferente que el esfuerzo de traccion, á causa de un ajuste imperfecto se ejerza en un solo lado, que por ejemplo en la figura 250 se trasmita toda la carga por uno solo de los dos tirantes.

La figura 252 representa un ensamble de vástago movil de doble filete uno á la derecha y otro á la izquierda. La altura de cada tuerca es por lo general superior al diámetro d.

La fig. 253 representa un anillo que sirve para efec-

tuar la union de cuatro tirantes concurrentes al mismo punto. Los diversos ensambles que acabamos de analizar son especialmente utilizados en las armazones ó cuchillos de hierro y en trabajos análogos.

Las vigas enrejadas americanas presentan numerosos ejemplos de ensambles en los cuales se utiliza la resistencia de los pernos al corte: son pernos de gran diámetro, en relacion con las grandes cargas que tienen que soportar. Tanto en los proyectos ejecutados como en los trazados considerados clásicos se puede observar que el ensamble por pernos es preferido al ensamble por roblones y que ha llegado á un gran estado de perfeccion. Vamos á dar algunos ejemplos.

Las figuras 254 y 255 indican la disposicion de una articulacion en la suela superior de un puente sobre el Ohio en Cincinnati. Esta suela está constituida por dos cajones semejantes unidos en la parte superior por una doble hoja de palastro y reunidos á los de la suela inferior por una doble fila de columnas ó montantes verticales: cajones y columnas están formadas por hojas de palastro, hierros en forma de T y hierros angulares; las ligaduras inclinadas ó tirantes y las piezas de contraventana están amarradas á un gran perno cilindrico que atraviesa los dos cajones y está fileteado en sus dos estremos. En el filete de la izquierda se encaja una tuerca que tiene la forma de horquilla y sirve para recibir las piezas de contraventana, mientras que la tuerca del filete de la derecha es una tuerca ordinaria de ocho tableros de poca altura. En la horquilla, las piezas de contraventana están sostenidas por un perno provisto tambien de dos tuercas en sus estremos. Esos pernos están torneados con el mayor cuidado posible y perfectamente ajustados (1) de modo que despues de muchos años de servicio, no se muevan en lo mas mínimo (2).

(1) Durante mucho tiempo se ha producido en la construccion de puentes enrejados una circunstancia desfavorable relativamente á los vástagos agujereados normalmente á su longitud, del género de los de la fig. 256. Sucedia, en efecto, que cuando las operaciones del agujereado habian ocasionado temperaturas diferentes, la separacion de los agujeros eran desiguales en los diversos vástagos al colocarlos en su sitio unos al lado de otros, es decir, al ponerlos en las mismas condiciones de temperatura. Se ha conseguido evitar este inconveniente adoptando una disposicion que el autor ha tenido ocasion de ver aplicada en la magnífica fábrica de construccion de puentes de Phenixville y que consiste en unir por bandas de hierro de la longitud de los vástagos las dos máquinas destinadas á agujerear simultáneamente los dos agujeros de un mismo vástago. Estas bandas de union bajo la accion de las variaciones de temperatura modifican la separacion de las máquinas ó de los taladros en cantidades precisamente iguales á las variaciones de longitud de los vástagos que hay que agujerear en las mismas condiciones.

(2) V. *H. Fontaine*. La industria de los Estados-Unidos, Paris, *Bandry*, 1878. V. tambien *Boller*, Practical treatise on the Construction of highway bridges, New-York, *Wiley*, 1878.

Conviene tambien observar que las dimensiones están determinadas de manera que la presion por unidad de superficie en los pernos no esceda de 11^k; algunas veces se reduce á 8 y aún 7^k. Una trabazon tan sencilla como segura existe entre los cajones y los montantes (piezas para las cuales se han suprimido en nuestro dibujo todos los roblajes de ensamble de las cabezas y de los hierros). Cada montante está provisto de un capitel de fundicion que se encaja en el hueco de este montante por una espiga cuadrada; el capitel lleva una clavija redonda de hierro ajustada que atraviesa los hierros angulares y el palastro inferior del cajon. El diámetro d del perno principal se eleva á 100, 140, 170 milímetros ó más segun la carga. Se calcula admitiendo $5'6^k$ como tension de corte, mientras que los tirantes inclinados y la suela inferior se calculan para una traccion de 7^k (relacion de las tensiones 0'8; V. § 5). La compresion en la suela superior llega á 6^k al paso que se reduce á $3'2^k$ ó $3'5^k$ para los montantes que se hallan en las condiciones de resistencia de las piezas cargadas en pié.

La fig. 256 representa una articulacion en la suela inferior de una viga enrejada de un puente del ferrocarril que atraviesa el Niágara (nueve arcos, anchura de la corriente $587'4^m$). Las columnas y la suela superior se componen de hierros especiales en forma de cuadrante segun el escelente sistema usado en la fábrica de Phenixville (1). La figura indica al mismo tiempo el modo de fijacion de las vigas trasversales en las vigas longitudinales, que se emplea ordinariamente en esta clase de puentes. Los estribos de suspension pueden ser indiferentemente de seccion cuadrada ó circular. La tension en los núcleos de los filetes de estos estribos se eleva hasta $5'6^k$, es decir que es superior á la que hemos considerado anteriormente como admisible para los tornillos de presion (§ 86). Una pieza de fundicion de forma cúbica que atraviesa el perno principal, fileteado en sus dos estremos, recibe al principio en su parte superior la presion de la columna, mientras que en su cara inferior se aplica (por la accion de los estribos) la viga trasversal compuesta aquí de dos hierros de doble T. En las vigas trasversales descansan longarinas de madera que soportan directamente las traviesas de la via.

OBSERVACION. *En los detalles de construccion que acabamos de describir, se encuentran como se ha podido ver, diámetros de pernos que esceden mucho del núme-*

(1) Para columnas más fuertes se emplean hierros correspondientes á un sexto ó un octavo de circunferencia.

ro 80^{mm} *que la Sociedad de ingenieros alemanes habia considerado como el límite superior para los diámetros de los pernos fileteados. Como en tiempos más ó ménos lejanos, pueden introducirse entre nosotros pernos de gran diámetro (véase lo dicho para la figura* 247), *habria que tener en cuenta las fórmulas del* § 79.

Para los depósitos de hierro se hace frecuente uso de ensambles de rebordes. En las cajas de fundicion de formas paralelipipédicas y sobre todo á los ángulos, esta clase de ensamble tiene disposiciones diferentes segun el modo de aplicacion del fondo. Las figuras siguientes dan algunos ejemplos de formacion de ángulos con empleo de rebordes.

En la figura 257 las rebordes de las tres junturas son esteriores y el fondo afecta la forma de cubeta. En la figura 258 los rebordes son tambien todos esteriores y el fondo presenta esteriormente la forma de plinto. En la fig. 259 una sola junta es realmente esterior, las otras dos están la mitad en el interior y la otra mitad en el esterior. Las figuras 260, 261 y 262 presentan dos juntas interiores y una junta mixta. El aspecto esterior que resulta en la caja empleando una de estas tres últimas disposiciones, es más satisfactorio que el que se obtiene con una cualquiera de las tres primeras. Cuando todos los rebordes de las caras perpendiculares al fondo se hallan en el interior y este mismo fondo tiene la forma que indica la fig. 262, los ensambles no presentan ninguna prominencia ó salida visible al esterior (á escepcion de la de los pernos que forman las juntas de las caras verticales). La fig. 263 indica las dimensiones proporcionales que se adaptan en los ensambles con rebordes. El diámetro d de los pernos y por consiguiente las demás dimensiones se deducen del espesor δ de las paredes.

En los rebordes, la distancia de dos pernos consecutivos debe estar comprendida, en general, entre $2'5D$ $3D$. Cuando se usan máquinas de acepillar para hacer los rebordes, conviene suprimir las prominencias representadas á la izquierda de la fig. 263, de modo que las superficies salientes de ambos rebordes descansen unas sobre otras.

La figura 264 representa rebordes de superficies no levantadas que deben ajustarse una sobre otra por medio de pernos; una rodaja plana de cauchú sirve de guarnicion de juntura. En la fábrica de Gröditz se usan esos ensambles en los depósitos de fundicion de poco espesor, cuya ejecucion es muy notable. A la derecha de la figura 264 se halla indicado el ensamble del fondo y de las paredes de un depósito cilíndrico de agua. El fondo está formado por una série de piezas de rebordes interiores, mientras que en su contorno tiene un reborde esterior; y los rebordes de las paredes son tambien esteriores. La disposicion de los rebordes interiores permite hacer que descanse en un suelo de tablones la superficie plana que constituye el fondo propiamente dicho, y reforzarle así lo suficiente para que este fondo pueda resistir una presion de agua considerable. El espesor δ de las paredes es muy escaso, pues solo alcanza 6 ó 7^{mm}; lo que conduce á tomar 10^{mm} para el diámetro d de los pernos. En cuanto á la separacion de eje á eje de dos pernos consecutivos es de $13'5$ d para los rebordes de fondos verticales y 15 d para los rebordes de paredes tambien verticales, y por fin de 20 d pora los rebordes horizontales.

§ 88

Ensambles de pernos descargados.

En los ensambles de pernos, como en los ensambles de clavete (V. § 71), se adoptan con frecuencia disposiciones especiales destinadas á sustraer los pernos á la accion de los esfuerzos que se ejercen en el ensamble, y en particular á la accion de esfuerzos trasversales.

Fig. 265 y 266. Ensambles de dos piezas de fundicion que encajan una dentro de otra. Los pernos están protegidos por estas disposiciones contra todos los esfuerzos de traccion ó presion que se ejercen normalmente á su direccion.

La fig. 267 representa un empotramiento prismático que protege á los pernos de las acciones trasversales; y el mismo resultado se obtiene en la fig. 268, gracias á la rodaja circular encajada en las dos piezas que se unen.—El ensamble con rodaja interpuesta es de uso muy comun y es muy recomendable á causa de la seguridad y sencillez que presenta. La rodaja es de hierro y se hace al torno; las cavidades en las cuales debe alojarse se preparan despues del taladrado del agujero del perno y tienen así una posicion rigurosamente exacta. Cuando la rodaja ha de tener grandes dimensiones se puede hacer de fundicion; con frecuencia se reemplaza tambien por una cabeza intermedia que forme cuerpo con el perno que está encajado á medias en cada una de las dos piezas. Los modos de ensamble representados por las fig. 267 y 268 se emplean algunas veces en las ruedas hidráulicas para unir los brazos á la llanta. Basta imaginar entonces que la fuerza inferior en estas figuras está reemplazada por una pieza plana de suficiente estension, cuya cara superior lleve partes salientes entre las cuales se encojan los estremos de los brazos.

En ciertos casos en que las fuerzas laterales tienen escasa importancia, puede haber interés en prescindir de pernos rigurosamente encajados en los agujeros de las piezas que hay que unir. Para asegurar la posicion relativa de esas piezas se pueden utilizar con ventaja clavijas cilíndricas que se empujan en agujeros hechos con exactitud en las dos piezas.

La fig. 269 representa un ensamble de pernos descargados y de grandes dimensiones, que se ha empleado en el gran puente de San Luis en el Mississipí (3 arcos de 150'6^{m} de abertura cada uno). Esta clase de ensamble sirve para fijar en cada pila la suela inferior que tiene la forma de un tubo de acero y está sometida á la compresion.—Como cada arco contiene cuatro vigas semejantes, en sentido de la latitud resulta que este ensamble se repite 24 veces. El zapato donde se encaja el tubo, es de hierro forjado, mientras que la placa destinada á recibirlo es de fundicion. Estas dos piezas están fijas en la pila por tres pernos cuyos filetes tienen por diámetro esterior d 159^{mm}, mientras que el diámetro del cuerpo es de 146^{mm}. Esos pernos se hallan sustraidos á todo efecto trasversal, puesto que el zapato se une á la placa por dos nervaduras y esta última está encajada en la mamposteria. El agujero trasversal indicado en la figura, sirve para dar paso á un perno destinado á unir entre sí los cuatro zapatos que descansan al mismo lado en una de las pilas.

CAPÍTULO QUINTO

GORRONES

§ 89

Diferentes clases de gorrones.

Los gorrones son órganos de las máquinas, que permiten girar á ciertas piezas alrededor de sus ejes geométricos; de donde resulta que deben tener la forma de sólidos de revolucion rodeados en todo ó parte por cuerpos huecos (soportes, cajas, etc.), que tengan la misma forma geométrica. Bajo la accion de las fuerzas á las cuales se halla sometido un gorron, puede tener que soportar en definitiva dos clases de esfuerzos muy diferentes: en ciertos casos, está sometido á una presion trasversal perpendicular á la direccion del eje de rotacion; y en otros por el contrario, la accion preponderante es la de una presion longitudinal ejercida en la misma direccion de este eje.

Conviene por tanto distinguir:

1.° Los gorrones de presion trasversal;
2.° Los gorrones de presion longitudinal.

En el cálculo de los gorrones se han tenido en cuenta las resistencias y el frotamiento. En la pieza de la máquina á que pertenece, puede ocupar un gorron diferentes posiciones y á cada una de ellas corresponde una forma particular. Vamos á examinar sucesivamente las principales formas que reciben los gorrones en la práctica.

A. GORRON DE CARGA TRASVERSAL

§ 90

Cálculo de los gorrones frontales.

Un gorron de carga trasversal que solo está unido por un lado á la pieza á que pertenece, se llama gorron frontal. Tiene ordinariamente forma cilíndrica (figura 270) y se termina, en uno de los estremos por lo ménos y con frecuencia en los dos, por una saliente ó envase cuya altura para un diámetro d del gorron está dada por la fórmula:

$$c=3+\frac{7}{100}d \qquad (88)$$

Si designamos por P la carga que obra trasversalmente, por S la tension desarrollada por la flexion en el nacimiento del gorron y por l su longitud, debemos tomar para el diámetro, refiriéndonos solamente á la resistencia:

$$d=\sqrt{\frac{16}{\pi S}\left(\frac{l}{d}\right)}\sqrt{P} \qquad (89)$$

La relacion $l:d$ determina la presion por unidad de superficie que se produce entre el gorron y el soporte correspondiente. Cuando nuevo, puede considerarse el gorron exactamente ceñido por el soporte en la mitad de su contorno, y tenemos entonces para esta presion: $p=P:ld$. Cuando se ha producido cierto juego, esta presion no tiene el mismo valor en todos los puntos; en la generatriz inferior tiene por espresion $p_0=\frac{4}{\pi}p$, mientras que en una línea separada de la anterior por una distancia angular β, está representada por $p'=\frac{4}{\pi}p\cos\beta$. Como la relacion entre p_0 y p es constante, podemos introducir este último valor en el cálculo, lo mismo que el primero.

Para un valor dado de p se deduce de las relaciones anteriores:

$$\frac{l}{d}=\sqrt{\frac{\pi}{16}\frac{S}{p}}=\sqrt{\frac{S}{4p_0}} \qquad (90)$$

Pero para que el desgaste no sea demasiado considerable cuando el número de vueltas es muy grande, conviene tomar para p un valor inferior al máximum admisible para los casos ordinarios y suponer, por ejemplo, que este valor varia en razon inversa del número n de vueltas por minuto; de modo que hay que modificar la ecuacion anterior poniendo:

$$\frac{l}{d}=\sqrt{\frac{\pi}{16}\frac{S}{a}n} \qquad (91)$$

en que a designa una constante que depende de la naturaleza de los materiales empleados y de las condiciones de engrase. Combinando las relaciones (89) y (91) se obtiene:

$$d=\sqrt[4]{\frac{16}{\pi S}\frac{n}{a}}\sqrt{P}. \qquad (92)$$

En la práctica se debe emplear para d y $l:d$ los dos valores mayores que dan las cuatro ecuaciones anteriores. Los valores límites de d y $l:d$ corresponden á $a:n=p_{max}$.

Para las constantes hay que tener en cuenta las consideraciones siguientes: Si el gorron está sometido á una carga que obre constantemente en la misma direccion y si la presion por unidad de superficie es muy elevada, el engrase no se hace tan bien (á causa de la espulsion del aceite) como cuando el gorron se halla alternativamente comprimido en opuestas direcciones; en la manivela de una máquina de vapor, por ejemplo. En este último caso el gorron obra como el émbolo de una bomba y aspira á cada instante el aceite que habia espulsado. Por este motivo p puede tener un valor más elevado en el caso de la presion alternativa que en el otro, y esto es en realidad lo que se verifica en la práctica. Por el contrario el cambio de direccion de la presion tiene amenudo por consecuencia esponer el gorron á choques, y conviene por tanto tomar para S un valor menor que en el caso en que la carga obra constantemente en el mismo lado.—En los gorrones que solo necesitan posibilidad de girar, sin tener que efectuar movimientos de rotacion contínuos, p puede tener naturalmente un valor muy grande. Podemos designar á esta clase de gorrones con el nombre de gorrones durmientes, en oposicion á los que están destinados á un movimiento regular y que constituyen los gorrones giratorios. La constante a de la ecuacion (91) se determina por esperiencia. Por lo demás es fácil comprender que los resultados prácticos pueden dar diferencias notables para el valor de a; puede en efecto ser este valor muy escaso, sin que el gorron deje de ser utilizable; y únicamente su desgaste es mucho más rápido. Es importante tener siempre un buen engrase y prácticar para ello en los cojinetes ranuras especiales (patas de araña). No se ha tenido aquí en cuenta la superficie correspondiente á esas ranuras por ser despreciable. Se obtienen valores prácticos cuando en la hipótesis de cojinetes ó cubos de bronce, se toma para la carga de un solo lado $a=75$ y para la carga alternativa $a=150$. Partiendo de aquí se ha llegado á formar el cuadro siguiente para los gorrones de hierro de fundicion y de acero, que giran sobre bronce.

FÓRMULAS PARA LOS GORRONES FRONTALES.

		Carga de un solo lado.			*Carga de direccion alternativa.*		
		Hierro.	Fundicion.	Acero.	Hierro.	Fundicion.	Acero.
GORRONES DURMIENTES.	$p_0 =$	6	3	10	6	3	10
	$S =$	6	3	10	6	3	10
	$\frac{l}{d} =$	0'5	0'5	0'5	0'5	0'5	0'5
	$d =$	$0'65\sqrt{P}$	$0'92\sqrt{P}$	$0'50\sqrt{P}$	$0'65\sqrt{P}$	$0'92\sqrt{P}$	$0'50\sqrt{P}$
GORRONES GIRATORIOS $n \leqq 150$.	$p =$	0'5	0'25	0'5	1'0	0'5	1
	$S =$	6	3	10	5'0	2'5	8'33
	$\frac{l}{d} =$	1'5	1'5	1'94	1'0	1'0	1'3
	$d =$	$\frac{9}{8}\sqrt{P}$	$1'6\sqrt{P}$	$1'0\sqrt{P}$	$1'0\sqrt{P}$	$1'4\sqrt{P}$	$0'88\sqrt{P}$
GORRONES DE GRAN VELOCIDAD $n \geqq 150$.	$a =$	75	—	75	150	—	150
	$S =$	6	—	10	5'0	—	8'33
	$\frac{l}{} =$	$0'13\sqrt{n}$	—	$0'17\sqrt{n}$	$0'08\sqrt{n}$	—	$0'10\sqrt{n}$
	$\frac{}{d} =$	$02\sqrt{\frac{l}{d}}\sqrt{P}$	—	$0'71\sqrt{\frac{l}{d}}\sqrt{P}$	$1'01\sqrt{\frac{l}{d}}\sqrt{P}$	—	$0'78\sqrt{\frac{l}{d}}\sqrt{P}$

(93)

Para $n > 150$ se empieza por determinar $l : d$, se redondea el valor hallado y se lleva á la fórmula de la última línea.

Gorrones huecos.—Si designamos por d_0 el diámetro esterior de un gorron hueco, d_1 el diámetro interior, d el diámetro de un gorron lleno equivalente, φ la relacion $d_1 : d_0$, y si suponemos que los dos gorrones deben tener la misma longitud, para obtener el mismo grado de seguridad debemos tomar:

$$\frac{d_0}{d} = \frac{1}{\sqrt[3]{1-\varphi^4}} \qquad (94)$$

Si la relacion de la longitud al diámetro debe ser la misma para el gorron hueco que para el lleno, conviene tomar

$$\frac{d_0}{d} = \frac{1}{\sqrt{1-\varphi^4}} \qquad (95)$$

Estas fórmulas han servido para calcular los valores siguientes:

$d_1 : d_0 = \varphi$	= 0'4	0'5	0'6	0'7	0'75	0'8
$1 : \sqrt[3]{1-\varphi^4}$	= 1'01	1'02	1'05	1'10	1'14	1'19
$1 : \sqrt{1-\varphi^4}$	= 1'01	1'03	1'06	1'15	1'21	1'30

En ambos casos la presion por unidad de superficie es menor para el gorron hueco que para el macizo. La relacion 0'6 se emplea muy amenudo en la práctica; y los gorrones huecos tienen aplicacion en los árboles huecos de fundicion así como en los árboles huecos de acero fundido que se usan desde hace algunos años.

Las aleaciones de bronce y las materias equivalentes, como el metal blanco, el plomo endurecido, etc., son muy propias para formar los soportes, puesto que pueden soportar una gran presion por unidad de superficie sin que el coeficiente de frotamiento se eleve de una manera exagerada (1). Para los gorrones que deben girar sobre fundicion, cuando la velocidad de rotacion es poca, se puede proceder como para una guarnicion de bronce. Esto es lo que se verifica, por ejemplo, para los gorrones de máquinas elevatorias que se mueven á mano. Pero cuando se trata de aparatos de gran fuerza, que marchan de una manera contínua, solo es admisible el empleo de la fundicion para rodear los gorrones cuando la presion por unidad de superficie es poca (V. el cap. siguiente). Los cojinetes de madera pueden soportar una presion más elevada que el bronce cuando están en el agua ó se mantienen constantemente mojados. En árboles cuya velocidad no pase de 60 á 80 vueltas por minuto, los cojinetes

(1) Véase párrafo 96.

de madera dura se conservan en buen estado por un simple engrase con aceite. Por otro lado, en las cajas de espigones de árboles de molinos se han encontrado envolturas de gorrones de madera de sauce, es decir, de madera completamente tierna, muy bien conservados. El número de vueltas por minuto escedia de 100; pero la presion por unidad de superficie era insignificante (1).

§ 91

Ejemplos y tablas relativas á los gorrones frontales.

El cuadro de la página siguiente contiene los resultados dados por las fórmulas (93) para los gorrones giratorios en los cuales se tiene $n \leq 150$.

1.er Ejemplo. *Una rueda hidráulica con cangilones de peso de* 30000^k *contiene durante su marcha* 6^{mc} *de agua. Los gorrones del árbol de fundicion de la rueda están dispuestos simétricamente y por consiguiente cada uno soporta una carga de* $15000^k + 3000^k = 18000^k$. *En la cuarta columna del cuadro este número está comprendido entre los de la* 29ª *y de la* 30ª *línea; debemos tomar pues para el diámetro* 220^{mm} *y para la longitud* 330^{mm}: *el saliente del cuello e es de* 18^{mm} *y su altura de* 26^{mm}.

2.º Ejemplo. *Para la misma carga (obrando alternativamente en direcciones opuestas) un gorron de manubrio de hierro forjado deberia recibir un diámetro de* 135^{mm} *y una longitud igual (col.* 6, *líneas* 21 *y* 22). *Este mismo gorron si fuese de acero fundido deberia tener un diámetro de* 120^{mm} *y una longitud* $l = 1{,}3 \cdot 120 = 156^{mm}$ *(col.* 8, *línea* 20).

3.er Ejemplo. *En las minas de Bleyberg, en Bélgica, los gorrones del árbol hueco de fundicion del balancin de una máquina de elevacion de agua* (2) *soportan cada uno una carga de* 140555^k *(obrando siempre en el mismo lado): en estos gorrones huecos la relacion de los diámetros interior y esterior es* 0,5.

Segun las fórmulas (93) *y* (94) *debertamos tomar para el diámetro:*

$d_0 = 1{,}02 \cdot 1{,}6\sqrt{140550} = 612^{mm}$ *y para la longitud:* $l_0 = 1{,}5 \cdot 600 = 900^{mm}$, *lo que conduciria para la presion p por milímetro cuadrado á un valor inferior á* $0{,}25^k$. *En realidad se ha tomado* $d_0 = 500^{mm}$ $l_0 = 460^{mm}$ *(lo que corresponde á una presion de* $2{,}9^k$ *en el nacimiento del gorron) y se ha dado á los cojinetes una longitud de* 400^{mm} *solamente. En estas condiciones la presion p es igual á* $140550 : 500 \cdot 400 = 0{,}7^k$, *valor ciertamente demasiado elevado. Así, para evitar la elevacion de temperatura que tendia constantemente á producirse ha habido que recurrir al empleo del agua como refrigerante* (1).

En la práctica, la determinacion de las dimensiones de los gorrones presenta poca uniformidad. Así, en ciertos casos se tiene en cuenta la diferencia bastante pronunciada que existe entre los gorrones segun que la carga obre en un solo lado ó en direcciones opuestas, mientras que en otros casos no se tiene en cuenta para nada. Para los manubrios de locomotoras, por ejemplo, el valor de p es con frecuencia superior á 1^k y á veces á 2^k; en las traviesas de estas mismas máquinas escede amenudo de 3^k. Al contrario, en las grandes máquinas de los buques se hallan con frecuencia valores muy débiles para los gorrones de manubrios (2).—Es por otra parte indispensable que el engrase de todos estos gorrones se haga siempre con el mayor cuidado.

Para los gorrones de gran número de vueltas las relaciones de las longitudes á los diámetros son superiores á las que antes estaban en uso.

4.º Ejemplo. *Los ejes de los ferro-carriles en Alemania dan de* 200 *á* 300 *vueltas por minuto; frecuentemente* $n = 270$. *Partiendo de este dato se deduce de la penúltima de las fórmulas* (93) *para ejes de hierro,* $l : d = 0{,}13\sqrt{270} = 2{,}14$. *Las relaciones* 1,8 *y* 2 *se encuentran amenudo en la práctica. En los ventiladores el número de vueltas se eleva á veces á* 1200 *y aun más. Con* $n = 1200$ *da la fórmula para el hierro:* $l : d = 0{,}13\sqrt{1200} = 4{,}5$, *y para el acero fundido* $l : d = 0{,}17\sqrt{1200} = 5{,}9$. *Los ventiladores nombrados de Sturtevant, en Boston, tienen árboles de acero en los cuales las relaciones de la longitud al diámetro de los gorrones están comprendidas entre* 5 *y* 6.

---

(1) Para otras sustancias aun más estraordinarias empleadas como cojinetes, véase el párrafo 97.

(2) V. *Portefeuille* de *John Cockerill*, I, pág. 189.

(1) En la máquina del Grand Hornu que se ha establecido algunos años despues, la presion p sólo es de 0,50 kilos con gorrones de hierro; valor igual al que darian nuestras fórmulas.

(2) V. por ejemplo, *Marks, Crank pins and journals*, Filadelfia, 1878. Las cifras indicadas son: para el Swatara, $p = 0{,}28$, Saco $p = 0{,}29$, Wampanoag $p = 0{,}51$, Wabash $p = 0{,}33$.—En estas máquinas (la tercera de las cuales tiene un diámetro de cilindro de 100" ingleses, un diámetro de gorron de manubrio de 16" con una longitud de 27"), la tension S en el nacimiento del gorron alcanza los valores siguientes: 2,84, 2,16, 7,41 (?), 1,93. Las dos séries de valores presentan grandes variaciones.

CUADRO RELATIVO Á LOS GORRONES FRONTALES

		CARGA P DE UN SOLO LADO.			CARGA P ALTERNATIVA.		
d	e	HIERRO.	FUNDICION.	ACERO FUNDIDO.	HIERRO.	FUNDICION.	ACERO FUNDIDO.
		$\frac{l}{d}=1'5$	$\frac{l}{d}=2'5$	$\frac{l}{d}=1'94$	$\frac{l}{d}=1$	$\frac{l}{d}=1$	$\frac{l}{d}=1'3$
25	5	494	244	625	625	318	807
30	5	720	351	900	900	450	1162
35	6	968	479	1225	1225	613	1582
40	6	1200	625	1600	1600	880	2066
45	6	1620	791	2025	2025	1013	2615
50	7	2000	977	2500	2500	1250	3228
55	7	2420	1182	3025	3025	1513	3906
60	8	2880	1406	3600	3600	1800	4649
65	8	3380	1650	4225	4225	2113	5456
70	8	3920	1914	4900	4900	2450	6327
75	8	4500	2197	5625	5625	2813	7264
80	8	5120	2500	6400	6400	3200	8264
85	9	5780	2822	7225	7225	—	9330
90	10	6480	3164	8100	8100	—	10460
95	10	7220	3525	9025	9025	—	11654
100	10	8000	3906	10000	10000	—	12913
105	10	8820	4307	11025	11025	—	14237
110	11	9680	4727	12100	12100	—	15625
115	11	10580	5166	13225	13225	—	17078
120	12	11520	5625	14400	14400	—	18595
130	12	13520	6602	16900	16900	—	21823
140	13	15680	7656	19600	19600	—	25310
150	13	18000	8789	22500	22500	—	29054
160	15	20480	10000	25600	25600	—	33058
170	15	23120	11289	28900	28900	—	37319
180	16	25920	12656	32400	32400	—	41838
190	16	28880	14102	36100	36100	—	46616
200	17	32000	15625	40000	40000	—	51652
210	18	35280	17226	44100	44100	—	56947
220	18	38720	18906	48400	48400	—	62499
230	19	41796	20664	52900	52900	—	68310
240	20	46080	22500	57600	57600	—	74379
260	21	54080	26406	67600	67600	—	87292
280	23	62720	30625	78400	78400	—	101230
300	24	72000	35156	90000	90000	—	116218

§ 92

Gorrones intermedios ó de cuello ó garganta.

Cuando un gorron está dispuesto como en la figura 272 entre dos partes cualesquiera de un eje ó árbol, constituye lo que se llama un gorron intermedio. El diámetro d' de un gorron de este género no es ya funcion de la presion del soporte. Para que el desgaste no sea más rápido que en el gorron frontal equivalente (entendiendo por tal un gorron formado de la misma materia, que dé el mismo número de vueltas, que tenga el mismo grado de pulimento y de engrase y que esté sometido á la misma carga directa) es necesario que su longitud l' no se tome inferior á la de este gorron frontal. Cuando es posible aumentar esta longitud, se disminuye con esto el gasto y se pueden realizar sérias ventajas (V. § 109). Sin embargo, en gran número de casos, hay necesidad, por falta de lugar, de recurrir á una longitud menor, lo cual sucede á veces en las locomotoras.—El gorron de garganta ó cuello debe con-

siderarse como un gorron frontal ensanchado; y lo mismo sucede con el gorron hueco correspondiente á la fórmula (94).

PRIMER EJEMPLO. *Locomotora de gran velocidad de Borsig en la exposicion de Viena. Gorrones con eje posterior de acero fundido, carga* 6000^k, $d'=180^{mm}$, $l'=185^{mm}$. *Segun la tabla del* § 91, *el gorron frontal equivalente tendria por dimensiones:* $d=78^{mm}$, $l=1'94 \cdot 78=151^{mm}$; *lo que daria* $p=6000:78 \cdot 151=0'5^k$. *Aquí* l' *es muy superior á* l. *Para la presion se halla* $p=6000:180 \cdot 146=1:5'5$. *Tomando* $l=l'$ *tendríamos:* $p=6000:180 \cdot 151=1:4'5$.

2.° EJEMPLO. *En la misma locomotora lleva el gorron de manubrio, en su estremo, el gorron de acoplo, cuya resistencia está dirigida en sentido contrario á la presion del émbolo y esperimenta por consiguiente la influencia de las dimensiones de éste último. La presion del émbolo alcanza* 14600^k. *Se ha hecho:* $d'=105^{mm}$, $l'=115^{mm}$. *Para el gorron frontal equivalente (de acero fundido) la tabla daria* $d=107^{mm}$, $l=139^{mm}$; p *seria de* 1^k. *En realidad se tiene* $p=14\,600:105 \cdot 115=1'22^k$. *Aquí á causa de la falta de lugar ha habido que hacer* $l'<l$ *y la presion por unidad de superficie es muy superior á* 1^k.

§ 93

Gorrones de horquilla.

Un gorron de garganta dispuesto de manera que el cuerpo del gorron se halle encajado y fijo por sus dos estremos en una pieza rígida (horquilla, traviesa) como en la fig. 273, se llama gorron de horquilla. Un gorron de esta clase puede tener diámetro menor que el gorron frontal equivalente y debe por consiguiente considerarse como un gorron frontal estrechado. Si designamos de nuevo por P la carga, por l y d la longitud y el diámetro y S la mayor tension en el gorron, tenemos (caso n.° VIII, § 6):

$$d=\sqrt{\frac{4}{\pi S}}\sqrt{\frac{l}{d}}\sqrt{P} \qquad (96)$$

y por otro lado para una presion por unidad de superficie $p=\frac{4}{\pi}p_0$:

$$\frac{l}{d}=\sqrt{\frac{\pi S}{4p}}=\sqrt{\frac{S}{p_0}} \qquad (97)$$

Operando como en el § 90 se obtiene el cuadro siguiente:

FÓRMULAS PARA LOS GORRONES DE HORQUILLA.

		Carga en un solo lado.			*Carga de direccion alternativa.*		
		Hierro.	Fundicion.	Acero fundido.	Hierro.	Fundicion.	Acero fundido.
GORRONES DURMIENTES.	$p_0=$	6	3	10	6	3	10
	$S=$	6	3	10	6	3	10
	$\frac{l}{d}=$	1	1	1	1	1	1
	$d=$	$0'46\sqrt{P}$	$0'65\sqrt{P}$	$0'36\sqrt{P}$	$0'46\sqrt{P}$	$0'65\sqrt{P}$	$0'36\sqrt{P}$
GORRONES GIRATORIOS $n \leqq 150$.	$p=$	$0'5$	$0'25$	$0'5$	$1'0$	$0'5$	$1'0$
	$S=$	6	3	10	5	$2'5$	$8'33$
	$\frac{l}{d}=$	3	3	4	2	2	5
	$d=$	$0'8\sqrt{P}$	$1'12\sqrt{P}$	$0'7\sqrt{P}$	$0'7\sqrt{P}$	$1'0\sqrt{P}$	$0'6\sqrt{P}$

(98)

Los gorrones de horquilla que giran con gran velocidad ($n>150$) son de uso rarísimo y por ese motivo no figuran en las fórmulas anteriores. Del exámen de estas fórmulas resulta que para los gorrones de horquilla los diámetros son pequeños, mientras que las relaciones de las longitudes á los diámetros son bastante elevadas.

EJEMPLO. *Gorron giratorio de horquilla, de hierro forjado, para una carga* $P=2000^k$ *que obra en un solo lado. Se deduce de las fórmulas:* $d=0'8\sqrt{1200}=35'7^{mm}$ *ó sea* 36^{mm}, $l=3.36=108^{mm}$. *El cuadro* (91) *daria para el gorron frontal equivalente:* $d=50^{mm}$, $l=75^{mm}$. *El producto de la longitud por el diámetro es sensiblemente el mismo en ambos casos. Si la longitud de* 108^{mm}

no fuese conveniente, podríamos reducirla con la condicion de aumentar d en consecuencia. Es cierto que entonces la resistencia habria aumentado sin necesidad pero el uso del nuevo gorron no tendria más inconveniente que dar lugar á un frotamiento más considerable. Vemos segun esto que el constructor dispone de muchísimos elementos que puede variar á su albedrio, y esto esplica la multiplicidad de soluciones que se encuentran en la práctica.

§ 94

Gorrones de carga en las articulaciones de hojas.

En ciertas construcciones puede tener tal influencia el frotamiento, que nos veamos obligados á reducirlo á un valor todavia inferior al que se puede obtener en el gorron de horquilla, que es lo que sucede en los gorrones de la clase de los empleados en las articulaciones de hojas de la fig. 274. Si suponemos como en la figura, las fuerzas uniformes y simétricamente repartidas en las láminas, puede considerarse el conjunto como constituyendo una série de gorrones yuxtapuestos. En cada uno de ellos sólo se ejerce una fraccion $^1/_k$ de la carga total P, si k designa el número de estos gorrones en ambos lados y el diámetro d se obtiene multiplicando por $\sqrt{^1/_k}$ el diámetro del gorron simple equivalente.

Para $k=$	2	3	4	5	6	7	8
se tiene $\sqrt{^1/_k}=$	o'7	o'57	o'5	o'45	o'41	o'38	o'35.

Estos son esencialmente los gorrones durmientes que pueden ser reemplazados, cuando haga falta, por gorrones del género anterior, y por esta causa en nuestra figura la relacion de la longitud al diámetro se ha supuesto igual á 1. — La longitud total del gorron es $2kd$.

Se encuentran notables aplicaciones de estos gorrones en las cadenas articuladas (1) de que más tarde hablaremos.

(1) La presion por unidad de superficie para las cadenas de eslabones planos de este género, llega con frecuencia en la práctica á valores superiores á los admitidos en el texto. El ingeniero Vollhering (en Sudenbourg) ha utilizado con éxito estas cadenas en aparatos elevatorios de palancas destinadas á levantar los estremos libres de un puente giratorio (Harbourg). La carga máxima de una palanca llegaba á 42750 kilos. El número k de los pares de láminas era 10, su espesor 9'5 milímetros y el diámetro de los gorrones 30 milímetros: las láminas y los gorrones eran de acero fundido. De aqui se deduce para la presion: $p=42'750 : 10 . 9'5 . 30 = 15$ kilos. Newstadt, en sus cadenas de hierro articuladas (de las forjas de Audincourt) admitia presiones comprendidas entre 10 y 20 kilos. Una cadena articulada, de acero, de la enorme grua de la fábrica de construccion de Egell esperimentaba, bajo una carga de 15000 kilos una presion por unidad de superficie de 15 kilos (6 mallones de 5 milímetros de espesor con gorrones de 33 milímetros de diámetro).

§ 95

Semi-gorrones.

En el caso en que la reduccion del momento de frotacion tiene particular importancia, se puede llegar á obtener ese resultado sin aumentar mucho la longitud del gorron, con la condicion de darle la forma de la fig. 275, en que la superficie de rotacion corresponde á lo más á un semi-cilindro; esta disposicion es admisible para los gorrones cargados por un solo lado que solo tienen que efectuar movimientos de oscilacion de escasa amplitud. Para oponerse á los esfuerzos poco considerables que pueden producirse en sentido contrario de la carga, hay el medio de recurrir al empleo de pequeños gorrones auxiliares como indica la figura.

En los semi-gorrones en que la cantidad de materia acumulada en la parte no utilizada por la rotacion es considerable, el diámetro d es independiente de la carga P, y solo hay que tener en cuenta p.

Aquí admitimos los valores siguientes:

	Hierro.	Fundicion.	Acero fundido.
$p_0=$	6	3	10
$6'p=$	4'71	2'35	7'85.

EJEMPLO. *Suponiendo una carga* $P=100000^k$ *que obre siempre en el mismo lado, las fórmulas* (93) *darian para un gorron frontal durmiente de hierro:* $d=0'65\sqrt{100000}=206^{mm}$ *y* $l=103^{mm}$. *Para un gorron ahorquillado tendríamos segun la fórmula* (98) $d=0'46\sqrt{100000}=145^{mm}$ *y* $l=145^{mm}$. *Con un gorron de 8 láminas articuladas á cada lado tendríamos* $d=0'35 . 145=51^{mm}$ *y para la longitud total* $2 . 8 . 51=816^{mm}$. — *Si para un semi-gorron, con los mismos datos, tomamos:* $d=51^{mm}$, *hallaremos:* $l=51 . 8=408$. *Para* $d=40$ *tendríamos* $l=408 . 51 : 40=520^{mm}$. *El frotamiento de este gorron solo es entonces* $^1/_8$ *del del gorron frontal,* $^8/_{29}$ *del del gorron ahorquillado y* $^4/_5$ *del de láminas articuladas, el cual exige, sin embargo, una longitud superior de cerca de* 60 %.

Hallamos una interesante aplicacion del semi-gorron en el manguito de acoplo de *Fossey*. Woolf ha hecho uso de semi-gorrones para la traviesa de fundicion de la varilla del émbolo de una gran máquina de elevar agua (1).

Como límite estremo de la aplicacion del principio del semi-gorron con objeto de reducir el frotamiento

(1) V. Tredgold, *Cornish Pumping Engine.*

podemos citar los cuchillos de los brazos de las balanzas. En las superficies de los gorrones reducidos á forma de sectores de cilindros por un lijero desgaste la presion por unidad de superficie es muy elevada y varia de 10 hasta 100^k por milímetro cuadrado. La dureza de los cuchillos de acero y de sus soportes parece permitir presiones bastante elevadas sin que resulten inconvenientes notables (1).

§ 96

Frotamiento de los gorrones de carga.

Los gorrones nuevos dan lugar á un frotamiento más considerable que los que han funcionado largo tiempo. En los primeros, en efecto, la presion por unidad de superficie entre el cuerpo giratorio y su envoltura fija es independiente de la posicion de la generatriz de contacto é igual á la presion sobre la unidad de proyeccion de la superficie encajada ($P : l . d$), mientras que, cuando se ha producido cierto juego (V. § 90), resulta una reparticion de presion que rebaja el valor medio de p (2).—Si suponemos un gorron cilíndrico de diámetro d, sometido á una carga P y cuyo coeficiente de frotamiento sea f, la fuerza tangencial F que equilibra el frote, tienen los valores siguientes: para los gorrones nuevos:

$$F = \frac{\pi}{2} f P \qquad (99)$$

Para los gorrones que han adquirido cierto juego:

$$F = \frac{4}{\pi} f P \qquad (100)$$

El frotamiento es, pues, más débil para los gorrones que han servido ya que para los nuevos, en la relacion $8 : \pi^2$ ó sea 0'81.

La verdadera magnitud de F varia con el valor del coeficiente f. Este último, en contra de lo que indica la teoria de *Coulomb*, adoptada por *Morin*, no depende solamente de la naturaleza de las superficies puestas en contacto y de su engrase, sino tambien de la presion por unidad de superficie p y de la velocidad de resbalamiento v (1). Faltan todavia sobre este asunto esperimentos que sean del todo satisfactorios.

En la revista *Engineer*, de noviembre, 1873, se halla (página 312) una série de esperimentos muy interesantes practicados con gorrones de los ejes de los caminos de hierro en servicio normal. Se modificaron las dimensiones de los gorrones para variar el valor de la presion por unidad de superficie y se conservaron las demás condiciones. Todos los cojinetes provenian del mismo crisol y se componian de 7 p. de cobre y 1 p. de estaño; los ejes eran de hierro. Despues de un trayecto de 45000 kilóm., las pérdidas observadas fueron:

	Gorrones.		*Cojinetes.*
		Reduccion sobre el diámetro.	Pérdida en peso.
1.	$d = 83^{mm}$, $l = 140^{mm}$	0'8 ^{mm}	2'27^k
2.	» 89 » 145	0'4	1'36
3.	» 95 » 178	0'254	1'135

Suponiendo una carga de 5000^k sobre cada gorron, los valores de p eran respectivamente para los tres casos, de 0'43^k, 0'39^k y 0'30^k. El exámen de los resultados bajo el punto de vista del desgaste, da las cifras siguientes:

Estando los valores de p representados proporcionalmente por. . . . 10 : 9'1 : 7'0
Las pérdidas de bronce se hallan en la relacion. . . . . 10 : 5'98 : 5'43
» hierro » » . . . . . 10 : 5'55 : 2'31
» totales » » . . . . . 10 : 5'9 : 4'3
Las pérdidas de hierro con relacion á las de bronce. . . . . 1 : 2'1 : 1 : 3 : 1 : 5
Los valores de la velocidad ha sido respectivamente. . . . . 10 : 10'7 : 11'4

(1) En los grandes puentes de báscula existen presiones que se elevan hasta 160 kilos por milímetro de longitud del cuchillo, lo que, admitiendo una anchura de alcance de 1|2 milímetro corresponde á una presion por unidad de superficie de mas de 300 kilos. Pero en estas condiciones se producen fuertes penetraciones y desgastes muy marcados. Los cuchillos del aparato de medida, en la gran máquina de Werder destinada á esperimentos de resistencia de materiales, en la Academia industrial de Berlin, tienen 360 milímetros de longitud y pueden tener que soportar una presion de 100,000 kilos, es decir, de 277'8 kilos por unidad de longitud ó de 556'6 kilos por milímetro cuadrado suponiendo que el cuchillo lleve sobre 1|2 milímetro de anchura. Se han observado penetraciones de estos cuchillos en sus soportes y conviene añadir que parecen inevitables.

(2) V. Reye, *Theorie der Zapfenreibung*, Civ.-Ing. VI, 1860, página 235, y Grove, *Berechnung der Trag-und Stützzapfen*, *Mitth. des Gew.-Vereins für Hannöver*, 1876.

(1) V. *Hirn*, Études sur les frottements mediats, *Bulletin de la Société de Mulhouse*, 1854, pág. 188; V. tambien los esperimentos de *Rennie*, *Sella*, *Bochet*, etc.

Segun las antiguas teorias del incremento de la velocidad de resbalamiento deberia haber producido un aumento en el desgaste, mientras que se observa por el contrario una disminucion de 43 °/₀.

De aquí resulta que si la relacion $p=a:n$ no espresa exactamente los fenómenos asaz complicados que en realidad se efectuan, tiene al ménos la ventaja de hacer entrar en el cálculo, en cierta proporcion, las influencias más esenciales.

Para el frotamiento de fundicion sobre bronce, con abundante engrase, Rennie ha encontrado:

para v=	o'467	o'832	o'934	1'400	1'663	1'700	1'866
f=	o'0086	o'0121	o'0128	o'0165	o'0181	o'0183	o'0191

Los valores de f son todavia muy escasos pero crecen incontestablemente con la velocidad.—En los esperimentos de Morin p se halla comprendida entre o'0096^k *y* o'0137^k *por milímetro cuadrado. Los valores que ha dado están comprendidos como sabemos entre* o'5 *y* o'011 *para los gorrones engrasados con aceite y entre* o'08 *y* o'16 *en el caso en que el accite está reemplazado por la grasa.*

En la Academia industrial de Berlin, los esperimentos practicados con el aparato de Clair, tal como se habia dispuesto para los ensayos de Morin, han dado los siguieutes resultados para piezas de hierro que se deslizaban sobre bandas de laton con un engrase de aceite abundante:

para p=	o'035	o'086	o'135	o'236	o'340	o'439	o'500
f=	o'090	o'087	o'095	o'118	o'171	o'184	o'180

Aquí f varia de sencilla á doble, cuando p pasa de $^1/_{30}$ *á* $^1/_2$. *Dando á p un valor constante é igual á* o'33 *ha obtenido:*

para v=	o'004	o'072	o'176	o'280	o'280
f=	o'222	o'210	o'191	o'167	o'185

De esta tabla resulta que los valores de f disminuyen, cuando v aumenta, en contra de lo observado por Hirn. Importa, sin embargo, observar que en estos últimos esperimentos p era cuarenta veces mayor que en los de Hirn. Estos resultados están acordes con los de Morin, en que segun este autor, el frotamiento al principio del movimiento es en general mayor que durante el movimiento ó en otros términos, que el frotamiento es más considerable para un valor pequeño de v que para otro grande. Con todo, parece que esta ley solo es cierta hasta un cierto valor ó límite de v, más allá del cual f aumenta de nuevo al mismo tiempo que v. Podríamos, pues, admitir que las velocidades utilizadas por Hirn eran superiores á este límite. Los esperimentos de Reuleaux que acabamos de mencionar solo son el punto de partida de una série más estensa de esperimentos sobre el mismo objeto.

Bajo el punto de vista del desgaste real de las cajas de estopa ó engrase de los ejes de los ferro-carriles no se han hecho todavia observaciones tan completas como seria de desear: el cuadro siguiente da algunas indicaciones útiles sobre este asunto. (1)

para p=	o'023	o'123	o'222	o'346	o'470	o'520	
f=	o'157	o'225	o'215	o'222	o'234	o'234	

*Rennie no habia tenido en cuenta la velocidad v. Para el frotamiento de fundicion sobre bronce, con engrase abundante y siendo la velocidad v=*1'7^m, *ha obtenido Hirn:*

para p=	o'0021	o'0037	o'0053	o'0069	o'0085
f=	o'0376	o'0211	o'0226	o'0199	o'0183

De aquí resulta que f disminuye cuando p aumenta, aunque permaneciendo muy pequeño. Conservando p constante é igual á o'085 *ha encontrado Hirn:*

	1.ª série de esperimentos.	2.ª série de esperimentos.
Superficie de frotamiento.	12800^{mmc}	128^{mmc}
Presion total P. . . .	16'5^k	16'5^k
Presion por ^{mmc} *p.. . .*	o'00129^k	o'129^k
Frotamiento observado. .	1'25^k	2'65^k
Coeficiente f..	o'076	o'160

El profesor Reuleaux ha hecho con un aparato construido sobre el principio del freno de Prony, varios esperimentos de frote de hierro en bronce: con un engrase conveniente y una velocidad variable de o'15 *á* o'18 *ha encontrado:*

(1) Las cifras de los números 1 á 6 están sacadas de los interesantes trabajos del doctor Künzel sobre las aleaciones de bronze (*Bronzelegierungen*, Dresde, 1875). Las de los números 7 y 8 se estrajeron del *Engineer*, 1876, tomo XLI, pág. 4 y 31, con una correccion destinada á reducirlos á los mismos datos que los primeros.

Números.	METAL DE LOS COJINETES DE LAS CAJAS.	CAMINO recorrido por 1 kilógramo de metal en 4 cajas. *(En kilóm.)*	PÉRDIDA de 4 cajas para 1000 kilóm. *(En gramos).*	PRECIO de 1 kilóm. de metal. *(En pesetas).*	GASTO correspondiente á la pérdida de metal de 4 cajas por 1000 kilóm.
				Pesetas.	Pesetas.
1	*Bronce* 83 *cobre* 17 *estaño*.	90390	11'06	3'30	0'033
2	» 82 » 18 »	99900	10'01	3'25	0'033
3	*Metal blanco* 3 *cobre* 90 *estaño* 7 *antimonio*. .	72280	13'83	3'75	0'052
4	» » 5 » 85 » 10 » . .	88145	11'34	2'65	0'030
5	*Plomo endurecido* 84 *plomo* 16 *antimonio*. . . .	81280	12'30	1'50	0'018
6	*Bronce fosforado*.	429200	2'33	4'40	0'0103
7	*Bronce blanco de Parson*.	385275	2'60	2'50	0'006
8	*Metal babbit de Dewrance*.	637679	1'57	2'95	0'0046

De ahí se deducen notables consecuencias sobre los gastos de conservacion de los ejes de un gran parque de vagones. Pero antes de dar un ejemplo de este género de evaluaciones, conviene observar que para los gorrones y las cajas de las ruedas provistas de frenos el desgaste es de 4'5 á 10 veces mayor que para las demás ruedas. Actualmente, en Prusia, un eje recorre por año:

en los vagones de viajeros. . . 35,000 kilóm.
— — de mercancias.. 15,000 —

números que coinciden bastante exactamente con los que se encuentran en otros paises y que por tanto pueden considerarse que tienen valor general.

Si admitimos ahora para los ejes de las ruedas de frenos un desgaste séxtuplo del de los ejes ordinarios (lo que se reduce á suponerles un trayecto seis veces mayor), tomando los estados de vagones en servicio en Prusia durante el año 1877, se llega á los resultados siguientes (en los cuales la unidad de trayecto representa 1,000 kilómetros):

Ejes de vagones de viajeros en servicio.	24,472	
» » equipajes »	6,642	
á añadir para 11,319 ejes de ruedas de frenos (5 veces).	56,595	
Trayecto en un año (en 1000 kilómetros).	87,709 × 35 =	3.069,815
Ejes de vagones para mercancias y otros usos.	284,776	
á añadir para 81,781 ejes de ruedas de frenos (5 veces).	408,905	
Trayecto en un año (en 1000 kilómetros)	693,681 × 15 =	10.405,215
	Total	13.475,000

Como cada eje tiene 2 cajas de estopa y las pérdidas del cuadro anterior corresponden á 4 cajas y á un trayecto de 1000 kilómetros, conviene reducir este número á la mitad, ó sea 6.732,515. Entonces hallamos para los gastos anuales debidos al desgaste del metal (dejando á un lado los gastos de refundicion) las cifras siguientes:

Con la unidad de precio del n.° 8. . 30,970 pesetas.
— — 6. . 69,345 —
— — 3. . 350,090 —

Vemos que el valor correspondiente al desgaste del metal oscila entre límites muy distantes que dependen de la composicion del metal empleado. Si admitimos con varios autores que la cantidad de metal gastado es directamente proporcional á la energia del engrase y á la cuota del frotamiento, tendremos que adoptar, segun las cifras de los números 8 y 3 de la columna 3 del cuadro anterior, que la fuerza absorbida por el frotamiento puede oscilar entre dos valores estremos representados por 1 y 8'8.—Con el bronce ordinario y el fosforado, los frotamientos se hallarán en la relacion de 11'06 : 2'33 ó de 4'7 : 1.

§ 97

B. GORRONES DE APOYO, PIVOTES Ó ESPIGONES.

Un gorron situado en el estremo de un eje ó de un árbol de trasmision y cuya base deba soportar la presion que este árbol ejerce en el sentido de su longitud, constituye lo que se llama un gorron de pié, pivote ó espigon. En los casos ordinarios conviene terminarlo

por una base plana como indica la fig. 276 y rodearlo de un envoltorio cilíndrico. En los gorrones nuevos, la presion por unidad de superficie sobre esta base es la misma en todos los puntos é igual á p, mientras que en los que han funcionado durante cierto tiempo, es inversamente proporcional á la distancia ρ del elemento considerado al eje. Designando por r_0 el radio esterior y por r_1 el radio de la cámara de aceite que se halla en el medio, tenemos para esta presion:

$$p' = 0{,}5\, p\, (r_1 + r_0) : \rho$$

Para los elementos situados en el borde p' se convierten p_0 y se tiene:

$$p_0 = 0{,}5\, p\, (r_1 + r_0) : r_0$$

Para deducir las fórmulas destinadas al cálculo de d supondremos la presion por unidad de superficie uniformemente repartida y representada por p; tomaremos $r_1 = {}^1/_3\, r_0$, y admitiremos además que existen dos ranuras para aceite de una anchura igual á ${}^1/_{12}\, d$. Representando la carga total por P, tendremos:

$$\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{9}\, d^2 - \frac{1}{9} d^2\right) p = 0{,}587\, p d^2 = P \qquad (101)$$

A fin de evitar que el desgaste sea rápido, cuando la velocidad de rotacion es considerable, pondremos como anteriormente (V. § 90): $p = a : n$ y entonces tendremos para los espigones de gran velocidad:

$$0{,}587\, d^2 \frac{a}{n} = P \qquad (102)$$

En los espigones no existe por decirlo así ningun caso en que la carga obre alternativamente en direcciones diferentes y podemos por consiguiente limitarnos á las fórmulas relativas á la hipótesis de la carga de direccion constante. Daremos á a el mismo valor que en los gorrones frontales (hierro sobre bronce) es decir 75; tomaremos igualmente para p las mismas constantes que anteriormente. Para los cojinetes de palo de caoba, que permanecen constantemente sumergidos en el agua, se puede admitir aun con una velocidad de rotacion considerable una carga de 1 kilógramo por milímetro cuadrado (1). Conviene por otra parte establecer aquí una distincion entre los espigones durmientes, los animados por un movimiento de rotacion regular y por fin los que marchan á gran velocidad.

Así hemos podido trazar el cuadro siguiente:

FÓRMULAS PARA LOS ESPIGONES.

	Hierro ó acero sobre bronce.	Fundicion sobre bronce.	Hierro ó acero sobre caoba sumergida.
Espigones durmientes	$p = 1$ $d = 1{,}31\sqrt{P}$	$0{,}5$ $1{,}86\sqrt{P}$	— (103)
Espigones giratorios $n \leqq 150$	$p = 0{,}5$ $d = 1{,}86\sqrt{P}$	$0{,}25$ $2{,}62\sqrt{P}$	$1{,}0$ $1{,}31\sqrt{P}$
Espigones de gran velocidad $n > 150$	$a = 75$ $d = 0{,}15\sqrt{Pn}$	—	$p = 1$ $d = 1{,}31\sqrt{P}$

PRIMER EJEMPLO. *Una grua de Newstadt, en el puerto de Cherburgo posee un espigon de* 170^{mm} *de diámetro, para una fuerza de* 15000 *kilógramos. Admitiendo un contrapeso de* 3000^k *hallamos* $P = 18000$. *Como se trata aquí de un espigon durmiente, el valor de d dado por el cuadro siguiente (col.* 9, *línea* 1) *es* 180^{mm}. *—Para otra grua, de* 10 *toneladas de fuerza, con un contrapeso de* 2 *toneladas Newstadt ha tomado* $d =$ 160^{mm}; *el valor indicado por el cuadro seria* $d = 145^{mm}$ (*número comprendido entre los de las líneas* 10 *y* 11).

2.° EJEMPLO. *Para un árbol de trasmision vertical, animado de una velocidad de* 100 *vueltas por minuto y cuyo espigon soporta una carga de* 1000^k *se debe tomar un diámetro de* 60^{mm} *segun la col.* 3, *línea* 10.

3.° EJEMPLO. *El espigon del árbol de una turbina que da* 200 *vueltas por minuto y está sometido á una presion de* 1400^k *segun la fórmula* (103) *deberia tener por diámetro* $d = 0{,}15\sqrt{1400.200} = 80^{mm}$. *Se encuentran amenudo, sin embargo, turbinas cuyos espigones están sometidos á presiones que llegan hasta* 3 *y* 4^k *por milímetro cuadrado, cifra muy superior á la que resulta de la fórmula* (103) *y que en el ejemplo actual seria igual á* $75 : 200 = {}^3/_8{}^k$.—*Es cierto que una presion tan exagerada lleva consigo varias clases de inconvenientes y en particular un desgaste rápido.*

(1) Los esperimentos de *Penn* han demostrado que los gorrones durmientes en el agua sobre cojinetes de madera de caoba, pueden soportar sin peligro una presion que llega hasta 4 y 5 kilos por milímetro cuadrado. V. *Burgh* a, a, O., pág. 153.

TABLA DE LOS VALORES CORRESPONDIENTES Á d Y P PARA LOS ESPIGONES Ó PIVOTES DURMIENTES Y GIRATORIOS.

$d=$	1'31 $\sqrt{P}$	1'86 $\sqrt{P}$	2'62 $\sqrt{P}$	$d=$	1'31 $\sqrt{P}$	1'86 $\sqrt{P}$	2'62 $\sqrt{P}$	$d=$	1'31 $\sqrt{P}$	1'86 $\sqrt{P}$	2'62 $\sqrt{P}$
15	131	65	33	80	3729	1856	932	180	18880	9396	4720
20	233	116	58	85	4210	2095	1053	190	21036	10469	5259
25	364	181	91	90	4720	2349	1180	200	23309	11600	5827
30	524	261	131	95	5259	2617	1315	210	25698	12780	6424
35	714	365	178	100	5827	2900	1457	220	28204	14036	7051
40	932	464	233	105	6424	3197	1606	230	30826	15341	7706
45	1180	587	295	110	7051	3509	1763	240	33565	16704	8391
50	1457	725	364	120	8391	4176	2097	250	36420	18125	9105
55	1763	877	440	130	9848	4901	2462	260	39392	19604	9848
60	2097	1044	524	140	11421	5684	2855	270	42480	21141	10620
65	2462	1225	615	150	13111	6525	3279	280	45650	22736	11421
70	2855	1421	714	160	14918	7424	3729	290	49007	24389	12252
75	3279	1631	819	170	16841	8381	4210	300	52445	26100	13111

En los árboles verticales, la longitud del gorron ó del espigon queda comprendida entre d y 1'5 d: en principio, debe ser bastante grande para que la presion por unidad de superficie resultante de las acciones laterales tenga un valor suficientemente pequeño.

Puede observarse de un modo general en la práctica de las máquinas, la tendencia á limitar en lo posible el diametro de los espigones (1) evidentemente con el objeto de disminuir las resistencias debidas al frotamiento. No es necesario observar que así se admite implícitamente la exactitud de la antigua ley, segun la cual el coeficiente de frotamiento es independiente de la magnitud de las superficies frotantes.

En ciertos casos para gorrones sometidos á presion bastante elevada por unidad de superficie, parece posible llegar á disminuir la influencia de n recurriendo al empleo de rodajas móviles. Si entre la base del espigon y la crapodina propiamente dicha, se intercalan 1, 2, 3,..., i de estas rodajas (fig. 277), el número de vueltas de las superficies de resbalamiento parece estar representada en condiciones favorables por $n/2$ $n/3$ $n/4$.... $n/i+1$. Esta disposicion se ha ensayado para árboles de turbinas y de molino *(Escher-Wyss, Rieter)*. Sin embargo, para las hélices de los barcos no ha tenido éxito duradero; las placas se soldaban en cierto modo unas á otras y las superficies que aun giraban se calentaban por el frotamiento y acababan por destruirse rápidamente. El uso de ruedas dentadas para asegurar á las rodajas las velocidades de rotacion indicadas por los números anteriores no ha bastado para impedir esa rápida destruccion; aunque á juzgar por los datos que hemos podido recoger, la presion por milímetro cuadrado en todos estos ensayos era demasiado considerable (1^k y más aun). Parece, pues, que en esta cuestion convendria dirigir los esfuerzos principalmente sobre la disminucion por unidad de superficie p.

Para las crapodinas se han buscado con frecuencia otras sustancias á más del hierro, la madera, el bronce y las aleaciones análogas (metal blanco, plomo endurecido, etc.). Además del acero duro, cuyo empleo es tambien poco satisfactorio para presiones demasiado considerables, se han ensayado diversas materias, como la piedra, el vidrio (1) y la arcilla endurecida por coccion (2); pero hasta ahora no se ha generalizado el uso de ninguna de estas materias. *Girard* ha propuesto el uso de soportes de agua comprimida (3); y en este sistema, el agua, comprimida por medio de una bomba obra entre las superficies frotantes y hace así muy fácil la marcha del gorron con escasa pérdida de trabajo debida al movimiento de la bomba. En la Exposicion universal de 1867 *Girard* aplicó esta disposicion á un gorron vertical reemplazando el agua por el aire.

(1) El establecimiento de *Grusson*, de Magdeburgo, ha dado gorrones de fundicion endurecida (sobre cojinetes de la misma materia) que debian soportar sin inconvenientes sérios, una presion de 15 kilos por unidad de superficie.—Es evidente que conviene considerar aquí la escasa carga de los gorrones, cuando la placa no lleva nada, así como la gran lentitud de la rotacion.

(1) Los cojinetes de vidrio han sufrido una prueba de muchos años y se construyen en la fábrica de *E. Acker y C.ª* en Groggenau, cerca de Rastadt.—Estos cojinetes que son de módico precio, deben tener gran dureza, y exigen apenas materia lubrificante.

(2) Propuesta en Londres en 1867 por *Leoni*.

(3) V. *Armengaud*, Vignole des mecaniciens, pág. 139.

No era mas que un esperimento científico y no se ha hecho hasta aquí ninguna aplicacion práctica en grande escala. En la misma Exposicion figuraban los gorrones *Jouffray*, que giraban con gran facilidad sobre agua comprimida en soportes completamente cerrados. La única deduccion algo clara que podemos sacar de lo que precede, es que se ha reconocido la insuficiencia de los espigones ó pivotes ordinarios, sin que podamos afirmar que las complicadas disposiciones que se han propuesto sean realmente ventajosas.

§ 98

Frotamiento de un espigon terminado por superficie plana.

Bajo la accion de una carga P, un espigon terminado por base plana, de forma anular, cuyos radios interior y esterior son respectivamente r_1 y r_0 esperimenta un frotamiento que, supuesto equilibrado por una fuerza F que obre tangencialmente á la circunferencia, tiene por espresion:

$$F=\frac{2}{3}fP\frac{1-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^3}{1-\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2} \qquad (104)$$

designando f el coeficiente de frotamiento. Para un espigon que ha servido durante cierto tiempo se tiene:

$$F=\frac{f}{2}P\left(1+\frac{r_1}{r_0}\right) \qquad (105)$$

Este segundo valor es algo menor que el primero; y suponiendo como anteriormente $r_1=\frac{1}{3}r_0$, resulta $F=\frac{2}{3}fP$. Los frotamientos para los espigones nuevos y los espigones que han servido ya, se hallan entonces en la relacion 7 : 6; para $r_1=0$ esta relacion es 4 : 3. Las observaciones hechas en el párrafo 96 son aplicables al coeficiente f.

Ejemplo. *Grua del primer ejemplo del* § 97. $P=18000^k$, $r_0=85^{mm}$; *supongamos* $r_1:r_0=\frac{1}{3}$ *y* $f=0{,}15$. *La segunda espresion* (104) *da:* $F=0{,}075\,\frac{1}{3}\,.\,18000=1800^k$. *La fuerza que hay que ejercer á una distancia de* 1^m *del eje, para vencer este frotamiento, seria entonces igual á* $1800\,.\,85:1000=153^k$.

§ 99

Gorrones de apoyo de garganta ó cuello.

Al gorron de carga de cuello corresponde el gorron de apoyo de cuellos (fig. 278). En esta clase de gorrones el diámetro interior $2r_1$ debe ser, por lo ménos, igual al diámetro D del árbol á que el gorron pertenece; y aun es conveniente tomarlo algo mayor, á fin de poder alojar en el interior una cámara de aceite. Conviene además que haya ranuras de aceite en el anillo ó el cojinete. Si damos á r_0-r_1 el mismo valor que para el gorron de espigon equivalente, se obtienen dimensiones que se utilizan tanto mejor cuanto menor es la presion p, puesto que corresponde á una velocidad de deslizamiento considerable. Pero por el contrario, á causa de los valores más grandes de r_1 y r_0 el momento necesario para vencer el frotamiento es mucho mayor que en el caso del espigon ordinario, de suerte que el gorron de apoyo de cuello ó garganta debe considerarse como desventajoso para grandes valores de la carga P. El cálculo del frotamiento puede por lo demás hacerse por medio de las fórmulas anteriores.

§ 100

Gorrones acanalados.

Si superponemos una série de gorrones de apoyo de cuello se obtiene lo que se llama un gorron acanalado (figs. 279 á 281).

Si todos los anillos son idénticos, la presion, para un gorron que ha servido ya, puede considerarse uniformemente repartida en todas las superficies anulares. Si suponemos además que f tenga una magnitud constante, el frotamiento en cada una de estas superficies en el caso de m anillos no seria más que la m^a parte del valor dado por la fórmula (104); y siendo el frotamiento total m veces más considerable, se haria por tanto independiente del número de anillos. Conviene, sin embargo, observar que en contra de esta deduccion enseña la práctica la necesidad, especialmente para los buques de hélice, de dar gran valor á m, es decir, de asegurar á la presion por unidad de superficie p un escaso valor que sólo se ha llegado á fijar despues de numerosas observaciones. La verdadera razon de este hecho parece consistir únicamente en que en los gorrones fuertemente cargados, el trabajo del frotamiento deducido de la fórmula (104) es tan enor-

me, que hay que hacer toda clase de esfuerzos para disminuirlo, á fin de evitar los calentamientos y sus consecuencias, y que en definitiva el único medio eficaz de conseguirlo, es disminuir el valor del coeficiente f por la disminucion de p. Habiendo sufrido las pruebas de la esperiencia en gran número de instalaciones, se halla p comprendida entre $^1/_{20}{}^k$ y $^1/_{40}{}^k$. Solo en los gorrones acanalados utilizados como gorrones de pié y teniendo por consiguiente escaso diámetro (fig. 281), tiene p mayores valores y llega á veces á $^1/_4{}^k$; pero conviene añadir que en semejante caso se han observado con frecuencia aumentos de temperatura

1.er Ejemplo. *Máquina de buque de vapor de Indret. Presion* 18000^k, *número de vueltas* $n=55$, $2r_1=D=380^{mm}$, *salida de los anillos* $b=r_0-r_1=50^{mm}$, *número de los anillos* $m=9$.—*Aquí tenemos:* $p=18000:9\pi.430.5=1:33'5$. *La velocidad* v *en la circunferencia del gorron (para* $r_0=240$*) alcanza* $1'38^m$. *El trabajo necesario para vencer el frotamiento es, segun* (104): $Fv:75$ *ó* 30 *caballos, suponiendo* $f=0'1$.

2.° Ejemplo. *Turbina sobre el Rhin, cerca de Schaffhouse.* $P=14000^k$, $n=48$, $2r_1=D=230^{mm}$, $b=r_0-r_1=41^{mm}$, $m=9$.—*De ahí se deduce:* $p=14000:9.\pi.271.41=1:22'4$ *y* $v=0'784^m$.—*Suponiendo siempre* $f=0'1$, *se obtiene para el trabajo de frotamiento,* $Fv:75=12'7^{ch}$.

3.er Ejemplo. *Turbinas de Girard, en Ginebra* (1). —$P=15000^k$, $n=16$, $2r_1=D=250^{mm}$, $b=r_0-r_1=35^{mm}$, $m=12$. *Las fórmulas dan:* $p=15000:12.\pi 285.35=1:25'1$ *y* $v=0'267^m$. *Con* $f=0'1$ *la pérdida de trabajo debida al frotamiento del gorron* $Fv.75=3^{ch}$.

4.° Ejemplo. *Langdon* (2) *recomienda como regla práctica para los gorrones acanalados de las hélices de los buques, determinar la superficie total de presion de las superficies anulares, de tal suerte que dé* $^3/_4$ *de pulgada cuadrada inglesa por caballo indicado de la máquina. Si* N *es el número total de caballos,* c *la velocidad de la hélice, se tiene* $N=Pc:75$; *por otro lado,* 1 *pulgada cuadrada inglesa* $=645^{mme}$. *La regla precedente da por consiguiente:* $p=75.P:^3/_4.645\,Pc$, *ó* $p=75:^3/_4.645\,c$. *Segun hagamos* c *igual á* 5^m *ó á* 6^m *(lo que corresponde á las marchas normales), se encuentra para* p, $1:32'25$ *ó* $1:38'7$. *Aquí la fuerza indicada de la máquina se supone aplicada á la trasmision de la hélice. Tomando la fuerza indicada sobre los émbolos y suponiéndola los* $^3/_4$ *de la otra, los valores de* p *descienden respectivamente á* $^1/_{25}$ *y á* $^1/_{30}$.

5.° Ejemplo. *Grandes tambores centrífugos de Langen é hijos, de Colonia, gorron de pié de acero fundido en forma de gorron acanalado.* $P=2000^k$, $n=800$, $2r_1=25^{mm}$, $2r_0=40^{mm}$, $m=11$. *Tenemos aquí:*

$$p=2000:11.\pi(20^2-12'5^2)=2000:8423=1:4'2$$

valor escesivamente elevado. Así es que varias veces se han producido elevaciones de temperatura muy pronunciadas; y para evitar estos accidentes ha sido necesario recurrir á un cuidadoso engrase. Siendo el valor de v $1'67^m$, *la pérdida debida al trabajo del frotamiento (con* $f=0'1$*)* $Fv:75$ *se eleva á* $3'6^{ch}$.

Las pérdidas de trabajo indicadas en todos los ejemplos anteriores que respectivamente son 30, 12, 7, 3 *y* $3'6$ *caballos, se han establecido en la hipótesis de* $f=0'1$. *Pero para los tres primeros ejemplos en que la presion* p *es débil, es probable que* f *se introduzca con un valor inferior. Estos ejemplos bastan para demostrar la importancia que conviene dar á la fijacion de* p. *Ya volveremos á tratar de esta cuestion en el* § 122.

(1) *Oppermann*, Portef. écon. des machines, vol. 17.—V. tambien *Engineering*, 1872 (vol 14). El gorron acanalado está aquí descargado por medio de un gorron de agua comprimida. V. párrafo 97.

(2) V. *Burgh*, a. a. O., pág. 194.

§ 101

Articulacion de láminas como gorrones de apoyo.

En todos los casos del género mencionado hasta aquí, se debe procurar generalmente disminuir todo lo posible el frotamiento de los gorrones; y se encuentran sin embargo algunos casos escepcionales para los cuales es de desear que un gorron esperimente un frotamiento considerable, sin que por ello llegue á arañarse; tal es por ejemplo, el caso de un gorron que por una parte debe permitir cierto movimiento de rotacion y por otra debe estar fuertemente ajustado á su soporte, gracias á una presion relativamente débil. Este resultado puede obtenerse con un gorron de apoyo que presente la forma de un tronco de cono. Designando por r_0 y r_1 los rádios de la grande y pequeña base, por α el semi-ángulo del vértice, se halla por espresion de F [V. fórm. (104)]:

$$F=\frac{f}{2}\frac{P}{sen\,\alpha}\left(1+\frac{r_1}{r_0}\right) \qquad (105)$$

Esta fórmula demuestra que se puede llegar á dar á F un gran valor con la condicion de tomar α suficientemente pequeño (1). Pero como este género de gorrones con ángulos muy agudos llegan á despuntarse ó embotarse, resulta que el incremento de F no puede estremarse tanto como fuera de desear. Por el contrario es muy fácil llegar á este resultado recurriendo al empleo de una articulacion de hojas, con la condicion de disponer estas últimas de manera que se dejen comprimir convenientemente unas contra otras (fig. 282). Cada hoja trasmite á la siguiente la presion ejercida en el sentido del eje (2). Si m es el número de superficies frotantes, la fuerza F que seria preciso aplicar á la distancia d_0 para hacer equilibrio al frotamiento, está dada por la espresion:

$$F = m \frac{f}{2} P \left(1 + \frac{r_1}{r_0}\right) \qquad (106)$$

Ejemplo. *Si queremos que F sea igual á P, suponiendo $f=0{,}1$ debemos hacer $m=20 : (1 + r_1/r_0)$, y dada $r_1 = {}^1/_2 r_0$, se deduce $m=13$.*

§ 102

Ensamble de gorrones.

Cuando un gorron no puede hacerse de una sola pieza con el árbol que debe llevar, hay que ensamblarlo con este árbol de una manera especial; y en particular para las ruedas hidráulicas, hay frecuentemente ocasion de unir árboles de madera con gorrones de hierro ó de fundicion.

La disposicion de la figura 283 que representa un gorron de áncora, conduce á practicar en el estremo del árbol una ancha hendidura y á colocar dos piezas de llenura de madera. Una vez introducidas estas piezas, se mantienen por tres birolas ó aros reforzadores cónicos, colocados en caliente (V. § 62); y la inclinacion de la superficie cónica que reciben estas piezas es generalmente ${}^1/_{20}$.

El gorron de clavete ó de áncora artificial que representa la fig. 284, constituye un modo de ensamble muy conveniente y muy sólido. La figura 285 representa un gorron de dos alas (de fundicion) y la figura 286 un gorron de cuatro alas. Existen igualmente gorrones de tres alas, en los cuales conviene tomar el espesor del metal de las alas igual a ${}^3/_{10}\, d$.

El gorron de anillo (fig. 287) comprende cuatro alas rodeadas por una duela cónica, sólidamente fijada por cuatro áncoras planas empotradas. Esta duela lleva amenudo como en la figura, nervaduras esteriores, destinadas á recibir el cubo de una rueda.

El gorron en cruz (fig. 288) constituye una disposicion muy práctica. El atravesaño formado de fundicion con el gorron presenta una superficie completamente ajustada á torno, de modo que se aplica exactamente al estremo del árbol que está tambien levantado. Una birola ó aro de hierro refuerza el anillo de fundicion que reune los brazos del atravesaño. Este último está fijado sólidamente contra el estremo del árbol por cuatro pernos cuyas cabezas están constituidas por tuercas sumergidas en la madera.

---

(1) Se encuentran notables aplicaciones de este principio en los instrumentos geodésicos. La fórmula (105) puede servir igualmente para el cálculo del frotamiento en las llaves de grifos.

(2) Esta disposicion se ha empleado con ventaja por el autor en varias máquinas, para una série de piezas de rotacion que se debian hacer fijas por ajuste. Se encuentran ejemplos de estas articulaciones en los antiguos estuches de matemáticas.

CAPÍTULO SEXTO

SOPORTES DE GORRONES

§ 103

Disposiciones y dimensiones.

Se designan con el nombre de soportes los órganos de construccion en los cuales descansan directamente los gorrones de los ejes y de los árboles de trasmision. En un soporte completo se distingue: 1.°, los cojinetes; 2.°, el cuerpo del soporte; 3.°, las piezas necesarias para el ensamble. Las numerosas clases de soportes usados en la práctica constituyen una série de formas y dimensiones diferentes. Se pueden desde luego dividir en dos clases principales:

a. Soportes para gorrones de carga.
b. Soportes para gorrones de apoyo.

Por otro lado, en cada una de estas clases, la forma general del soporte varia segun las posiciones relativas del gorron y de la superficie sobre la cual debe fijarse el cuerpo del soporte. Si imaginamos el gorron comprendido en un cubo 1,2....8, una de cuyas caras sea normal á su eje principal (figs. 289 y 290), se tiene en el caso de los soportes de la primera clase:

Un soporte horizontal, si la fijacion se hace en la cara. 1.3
Un soporte cartela ó repisa. . . . . 1.8 ó 2.7
Un soporte frontal. . . . . 1.6 ó 4.7
Un soporte-silla. 5.7

Existen subdivisiones análogas para los soportes de apoyo. Debe ponerse todo el cuidado posible para que el desgaste se produzca uniformemente y el engrase se haga bien. Bajo estos dos puntos de vista la disposicion de los cojinetes y de los accesorios que con ellos se relacionan, tiene una influencia capital. Entre las numerosas disposiciones de soportes usados, elegiremos como ejemplos las más importantes indicando las reglas que hay que seguir para su construccion. Para la determinacion de las dimensiones nos podemos servir con ventaja del método de los números proporcionales. Como unidad para las dimensiones de los cojinetes de bronce, tomaremos aquí la que ha sido ya

adoptada para los gorrones: $e=3+{}^{7}/_{100}\,d$, en que d representa el diámetro interior del cojinete. Para el cuerpo del soporte adoptaremos el módulo

$$d_1=10+1'15d. \qquad (107)$$

A. SOPORTES PARA GORRONES DE CARGA.

§ 104

Soporte horizontal.

La figura 291 representa una disposicion de soporte horizontal para diámetros de gorron comprendidos entre 30^{mm} y 200^{mm}. Las dimensiones del cuerpo del soporte y del sombrero están relacionadas al módulo d_1 (107) á escepcion del depósito de aceite, colocado en la cubierta, que en los pequeños soportes debe tener dimensiones relativamente más considerables: su anchura esterior en el plano perpendicular al de la figura debe tomarse igual á $0'7d_1$.

La longitud de los cojinetes depende de la del gorron, la cual, segun el § 90, puede ser igual á $1'5\,d$, $2d$, etc. Para el género de soporte de que aquí se trata, se puede llegar hasta $l=2d$, permaneciendo en buenas condiciones. Los rodetes de los cojinetes deben presentar con relacion á las caras del soporte, una salida más ó ménos considerable, segun que para el mismo diámetro se tome un gorron corto ó un gorron largo.

Los pernos de fijacion del soporte que deben estar siempre fuertemente apretados, tienen un diámetro lijeramente superior al de los pernos de sombrero; con frecuencia están destinados á unir simplemente la suela del soporte á una placa de fundacion (fig. 292, § 105), y en este caso se da á su cabeza una forma especial. Con el objeto de permitir encajar sólidamente la suela del soporte sobre la placa de fundacion, los dos bordes estremos de esta suela presentan una lijera inclinacion. El vaciamiento de la suela tiene por objeto reducir el gasto de la materia y dar por otra parte alcances ó salidas para el acepillado. El vacio existente entre el cuerpo del soporte y el sombrero, está ordinariamente lleno con placas de madera, de modo que permita ajustar á fondo los pernos de este sombrero sin esponerse á producir un despunte en el gorron. En gran número de casos, especialmente cuando los soportes están sometidos á fuertes cargas y esfuerzos alternativos importa que las caras de union de los cojinetes estén de manera que no permitan ningun juego. Para conservar este ajuste es necesario trabajarlas á la lima cuando se ha desgastado cierta cantidad.

§ 105

Escala de proporciones para los soportes horizontales.

La determinacion de las dimensiones de los soportes puede hacerse con ventaja por medio de una plantilla ó diagrama. Damos aquí como ejemplo la que se refiere al caso de soportes horizontales (1).

Los polos O, O_1 y O_2 corresponden á los diámetros d de los gorrones y los polos P, P_1 y P_2 en las dimensiones que se refieren al módulo $d_1=10+1{,}15\,d$; este módulo d_1 se hace igual á O, para $d=(-10):1'15=-8'7^{mm}$. La posicion del polo P se halla desde luego determinada por la condicion de que trazando por este punto una vertical, la longitud ab comprendida entre los radios Oa y Ob sea igual á $-8'7^{mm}$. Las intersecciones de los radios trazados por los puntos O y P con las ordenadas I, II,... dan los valores correspondientes de los diámetros y de los otros elementos, á escepcion de las dimensiones de los cojinetes, que exigen un polo especial, puesto que están referidos á un módulo diferente. Este módulo, que es $e=3+{}^{7}/_{100}\,d$, se hace nulo para $d=(-3.100):7=-43^{mm}$. Los polos E y E_1 buscados se hallan por consiguiente en la línea vertical cuya parte $a'b'$ comprendida entre los radios Oa' y Ob', tiene una longitud igual á 43^{mm}. Para el depósito de aceite colocado sobre el sombrero, la dimension es $10+0'25d_1=10+0'25.10+0'25.1'15d=12'5+0{,}29\,d$ lo que se reduce á $4'17\ (3+0'07d)=4'17\ e$. El punto E puede así utilizarse igualmente como polo para las dimensiones del depósito de aceite.

§ 106

Diferentes formas de cojinetes.

Las superficies esteriores de enderezamiento en los cojinetes presenta con frecuencia una forma diferente de la anteriormente indicada. Pueden ser, por ejemplo, prismáticas, de ocho caras, como en la figura 293, ó cilíndricas, como en las figuras 294 y 295. Con las dos últimas formas el ajuste de los cojinetes en las cavidades correspondientes del soporte se obtiene fácilmente por medio del torno; y con todo, para impedir el arrastre de los dos cojinetes para la rotacion del gorron, con-

(1) La casa *Escher Wyss*, de Zurich, usa para los soportes una plantilla muy bien dispuesta. Esta plantilla aunque establecida en la hipótesis de la proporcionalidad geométrica de todas las dimensiones y no teniendo por consiguiente más que un solo polo, hace muy buenos servicios.

viene disponer en el cojinete inferior, dos salidas laterales de una longitud igual á $2e$ que se encajan en la fundicion del soporte (fig. 294) ó bien proveer cada uno de los dos cojinetes de dos pequeños gorrones cilíndricos que se ajustan uno al sombrero, y otro al cuerpo del soporte (fig. 295). Cada una de estas disposiciones presenta á la vez ventajas é inconvenientes, de tal suerte que no es posible decidir cual es la que con preferencia debe emplearse. Las modificaciones que entraña para el sombrero y el cuerpo del soporte, la adopcion de una de las formas de las figuras 294 y 295, no presenta ninguna dificultad.

Los cojinetes de metal blanco ó de cualquier otra aleacion análoga, destinada á reemplazar el bronce, deben establecerse de un modo especial, pues el metal blanco no presenta una resistencia suficiente para que se pueda someter como el bronce á esfuerzos bastante enérgicos. Los cojinetes de este género se componen en general de una envoltura esterior de fundicion ó algunas veces de bronce, en la cual se deposita por fusion una capa de la aleacion destinada á formar la guarnicion interior (fig. 296). Antes de depositar esta capa, hay que tener cuidado de limpiar y estañar la superficie que debe recibirla.

Cuando se emplean cojinetes de madera de caoba (V. §§ 97 y 117) debe dárseles la forma más sencilla. La que representa la figura 297 es bastante satisfactoria.

En las construcciones de la América del Norte, se encuentran frecuentemente guarniciones de metal blanco, fundidas ó vertidas directamente en el cuerpo del soporte y el sombrero. La fig. 298 representa un soporte de esta clase, que el constructor *Sturtevant*, de Boston, tan conocido por sus ventiladores, utiliza para los árboles de trasmision. El cuerpo del soporte está dispuesto como depósito de aceite que es conducido por medio de mechas al gorron. Sobre este objeto se encontrarán despues más ámplios detalles (fig. 319). La relacion de la longitud del gorron al diámetro es muy considerable ($l=4d$) y permite tener débil presion por unidad de superficie, lo que es evidentemente ventajoso.

§ 107

Soporte sin chapin. —Gran soporte horizontal.

Sucede amenudo que la falta de espacio conduce á acortar de tal manera el chapin, que se halla reducido por decirlo así á la proyeccion del cuerpo del soporte. La fijacion de este soporte sobre su placa de fundacion se hace entonces directamente por medio de los pernos del sombrero, que llevan en este caso una cabeza intermedia (V. tambien la fig. 310). Esta disposicion de los pernos del sombrero puede igualmente utilizarse con ventaja en los soportes ordinarios cuando la presion trasmitida por el gorron se ejerce alternativamente en los cojinetes superior é inferior; y estos pernos constituyen además un medio suplementario de fijacion para la suela del soporte (V. § 88).

La fig. 300 representa una disposicion de soporte horizontal para un diámetro de gorron comprendido entre 200 y $300^{m/m}$. Este soporte lleva cuatro pernos de sombrero y un número igual de pernos de pié destinados á fijar la suela en su placa de fundacion. Se ha dado á estos últimos pernos la forma indicada en la figura 292 (§ 105), de suerte que sin tocar la placa de fundacion se puedan quitar y poner, y que por otro lado la suela impida la rotacion del cuerpo de cada perno, durante la operacion del ajuste. El cuerpo del soporte y el sombrero estan aquí alternativamente más vaciados que en la disposicion indicada anteriormente. Para los soportes de árboles de manubrios y en general para todos los que están espuestos á grandes vibraciones, conviene que tengan contra-tuercas los pernos del sombrero, ó alguna otra disposicion de seguridad (V. § 80), de modo que se evite su desajuste.

§ 108

Soporte horizontal con cojinete inferior móvil.

En los soportes horizontales nos limitamos, en general, para corregir el desgaste del cojinete inferior, á remontarlo de cuando en cuando por medio de cuñas, que obran sobre el mismo cojinete ó sobre el soporte entero; pero en ciertos casos es necesario recurrir á una disposicion especial para efectuar este levantamiento. Tomaremos como ejemplo el representado en la figura 301 que está tomada de un barco de hélice.

El cuerpo del soporte no está invariablemente fijo con pernos; sometido á la presion del árbol descansa en un sistema de clavetes ó chavetas que permiten conservarlo sucesivamente en diferentes alturas y desplazarlo verticalmente en razon del desgaste producido. El cojinete superior está dotado de rebordes á través de los cuales pasan los pernos del sombrero (no representados en la figura). El cojinete inferior está formado por una guarnicion de metal blanco, vaciado en la superficie interior del cuerpo del soporte.

§ 109

Soporte horizontal articulado.

Desde largo tiempo se ha intentado disponer (1) los cojinetes en el cuerpo del soporte de manera que se apliquen exactamente por sí mismos al gorron, ó en otros términos, realizar lo que se puede llamar soporte articulado ó de rótula. Entre todas las disposiciones propuestas para obtener este resultado podemos citar la que consiste en dar la forma esférica á las superficies esteriores de los cojinetes y á dotar el cuerpo del soporte de cavidades correspondientes de la misma forma. En América, esta clase de construccion se ha desarrollado considerablemente por *W. Sellers* y se ha introducido en la práctica definitivamente. *Sellers* además ha sentado como principio que la presion por unidad de superficie entre el gorron y los cojinetes debia ser siempre muy débil. Ha hecho observar (2) que así era posible utilizar los cojinetes enteramente de fundicion y ha indicado como límite de la presion que conviene no esceder, en este caso, de la cifra de 15 libras por pulgada cuadrada, lo que corresponde á $^1/_{95}$ kil. próximamente por milímetro cuadrado (3).

En los árboles de trasmision, la realizacion de una débil presion por unidad de superficie para los cojinetes presenta pocas dificultades, porque los gorrones de los árboles de este género son comunmente gorrones de garganta ó cuello sometidos á una presion relativamente poco elevada. En este caso se halla por consiguiente realizada la ventaja mencionada en el § 92 (4).

La figura 302 representa un soporte horizontal de *Sellers*. Los cojinetes de fundicion presentan en su medio un rehenchimiento esférico, que se encaja en dos cavidades igualmente esféricas dispuestas una en el cuerpo del soporte y la otra en el sombrero.

El arrastre de los cojinetes está impedido por dos ranuras laterales que se aplican contra los pernos del sombrero. La materia destinada al engrase (aceite ó grasa) (1) se introduce en tres puntos; dos cubetas, fundidas con el chapin permiten recoger las pequeñas cantidades de aceite que se escapan. El módulo al cual se refieren los números proporcionales de la figura 302 es diferente del que da la fórmula (107), y está aquí representada por la espresion (2):

$$d'_1 = 5 + 1{,}4\,d \qquad (108)$$

La longitud de los cojinetes es igual á $4d$. Las formas adoptadas por *Sellers* son muy plásticas y están bien alimentadas; ésta cualidad distintiva, que es signo de un modelado ejecutado con los mayores cuidados, es en general muy estimada entre los ingenieros americanos. En Alemania se encuentran ya numerosas aplicaciones del soporte de *Sellers*. Está ménos generalizado en Francia.

La figura 303 representa otro soporte articulado, de esmerada construccion. Es debido á *Sturtevant*, que le ha aplicado, en estos últimos tiempos (3) á los árboles de sus ventiladores. La relacion $l : d$ es aquí tambien muy grande (V. 4.° ej. § 91). El efecto de articulacion se halla realizado de la manera siguiente: en primer lugar, la caja destinada á recibir los cojinetes descansa sobre un gorron B (ahorquillado) cuyo eje está en cruz con el del gorron principal A; en segundo lugar la mamposteria que recibe el gorron B, puede girar alrededor de un eje vertical BC perpendicular á los gorrones A y B y estar además orientada segun las necesidades, antes de la fijacion por pernos. Una guarnicion de metal blanco está fundida directamente en el cuerpo del soporte. Un pedazo de madera de caoba, fijo en el estremo, está destinado á recibir la presion longitudinal del gorron. Cuando se ha producido cierto desgaste en la direccion AA, se destornillan los pernos de fijacion en C y se regula de nuevo el soporte.

---

(1) Entre los constructores que han entrado en esta via, podemos citar: *Bodmer*, de Manchester; *Schönher*, de Chemnitz; *Stehelin*, de Thann; *Zimmermann*, de Carlsruhe.

(2) *Treatise on machine tools*, etc., *as made by W. Sellers and Co.* Philadelphia, Lippincott, 1873, pág. 161.

(3) Como ejemplo de la conservacion de los cojinetes de fundicion, *Sellers* cita el hecho de que en uno de sus soportes en servicio desde 16 años, la superficie del cojinete inferior no habia llegado todavia á un verdadero pulimiento en toda su estension. El árbol correspondiente, que giraba con la velocidad de 50 vueltas por minuto, tenia 4 pulgadas 1/2 de diámetro y llevaba, cerca del soporte, una polea de 72 pulgadas de diámetro y de 20 pulgadas de anchura, cuya correa trasmitia 52 caballos. Segun otras referencias, en cojinetes que funcionaban hacia un año se podian aun observar todas las trazas del instrumento del torno. A causa de la débil presion por unidad de superficie, no puede espulsarse el aceite, de suerte que con una alimentacion regular forma alrededor del gorron un envoltorio adherente. —El consumo de aceite es muy poco; segun *Sellers*, un árbol de 120 vueltas, no consume, por soporte más que 2 onzas 1/2 de aceite en seis meses.

(4) Se puede demostrar por un ejemplo á que inadmisibles dimensiones llegariamos para un gorron frontal, cargado por un solo lado, si quisiéramos adoptar para un gorron de este género, el valor $p = 1/95$ indicado por *Sellers*. Para $P = 8000$ kilos, un gorron frontal, con carga en un solo lado, deberia, segun la tabla del párrafo 91, tener 100 milimetros de diámetro y 150 milímetros de longitud. Para $p = 1\ 95$ la fórmula (90) daria $l : d = 10{,}56$, y la fórmula (13) $d = 268$ milimetros, y por tanto $l = 10{,}56 \cdot 268 = 2830$ milímetros (!).

(1) *Sellers* emplea una mezcla de sebo y aceite que se funde apenas se calienta el gorron.

(2) V. *Berliner Verhandlungen*, 1875, pág. 89.

(3) Desde 1878.

La disposicion adoptada para el engrase es notable; y lleva dos depósitos especiales para la introduccion y salida del aceite.

§ 110

Soporte horizontal de tres cojinetes.

En las máquinas de vapor horizontales y en algunos otros aparatos, se encuentran soportes en los cuales el gorron ejerce una presion lateral, dirigida ya en un sentido, ya en otro, al mismo tiempo que la parte inferior se halla sometida á una presion contínua que, para las máquinas de vapor, por ejemplo, se debe al peso del volante. La inclinacion, con relacion á la horizontal, de la superficie de union de los cojinetes que se ha adoptado en gran número de instalaciones, sólo previene en corta medida la ovalizacion que tiende á producirse por el desgaste. Para remediar más sériamente este inconveniente y repartir el desgaste es preferible emplear un soporte de tres cojinetes, uno de los cuales está destinado á recibir la accion de la presion vertical constante, mientras que los otros se hallan sometidos á la presion horizontal que se ejerce alternativamente hácia delante y hácia atrás. La figura 304 representa un soporte de este género, para el cual el módulo es $d_1 = 10 + 1'15d$. El cojinete inferior descansa sobre dos chavetas, cada una de las cuales está provista de una parte taladrada en forma de tuerca, en la cual pasa un vástago fileteado, que puede simplemente girar sobre sí mismo sin desplazarse longitudinalmente; y obrando del esterior sobre estos dos tornillos podemos colocar las chavetas en la posicion conveniente para el ajuste de los cojinetes y fijarlos allí. Los cojinetes laterales están comprimidos contra el gorron por dos tornillos de acero, cuya accion se ejerce por el intermedio de placas de hierro. Cuando se quiere retirar los cojinetes, se empieza por quitar las placas laterales despues de haber quitado el sombrero; luego se colocan detrás los cojinetes de manera que permitan levantarlos evitando el gorron. Las presiones que se ejercen en los flancos del soporte exigen que se aumente su anchura, como lo indica el dibujo.

La figura 305 representa otra disposicion de soporte de tres cojinetes (1), en la cual el cojinete inferior está fijo ó por lo ménos no puede levantarse cuando se hace sentir la necesidad, más que por interposicion de cuñas; los dos cojinetes laterales están ajustados contra el gorron por la accion de chavetas que soporta el sombrero, el cual está unido de una manera invariable al cuerpo del soporte. Cada una de las chavetas se termina por arriba por una parte fileteada, cuya tuerca alojada en el sombrero solo puede girar sobre sí misma. Obrando por medio de una llave sobre la cabeza de seis caras que lleva esteriormente esta tuerca, se la hace girar de manera que quede la chaveta en el punto deseado y se la mantiene en su posicion por medio de una contra-tuerca, que se atornilla á fondo sobre el sombrero.

Fuertes nervaduras laterales ponen al cuerpo del soporte en estado de soportar sin peligro las acciones laterales alternativas que resultan de la accion del vapor sobre las caras del émbolo. Con frecuencia (como por ejemplo, en el original de la figura) el cuerpo del soporte es de fundicion y está unido con el zócalo de la máquina.

La fig. 306 da un tercer tipo de soporte de tres cojinetes, de fácil ejecucion. Este soporte puede utilizarse en los casos en que, además de las presiones verticales regulares dirigidas en ambos sentidos, se ejerce sobre el gorron una fuerza lateral de accion contínua. Con un soporte ordinario, esta fuerza obrando en la misma direccion de las juntas de los cojinetes, determinaria un desgaste muy desigual, mientras que, en la disposicion de la figura este efecto perjudicial queda evitado por la adicion del pequeño cojinete lateral. Ese tipo de soporte es de uso ventajoso para las pequeñas locomóviles verticales, cuya fuerza es trasmitida por una correa sensiblemente horizontal.

§ 111

Soporte de caballete.

Un soporte en el cual el cuerpo propiamente dicho, en lugar de estar muy próximo al chapin está sensiblemente apartado, constituye un soporte de caballete. El que representa la fig. 307 se deduce del soporte de la figura 291. El caballete presenta por lo demás numerosas variedades de formas, y la relacion de la altura á la anchura de la base de apoyo es tambien bastante variable. En la figura, la longitud total de esta base se ha tomado igual á la altura del caballete, de tal suerte que el punto más elevado de este caballete y los dos estremos de la suela forman los tres vértices de un triángulo equilátero. En la figura, el caballete parece relativamente saliente, lo que consiste sin duda en la proximidad de los perfiles de los dos piés.

(1) Tomados á una máquina de vapor de la Sociedad de Fives-Lille.

§ 112

Soportes-repisas.

El soporte-repisa de la fig. 308 se deduce igualmente del soporte horizontal de la fig. 291. La placa de fijacion es aquí perpendicular al plano de union de los cojinetes y paralela al eje del gorron; se halla toda entera á un mismo lado de este plano, de suerte que el cuerpo del soporte debe presentar forma de repisa. Para el sombrero del soporte, el módulo es el del sombrero del soporte horizontal del mismo diámetro del gorron; y lo propio sucede para los cojinetes. Los pernos del sombrero están fileteados directamente en la fundicion ó mantenidos por una chaveta que presente una de las disposiciones de las figuras 223 y 224, § 83. —El módulo d_1 está dado por la fórmula (107).

En los soportes establecidos para grandes diámetros de gorrones la escotadura practicada en la repisa está dotada de una nervadura cuyo espesor es de $0'1^m\ d_1$ y la anchura de $0'4\ d_1$ midiéndose esta última paralelamente al eje del gorron.

La fig. 309 representa un soporte-repisa de rótula ó rodilla de *Sellers*.

Los cojinetes de fundicion están aquí construidos mas lijeramente que en el soporte ordinario del mismo constructor; las zonas esféricas esteriores que presentan en su medio están encajadas por una pieza en cruz, de forma cilíndrica. Como es esencial que el eje del gorron pueda estar fácilmente regulado en el sentido de la altura, la pieza que encaja los cojinetes se termina por dos cilindros de fijacion, cada uno de los cuales posee un filete trapezoidal, poco profundo y hecho de fundicion con él. La tuerca correspondiente está igualmente fundida con la duela del cuerpo del soporte. La parte de cada cilindro que no lleva filete, está torneada y la superficie interior de los filetes en la duela está alisada al mismo diámetro, de suerte que la guia ó conduccion de los cilindros de fijacion en el sentido vertical está así perfectamente asegurada.

Cada uno de estos cilindros se halla por lo demás mantenido en su posicion por un tornillo provisto de disposicion de seguridad. La parte hueca del cilindro superior puede recibir el tubo de un engrasador automático. Para todos los soportes cuyo diámetro d está comprendido entre 45 y 100^{mm}, *Sellers* ha adoptado un valor constante del alcance a y lo ha tomado igual á 350^{mm} próximamente. El soporte-repisa de *Sellers* es de forma muy elegante que la proyeccion horizontal sobre la figura hace resaltar mejor que la elevacion lateral.

§ 113

Soporte ahorquillado.

Como soporte intermedio para los árboles verticales, se puede usar un soporte-repisa con la condicion de tener en cuenta la direccion del desgaste. En los fundamentos de soportes en que siempre falta más ó ménos el espacio, los dos tipos anteriores no son de uso cómodo, el primero porque no está dispuesto simétricamente con relacion al plano de union de los cojinetes, y el segundo porque conduce á dimensiones relativamente considerables. Resulta que con frecuencia nos vemos obligados á recurrir al empleo de un soporte simétrico, de dimensiones reducidas, cuyos cojinetes tienen su plano de union normal á la superficie de fijacion. La fig. 310 representa un soporte de ese género que se designa con el nombre de soporte ahorquillado. El sombrero forma con el cuerpo del soporte un cuadro de forma invariable, en el interior del cual los cojinetes de bronce están suspendidos y pueden ser desplazados en sentido horizontal. En la disposicion de la figura el desplazamiento solo puede verificarse en una sola direccion. En el caso en que fuese necesario producirlo igualmente en otra direccion, la pieza fija de fundicion, indicada á la derecha, deberia estar reemplazada por un dispositivo de chaveteado semejante al de la izquierda. Cuando el sombrero está separado, se puede fácilmente retirar la pieza de fundicion y el dispositivo de chaveteado; y actuando enseguida lateralmente sobre el árbol se llega á hacer salir los cojinetes. Los pernos de sombrero llevan cabezas intermedias sumergidas, de suerte que al mismo tiempo sirven para fijar el cuerpo del soporte en la superficie de apoyo. El módulo para la determinacion de las dimensiones es $d_1 = 10 + 1'15d$, es decir, el de la fórmula (107) (1).

§ 114

Soporte frontal.

La figura 311 representa un soporte frontal deducido del soporte de la figura 291. Los pernos del sombrero se introducen por abajo y tienen sus cabezas sumergidas en el espesor de la placa horizontal, lo que permite quitarlos y ponerlos con la mayor facilidad.

(1) En otro tipo de soporte ahorquillado, análogo al anterior, el desplazamiento de los cojinetes está producido por tornillos laterales de presion. V. sobre este objeto *Engineers and Machinists Assistant*, London, 1874, lámina I.

En el caso en que, como en la figura, solo se emplean dos pernos para la fijacion de la placa vertical, es indispensable que esta placa esté mantenida lateralmente por cuñas y que descanse sobre un apoyo susceptible de oponerse al desplazamiento de arriba abajo. Estas condiciones pueden realizarse ordinariamente (V. el capítulo siguiente). En caso contrario convendria emplear cuatro pernos ó por lo ménos tres para asegurar la invariabilidad de posicion de la placa.

La figura 312 presenta una vista lateral de otro soporte frontal. Este soporte que está deducido del soporte ahorquillado, puede á veces prestar buenos servicios (V. figura 348, § 126). Es con todo de uso ménos frecuente que el anterior.

Alejando más ó ménos la placa de fijacion con relacion á los cojinetes se puede deducir de los soportes-repisas y de los soportes frontales otra série de formas que con el nombre de soportes de potencia se encuentra bastante amenudo en uso en la práctica para diferentes casos particulares. Sin embargo, esos distintos soportes deben ser considerados como pertenecientes á la misma clase.

§ 115

Soportes de suspension ó sillas

Segun la definicion del § 103 un soporte horizontal ordinario se convierte en soporte de suspension ó en soporte-silla, cuando la presion del gorron está dirigida contra el cojinete del sombrero. Si el gorron es un gorron frontal, de hierro, sometido á la carga indicada en el § 91, los pernos del sombrero y del chapin no presentan ya suficiente resistencia, si se determinan sus dimensiones por medio del módulo relativo al soporte ordinario. Lo mismo se verifica para el sombrero y el chapin. Para obtener dimensiones utilizables conviene operar de la manera siguiente: Se colocan los cojinetes, como hasta aquí, partiendo de las unidades e y $d_1 = 10 + 1'15\, d$, y se determinan todas las demás dimensiones de perfiles tomando por módulos de los números proporcionales:

$$d''_1 = 10 + 1'75\, d \qquad (109)$$

Cuando el soporte con presion sobre el sombrero está destinado á soportar un gorron intermedio, se debe investigar si los diámetros de los pernos obtenidos con el módulo que da la fórmula (107) son suficientes, es decir si son tan fuertes como los deducidos de la fórmula (109), en la cual d designa entonces el gorron frontal equivalente al gorron intermedio.

Ejemplo. *A una presion de* 8000^k *corresponde, segun la tabla del* § 91, *un gorron frontal, de hierro, de* 100^{mm} *de diámetro por* 150^{mm} *de longitud. Si la presion debe ejercerse contra el sombrero del soporte, las dimensiones, aparte de las de los cojinetes, deben determinarse por medio del módulo* $d''_1 = 10 + 1 . 75 . 100 = 185^{mm}$. *Partiendo de ahí se encuentra, por ejemplo, para el diámetro de los pernos del sombrero:* $0'2 . 185 = 39^{mm}$, *ó sea* 40^{mm}. *Un gorron intermedio de* 170^{mm} *de diámetro, para la misma presion directa, conduciria á tomar, para el cálculo del soporte, la unidad normal* $d_1 = 10 + 1'15 . 170 = 206^{mm}$. *Siendo esta cifra muy superior á* 185^{mm} *vemos que, en el soporte construido normalmente, no habria ningun inconviente en que la presion fuese dirigida contra el sombrero.*

Sellers emplea, en sus instalaciones un soporte de suspension corto que, de una manera general presenta las formas y dimensiones del soporte horizontal equivalente; si bien que los cojinetes están vueltos 180° y el depósito de aceite está fundido con el sombrero. En el mayor número de casos es necesario, para los soportes de suspension, que haya entre el eje del gorron y la superficie de fijacion una distancia muy superior á la que puede ofrecer un soporte horizontal ordinario; y tambien en la construccion de las sillas se ha atendido á prolongar el cuerpo propiamente dicho.

A causa de la forma dada al cuerpo, el soporte de suspension que representa la figura 313 lleva el nombre de silla de nervaduras. La parte inferior que recibe los cojinetes, tiene la forma de un corchete. El sombrero está colocado en la posicion que debe ocupar por medio de una chaveta y está mantenido en esa posicion por un perno de ajuste horizontal. Para los gorrones de diámetro inferior á 50^{mm}, la placa de fijacion no lleva á cada lado más que un solo perno, de diámetro igual á $0'3\, d_1$; y conviene modificar por consiguiente la disposicion de la placa de fijacion no practicando más que dos agujeros de pernos como en la figura siguiente.

En la silla de columna (fig. 314) la disposicion general es enteramente análoga á la de la silla anterior; la única diferencia reside en la forma del cuerpo. La columnita que constituye su parte principal, es hueca, y su diámetro interior es igual á $0'55\, d_1$. Para los gorrones de gran diámetro, el número de pernos debe ser dos ó cuatro como en la figura 313. Para las sillas que han de estar fijas en el suelo, es muy raro que se apliquen directamente sobre las vigas: se prefiere en general reunirlas con pernos sobre piezas de madera

trasversales (soleras) y que ellas mismas estén unidas por pernos á las vigas. Estas piezas ofrecen el medio de hacer variar entre ciertos límites, la distancia del eje de los cojinetes de la silla á la superficie del suelo; y es evidente por lo demás que si no se llega á obtener así la distancia que se necesita, conviene recurrir al uso de una silla de altura diferente.

Cuando las sillas deben estar fijas en suelos al abrigo del fuego, es decir formadas de vigas de hierro, con bóvedas de ladrillos, la placa de fijacion debe presentar una forma especial. El uso de pernos de corchete (figura 315) constituye en este caso un modo de fijacion muy conveniente.

Los pernos en número de cuatro atraviesan mamelones fundidos con la placa de cabeza de la silla; y este modo de fijar evita todo debilitamiento en la viga. Las salidas laterales de la placa tienen además la ventaja de permitir la introduccion de cuñas de reglaje. En la disposicion de la figura 316 debida á *Fairbairn*, el eje de trasmision es paralelo á la viga en lugar de serle perpendicular como en el otro caso. La fijacion de la silla que se hace á la vez en la viga y en la bóveda, es á la verdad un poco más complicada y supone que el estradós de la bóveda sea accesible, pero en cambio, ofrece gran seguridad. Se practica en la viga con simples pernos de corchete y cuñas, de modo que evite la debilitacion que acarrearia el practicar agujeros.

§ 116

Sillas de rótula.

De todos los soportes de rótula de *Sellers* el más frecuentemente empleado es el soporte de suspension que representa la figura 317. La disposicion de los cojinetes con cilindros de reglaje y otros accesorios es exactamente la misma que para el soporte-repisa de la figura 309. El dibujito de la derecha demuestra claramente el modo de fijar el aceitero por medio de un pequeño eje abultado en sus estremos, que se puede retirar fácilmente de lado.

La distancia a del eje á la superficie de fijacion es aquí igual á 35 d',; pero podemos darle valor más considerable, cuando haya necesidad. Ese soporte como todos los de *Sellers*, ha sido ejecutado con una perfeccion de modelaje verdaderamente extraordinaria de que nuestra figura en pequeña escala solo puede dar imperfecta idea.

La figura 318 representa otra disposicion de silla de *Sellers* para árboles de trasmision. Aquí se supone que la introduccion del árbol en el soporte se hace de lado; por otra parte, el desgaste es tan escaso, que se considera despreciable, y el cojinete en lugar de estar en dos partes se presenta en forma de caja cerrada. El sombrero fijo por un perno de ajuste retiene el cuerpo del cojinete. La cubeta de escurridura está fundida al cuerpo del soporte; y seria ventajoso que estuviese provista de tapon de salida, como existe en gran número de soportes. En la figura tambien se halla indicado un brazo que está unido al cuerpo del soporte, destinado á recibir una horquilla-guia para correa. Para los árboles cruzados colocados bajo el suelo, *Sturtevant*, en sus instalaciones de ventiladores, usa igualmente sillas de articulacion esférica. Estas sillas difieren lijeramente de las anteriores por su modo de construccion. La figura 319 presenta un corte y perspectiva de los cojinetes. El corte deja ver la guarnicion de metal blanco, así como la disposicion de los dos depósitos de engrase, de donde el aceite es conducido por aspiracion sobre el gorron por medio de una mecha rígida. A más de esos receptáculos, los estremos de la caja de los cojinetes forman dos cubetas de escurriduras, en cuyo interior se mueven las salidas del gorron. En el caso en que se trata de un gorron frontal, ese gorron debe estar dispuesto como indica la figura 320. Aun aquí, la presion por unidad de superficie es bastante débil para que el desgaste llegue á ser insignificante.

§ 117

Disposiciones particulares de soportes de carga.

En ciertos barcos de vapor en que la hélice es amovible se usan soportes de carga que están constantemente sumerjidos en el agua. Segun *Penn*, estos soportes deben estar provistos de cojinetes de madera, cuya superioridad en este caso, ha sido reconocida. Como ejemplo, la figura 321 representa un soporte construido por *Ravenhill* y *Hodgson* y correspondiente á un valor de d igual á 489^{mm}. El cuerpo del soporte y el sombrero son de bronce; los cojinetes están constituidos por una série de porciones de cilindros de madera de caoba ó guayaco encajados en una guarnicion particular. En el cuadro que soporta la hélice, el cuerpo del soporte halla su lugar en el codaste.

En Prusia, en los ferro-carriles del Estado, se ha introducido recientemente, para las cajas de engrase, un modo de construccion normal que presenta dos disposiciones diferentes, adaptándose, una á los cojinetes de bronce, otra á las guarniciones de metal blanco. La figura 322 representa, en elevacion y en corte, la segunda disposicion, con algunas de las dimensiones más importantes.

La caja del soporte se compone de dos partes principales, el cuerpo propiamente dicho y la pieza inferior; ambas poseen un depósito de engrase, con mirada de visita y cubierta de resorte. La union entre el cuerpo principal, y la pieza inferior se halla en el plano horizontal que pasa por el eje del gorron; y tres chavetas evitan todo desplazamiento trasversal. La reunion de las dos piezas tiene lugar por medio de un estribo de hierro y de un tornillo de presion, cuya cabeza está provista de un dispositivo de seguridad, que permite una rotación de $^1/_6$ de vuelta.

La guarnicion de metal blanco está vaciada en el cuerpo de la caja, alrededor del gorron, préviamente colocado. Debe estar naturalmente provista de número suficiente de ranuras de engrase, las cuales no están indicadas en la figura. Para cerrar la caja en el nacimiento del gorron se usa un disco de madera guarnecido interiormente con un anillo de fieltro. En esta disposicion puede hacerse el engrase por arriba ó por abajo.

El dispositivo de engrase superior tiene esencialmente por objeto permitir dar al gorron gran cantidad de aceite, cuando se ha calentado; y puede por lo demás, ser igualmente utilizado en las condiciones normales, para engrasar lijeramente ese gorron, por medio de una mecha. Pero la introduccion de la materia lubrificante se verifica principalmente por el dispositivo inferior; este dispositivo está constituido por una especie de frotador armado de pelos, que descansa en un pequeño bastidor de fundicion y que está constantemente aplicado contra el gorron por la accion de dos resortes; está alimentado por gran número de mechas que se sumergen en el depósito de aceite. Este dispositivo de engrase está representado separadamente á la derecha de la figura.

Para permitir que el cojinete esté constantemente aplicado al gorron, cuando el eje de este último tiende á tomar una direccion inclinada con relacion á la de la caja de engrase se dispone cierto juego en la guia de esta última, como es fácil darse cuenta de ello por la vista en plano; los rebordes destinados á guiar la caja sobre las placas de guardia y fundidos con ellas, tienen sus caras muy paralelas en la parte inferior (hasta una altura de 36^{mm} sobre la junta); luego se inclinan lijeramente estas caras, de suerte que su separacion pasa progresivamente de 36 á 42^{mm}.

Bajo el punto de vista del objeto que nos proponemos, la disposicion es completamente satisfactoria. Falta saber si se hubiera podido llegar al mismo resultado por medios más sencillos. (1)

La segunda disposicion adoptada en Prusia para la construccion de las cajas de engrase difiere de la primera por el cuerpo de la caja y el cojinete. Este último es de bronce y está provisto sobre su dorso de un semi-gorron trasversal, el cual está alojado en un hueco correspondiente del cuerpo del soporte; y esta disposicion asegura al cojinete el grado de movilidad necesario y evita las inclinaciones que puede tomar el eje del gorron. Los rebordes de guiaje no tienen más objeto, desde luego, que presentar un juego y su separacion: en todas partes es de 36^{mm}. La pieza inferior de esta segunda caja es idéntica á la de la primera.

La figura 323 representa el tipo normal de las cajas de engrase de los caminos de hierro americanos. Deben ser consideradas como derivadas de la antigua disposicion propuesta por *Lightner* (1). Lleva consigo simplemente un engrasador por encima, pero está dispuesto de manera que el cambio de un cojinete puede hacerse sobre la via en un tiempo muy corto. La caja es de una sola pieza y de una forma extremadamente simple; y un cobertor de grandes dimensiones la hace accesible desde el esterior. Para facilitar el cambio del cojinete, este último se encuentra situado dentro de una pieza relacionada, de alojamiento prismático: esta pieza, lo mismo que en la disposicion de la figura 310 permite retirar el cojinete, cuando ha estado primeramente alzado. Sobre su cara superior está ordinariamente cintrada como indica el corte trasversal, y está protegida contra el resbalamiento por dos partes salientes en forma de nariz.

Cuando queramos retirarla, se debe empezar por obrar sobre ella con un cric de gancho. El cambio de un cojinete se efectua en algunos minutos.

No existe frotador para el engrase; la parte inferior de la caja lleva simplemente algodon destinado á suministrar el aceite al gorron. Esta disposicion de cajas de engrase ha sufrido la prueba del tiempo y ha dado resultados muy satisfactorios (2).

---

(1) Las cajas de grasa de los vagones de los ferro-carriles ofrecen un ejemplo de lo importante que es bajo el punto de vista económico, la sencillez de disposicion y de construccion de un elemento de máquina. Segun los datos de la pág. 127, Prusia en 1877 poseia ya más de 315000 ejes de ruedas y por consiguiente más de 630000 cajas de engrase. La trasformacion de todas estas cajas en cajas del tipo normal exigirá un capital considerable, para el cual, el simple céntimo, en los gastos de establecimiento tiene ya un papel importantísimo.

(1) V. *Heusinger. Schmiervorrichtungen.* Wiesbaden 1864, p. 88.

(2) Esta disposicion de cajas de engrase ha sido introducida en los Estados-Unidos en 1878. El número de ejes en servicio con sus cajas, pasan hoy dia de 1200000.

B. SOPORTES DE APOYO.

§ 118

Crapodina de chapin horizontal.

La fig. 324 representa una crapodina ordinaria de chapin horizontal. En el esterior la placa de fondo es lijeramente cónica y presenta así cierta movilidad que le permite aplicarla exactamente á la base del gorron ó espigon. A fin de hacer posible el desplazamiento del soporte sobre la placa que lo sostiene, tiene esta última sus agujeros de pernos alargados en sentido trasversal, mientras que por el contrario, los del chapin lo están en sentido perpendicular.

§ 119

Crapodina con placa de fijacion vertical.

La crapodina que representa la fig. 325 y que se deriva de la anterior, se fija lateralmente. La placa de fijacion debe descansar siempre en la parte inferior sobre una cuña, de una altura igual á 0'8 d_1, á fin de permitir retirar fácilmente la crapodina, sin tener que desplazar el gorron. La cavidad circular practicada en medio de la placa de fondo puede muy bien utilizarse como depósito de aceite. El tornillo de ajuste que actua sobre esta placa, permite corregir fácilmente el desgaste que se produce en la base del espigon.

§ 120

Crapodina de cabeza móvil.

En cierto número de instalaciones el soporte de apoyo de un árbol vertical se halla reemplazado por una doble disposicion que lleva una verdadera guia-soporte y una crapodina propiamente dicha; y ambas se hallan fijas en la misma placa de fundacion. Como guia-soporte se puede emplear, ya sea un soporte ordinario de chapin, ya un soporte ahorquillado, con tal de disponer convenientemente en cada caso, el plano de union de los cojinetes.

La otra parte del soporte, que en realidad es una crapodina reducida á su cabeza y que está establecida muy cerca de la primera, está dispuesta de modo que pueda inspeccionarse fácilmente y desplazarse en la direccion en que se produce el desgaste. La fig. 326 presenta un ejemplo de esta clase de soportes que, por lo demás, puede tener gran variedad de formas.

La cabeza de esta crapodina es de bronce. Descansa por intermedio de una placa de acero sobre una punta de forma cónica que lleva el tornillo de ajuste; la cavidad, de forma prismática, que termina la cabeza, encaja con suave movimiento la cabeza de este tornillo é impide así todo movimiento de rotacion alrededor de un eje vertical. Un dispositivo de seguridad, análogo al de *Penn*, evita por lo demás, todo desplazamiento accidental del tornillo, uniéndolo á su soporte que está fijo por dos pernos ó la placa de fundacion. El módulo de los números proporcionales, inscritos en la figura, es aquí el mismo que anteriormente. Más adelante, en el § 126 se encontrará una aplicacion de esta clase de soporte.

§ 121

Soportes de apoyo con cabeza de madera.

El uso de madera de guayaco que, desde muy antiguo se ha reconocido ventajosa para los soportes bañados constantemente por el agua, ha dado igualmente los mejores resultados con los gorrones de apoyo en las hélices de los buques. En ese caso se utiliza dicha madera en forma de clavijas.

La fig. 327 representa la crapodina del gorron posterior de una hélice amovible. Las clavijas están fijas en una placa de bronce, y la base del gorron lleva una guarnicion del mismo metal.

EJEMPLO. *En el «Oronte» la placa de presion lleva* 37 *clavijas de* 44^{mm} *de diámetro. En los cañoneros ingleses de* 50 *caballos, que se han construido como el «Oronte» por James Watt y Compañia, las placas de presion solo tienen* 7 *clavijas de* 51^{mm}.

Existen tambien numerosos ejemplos de soportes de cuellos provistos de una guarnicion de madera, y como los anteriores, suponen una contínua inmersion en el agua. *Penn*, al cual se debe la introduccion de la madera en los soportes de hélice, ha tenido igualmente la idea de emplearla en el interior del buque y en particular para el cuello que está colocado en el árbol de trasmision y que recibe el empuje de la hélice. Por lo regular este cuello está colocado fuera del casco, entre el cubo de la hélice y el tubo del codaste estando dispuesto como indica la fig. 328. *A* es el árbol cuya cubierta de bronce está en contacto con la guarnicion de madera del tubo del codaste; *B* el cubo de la hélice;

C el cuello de presion con sus clavijas de madera; *D* la duela fijada en el estremo del tubo del codaste *E* y que está provisto de un reborde reforzado con nervaduras, para recibir el empuje que le trasmite el cubo de la hélice, por intermedio del cuello *D*. Las piezas *B*, *C*, *D* y *E* son de bronce.

La fig. 329 representa una disposicion de cuello de presion que se usa en los buques de vapor de la marina alemana: Kaiser, Friederich Karl, Preussen, Vineta, Freya, Ariadne, Nautilus y Cyklop. El anillo está formado por dos partes, con el objeto de hacer más fácil su colocacion y separacion. Las dos salidas contenidas en un plano que pasa por el eje se encajan en cavidades practicadas en el reborde de la duela del tubo del codaste y así se evita todo movimiento de rotacion del anillo. Las dimensiones de las superficies de las guarniciones para los buques anteriormente indicados son las siguientes (en números redondos):

	KAISER.	FRIEDR. KARL.	PREUSSEN.	VINETA.	FREYA.	ARIADNE.	NAUTILUS.	CYKLOP.
D'	710	630	680	419	490	490	262	216
b'	165	40	180	82	108	108	65	41
Superficie. (met. cuad).	0'378900	0'068800	0'244860	0'110450	0'171000	0'169400	0'044200	0'022130

En la cañonera «Wespe» el cuello de empuje posee 6 sectores de una superficie de $0'296000^{mm}$; en la corbeta «Leipzig» existen 80 sectores más pequeños, con una superficie total de $0'225^{mc}$. No se ha notado hasta ahora ningun inconveniente en el empleo de cuellos de presion en los buques de la marina alemana; y el desgaste de las clavijas de madera de guayaco es tan escaso, que es sumamente raro que haya necesidad de reemplazarlas.

§ 122

Soportes acanalados.

Lo mismo que los gorrones descritos en el § 100 los soportes acanalados ofrecen importancia suma para los árboles sometidos á grandes esfuerzos longitudinales. Se aplican especialmente á los barcos de hélice y á las grandes turbinas, y de algunos años á esta parte se ha comenzado á utilizarlos en las fábricas de azúcar para los centrífugos, cuyas dimensiones en los tambores, y por consiguiente en las cargas, se han aumentado en considerable proporcion. Hay una gran variedad de tipos de soportes acanalados, sobre los cuales no se ha llegado á dispositivos ni formas completamente determinadas, y todo cuanto puede decirse sobre el particular es que una buena ejecucion y sobre todo una fijacion conveniente de la presion por unidad de superficie sobre los cojinetes, son las condiciones más esenciales.

Para los gorrones acanalados pueden utilizarse como soportes los diversos que ántes hemos descrito, si bien que en tal caso, los cojinetes de bronce que están acanalados en el interior, deben presentar al esterior rebordes más resistentes (1) (fig. 330).

En los cojinetes de grandes dimensiones la superficie esterior lleva además cierto número de salientes en forma de anillos, que se ajustan á cavidades correspondientes del cuerpo de soporte y del sombrero, aliviando así los rebordes propiamente dichos de los cojinetes.

EJEMPLO. *Soporte acanalado en el vapor «City of Richmond» construido por Todd y Mac-Gregor, de Glascow, sobre los planos de Jaffrey* (1), *con* 12 *anillos cuyos diámetros interiores y esteriores son respectivamente* 452^{mm} *y* 584^{mm}. *La longitud total de los cojinetes que en ambos estremos encajan los dos anillos estremos del gorron, es de* 1111^{mm}.—*La superficie esterior de esos cojinetes lleva además tres anillos de descarga, de* 12^{mm} *de saliente y* 100^{mm} *de anchura. La potencia de las máquinas es de* 3340 *caballos indicados. La celeridad del barco es de* $6'82^{m}$ *por segundo.*

En los soportes acanalados de *James Watt* y *Compañia* los rebordes de los cojinetes quedan libres y están atravesados por tornillos de presion que toman su punto de apoyo en el cuerpo del soporte y el sombrero (figura 331). En la «Meduse» y el «Triton» cada uno de los rebordes de los cojinetes lleva cuatro tornillos de ese género: el diámetro del árbol es de 178^{mm} y el número de anillos de 6. En el «Jason» la misma disposicion tiene 6 tornillos: el diámetro del árbol es de 305^{mm} y el número de los anillos se eleva á 8 (2).

Ciertos constructores usan cojinetes de hierro colado con guarnicion de metal blanco, como lo hacen, por ejemplo, *Day* y *Compañia* en el «Mooltan», en el que el diámetro del árbol es de 336^{mm} y en que el gorron lleva 12 anillos. La figura 332 representa un soporte

(1) Véase, *Armengaud*, Vignola de los mecánicos, lám. 13, fig. 32.

(1) *Engineering*, 1875, Mayo. pág. 403.

(2) V. *Burgh*, a. a. O.

de construccion francesa en el que tambien se ha utilizado una guarnicion de metal blanco; y merced á las dos partes torneadas por las que descansa en una armazon de forma especial, ese soporte puede considerarse como articulado.

La fig. 333 representa una disposicion de soporte acanalado debida á *Ravenhill* y *Hodgson*. Los cojinetes están descompuestos en una serie de anillos de bronce, cada uno de los cuales está ajustado separadamente en el cuerpo y sombrero del soporte. Conviene aquí señalar las disposiciones adoptadas para descargar ó aliviar los pernos; la primera se refiere á los pernos que reunen el cuerpo del soporte y la placa de undacion; y la segunda á los cuatro pernos del sombrero.

En el alzado, en que se hallan indicados esos dispositivos, se ve á la izquierda el puesto de un clavete que debe empujarse todo cuanto se pueda para asegurar el cierre, y merced á esa disposicion, es posible desplazar el soporte en una direccion opuesta á la de la presion cuando se ha efectuado cierto desgaste en los anillos de los cojinetes, y al efecto los agujeros dispuestos en el chapin para el paso de los pernos de fijacion están lijeramente ovalados, como lo demuestra la proyeccion horizontal de la derecha. En el corte trasversal que está directamente encima, se hallan indicadas las guarniciones que constituyen los cojinetes; y estas piezas que son de bronce, encajan exactamente con el perfil de los canales del soporte. Deben estar siempre untadas de una materia grasa, de modo que se evite todo depósito de herrumbre en las superficies esteriores de los anillos, en el caso en que por efecto de calentarse, pudiere haber necesidad de rociar con agua el soporte.

Las figs. 334 y 335 representan un dispositivo de soporte acanalado de *Penn*, que fué aplicado al buque «El Kaiser.» Aquí los cojinetes se componen de anillos aun más sencillos que los anteriores. Esos anillos hechos de dos piezas para comodidad de colocarlos en su sitio, son de bronce. El diámetro d del árbol es de 470^{mm}; el número de anillos es de 8 en el gorron, como en el soporte. Conviene señalar aquí tambien el modo de descargar los seis pernos que juntan á la vez el cuerpo del soporte con la placa de fundacion y el sombrero con el cuerpo. Un dispositivo análogo al de la figura anterior, permite desplazar el soporte en caso de desgaste. Los números proporcionales indicados para este soporte y el anterior están con relacion á la unidad $d_1 = 10 + 1'15\ d$.

Entre los soportes acanalados cuyo empleo está más generalizado hay el de *Maudslay*, del que dan un ejemplo las figs. 336 á 338, que representan el del barco «La Elisabeth.»

A cada anillo del soporte corresponde un cojinete especial, dotado de un doble dispositivo de desplace y de engrase. Los diversos cojinetes afectan la forma de una herradura; son de hierro colado, con guarnicion de metal blanco en las partes sometidas á la presion. Los anillos del gorron se sumergen por abajo en una cubeta que contiene aceite. Por lo cual se ve que este soporte como las cajas de engrasar los ejes de los vagones de que antes hemos tratado, tiene un doble sistema de engrase, por arriba y por abajo. Cada cojinete está armado de pernos destinados ante todo á fijarle exactamente en la posicion que debe ocupar, y que pueden servir para desplazarlo ó trasladarlo cuando ha habido cierto grado de desgaste. Los números proporcionales inscritos en las figuras se refieren al módulo $d_1 = 10 + 1'15\ d$ (1). Las formas y dimensiones se han determinado con sumo cuidado y dan al conjunto un aspecto muy satisfactorio. El diámetro d, en el ejemplo escogido, es de 318^{mm}.

§ 123

Ejemplos de soportes acanalados.

El cuadro siguiente contiene una série de datos importantes sobre los soportes acanalados que se usan en 12 buques de la marina de guerra alemana. Los datos relativos á la potencia y velocidad de rotacion de las máquinas, así como la velocidad de los buques, tienen bastante valor; todos representan el promedio de los resultados observados en los ensayos oficiales de recepcion. De estas cifras se pueden, como ya se ha hecho más arriba (§ 100), deducir consecuencias sobre el máximum de presion que esperimenta el soporte de estribo.

Sin embargo, conviene observar que en el caso en que exista un anillo de presion sobre el codaste, el empuje de la hélice se reparte á la vez sobre este anillo y sobre el soporte acanalado. En toda la série dos buques solamente no poseen esta clase de anillos. A causa de la elasticidad del casco puede además suceder que en cierto momento el soporte tenga que sostener la presion entera, mientras que en otros momentos se halle descargado en gran parte. En todo caso, las cifras reunidas en el cuadro pueden dar gran número de datos de utilidad práctica incontestable.

(1) Esas proporciones están calculadas sobre las dimensiones tomadas del soporte del barco «La Elisabeth».—Como todos tienen valores muy sencillos, podria talvez deducirse que el módulo indicado en el texto se ha tomado realmente como punto de partida en el trazado del soporte.

Números.	NOMBRE de los BARCOS.	CONSTRUCTORES de las MÁQUINAS.	Potencia indicada de las máquinas en caballos.	Velocidad del barco en metros por segundo.	Diámetro del árbol de la hélice en milímetros.	Número de vueltas por minuto del árbol de la hélice.	Número de superficies de presion en el soporte de estribo para ir adelante el barco.	Superficie de presion del soporte para ir adelante el barco en met. cuad.	Naturaleza de las superficies de presion en el soporte.	Diámetro esterior de los anillos del árbol. Para las superficies aplicadas. *milímetros.*	Diámetro interior de los cojinetes del soporte. Para las superficies aplicadas. *milímetros.*	Medios de engrase.	OBSERVACIONES segun el estado del soporte de estribo.	OTRAS observaciones.
1	Fragata acorazada König Wilhelm.	Maudslay Sons et Field en Londres.	8325	7'579	457 en los soportes de estribo.	63'86	6	0'32427	Aleacion de antim.	613	457	Aceite. Los anillos de presion enfriados con agua.	Buena marcha.	Sin anillos de presion en el codaste.
2	Fragata acorazada Kaiser.	John Penn et Sons en Grennwich.	7803'3	7'405	458 id.	77'00	8	0'66000	Bronce.	572	472	id.	Al principio se calentaba de vez en cuando si el anillo de presion estaba mal aplicado. — Buena marcha.	Un anillo de presion en el codaste. (V. § 121.)
3	Fragata acorazada Friedrich Karl.	Sociedad de Forjas y Canteras del Mediterráneo en Marsella.	3503	6'749	380 id.	61'82	11 anillos de 480 milim. y 1 de 520 milim. (diám. exter.)	0'74360	Metal blanco.	480	393	id.	Al principio sin anillos de presion se calentaba á veces. Colocado un anillo buena marcha.	id.
4	Fragata acorazada Preussen.	Sociedad de construccion de máquinas Vulkan de Stettin, en Bredow.	4386'7	7'155	425 id.	64'50	8	0'49900	Bronce.	510	425	id.	Buena marcha.	id.
5	Corbeta cubierta Leipzig.	id.	3519'3	7'305	405 id.	72'40	8	0'44736	Bronce.	485	405	id.	id.	id.
6	Corbeta cubierta Vineta.	John Penn et Sons en Greenwich.	1359'3	5'692	267	67'90	6	0'13834	Bronce.	314'3	263	id.	id.	id.
7	Corbeta cubierta Freya.	Sociedad de construccion de máquinas y talleres de la Marca de Silesia.	2598'79	7'915	310	82'52	8	0'29566	Bronce.	380	312	id.	id.	id.
8	Corbeta descubierta Ariadne.	id.	1726'93	6'515	294	80'24	7	0'31500	Bronce.	379	294	id.	Al principio se calentaba á veces; despues buena marcha.	id.
9	Corbeta descubierta Augusta.	Mazeline et Cie. en el Havre.	1127	6'330	279	62'09	11	0'48100	Aleacion de antim.	370	285	Id.	Buena marcha.	Sin anillos de presion en el codaste.
10	Cañonero Nautilus.	Moller et Hollberg en Grabow s/O.	504'2	6'320	183	109'30	6	0'10770	Aleacion de antim.	248	196	id.	id.	Un anillo de presion en el codaste. (V. § 121.)
11	Cañonero Cyklop.	Sociedad de construccion de máquinas Vulkan de Stettin, en Bredow, cerca de Stettin.	245'41	4'540	137	143'89	4	0'04607	Madera de guayaco.	183	137	id.	id.	id.
12	Cañonero acorazado Wespe.	Sociedad del Weser en Brèma.	799'77	5'355	172	138'85	1 anillo de 276 milim. y 8 de 238 milim. (diám. exter.)	0'16056	Bronce.	238	190	id.	id.	id.

CAPÍTULO SÉPTIMO

SOSTENES Ó ARMAZONES DE SOPORTES

§ 124

Generalidades sobre los armazones de soportes.

Los zócalos, apoyos ó macizos de soportes están destinados á asegurar á uno ó varios soportes una posicion perfectamente determinada con relacion á ciertas partes de construcciones ó con relacion á cimientos de máquinas. Solo nos ocuparemos aquí de los apoyos de fundicion, siendo por otra parte esta materia casi la única que se emplea para piezas de esta clase. Se designa con el nombre de apoyos simples los que están destinados á llevar un soporte único, mientras que los que deben recibir varios soportes constituyen los apoyos compuestos. Para el trazado de estos dos géneros de apoyos conviene en general observar más ó ménos exactamente las condiciones siguientes, que son debidas principalmente á que en la proximidad inmediata de los apoyos, los árboles de trasmision llevan muy amenudo ruedas de engranaje (ó bien manguitos de acoplamiento y de poleas):

1.° La distancia entre las ruedas dentadas y los apoyos no debe ser muy grande.

2.° En ningun caso la direccion de la presion trasmitida por el gorron debe caer en el plano de junta de los cojinetes.

3.° Todo apoyo debe estar dispuesto de manera que estorbe lo ménos posible el quite y pon de los árboles con sus ruedas dentadas.

4.° El número de las superficies levantadas debe ser tan escaso como sea posible y deben estar dispuestas en general de manera que se puedan quitar todas colocando el apoyo una sola vez sobre la máquina de pulir ó acepillar.

5.° En lo posible y sobre todo cuando se trata de árboles muy pesados y de difícil acceso, deben estar dispuestos los soportes de manera que se puedan quitar los cojinetes sin que haya necesidad de desplazar los árboles.

§ 125

Apoyo simple.

La fig. 339 representa un apoyo horizontal dispuesto como el del § 107, es decir, cuya suela no presente sa-

lidas en el mismo cuerpo del soporte: lo que permite reducir la anchura del soporte en la parte superior. Las dos piezas inclinadas que constituyen la parte principal de este apoyo, están reunidas por una pieza trasversal *DE* que tiene por objeto aumentar su resistencia á la rotura por compresion. La posicion más conveniente para dar á los puntos de encuentro *D* y *E* de esta traviesa con las otras dos piezas se determina por el procedimiento siguiente. Sobre la línea *AB* que representa la altura de estas piezas, se describe un semi-círculo *AGB* cuyo centro está en *F*, se toma el medio *G* de este arco y se traza *BG* que se prolonga una cantidad *GH=AF*; si se une el punto *H* al punto *A* y se traza *GC* paralela á *HA*, la línea *AC* representa la altura de los puntos *D* y *E* encima de la base de sustentacion del apoyo. Las dimensiones de las diferentes partes de este apoyo dependen del valor de la presion trasmitida por el gorron al soporte y pueden determinarse á ojo por las dimensiones del soporte mismo. Si se quiere que en el apoyo actual se satisfaga la condicion 5.ª, basta intercalar, entre el soporte y el apoyo, una placa con ranuras, que se pueda retirar lateralmente; y se da á esta placa un espesor igual á $0'3\ d_1$.

La fig. 340 da una forma de soporte más sencilla que la anterior. Esta forma es sobre todo conveniente para las instalaciones que, en razon á sus dimensiones relativamente considerables, reclaman cierto carácter de fuerza y severidad.

La fig. 341 representa un apoyo de soporte encajado en un muro. Este apoyo guarnece enteramente una abertura practicada en el muro para el paso del árbol que debe sostener el soporte; y como forma pertenece al género de ventana que se designa en arquitectura con el nombre de ojo de buey. El gorron descansa sobre un soporte, cuya placa de fijacion, que es vertical, se apoya en la parte inferior, en una cuña de cierta altura que basta apartar para llegar á quitar el soporte, sin desplazar la trasmision. En la parte inferior se halla figurada en punteado, una placa horizontal, tangente al cilindro que atraviesa el muro. Los números proporcionales inscritos en la figura, se refieren al módulo d_1 del soporte.

La figura 342 representa un apoyo de soporte que se fija en una pared vertical. La suela del soporte es horizontal y la placa correspondiente del apoyo está provista de ranuras para el paso de los pernos de fijacion, de suerte que se pueda hacer variar, en cierta medida, la distancia del eje del soporte al muro. El mismo modelo de apoyo puede utilizarse para soportes de diversos tamaños.

La figura 343 representa un apoyo, más lijero y más sencillo que el anterior: este apoyo solo puede emplearse para los soportes de árboles de trasmision de poca importancia.

Para la fijacion de armazones de soportes contra muros ó sobre macizos de fundacion, se recurre amenudo al uso del cimento. Para esto se empieza por colocar el apoyo, tan exactamente como sea posible, en la posicion que debe tener definitivamente y se le acuña con el mayor cuidado; hecho esto, se guarnece con arcilla el vacio que existe entre la superficie de la mamposteria y la placa de fijacion, y luego se llena este vacio por dentro con cimento muy fluido: al cabo de uno ó dos dias, este cimento presenta una dureza suficiente para permitir quitar las cuñas y apretar completamente los pernos.

§ 126

Armazones de soportes compuestos.

Figura 344. Armazon de soportes sobre vigas. El árbol vertical *AB*, que está movido en la parte inferior por el motor, una turbina, por ejemplo, debe trasmitir su movimiento á un árbol horizontal *CD*. La direccion de la presion del gorron en *E*, es perpendicular al plano de los dos árboles, mientras que en *F* está inclinada sobre este plano, en atencion á que, para este gorron, la presion es la resultante de la presion de los dientes de las ruedas y del peso del árbol horizontal con su rueda. Esas direcciones de los esfuerzos conducen á tomar, en *E*, un soporte ahorquillado (§ 113) y en *F*, un soporte frontal (§ 114) cuya placa descansa en una cuña, interpuesta entre ella y la salida del armazon.

Figura 345. Armazon de soportes sobre macizo horizontal. Un árbol horizontal *AB*, que está soportado en *C* por un soporte de estremo, pone en movimiento por intermedio de dos ruedas cónicas, un árbol vertical *D*, sostenido por una crapodina de fijacion lateral (§ 119). Esta crapodina puede retirarse muy fácilmente por la parte inferior, empujando la chaveta horizontal que se halla indicada en la figura. El soporte encorvado sobre el cual se apoya la crapodina, está fijado con pernos en el armazon inferior, que presenta la forma de caja. Estos pernos son de ancla, cuyas tuercas se hallan en el interior de la caja.

La fig. 346 da otra solucion del mismo problema. En este caso el árbol *AC* que lleva la gran rueda dentada, se termina por un gorron, que descansa en un soporte establecido detrás de la armazon; esta disposicion permite emplear en *C* un soporte menor que en

el caso anterior; pero en cambio la rueda no es tan fácilmente abordable como en la primera solucion en que se hallaba en falso. En cuanto al árbol vertical *DEF* está establecido segun los principios indicados en el párrafo 120, es decir, está sostenido en *E* por un soporte ahorquillado, fundido con la parte superior de la armazon, mientras que descansa, en la parte inferior, sobre una crapodina de cabeza móvil, análoga á la de la figura 326. La parte anterior del entablemento de la armazon presenta la forma de una corona circular, sobre la cual puede fijarse un cubre-ruedas, de palastro (figurado en punteado) destinado á proteger á los obreros contra los peligros del engranaje. Cuatro pernos de ancla sirven para fijar la placa inferior de la armazon sobre un macizo de silleria ó un zócalo de ladrillos con mortero de cimento. Los dos pernos de detrás atraviesan las dos columnitas y sirven por consiguiente al mismo tiempo para unir las dos partes de la armazon. La figura indica suficientemente el modo de ensamble de estas columnas con el entablemento, y en el otro estremo, penetran cierta cantidad en la placa de fundacion que con este objeto está dispuesta como demuestra la fig. 347: á fin de prevenir todo desplazamiento en sentido horizontal, el vacio que existe entre las caras de la cavidad de la placa y las de las columnas está lleno de almáciga de fundicion. Una salida rectangular de la misma altura que los plintos de las columnas está destinada á recibir la crapodina de cabeza móvil.

Figura 348. Armazon horizontal para dos árboles verticales *A* y *B* que se gobiernan por el intermedio de ruedas derechas. El árbol *A* puede considerarse que recibe directamente la accion de una turbina, mientras que el árbol *B* pertenece á la trasmision principal. El gorron *A* está sostenido por un soporte, cuya disposicion es análoga á la de la figura 312; el árbol *B* está sostenido por una crapodina cuyo chapin descansa en una placa intermedia, de modo que apuntalando la rueda, se pueda quitar esta crapodina sin dificultad y revisar sus diferentes partes.

Figura 349. Armazon fijado contra un muro, por un árbol vertical *AB* que debe trasmitir una parte del trabajo que recibe, á un árbol horizontal *DE*, cuyo eje es normal á la superficie del muro. En *C* se halla instalado un soporte ahorquillado y en *E* un soporte de estremo. La rueda cónica horizontal está rodeada por el cuadro de la armazon que, en corte, presenta la forma de semi-círculo; y este cuadro cubre igualmente en parte el segundo engranaje, de suerte que el soporte de que se trata se utiliza al mismo tiempo como cubre-ruedas.

En ese dispositivo no se puede quitar tan comodamente el árbol como en otras disposiciones de armazones; con todo, no presenta dificultades sérias. En algunos casos se llega á cerrar enteramente la armazon en la parte inferior y á rodear el árbol vertical con un envoltorio que presenta la forma de una semi-columna y que lo pone al abrigo de todo peligro.

Cuando un árbol horizontal *AB* fig. 350 paralelo á un muro, debe trasmitir una parte del trabajo que recibe á otro árbol *DE*, normal al mismo muro, se puede emplear la disposicion siguiente para la armazon destinada á llevarlo. El soporte del primer árbol en *C*, es de suela horizontal, mientras que el del segundo en *F* es de fijacion vertical. La distancia del eje del soporte *C* al muro puede variar, en cierta medida, como ya hemos indicado para un caso análogo (véase figura 342). Cuando las dos ruedas de engranaje son del mismo diámetro, conviene recurrir para el soporte, á la disposicion indicada en plano por la fig. 351. En este caso el árbol *AB* está soportado, en *C*, por un soporte de placa de fijacion vertical. Cuando la trasmision del movimiento se efectua en el estremo del árbol, en un ángulo de la armazon, la disposicion que hay que adoptar es la de la fig. 352; los soportes, en *G* y *H* son entonces ambos del mismo tamaño.

Las figuras 353 y 354 representan las dos armazones precedentes en perspectiva aérea.

Sucede amenudo que en una fábrica hay que gobernar diferentes árboles trasversales por una trasmision horizontal, establecida en medio de la armazon, á una corta distancia debajo del suelo. La fig. 355 representa un tipo de armazon que se puede utilizar en los casos de este género. Gracias á la columna de que forma parte esta armazon se puede igualar fácilmente con el estilo de la construccion de un gran taller. La disposicion de los diferentes soportes es muy sencilla; el de *A* en el soporte del § 114, los de *E* y *F* proceden del tipo del § 112, y por último la crapodina en *C* es análoga á la del § 119.

Figura 356. Armazon para cuatro soportes fijos en una pared. Un árbol horizontal *AB* mueve por mediacion de ruedas cónicas el árbol vertical *CD* y los dos árboles horizontales *E* y *F*. Los distintos soportes son análogos á los anteriores y corresponden respectivamente el de *B* al § 114, el de *C* (crapodina) al § 119 y los de *E* y *F* al § 112. Las distancias ó alcances ordenados con la fijacion de diferentes soportes, se hallan en un solo y mismo plano, lo cual supone que se han determinado debidamente los diámetros de los gorrones de modo que exista en los diversos puntos juego suficiente. Así, no obstante el número relativamente

crecido de los soportes de silla, esa forma de armazon que llena todas las condiciones del § 124, da una solucion tan sencilla como pudiera desearse.

En el estudio de una armazon de soportes de silla conviene por regla general notar que una construccion de este género no es otra cosa más en definitiva que un ensamblaje de cuerpos de rotacion (comunmente hueco), de tal modo que en el anteproyecto propiamente dicho, puede prescindirse enteramente de las piezas de detalle, como cojinetes, sombreros, pernos, etcétera.—Por lo tanto es ventajoso y útil trazar ante todo el bosquejo más sencillo de la construccion y estudiar luego por separado los medios de realizar los diversos resultados que se tienen á la mira, como, por ejemplo, el modo de fijacion de la armazon, los dispositivos del desplace de ciertos órganos, el ensamble de las piezas, la eleccion de materiales, etc. La fig. 357, que es análoga á una biela, puede considerarse como la figura esquemática de la armazon de soportes de silla (fig. 348) que hemos descrito. Fácil es ver que esa armazon está en efecto compuesta de dos silletas con una pieza intermedia de union. Pero esa pieza puede recibir, al ejecutarse, formas muy diversas, lo mismo que en su manera de fijarse. La armazon de soportes en vigas de la fig. 344 está representada esquemáticamente por la fig. 358. Las armazones de las figuras 345 y 346 pueden representarse por esa misma figura, si bien pueden igualmente representarse por la fig. 359, si se observa que bajo el punto de vista esquemático un soporte puede reemplazarse con un gorron y viceversa. La armazon de cuatro soportes de que hemos hablado en último término, corresponde en el mismo órden de ideas á la figura 360.

El bosquejo siguiente (fig. 361) de la armazon de un ventilador *Lemielle* (1) demuestra que la ejecucion puede aproximarse mucho á la abstraccion y hasta confundirse con ella. Aquí nos encontramos con nueve soportes de silleta que se han de reunir unos á otros. Tres de ellos corresponden al tambor que está ligado de una manera invariable con el manubrio ó manivela destinada á trasmitir el movimiento. Son los dos soportes de cuello A y B y el soporte de apoyo C. Los otros seis soportes D, E, F, G, H, I corresponden á las bielas de los alabes. El conjunto de la armazon se halla constituido en definitiva por la viga A_1A_1, la mamposteria y la pieza $BIDC$ que afecta la forma de un eje anguloso.

Los soportes de ejes de los vagones de ferro-carril pueden ser considerados igualmente como pertenecientes á la categoria de las armazones de soportes. La única diferencia consiste en que, en esos apoyos, el soporte puede tomar un movimiento de desliz en direccion normal al eje del cubo, movimiento que, por otra parte, está regulado por resortes. Esos soportes tienen en el fondo gran analogia con los soportes articulados de que se ha hablado anteriormente.

(1) V. *La Cinemática*, del mismo autor, pág. 168.

§ 127

Cálculo de las columnas metálicas.

El constructor de máquinas tiene frecuentemente que tratar las cuestiones de cálculo y de ejecucion de columnas metálicas, aun cuando no deban emplearse más que en la construccion de las armazones propiamente dichas, ó no tengan con las máquinas más que relaciones muy lejanas; pero con frecuencia las columnas entran en la composicion de las armazones de máquinas ó se utilizan directamente como apoyos de soportes. Por estos diversos motivos el estudio de su construccion halla aquí su lugar natural.

Las columnas metálicas se calculan ordinariamente como piezas cargadas en pié, y solo en algunos casos limitados pueden considerarse como sometidas únicamente á esfuerzos de compresion. El primer modo de cálculo lleva consigo gran indeterminacion, á causa de la incertidumbre sobre el modo de fijacion de los estremos de la pieza. En las tres disposiciones representadas aquí, correspondientes á los casos números II, III y IV del § 16, la primera supone la columna articulada en sus dos estremos, la segunda un estremo solamente articulado y la tercera los dos estremos empotrados. Las cargas capaces de determinar la ruptura, son respectivamente, para estas diferentes hipótesis:

a.	b.	c.
$\pi^2\frac{EI}{l^2}$	$2\pi^2\frac{EI}{l^2}$	$4\pi^2\frac{EI}{l^2}$

espresiones en las cuales l designa la altura de la pieza, supuesta prismática, I el momento de inercia de su seccion trasversal y E el coeficiente de elasticidad de la materia de que está formada. Como hemos observado en el § 16 los esperimentos han demostrado que una columna vertical, terminada por bases de apoyo simplemente levantadas, obra casi lo mismo que la pieza c, es decir, como si estuviese encajada á la altura de esas bases. Admitiendo una carga más débil que la que corresponde al caso a, se obtiene por consiguiente, una seguridad suficiente en todos los casos, aun en aquel en que los dos estremos debiesen considerarse

como simplemente articulados en cierta medida. En numerosos esperimentos sobre columnas de fundicion, sometidas á la carga $\pi^2 EI : l^2$, el arquitecto Drewitz no ha podido nunca observar la menor deformacion. *Erbkam's Bauzeitung*, pág. 534. Podemos admitir, por consiguiente, para valor del esfuerzo P que se puede ejercer en una columna en la direccion de su eje

$$P = 0{'}4\,\pi^2 \frac{EI}{l^2} = 3{'}94\,\frac{EI}{l^2} \qquad (109)$$

En el caso en que la seccion es un círculo lleno, de diámetro d, esta espresion da con la fundicion para la cual $E=10000$:

$$P = 1937\,\frac{d^4}{l^2} \text{ ó } 1900\,\frac{d^4}{l^2},\quad d = 0{'}15\,\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P} \qquad (110)$$

Para el hierro forjado, $E=20000$; y entonces se tiene:

$$P = 3800\,\frac{d^4}{l^2},\quad d = 0{'}13\,\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P} \qquad (111)$$

1.er Ejemplo. *Para una carga* $P=15000$ *una columna maciza de fundicion, de altura* $l=4^m$, *debe tener, como diámetro,* $d = 0{'}15\,\sqrt{4000}\,\sqrt[4]{15000}$ *ó sea* 105^{mm}. *Con el hierro forjado, se tendria* $d=91^{mm}$.

El valor de d es tanto menor cuanto más lo sea la longitud l de la columna; con todo, la seccion debe siempre conservar un valor bastante grande para que la compresion producida sea inferior al límite correspondiente á este género de resistencia. Para que la presion en esta seccion no pase de 6^k, límite que se puede admitir para el hierro y fundicion, es preciso que el valor de d en ambos casos, no sea inferior al límite:

lo que da para límite de la carga: $\left.\begin{array}{r} d = 0{'}46\sqrt{P} \\ P = 4{'}71\ d^2 \end{array}\right\}$ (112) (1)

Las fórmulas (110) y (112) han servido para calcular la tabla siguiente, que se refiere á las columnas de fundicion de seccion circular llena. La primera línea vertical contiene los diámetros y la primera línea horizontal las alturas; los números de la tabla son los valores correspondientes de las cargas, espresadas en kilógramos.

(1) Bajo el punto de vista de la carga, esta fórmula corresponde á la misma seguridad que la que presentan las fórmulas (110) y (111) para los casos *a*. En estas últimas, en efecto, se introduce el coeficiente 0'4 y en la fórmula (112) se ha tomado para la presion 6 kilógramos, es decir, 0'4 de la presion correspondiente á la carga límite, que es de 15 kilógramos.

TABLA PARA EL CÁLCULO DE LAS COLUMNAS EN PLENA FUNDICION

d	l=2000	3000	4000	5000	6000	7000
30	392	174	98	62	43	32
35	526	322	182	116	81	59
40	1240	530	310	198	138	102
45	1986	883	496	318	220	162
50	3027	1350	760	487	338	248
60	6278	2802	1576	1009	701	514
70	11674	5170	2906	1861	1294	942
80	19850	8791	4960	3174	2209	1618
90	31782	14125	7944	5022	3531	2607
100	*74120	21488	12110	7750	5403	3962
120	*87853	44642	25111	16071	11161	8222
140	*92355	81100	46521	29774	20718	15190
160	*120627	*120627	79364	50793	35328	25955
180	*152669	*152669	127176	81361	49215	41536
200	*188480	*188480	*188480	124006	86235	63180

Los números que en las columnas 2, 3 y 4 están señalados con un asterisco, se han calculado por medio de la fórmula (112). Las cargas que indican y que son las que se debe admitir, son muy inferiores á las que daria la otra fórmula. Así, por ejemplo, segun la fórmula (110), para $d=180$ y $l=2000$, se tendria $P = 1900 \cdot 180^4 : 2000^2 = 498636^k$, valor que es más que el triple del que da la tabla. Admitiendo para la carga el valor precedente de P, la presion en la seccion se acercaria á 20^k por milímetro cuadrado, es decir, que seria superior á la presion correspondiente al límite de elasticidad.

Columnas huecas. Las columnas de fundicion son generalmente huecas. Sus dimensiones pueden deter-

minarse fácilmente, por medio de las columnas macizas equivalentes. Designando por d_1 y d_0 los diámetros interior y esterior de la columna hueca y por d el diámetro de la columna llena, debemos tomar

$$\frac{d_0}{d} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^4}} \qquad (113)$$

La relacion $d_1 : d_0 = \varphi$ varia amenudo de 0'7 á 0'8. Para

$\varphi =$	0'5	0'6	0'7	0'75	0'8	0'85	0'9	0'95
$d_0 : d =$	1'016	1'035	1'07	1'10	1'14	1'20	1'31	1'52

El límite de uso de la fórmula, establecida teniendo en cuenta la resistencia especial de las piezas cargadas en pié, no es aquí enteramente la misma que la anteriormente hallada, pero se acerca mucho. El diámetro d_0 no debe nunca ser inferior á:

$$d_0 = \frac{0'46\sqrt{P}}{\sqrt{1-\varphi^2}}$$

ó la carga superior á:

$$P = 4'71\, d_0^2\,(1-\varphi^2) \qquad (114)$$

Tenemos para:

$\varphi = \frac{d_1}{d_0}$	=	0'5	0'6	0'7	0'75	0'8	0'85	0'9	0'95
$1-\varphi^2$	=	0'75	0'64	0'51	0'44	0'36	0'28	0'19	0'10
$\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}}$	=	1'15	1'25	1'40	1'51	1'67	1'89	2'29	3'20

2.° EJEMPLO. *Para una carga de* 15000^k *una columna maciza debe tener, conforme hemos hallado, un diámetro de* 105^{mm}; *una columna hueca sometida á la misma carga, y en la cual la relacion del hueco al diámetro fuese* 0'8 *deberia tener, para diámetro esterior,* $d_0 = 1'14.105 = 120^{mm}$, *y para diámetro interior* $d_1 = 0'8.120 = 96^{mm}$, *es decir, que el espesor de la pared seria* 12^{mm}. *Para producir una presion de* 6^k *por unidad de superficie de la seccion, la carga, determinada por la fórmula* (114) *deberia ser* $P = 4'71.120^2.0'36 = 24480^k$. *Por consiguiente, se pueden adoptar las dimensiones anteriores, si se considera el espesor de* 12^{mm} *como suficiente para una pieza que debe ser colada. Si tomamos* $d_1 : d_0 = 0'7$, *los valores correspondientes,* $d_0 = 112^{mm}$ *y* $d_1 = 79^{mm}$, *que dan para el espesor* 16'5^{mm}, *son igualmente admisibles.*

Para una columna hueca, es con frecuencia ventajoso que se dé el diámetro esterior d_0; y el diámetro interior d_1 está entonces determinado, para la fundicion, por la espresion

$$d_1 = d_0 \sqrt[4]{1 - 0'000516\frac{Pl^2}{d_0^4}}$$

y la carga por la fórmula

$$P = 1900\frac{d_0^4 - d_1^4}{l^2} \qquad (115)$$

en que P representa la diferencia de las cargas que corresponden á dos columnas llenas, de diámetros d_0 y d_1.

En este caso, para que la presion no sea superior á 6^k, se debe procurar que P no esceda del valor

$$P = 4'71\,(d_0^2 - d_1^2)$$

y que d_1 no sea superior á

$$d_1 = d_0\sqrt{1 - 0'2122\frac{P}{d_0^2}} \qquad (116)$$

hecha abstraccion de las condiciones que debe llenar el espesor, para dar una pieza que pueda ser convenientemente fundida.

3.^{er} EJEMPLO. *En un cuartel de Berlin habia que establecer columnas huecas, de una altura de* 3600^{mm}, *destinadas á soportar cada una una carga evaluada próximamente en* 16900^k. *Se les ha dado como diámetro esterior* $d_0 = 157^{mm}$. *Segun la fórmula* (115), *su diámetro interior* d_1 *habrá tenido por valor:* $1_1 = 157\sqrt[4]{1 - 0'000516 . 3600^2 . 16900 : 157^4} = 157 . 0'9499$ *ó* 149^{mm}. *Segun la fórmula* (116) *habria que tomar á lo más:* $d_1 = 157\sqrt{1 - 0'2122 . 16900 : 157^2} = 0'9244 . 157$ *ó* 145^{mm}. *Con este último valor, el espesor no hubiera sido más que de* 6^{mm}; *fijándola empíricamente en* 15^{mm} *se tiene* $d_1 = 127$. *Se ha tomado, en realidad,* $d_1 = 124^{mm}$.

4.° EJEMPLO. *Una columna de fundicion de* 4700^{mm} *de altura y de* 235^{mm} *de diámetro esterior, destinada á soportar una carga de* 125000^k, *se ha hecho en hueco con un diámetro interior de* 170^{mm}. *Si aplicamos á estos datos la fórmula* (115) *se halla*

$d_1 = 235 \sqrt[4]{1 - 0'000516 \cdot 125000 \cdot 4700^2 : 235^4} =$

$235 \cdot 0'8543$ *ó* 201^{mm}; *pero la fórmula* (116) *da solamente*: $d_1 = 235 \sqrt{1 - 0'2122 \cdot 125000 \cdot 235^2} = 235 \cdot 0'721$ *ó* 169^{mm}, *es decir, casi exactamente la dimension admitida en la práctica.*

Se ve por los ejemplos que preceden, con qué cuidado se deben examinar todas las condiciones, á fin de evitar errores y de llegar á una opinion motivada en cada caso particular.

Columnas de seccion en cruz. La forma de seccion en cruz, que se emplea ventajosamente para los ejes, conviene igualmente muy bien para las columnas. La altura h y el espesor b de las nervaduras pueden aquí tambien deducirse, por una simple trasformacion de seccion, del diámetro d de la columna cilíndrica maciza equivalente; y se llega así á la relacion:

$$\frac{b}{d} = \frac{3\pi}{16}\left(\frac{d}{h}\right)^3 = 0'59\left(\frac{d}{h}\right)^3 \qquad (117)$$

la cual da con aproximacion suficiente el valor de b, cuando se da el de h. Bajo el punto de vista de la resistencia á la compresion, debe procurarse que la superficie de la seccion no descienda más abajo del límite:

$$bh = \frac{P}{12}$$

ó que la carga no sea superior á

$$P = 12bh \qquad (118)$$

5.° Ejemplo. *Para trasformar la columna maciza del* 1.er *Ejemplo en columna de seccion en cruz, tomemos* $h = 1'5d = 1'5 \cdot 105 = 158^{mm}$. *La fórmula* (117) *da entonces*: $b = 105 \cdot 0'59 \cdot 8 : 27$ *ó* 18^{mm}. *Teniendo en cuenta simplemente la resistencia á la compresion* ($S = 6^k$) *la carga que esta columna podria soportar seria* $P = 12 \cdot 18 \cdot 158 = 34120^k$. *Nuestro punto de partida es por consiguiente, perfectamente admisible.*

Si se quiere calcular directamente b y h se tiene para la fundicion:

$$b = \frac{30}{10000\pi^2}\frac{Pl^2}{h^3} = 0'0003\frac{Pl^2}{h^3}$$

y por consiguiente

$$P = 3300\frac{bh^3}{l^2} \qquad (119)$$

Aquí tambien este valor de P, en razon á la resistencia á la compresion, no debe nunca pasar del límite dado por la espresion (118).

6.° Ejemplo. *En la fábrica de azúcar de Waghäusel, los diversos suelos de la armazon están soportados por columnas de seccion en cruz y las del piso inferior están cada una sometida á una carga de* 120000 *kil. Su altura es de* 2^m *y las nervaduras tienen como dimensiones* 50^{mm} y 360^{mm}. *A estas dimensiones corresponderia, segun la fórmula* (119), *una carga de* $3300.50.360^3 : 2000^2$ *ó* 1890000^k; *y segun la fórmula* (118) *para* $S = 6^k$, *esta carga no seria más que de* $12.50.360 = 216000^k$; *pero este valor es aun notablemente superior á la carga dada; de suerte que las columnas presentan, en realidad, una gran fuerza; y la presion en cada seccion no es más que* $120000 : 2.50.360 = 3\,{}^1/_3{}^k$. *Bajo la accion de la carga de prueba que era el doble de la carga anterior, la presion producida sólo ha sido de* $6\,{}^2/_3{}^k$ (1).

Columnas formadas por cantoneras y hierros en T. Columnas de este género se encuentran en los puentes metálicos enrejados, sobre todo en los que se construyen en América con el modo de ensamble por pernos. (V. § 87) Los montantes verticales son columnas con estremos articulados, como en el primer caso de la fig. 365. El larguero superior se halla igualmente en las condiciones de una pieza cargada de pié. (caso n.° 3 de la figura 362). La figura 365 representa las formas de seccion que se encuentran comunmente en la práctica. La primera de estas secciones sobre la recta es la que se utiliza para los montantes, en la fábrica de construccion de puentes de Phenixville, en Pensilvania. Cada columna ó montante está compuesto de hierros especiales, que afectan la forma de cuarto de círculo. Con frecuencia se emplean hierros cuya abertura corresponde á un sexto de circunferencia solamente. Nos podemos contentar con un pequeño número de calibres, pues siempre se puede llegar á dar la resistencia necesaria intercalando entre los rebordes de los hierros especiales bandas de hierro planas de secciones mas ó menos considerables. Las cuatro formas de secciones, que vienen á continuacion, se usan sobre todo en la obra de Keystone. Se ha procurado obtener por la eleccion de las dimensiones, que los montantes de inercia (ecuatoriales) con relacion á los dos ejes principales, fuesen constantemente iguales. El § 7 da sobre este objeto, indicaciones suficientes. La quinta seccion contiene en el medio una doble T (figurada en punteado). Esta forma de seccion se emplea sobre todo para los largueros de puentes, y se llega á veces á intercalar, en el interior de la seccion, hasta tres placas de

(1) Esta armazon presenta un tipo notable de suelos incombustibles. Los suelos de los 6 pisos inferiores están formados por bóvedas de aristas mientras que los dos pisos superiores están cubiertos de bóvedas ordinarias de chapa; y todas estas bóvedas estan soportadas por 500 columnas con nervaduras. Todo el espacio interior, comprendido entre los muros, se halla enteramente libre. V. Förster's Bauz., pág. 93.

doble T. La última de las secciones, á izquierda de la figura, que está constituida por el ensamble de cuatro hierros de cantonera, se ha utilizado recientemente por nosotros para formar un eje principal de bomba de agotacion de una mina. El cálculo de una pieza de este género, que puede considerarse como cargada en pié, tiene por objeto determinar la distancia que se puede admitir entre las guias del vástago ó eje.

Columnas acopladas. Ocurre preguntar si para una carga muy considerable no es muy desventajoso bajo el punto de vista económico de la materia, el utilizar dos ó más columnas en lugar de una sola. Si se emplean m columnas en lugar de una sola, y se supone que deban calcularse por medio de fórmulas especiales á las piezas cargadas en pié, se halla que la relacion de los volúmenes V_1 y V, en la hipótesis de secciones geométricamente semejantes:

$$V_1 = \sqrt{m}\, V \qquad (120)$$

representando V_1 el volúmen total de las m columnas y V el de la columna única. Por donde se ve que bajo el punto de vista del empleo de la materia, es ventajoso, para una carga dada, establecer el menor número posible de columnas.

7.º Ejemplo. *Si para soportar una carga de* 1294^k *se elige una columna de seccion circular llena, de* 6^m *de altura, esa columna, segun la tabla de la pág.* 150, *debe tener un diámetro de* 70^{mm}; *empleando* 4 *columnas de* 50^{mm} *de diámetro, la carga total que podrian soportar, segun la misma tabla, seria* $4 . 338 = 1352^k$, *es decir, sensiblemente la misma que la anterior. La relacion de los volúmenes, que es la misma que la de las secciones, es en este caso,* $4 . 50^2 : 70^2$, *es decir,* $100 : 49$ *ó muy aproximadamente* $\sqrt{4} : 1$.

La disminucion de altura de una columna tiene una seccion demasiado marcada, bajo el punto de vista de la economia de la materia, puesto que, segun la fórmula (110), las secciones de columnas semejantes igualmente cargadas, son directamente proporcionales á las alturas *(l)*, suponiendo, en todo caso, calculadas estas columnas teniendo en cuenta la resistencia especial de las piezas cargadas en pié. Esta observacion puede justificar, en algunos casos, la descomposicion de una columna en otras varias, cuando esta operacion tiene en realidad por consecuencia una disminucion de altura. Esto es lo que se produce, por ejemplo, en la armadura formada de tres barras de hierro que (fig. 366) ciertos arquitectos establecen en el interior de los pilares de ladrillos y que es más ventajosa que una barra única, puesto que la relacion de los volúmenes es aquí $1/2\sqrt{m}$, es decir, $1/2\sqrt{3} = 0'866$.

Debemos observar que las columnas empleadas en las armazones de máquinas, tienen generalmente dimensiones muy superiores á las que dan las fórmulas precedentes. Este aumento de materia se esplica bastante naturalmente por el hecho de que las columnas de esta naturaleza se hallan frecuentemente sometidas á esfuerzos de flexion ó de traccion y que están al mismo tiempo espuestas á choques ó vibraciones (1). Así, en particular, las columnas de fundicion que se hallan sometidas á esfuerzos de traccion, como las columnas de entablamento de las máquinas de vapor verticales, deben tener, por lo menos, una seccion doble de la que se deducirá de una de las fórmulas (112), (114), (116) y (118). En las mismas armazones, así como demuestra el 6.º ejemplo, se adopta con frecuencia un coeficiente de seguridad mayor que el que hemos introducido en nuestras fórmulas; y por el contrario, no es raro hallar columnas sometidas á cargas superiores á los límites que hemos indicado.

§ 128

Disposiciones de las columnas metálicas.

Las columnas que se emplean como piezas de armazones de máquinas, pueden fijarse directamente por medios conocidos, sobre placas de fundacion metálicas, ó como columnas de edificios, descansar sobre una masa de albañileria ó de sillares. Las de edificios que han de estar sometidas á cargas considerables, descansan con frecuencia sobre un zócalo de piedra sin ningun modo de fijacion; intercalándose á lo sumo una placa de plomo entre la base de la columna y la superficie de la piedra. En el caso en que se quiera obtener una trabazon que presente más seguridad, se reune la columna al zócalo por pernos de ancla. Las figuras siguientes representan tres dispositivos diferentes de este modo de fijacion. En las tres la base de apoyo de la columna se halla establecida debajo del suelo. La base de la primera columna (fig. 367) está encajada en una placa de fundacion, de forma especial, unida por un perno á un macizo de ladrillos; la segunda columna (fig. 368) se termina en la parte inferior, con un reborde que sirve para fijarla sobre un macizo de mamposteria, por medio de pernos de empotrar. En el tercer dispositivo (Borzig) (fig. 369) en el interior del pié de la columna se halla colocado un

(1) En los molinos las columnas que soportan las trasmisiones de las ruedas están establecidas con un coeficiente de seguridad 5 á 6 veces mayor que el de nuestras fórmulas; pues las vibraciones no permiten adoptar dimensiones inferiores.

cilindro de pequeña altura cuya base, perfectamente levantada, se aplica sobre la placa de fundacion y está unido á ella por un perno que atraviesa el macizo; y entre la superficie interior de la columna y este cilindro existe cierto juego, que se llena con plomo fundido, cuando la posicion de la columna se halla perfectamente reglada. Con este objeto se practica un pequeño agujero de vaciar en el pedestal de esta columna.

La parte del pedestal que pasa del nivel del suelo, está mas ó ménos ornamentada, segun el estilo adoptado en la construccion del edificio. En la figura 367 no existe mas que un simple filete cilíndrico para relacionar el cuerpo de la columna con la parte cuadrada del pedestal; en la figura 368 se añade al filete un cuarto bocel; y en fin, la fig. 369 representa lo que se llama una base ática con dos cuartos boceles reunidos por filetes á una parte deprimida. (Trochile).

Bajo el punto de vista de la construccion los capiteles de las columnas presentan disposiciones muy variadas, segun su modo de union con las otras partes.

La fig. 370 representa en corte y en elevacion lateral el modo de union de una cabeza de columna con una viga de madera y la base de una columna del piso superior. Una caja de fundicion, que termina el capitel, envuelve la viga que con frecuencia presenta una juntura en el interior. El empleo de una viga metálica permite reducir notablemente la anchura de esta caja. La columna superior se fija directamente en la caja por medio de pernos que atraviesan los bordes.

Bajo el punto de vista del estilo los capiteles pueden recibir una gran diversidad de formas y ofrecen, por consiguiente, recursos que no siempre se utilizan como merecen serlo. La arquitectura proporciona en este caso gran variedad de modelos, que una acertada eleccion permite utilizar para obtener, aun por procedimientos muy sencillos, un aspecto satisfactorio.

Para los pisos inferiores de las grandes armazones de fábricas, y de una manera general para todas las columnas metálicas que tienen que soportar cargas considerables, una de las formas más convenientes es la del capitel simple que ha recibido tan numerosas aplicaciones en la construccion de estilo romano. La fig. 371 representa un capitel de esta especie. Del mismo modo para las columnas muy cargadas, pero al mismo tiempo muy salientes, se puede recurrir al capitel normando (fig. 372).

Se obtiene un aspecto á la vez más lijero y más alegre, por medio del capitel gótico, reducido á la forma simple que representa la fig. 373. Para esas tres formas, la operacion del moldeaje y la del vaciado son muy sencillas.

En la construccion de máquinas, el capitel que se emplea ordinariamente es el que representa la fig. 374 que es intermedio entre el capitel toscano y el capitel dórico-romano; y se compone esencialmente de una parte de seccion cuadrada (elabaco) de un modillon y de un astrágalo, que constituye la línea de separacion entre el capitel propiamente dicho y el cuerpo de la columna. Aumentando ó disminuyendo la distancia del astrágalo al modillon, se llega á dar fácilmente á la columna un aspecto de más ó ménos vuelo. Las formas severas del estilo dórico griego no convienen para las columnas metálicas; y así es que se encuentran muy raramente en la construccion de maquinas. Se emplea por el contrario con ventaja, en las construcciones de hierro, las columnas corintias, á las cuales se da la forma, á la vez simple y graciosa, que reproduce la fig. 375.

El capitel se compone de una cornisa hecha de cierto número de estrias (21) cuyo conjunto constituye una superficie cóncava en la parte inferior, convexa en la superior, y de un astrágalo que la separa del cuerpo de la columna. Si se suprimen las estrias, como se ha hecho en la mitad derecha de la figura, se obtiene una forma más sencilla, que es igualmente muy usada (Véase fig. 346). Las estrias del capitel, á lo ménos para ciertos casos particulares, se hallan tanto mejor justificadas cuanto más se establecen en el mismo cuerpo de la columna. El capitel acanalado es de fácil ejecucion, con la condicion de considerarlo como un envoltorio, que parte del nacimiento de las canales encima del astrágalo, y referir la pieza fundida al núcleo de la columna.

La fig. 376 representa un capitel terminado por un abaco octogonal, que se aproxima á la forma del renacimiento y es muy conveniente para las columnas salientes.

La union con las vigas, de hierro ó madera, exige amenudo la interposicion de una placa de cierta longitud entre la columna y la viga. Conservando á esta pieza una gran sencillez, conviene sin embargo darle una forma que esté en relacion con el estilo de la columna. La fig. 377 representa una disposicion que se puede emplear con el capitel romano, es decir, en el caso en que se trate de columnas de gran sencillez de formas.

La fig. 378 representa un capitel más lijero, en el cual la parte superior, que tiene la forma de una caja, está prolongado por ambos lados para recibir una viga; y la fig. 379 indica una disposicion aun más lijera y más saliente. Esta misma figura muestra el uso de un estilobato, ó de un pedestal de bastante altura, para las co-

lumnas que tienen una longitud relativamente muy grande con relacion á su diámetro. La seccion de ese pedestal es con frecuencia octógono, como indica la figura, y bajo este concepto, entra en el estilo gótico: frecuentemente se le da forma circular. Conforme á los principios arquitectónicos el diámetro del cuerpo de la columna debe ir estrechándose hácia la parte superior. Se obtiene un aspecto satisfactorio tomando por diámetro en este punto 0'8 ó 0'7 del diámetro á la base, que debe conservarse en el tercio próximamente de la altura.

La fig. 380 representa una forma de capitel de un estilo severo, con soporte de repisas.

Las columnas de nervaduras en cruz, de que ya se ha tratado, son de uso muy comun en las armazones industriales. Comparadas á las columnas huecas, presentan la ventaja de no estar espuestas, como estas últimas, á venir defectuosas de la fundicion, á causa de un desplazamiento del cubo, ó que al ménos, las imperfecciones de la fundicion, si acaso las hay, pueden disimularse. Las figs. 381 á 383 representan columnas de nervaduras en cruz.

La forma de la fig. 381 es la de las columnas de la estacion del ferro-carril de Saint-Germain. Las nervaduras reinan aquí en toda la longitud del cuerpo, lo que simplifica la ejecucion del pedestal y del capitel. En medio de su longitud la columna presenta un abultamiento. La forma de la fig. 382 mucho más elegante que la anterior, se debe al ingeniero Rolland, que la ha empleado por primera vez, en la construccion de la manufactura de tabacos de Strasburgo. En uno de los pisos, estas columnas descansan sobre un zócalo bastante elevado, de seccion cuadrada. Este zócalo falta en el piso superior. La parte inferior de la fig. 383 demuestra el modo de trabazon de la columna con el zócalo, y la parte superior, la del capitel con un entablamento de fundicion y una columna establecida directamente encima. Por donde se ve, que es posible obtener, con columnas de nervaduras, una forma que presente á la vez aspecto agradable y gran solidez.

La cuestion de las formas que hay que dar á las columnas es una de las más interesantes y más variadas de la construccion. Los ejemplos que anteceden, aunque en pequeño número, bastan sin embargo, para dar un punto de partida á los que dan cierto valor á la belleza de las formas en las máquinas.

CAPITULO OCTAVO

EJES

§ 129

Division de los ejes.

Los ejes destinados á llevar piezas animadas de movimientos de rotacion ó de oscilacion y que, por eso están provistos de gorrones, se dividen como estos últimos en dos categorias, segun que tengan que soportar esfuerzos perpendiculares ó paralelos á su eje de rotacion. Pocas veces se encuentran ejes que pertenezcan exactamente á la segunda categoria. En lo que sigue, tendremos, pues, que ocuparnos principalmente de los ejes que están simplemente cargados trasversalmente, ó tambien de los que están sometidos á la vez á los dos géneros de accion. En los primeros, la carga puede obrar en un punto único, ó hallarse repartida en varios puntos. Tendremos, por consiguiente, que estudiar separadamente:

los ejes cargados en un solo punto ó ejes sencillos.
los ejes cargados en varios puntos.

Para cada uno de estos dos casos principales tendremos todavia que establecer dos subdivisiones, comprendiendo la una los ejes de secciones de forma circular, la otra los ejes de formas más ó ménos complejas. En todas las cuestiones que origina la construccion de los ejes, el método que hemos designado con el nombre de Grafostática presta inmensos servicios. Recurriremos pues á la vez al procedimiento analítico y al metodo de los trazados, para llegar á la solucion de los diversos problemas que más frecuentemente se encuentran en la práctica y que vamos á estudiar sucesivamente.

A. SECCIONES DE FORMA CIRCULAR.

§ 130

Ejes simples de husos iguales.

La carga Q dirigida perpendicularmente al eje, obra en el medio de la longitud y sobre la cabeza del eje que lleva un cubo. (fig. 384). Las partes que reunen la cabeza del eje á los gorrones llevan el nombre de husos.

Los gorrones deben calcularse segun las reglas del

capítulo V, para una presion $P=\frac{1}{2}\,Q$ y el eje mismo debe establecerse de manera que presente en todos sus puntos la misma resistencia que los gorrones.

Si designamos por

d el diámetro y l la longitud de uno de los gorrones,

c la altura del cuello de este gorron,

D el diámetro del abultamiento medio, b su longitud,

D' el mayor diámetro del huso cerca del cubo,

$c'=\frac{1}{2}\,(D-D')$ la saliente del abultamiento en esta parte,

a la longitud de un huso,

y tomamos:

$$\frac{D'}{d}=\sqrt[3]{\frac{a-0{,}5\,b}{0{,}5\,l}} \qquad (121)$$

se obtiene un eje que, abstraccion hecha de los cuellos, presenta por todas partes el mismo grado de seguridad que el gorron, es decir, que la tension máxima llega á 6^k cuando el eje es de hierro forjado, y á 3^k solamente, cuando es de fundicion. Si se quisiera tener una tension diferente, seria preciso hacer intervenir un gorron ideal, que estaria determinado precisamente de manera que produjese esta tension.

Rigurosamente para presentar la misma resistencia, la forma de la parte comprendida entre el gorron y el abultamiento del árbol deberia ser una porcion de paraboloide cúbica (§ 10, N° VI). La ejecucion de una superficie de ese género solo podria presentar interés para la instruccion de los jóvenes obreros. En los casos ordinarios nos limitamos generalmente á la construccion de un tronco de cono, que tiene por diámetros estremos D' y $d+2c$. En cuanto á c basta darle un valor suficiente para permitir practicar una abertura destinada á recibir la chaveta de fijacion.

§ 131

Eje simple de husos desiguales.

Cuando las distancias del abultamiento del eje á los gorrones son diferentes, como en la fig. 385, la carga se reparte desigualmente sobre esos gorrones d_1 y d_2 y se tiene:

$$\frac{P_1}{Q}=\frac{a_2}{a_1+a_2},\quad \frac{P_2}{Q}=\frac{a_1}{a_1+a_2},\quad \frac{P_1}{P_2}=\frac{a_2}{a_1} \qquad (122)$$

El plano medio del abultamiento divide el eje en dos partes, cada una de las cuales puede considerarse como la mitad de un eje simple de husos iguales. Se calcula, para cada uno de esos ejes, el valor de D', y el mayor sirve para determinar el valor de D.

Si el cubo destinado á trasmitir la carga Q, en lugar de estar colocado entre los dos gorrones, cae fuera, es decir, si a_2 es negativo, como en la fig. 386, segun la espresion práctica, se halla cargado en falso.

En este caso el gorron D se convierte en un gorron interior. Las magnitudes numéricas de los esfuerzos ejercidos sobre los gorrones están dados por las relaciones:

$$\frac{P_1}{Q}=\frac{a_2}{a_1},\quad \frac{P_2}{Q}=\frac{a_1+a_2}{a_1},\quad \frac{P_1}{P_2}=\frac{a_2}{a_1+a_2} \qquad (123)$$

Se empieza por determinar el gorron d_1, luego se calcula un gorron ideal d_2 correspondiente á la posicion de la carga; luego se determina el diámetro D como si se tratara de un eje análogo al anterior, cuyos gorrones fuesen d_1 y d_2 y cuyo gorron se hallase en el lugar del gorron interior; se toma pues para D el mayor de los dos valores D' y D'' que da la fórmula (121) para los diámetros, en los dos estremos del gorron interior y se determina la longitud correspondiente l_3 por la fórmula: $l_3=\sqrt{l_1^2+l_2^2}$. Hecho esto, en la parte a_2 se lleva la parábola cúbica, que representa rigurosamente la forma de igual resistencia y á partir del medio del gorron a_2 se lleva á cada lado la mitad de la longitud b que debe tener la cabeza del eje. La perpendicular al eje, trazada á esta distancia, determina por su interseccion con la parábola el diámetro δ de esta cabeza, que está dado por la relacion:

$$\frac{\delta}{d_2}=\sqrt[3]{\frac{b}{l_2}} \qquad (124)$$

Ejemplo. *Para un eje de fundicion* $Q=12000^k$, $a_1=1200^{mm}$, $a_2=600^{mm}$, $b=330^{mm}$, *el número de vueltas es inferior á* 150. *Se tiene* $P_1=0{,}5\,Q=6000^k$; $P_2=1{,}5\,Q=18000^k$. *Segun la tabla del* § 91, *debiendo estar comprendida* d_1 *entre* 115 *y* 120, *lo tomaremos igual á* 115, *y* d_2 *igual á* 165^{mm}, *y por consiguiente* $l_1=153^{mm}$, $l_2=220^{mm}$. *Hallaremos enseguida* $D=165\cdot\sqrt[3]{600:110}=1{,}77\cdot165=292^{mm}$, $l_3=\sqrt{153^2+220^2}=268^{mm}$, $\delta=165\cdot\sqrt[3]{330:220}=165\cdot1{,}15=190^{mm}$.

§ 132

Cálculo grafostático de un eje simple.

Para determinar las fuerzas que obran en los gorrones se puede emplear el método grafostático. Hemos demostrado (§§ 43 y 44) como el polígono funicular por sus ordenadas paralelas á la direccion de las fuer-

zas, da momentos estáticos correspondientes á los diferentes puntos; y con ese motivo, puede designarse dicho polígono con el nombre de superficie de los momentos. Para los problemas de que tenemos que tratar aquí, es fácil deducir de los principios generales los siguientes sencillos procedimientos.

I. LA CARGA OBRA NORMALMENTE AL EJE.

a. El cubo y la carga se hallan comprendidos entre los gorrones (fig. 387). Sobre la línea AC que reune los medios de los gorrones se construye un triángulo ABC cuyo vértice B cae en la direccion de la carga Q; por el punto A normalmente á AC se traza $A.3=Q$; luego se tira $3.O$ y $2.O$ paralelos á BC y á AC; se tiene entonces $A.2=P_1$ y $2.3=P_2$. Como los puntos B_1 y B_2 corresponden á los estremos del cubo, resulta que la fuerza Q se descompone en dos, Q_1 y Q_2, que obran precisamente en esos puntos y que están dadas por el polígono de las fuerzas, trazando Ob paralela á $B_1 B_2$. Entonces se tiene $Ab=Q_1$, $b.3=Q_2$.

La ordenada vertical t en un punto de la superficie de los momentos, es proporcional al momento estático M_y tomado con relacion al punto en que esta ordenada encuentra el eje; del mismo modo la ordenada t_1 es proporcional al momento estático M_1 tomado con relacion al orígen del gorron P_1. Se tienen así las dos relaciones distintas:

$$y^3=\frac{3^2}{\pi S}M_y \qquad d_1^3=\frac{3^2}{\pi S}M_1$$

de donde se deduce

$$\frac{y}{d_1}=\sqrt[3]{\frac{M_y}{M_1}}=\sqrt[3]{\frac{t}{t_1}} \qquad (125)$$

relacion que permite determinar muy sencillamente el valor de y.

b. El cubo está entre los gorrones y la carga fuera (fig. 388). En la línea AC paralela al eje se construye el triángulo ABC cuyos tres vértices caen en las direcciones de las fuerzas, y se busca el punto D cuya ordenada es $Dd=Q$; se traza enseguida $O.1$ paralelo á AC é igual á CD, $O.3$ paralelo á CB, siendo la línea $A.1.3$ perpendicular á AC; se obtiene entonces $1.3=Q$, $A.1=P_1$, $3.A=P_2$. La fuerza Q debe descomponerse en otras dos situadas en los planos que limitan el cubo; si unimos los dos puntos C_1 y C_2 y se traza Oc paralela á C_1C_2, las longitudes $c.3$ y $c.1$ representan las fuerzas correspondientes respectivamente á C_1 y á C_2. El trazado indica que en la longitud del abultamiento del árbol, existe un punto de la línea elástica para el cual el momento de flexion es nulo.

c. La carga está fuera de los gorrones (fig. 389). Se construye como en el caso anterior el triángulo ABC, se determina el punto D por la condicion de que $Dd=Q$, se traza $A.3$ normal á AC, se hace $O.2=CD$ y paralelo á AC, $O.3$ paralelo á CB, y se obtiene $A.2=P_1$, $A.3=P_2$. Para descomponer Q en dos fuerzas en los puntos C_1 y C_2 se traza Oc paralela á C_1C_2 y las longitudes $c.3$ y $c.2$ dan las componentes en C_1 y C_2. Estando el gorron B cargado uniformemente en toda su longitud, la superficie de los momentos para esta longitud se halla limitada por un arco de parábola.

d. La carga cae entre los gorrones (fig. 390). Despues de haber construido el triángulo ABC, hay que descomponer la fuerza Q en otras dos, correspondientes á los puntos B_1 y B_2, y para esto se ha de construir el polígono ACB_1B_2 (al cual es equivalente el polígono ACB_4B_3). En el polígono de las fuerzas $1.3=Q$, $2.1=P_1$, $3.2=P_2$, y si se traza Ob paralela á B_2B_1, las longitudes $b.3$ y $b.1$ representan las componentes buscadas para B_1B_3 y B_2B_4.

II. LA CARGA OBRA OBLÍCUAMENTE SOBRE EL EJE (FIGURA 391).

El polígono de las fuerzas y el polígono funicular tienen en tal caso cierta inclinacion que se determina por la direccion de Q. Las proyecciones verticales $a\,A$ y $3.c$ representan las presiones P_1 y P_2 que los gorrones ejercen; ejerciéndose la componente horizontal de Q en uno de los gorrones ó en ambos á la vez. (1)

III. EL ESFUERZO ES PARALELO AL EJE (FIG. 392).

En este caso se producen dos acoplos, compuestos el uno por las acciones iguales que el cubo ejerce sobre el árbol, y el otro por las fuerzas P que obran sobre los gorrones (§ 38). Si por los puntos A y C, correspondientes á los medios de esos gorrones, se trazan las paralelas AB_1 y CB_2 hasta las verticales de los estremos del cubo y se juntan los puntos B_1 y B_2, la superficie AB_1B_2C es la de los momentos. Para determinar los diferentes esfuerzos que actuan sobre el árbol, traslademos la fuerza Q, paralelamente á sí propia, á bq (estando situado el punto q en la vertical Cb del medio del gorron), juntemos el punto b al medio del otro gorron y tracemos por el punto q la vertical qa hasta el

(1) La disposicion del cajon llamado de bayoneta que á veces se encuentra en las locomotoras (fig. 394) da orígen á un problema del mismo género, si bien en este caso cambian periódicamente el sentido de accion del esfuerzo y su punto de aplicacion sobre el árbol AC.

encuentro de esa línea de union, y la longitud qa representará la fuerza P. Trasladando esta longitud á $A.1$ y poniendo $1.O$ y $O.2$ paralelas á AC y B_2B_1, 1.2 representará el esfuerzo que se ejerce en b_1, y 2.1 el que se ejerce en b_2.

Si todas las demás condiciones son en lo demás iguales y el cubo cae fuera de los gorrones, como por ejemplo sucede en una hélice de barco colocada en falso ó que no está sumergida más que en parte (fig. 393), el diagrama toma entonces la forma ABC_1C_2, y demuestra que la longitud de la saliente no tiene influencia alguna sobre la flexion.

§ 133

Determinacion de la resistencia de un eje dado. Diagrama de ensayo.

Para determinar la resistencia á la flexion de un eje dado es necesario tomar los módulos de las secciones correspondientes á cierto número de puntos. Si como suponemos aquí, son circulares todas las secciones, esos módulos son proporcionales á la tercera potencia de los diámetros, debiéndose por tanto tomar los cubos de todos los diámetros de las secciones consideradas. Esto es lo que puede hacerse gráficamente de una manera muy sencilla poniendo en práctica los principios espuestos en el § 28. En el caso en que el diagrama que se pretende obtener debiese compararse á una de las superficies de momentos teóricos que acabamos de examinar, convendria sin duda establecerlo bajo la misma escala. A partir del punto de interseccion O de los dos ejes rectangulares X é Y se marca encima de OX la longitud Oa que representa el valor total (ó la mitad) del diámetro del gorron de la parte del árbol que se quiere calcular, y en la direccion opuesta siguiendo Ob, la ordenada t_1 correspondiente á la superficie de momentos teórica: se describe en ab un semi-círculo acb, se traza ae perpendicular á ac y tomando Oe por unidad, se tiene $\overline{Ob}=(\overline{Oa})^3$. Se hace enseguida $O.1=y_1$, $O.2=y_2$ etc., y se obtienen por análoga construccion los valores buscados y_1^3, y_2^3 etcétera, que se trasporta á la figura principal para el trazado del diagrama.

El diagrama así obtenido da indicaciones muy claras sobre el efecto de las abolladuras, hinchazones, vacíos y hasta sobre los errores de cálculo que hayan podido sufrirse, mostrando al propio tiempo las diferencias de seguridad de un punto á otro, puesto que en cada punto la tension real es á la tension límite en proporcion inversa á la ordenada del diagrama de ensayo, á la de la superficie de los momentos teórica. Cuando se conoce una de las dimensiones principales del diagrama de ensayo correspondiente á la del diagrama teórico, como por ejemplo en el caso actual, el diámetro D', es preferible determinar la unidad que debe adoptarse por medio de ese dato (conforme se ha hecho por lo que toca á la fig. 395). Operando así se tiene mucha mayor seguridad de la exactitud de la unidad Oe.

§ 134

Eje cargado en dos puntos de su longitud.

Cuando un eje como el de la fig. 396 está cargado en dos puntos, los estremos llevan el nombre de husos, en tanto que la parte media constituye lo que llamamos el cuerpo. Designando Q_1 y Q_2 las cargas, y s la longitud del cuerpo se encuentran las presiones sobre los gorrones por medio de las relaciones siguientes:

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{s+a_2\left(1+\frac{Q_2}{Q_1}\right)}{a_1+s+a_2}, \quad \frac{P_2}{Q_2}=\frac{s+a_1\left(1+\frac{Q_1}{Q_2}\right)}{a_1+s+a_2}. \tag{126}$$

En virtud de esos valores es fácil calcular por completo los gorrones d_1 y d_2, lo mismo que los husos a_1 y a_2, con la condicion de determinar préviamente los diámetros D_1 y D_2, considerándolos como pertenecientes á dos cabezas de ejes ideales, en cada una de las que se supondria concentrada en un solo punto la accion de las fuerzas Q_1 y Q_2.

Para determinar los diámetros del cuerpo del eje en los diferentes puntos de su longitud se tiene designando por y el diámetro de la seccion situada á la distancia x del punto de aplicacion de Q_1:

$$\frac{y}{D_1}=\sqrt[3]{1+\frac{x}{a_1}\left(1-\frac{Q_1}{P_1}\right)} \tag{127}$$

ecuacion que demuestra que el perfil del cuerpo del eje está formado por dos arcos de parábolas cúbicas. Comunmente están reemplazados esos dos arcos por simples líneas rectas, de suerte que el cuerpo presenta en realidad la forma de un tronco de cono.

Las dos cabezas del eje pueden determinarse conforme se ha indicado en el § 130, suponiendo que se da una débil profundidad á las ranuras de los clavetes. La anchura b á que alcanzan, es la de los cubos de las piezas que deben admitir.

En gran número de casos las longitudes de los husos deben ser iguales, y las dos cargas han de ser idénticas es decir, se tiene : $a_1=a_2$, $Q_1=Q_2$; y resulta

$$P_1=P_2=Q_1=Q_2 \text{ é } y=D,$$

lo que equivale á decir que el cuerpo del eje es cilíndrico.

Puede á más suceder que en lo tocante á un huso y hasta para los dos, la carga esté en falso. La fig. 397 se refiere al primer caso, y si designamos por s la longitud del cuerpo del eje comprendida entre Q_1 y P_2, tenemos:

$$\frac{P_1}{Q_1}=\frac{s-a_2\frac{Q_2}{Q_1}}{s+a_1},\quad \frac{P_2}{Q_2}=\frac{s+a_2+a_1\left(1+\frac{Q_1}{Q_2}\right)}{s+a_1} \qquad (128)$$

determinándose aquí tambien los valores de $\frac{y}{D_1}$ por la fórmula (127).

En un dispositivo de ese género puede ocurrir que esa fórmula conduzca á $y=O$ para cierto punto; lo cual sucede cuando para un punto situado á una distancia x_0 del punto de aplicacion de Q_1 (fig. 397) se tiene la relacion:

$$x_0=\frac{P_1a_1}{Q_1-P_1} \qquad (129).$$

En tal caso para aproximarse todo lo posible á la forma indicada por la teoria, conviene usar en la práctica un tronco de cono vacio, pudiendo aun economizarse la materia, si se practica un estrechamiento en esa parte del árbol. Sin embargo, el diámetro correspondiente á la abcisa x_0 no debe reducirse indefinidamente, puesto que en ese punto existe siempre cierto esfuerzo de deslizamiento.

EJEMPLO. $Q_1=2000^k$, $Q_2=1000^k$, $s=1800^{mm}$, $a_1=a_2=800^{mm}$ *Se tiene* $\frac{P_1}{Q_1}=\frac{1800-800.{}^1/_2}{1800+800}=\frac{14}{26}$, *y por tanto* $P_1=\frac{7.2000}{13}=1077^k$. *A más,*

$\frac{P_2}{Q_2}=\frac{1800+800+800.3}{1800+800}=\frac{50}{26}$, *de donde* $P_2=\frac{50.1000}{26}=1923^k$; *y por medio de esos valores es fácil determinar las dimensiones de los gorrones y de los husos. Se tiene además* $y=0$ *para* $x_0=\frac{800.14}{12}=933^{mm}$, *y hallándose este punto comprendido en la longitud del cuerpo del eje, se puede aplicar el modo de aproximacion indicado antes.*

§ 135

Aplicacion de la grafostática á los ejes cargados en dos puntos.

Supongamos que las fuerzas dadas Q_1 y Q_2 actuan normalmente al eje AD en el mismo sentido como antes (fig. 398). En la linea Aa..., perpendicular á AD marquemos las longitudes $a.1=Q_1$, $1.2=Q_2$; desde el punto O elegido como polo tracemos los radios Oa, $O1$, $O2$, prolonguemos aO hasta su encuentro en b con la direccion de la fuerza Q_1; por ese punto b tracemos bc paralela á $1O$ y por el punto c, que se encuentra en la direccion de Q_2, cd paralela á $2O$; y unamos en fin el punto d con el punto a. Si por el punto O en el polígono de las fuerzas trazamos $O3$ paralela á da, 23 representará la presion P_2 sobre el gorron D, y $3a$ la presion P_1 sobre el otro gorron A: $abcd$ es la superficie de los momentos, cuyas ordenadas verticales t sirven para determinar, como se ha indicado (I, § 132), los diámetros correspondientes del árbol. El punto de interseccion e de las líneas ab y dc prolongadas da un punto por el cual debe pasar la resultante de las fuerzas Q_1 y Q_2. Comenzando por determinar primero la línea Ee, por ejemplo, por medio del método del § 40, el problema actual puede reducirse al que hemos resuelto antes (I, § 132), y por tanto la direccion de la línea ad puede escogerse de antemano, como se ha hecho en el primer caso.

Ejerciendo uno de los esfuerzos fuera de uno de los gorrones (fig. 399), puede encontrarse en la línea elástica un punto para el que sea nulo el momento de flexion; lo cual sucede cuando la resultante de las fuerzas Q_1 y Q_2 cae entre los apoyos A y B (como en el problema I. b. § 132). El esfuerzo de deslizamiento que existe en este punto y que antes hemos mencionado, se representa con 1 . 3.

Cuando la resultante de las fuerzas Q_1 y Q_2 cae fuera de los dos gorrones, como en la fig. 400, no existe dicho punto de flexion nulo, pero la presion P_1 obra en el mismo sentido que las fuerzas Q_1 y Q_2; siendo el método que ha de seguirse en este caso, idéntico al que acabamos de indicar.

Puede acontecer que la resultante caiga directamente sobre el soporte D. En tal caso los momentos de las fuerzas que tienden á producir la flexion son completamente nulos en la longitud AB, mientras que en la hipótesis anterior eran simplemente muy pequeños. Las dos líneas que limitan la superficie de los momentos, coinciden en esta longitud AB. En ese caso conviene dar simplemente al huso AB y al gorron A dimensiones suficientes para resistir los esfuerzos accidentales ó las fuerzas que no están comprendidas en las que se introducen en el cálculo, pudiendo así ser en general muy pequeñas esas dimensiones. La descomposicion de las fuerzas aisladas en otras fuerzas situadas en los planos estremos de los cubos, se efectua conforme se ha indicado en el § 132.

Fuera de los diferentes casos particulares que acaban de examinarse, podrian imaginarse muchos otros, como por ejemplo, los que corresponderian á cargas que obrasen en sentidos opuestos; más como los ejemplos anteriores bastan perfectamente para dar á comprender la marcha que debe seguirse, creemos que no hay necesidad de detenernos más aquí.

§ 136

Arbol sometido á dos esfuerzos oblícuos. Eje de vagon. Arbol de grua.

Cuando las fuerzas Q_1 y Q_2 en vez de ser normales al eje, obran oblícuamente, la solucion gráfica del problema sigue presentando sensiblemente el mismo grado de sencillez. Escogeremos como ejemplo de aplicacion del método un eje de vagon, prescindiendo de las influencias accesorias que en realidad tienen escasa importancia.

Amen de la carga vertical Q (fig. 402) aplicada al centro de gravedad S del vagon, puede notarse de vez en cuando en el mismo punto nna fuerza horizontal H resultante de la fuerza centrífuga y de las vibraciones, que, segun Scheffler, puede elevarse á $0'4Q$. Estas dos fuerzas tienen una resultante R que actua oblícuamente sobre el eje. Esa fuerza da márgen á presiones en las cabezas de los rails K_1 y K_2 á la vez que en los gorrones A y D. Para obtener las componentes sobre los rails conviene observar que no puede haber sino una presion normal al calce de las ruedas, y que por lo tanto se ha de hacer igual á 90° el ángulo LK_2S'. En los puntos de interseccion B y C del eje y de las direcciones de las presiones ejercidas sobre los rails, estas últimas pueden descomponerse en fuerzas verticales Q_1 y Q_2 y en fuerzas horizontales que pueden despreciarse. Los esfuerzos oblícuos ejercidos sobre los gorrones pueden tambien reemplazarse con componentes horizontales y las presiones verticales P_1 y P_2, permitiendo estas últimas calcular los diámetros d_1 y d_2 y obtener así el resultado que tiene más importancia en la cuestion. Entonces por el punto de aplicacion E de la resultante R sobre el eje tracemos Ee perpendicular á AD y á ad; juntemos ea y ed y reunamos con una línea recta los puntos b y c, donde las líneas anteriores se encuentran con las direcciones de Q_1 y Q_2 prolongadas; y en fin, por los estremos B', B'', C', C'', tracemos perpendiculares á ad y unamos $b'b''$, $c'c''$: así obtenemos el polígono funicular $ab'b''c'c''d$ para el caso actual. Las ordenadas t de este polígono sirven para determinar, como antes, los diámetros y del eje, partiendo del diámetro d_1 del gorron y de la ordenada t_1 correspondiente al cuello de ese gorron.

La direccion de la presion K_1 B puede determinarse por un procedimiento más sencillo que el consistente en hacer uso del punto S', cuyo trazado suele ser incómodo. Imaginemos que se une un punto cualquiera de la resultante R, verbigracia el punto E, con las cabezas de rails K_1 y K_2; que se descompone esa resultante $R=Er$ (fig. 403) en dos componentes Ek_2 y $k_2r = Ek_1$, siguiendo las direcciones Ek_2 y Ek_1; que se traza k_2l horizontal y El paralela á la direccion conocida K_2S'; las dos longitudes así determinadas lE y rl representan respectivamente los esfuerzos ejercidos en K_2 y K_1, y la segunda da la direccion buscada: Ek_2 y k_2l son las fuerzas interiores que obran en el vértice K_2 del polígono funicular y que deben estar en equilibrio con la presion de direccion conocida K_2S'.

Como la fuerza horizontal H puede dirigirse lo mismo á derecha que á izquierda, conviene usar para cada mitad del eje la parte del polígono $ass'b''b'$ que tiene mayor superficie, y por ello se encuentra reproducida en punteado esta superficie simétricamente á izquierda. Puede además trazarse el polígono funicular para la sola carga vertical Q. Ese trazado da para el cuerpo del eje una ordenada mayor que ss' y es la que debe servir. La forma general del cuerpo del eje es entonces la de una superficie de revolucion, vaciada en el medio, tal como se representa en la fig. 404, de la que se encuentran en la práctica numerosas reproducciones. Los gorrones de los ejes de los vagones, por tener una velocidad de 250 á 300 vueltas por minuto, exigen cuando se hacen de hierro forjado que se adopte el número 2 para la proporcion de la longitud con el diámetro. Los cuellos de esos gorrones desempeñan en las curvas un papel muy importante, por motivo de la fuerza lateral H, y conviene por lo tanto dar á la saliente e de esos cuellos una altura igual á $\frac{d}{7}$ y hasta $\frac{d}{6}$, es decir, conviene hacerla notoriamente más fuerte que en los gorrones comunes.

Los árboles verticales de las gruas están generalmente sometidos á esfuerzos oblícuos que obran sobre varios puntos como vamos á ver en los ejemplos siguientes. Una grua de muelle, de árbol vertical (figura 405) está sometida á la carga L y al peso propio G de la cabria y del brazo que la componen, para dar una resultante total Q sobre la columna (véase el 1.er ejemplo del § 34 y la nota de la pág. 62). En A y B hay dos gorrones de rotacion y en CD el árbol se encuentra apoyado en un crucero de hierro colado sólidamente fijado en E y F. Para determinar de momento los

esfuerzos en estos dos puntos tracemos el polígono funicular *efq* y el polígono de las fuerzas *e* 21 *O*, ó bien 21 = *Q*, *e* 1 = la fuerza Q_1, en *F*, y *e* 2 = la fuerza Q_2, en *E*. Esas tres fuerzas esteriores que obran paralelamente al eje del árbol, nos permiten usar el método de la fig. 392. Si en la fig. 406 trazamos $q_2 q_3 = Q$, $q_1 q_3$ paralela á Aq_1 y perpendicular á *AB*, obtendremos las fuerzas horizontales P_1 y P_2, la una en *A* y la otra en *B*. El gorron de *A* debe soportar toda la carga vertical; y por tanto á la fuerza P_1 se añade en *A* la fuerza *Q* para dar una resultante inclinada P'_1. Tracemos ahora Cf_1 perpendicular á *AC*, hagamos $f_2 f_1 = Q_1$ y despues de unir el punto f_1 al punto *D*, tiremos $f_2 f_3$ paralela á Cf_1, la línea $f_2 f_3$ representa el grandor de una fuerza que por lo tocante á *C'* está dirigida de derecha á izquierda, y para el punto *D*, en sentido contrario. Así tambien, si se lleva, siguiendo $e_1 e_2$ la fuerza Q_2, se añade $e_1 D$ y se traza $e_2 e_3$ paralela á $e_1 C$. Esta longitud $e_2 e_3$ representa el grandor de una fuerza cuya accion está tambien para el punto *C* dirigida de derecha á izquierda y para el punto *D* en sentido opuesto. Por consiguiente deberemos tomar $P_3 = f_2 f_3 + e_3 e_2$ y $P_4 = e_2 e_3 + f_3 f_2$. La presion vertical del árbol ahinca enteramente en *D*; y por tanto tenemos que componer en este punto la fuerza vertical $Q = f_2 f_1 - e_1 e_2$ con P_4 para obtener la resultante P'_4 (debiendo encontrarse como verificacion, el punto de interseccion *S* de P'_1 y de P'_4 en la resultante de P_2 y P_3).

Si despreciamos, como antes, la compresion del árbol podemos con P_1, P_2, P_3, P_4, formar el polígono de las fuerzas *a*23*O* representado en escala reducida (figura 405) y obtener así la superficie de los momentos *a b c d*.

La fig. 407 representa otro dispositivo de grua con un árbol móvil, en el cual están fijados el mecanismo de la cabria y el brazo ó vuelo. Suponiendo dada de nuevo la posicion de $Q = L + G$, trasportemos esta fuerza *Q* á $q_1 q_3$, estando dirigida la línea Aq_1 por el punto *A* perpendicular al árbol, y despues de haber unido q_1 y *D*, tracemos paralelamente á Aq_1 la línea $q_3 q_2$ hasta el encuentro de $q_1 D$; $q_3 q_2$ representa entonces la fuerza horizontal P_1 en *A*, y $q_2 q_3$ la fuerza tambien horizontal P_4 en *D*. Esa última se compone con la fuerza *Q* para dar una resultante oblícua.

Con una descomposicion enteramente análoga de *Q* en los puntos *B* y *C* se obtienen las fuerzas horizontales P_2 y P_3, que son iguales pero de sentido opuesto, componiéndose la última con la reaccion *Q* para dar igualmente una resultante oblícua. Las cuatro fuerzas horizontales que acabamos de indicar para los puntos *A*, *B*, *C*, *D* presentan una disposicion enteramente idéntica á la de las cargas normales de la fig. 392. Luego pues obtendremos una superficie de momentos *abcd* (fig. 408) completamente semejante y que por lo tanto entre *B* y *D* presenta un punto en que el momento de flexion es nulo, resultando de ahí que el eje del árbol debe presentar dos flexiones, una á la derecha por la parte superior y otra á la izquierda por la parte inferior. En el polígono de las fuerzas se tiene:

$$2a = P_2,\ a2 = P_3,\ 21 = P_4 \text{ y } 12 = P_1.$$

§ 137

Arbol cargado en un número de pesos igual ó superior á tres.

Supongamos, como sucede amenudo, que un árbol se halla cargado en cuatro puntos; designando por Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 (fig. 409) las diferentes cargas, y por s_1, s_2, s_3 las longitudes del arbol comprendidas entre las direcciones de estas fuerzas, y tendremos:

$$\frac{P_1}{Q} = \frac{s_1 + s_2\left(1 + \frac{Q_2}{Q_1}\right) + s_3\left(1 + \frac{Q_2}{Q_1} + \frac{Q_3}{Q_1}\right) + a_2\left(1 + \frac{Q_2}{Q_1} + \frac{Q_3}{Q_1} + \frac{Q_4}{Q_1}\right)}{a_1 + s_1 + s_2 + s_3 + a_2} \quad (130)$$

ecuacion que con un cambio conveniente de índices puede dar igualmente el valor de $P_2 : Q_2$; y como medio de simplificacion ó verificacion de los cálculos se puede usar la relacion $P_1 + P_2 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$

Si las dos cantidades Q_4 y s_3 se suponen á la vez nulas, se obtiene una espresion que se refiere á un árbol cargado en tres puntos, y si además se hace $Q_3 = o$ y $s_2 = o$, se cae en la fórmula (126) de un árbol cargado en dos puntos. En fin, para $Q_2 = o$ y $s_1 = o$, nos encontramos en el caso de un eje simplemente cargado en un punto.

Para las diferentes partes del cuerpo del árbol se pueden establecer fórmulas análogas á la relacion (127), bastando á más en la práctica reunir con simples troncos de conos las diferentes cabezas de ese árbol.

El diámetro de la cabeza del árbol corresponde á Q_4 se determina por la fórmula:

$$\frac{D_4}{d_1} = \frac{\sqrt[3]{a_1 + s_1\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right) + s_2\left(1 - \frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q_2}{P_2}\right) + s_3\left(1 - \frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q_2}{P_2} - \frac{Q_3}{P_3}\right)}}{0{,}5\, l_1}$$

Si en esa fórmula igualamos sucesivamente á O las cantidades s_3, s_2 y s_1, obtenemos los valores de $\frac{D_3}{d_1}$, $\frac{D_2}{d_1}$, $\frac{D_1}{d_1}$.

En el caso en que uno de los husos estuviese cargado en falso, el método que ha de seguirse se puede deducir fácilmente de lo que se ha hecho en casos análogos, pudiendo igualmente llegar á un resultado directo considerando a_1 ó a_2 como negativa. Por lo que toca á la determinacion gráfica de las fuerzas y de los momentos, puede practicarse del siguiente modo: con las fuerzas dadas desde 1 hasta 5 se forma el polígono de las fuerzas (fig. 410), luego, segun las indicaciones del § 40, el polígono funicular *abcdefg;* enseguida se traza en el polígono de las fuerzas *O6* paralela á *ga;* 56 representa entonces la fuerza P_2 en G y *6a* la fuerza P_1 en A. Esas fuerzas P_1 y P_2 permiten calcular los gorrones d_1 y d_2 en A y G, mientras que se pueden usar como antes ordenadas del polígono funicular para el cálculo de los diámetros de los diferentes puntos del árbol.

El punto de interseccion h de las líneas *ab* y *gf* prolongadas, es un punto de la direccion Hh de la resultante de todas las fuerzas desde 1 hasta 5. Si comenzamos por determinar la posicion de esta resultante por medio de la composicion sucesiva de las cargas (§ 40), es muy cómodo darse el punto O de manera que *ag* sea paralela á AG. Puede además tambien reducirse fácilmente el polígono funicular oblícuo, encontrado anteriormente, á una línea paralela de AG.

Si el árbol tiene más de un huso cargado en falso, como se ha supuesto en la fig. 411, es idéntica la marcha que debe seguirse; pues partiendo del punto *a* se construye ante todo el polígono de las fuerzas *a5O*, luego el primer lado del polígono funicular *ba* hasta la línea de aplomo *Aa* de la primera fuerza y el segundo lado *ac* hasta la direccion *Cc* de la segunda fuerza, y así sucesivamente hasta el último lado *eb*, que cierra el polígono. Las direcciones del primer lado del polígono y del penúltimo se cortan en un punto de la resultante Hh.

El problema que acabamos de estudiar, da márgen á distintos casos particulares que se obtendrian suponiendo cargas dirigidas en sentidos opuestos ó inclinadas al árbol. La solucion de cada uno de estos casos no puede ofrecer dificultad alguna refiriéndonos á los problemas del mismo género que hemos resuelto.

§ 138

Arbol sometido á fuerzas situadas en planos diferentes.

El cálculo analítico de las dimensiones de un árbol cargado presenta dificultades notoriamente superiores á las que hemos encontrado hasta ahora, cuando las fuerzas obran en planos diferentes (fig. 412); permitiendo en cambio el método grafostático conseguir fácilmente un resultado. Se comienza por construir los polígonos de las fuerzas AO_1 y DO_2 (fig. 413) para Q_1 y Q_2 con distancias de polos iguales, $GO_1 = HO_2$ de manera que coincidan en AD las dos líneas de cierre de los polígonos funiculares $Ab'D$ y $Ac''D$ que se trazan enseguida; y hecho esto se trasportan las ordenadas del segundo de estos polígonos á ordenadas inclinadas $BB'' = Bb''$, $CC'' = Cc''$, etc. que forman con las ordenadas verticales del polígono y hácia atrás un ángulo, μ precisamente igual al que forman los dos planos que pasan por el eje y por cada una de las dos fuerzas Q_1 y Q_2. Si se toma enseguida $Bb = B''b'$, $Cc = C''c'$, $Ee = E''e'$, etc., se obtiene un polígono funicular *AbefcD*, cuyas ordenadas verticales (§ 44) suministran los momentos de flexion necesarios para determinar las dimensiones del árbol. La línea *befc* es una línea curva (arco de hipérbole), mientras que *Ab* y *cD* son simples líneas rectas. Si se traza á más $O_1O'_1$ paralela á $A1$, $O_2O'_2$ paralela á D_2 y por los puntos O'_1 y O'_2 se tiran las líneas O'_1J y O'_2K perpendiculares á $A1$ y á $D2$, AJ y DK representan las presiones P_1 y P_2 de los gorrones, los cuales deben medirse uno y otro en la escala adoptada para los polígonos de las fuerzas.

B. ÁRBOLES DE SECCIONES DE FORMAS COMPLEJAS.

§ 139

Seccion anular.

Para los árboles cuya seccion es una corona anular y que por ende tienen forma análoga á la de los tubos, se empieza por calcular los gorrones, como si fuesen huecos utilizando los datos del § 90; y luego conservando para la parte hueca la proporcion admitida en este primer cálculo, se determinan respecto al diámetro

del gorron hueco todas las demás dimensiones del árbol, conforme lo hemos hecho con los gorrones llenos. La relacion del vacio con el diámetro esterior que más generalmente se usa, es o'6.

Puede además este método de cálculo reemplazarse con el siguiente: despues de determinar todas las dimensiones del árbol, suponiendo la seccion circular y llena, se adopta el valor que se juzga más conveniente para la proporcion del vacio, y entonces se aumentan los diferentes diámetros que hemos hallado en la relacion indicada por el segundo miembro de la fórmula (95).

§ 140

Seccion en cruz. Tabla ó meseta.

Para los árboles de fundicion cargados en varios puntos una de las formas de las secciones más convenientes es la seccion en cruz, componiéndose en tal caso el cuerpo del árbol de cuatro nervaduras ó aletas y presentando cierta analogia con el gorron de aletas del § 102. La forma de los husos suele ser la de un conoide, como por ejemplo en la fig. 414. Para construir un árbol de esta especie se comienza por trazar el cuerpo (en punteado), como si debiese ser de seccion circular llena, luego se traza el perfil KS... de las nervaduras, reuniéndolo por un lado á la cabeza del árbol en K y por el otro al grueso (véase § 143) comprendido entre los dos husos. Si en este caso para una seccion cualquiera (x) del cuerpo se designa con

y el diámetro del árbol ideal de seccion circular llena,

h y b la altura y el espesor de las nervaduras,

se debe determinar b de manera que satisfaga la relacion:

$$\frac{y}{h}=\frac{b}{h}\sqrt[3]{\frac{16}{3\pi}}\sqrt[3]{1-\frac{b}{h}+\left(\frac{b}{h}\right)^2} \qquad (131)$$

Bajo el punto de vista del cálculo de los pesos importa conocer la proporcion de la superficie F_1 de la seccion en cruz con la superficie F de la seccion circular, proporcion que está espresada con esta fórmula:

$$\frac{F_1}{F}=\frac{4}{\pi}\frac{b}{h}\left(\frac{h}{y}\right)^2\left(2-\frac{b}{h}\right) \qquad (132)$$

El siguiente cuadro facilita mucho el uso de esas fórmulas.

$\frac{h}{y}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{F_1}{F}$	$\frac{h}{y}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{F_1}{F}$	$\frac{h}{y}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{F_1}{F}$
2'27	o'o5	o'63	1'65	o'13	o'84	1'37	o'22	o'94
2'14	o'o6	o'65	1'61	o'14	o'85	1'31	o'25	o'95
2'o3	o'o7	o'69	1'57	o'15	o'86	1'27	o'27	o'96
1'94	o'o8	o'73	1'53	o'16	o'87	1'22	o'3o	o'97
1'87	o'o9	o'76	1'5o	o'17	o'88	1'19	o'33	o'99
1'81	o'1o	o'78	1'47	o'18	o'89	1'15	o'36	o'99
1'74	o'11	o'8o	1'44	o'19	o'9o	1'1o	o'4o	o'99
1'69	o'12	o'82	1'42	o'2o	o'92	1'o6	o'45	1'oo

Para obtener el peso del cuerpo del árbol de aletas basta multiplicar el del árbol ideal de seccion circular, préviamente calculado, por el término medio aritmético de los diferentes valores de $F_1 : F$.

Ejemplo. *En cierto punto de la longitud el perfil del árbol de aletas tiene doble altura que el diámetro del árbol circular ideal, y en este caso se ve que segun la 2.ª columna y la 3.ª línea del cuadro anterior, la anchura de las nervaduras b debe ser igual á* o'o7 *de la altura. La 3.ª columna indica á la vez que la superficie de la seccion en cruz no vale más que los* 69/1oo *de la de seccion circular correspondiente.*

§ 141

Seccion de estrella.—Meseta.

Muy amenudo se emplea para los árboles de hierro colado la forma de seccion representada por la figura 415. Se empieza por trazar, como antes, el árbol circular ideal y el perfil de las nervaduras que generalmente se determina por consideraciones de aspecto. Despues se puede para cada seccion dar el espesor b de las nervaduras y buscar el diámetro k del cuerpo ó núcleo, ó al contrario proponerse determinar b, dándose k (suponiéndole constante, por ejemplo, en toda la longitud del árbol). En ambos casos el valor buscado debe corresponder á la relacion:

$$\frac{y}{h}=\sqrt[3]{\left(\frac{k}{h}\right)^4+\frac{16}{3\pi}\frac{b}{h}\left[1-\left(\frac{k}{h}\right)^3\right]} \qquad (133)$$

que ha servido para trazar la tabla que vamos á dar á continuacion.

Como el núcleo tiene en el punto K un diámetro menor que el de la cabeza del árbol y presenta por

tanto una resistencia más débil, es lógico y racional, como lo indica la figura, dejar á las nervaduras en este punto cierta saliente en la cabeza, á fin de compensar esa disminucion de resistencia. No presenta ninguna dificultad el establecimiento de esta saliente merced á la presencia del cuello K.

$\frac{b}{h}$	VALORES DE $\frac{h}{y}$, PARA $\frac{k}{h}=$												
	o'80	o'75	o'70	o'65	o'60	o'55	o'50	o'45	o'40	o'35	o'30	o'25	o'20
o'05	1'30	1'40	1'50	1'61	1'72	1'84	1'94	2'04	2'15	2'18	2'22	2'26	2'27
o'06	1'30	1'39	1'48	1'58	1'68	1'79	1'87	1'95	2'02	2'07	2'11	2'13	2'14
o'07	1'29	1'38	1'46	1'56	1'65	1'74	1'82	1'89	1'94	1'98	2'00	2'02	2'02
o'08	1'28	1'36	1'45	1'53	1'62	1'70	1'76	1'83	1'87	1'91	1'93	1'93	1'93
o'09	1'27	1'35	1'43	1'51	1'59	1'66	1'72	1'77	1'81	1'84	1'86	1'87	1'87
o'10	1'27	1'34	1'42	1'49	1'56	1'63	1'68	1'72	1'75	1'78	1'80	1'80	1'81
o'11	1'26	1'33	1'40	1'47	1'54	1'60	1'64	1'68	1'71	1'73	1'74	1'75	1'75
o'12	1'25	1'32	1'39	1'45	1'51	1'57	1'61	1'64	1'67	1'68	1'69	1'70	1'70
o'13	1'25	1'31	1'38	1'43	1'49	1'54	1'58	1'61	1'63	1'64	1'65	1'65	1'65
o'14	1'24	1'30	1'36	1'42	1'47	1'51	1'55	1'57	1'59	1'60	1'61	1'61	1'61
o'15	1'23	1'29	1'35	1'40	1'45	1'48	1'52	1'54	1'56	1'57	1'58	1'58	1'58
o'16	1'23	1'28	1'34	1'38	1'43	1'46	1'49	1'52	1'53	1'54	1'55	1'55	1'55
o'17	1'22	1'27	1'33	1'37	1'41	1'45	1'47	1'49	1'50	1'51	1'52	1'52	1'52

EJEMPLO. *Para cierta seccion del cuerpo del árbol se tiene* $\frac{h}{y}=2$ *y* $\frac{k}{y}=o'6$, *es decir* $\frac{k}{h}=o'3$. *Segun esa tabla se debe tomar* $b=o'07$ *(columna 12, línea 3).*

En la fig. 415, donde se ha supuesto b constante, deben determinarse los diferentes valores de k. En los casos ordinarios basta perfectamente conocer dos diámetros del núcleo entre dos puntos de aplicacion de las cargas (por ejemplo los diámetros correspondientes al tercio y á los dos tercios de su longitud), y hacer pasar por estos puntos un tronco de cono, que así sustituye á la superficie representada por la ecuacion anterior (conoide); y como por otra parte el empleo de la tabla se presta muy fácilmente á determinar el perfil del núcleo, nada más sencillo que obtener, si se quiere, mayor número de puntos.

En la fig. 416 que representa un árbol cargado en tres puntos, suponiéndose k constante se ha de determinar b conservando igualmente al huso a una seccion en estrella. Las cabezas en el medio y en los estremos presentan una hinchazon destinada á permitir el establecimiento de clavetes; la cabeza del medio está reforzada por ocho nervaduras indicadas en uno de los cortes trasversales. En el estremo de cada gorron está fijo otro gorron auxiliar más pequeño, que es de gran alivio en la colocacion de árboles de esta especie, cuando alcanzan un peso considerable.

§ 142

Arbol de nervaduras terminadas por un reborde. Tabla.

Para los árboles que han de soportar cargas considerables suele recurrirse á la forma de seccion representada en las figuras 417 y 418 y que se compone de nervaduras en cruz dotadas de rebordes en sus estremos. En este caso, como en los anteriores, despues de trazar el árbol circular ideal, de diámetro d, se elige el perfil, es decir la altura h, para cada una de las secciones. Si para cada seccion suponemos que el espesor c del reborde sea exactamente igual al espesor b de la nervadura, tendremos que tomar en el caso de la fig. 417 para la anchura b_1:

$$\frac{b_1}{b}=1+\frac{\frac{3\pi}{16}\left(\frac{y}{h}\right)^3-\frac{b}{h}-\left(\frac{b}{h}\right)^3}{6\left(\frac{b}{h}\right)^2-12\left(\frac{b}{h}\right)^3} \qquad (134)$$

fórmula que ha servido para calcular el siguiente cuadro:

VALORES DE $\frac{b_1}{b}$, PARA $\frac{h}{y}=$

$\frac{b}{h}$	1'10	1'20	1'30	1'40	1'50	1'60	1'70	1'80	1'90	2'00
0'05	—	—	—	—	—	7'94	6'17	4'81	3'64	2'75
0'06	—	—	—	—	6'99	5'38	4'13	3'17	2'34	1'07
0'07	—	—	—	6'70	5'12	3'91	3'45	2'24	1'61	1'01
0'08	—	—	6'82	5'16	3'91	2'96	2'22	1'65	1'17	—
0'09	—	—	5'45	4'11	3'10	2'33	1'73	1'01	—	—
0'10	—	6'00	4'48	3'37	2'53	1'89	1'39	—	—	—
0'11	—	5'05	3'77	2'82	2'11	1'57	1'15	—	—	—
0'12	6'56	4'34	3'23	2'42	1'80	1'34	—	—	—	—
0'13	5'73	3'78	2'81	2'10	1'56	1'15	—	—	—	—
0'14	5'06	3'34	2'48	1'85	1'38	1'01	—	—	—	—
0'15	4'53	2'98	2'21	1'65	1'22	—	—	—	—	—
0'16	4'09	2'69	2'00	1'48	1'11	—	—	—	—	—
0'17	3'73	2'45	1'81	1'35	—	—	—	—	—	—

Como en realidad $\frac{b_1}{b}$ no puede bajar más de 1 y nunca se permite que pase de 7, los valores inscritos en la tabla anterior están comprendidos, por lo que toca á dicha proporcion, entre estos límites. Además debemos ceñirnos á determinar algunos puntos por medio de esa tabla y reunirlos por una línea contínua.

La forma de seccion de la fig. 417 que emplean mucho los constructores ingleses, reporta la ventaja de exigir muy corta cantidad de materia, por cuya razon conviene especialmente para las construcciones de cierta importancia. Los rebordes de las nervaduras dan al árbol un aspecto de fuerza que infunde la idea de una completa seguridad.

VALORES DE $\frac{h}{y}$, PARA $\frac{k}{h}=$

$\frac{b}{h}$	0 80	0'73	0'70	0'65	0'60	0'55	0'50	0'45	0'40	0'35	0'30	0'25	0'20
0'05	1'28	1'37	1'46	1'56	1'66	1'75	1'84	1'92	1'98	2'03	2'06	2'07	2'08
0'06	1'27	1'34	1'43	1'52	1'58	1'69	1'75	1'82	1'86	1'90	1'93	1'94	1'95
0'07	1'25	1'31	1'40	1'48	1'55	1'65	1'68	1'73	1'77	1'80	1'82	1'82	1'83
0'08	1'23	1'29	1'38	1'44	1'51	1'57	1'62	1'66	1'69	1'71	1'72	1'72	1'73
0'09	1'22	1'27	1'35	1'41	1'47	1'52	1'56	1'59	1'62	1'63	1'64	1'65	1'65
0'10	1'20	1'25	1'32	1'37	1'43	1'47	1'51	1'53	1'55	1'57	1'58	1'59	1'59
0'11	1'19	1'23	1'30	1'34	1'39	1'43	1'46	1'48	1'50	1'50	1'51	1'52	1'52
0'12	1'17	1'21	1'27	1'32	1'35	1'39	1'41	1'43	1'45	1'46	1'47	1'47	1'47
0'13	1'16	1'19	1'25	1'29	1'32	1'35	1'37	1'39	1'40	1'41	1'42	1'42	1'42
0'14	1'14	1'17	1'23	1'26	1'29	1'32	1'34	1'35	1'36	1'36	1'37	1'37	1'37
0'15	1'13	1'15	1'21	1'24	1'27	1'29	1'31	1'32	1'33	1'33	1'34	1'34	1'34
0'16	1'12	1'14	1'19	1'22	1'24	1'26	1'28	1'29	1'29	1'30	1'30	1'30	1'30
0'17	1'10	1'12	1'17	1'20	1'22	1'24	1'25	1'26	1'26	1'26	1'26	1'27	1'27

En la forma representada por la fig. 418 se tiene siempre para el espesor del reborde $c=b$; pero su anchura es constante é igual á $2b$; en cuyo caso debe el espesor del núcleo k ser variable. La proporcion $\frac{k}{h}$ debe elegirse de manera que satisfaga á la relacion:

$$\frac{y}{h}=\sqrt[3]{\left(\frac{k}{h}\right)^4+\frac{16}{3\pi}\left[\frac{b}{h}\left(1-\frac{k^3}{h^3}\right)+6\frac{b^3}{h^2}-\left(11+\frac{k}{h}\right)\frac{b^3}{h^3}\right]} \qquad (135)$$

El empleo de esa fórmula puede reemplazarse con ventaja con la tabla anterior. Para este último árbol, lo mismo que para todos los de nervaduras que hemos examinado hasta ahora, se modifica el perfil longitudinal hasta que se consigan líneas que en todas las posiciones presenten un aspecto satisfactorio, sin apartarse mucho, empero, de la forma rigurosa.

EJEMPLO. *Para una seccion contigua á la cabeza*

del árbol la altura del perfil $h=1'5$ *y* $b=\frac{1}{10}\,h$; *para cuyos valores que corresponden á la columna* 8 *y á la línea* 7, *la línea* 1 *da* $k=0'5\,h$.

En el dispositivo de la fig 418 las ranuras para el claveteado se practican en nervaduras especiales intercaladas entre las nervaduras principales, de suerte que la cabeza del árbol presente en seccion la forma de una cruz de ocho brazos. Dispuestas así las ranuras con la ventaja de ser accesibles por sus dos estremos, son muy preferibles á las que se practicaban primitivamente en las nervaduras principales delante de las salientes K.

§ 143

Trazado de los perfiles de las nervaduras de los árboles.

Para efectuar el trazado de las líneas de escasa curvatura que deban limitar el perfil de los árboles de nervaduras ó aletas, puede emplearse uno de los métodos siguientes. (Figs. 419 á 422.) En las figuras que corresponden á esos diferentes métodos AB representa el eje geométrico del árbol, S el punto más alto (conocido) de la curva del perfil, K el punto igualmente dado en que esa curva se detiene en la cabeza del árbol.

1. *Arco de círculo.* Ese género de perfil solo es admisible para los trazados en pequeña escala, que pueden efectuarse por medio de gálibos circulares.

2. *Parábola* (fig. 419). Se trazan SD y CK paralelas á AB, y se divide SD y CK en n partes iguales (seis por ejemplo). Por los puntos de division I, II, III,... de SD se trazan perpendiculares á CK, y por el punto S se tiran las líneas $S1$, $S2$, $S3$,... que por sus intersecciones con las perpendiculares I, II, III,... dan cierto número de puntos de la parábola.

3. *Sinusoide* (fig. 420). Trazánse como ántes las líneas SD y CK paralelas á AB; del punto A como centro con el radio AS se describe un círculo y se divide el arco SE, comprendido entre el punto S y la línea CK, en n partes iguales (seis por ejemplo). Se hace lo mismo con la línea SD, y por los puntos de division 1, 2, 3, se trazan paralelas á AB, que por sus intersecciones con las perpendiculares bajadas á esa misma línea de los puntos I, II, III,... suministran otros tantos puntos de la curva buscada.

4. *Línea elástica.* Se toma una regla prismática de seccion cuadrada (fig. 421), que se encorva con mucho cuidado obrando sobre ella por presion en los puntos K_1, K_2 y S; y cuando se ha llegado á la curvatura cuya flecha CS tenga el tamaño deseado, se utiliza para trazar la curva. En las construcciones de cierta importancia se deben usar reglas de 20 á 30 milímetros de espesor, que se conservan bajo el agua. En los pequeños trazados sobre tablas de dibujar ordinarias conviene no emplearlas de espesor inferior á 5 milímetros.

5. *Cardioide.* El método que vamos á indicar se usa en gran número de talleres, y con preferencia se emplea para trazar directamente la curva del perfil sobre la tabla misma preparada para formar una nervadura del modelo del árbol. Para efectuar ese trazado se prepara primero un calibre de madera $S'KEC$ (figura 422), cuyas dimensiones $C'S'=CS$ y $CE=CK$ están dadas por la posicion de los puntos S y K que se trata de unir con una curva. Despues de fijar en C y K dos fuertes puntas, se mueve el calibre procurando con cuidado apoyar siempre el lado CE en la punta K. En este movimiento el punto S' del calibre describe un arco de cardioide que llena perfectamente el objeto propuesto, y fijando en el punto S' un lápiz plomo, puede obtenerse directamente, como hemos dicho, el trazado de la curva en la tabla que ha de representar una de las nervaduras del modelo.

Para los trazados que han de efectuarse en las tablas de dibujar ordinarias el procedimiento más cómodo consiste en determinar ante todo cierto número de puntos de la curva por uno de los métodos 2 ó 3, y trazarla luego con una regla delgada que se encorva de modo que pase por esos diferentes puntos.

§ 144

Ejes de madera.

En las ruedas hidráulicas se encuentra aun bastante número de ejes de roble ó encina, cuya seccion es un polígono regular. Escepto los estremos, que deben estar dispuestos de una manera especial, segun el modo de fijacion adoptado por los gorrones (véase § 102), estos árboles son prismáticos, y su diámetro es por consiguiente en todos los puntos el exigido por la seccion en que se produce la tension máxima. Para determinar el diámetro de un eje de roble se busca primero el de la cabeza del árbol de hierro colado y cargado igualmente (véase § 129 á 137) y se multiplica este último por 1'55 (esto es por la raiz cúbica de la proporcion de los coeficientes de resistencia del hierro colado y de la madera, que son respectivamente 7'5 y 2). El diámetro así obtenido puede en ciertos casos ser harto débil, como por ejemplo, cuando la cabeza

del árbol debe estar armada de brazos clavados directamente en la madera; pero es suficiente cuando la seccion está llena. Encontrándose ese diámetro inferior al que exige la fijacion de los gorrones, es necesario aumentarlo y darle en toda la longitud las dimensiones que esa fijacion reclama. Para los ejes de ruedas hidráulicas la eleccion que se hace entre el hierro colado y la madera depende esencialmente de las circunstancias locales, de los precios comparativos, etcétera.

Ejemplo. *Un árbol de rueda hidráulica cuya mitad de alcance sea de* 2400 *milímetros, soporta una carga tal que sus gorrones de hierro colado deban tener* 90 *milímetros de diámetro y por tanto* 120 *de largo. Conforme con las indicaciones del* § 130, *conviene tomar para el diámetro de la cabeza del árbol de fundicion:*

$$D = 90 \sqrt[3]{2400 : 60} = 90 \sqrt[3]{40} = 308^{mm}.$$

Para un árbol de madera se tendria $D' = 1'55 \cdot 308 = 477^{mm}$.

CAPÍTULO NOVENO

ARBOLES DE TRASMISION

§ 145

Cálculo de los árboles cilíndricos.

En la construccion de máquinas se designa con el nombre de árboles de trasmision los destinados á trasmitir movimientos de rotacion. Conviene dar á esos árboles dimensiones suficientes para que bajo la accion de las fuerzas que producen la rotacion, no sufran deformaciones, ni siquiera débiles. A más de los esfuerzos de torsion comunmente los árboles de trasmision tienen que sufrir esfuerzos de flexion, determinados por los pesos y presiones de las ruedas dentadas, poleas, palancas, etc., instaladas en sus diferentes puntos. Ante todo dejaremos por completo á un lado este último género de esfuerzos, y nos limitaremos á dar las fórmulas relativas al cálculo de los árboles cilíndricos llenos, de hierro forjado ó fundido.

Si para un árbol de esa especie designamos con

P la fuerza que produce el movimiento de rotacion, en kilógramos,

R el brazo de palanca sobre el cual actua, en milímetros,

N el número de caballos que el árbol debe trasmitir,

n el número de vueltas por minuto,

d el diámetro del árbol,

L su longitud, espresada (escepcionalmente) en metros,

θ° el ángulo de torsion, en grados,

S la tension que determina la torsion en la circunferencia del árbol.

G el coeficiente de torsion ($^{2}/_{5}$ del coeficiente de elasticidad E),

debemos tomar teniendo en cuenta únicamente la resistencia:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi S} PR} \qquad (136)$$

y teniendo en cuenta la torsion:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi G} \frac{1000 \cdot L}{\theta^\circ} \frac{360}{2\pi} PR} \qquad (137)$$

Para dar al árbol el mismo coeficiente de seguridad que á los gorrones, convendria en rigor tomar para S (V. § 5) los $^{4}/_{5}$ únicamente de la tension límite admitida en el cálculo de esos órganos; más como en verdad

el exámen de varias instalaciones esmeradas conduce al mismo valor para la tension en ambos casos, podemos hacer $S=6$ para los árboles de hierro forjado y $S=3$ para la fundicion. Sustituidos esos valores en la fórmula (136) dan para los árboles de hierro forjado:

$$d=0'95\sqrt[3]{PR}=84'7\sqrt[3]{\frac{N}{n}} \qquad (138)$$

para los árboles de fundicion:

$$d=1'19\sqrt[3]{PR}=106'7\sqrt[3]{\frac{N}{n}} \qquad (139)$$

Con respecto á la torsion para que la trasmision se efectue de un modo conveniente importa que el ángulo de torsion θ no pase $^1/_4$ de grado por metro corriente, es decir que se debe poner $\theta^0=^1/_4 L$.

De la fórmula (137) se deduce para los árboles de hierro forjado:

$$d=4'13\sqrt[4]{PR}=120\sqrt[4]{\frac{N}{n}} \qquad (140)$$

para los árboles de fundicion:

$$d=4'91\sqrt[4]{PR}=143\sqrt[4]{\frac{N}{n}} \qquad (141)$$

En esas espresiones el cociente $\frac{N}{n}$ se deduce del momento estático PR por medio de la relacion: $PR=\frac{60\,.\,75\,.\,1000}{2\pi}\frac{N}{n}=716198\,\frac{N}{n}$ ó $716200\,\frac{N}{n}$. (142)

Esas fórmulas han servido para trazar la tabla que damos á continuacion para los árboles de hierro forjado. De la comparacion de los números suministrados por esa tabla resulta que un árbol sin dejar de ofrecer una seguridad completamente satisfactoria bajo el punto de vista de las deformaciones permanentes, puede tener dimensiones de todo punto insuficientes en el concepto de la torsion. Supongamos, por ejemplo, que un árbol de 8^m de longitud esté solicitado en uno de sus estremos por una fuerza de 100^k que obre sobre un brazo de palanca de 500^{mm} y que tenga simplemente que trasmitir ese momento de rotacion de 50000^{kmm} al otro estremo; segun la línea 2 de la tabla bastaria al efecto dar al árbol un diámetro de 35^{mm}; pero en la misma línea el número de la columna 4 indica que ese momento es unas diez veces mayor que el que se puede admitir para la torsion de un árbol de ese diámetro, y conforme lo que antes hemos dicho, el desplace de los dos puntos de los estremos, situados primitivamente sobre la misma fibra, corresponderia en este caso á un ángulo de $10\,.\,8\,.\,^1/_4=20$. Como segun lo que hemos admitido el ángulo de torsion no debe pasar de $^1/_4{}^0$ por metro corriente, debemos buscar en la columna 4 el momento dado, y si bien no se encuentra directamente en esa tabla, está comprendido entre los números de las líneas 7.ª y 8.ª. Luego debemos tomar para el diámetro un número intermedio entre los que en esas dos mismas líneas se encuentran en la columna 1; y así obtenemos unos 63^{mm} para el diámetro que conviene dar al árbol. Segun la columna 2 este árbol bajo el punto de vista de la resistencia podria someterse á un momento seis veces mayor que el de que tratamos.

Arboles de hierro forjado.

d	CALCULADOS SEGUN LA RESISTENCIA.		CALCULADOS SEGUN LA TORSION. (Arboles motores).	
	PR	$\frac{N}{n}$	PR	$\frac{N}{n}$
30	32968	0'046	2776	0'004
35	50511	0'071	5142	0'007
40	75398	0'105	8773	0'012
45	107354	0'150	14053	0'020
50	147263	0'206	21418	0'030
55	196096	0'274	31359	0'044
60	254470	0'355	44413	0'062
65	323536	0'452	61173	0'085
70	404088	0'564	82280	0'115
75	497012	0'694	108430	0'151
80	603187	0'842	140367	0'196
85	723501	1'010	178888	0'250
90	858835	1'199	224842	0'314
95	1010073	1'411	279126	0'390
100	1178100	1'645	342694	0'478
110	1568051	2'19	501738	0'71
120	2035756	2'84	710610	0'99
130	2588286	3'61	978768	1'37
140	3232706	4'51	1316493	1'84
150	3976088	5'55	1734888	2'42
160	4825498	6'74	2245879	3'14
170	5788005	8'08	2862215	4'00
180	6870679	9'59	3597465	5'02
190	8080588	11'28	4466022	6'24
200	9424800	13'16	5483104	7'66
220	12541231	17'51	8027813	11'21
240	16286054	22'74	11369764	15'88
260	20706285	28'91	15660293	21'87
280	25861651	36'11	21063892	29'41
300	31808700	44'41	37758214	38'76

NOTA. Los árboles que están espuestos á enérgicas variaciones de fuerza viva, como por ejemplo, los árboles de laminadores, de volantes, etc., presentan dimensiones notoriamente superiores á las que darian las fórmulas siguientes. Los árboles de esa especie constituyen una construccion especial, que no está sometida á los principios generales que hemos admitido.

Para los árboles de corta longitud en que naturalmente el valor de θ es siempre muy pequeño, la consideracion del ángulo de torsion no tiene más que secundaria importancia. Así pues, en principio convendria para cada caso particular tener en cuenta la longitud del árbol para determinar la magnitud del ángulo de torsion que podria admitirse como límite.

Esa tabla que damos para los árboles de hierro forjado puede tambien servir para los árboles de hierro fundido con la condicion de tomar en cada caso para d el número correspondiente á un valor doble del que se da para PR ó bien $N : n$.

La carga límite admitida para el acero representa los $^{2}/_{3}$ de la del hierro forjado, y de ahí resulta que para obtener los diámetros de árboles de acero basta multiplicar los que da la tabla para los árboles de hierro forjado, respectivamente por $\sqrt[3]{0{,}6}$ ó 0'84 y $\sqrt[4]{0{,}6}$ ó 0'88, segun se calculen bajo el punto de vista de la resistencia, ó por el contrario bajo el punto de vista de la torsion.

§ 146

Aplicacion de los árboles de hierro forjado.

1.er Ejemplo. *Una cadena de grua ejerce un esfuerzo de* 2700^{k} *tangencialmente al tambor por el cual está arrollada y cuyo radio (medido hasta el eje de la cadena) es de* 185^{mm}. *¿Qué diámetro debe darse al árbol de hierro forjado del tambor para que pueda trasmitir ese esfuerzo? En este caso tenemos* $PR = 2700 \cdot 185 = 599500$, *y como no se debe tener en cuenta más que la resistencia, la línea* 10, *columna* 2, *indica que se debe tomar* $d = 75^{mm}$; *y esa dimension ha de aumentarse lijeramente á causa del esfuerzo de flexion á que se encuentra igualmente sometido el árbol (véase* § 151*).*

2.° Ejemplo. *Una turbina debe trasmitir un trabajo de* 92 *caballos por medio de un árbol horizontal de hierro forjado, con una velocidad de* 114 *vueltas por minuto y una longitud de* 2'6^{m}. *Para determinar el diámetro que ha de darse á ese árbol, notemos que aquí* $N : n = 92 : 114 = 0{,}807$. *En cuanto á la resistencia bastaria segun la tabla (columna* 3, *líneas* 10 *y* 11*) tomar para ese diámetro* 78^{mm} *poco más ó ménos. Pero si se quiere que el ángulo de torsion no pase por metro de longitud de* $^{1}/_{4}°$, *lo cual corresponde á* $^{2}/_{3}°$ *para la longitud total, la misma tabla indica (columna* 5, *líneas* 16 *y* 17*) que se debe tomar* $d = 115^{mm}$. *En una instalacion en que los datos eran idénticamente los mismos que para nuestro ejemplo, se dió al árbol intermedio un diámetro* $d = 135^{mm}$, *lo que dió por resultado disminuir aun el valor que habíamos admitido para el ángulo de torsion. Una parte del aumento del diámetro puede además considerarse como correspondiente á los esfuerzos de flexion. Con el diámetro* $d = 115^{mm}$ *el árbol ofrece una resistencia superior á la del primer caso en la relacion de* $115^{3} : 78^{3}$, *ó de* 3'18 : 1.

§ 147

Arboles de trasmision de las máquinas.

En los cálculos anteriores relativos á los diámetros de los árboles no hemos tenido en cuenta las fuerzas que pueden tender á darles movimiento de flexion. Realmente existen siempre fuerzas de esta especie, escepto en los casos en que el movimiento de rotacion se produce por verdaderos acoplos. Para los árboles de trasmision de las fábricas las fuerzas que tienden á producir la flexion consisten las más de las veces en tensiones de correas y en presiones de ruedas dentadas, á las que conviene añadir los pesos de diversos órganos. Si quisiéramos formarnos exacta idea de todas esas fuerzas, nos veríamos obligados á hacer cálculos en estremo complicados. Además muy amenudo se dan en la práctica largas proporciones á esos árboles sin cambio de diámetro, para poder desalojar, cuando se quiera, las poleas de las correas que generalmente sirven para trasmitir el trabajo (1). Con tales proporciones ó alcances se obtienen valores perfectamente admisibles, limitándose á calcularlos por las fórmulas de torsion (140) ó (141), segun se trate de árboles de hierro forjado ó fundido. Presentando, como hemos visto, los árboles así calculados una resistencia comunmente muy alta, resulta que sin vacilar pueden despreciarse las fuerzas de flexion que antes hemos indicado y que tienen valores relativamente escasos. Para llegar á disminuir el diámetro basta aumentar el número n de vueltas por minuto, número que se eleva á 60 y 80, á 120, 140, 200 y aun más, cuando la máquina movida ha de girar muy rápidamente. Los árboles motores verticales tienen en general una velocidad de rotacion más ténue que la de los árboles horizontales; y cuando un árbol vertical atraviesa varios pisos, se le disminuye á cada uno de ellos en una cantidad

(1) El empleo de poleas partidas en dos piezas, muy generalizadas hoy, permite naturalmente evitar esas proporciones ó alcances.

correspondiente al trabajo trasmitido al piso inferior. Los árboles verticales de esa especie se ejecutan á veces de fundicion; pero esa materia que en otro tiempo se empleaba para las trasmisiones horizontales largas que no debian trasmitir ningun trabajo en su trayecto está hoy limitada á muy escaso uso.

La determinacion de los diámetros de los árboles ofrece en la práctica muy graves contradicciones. Así es que ciertos árboles, cuya solidez ha de ser condicion esencial, se encuentran sometidos á tensiones muy elevadas, como por ejemplo, los árboles de manivela de las locomotoras, para los cuales la tension se eleva hasta 9 ó 10^k, y los árboles de hélice de los barcos de vapor, donde puede alcanzar hasta 5 ó 6^k. En cambio, en gran número de talleres hay árboles de trasmision que han de soportar muy escasa tension (lo que suele dimanar de haberlos calculado, no sin razon, teniendo á la mira la torsion), y conviene añadir que en otros talleres no se observan los mismos principios, y que los árboles á causa de la debilidad relativa de sus diámetros sufren muy considerables torsiones.

El exámen comparativo de los árboles de trasmision en las diferentes instalaciones, presenta además grandes dificultades con motivo de la incertidumbre que en general existe sobre el trabajo realmente trasmitido por un árbol, y que á veces no tiene la menor relacion con el trabajo nominal para cuya trasmision se colocara primeramente dicho árbol. Nos limitaremos, pues, á observar que el empleo de las fórmulas que antes hemos dado para la torsion conduce á valores que, ligeramente aumentados para los árboles de grande longitud, presentan muy satisfactoria concordancia con los valores que pueden deducirse del exámen de gran número de instalaciones.

Algunos ejemplos harán más inteligibles las observaciones que preceden y que unidas á las del párrafo anterior ofrecen muy notoria utilidad para el constructor.

1.er EJEMPLO. *En un gran barco de guerra cuyas máquinas fueron fabricadas en los talleres de Indret el árbol de la hélice va gobernado por dos émbolos de vapor que ejercen una presion de* 80000^k *sobre dos manivelas de* 550^{mm} *de longitud, caladas en ángulo recto. Entre la parte angular y la hélice mide ese árbol una longitud de* 22 *metros y un diámetro de* 380^{mm}. *Si calculamos ese árbol teniendo simplemente en cuenta la resistencia, y como quiera que* $PR = 2\sqrt{1/2}.\ 80000. = 62216000^{kmm}$, *debemos tomar segun la fórmula* (138),

$$d = 0{,}95 \sqrt[3]{62216000} = 376^{mm},$$

valor que se aproxima mucho al de la ejecucion y que corresponde á una tension máxima de 6^k *en la circunferencia. Si quisiéramos en cambio imponer la condicion de que el ángulo de torsion no pasase de* $1/4°$ *por metro ó sea para toda la longitud,* $22/4°$, *se deberia tomar segun la fórmula* (140),

$$d = 4{,}13 \sqrt[4]{62216000} = 367^{mm},$$

valor levemente inferior al que da la consideracion de la resistencia. Con la cifra admitida para la ejecucion el valor del ángulo total de torsion debe estar ligeramente sobre $5\ 1/2°$,

2.° EJEMPLO. *En la fábrica de hilados de Saltair un árbol vertical de fundicion que da* 92 *vueltas por minuto, debe trasmitir un trabajo de* 300 *caballos: su diámetro es de* 10 *pulgadas inglesas ó* 254 *milímetros. Calculando ese árbol segun la fórmula de torsion* (141), *encontraríamos* $d = 143 \sqrt[4]{300 : 92} = 192{,}2^{mm}$, *valor que no abarca los* $3/4$ *del que se adoptó en la práctica. Todos los árboles de dicha fábrica se instalaron en iguales condiciones de resistencia que el árbol principal.*

3.er EJEMPLO. *En un laminador establecido en un salto del Rhin, un árbol de hierro forjado que mide* 68 *metros de longitud, debe trasmitir á los cilindros un trabajo de* 120 *caballos suministrado por una turbina. El número de vueltas de ese árbol es de* 95 *por minuto, y en consecuencia* $N : n = 120 : 95 = 1{,}263$. *No teniendo en cuenta más que la torsion se deberia tomar* $d = 126^{mm}$ (*columna* 5, *líneas* 17 *y* 18), *mientras que no haciendo caso más que de la resistencia la misma tabla da* $d = 92^{mm}$ (*col.* 3, *líneas* 13 *y* 14). *El constructor dió en realidad* 96^{mm} *á los gorrones, que son en número de* 32, *y* 100^{mm} *al cuerpo del árbol. El máximo de tension correspondiente es de* $5{,}2^k$ *en la circunferencia de los gorrones y de* $4{,}6^k$ *solamente para el cuerpo principal. El constructor de la fábrica de Saltair* (1) *habria dado á ese árbol un diámetro de* 200^{mm} *á lo ménos, correspondiente á una resistencia ocho veces mayor poco más ó ménos que la que se adoptó realmente.*

4.° EJEMPLO. *En la hilanderia de Logelbach un árbol de hierro colado, de* 210^{mm} *de diámetro, cuya velocidad de rotacion es de* 27 *vueltas por minuto, sirve para trasmitir un trabajo de* 140 *caballos* (*medido con el freno*). *La relacion* $N : n$ *es entonces* $140 : 27 = 5{,}19$.

(1) Fairbairn, que para los casos análogos, propuso la fórmula $d = 160 \sqrt[3]{\frac{N}{n}}$.

Como aquí se trata de un árbol de fundicion, debemos doblar el valor de esa relacion, y así encontramos que el valor de d está comprendido entre 200 *y* 220 (*columna* 5, *líneas* 25 *y* 26): *un cálculo mas exacto da* $d=225^{mm}$, *valor que es muy sensiblemente el adoptado en la práctica. Haciendo simplemente caso de la resistencia se habria encontrado, segun la misma tabla,* $d=185^{mm}$ (*col.* 3, *líneas* 23 *y* 24).

5.° EJEMPLO. *La misma fábrica tiene otra trasmision de hierro colado de* $25'5^{m}$ *de longitud, que con una velocidad de* 50 *vueltas por minuto debe trasmitir un trabajo de* 270 *caballos* (*medido con el freno*); *lo cual da* 5'4 *para el cociente* $N:n$. *Los gorrones de esa trasmision tienen un diámetro de* 175^{mm}, *y en cuanto al cuerpo del árbol, que está lijeramente abultado, presenta en seccion una forma semejante á la de la figura* 415. *Se le puede suponer reemplazado por un cuerpo cilíndrico de* 215^{mm} *de diámetro, que tenga aproximadamente la misma resistencia. Si buscamos en la tabla el diámetro que hay que dar á los gorrones teniendo solamente en cuenta la resistencia, importa como antes doblar la relacion* $N:n$, *y entonces se encuentra un número comprendido entre* 180 *y* 190, *ó más exactamente* 187^{mm}, *valor superior al admitido en realidad. A ese último diámetro que es de* 175^{mm}, *corresponde una tension* $S=3'67^{k}$. *Para el cuerpo del árbol, conviene á causa de su grande longitud determinar su diámetro por la fórmula de la torsion y buscarlo en la columna* 5 *para un valor de* $N:n$ *igual á* $2.5'4=10'8$. *Así encontramos que d está comprendida entre* 200 *y* 220; *y si la calculamos más exactamente por la fórmula* (141), *llegamos á* $d=143\sqrt[4]{5'4}=143.1'52=217^{mm}$, *valor que coincide muy sensiblemente con el que en la práctica se ha admitido.*

§ 148

Cálculo del ángulo de torsion de un árbol.

En un árbol cilíndrico de diámetro d que en toda su longitud L esté sometido á un momento de rotacion PR, el ángulo de torsion en materia cuyo coeficiente de elasticidad de torsion sea G, tiene el valor segun el § 13:

$$\theta^{o}=\frac{32.360}{2\pi^{2}}\,\frac{PR}{d^{4}}\,\frac{1000\,L}{G}=\frac{180\,S}{\pi G}\,\frac{1000\,L}{0'5\,d} \qquad (143)$$

fórmula que para el hierro forjado cuyo coeficiente $G=800^{o}$, da:

$$\theta^{o}=72'95\,\frac{PRL}{d^{4}}=14'32\,S\frac{L}{d} \qquad (144)$$

y para el hierro fundido un valor doble, ó sea:

$$\theta^{o}=145'9\,\frac{PRL}{d^{4}}=28'65\quad\frac{L}{d} \qquad (145)$$

Esas fórmulas en las cuales L representa la longitud del árbol espresada en metros y S la tension sobre el contorno de ese árbol, permiten como se ve, calcular fácilmente el ángulo θ para un valor conocido de S. No debe perderse de vista que S y d dependen el uno del otro, y que si por lo tanto se adopta para S, por ejemplo, cierto valor, deberá comenzarse, para aplicar una de las fórmulas precedentes, por determinar el valor correspondiente de d.

Cuando la trasmision del momento de torsion se opera en diferentes puntos repartidos en la longitud del árbol, pueden usarse además las fórmulas anteriores (V. § 13, y pág. 32 y 33), con la condicion de tomar, para L los valores siguientes:

a. la longitud entera del árbol (en metros), cuando el trabajo recibido en uno de los estremos es trasmitido enteramente por el otro;

b. la semi-longitud del árbol cuando la trasmision del trabajo se reparte uniformemente en toda la longitud, lo cual sucede comunmente para los árboles de cierta importancia;

c. el tercio de la longitud del árbol cuando el trabajo trasmitido decrece uniformemente desde el estremo en que dicho árbol lo ha recibido hasta el otro estremo (véase N.° III, § 13): ese modo de repartir el trabajo se realiza amenudo de una manera satisfactoria en los talleres en que existen aparatos que exigen esfuerzos diferentes;

d de una manera general el valor de la abcisa del punto de aplicacion de la resultante de las diversas resistencias que hay que vencer cuando tales resistencias están repartidas en el árbol de un modo cualquiera (véase número IV, § 13). Para determinar este punto se multiplica cada uno de los momentos resistentes, ó el trabajo correspondiente en caballos, por la distancia del punto de aplicacion de la resistencia al orígen del árbol, se suman esos diferentes productos, y se divide la suma obtenida por el trabajo total que debe trasmitirse.

Vamos á tomar como ejemplos de aplicacion algunos de los árboles calculados en el párrafo precedente.

1.er EJEMPLO. *Para el árbol de hélice del barco de Indret* (1.er *Ej.* § 148), $S=5'77^{k}$, $d=380^{mm}$ *y* $L=22^{m}$; *el ángulo de torsion de ese árbol es, pues, á lo sumo, y*

segun la formula (144) $\frac{14'32 \cdot 5'77 \cdot 22}{380} = 4\,{}^{7}/_{8}{}^{\circ}$, *y se reduce á* ${}^{7}/_{10}$ *de este valor ó sea* $3\,{}^{1}/_{8}{}^{\circ}$ *cuando una de las manivelas está en el punto muerto.*

2.° EJEMPLO. *El árbol del 3.er Ej. no tiene que trasmitir trabajo alguno en puntos intermedios; descansa en* 32 *cojinetes cuya longitud puede evaluarse para cada uno en* 100mm *y su torsion en esos cojinetes es relativamente más considerable que para el cuerpo mismo. Segun la fórmula* (144) *el ángulo de torsion tiene por espresion:*

$$\theta = 14'32\left[\frac{32 \cdot 0'1 \cdot 5'2}{96} + \frac{(68-3'2)\,4'6}{100}\right] = 14'32\,(0'173 + 2'981) = 45\,{}^{1}/_{8}{}^{\circ}.$$

Una torsion de esa importancia debe dar por resultado variaciones bastante notables en el trabajo trasmitido, y no seria admisible en una fabricacion que exigiese grande exactitud.

3.er EJEMPLO. *Dando á ese mismo árbol conforme á la regla propuesta por Fairbairn, un diametro de* 200mm *y notando que* $N : n = 1'263$, *se tendria segun la primera espresion de* θ° (144), $\theta = 72 \cdot 95 \cdot 716200 \cdot 1'263 \cdot 68 : 200^{4} = 3'87^{\circ}$.

4.° EJEMPLO. *Un árbol de hierro forjado que tenga* 50m *de largo y un diámetro constante debe trasmitir un trabajo total de* 70 *caballos á la velocidad de* 100 *vueltas por minuto; y supónese además repartido ese trabajo poco más ó ménos uniformemente en toda la longitud. Buscando ante todo el valor que ha de darse al diametro, se halla* (*col.* 5, *línea* 16) $d = 110^{mm}$. *Para determinar el ángulo de torsion debe tomarse para L la semi-longitud tan solo del árbol, y se tiene por lo tanto* $\theta = 72'95 \cdot 716200 \cdot 0'7 \cdot 25 : 110^{4} = 6'45^{\circ}$ *ó* $6\,{}^{1}/_{2}{}^{\circ}$. *Directamente se obtiene* $\theta = 6\,{}^{1}/_{4}{}^{\circ}$ *poniendo* $L = 25$ *y* $\theta^{\circ} = {}^{1}/_{4}\,L$, *siendo esta última espresion la que hemos admitido para establecer la fórmula* (140)

Si en un caso determinado pareciese harto considerable la torsion calculada como acabamos de indicar, podria aumentarse el diámetro, y como ese diámetro entra en la fórmula á la cuarta potencia, basta un aumento muy escaso para producir una disminucion importante del ángulo de torsion.

5.° EJEMPLO. *Si nos impusiéramos la condicion de que el árbol del ejemplo anterior no sufriese más que una torsion media de la que hemos hallado, seria menester multiplicar el diametro obtenido por* $\sqrt[4]{2}$ *ó por* 1'189, *debiendo por consiguiente tomarse* $d = 110 \cdot 1'189 = 130^{mm}$.

§ 149

Gorrones de rotacion de los árboles.

Los gorrones de árboles de trasmision están situados á los estremos ó en puntos intermedios: en el primer caso conviene calcularlos como los gorrones frontales; y en el segundo caso, que es el más comun, la longitud se determina por las indicaciones del § 92. Para las trasmisiones intermedias de los aparatos de fábricas y para gran número de árboles, es además completamente inútil determinar la longitud *l* de los gorrones con un cálculo especial. Cuando la longitud *l* del gorron no se encuentra limitada por circunstancias particulares (como por ejemplo, las que se encuentran en las locomotoras), podemos limitarnos á tomar $l = 1'5\,d$ ó $2\,d$. Véase los soportes de gorrones, cap. VI. Una longitud mayor da simplemente por resultado disminuir el desgaste. Bajo ese punto de vista conviene determinar una distincion entre los gorrones intermedios y los frontales, porque en estos últimos un aumento de longitud exige á la vez un aumento de diámetro.

Para las trasmisiones que deben fijarse en el pavimento se emplean más y más de algunos años á esta parte cajas de cojinetes articulados que pueden arreglarse de manera que abarquen exactamente los gorrones. En esa disposicion no tienen que temerse los inconvenientes de las cogidas, pues la proporcion $l : d$ es muy elevada y llega á veces hasta 4. (Véase los soportes de silla articulados, cap. VI).

§ 150

Secciones compuestas.—Arboles de madera.

Para determinar las dimensiones de los árboles de secciones compuestas (secciones anulares, en cruz, etcétera) se empieza por calcular el diámetro *d* de un árbol lleno cilíndrico (formado de la misma materia), de ese diámetro *d* se deducen todos los elementos buscados operando exactamente del mismo modo que para los árboles cargados trasversalmente (§§ 139 á 142). Para los árboles de madera (roble), el diámetro *D* del círculo inscrito en la seccion poligonal debe tomarse igual á lo ménos á 1'75 del diámetro del árbol de fundicion equivalente. Admitiendo ese último valor, que es precisamente la raiz cuarta de la proporcion 10000 : 1100 de los coeficientes de elasticidad de la fundicion y de la madera, el ángulo de torsion debe ser el mismo para

los dos árboles. Además, conforme hemos hecho observar, el uso de los árboles de madera es en estremo limitado.

§ 151

Arboles cargados.

Con la designacion de árboles cargados comprendemos aquí todos los árboles de trasmision que á más de los esfuerzos de torsion están sometidos á esfuerzos de flexion. Segun hemos notado antes, casi todos los árboles entran realmente en esta categoria; más para gran número de ellos se puede sin inconveniente prescindir de la tendencia á la flexion. En los casos en que los esfuerzos de flexion tengan demasiada importancia para que se les desprecie, nos hallamos inducidos á cálculos de resistencia compuesta. A fin de llegar al resultado de la manera más sencilla y cómoda, conviene trasformar los dos momentos estáticos de torsion y de flexion en un momento flexible ideal y calcular entonces el árbol dado suponiéndole sometido á la accion de ese momento. Antes hemos dado (§ 18) las fórmulas de trasformacion.

Si designamos por

M_t, el momento de torsion para una seccion,

M_f, el momento de flexion para la misma seccion,

el momento flexible ideal que puede reemplazar á los dos, tiene por espresion:

$$(M_f)_i = {}^5/_8 M_f + {}^5/_8 \sqrt{M_f^2 + M_t^2} \quad (146)$$

Para los cálculos numéricos se puede en virtud del teorema de *Poncelet* reemplazar esta fórmula con las siguientes espresiones aproximativas.

Cuando M_f es $> M_t$,

$$(M_f)_i = 0{,}975\, M_f + 0{,}25\, M_t. \quad (147)$$

Cuando M_f es $< M_t$,

$$(M_f)_i = 0{,}625\, M_f + 0{,}6\, M_t. \quad (148)$$

Vamos á aplicar sucesivamente á un ejemplo el método analítico y los procedimientos de la grafostática.

I. *Método analítico.* El árbol ABC representado por la fig. 423 lleva en C una rueda dentada R, sobre cuya circunferencia obra tangencialmente la fuerza Q; el cuerpo del árbol CB es entonces solicitado á la torsion por el momento $M_t = QR$; y esa fuerza Q tiende igualmente á que el eje tenga flexion y da lugar en los gorrones A y B á las reacciones $P_1 = Q\,\frac{s}{a+s}$ y $P_2 = Q\,\frac{a}{a+s}$. La seccion más espuesta está en C, como quiera que en este punto los dos momentos flexibles alcanzan su máximo $M_f = P_1 . a = P_2 . s$. Luego deben aplicarse ante todo á esta seccion los cálculos anteriores.

Ejemplo. *Suponiendo* $Q = 2500^k$, $R = 300^{mm}$, $a = 500^{mm}$, $s = 2000^{mm}$, *se encuentra ante todo* : $P_1 = Q . 2000 : 2500 = 0{,}8 . Q = 2000^k$ *y* $P_2 = Q . 500 : 2500 = 0{,}2 . Q = 500^k$. *Y además se tiene* : $M_t = 2500\ 300 = 750000$ *y* $M_f = 2000 . 500 = 1000000$. *Como* M_f *es aquí mayor que* M_t, *debe usarse la fórmula* (147) *obteniéndose así* : $(M_f)_i = 0{,}975 . 1000000 + 0{,}25 . 750000 = 1162500^{k\,mm}$, *espresion que permite calcular directamente el diámetro de la cabeza del árbol en C. Para un árbol de fundicion de seccion circular en C el diámetro D se deduce de la fórmula* $(M_f)_i = S\,\frac{\pi}{32} D^3$ *que para* $S = 3^k$, *da* $D = \sqrt[3]{1162500 . 32 : 3\pi} = 158^{mm}$. *El diámetro del gorron en A se obtiene con auxilio de la tabla del* § 91, *hallándose así* $d_1 = 75^{mm}$ *(col. 4, línea 11). El gorron intermedio en B está señalado en la tabla del* § 146; *y tomando para el momento de torsion un valor doble del que hemos calculado, puesto que se trata de un árbol de fundicion, se tiene aproximadamente* $d_2 = 110^{mm}$ *(columna 2, línea 16). Operando así, solo se tiene en cuenta la resistencia, sin atender para nada al ángulo de torsion.*

II. *Procedimiento grafostático.* Para tratar la misma cuestion con la grafostática se comienza por trazar (fig. 421) para el momento flexible el polígono funicular abc, cuya línea de cierre es horizontal; luego el polígono de las fuerzas $a10$, y así se obtienen las reacciones P_1 y P_2 á la vez que en acc' la superficie de los momentos para el huso AC.

Para determinar despues el momento M_t, basta trazar en el polígono de las fuerzas, á una distancia R del polo O, una ordenada vertical M_d, que es cabalmente igual á M_t. Si llevamos esa ordenada á $c'c_1$ y bb_1, tomando por otra parte en estas líneas $c'c_0 = bb_0 = {}^5/_8\, c'c_1$, para la longitud CB del árbol, $c'c_0\, b_0 b$ representará el rectángulo de torsion. Fáltanos ahora efectuar la composicion de los momentos de flexion y de torsion segun la fórmula (146). Tomemos al efecto $cc_2 = {}^3/_8\, cc'$ y tracemos la recta bc_2; y para un punto cualquiera del polígono, f por ejemplo, tendremos $ff_1 = {}^3/_8 ff'$. Si se rebaja $c'c_0$ de ab, en $c'c'_0$, en el triángulo rectángulo $c_2c'c'_0$, la hipotenusa $c_2c'_0 = \sqrt{({}^5/_8\overline{cc'})^2 + ({}^3/_8\overline{c'c_1})^2}$ y por consiguiente la suma $cc_2 + c_2c'_0 = cc_2 + c_2c_3$ repre-

senta el momento buscado $(M_f)_i$ para la seccion C; lo mismo que $ff_2+f_2f'_0=ff_2+f_4f_3$ da el momento $(M_f)_i$ para el punto F. La línea $c_3f_3b_0$ es una curva (hipérbole) que en el caso actual puede ser reemplazada con bastante aproximacion por la línea recta c_3b_0.

El polígono $acbb_0c_3c'$, que acabamos de obtener, permite determinar las dimensiones de los árboles cargados, operando como hemos hecho antes en los §§ 132 y siguientes.

Más adelante daremos otros ejemplos de la composicion de los momentos para los ejes de palancas y manivelas.

CAPÍTULO DÉCIMO

ENSAMBLES Y ACOPLAMIENTOS DE ÁRBOLES.

§ 152

Division de los acoplamientos.

Desígnanse con el nombre de acoplamientos los dispositivos que se emplean para enlazar entre sí las diferentes partes de los árboles de trasmision y asegurar de ese modo la comunicacion del movimiento de rotacion de una á otra.

Se distinguen varias especies de acoplamientos:

I los acoplamientos fijos;
II los acoplamientos móviles;
III los acoplamientos de destrabazon.

Los acoplamientos fijos constituyen el modo de union comun de los árboles que deben conservar una posicion invariable respecto unos de otros, girando alrededor del mismo eje geométrico. Los acoplamientos móviles están destinados á permitir en ciertos límites una variacion en la posicion relativa de los árboles que aquellos unen entre sí. Y por último, el tercer modo de acoplamiento permite efectuar cuando se quiera, durante la marcha la union ó la separacion de los dos árboles entre los cuales está establecido. Vamos á indicar sucesivamente las principales formas de dichos tres géneros de ensambles.

I. ACOPLAMIENTOS FIJOS.

§ 153

Acoplamientos por manguitos.

Los acoplamientos fijos están formados de una sola pieza ó de dos. La primera especie comprende los acoplamientos por manguitos representados con las figuras 425 y 426.

El manguito envuelve completamente los estremos de los árboles que importa reunir, y que en el segundo dispositivo están además entallados el uno en el otro.

En estos acoplamientos como en todos los que vamos á dar aquí, la dimension tomada como unidad es el espesor δ del manguito que se determina por la relacion

$$\delta = 5 + \frac{d}{3} \qquad (149)$$

en que d designa el diámetro del árbol suponiéndolo de hierro forjado. Para un árbol de fundicion se empieza por buscar el diámetro del árbol de hierro equivalente, y sustituyéndole en la forma anterior se obtiene el espesor δ que permite determinar los otros elementos del acoplamiento en virtud de las proporciones indicadas en las figuras. Las dimensiones del clavete están dadas por la fórmula (71) relativa á los clavetes de torsion (§ 68). De algun tiempo á esta parte se va tomando cada vez más la precaucion de cubrir la nuez del clavete con un casquete ó caja especial (cubre-clavete), fijado en el árbol; evitándose así completamente los peligros que para los obreros acarreaba la saliente del clavete cuando se enganchaba en sus vestidos.

Dentro del manguito se encuentran á veces unidos los dos estremos del árbol con un ensamble en forma de cola de golondrina (fig. 427); pero las más de las veces se usa tan solo un simple encaje ó talla (fig. 428). Los dispositivos de las figs. 426 y 427 tienen con respecto al último la ventaja de asegurar la trabazon de los árboles en el sentido longitudinal, á la vez que permiten conservar á uno y otro estremo las huellas de las puntas del torno.

La fig. 429 representa un ensamble formado de dos piezas. Este acoplamiento tiene la ventaja de no presentar saliente alguno, pues el clavete se encuentra cubierto enteramente por los cubos de los platos y las cabezas, asi como las tuercas de los pernos de ensamble se encuentran disimuladas por las nervaduras anulares de los platos, y están dispuestas normalmente á las superficies de union.

El número i de los pernos se indica con la espresion $i = 2 + {}^1/_{30}\, d$. Tomando para el diámetro esterior de los filetes $d_1 = 8 + {}^1/_8\, d$, se obtienen pernos que tienen bastante resistencia, aun cuando d se hubiese calculado por la fórmula (138), es decir, prescindiendo del ángulo de torsion. De ahí resulta que deben tener una seguridad relativamente considerable, cuando d está determinada por la fórmula (140), esto es, teniendo en cuenta la torsion; refiriéndose además en ambos casos el diámetro d á árboles de hierro forjado.

El acoplamiento por medio de platos, que desde mucho tiempo se emplea para las trasmisiones de fábricas en Inglaterra y Alemania, tiende á difundirse más y más en Francia, y tiene á más la ventaja de que algunos de los manguitos pueden utilizarse directamente como poleas.

Por otra parte se presta muy fácilmente al desmontaje de una parte de la trasmision.

La fig. 430 representa un modo de acoplamiento compuesto de una envoltura dividida en dos partes cuya superficie de union es un plano que pasa por el eje comun de los dos árboles que se han de enlazar. Este acoplamiento, lo mismo que el anterior, tiene la ventaja de no presentar ninguna parte saliente, por hallarse los dos clavetes longitudinales enteramente cubiertos por las partes que se hallan en contacto con los árboles, mientras que las cabezas y las tuercas de los pernos de ensamble se hallan disimuladas por las nervaduras circulares que hay á cada lado. Cuando este dispositivo está destinado á asegurar igualmente la trabazon de los árboles en sentido longitudinal, conviene practicar en cada uno de esos árboles una lijera ranura, en la que se encaja un reborde hecho al estremo correspondiente de la envoltura. Bajo el punto de vista de la resistencia no ofrece grave inconveniente el establecimiento de la ranura, cuando el diámetro d del árbol está determinado con respecto á la torsion, esto es, por la fórmula (140); pudiendo á más darle una profundidad bastante débil, y no dista mucho en general del valor $1{,}5^{mm} + {}^1/_{100}\, d$. Siempre y cuando no haya interés en asegurar la trabazon de los árboles en sentido de la longitud, se suprimen las ranuras. Cuando se considera conveniente dotar de contra-tuercas los pernos de ensamble, deben hundirse en la mitad de su altura las tuercas mismas, como lo indica la figura 430. En cuanto al número i de los pernos es, segun los casos, de 2, 4 ó 6 y rara vez de más. El diámetro esterior de los filetes se determina por las fórmulas siguientes:

Para $i =$	2	4	6 y más
	$d_1 = 10 + \frac{d}{6}$	$9 + \frac{d}{7}$	$8 + \frac{d}{8}$.

Ejemplo. *Para una trasmision cuyo diámetro es de* 60^{mm}, *el diámetro de los pernos de ensamble, sino se emplean más que dos, debe ser* $d_1 = 10 + \frac{60}{6} = 20^{mm}$; *para cuatro seria* $d_1 = 9 + \frac{60}{7}$, ó 18^{mm}, y para seis, $d_1 = 8 + \frac{60}{8}$, ó 16^{mm}.

La fig. 431 representa otro género de acoplamiento de envoltura cónica inventado por el autor. En este dispositivo la union de las dos piezas de la envoltura en el sentido trasversal está asegurado por un clavete ó chaveta anular que las cubre, evitándose así por completo las salientes esteriores.

Las dos mitades de la envoltura están dotadas de partes salientes en el interior, hechas con todo esmero, que se ajustan exactamente en ranuras correspondientes practicadas en los estremos de los árboles. Segun los números proporcionales inscritos en la figura y que,

como antes, se refieren al módulo $\delta = 5 + {}^1/_3\, d$, la inclinacion del cono es para cada lado de ${}^1/_{40}$, es decir la que se admite por los clavetes simples que deben permanecer en puesto fijo. Para evitar todo desplace en los árboles espuestos á choques, la parte más delgada de la envoltura está provista de un filete que se encaja en una parte igualmente fileteada del manguito que cubre. El rodete de este manguito tiene cuatro agujeros en los que se introduce una llave que permite apretarlo á fondo.

Para los árboles en que no han de temerse choques, puede suprimirse el filete y reemplazarlo por dos tornillos de presion, de acero, y de cabeza ahogada en el manguito. Por último, cuando las diferentes partes ensambladas no tienen la menor tendencia á desplazarse longitudinalmente con respecto unas de otras, pueden suprimirse tambien las ranuras. En los acoplamientos de cierta importancia, correspondientes á valores de d superiores á 60^{mm}, para disminuir el trabajo del torno y de alisadura, se pueden ahorrar pernos y huecos en el interior del manguito y en el esterior de las dos partes de la envoltura.

Como otro dispositivo que permite evitar pernos de ensamble y los clavetes, debemos á más citar el manguito de birolas cuyo uso se ha ido generalizando mucho estos años. Ese manguito se compone de una envoltura de hierro colado, lijeramente cónico en sus dos estremos y dividido en dos partes por un plano que pasa por su eje. Cuando esas dos partes están reunidas, el diámetro del agujero que forman debe ser lijeramente inferior al de los árboles que han de unirse, á fin de permitir cierta apretadura, debiendo estar los estremos de los árboles sin pulir y tal como salen del torno. La apretadura se verifica por medio de birolas de hierro de Suecia, que se encajan á cada estremo (1).

Designando por d el diámetro de los árboles, l la longitud del manguito, e y e' su espesor en medio y á cada estremo, m y n el espesor y anchura de las birolas, conviene tomar:

$$l = 5\,d;\quad e = 0{\cdot}60\,d;\quad e' = 0{\cdot}55\,d;\quad m = 0{\cdot}30d;\quad n = 0{\cdot}90\,d.$$

Hasta aquí hemos supuesto que los árboles que habian de enlazarse, eran de hierro forjado, y los números proporcionales inscritos en las figuras se refieren á esa hipótesis. Para los árboles de hierro colado, cuyo uso tiende, como hemos dicho, á restringirse más y más, podemos limitarnos á tomar para las dimensiones de los diferentes elementos una vez y media las que corresponden á los árboles correspondientes de hierro forjado. Más si hay empeño en proceder con más rigor y economizar todo lo posible el material, debe comenzarse por determinar en cada caso particular el diámetro ideal del árbol por la fórmula (139) y tomar el valor de d, así obtenido, como punto de partida del cálculo de las dimensiones.

(1) Para dar buenos resultados ese manguito ha de efectuarse con todo esmero.

II. ACOPLAMIENTOS MÓVILES.

§ 154

De los diferentes modos de movilidad de los acoplamientos.

En la trasmision de un movimiento de rotacion puede un acoplamiento dar tres géneros de desplace diferentes:

a. Un desplace longitudinal ó siguiendo la direccion de los ejes;

b. Un desplace trasversal ó perpendicular al primero;

c. Un desplace correspondiente á una variacion del ángulo de los ejes.

Es por lo demás muy evidente que puedan tenerse que realizar á la vez dos de esos movimientos ó quizás los tres.

En el primer caso los ejes geométricos de los árboles coinciden; en el segundo son paralelos, y en el tercero se cortan: en el movimiento resultante de la composicion de *b* y *c* dichos ejes se cruzan sin estar en un mismo plano. Esos diferentes géneros de desplaces se hallan realizados en la práctica.

§ 155

Acoplamientos móviles longitudinal y trasversalmente

Para permitir un desplace en el sentido de la longitud de los ejes basta trasmitir el movimiento de rotacion de un árbol al otro por medio de órganos de forma prismática. Como ejemplo de la disposicion que puede emplearse en tales casos, citaremos el manguito de garfas de *Sharp* (fig. 432). Este manguito que se compone de dos partes, no permite más que muy escasos desplaces, durante los cuales los sectores en juego obran más ó ménos unos sobre otros. Como permite igualmente una lijera variacion del ángulo de los ejes, su empleo ofrece ciertas ventajas para las trasmisiones en las que no se puede contar completamente con la posicion de los soportes. Desde poco tiempo acá se han adoptado para ese acoplamiento en diferentes ins-

talaciones una disposicion nueva que hace muy sencilla su construccion: se ha suprimido por completo la envoltura de garfas, de modo que se puede utilizar una de las mitades para fundir la otra mitad.

En los barcos de hélice en que se quiere evitar la posibilidad de levantarse ese órgano, se arma el árbol tendido con un acoplamiento dispuesto de manera que permita un desplace longitudinal suficiente, para que pueda retirarse del cubo de la hélice el estremo del árbol que en esta penetracion presenta una forma piramidal.

Como ejemplo de acoplamiento móvil en sentido trasversal citaremos la juntura de Oldham (fig. 433) que se compone de tres platos, dos de los cuales están calados á los estremos de los árboles: el tercero lleva en sus faces dos lengüetas prismáticas inclinadas una á otra 90° y cada una de las cuales se encaja en una ranura practicada en el plato que está situado al mismo lado. Cuando los ejes de los dos árboles coinciden de manera que sus proyecciones normales se confundan en un mismo punto O, por ejemplo, las lingüetas y las ranuras obran sin deslizarse, como verdaderas garfas. Pero si imaginamos que uno de los ejes sin dejar de ser paralelo á si propio, se aleja de O para ir á proyectarse, por ejemplo, en P, el centro del disco de las lengüetas llega á Q y durante el movimiento de de rotacion de los árboles se desplaza sobre el círculo $OQPQ'$, cuyo diámetro OP es precisamente igual á la distancia de los ejes, recorriendo por cada vuelta de los árboles dos veces dicho círculo. Los otros puntos de ese disco describen cardioides. La trasmision del movimiento de un árbol á otro se efectua de una manera uniforme (1). El módulo adoptado para los números proporcionales inscritos en la figura es aquí, como antes, $\delta = 5 + {}^1/_3 d$.

Los otros modos de acoplamientos que, como el anterior, permiten cierta movilidad en sentido trasversal se emplean muy poco y por tanto no nos detendremos en ellos.

(1) La juntura de Oldham se ha empleado tambien en Inglaterra en un barco de vapor como medio de trabazon entre los árboles de las manivelas de dos máquinas acopladas ó gemelas. (V. *Engineer*, 1866, pág. 171).

§ 156

Acoplamientos articulados.

Uno de los órganos móviles más generalizados que se destinan á trabar árboles es el acoplamiento de articulaciones en cruz que se designan con los diferentes nombres de juntura universal, juntura de Hooke, ó mejor todavia, juntura de Cardan (1). Ese mecanismo que permite una variacion del ángulo de los ejes entre ciertos límites, se compone de tres piezas, dos de las cuales están fijas en los estremos de los árboles que hay que unir, y el tercero es en el dispositivo más generalmente adoptado un crucero cada uno de cuyos brazos termina en gorron. Cada acoplo de gorrones se encaja en una de las dos primeras piezas. La trasmision del movimiento no se efectua de una manera uniforme (2); designando por α el ángulo de los ejes de los dos árboles, los ángulos de rotacion ω y ω_1 del árbol motor y del árbol reunido están relacionados segun la ecuacion

$$\frac{tg\,\omega_1}{tg\,\omega} = cos\,\alpha; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

siendo así el movimiento periódicamente variado y la longitud del periodo de 180°. De la fórmula se han deducido los valores siguientes para ω_1.

ω	$\alpha=10°$	20°	30°	40°
30°	29°38	28°29	26°34	23°51
45°	44°34	43°12	40°54	37°27
60°	59°34	58°26	56°22	53°04
90°	90°	90°	90°	90°
120°	120°26	121°34	123°38	126°56
135°	135°26	136°48	139°06	142°33
150°	150°22	151°31	153°26	156°01
180°	180°	180°	180°	180°

Esa tabla demuestra que para cortos valores de α las diferencias entre ω y ω_1 son poco importantes. Entre las velocidades angulares w y w_1 existe la relacion

$$\frac{w_1}{w} = \frac{cos\,\alpha}{1 - sen^2\,\omega\,sen^2\,\alpha} \; . \quad . \quad . \quad (151)$$

El máximum de la proporcion corresponde á $sen\,\omega = 1$ y tiene por valor $\frac{1}{cos\,\alpha}$, mientras que el mínimo es $cos\,\alpha$ para $sen\,\omega = 0$. Los valores de ω se cuentan de modo que $\omega = 0$ cuando el eje de los gorrones trasversales del árbol enlazado se situa en el plano de los ejes de ambos árboles. Cuando los dos árboles tienen fuerzas vivas poco considerables y el ángulo α es pequeño, las variaciones de velocidad son bastante exíguas y

(1) El inventor de las articulaciones en cruz es el italiano Cardan (1501 á 1576); pues el inglés Hooke (1635 á 1703) tuvo simplemente la idea de aplicar ese mecanismo al acoplamiento de los árboles.

(2) En la juntura americana *Clemens* las velocidades de rotacion del árbol motor y del árbol enlazado son constantemente idénticas. Por desgracia esa juntura á lo ménos en la forma en que se ha establecido hasta ahora en América, es de una construccion muy complicada, lo que limita mucho el campo de sus aplicaciones. En la Exposicion universal de Paris (1878) se instaló una juntura de ese género en una trasmision destinada á dar el movimiento á una de las hélices de ventilacion de la sala de espectáculos del Palacio del Trocadero.

pueden despreciarse; más no sucede lo mismo cuando se trata de árboles inclinados uno á otro que presentan masas relativamente considerables, animadas de una gran velocidad.

Los dispositivos empleados para las junturas articuladas en cruz son sumamente varios, y vamos á indicarlos por órden de su importancia. En el dispositivo de la fig. 434 las piezas fijadas en los árboles son de hierro colado, en tanto que el crucero intermedio es de hierro forjado. Como la proporcion de la longitud R de los brazos (distancia del centro del crucero al medio de un gorron) al diámetro d de los árboles es muy variable, no hemos podido trazar en la figura las dimensiones proporcionales para las diferentes partes. El diámetro d_1 de un gorron puede calcularse por medio de una de las fórmulas indicadas antes, notando que para un valor (PR) del momento de rotacion de los árboles, la presion P_1 sobre el gorron está representada con suficiente exactitud por $\frac{1}{2}\frac{(PR)}{R}$. La distancia designada por a debe recibir un valor tanto mayor cuanto más considerable es el ángulo de inclinacion α. En el dispositivo representado en la figura se supone el ángulo α muy pequeño. Los ejes de las ranuras destinadas á recibir los cojinetes de los gorrones deben establecerse como lo indica la figura, en un plano perpendicular al de los ejes de los árboles, y cuando no se observa esa condicion, se corre el riesgo de que el desgaste se produzca de una manera muy irregular para los diferentes gorrones. En la figura se suponen formados de una sola pieza los cojinetes, en cuyo caso despues de comprobar que la superficie esterior de cada uno de ellos está perfectamente ajustada á la ranura correspondiente, se trasportan al crucero, que se coloca en su posicion definitiva, y luego se tapan con cubiertas de pernos destinadas á sostenerlos.

La juntura de articulaciones en cruz desempeña un papel importante en gran número de barcos de hélice, en donde se utiliza para dar al árbol tendido cierta flexibilidad que le permite acomodarse bastante á las deformaciones que sufre la armazon del barco. Con máquinas de gran potencia el árbol tendido está comunmente dotado de dos junturas articuladas y aun á veces de mayor número. La fig. 435 representa una juntura de ese género, cuyas tres partes son de hierro forjado; y una de esas tres partes forma cuerpo en realidad con el árbol. La pieza intermedia que se compone de dos partes anulares semejantes, encierra los cojinetes de los gorrones (en contra de lo que sucede con la disposicion precedente), en tanto que las otras dos piezas llevan los gorrones, que son de hierro forjado y están unidos de una manera especial. Como en todas las circunstancias el ángulo α es forzosamente muy pequeño, y por consiguiente se ha de suponer un desgaste muy escaso: los cojinetes no están hendidos. Por la misma razon las horquillas de los gorrones tienen muy poco juego con respecto una de otra. La longitud l_2 del gorron no se aparta mucho del diámetro y varia de 1 á 1'25 d_2, teniendo principalmente por objeto todos esos dispositivos reducir las dimensiones del acoplamiento y dar por lo tanto R tan pequeño como sea posible.

La fig. 436 representa un tercer dispositivo de acoplamiento en crucero articulado. En este caso los gorrones trasversales son verdaderos pernos que pueden girar á la vez en la pieza intermedia y en las piezas fijadas á los estremos de los árboles. Para hacer más sencilla la construccion los ejes de estos pernos no están en el mismo plano, sino que se hallan apartados de una cantidad levemente superior á su diámetro. Por efecto de ese desvio la trasmision del momento no es idéntica para los dos períodos de una vuelta entera de los árboles. Pero sin inconveniente se puede prescindir de esa diferencia cuando se trata de un escaso desvio de los pernos y de instalaciones que no exigen una gran precision. El dispositivo representado en la figura suele emplearse en las máquinas agrícolas, máxime para unir los aparatos ó arreos de los caballos que deben moverlas. En el trazado de la escala de proporcion que damos aquí el módulo adoptado es $\delta = 5 + {}^1/_3 d$, representando d, como antes, el diámetro del árbol. El polo P que sirve para determinar las diferentes dimensiones, debe por lo mismo corresponder al punto en virtud del cual tenemos $5 + {}^1/_3 d = O$, es decir $d = -15^{mm}$. Como la escala de la figura es de ${}^1/_3$, resulta que se debe hacer $pq = -d = 3^{mm}$.

Las variaciones de velocidad que en la trasmision de un movimiento acarrea el empleo de la juntura articulada, y que están espresadas en la fórmula (150), ofrecen en gran número de casos, inconvenientes muy sérios; y es evidente que no son admisibles cuando se necesita una exactitud geométrica (como para los movimientos de grandes relojes), ó que se han de tener en cuenta fuerzas vivas de masas animadas de rápido movimiento, como en las máquinas de trillar, etc. En todos los casos de ese género siempre es posible evitar el defecto que acabamos de señalar, instalando doble juntura articulada, ó sea disponiendo debidamente dos acoplamientos simples de igual forma.

Al efecto se reune el árbol motor A (fig. 437) al árbol enlazado B por medio de un tercer árbol C, cuya inclinacion sobre cada uno de los otros dos es la mis-

ma; y disponiendo de la misma manera las dos junturas articuladas de ensamble, el movimiento se trasmite uniformemente de A á B. Con esta disposicion el árbol enlazado puede ocupar posiciones muy diferentes respecto de A, la posicion B, por ejemplo, con un ángulo de inclinacion sobre $A = 2\alpha$, ó la posicion B' paralela á A, ó bien (lo cual generalmente parece ser desconocido) la posicion B'' situada en la superficie de un cono de revolucion descrito alrededor del eje intermedio C y cuyo semi-ángulo en el vértice es α. Las junturas articuladas están debidamente dispuestas cuando los gorrones trasversales que pertenecen á los ejes A y B se colocan al mismo instante en los dos planos que forma el eje C con los ejes A y B. Para las posiciones B y B' del eje del árbol enlazado coinciden estos dos planos; más no sucede lo mismo para las demás posiciones que este eje puede ocupar en el cono. En el último caso los dos ejes A y B se cruzan uno á otro.

Si los cruceros articulados no están dispuestos de la misma manera para A y B, ó por ejemplo, se supone que uno de los dos ha girado con respecto al otro 90°, como lo indica la figura 438, las variaciones de velocidad no solamente son inevitables, sino que además en ciertas condiciones pueden hallarse notablemente aumentadas. Así pues, en el caso de que se trata se tiene: $tg\omega_1 = tg\omega \cos^2\alpha$, correspondiendo respectivamente ω y ω_1 á A y B. Si suponemos $\alpha = 30°$, para $\omega = 45°$ hallamos $tg\omega_1 = (1/2\sqrt{3})^2 = 0'75$, es decir $\omega_1 = 36'54°$, en vez de 40'54 que indica la tabla que antes hemos dado para el caso de un acoplamiento simple. Conviene no perder de vista esta causa importante de la variacion de velocidad.

Los acoplamientos ordinarios de laminadores entran bajo una forma muy imperfecta en la clase de las junturas articuladas; los cruceros de gorrones se hallan reemplazados por rodetes romos que sirven de prisioneros. En las instalaciones más esmeradas, como por ejemplo las de Schaltenbrand, se encuentra el empleo de los gorrones en cruz; y los ejes de esos gorrones no se encuentran, y presentan cierto desvio, como en el dispositivo de la figura 436. La pieza intermedia de ese acoplamiento tiene por lo tanto una forma análoga á la de la pieza de doble cubo representada por esa misma figura. Disponiendo el árbol intermedio de manera que pueda desplazarse longitudinalmente, los acoplos de ese género, aun toscamente ejecutados, aseguran una trasmision uniforme del movimiento, puesto que en definitiva entran en la disposicion ACB' de la figura 437. Para obtener este resultado aquí, lo propio que antes, importa no dar á los acoplamientos la posicion que representa la figura 438 y cuyos inconvenientes hemos señalado.

Para las hélices de barcos de vapor en que las variaciones de los ángulos de las diversas partes del árbol tendido son poco considerables, la juntura de Cardan puede reemplazarse con un acoplamiento muy sencillo, que está representado por la figura 439. Ese acoplamiento permite pequeños movimientos á cada pedazo de árbol con respecto al que le sigue. Esa movilidad es análoga á la que da el crucero articulado, y en gran número de casos puede considerarse como suficiente (1).

III. MANGUITOS DE TRABAZON Y DESTRABAZON.

§ 157

Manguitos de dientes.

El manguito de destrabazon más antiguo y cuyo uso es todavia muy general, es el manguito de dientes que representa la figura 440.

Ambos estremos A y B de los árboles están unidos por un pequeño gorron simplemente destinado á asegurar la coincidencia de sus ejes; el árbol B lleva dos lengüetas fijas, en virtud de las cuales puede deslizarse una pieza provista de las correspondientes ranuras; el movimiento de esta pieza en un sentido ó en otro, permite, como es fácil comprender, efectuar ó suprimir, conforme se quiera, la union de los dos árboles. El módulo adoptado para las dimensiones de las dos piezas del manguito es aqui tambien: $\delta = 5 + 1/3\, d$; y el número de dientes se determina de una manera satisfactoria con la fórmula $z = 1 + 1/40\, d$. El movimiento en ambos sentidos se efectua por medio de una palanca cuyos estremos se encajan en una ranura circular practicada en el cubo de la parte del manguito que corresponde al árbol B. La figura 441 indica dos dispositivos que pueden adoptarse para las palancas de ese género. En cuanto al módulo de las dimensiones es el mismo que antes.

Los dientes de los manguitos pueden recibir diferentes formas; y la figura 442 da el trazado de las que se usan con más frecuencia. Con el dispositivo primero el movimiento de rotacion puede trasmitirse igualmente bien en ambos sentidos, pero la trabazon casi no puede

(1) Una disposicion más complicada, pero que á consecuencia de sus propiedades presenta un gran interés bajo el concepto de la trasmision del movimiento, es la propuesta para los árboles de hélices de los barcos de vapor por Otto Dingler (véase Dingler. P. J. 1866, pág. 197). Ese acoplamiento que tiene articulaciones, permite al propio tiempo desplazamientos longitudinales y trasversales.

efectuarse durante la marcha, escepto en el caso de un movimiento muy lento. La segunda forma, por el contrario, que permite trabar durante la marcha, aun con un árbol de rotacion rápido, no puede trasmitir el movimiento más que en un sentido: las superficies de los dientes, sobre las cuales se ejerce la presion, están lijeramente inclinadas sobre la normal á la direccion del movimiento: esta inclinacion que tiene por objeto hacer la destrabazon más fácil, es por lo demás demasiado débil para dudar de la seguridad de la trabazon, cuando existe. En la tercera disposicion los dientes están reforzados en la punta, á fin de evitar las probabilidades de rotura de uno ó varios de esos dientes bajo la accion de los choques que pueden producirse, cuando se traba durante la marcha; y esta forma de dientes es la que se ha indicado anteriormente para el manguito de la fig. 440. La cuarta forma de dientes representa, como las dos anteriores, la ventaja de hacer la trabazon fácil, al mismo tiempo que permite, como la primera, trasmitir el movimiento en ambos sentidos. Las máquinas de hilaturas presentan numerosos ejemplos de acoplamientos por manguitos dentados; y como estos manguitos tienen en general gran velocidad de rotacion y sus dientes son muy finos, resulta que deben fijarse con gran precision.

En los barcos de vapor, en que la trasmision no está dispuesta para permitir el levantamiento de la hélice, es indispensable que este órgano pueda girar en vacio, cuando se quiere andar solo á vela; lo que se consigue uniéndolo al árbol tendido por un manguito de destrabazon. Se emplean en este caso manguitos dentados de gran dimension ó manguitos de gorrones prisioneros, cuyo número varia de 4 á 6.

§ 158

Manguitos de friccion.

Los manguitos cuyas partes no se conservan solidarias entre sí más que por el frotamiento desarrollado entre sus superficies de contacto, convienen especialmente para la destrabazon. Con los dispositivos de ese género, en efecto, el movimiento cesa de trasmitirse, cuando la fuerza que produce el frotamiento, disminuye en cierta cantidad, mientras que la trabazon se produce sin choques, no llegando la parte conducida más que por aceleraciones sucesivas á su velocidad definitiva.

Dando á los manguitos de friccion diámetros bastante considerables, se puede llegar á hacerles trasmitir movimientos de rotacion de cualquier magnitud.

La fig. 443 representa un manguito de friccion que se usa como manguito de seguridad; el anillo de la parte A se encaja en una ranura, forrada de madera, de la parte B, y el ajuste se determina de modo que el frotamiento producido entre las superficies de contacto, corresponda á un valor dado del esfuerzo que hay que trasmitir; de donde resulta que la destrabazon se produce por sí misma, cuando se sobrepuja este valor.

Ramsbotton ha empleado ese género de manguito para los laminadores (1). El módulo de las dimensiones indicadas en la figura es $\partial = 5 + {}^1/_2 d$.

El manguito de conos presenta en las aplicaciones gran variedad de formas. En el dispositivo que da la figura 444, la parte A del manguito, destinada á trasmitir el movimiento, se supone loca en el árbol que la lleva y puede recibir un movimiento de rotacion, por medio de una rueda dentada, calada en su cubo y representada en punteado en la figura; la segunda parte B del manguito, puede resbalar por el árbol, pero sin girar sobre él; y suponiendo la corona cónica en que termina, bastante apretada contra la corona interior de A, se produce el movimiento de arrastre. La presion de estas dos superficies se obtiene por medio de un tornillo y de la manivela de volante b. En ciertas disposiciones el sentido de rotacion de B coincide con el de la rueda b, cuando esta última obra para producir la presion, lo que siempre es fácil de obtener, escogiendo, segun los casos, un tornillo á la derecha ó á la izquierda; en cuyo caso basta fijar la rueda b para mantener el árbol en reposo y ponerlo en marcha en el sentido del movimiento para producir la trabazon. Designando por R el rádio medio del cono, por α el ángulo de inclinacion, la presion Q que se ejerce en la direccion del eje, para trasmitir un esfuerzo P, suponiendo que obre á la distancia R, está dada por la espresion:

$$Q = \frac{P \operatorname{sen} \alpha}{f} = \frac{(PR)}{R} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{f}, \qquad (152)$$

en la cual f representa el coeficiente de frotamiento que se ejerce entre las superficies de los conos, y (PR) el momento estático que debe trasmitirse por el árbol. Para que la destrabazon pueda efectuarse fácilmente importa no tomar α inferior á 10°; y f para el frotamiento de hierro sobre hierro, puede evaluarse en 0'15. A fin de disminuir P y por consiguiente tambien Q, se da á R un valor bastante grande, comprendido ordinariamente entre $3d$ y $6d$.

(1) *V. Engineer*, Enero 1866, pág. 44, y el *Genie industriel*, 32 volúmen, pág. 101. La forma más antigua de este género está indicada en las obras de Salzenberg (pág 173) en que igualmente se halla la descripcion de otras disposiciones.

El esfuerzo que hay que ejercer se halla por lo demás, notablemente reducido por el uso del tornillo y del volante; y designando por s el paso de ese tornillo y por b el rádio del volante, el coeficiente de reduccion, teniendo en cuenta el frotamiento del tornillo, está representado por $2s : 2\pi b$ ó $s : \pi b$. El esfuerzo que hay que ejercer tangencialmente al volante es por consiguiente, $q = Qs : \pi b$; y esta espresion demuestra que puede reducirse á un valor muy pequeño.

Ejemplo. *Un árbol de trasmision, de hierro forjado, cuyo diámetro* $d = 50^{mm}$ *y cuya velocidad de rotacion es de* 50 *vueltas por minuto, trasmite, segun la tabla del párrafo* 146 (*col.* 5, *línea* 5) *un trabajo de* $0'030 . 50 = 1'5$ *caballos, ó un momento estático* (PR) *igual á* $21418^{k.mm}$. *Suponiendo provisto este árbol de un manguito de conos, cuyo rádio medio sea igual á* 5 *d ó* 250^{mm}, *el esfuerzo* Q *necesario para producir la trabazon será, segun la fórmula* (152), $Q = 21418 . \operatorname{sen} \alpha : 250 . f$, *lo que para* $\alpha = 10°$, $f = 0'15$, *da* $Q = 85'9 . 0'1736 : 0'15$ ó 100^{k}. *Segun los números proporcionales inscritos en la figura* 444, *el rádio del volante debe tomarse igual á* $^1/_2 (100 + 100) = 100^{mm}$. *Dando al tornillo un paso de* 6^{mm} *el esfuerzo que se debe ejercer en la circunferencia de este volante para conseguir la trabazon, es* $q = 6 . 100 : \pi . 100 = 1'9^{k}$ *ó sean* 2^{k}.

Siempre que el trabajo que hay que trasmitir no es muy considerable, se emplean con ventaja manguitos de conos, tales como acabamos de describir, ó con una disposicion análoga (1). Se pueden proveer las dos partes del manguito de un tronco de cono hueco y de otro tronco de cono lleno, ó tambien de una série de troncos de cono de poco alcance, como indica la figura 445. En este último caso las dos partes del manguito se trasforman en realidad en dos platos acanalados anulares, cuya reunion constituye el manguito de discos acanalados, representado por la fig. 446. Ese manguito, como los manguitos dentados, tiene el inconveniente de estar espuesto á los choques. El cálculo del esfuerzo que hay que ejercer para producir la trabazon, se hace por lo demás como hemos indicado para el manguito anterior, á condicion de tomar para R, no el rádio esterior, sino simplemente el de la circunferencia, á la cual puede suponerse aplicada la resultante de las acciones de las superficies frotantes; y este círculo se halla á una distancia del borde esterior de los discos que pueden tomarse con una exactitud suficiente, igual á $^1/_3$ de la anchura de la parte acanalada. No teniendo la palanca de destrabazon que producir más que un movimiento de pequeña amplitud, puede terminarse por un eje, provisto de un hueco excéntrico, que recibe el gorron de la horquilla de destrabazon como representa la figura.

Cuando se usa un manguito de conos, de una de las formas anteriores para reunir ó separar de vez en cuando árboles de gran potencia, el esfuerzo Q que es necesario ejercer, puede tender á desplazar el árbol conducido, en el sentido de la longitud, y á estrechar fuertemente, por ejemplo, los cuellos de este árbol contra los cojinetes de los soportes. Cuando este esfuerzo Q se obtiene por medio de una palanca cuyo eje de rotacion está fijo á un soporte aislado, como la disposicion de la fig. 444, se produce durante la marcha, en el reborde de la garganta, un frote de resbalamiento correspondiente al esfuerzo Q; y cuando este esfuerzo, por el contrario, está producido por una tuerca dispuesta en el árbol motor mismo, determina en el cuello de este árbol una presion análoga á la que acabamos de indicar para el árbol enlazado ó conducido. Para un diámetro de árbol de 100^{mm} un cálculo semejante, al del ejemplo anterior, tomando $R = 6 . d = 600^{mm}$, da para la presion en sentido del eje:

$$Q = \frac{343720 . 0'174}{600 . 0'15} = 665^{k},$$

es decir, un valor bastante fuerte para producir un desgaste considerable.

Este inconveniente se evitaria enteramente si la fuerza Q tendiese á aproximar los dos árboles en lugar de alejarlos. Esta condicion se realiza en el manguito de discos acanalados, propuesto por el autor y representado en la fig. 447.

En corte, el reborde de la pieza A presenta la forma de corchete, cuya pequeña rama cubre el estremo de la pieza B. La ruedecita de mano a obra absolutamente como la de la fig. 444; y en principio la construccion del tornillo unido á esta rueda debe ser la misma que la del tornillo del dispositivo representado por esta figura. Sin embargo tiene dimensiones mucho más considerables, porque el filete debe forzosamente establecerse en un cilindro hueco, rodeando el árbol, y la tuerca es esterior; mientras que en el primer caso, está taladrado en el espesor mismo del árbol. El manguito no presenta ninguna parte saliente, lo que constituye, como ya hemos dicho, una gran ventaja. Los biseles de las canales están abatidos como indica el trazado accesorio de la figura, á fin de que los discos puedan acercarse unos á otros á medida que se desgas-

(1) Se encuentran numerosos ejemplos de aplicaciones del manguito de conos en las máquinas empleadas para la apertura del istmo de Suez (Véase Armengaud, Publ. ind. vol. 17, Lám. 9).

tan. El módulo adoptado para los números proporcionales inscritos en la figura es aquí $\delta = 5 + {}^1/_3\, d$.

Se hallan igualmente para los manguitos de simples conos, disposiciones en las cuales la fuerza Q tiende á acercar los árboles (1).

La fig. 448 representa el manguito cilíndrico de *Kœchlin*. En ese dispositivo las superficies que por su frotamiento deben producir la trabazon, forman ambos cilindros. En la parte cilíndrica hueca de la pieza A se aplican tres mandíbulas igualmente cilíndricas, cada una de las cuales puede desplazarse normalmente á la circunferencia. Estas mandíbulas están provistas en el esterior de una guarnicion de bronce, que tiene la doble ventaja de dar un frote de cierta suavidad y poder reemplazarse, cuando el desgaste es muy considerable. La presion de cada una de esas mandíbulas contra la superficie interior de A se obtiene obrando sobre la pieza móvil B', la cual por medio de la palanca b hace girar el tornillo que está unido á esta palanca y que tiene dos filetes en sentido contrario. A causa de ese movimiento, las mandíbulas se desplazan, normalmente á la superficie cilíndrica de A, en virtud del resbalamiento de sus ranuras sobre las guias representadas en corte á derecha de la figura principal. Regulando debidamente la posicion de las tuercas móviles del tornillo de doble filete, por medio de pequeños tornillos de presion indicados en el dibujo, se puede llegar, para las mandíbulas, á una posicion tal, que baste un desplazamiento de 1^{mm} próximamente (2^{mm} en los grandes manguitos) para producir la trabazon ó la destrabazon. No hay que temer en este caso, como con los manguitos de conos, un ajuste demasiado marcado ó un desmoche, pues la reaccion que produce en cada punto la pared del cilindro A en virtud de su elasticidad, está precisamente dirigida en el mismo sentido que el movimiento correspondiente á la destrabazon y tiende por consiguiente á facilitarla. El uso del tornillo ofrece aquí, como en el dispositivo de la fig. 444, la ventaja de no poderse producir la destrabazon por sí misma, y por lo tanto no es necesario continuar ejerciendo la presion Q sobre B' cuando la trabazon existe. Es por lo demás evidente que para obtener ese resultado es esencial dar al filete del tornillo una inclinacion cuyo ángulo sea inferior al ángulo de frotamiento.

Designando por s esta inclinacion (ó el paso), por b la longitud de la palanca, por f el coeficiente de frotamiento en las mandíbulas, el esfuerzo Q que hay que ejercer, para trasmitir el momento (PR), es, teniendo en cuenta el frotamiento del tornillo

$$Q = 2.\ \frac{s}{2\pi b}\ \frac{P}{f} \text{ ó } Q = \frac{s}{\pi b}\ \frac{PR}{f.R} \quad (153)$$

valor que, conforme hemos visto en el ejemplo anterior, puede hacerse muy pequeño. Si suponemos, como hemos hecho, que B sea la parte enlazada ó conducida, no se produce durante la detencion de esa parte ningun deslizamiento sobre B'. Para los manguitos colocados verticalmente, el esfuerzo Q puede producirse por la caida de un peso; y se obtiene así una trabazon progresiva y de gran suavidad. A causa de la misma disposicion de los órganos, ha habido necesidad de dar en el manguito de *Kœchlin*, valor considerable á R; y el de P es por consiguiente tanto más débil, lo cual es una gran ventaja que no ha contribuido poco al éxito que este manguito ha obtenido desde su aparicion. El primer aparato construido por *Kœchlin* estaba destinado á la trasmision de un trabajo de 30 caballos (1). Los números proporcionales, indicados en la figura, corresponden á un mínimo de R; pero no hay ningun inconveniente en aumentar este valor, cuando se juzgue necesario. El módulo adoptado para estos números es siempre $\delta = 5 + {}^1/_3\, d$. *Bodmer* ha dado al manguito cilíndrico forma á la vez graciosa y sencilla (2) y disposiciones análogas se han adoptado con éxito en los molinos (3). En ciertos manguitos cilíndricos la presion de las mandíbulas contra la superficie interior se obtiene por medio de palancas articuladas. La fig. 449 representa ese modo de manejo, tal como lo empleó *Fossey* (4) en una máquina destinada á acuñar moneda.

En ese manguito, cuyas partes todas están muy unidas, las mandíbulas ó zapatas son cuatro, sin guarnicion de bronce. Los brazos de las palancas articuladas ó las rodilleras tienen la misma anchura que las mandíbulas y están provistas de gorrones semi-cilíndricos, por medio de los cuales se trasmite la presion destinada á producir la trabazon; y para el movimiento en sentido inverso del manguito móvil las zapatas están provistas de pernos de pequeño diámetro que dominan igualmente en toda su anchura. Designando por α el ángulo que forman los brazos de las palancas con la normal á la direccion de los ejes de los árboles, y conservando las rotaciones anteriores, el esfuerzo Q que es necesario

(1) En la sala de las máquinas del Conservatorio de Artes y Oficios de Paris se encuentran varios dispositivos de ese género.

(1) Boletin de la *Societé industrielle de Mulhouse*, 1854, pág. 138.

(2) Fairbairn, *Mills et Millworhs*, vol. II, pág. 92.

(3) Uhland, *Prakt. Masch.—Constr.*, 1869, pág. 97.

(4) Armengaud, *Publication industrielle*, vol. XVII, lám. 10.

ejercer para producir la trabazon, está indicado con la espresion:

$$Q = \frac{P\,tg\,\alpha}{f} = \frac{(PR)}{R}\,\frac{tg\,\alpha}{f} \qquad (154)$$

Como con ese manguito no hay que temer ningun desmoche, el ángulo α puede tomarse muy por debajo del límite que hemos indicado para el ángulo de los conos del manguito de la fig. 444. Admitiendo, como se acostumbra, valores de α comprendidos entre 1° y 2°, se llega para el coeficiente de Q á valores relativamente pequeños. Así por ejemplo, para $\alpha = 1\,^3/_4{}^\circ$ se encuentra $\frac{Q}{P} = \frac{0'030}{0'150} = \frac{1}{5}$.

Garand ha construido manguitos cilíndricos, en los cuales ha conservado palancas de articulaciones (1). *Jackson* y otros constructores han adoptado disposiciones en las cuales el ajuste de las mandíbulas se efectua por medio de presion hidráulica (2). *Schürmann* ha reemplazado el frotamiento de las mandíbulas rígidas por el de un cinto, sometido á una presion dirigida de dentro á fuera (3); y en el dispositivo de *Napier* el cinto se emplea tambien y obra por tension (4). En estos últimos tiempos se han hecho numerosas aplicaciones del manguito cilíndrico. Algunas disposiciones nuevas se han ensayado, pero en la mayor parte de los casos se han adoptado con preferencia aquellas cuyo funcionamiento se habia reconocido como satisfactorio para períodos de marcha bastante largos.

§ 159

Manguitos de acoplamiento para máquinas motoras.

Cuando dos máquinas motoras deben obrar sobre un mismo árbol de cama (ó tendido), el movimiento para cada una de estas dos máquinas ó para una de ellas al ménos, se trasmite por el intermedio de un manguito que se destraba por sí mismo cuando la máquina á la cual corresponde, se detiene, mientras que la otra máquina continua girando y se traba igualmente por sí misma cuando la primera máquina se vuelve á poner en marcha. Es evidente que todo aparato de engranaje que obra en un solo sentido, permite realizar este doble efecto y en realidad los manguitos de acoplamiento usados en la práctica no son más que aparatos de engranaje debidamente dispuestos. El primer manguito de acoplo usado para las máquinas motoras es el de *Pouyer-Quertier*, que se designa con el nombre de manguito de Pouyer. La fig. 450 representa una disposicion de ese manguito, al cual pueden darse en la práctica gran variedad de formas. En esa disposicion, la parte A del manguito que está gobernada por la máquina motora cuya accion puede suspenderse, es loca sobre el árbol B. Esa pieza A es dentada, por ejemplo, en su circunferencia, ó lleva una rueda dentada, calada en el cubo prolongado, como la que está representada en punteado. A fin de hacer el movimiento más fácil ese cubo está provisto interiormente de una guarnicion de bronce. Sobre el árbol B está calada una rueda de engranaje con dos trinquetes; y los dos trinquetes a penetran alternativamente en los huecos de esta rueda, cuando A debe trasmitir á B la accion de la máquina, pero cesan de obrar ambos cuando A se detiene y continua girando el árbol B. La direccion de la rotacion está indicada por la flecha. La destrabazon se produce por medio de bandas de freno b_1 y b_2, las que, cuando la pieza A empieza á quedarse atras, son arrastradas por el frotamiento y hacen girar las palancas b, y por consiguiente, los trinquetes a, hasta que llegan á los pernos que limitan su desplazamiento. En ese momento estas bandas quedan detrás, con la pieza A, resbalando sobre B. Cuando A se halla de nuevo puesto en movimiento, desde que su velocidad se hace lijeramente superior á la de B, las bandas tienden á retener las palancas b de los trinquetes a y acaban por llevarlos á su antigua posicion; en cuyo momento los trinquetes se colocan de nuevo en los huecos de los dientes y trasmiten al árbol B el trabajo de la máquina que gobierna la pieza A. Para que los trinquetes no puedan permanecer aplicados hácia los estremos de los dientes, el ángulo γ de un trinquete con el flanco de un diente debe ser inferior al complemento del ángulo de frotamiento: aquí γ se ha tomado igual 60°. *Pouyer-Quertier* no empleaba más que una sola banda y hacia obrar los dos trinquetes simultáneamente.

En la disposicion representada en la figura, en que la rueda de trinqueteo tiene un número impar de dientes (13) cada trinquete solo produce un desplazamiento de una semi-division: y no hay por consiguiente nunca más que un trinquete ocupado, y la pieza A no puede nunca girar más que una semi-division sin arrastrar al árbol B. La importancia de la observacion relativa al ángulo de frotamiento no ha sido siempre comprendida, y se han construido manguitos *Pouyer* en los cuales los trinquetes llevaban dientes en los estremos: la conse-

(1) Dingler. *Journal polytechnique*, Vol. 149, pág. 22.
(2) Dingler, J. P., Vol. 149, pág. 251.
(3) *Zeitschr. d. Vereins d. Ing.*, Vol. V (1861), pág. 301.
(4) *Engineer*, 1868, Julio. pág. 64.

cuencia de ese vicio de construccion era generalmente la rotura de uno ó todos los dientes del trinqueteo. Los trinquetes *a* deben ser de acero y la parte afilada, que obra sobre los dientes, debe estar templada. El módulo de los números proporcionales de la figura es $\delta = 5 + {}^1/_3 d$.

En Alemania se prefiere á este manguito el de *Uhlhorn* (fig. 451).

A es la pieza que corresponde á la máquina motora que puede ponerse en reposo, y *B* la pieza sobre la cual debe obrar la primera. *A* es una rueda de trinqueteo interior, sobre la cual obran los trinquetes ó garfas *b*. La introduccion de estos garfios, en los huecos de los dientes de *A*, se debe á los resortes *a* que se apoyan por sus estremos en una de sus caras y les hacen penetrar hasta en sus huecos, así que la velocidad de rotacion de *A* tiende á ser lijeramente superior á la de *B*. En el caso contrario, los garfios se alojan en cavidades practicadas en *B*, como indica la parte inferior de la figura, y en el movimiento de rotacion de *B* rebaten á cada paso el estremo de cada resorte. Las articulaciones de los garfios son aquí, como en el dispositivo de la fig. 449, gorrones semicilíndricos, comprendidos entre la pared interior de la cubierta y el fondo opuesto. *Uhlhorn* al principio solo daba á la pieza *A* dos huecos de dientes, pero ulteriormente ha recomendado cuatro, á fin de que la aceleracion solo pueda producirse durante un cuarto de vuelta á lo más. Cuando se recorre á tres huecos solamente (en general á un número impar) las cosas suceden de una manera más ventajosa todavia, puesto que en ese caso la aceleracion se halla limitada á un sexto de vuelta (en general á una semi-division, como en el manguito de *Pouyer*). Con ese dispositivo no habria por lo demás ningun inconveniente en que *B* se convirtiera en pieza conductora en vez de ser conducida; en cuyo caso la rotacion deberia efectuarse en sentido opuesto á la flecha.

Como hemos observado anteriormente, los manguitos de acoplamiento para máquinas motoras son verdaderos trinqueteos, y es evidente que se puede utilizarlos en otros usos, para ensamblar, por ejemplo, dos partes de árbol, de suerte que aquella de ambas partes que deba dar movimiento á la segunda, pueda girar alternativamente en ambos sentidos durante un tiempo determinado para cada sentido de rotacion. Un mecanismo de esa especie se usa en los tambores de rebajar ó revaciar de las máquinas selfactinas de las hilaturas; y el trinqueteo, usado en ese caso, presenta mucha analogia con el manguito de *Pouyer-Quertier;* lo que sin duda consiste en que ese mecanismo ha servido de guia al inventor para el establecimiento del dispositivo que lleva su nombre.

CAPÍTULO UNDÉCIMO

GORRONES DE PALANCAS

§ 160

Gorrones de palancas.

En la construccion de las máquinas se designa con el nombre de palancas simples un brazo de palanca, uno de cuyos estremos está fijo en un eje de rotacion, mientras que el estremo libre (oscilante) lleva un gorron.

Hemos dado anteriormente (cap. V) todas las indicaciones relativas á ese último órgano, y debemos remitirnos á las fórmulas (93) y (98) para la determinacion de los diversos elementos de construccion.

Las diferentes formas bajo las cuales se emplean ordinariamente en la práctica los gorrones de palancas, se hallan representadas en las figuras 452 á 454 y constituyen el gorron frontal, el gorron doble y el gorron ahorquillado. Para obtener una construccion satisfactoria es esencial que el cuerpo del gorron esté perfectamente ajustado en el hueco preparado al estremo de la palanca. El espaldon que en la fig. 452 limita la parte cónica, no debe tocar la cara de la palanca, á fin de no oponerse á la entrada de esa parte cónica: la figura indica el juego que conviene dejar y que para mayor claridad ha sido lijeramente exagerada. En las construcciones muy esmeradas puede disimularse ese juego practicando en la cara de la palanca una pequeña cavidad, en la cual se encaja con frotamiento libre el espaldon del gorron. En el gorron doble (fig. 453), cuando está convenientemente ejecutado, la presion puede suponerse igual á $^1/_2 P$ en cada uno de los gorrones, que debe por tanto ser considerado como un gorron frontal sometido á esta carga. En el gorron ahorquillado (fig. 454) las dos partes encajadas en los brazos de la palanca pertenecen á una misma superficie cónica.

1^er^ Ejemplo. *Para una presion* $P=2000^k$, *un gorron simple de palanca de hierro forjado debe tener, segun la formula* (93), *un diámetro* $d=\sqrt{2000}$ *ó sea* 45^{mm}, *y una longitud igual. Si fuese de acero, tendria por dimensiones,* $d=0'88\sqrt{2000}=39'6^{mm}$ *ó sea* 40^{mm}, *y* $l=1'3 . 40 =52^{mm}$. *Con un gorron ahorquillado la fórmula* (98) *daria para igual carga* $d=0'7\sqrt{2000}=32^{mm}$ *y* $l=2d =64^{mm}$. *Si se aumentase el diámetro de ese gorron, haciéndolo, por ejemplo, de* 40^{mm}, *seria ventajoso conservar para* l, 64^{mm}; *y en el caso en que esta longitud se*

hubiese de reducir lo más posible, su mínimum se hallaria determinado por la condicion $p \leqq 1$ *ó* $2000 : l . d = 1$, *y deberia tomarse* $l = 2000 : 40 = 50^{mm}$.

La direccion del esfuerzo no es necesariamente variable para todas las palancas. Así por ejemplo, permanecen constantes en las palancas de contrapeso, los balancines de máquinas de elevacion de agua de simple efecto, etc. En ese caso conviene calcular los gorrones frontales y ahorquillados segun las fórmulas (93) y (98), tomando en esas fórmulas las que se refieren á la hipótesis de la presion que se ejerce siempre hácia el mismo lado.

2.º EJEMPLO. *Para una palanca sometida á una carga de* 2000^{k} *que actue siempre en el mismo sentido, un gorron ahorquillado de hierro forjado deberia tener por dimensiones,* $d = 0{,}8\sqrt{2000} = 36^{mm}$ *y* $l = 108^{mm}$; *con el acero, se tendria* $d = 0{,}7\sqrt{2000} = 31{,}4^{mm}$, *y* $l = 4d = 125^{mm}$. *Si llevásemos el diámetro á* 40^{mm}, *la longitud l deberia elegirse de tal suerte, que se tenga* $p \leq 0{,}5^{k}$, *ó lo que viene á ser lo mismo,* $P : l . d \leq 0{,}5$; *y el valor menor de l seria, pues,* $2000 : 0{,}5 . 40 = 100^{mm}$.

§ 161

Fijacion de los gorrones de las palancas.

Las materias que se emplean con preferencia para la construccion de palancas son el hierro forjado y la fundicion. Las figuras antedichas (de 452 á 454) dan las relaciones que hay que observar para las dimensiones en el caso de las palancas de hierro forjado. Para las palancas de fundicion, las figs. 455 á 457 indican á la vez las formas de seccion que se pueden adoptar y las dimensiones proporcionales de los agujeros de los gorrones simples y dobles. Para el gorron ahorquillado nos referiremos al balancin de fundicion del § 179. Cuando este gorron constituye un verdadero eje, se le pueden aplicar las reglas dadas para los ejes en el capítulo VIII.

§ 162

Eje y cubo de una palanca.

El eje en que se fija una palanca simple se halla comunmente sometido á esfuerzos simultáneos de flexion y de torsion. Las dimensiones de este eje para los diferentes casos que pueden presentarse, se determinan por medio de las fórmulas del capítulo VIII y del capítulo IX (§ 152).

En cuanto al cubo, debe establecerse en condiciones de resistencia diferentes, segun que el árbol sobre el cual está colocado se halle espuesto á la torsion ó simplemente sometido á esfuerzos de flexion. En el primer caso para una palanca de hierro forjado con árbol de la misma sustancia, así como para una palanca de fundicion con árbol de igual materia, si designamos por w y λ los espesores de las paredes y las longitudes de los cubos, por D los diámetros de los dos árboles, calculados por las fórmulas (138) y (139), para el momento estático PR, teniendo solamente en cuenta la resistencia, conviene tomar

$$\left.\begin{array}{l} \text{para } \dfrac{w}{\lambda} = \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{1}{2{,}5} \quad \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{w}{D} = 0{,}45 \quad 0{,}42 \quad 0{,}40 \end{array}\right\} \qquad (155)$$

Si la palanca debe fijarse en un árbol de diámetro superior á D, se empieza por determinar ese diámetro ideal D, que se introduce enseguida en la fórmula (155). Se procederia de una manera análoga si se tratase de un cubo de fundicion fijo en un árbol de hierro ó al contrario. Las figs. 455 á 457 representan las formas generalmente usadas para los cubos de fundicion. En los casos en que es forzoso separarse de ellas, estas figuras pueden proporcionar á veces útiles indicaciones para el establecimiento de nuevas formas que hayan de adoptarse.

EJEMPLO. *Supongamos que se trata de construir en hierro forjado la palanca del primer Ejemplo* (§ 160), *dándole una longitud de brazo de* 600^{mm}, *lo que conduce, para el momento estático, á* $PR = 2000 . 600 = 1200000^{kmm}$. *Segun la fórmula* (138) *se tiene* $D = 0{,}95\sqrt[3]{1200000} = 101^{mm}$. *Si se toma* $w : \lambda = 1/2$, *la fórmula* (155) *da* $w = 0{,}45 . 101 = 45^{mm}$, $\lambda = 2 . 45 = 90^{mm}$. *El cubo deberia recibir las mismas dimensiones de seccion si, en lugar de estar calado sobre un árbol de hierro, lo estuviese sobre un árbol de fundicion.*

Los cubos cuyos ejes no están espuestos más que á la flexion, no se encuentran sino en las palancas compuestas (V. § 179).

§ 163

Brazo de palanca de seccion rectangular.

Supongamos primero que se trata de calcular un brazo de palanca recto, de seccion rectangular, sometido á una fuerza P, contenido en su plano medio y normal á su eje longitudinal (fig. 458).

Designando por h la altura del brazo en el plano

del eje del cubo, por b su espesor y por S el máximum de tension admisible, se tiene la relacion:

$$b=6\frac{P}{S}\frac{R}{h^2}.$$

O tomando la tension S igual á 6^k para el hierro forjado y á 3^k para la fundicion:

Hierro forjado.	Fundicion.	
$b=\frac{PR}{h^2}$	$b=2\frac{PR}{h^2}$	(156)

Esta fórmula supone que se da la altura h; y en realidad, ese es el cálculo más conveniente, puesto que ese valor de h acaba de determinar el perfil de la palanca para el cual la inteligencia da una primera indicacion de forma.

1.er EJEMPLO. $P=2000^k$, $R=600^{mm}$. *Si la palanca debe ser de hierro forjado y se toma* $h=180^{mm}$, *la fórmula* (156) *da* $b=2000\,.\,600:180^2=36^{mm}$.

Para una anchura b constante, la altura del brazo debe ir disminuyendo desde el árbol hasta el gorron, donde se reduce á $^1/_2\,h$; y si suponemos por el contrario que esa anchura varie, de suerte que la relacion $b:h$ permanezca constante, la altura hácia el gorron es $^2/_3\,h$ (V. los núms. III y VII, § 10).

En gran número de casos la fuerza P se halla aplicada fuera del plano medio del brazo y tiende, por consiguiente, á producir al mismo tiempo una flexion y una torsion de ese brazo. Podemos reemplazar esa accion compuesta con un simple movimiento de flexion ideal, cuyo momento seria el producto de P y de un brazo de palanca ideal R' (fig. 459).

Suponiendo que el plano de P se halle á una distancia c del plano medio de fijacion del brazo, el valor de R' está indicado con una aproximacion suficiente por las fórmulas:

$$\left.\begin{array}{rl} & R'=^3/_8+^5/_8\sqrt{R^2+c^2} \\ (R>c) & \text{ó } R'=0{,}975\,R+0{,}25\,c \\ (R<c) & R'=0{,}625\,R+0{,}60\,c \end{array}\right\} \quad (157)$$

La fig. 459 demuestra como puede R' determinarse gráficamente. En el caso en que el brazo tiene direccion oblícua, conviene adoptar para la construccion un dispositivo que permita llegar rápidamente al resultado, como indica la tercera solucion de la figura.

2.º EJEMPLO. *Para una palanca cuya longitud de brazo es* 600^{mm} *y está sometido á un esfuerzo de* 2000^k, *la distancia* c *es de* 400^{mm}. *En ese caso se tiene* $R>c$, *y segun* (157) *debemos poner* $R'=0{,}975\,.\,600+0{,}25\,.\,400=685^{mm}$. *Suponiendo* $h=180^{mm}$ *se halla* $b=2000\,.\,685:180^2=42^{mm}$, *en lugar de* 36^{mm}, *como en el primer ejemplo.*

Suele darse á la seccion de las palancas de fundicion una forma semejante á la de la fig. 455. La anchura b puede á más determinarse como antes no teniendo sino en cuenta las pequeñas nervaduras accesorias.

§ 164

Secciones compuestas de brazos de palancas.

Las secciones representadas por las figs. 460 á 463 permiten obtener una reparticion de materia más ventajosa que la seccion rectangular, y deben por lo tanto emplearse con preferencia en los casos de esfuerzos considerables. Fácil es además encontrar las dimensiones de una seccion de ese género determinando ante todo la seccion rectangular necesaria y trasformándola enseguida.

Partiendo de las notaciones indicadas en las figuras y designando á más por h_0 y b_0 la altura y ancho de un brazo de palanca de seccion rectangular que corresponderia al esfuerzo aplicado al gorron, la trasformacion puede efectuarse de la siguiente manera:

Dada la altura $h_0=h$ del brazo de palanca en seccion rectangular, se empieza por determinar la anchura correspondiente b_0, y luego se halla por la relacion:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b}{b_0}=\dfrac{1}{1+\alpha} \\ \text{en la que} \\ \alpha=\left(\dfrac{B}{b}-1\right)\left[6\dfrac{c}{h}-12\left(\dfrac{c}{h}\right)^2\right] \end{array}\right\} \quad (158)$$

Esa fórmula supone conocidas las proporciones $\frac{B}{b}$ y $\frac{c}{h}$; más la eleccion de esos elementos no ofrece la menor dificultad y es una consecuencia de la forma de seccion adoptada para la palanca. Cuando se aplica la fórmula (158) al cálculo de las dimensiones de las secciones representadas por las figs. 462 y 463, puede prescindirse de la influencia de las cantoneras y en compensacion no tener en cuenta la flaqueza causada en las planchas de los agujeros hechos para las robladuras. La siguiente tabla simplifica mucho el empleo de la fórmula (158). Y el mismo procedimiento puede aplicarse con ventaja al cálculo de las otras piezas, como los soportes de toda especie, las flechas de las gruas de fundicion ó de palastro, etc.

§ 165

Tabla para trasformar las secciones rectangulares de las palancas en secciones compuestas.

$\frac{h}{c}$	valores de $\frac{1}{1+\alpha}$									
	$\frac{B}{b} = 2'5$	3	3'5	4	4'5	5	6	7	8	10
6	0'50	0'43	0'38	0'33	0'30	0'27	0'23	0'20	0'18	0'14
7	0'52	0'45	0'40	0'35	0'32	0'29	0'25	0'21	0'19	0'15
8	0'54	0'47	0'42	0'37	0'34	0'31	0'26	0'23	0'20	0'16
9	0'56	0'49	0'44	0'39	0'36	0'33	0'28	0'24	0'22	0'18
10	0'58	0'51	0'46	0'41	0'37	0'34	0'29	0'26	0'23	0'19
11	0'60	0'53	0'48	0'43	0'39	0'36	0'31	0'27	0'24	0'20
12	0'62	0'55	0'50	0'44	0'41	0'37	0'32	0'29	0'26	0'21
14	0'64	0'58	0'52	0'47	0'44	0'40	0'35	0'31	0'28	0'23
16	0'67	0'60	0'55	0'50	0'47	0'43	0'38	0'34	0'30	0'25
18	0'69	0'63	0'57	0'52	0'49	5'46	0'40	0'36	0'33	0'27
20	0'71	0'65	0'60	0'55	0'52	0'48	0'42	0'38	0'34	0'29
22	0'73	0'67	0'62	0'57	0'53	0'50	0'45	0'40	0'37	0'31
24	0'75	0'68	0'64	0'59	0'56	0'52	0'47	0'42	0'38	0'33
27	0'76	0'71	0'66	0'62	0'58	0'55	0'50	0'45	0'41	0'35
30	0'78	0'73	0'68	0'64	0'61	0'57	0'52	0'47	0'43	0'37
33	0'79	0'75	0'70	0'66	0'63	0'60	0'54	0'50	0'45	0'39
36	0'81	0'76	0'72	0'68	0'65	0'61	0'56	0'53	0'48	0'41
40	0'83	0'78	0'74	0'70	0'67	0'64	0'58	0'54	0'50	0'44
42	0'84	0'80	0'76	0'72	0'69	0'66	0'61	0'57	0'53	0'47
50	0'85	0'81	0'78	0'74	0'71	0'68	0'63	0'59	0'56	0'49

EJEMPLO. *La longitud de una palanca simple* $R = 2000^{mm}$ *y el esfuerzo aplicado al gorron* $P = 2500^{k}$. *El brazo debe ser de fundicion con una seccion en doble T cuya altura* h *debe ser igual á* 320^{mm}. *Segun la fórmula* (156), *la anchura* b_0 *de la seccion rectangular correspondiente á esta carga, seria* $b_0 = 2 . 2500 . 200 : 320^2$ *ó* 98^{mm}. *Para trasformar esta seccion hagamos* $c:h = {}^1/_{12}$, $B:b = 4$; *y la tabla anterior nos da* (*columna* 5, *línea* 7): $\frac{1}{1+\alpha} = 0'44$, *de donde se deduce:* $b = 0'44\, b_0 = 0'44 . 0'98 = 43^{mm}$. *Se tiene despues para la longitud de las nervaduras de los rebordes* $B = 4 . 43 = 172^{mm}$ *y para su espesor,* $c = h : 12 = 320 : 12 = 27^{mm}$. *Todos esos valores son perfectamente admisibles en la ejecucion. En el caso en que se impusiera la condicion de que* $c = b$, *se deberia trasformar la fórmula* (158) *introduciendo esa condicion; pero se puede prescindir de ella y obtener el resultado, operando por tanteos y dando sucesivamente diversos valores á* $B:b$ *y* $c:h$. *Si hacemos, por ejemplo,* $B:b = 5$, $c:h = {}^1/_{10}$, *la tabla anterior (col.* 7, *línea* 5) *da* $\frac{1}{1+\alpha} = 0'34$, *y por lo tanto* $b = 0'34 . 98 = 33^{mm}$, *mientras que se encuentra* $c = 320:10 = 32^{mm}$, *valor que se aproxima bastante al de* b *para que sea inútil hacer otras hipótesis sobre* $B:b$ *y* $c:h$.

CAPÍTULO DUODÉCIMO

MANIVELAS

§ 166

Diferentes especies de manivelas.

Las manivelas son palancas simples enlazadas con bielas y dispuestas de modo que puedan describir círculos completos. Pueden dividirse en cuatro clases principales:

1.° Manivelas ordinarias (ó manubrios).
2.° Contra-manivelas.
3.° Arboles de codo.
4.° Excéntricos.

Vamos á examinar sucesivamente esos diferentes dispositivos.

§ 167

Manivelas de hierro forjado.

Esas manivelas pueden instalarse segun las reglas indicadas para las palancas simples con un solo gorron (§ 160). Las figs. 465 y 466 representan el dispositivo más generalmente usado. La altura y anchura del brazo van disminuyendo á medida que se acercan al gorron, donde sus valores no son más que los $^2/_3$ de los que tenian á su arranque; y una de sus caras, la opuesta al gorron, tiene cierta comba. La cola del gorron que tiene forma cónica, entra á la fuerza en el agujero de la manivela y su posicion está á más asegurada con una tuerca. Para la fijacion de ese gorron conviene tambien tener en cuenta las observaciones del § 160. La fig. 464 representa un manubrio ó manivela de una sola pieza. En este caso el árbol termina en una especie de hinchazon cuyo diámetro es cabalmente igual á la altura h del brazo.

§ 168

Aplicacion de la grafostática al cálculo de una manivela.

A causa de la importancia especial que se atribuye á la construccion de las manivelas creemos útil indicar aquí la manera de poder determinar sus dimensiones por la grafostática, ya se trate de manubrios ó manivelas simples ya de árboles de varios codos. Nunca

recomendaremos bastante á los que no están todavia al corriente del sistema, el repetir los trazados que representan las figuras 467 y siguientes, sobre una série de ejemplos, á fin de llegar á conocer gradualmente y por tanto vencer las pequeñas dificultades que puedan presentarse y que exigen principalmente una constante atencion. Vamos á determinar unos tras otros el árbol y los brazos de una manivela.

Arbol de manivela.—Por medio de la presion P que debe ejercerse sobre el gorron de la manivela, se empieza por calcular el diámetro d y la longitud l del gorron; luego se traza la série $ABCDE$ de las líneas neutras de la manivela, instalando el eje BC del brazo supuesto perpendicular al eje del árbol rigurosamente á su distancia del punto A. Por el punto a se marca la fuerza P, normal á Ea, se elige el polo O del polígono de las fuerzas que hay ventaja en tomar sobre una paralela á Ea que pase por el estremo de la fuerza P; y se traza $O\,d\,a$ y dE, luego se marca oP_1 paralela á dE; $a\,d\,E$ representa entonces el polígono funicular correspondiente á la flexion del eje aCE bajo la accion de la fuerza P; y la línea $PP_1 = P_1$ es el esfuerzo del gorron en E, y $P_1 a = Q$ la reaccion en D dirigida de abajo arriba. Si se toma á más aF igual al brazo R de la manivela y se traza FG paralela á aP, FG (Véase § 150) representa el momento con que la fuerza P tiende á producir la torsion del árbol. Ese momento M^t se compone en cada punto con el momento de flexion M_f para dar un momento de flexion ideal $Mi = {}^3/_8 Mf + {}^5/_8 \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$ (§ 45 y 150), y así se obtiene la superficie de los momentos $Cc'd'e'E$. Las ordenadas de esa superficie permiten calcular los diámetros en los diferentes puntos del árbol, y para ello basta usar la fórmula (124) en que t_1 debe considerarse como la ordenada correspondiente al diámetro conocido d del gorron.

Brazo de la manivela. Se prolonga la línea Ea y por el punto B se traza Ba_0 que haga con BC un ángulo CBa_0 igual al ángulo $D\,a\,d$ del polígono funicular; y contando las ordenadas horizontalmente Ba_0C, representa la superficie de los momentos para la flexion del brazo de la manivela bajo la accion de P. Si hacemos además $Cc_0 = Bb_0 = Cc$, las ordenadas horizontales del rectángulo $Bb_0\,c_0C$ son los momentos de torsion de P en los diferentes puntos del brazo con respecto á BC, que se considera como eje neutro. Componiendo aquí tambien de conformidad con las fórmulas conocidas los momentos de torsion y flexion, se obtiene la superficie de los momentos $Bb'hFC$ para el brazo de manivela ($a_0a' = {}^3/_8\,a_0\,C$, $Hi = {}^5/_8\,Bb_0$, $Hh = h_0h' + h'i$). Las ordenadas de esta superficie trasladadas á la fórmula (125), de la cual conocemos ya t_1 y d, permiten dar ante todo al brazo la forma $IKLM$, que es la de un conoide. Si entonces se quiere dar al brazo una forma de seccion rectangular, adoptando por ejemplo el perfil $STUV$, cuyas alturas en los diferentes puntos sean conocidas, es fácil calcular las anchuras correspondientes en funcion de las ordenadas y del conoide, por la fórmula siguiente:

$$\frac{b}{y} = o'6\left(\frac{y}{h}\right)^2 \qquad (159)$$

Para el cálculo de esos valores puede utilizarse con ventaja la segunda tabla de los números que se encuentra al final de este tomo. Si se observa definitivamente que la posicion del eje BC no se ha escogido debidamente, se corrige, repitiendo, si se juzga necesario, el trazado precedente. La distancia del punto E al punto D no ejerce la menor influencia sobre las dimensiones del brazo de la manivela.

No teniendo en cuenta las cantidades pequeñas que en realidad pueden despreciarse, este procedimiento da las dimensiones del brazo y del árbol de la manivela con un grado de seguridad idéntico al del gorron. Si se quisiera obtener una seguridad mayor ó menor, convendria tomar como punto de partida un gorron ideal que presentase el deseado grado de seguridad.

En lo que antecede hemos supuesto el eje del brazo BC normal al árbol de la manivela. Cuando los dos ejes forman un ángulo algo diferente de un ángulo recto, como en la figura 466, puede despreciarse esa diferencia. Pero cuando la inclinacion es más considerable aproximándose, por ejemplo, á la de la fig. 464, es necesario tenerla en cuenta; y se puede entonces proceder de la siguiente manera (fig. 468):

El diagrama de flexion para el árbol de la manivela se traza como en la figura 467; y la parte que corresponde á ab se utiliza para el huso del gorron AB. La que corresponde á CE, compuesta con el momento de torsion FG da la superficie de los momentos $Cc'd'e'E$.

El brazo de la manivela está sometido igualmente aquí á esfuerzos simultáneos de flexion y torsion; y si se traza AB' perpendicular al eje BC, se determina el brazo de palanca $B'C$ y el polígono de flexion es una seccion del triángulo $CB'C'$, cuyo ángulo B' es igual al ángulo daD. Teniendo la torsion para brazo de palanca AB' su momento está representado por la ordenada de ese triángulo trazada normalmente á BC por el punto a', determinado por la relacion $B'a' = B'A$. La composicion de los momentos de torsion y flexion da la superficie de los momentos que puede utilizarse de la misma manera que en el caso anterior.

§ 169

Manubrios de hierro colado.

Amenudo el gorron de las manivelas en vez de ser cilíndrico es esférico; y esta última forma es en particular la que comunmente se adopta para las manivelas de fundicion (fig. 469). El diámetro de esta esfera para hallarse en buenas condiciones debe tomarse igual á una vez y media el del gorron cilíndrico normal sometido á la misma carga. Un modo muy conveniente de fijar el gorron y que en estos últimos tiempos se ha empleado con frecuencia, consiste en introducir á la fuerza en el agujero de la manivela y roblar su estremo en frio. La seccion del brazo que presenta la forma de *I* puede fácilmente determinarse con auxilio de la tabla del § 165. No obstante, cuando se toma para *h*, como lo hemos supuesto en la figura, el diámetro esterior del cubo, suele acontecer que las dimensiones de la seccion del brazo dadas por el cálculo son harto exíguas para ejecutarse debidamente de hierro colado, y para obtener una pieza de aspecto satisfactorio conviene sustituirlas por otras mayores que pueden determinarse por lo que parezca suficiente.

Tambien á veces el brazo de una manivela de fundicion es simplemente una pieza llena de seccion rectangular que reuna el cubo del árbol á la parte anular destinada á recibir el gorron.

Cuando para determinar los momentos se recurre á la grafostática, se empieza por buscar, como antes hemos hecho, el brazo de hierro forjado de seccion rectangular, que se reemplaza por una pieza de fundicion de doble anchura (véase § 163), y se pasa enseguida de esa última pieza á la forma de seccion en *I* por medio de la tabla del § 165.

§ 170

Contra-manivela.

Desígnase con el nombre de contra-manivela un manubrio de brazo inclinado que parte del gorron de una manivela ordinaria y que tiene el mismo eje de rotacion que esta manivela.

La figura 470 representa una contra-manivela de hierro forjado hecha de una sola pieza, como la de la figura 464. Comunmente se dirige el brazo pequeño, conforme indica la figura, en sentido contrario del brazo principal, aunque á veces ocupa tambien una posicion diferente. El gorron y el brazo de una manivela se determinan exactamente como los de un manubrio ordinario. Teniendo por regla general escasa importancia el momento de la presion sobre el gorron de la contra-manivela, puede el brazo de la manivela quedar tal como lo hemos determinado antes. Pero no sucede lo mismo con el gorron correspondiente, que debe calcularse de una manera especial, teniendo en cuenta los esfuerzos simultáneos de torsion y flexion, á los cuales se encuentra sometido en este caso. Debe recurrirse entonces al empleo de la fórmula (157), observando que por hallarse la contra-manivela conducida por el manubrio, el momento de esa contra-manivela alcanza su máximum para el eje del gorron principal.

§ 171

Cálculo grafostático de la contra-manivela.

La figura 471 representa el diagrama que nos da la grafostática para una contra-mavivela cuyos brazos sean oblícuos con respecto al eje de la manivela principal.

En dicha figura se ha trazado ante todo la línea de los ejes *ABCDEFGHI* tomando tan exactamente como sea posible las longitudes *AB*, *CE* y *FG* segun las longitudes de los gorrones correspondientes. La presion 1 que se ejerce sobre el gorron de la contra-manivela se supone dirigida en sentido contrario á la presion 2 ejercida sobre el gorron principal.

Polígono de las fuerzas. En el polígono de las fuerzas trazado á la derecha de la figura, la presion 1 sobre el gorron de la contra-manivela se supone dirigida de abajo arriba y corresponde á la línea 01; el polo *O* se ha elegido en una horizontal pasando por el punto 0; y la presion 2 sobre el gorron principal, se dirige hacia abajo y está representada por la línea 12. Tracemos los radios polares 0*O*, 1*O*, 2*O*, y luego en la otra figura hagamos la línea *a d'* paralela á 1*O* hasta su interseccion *d'* con la direccion de la fuerza 2 que pasa por el punto *D*; hagamos igualmente *d'g* paralela á 2*O* hasta su interseccion *g* con la direccion de la fuerza 3 cuya magnitud no conocemos todavia, si bien sabemos que pasa por el punto *G* y obra de abajo arriba.

Para hallar esa fuerza lo mismo que la que obra en *H*, juntemos los puntos *g* y *H*; *Ha* será la línea de cierre que debe ser horizontal, puesto que en el polígono de las fuerzas la línea de cierre *O*0 se ha hecho horizontal. Si en el último polígono trazamos *O*3 paralela á *Hg*, la línea 23 representará la tercera fuerza

obrando en G de abajo arriba, y la línea 30 la cuarta fuerza aplicada á G y dirigida hácia abajo.

La figura $ad'kgH$ representa, como vemos, el polígono funicular para el sistema que se trata de construir. Al punto k corresponde un momento nulo (V. § 132). Para más comodidad en nuestro dibujo el triángulo kgH se ha trazado en la posicion $kg'H$. El polígono funicular que así encontramos puede utilizarse, como superficie de los momentos, para una parte de la construccion, conforme acabamos de ver.

Huso AB. La determinacion de las dimensiones de este huso se efectua fácilmente por medio de las ordenadas verticales del triángulo $ab'b$ cuando se ha calculado paralelamente el gorron en A para la presion 1.

Pieza de gorron CDE. Esta pieza está sometida á esfuerzos de flexion cuyos momentos están representados por la superficie $cd'e$, y á esfuerzos de torsion, debidos á la fuerza 1, cuyo brazo de palanca $r=Cc—Bb$. Para determinar el momento de torsion tomemos $al=r$ y tracemos la ordenada ll'; y esa línea será el momento de torsion, siendo por tanto la superficie correspondiente para EDC el rectángulo construido sobre ll' y ce, que compuesta con el trapecio $cd'e$ da la superficie de los momentos $cc'd''e'e$. Como puede acontecer que la presion sobre el gorron de la contra-manivela actue sola, en cuyo caso el lado ad' debe prolongarse hasta m', partiremos de este polígono de flexion, y entonces obtendremos como curva límite de la superficie de los momentos resultantes, la curva $c'd''e''$, cuyas ordenadas permiten determinar las dimensiones de CDE. Segun hemos dicho en un párrafo precedente, la longitud menor que puede admitirse para ese gorron y la del gorron normal de estremo, corresponden á la presion 2.

Arbol FGHI. Este árbol está sometido á esfuerzos de flexion representados por el polígono $Ffg'H$ y al momento de torsion de la fuerza 3 disminuido del de la fuerza 1. Para determinar el momento de torsion de la fuerza 3 tomemos en el polígono de las fuerzas un segundo polo O' situado en una horizontal trazada desde el origen de la fuerza 2 y sobre la misma vertical que el otro polo O; juntemos $2O'$, tracemos dg'' paralela á esta línea y tomemos $dn=Cc=R$; y la ordenada nn' representará el momento de torsion buscado. Si tomamos entonces la ordenada en a' que corresponda á una abcisa igual á $Aa=R—r$, esa ordenada dará el momento de torsion de la fuerza 1 sobre el brazo, el cual obra en sentido contrario del anterior. Cercenando esa última ordenada de nn' se obtiene la línea Ff', como altura del rectángulo de torsion $FIi'f'$, que basta componer, como de costumbre, con los momentos de flexion para obtener la superficie de los momentos resultante $Ff''g''h''i''I$. Puede acontecer que la fuerza 1 sea nula, como, por ejemplo, se ve en las máquinas de vapor en que el gorron de la contra-manivela no conduce más que el cajon ó tirador; en cuyo caso se debe construir la superficie de los momentos de flexion $Ff_0g''H$, la de los momentos de torsion FF_0iI, y examinar si la superficie resultante tiene ordenadas mayores que la superficie anterior, en cuyo caso son éstas las que deberian utilizarse para determinar las dimensiones. Es el caso que ofrecerian los datos de nuestra figura, en la cual el segundo polígono resultante se halla trazado en punteado sin letras encima de la linea FI. Suponiendo que las fuerzas en I se reducen á un acoplo, la pieza HI solamente está sometida á la torsion, y por tanto el polígono resultante se reduce á un rectángulo.

Brazo BC de la contra-manivela. Este brazo sufre esfuerzos de torsion y flexion debidos á la fuerza 1, que obra en el primer caso con el brazo de palanca AA_0 perpendicular á CB, prolongado (el momento de torsion es igual á la ordenada en a_0), y en el segundo con el brazo de palanca A_0C (el polígono funicular es un triángulo, del cual CA_0 es uno de los lados y cuyo ángulo en A_0 es igual á baa_0). La composicion de esas dos especies de momentos da CBC_0C'' para la superficie de los momentos (véase la fig. 473).

Brazo principal EF. La fuerza 2 ejerce hácia adelante en este brazo esfuerzos de flexion, cuyos momentos están representados por las ordenadas de la superficie D_0FF'' (el ángulo en D_0 es igual al ángulo cdg''), y una torsion cuyo brazo de palanca es DD_0 perpendicular á FE prolongado. Ese mismo brazo está sometido además á la accion de la fuerza 1 que produce hácia atrás momentos de flexion representados por la superficie E_0FF' y un momento de torsion cuyo brazo de palanca es AE_0 normal á EF. Los momentos de flexion, cercenados unos de otros, suministran la superficie $Ed_0e_0F'''F$, mientras que los momentos de torsion dan como diferencia el rectángulo construido en EF. La composicion de esas dos superficies da definitivamente $Ee'''f'''F$ como superficie de los momentos. En el caso en que la fuerza 1 sea nula, no hay que hacer las diferencias de las superficies de momentos de igual especie, y se obtiene el polígono funicular, trazado en punteado, cuyas ordenadas, superiores á las de la superficie anterior, son de consiguiente las que conviene utilizar para la determinacion de las dimensiones.

Despues de algunos ejercicios se ejecutan rápidamente las operaciones que acabamos de describir, máxi-

me si se procura limitar á la investigacion de las partes importantes, para las cuales el ejemplo anterior da ya de una manera general los datos necesarios. El empleo del diagrama para determinar las secciones de las piezas y la trasformacion de tales secciones, no puede presentar ninguna dificultad despues de las indicaciones del § 168. Cuando el brazo principal y el de la contra-manivela tienen una direccion perpendicular al árbol, el problema se encuentra notablemente simplificado, como lo demuestra el párrafo siguiente.

§ 172

Arboles de un solo codo.

Divídense en dos categorias los árboles de codos, segun tengan uno ó varios. La fig. 472 representa un árbol de un solo codo.

La determinacion de las dimensiones de un árbol de esta clase no puede hacerse con alguna exactitud por el método analítico, sino á través de grandes complicaciones, mientras que la grafostática permite llegar á la solucion del problema de una manera tan sencilla como exacta, por cuya razon emplearemos únicamente ese último método. La fig. 473 da el trazado de las líneas de ejes *ABCDEFGH* de un árbol de codo y brazos inclinados, cuyas dimensiones se intenta determinar.

El esfuerzo P que obra sobre el gorron de la parte del codo, tiene por espresion $\frac{Q}{cos\ \alpha}$, designando por Q la presion que ejerce el émbolo en la direccion KM, y por α el ángulo de la direccion KL de la biela con KM. Para un valor constante de Q este esfuerzo alcanza sensiblemente su máximum cuando KL es perpendicular al rádio LM; y como este máximo se diferencia muy poco del valor $\frac{Q}{cos\ \alpha_1}$ correspondiente á la posicion vertical ML_1 de la manivela, sin inconveniente podemos adoptar esta última posicion para la determinacion gráfica de P. El esfuerzo en M es paralelo é igual á D; y en K se ejerce una presion normal, $N=Qtg\alpha$, cuyo máximo corresponde á la posicion K_1L_1M. De ahí resulta que los momentos de flexion del brazo de la manivela y del árbol pueden considerarse que alcanzan su máximum en el mismo momento y estan producidos por una misma presion P.

En nuestra figura E es el medio del gorron de la parte acodillada y BM y H dos soportes. Además suponemos que en A está aplicado un acoplo capaz de oponerse á la torsion producida por la fuerza P, actuando con el brazo de palanca R. De ello se infiere que el problema actual ofrece la mayor analogia con el que hemos tratado en el párrafo anterior. La parte HG reemplaza aquí el huso del gorron de la contramanivela, con la diferencia, sin embargo, de que la fuerza en H en vez de ser una variable independiente, depende de la presion P en E.

Polígono de las fuerzas. Para que la línea de cierre del polígono funicular sea horizontal se comienza por unir los puntos B y H á un punto cualquiera e' de la normal Ee prolongada. Hecho esto se traslada, á partir del punto o, la fuerza P, se trazan oO y $1O$ respectivamente paralelas á He' y Be', luego $O2$ perpendicular á P; y la longitud 1 á 2 representa entonces la fuerza P_2 que obra en B de abajo arriba, y la línea 20 la fuerza P_3 obrando en H igualmente hácia arriba. $O2$ es la distancia polar.

Huso HG del árbol. Este brazo no está sometido más que á una flexion producida por la fuerza P_3 aplicada á H. El triángulo HGg es la superficie de los momentos cuyas ordenadas sirven para determinar las dimensiones de la pieza cuando se ha calculado el gorron en H.

Huso BC del árbol. La superficie de los momentos de flexion es el triángulo BCc. Para tener á más en cuenta la torsion debida al momento PR, tracemos, en el polígono de las fuerzas, $O'1$ normal á P é igual á $O2$, luego E_0e_0 paralela á $O2$ é igual á $Ee=R$. oE_0 es entonces el momento buscado, que da el rectángulo $Aa'Cc'$. Componiendo de la manera ordinaria ese rectángulo con el triángulo de flexion se obtiene la superficie de los momentos resultante $ABCc''b''a''$.

Gorron DEF. La superficie de los momentos de flexion es $dff'e'd'$. Para obtener la que corresponde á la torsion producida por la fuerza P_3 que actua en H, con el brazo de palanca $Ee=R$, tomemos $Hg=Ee=R$. La ordenada gg' representa el momento de torsion. Componiendo el rectángulo de torsion $dff'''d'''$ con la superficie de flexion, se obtiene $dff''e''d''$ para la superficie de los momentos. La ordenada máxima ee'' es la única que debe utilizarse, como quiera que el gorron ha de ser cilíndrico.

Brazo acodillado GF. Este brazo esperimenta un movimiento de flexion debido á la fuerza P_3 que actua en H_0, siendo HH_0 normal á FG. La superficie de momentos correspondiente es FGg_0f_0, en la que el ángulo g_0H_0G es igual al ángulo $g'Hg$. La fuerza P_3 que obra con el brazo de palanca HH_0, tiende además á producir una torsion cuyo momento hh' se obtiene tomando $Hh=HH_0$. Esta ordenada trasladada á Fh''' y Gh'' da el rectángulo de torsion $Fh'''Gh''$. Con la

composicion de esta superficie junto con la anterior se obtiene definitivamente la superficie de los momentos $FGg''g'''$.

Brazo acodillado CD. Se trazan ED_0 y HD' perpendiculares á CD. Para la posicion KLM de la biela y de la manivela (fig. 473), la fuerza P aplicada á D_0 tiende á producir una flexion adelante, mientras que la fuerza P_3 aplicada á D' tiende por el contrario á producir una flexion atrás. Los polígonos funiculares correspondientes son dos triángulos D_0Ci y $D'Ci'$ ($Ci=oH_0$ en el polígono de las fuerzas y $H_0h_0=CD_0$). La diferencia de estas dos superficies da $Ci''i'''$ para la flexion del brazo DC. Además este brazo se encuentra sometido á dos torsiones, una adelante y otra atrás; la primera se debe á la fuerza P que obra con el brazo $ED_0=kk_0$, en el polígono de las fuerzas, y su momento es por lo tanto ok; y la segunda producida por la fuerza P_3 con el brazo de palanca $HD'=Hl$ en el polígono funicular, tiene por momento ll'. La diferencia de esos dos últimos momentos puesta segun Cc_0 y Dd_0, da el rectángulo de torsion Dd_0Cc_0. Por último la composicion de este rectángulo con el triángulo de flexion suministra la superficie de los momentos $CDI'I$, que completa la série de las superficies propias para determinar las dimensiones de las cinco partes principales del árbol acodillado.

El trazado de la fig. 473 demuestra muy claramente los esfuerzos á que se halla sometido el árbol en sus diferentes puntos y permite por lo tanto comprender fácilmente en la mayor parte de los casos las roturas señaladas para ciertas piezas de ese género.

Cuando los dos ejes de los brazos del codo son perpendiculares al eje del árbol, se encuentra notablemente simplificada la investigacion de las superficies de los momentos.

En tal caso (fig. 474) representando $ABCDEFGH$ la série de los ejes de las piezas del árbol, supondremos, como antes, que se ha aplicado á A un acoplo cuyo momento sea igual y de sentido contrario al momento de torsion PR.

Polígono de las fuerzas. Tomaremos aquí como medida de la fuerza P la altura ee' del triángulo $Be'H$ trazado como antes. Si hacemos $Bb''=ee'$, trazamos $b''O$ paralela á $e'H$ y Ob perpendicular á Bb'', $b''b$ y bB representarán respectivamente los esfuerzos P_3 y P_1 en H y en B, siendo Ob la distancia polar.

Huso HG. Esta parte está solamente sometida á momentos de flexion cuya superficie es HGg.

Huso ABC. Sometida esa pieza á esfuerzos de flexion, cuyos momentos están representados por la superficie BCc, está á la vez solicitada á la torsion por el momento PR. Trazando $e'O'$ paralela é igual á la distancia polar bO, $e'''p$ paralela á esta misma línea é igual á $Ee=R$, ee''' es el momento de torsion á que corresponde el rectángulo de torsion que tiene por base AC y por altura $Aa'=Bb'''=ee'''$. La composicion de los momentos de flexion y torsion da la superficie de los momentos $ABCc'''b'a$.

Gorron DEF. Está sometido á momentos de flexion cuya superficie es $CGge'c$ y solicitado á la torsion por la fuerza P_3, que obra en H con un brazo de palanca $R=CD=Hf$; lo cual da para el momento de torsion $ff'=Gf''=Cf'''$. La superficie de los momentos resultante es $CQg'e''c'$, que para un gorron cilíndrico puede reemplazarse con el rectángulo de altura $Gg''=Cc''=ee''$.

Brazo FG. Solicitado á la flexion por la fuerza P_3 aplicada á G. Superficie de los momentos correspondiente $GFGf_0$, cuyo ángulo agudo G es igual á fHf'; y la misma fuerza que obra con el brazo de palanca HG tiende á producir una torsion cuyo momento es $Gg=Gh=Fi$. La superficie de los momentos resultante es $FGh'i'$.

Brazo CD. Solicitado á la flexion por la fuerza P que para el punto C da el momento ya buscado $ee''=Ck$, y á la torsion cuyo momento es $Cc=Cl=Dl'$. Superficie de los momentos resultante $CDdk'$.

Para la misma posicion de E con relacion á B y H el momento de torsion que obra sobre el brazo CD, tiene aquí un valor más considerable que en el caso en que los brazos están inclinados sobre el eje del árbol, y por tanto es necesario dar á los brazos rectos dimensiones mayores. Y como además la torsion de estos brazos es tanto menor cuanto más próximos están los puntos C y G, resulta que en concepto de la economia de materia es ventajoso reducir en lo posible la distancia de esos dos puntos. Bajo el mismo concepto se recomienda tambien el empleo de los brazos oblícuos, por la razon de que la longitud total FGH ó BCD es necesariamente menor que con los brazos de ángulo recto.

Suele suceder que un árbol de un solo codo se construya de manera que la torsion pueda efectuarse unas veces á un estremo y otras á otro. Entonces conviene trazar las superficies de los momentos para entrambos casos, superponerlos y tomar para cada punto la mayor de las dos ordenadas que le corresponden. Es obvio que en ambos trazados deben adoptarse la misma unidad de medida y la misma distancia polar para el polígono de las fuerzas. Se encuentran ejemplos de casos semejantes en las piezas intermedias de los árboles acodillados de las máquinas de barcos de ruedas (con

cilindros de vapor oscilantes), establecidas conforme la disposicion de *Penn* y en las cuales el codo de la pieza intermedia gobierna las bombas aspirantes. Sin embargo, en tal caso el género de accion es algo diferente del que hemos admitido en el trazado anterior, y es preferible recurrir á un trazado especial, como vamos á practicarlo.

Sea *ABCDEFGH* (fig. 475) la série de los ejes del árbol acodillado. Supongamos que prescindiendo de las fuerzas aplicadas á *E*, se haya introducido un acoplo cuyo momento esté representado por $Bb=Cc=Gg=Hh$. Los efectos debidos á este acoplo serán los siguientes:

Huso ABC. Simple torsion cuyo momento convertido en momento de flexion (véase núm. IV, § 16, para $Mf=0$), debe llevarse en sentido de $Bb'=Cc'=\frac{5}{8}Bb$.

Huso GH. Igual efecto que para *ABC*. La superficie de los momentos tiene como altura $Hh'=Gg'=Cc'$.

Gorron DEF. Aquí tambien el acoplo da márgen al mismo momento de torsion que para los dos husos, y se tiene $Dd_0=Ff_0=Bb'$.

Brazo acodillado CD. El acoplo produce á cada punto de este brazo una flexion cuyo momento vale $Cc''=Dd'=Cc$; y el plano de flexion es perpendicular al plano de la figura. La superficie de los momentos es un rectángulo de altura $Bh=Cc$.

Brazo acodillado FG. Flexion y torsion simultáneas. Descompongamos el acoplo, como se ha indicado en el punto *G*, en otros dos que sean el uno normal al eje del brazo y el otro coincidente con el eje del mismo brazo. Al primero corresponde el rectángulo de torsion $GFf'g''$ y al segundo el rectángulo de flexion $FGii'$. Si se toma $pq=\frac{5}{8}Gi$, $pr=\frac{3}{8}Gg''$, $tp=Gg''=qs+qr$, se obtiene el rectángulo $FGg'''f'''$, que representa la superficie de los momentos resultante de los dos primeros.

El trazado que acabamos de estudiar no hace mencion de las fuerzas que pueden aplicarse al punto *E*; y en el caso en que existan, se empieza por determinar separadamente todos los momentos de flexion y torsion que correspondan á las fuerzas y acoplos; hecho lo cual se añaden para cada parte del árbol, ó se quitan, segun sus direcciones, los diferentes momentos de torsion que les corresponden y se opera de igual modo que para los momentos de flexion, procurando, empero, tener en cuenta la posicion de los planos de flexion (véase § 44); y por último la composicion de los momentos de flexion y torsion así obtenidos da para cada pieza la superficie de los momentos resultante.

El trabajo que acarrean en la oficina de dibujar de una fábrica de construccion los trazados del género que acabamos de indicar, es en realidad de muy escasa importancia en atencion á los numerosos servicios que puede prestar; y particularmente ofrece para el constructor la gran ventaja de fijarle exactamente de antemano los esfuerzos á que estarán sometidos los diversos miembros de las piezas de hierro forjado de ejecucion tan difícil como la de los árboles acodillados.

§ 173

Arboles de codos múltiples. Arboles de locomotoras.

De los árboles de hierro forjado ó de acero y de codos múltiples los acodillados de las locomotoras son los que ofrecen más especial importancia. Por efecto de la complejidad de los diferentes géneros de esfuerzos á que están sometidas tales piezas, es casi imposible para el práctico someterlas al cálculo. En cambio el método grafostático permite, conforme acabamos de ver, alcanzar resultados muy claros á la vez que ofrecen toda seguridad, con la sola condicion de ser aplicado por un dibujante que sea lo suficiente práctico en los trazados de construcciones más sencillos manifestados anteriormente. Escojeremos aquí como ejemplo de aplicacion un árbol de locomotora con cilindros interiores, tal como el representado por la fig. 476.

Como el tamaño de las ruedas interviene en el trazado del plano de los momentos, las hemos reproducido con el árbol. C_1 C_2 son dos planos verticales que pasan por los ejes de los cilindros; A_1 y A_2 los medios de los soportes de los gorrones; B_1D_1 y B_2D_2 los alcances ó diámetros de los cubos de las ruedas; y los planos de los ejes de los codos en C_1 y C_2 son perpendiculares uno á otro. Esto sentado y en la posicion indicada por la figura, el árbol se encuentra sometido á tres géneros de esfuerzos: 1.°, las presiones contenidas en un plano vertical, que se deben al peso de la locomotora y á la accion lateral de los radios sobre los rebordes de las ruedas; 2.°, las acciones horizontales que comprenden la presion del émbolo sobre la manivela C_2 y la resistencia de los rails (la adherencia); 3.°, la presion dirigida oblícuamente de la biela á la manivela C_1. Despreciaremos las otras acciones accesorias, tales, por ejemplo, como las que son debidas á los vástagos de excéntricos de la distribucion, y estudiaremos sucesivamente los tres géneros de esfuerzos que acabamos de indicar.

Fuerzas y momentos en el plano vertical (fig. 477). A la altura del centro de gravedad de la locomotora

está aplicada en S_0 la parte Q del peso de esta locomotora que corresponde al árbol acodillado. Por efecto de los movimientos de vaiven y de la accion de la fuerza centrífuga en las curvas, desarróllase una fuerza horizontal H que puede evaluarse en $^2/_3 Q$. La resultante R de las fuerzas Q y H representa entonces la carga del árbol, que podemos descomponer en presiones P_1 y P_2 sobre los gorrones, en A_1 y A_2, y en presiones Q_1 y Q_2 sobre las testas ó cabezas de los rails E_1 y E_2. Las dos fuerzas Q_1 y Q_2 se descomponen cada una en otras dos conforme las capacidades de los cubos. Si de todas las fuerzas así obtenidas no consideramos más que las componentes normales al eje del árbol, logramos definitivamente seis acciones verticales que tienden á producir la flexion del árbol: las unas 1, 2, 3, 4, aplicadas á D_1, A_1, A_2 y D_2, están dirigidas hácia abajo, en tanto que las otras dos 5 y 6 de B_2 y B_1 van dirigidas hácia arriba. Si entonces elegimos un polo O (á una distancia arbitraria de F, si bien ha de ser la misma para todos los trazados siguientes), formaremos el polígono de las fuerzas $F.4.O$, luego el polígono funicular ó la superficie de los momentos $d_1 a_1 a_2 d_2 b_2 b_1$, que para cada punto del árbol situado en el plano vertical (aquí el plano de la figura) da con la ordenada correspondiente el momento flexible. La superficie total se encuentra designada por V.

Fuerzas y momentos en el plano horizontal (fig. 478). Conforme hemos esplicado en el párrafo anterior, la presion P sobre el gorron para la posicion LM de la manivela es lijeramente superior á la presion P_0 del émbolo; pero bajo el punto de vista de la rotacion del eje, su momento $\left(\frac{P_0}{\cos \alpha}. R \cos \alpha\right)$ se reduce precisamente á $P_0 R$; de suerte que siendo la rueda izquierda la que suponemos deslizarse sobre el rail, la otra rueda se halla mantenida en el otro rail por un esfuerzo correspondiente al momento $P_0 R$, lo que vale decir que la resistencia al deslizamiento 3 en E_2 es igual á $\frac{R}{r} P_0$. Por medio de esta última fuerza y de las resistencias 1 y 2 sobre los gorrones, es fácil construir primero el polígono de las fuerzas $A_1 20$, luego el polígono funicular H (en rayado claro) que representa los momentos correspondientes á las fuerzas horizontales.

Las fuerzas 1 y 2 se han obtenido determinando ante todo la posicion de la resultante de las fuerzas 3 y 4 paralelas y dirigidas en el mismo sentido, y luego descomponiendo esa resultante 3+4 en dos componentes, 1 y 2, aplicadas á A_1 y A_2.

Fuerzas y momentos en el plano inclinado de las bielas. Se aplica al punto C_1 la fuerza $Q=5$, cuya inclinacion sobre la horizontal la da el ángulo $MKL=\alpha$. Si descomponemos esa fuerza como lo indica la figura en otras dos 6 y 7, aplicadas á A_1 y A_2, podremos formar el polígono de las fuerzas con la distancia polar adoptada anteriormente, y luego el polígono funicular S (en rayado espeso), que puede utilizarse como superficie de los momentos para las flexiones en el plano inclinado de las bielas.

Composicion de los tres polígonos funiculares correspondientes á la flexion del árbol (Fig. 479). Como los tres géneros de esfuerzos que tienden á producir la flexion, obran simultáneamente sobre el árbol, debemos procurar componerlos. En tal caso podemos, segun la observacion especial del § 44, operar directamente con las ordenadas representativas de los momentos, lo propio que con las fuerzas mismas. Luego formaremos para una série de puntos del árbol muy aproximados los polígonos de ordenadas correspondientes, procurando tener en cuenta las direcciones; y la línea que cierra cada uno de esos polígonos dará en tamaño y direccion el momento resultante. Uno de esos polígonos de ordenadas representado en la figura 477 á la izquierda y en la parte superior corresponde al punto C_1. La ordenada vertical V está dirigida de abajo arriba, la ordenada horizontal H que sigue despues, va de derecha á izquierda, lo mismo que la ordenada inclinada S, obteniéndose por lo tanto la resultante T que corresponde á una ordenada dirigida en sentido contrario, juntando el punto de partida de V con el estremo de S. Repitiendo la misma operacion en toda la longitud del árbol se llega á la superficie de los momentos $D_2 D_1 b_1 a_1 c_1 c_2 a_2 b_2$, que da las flexiones de todas las partes de ese árbol (escepto las de los brazos acodillados).

Momentos de torsion para el árbol. Para la posicion de las manivelas que hemos tomado como punto de partida, una sola de dichas manivelas tiende á producir en el árbol una torsion cuyo momento es PR. Pero si las manivelas estan inclinadas de 45° una y otra sobre la horizontal, el momento de torsion para los husos de estremos, $C_1 D_1$ y $C_2 D_2$, es sensiblemente igual á $\sqrt{2}\, PR$, ó 1'4 PR. Si bien que para esta posicion de manivelas los momentos de flexion son levemente distintos de los que da el último diagrama, introduciremos en el trazado este valor del momento de torsion, haciendo $D_1 d'_1 = D_2 d'_2 = 1'4\ PR$, en tanto que para el cuerpo del árbol $C_1 C_2$ tomaremos simplemente $C_1 c'_1 = C_2 c'_2 = PR$, refiriéndose por supuesto todas esas cantidades á la escala determinada por la unidad de medida de las fuerzas y la de la distancia polar en los polígonos anteriores.

Composicion de los momentos de flexion y torsion. Los momentos de flexion y torsion compuestos en virtud de la fórmula del § 45, dan la superficie de los momentos $D_2D_1d'_1b''_1...d''_2$, que permite determinar las dimensiones que han de darse á los dos husos C_1D_1 y C_2D_2, así como al cuerpo del árbol C_1C_2, con la sola condicion de buscar préviamente el diámetro y un punto correspondiente á uno cualquiera de los momentos, como por ejemplo, á la ordenada $B_1b''_1$. Como además el diagrama no es simétrico con respecto al medio del árbol, conviene adoptar para las dos mitades de dicho árbol, la mitad del diagrama que presenta las ordenadas mayores.

Gorron de manivela en C_1. Las dos manivelas se han trazado separadamente en las figuras 480 y 481 para que pudieran representarse más cómodamente los momentos que corresponden. El gorron FG en C_1 está sometido primero á las flexiones cuyos momentos dados por el trazado de la figura 479 forman aquí la superficie FGc_1 (fig. 480). Para determinar los esfuerzos de torsion conviene tomar todas las fuerzas aplicadas á la izquierda del punto E. Vamos á comenzar por buscar la resultante. Las fuerzas 1, 2 y 6 de la figura 477 obran verticalmente, y su suma algebráica da la fuerza vertical 1. La fuerza horizontal 1 de la figura 478 está dirigida de delante atrás, y lleva en nuestra figura el número II. La fuerza oblícua 6 de esta misma figura 478 está igualmente dirigida atrás y hácia abajo: lleva el número III. La línea (no representada) que va del punto C al estremo de III, daria la resultante total, cuya componente horizontal IV, obrando con el brazo de palanca $EF=R$, produce la torsion del gorron. Tomemos en la figura 480 una longitud aO igual á la distancia polar; tracemos IV á partir de O hácia abajo, y la línea $aIVe$, haciendo $af=R$. El segmento fe de la perpendicular á af representa el momento de torsion que está marcado en Ff' sobre la figura 480. El rectángulo de torsion correspondiente, compuesto con la superficie FGc_1 da FGc'_1 para la superficie de los momentos.

Brazo de manivela EF. El polígono de las ordenadas para el punto E está representado en los dibujos geométricos de la figura 480, por $V_1H_1S_1T_1$. La componente horizontal h_1 del momento resultante T_1 produce en el brazo EF una torsion, cuyo momento está representado en la figura 480 por $Fd=h_1$. La componente vertical v_1 corresponde á una flexion del brazo en el plano de la figura, $Fb=v_1$; y además la fuerza IV aplicada á E, produce en este brazo normalmente al plano una flexion cuyo momento en F está representado por bb_1. La composicion de los momentos flexibles da la superficie $EFb'b''$; que compuesta á su vez con el rectángulo de torsion EFd, da definitivamente la superficie de los momentos resultante EFb'''.

Brazo de manivela GH. Para el punto H el polígono de las ordenadas es $V_2H_2S_2T_2$. La torsion del brazo GH corresponde á la componente horizontal h_2, y su momento está representado por $Hd_1=h_2$. La componente vertical v_2 da una flexion en el plano de la figura $Gb'_1=V_2$, estando á más sometido el brazo á otra flexion normal á este plano, debida á la fuerza P que obra sobre GF y cuyo momento es $PR=fh$ (tomando en los dibujos geométricos de la fig. 480, $Og=P$, $af=R$). El momento se encuentra referido á $b_2b_3=fh$. La resultante de los momentos de flexion es $GHb_1b''_2$, y compuesta con el rectángulo de torsion GHd_1 da para la superficie de los momentos GHb'''_2.

Gorron KL (fig. 481). Este gorron está primeramente sometido á los momentos de flexion comprendidos entre M y J, correspondiendo á este género de accion la superficie de los momentos KLc_2 que nos da la fig. 479. Todas las fuerzas que actuan á la derecha de C_2 tienden á producir la torsion de ese mismo gorron. La resultante de las fuerzas 3, 4 y 5 (fig. 477) obra verticalmente de arriba abajo y está representada por V; de igual modo que la resultante (ó la diferencia) de 2 y 3 (fig. 478), que es horizontal y está dirigida de adelante atrás, se representa con VI. Por último se ha indicado en VII la fuerza 7 de la figura 478, que va igualmente dirigida atrás y oblícuamente al plano de la figura. La componente vertical de la línea que cierra el polígono de las fuerzas V, VI y VII, tiende á producir una torsion del gorron, ya que segun hemos supuesto el brazo de manivela JK está en la posicion horizontal. El momento de esta componente vertical tiene el tamaño kk'. El gorron está además solicitado á la torsion por el acoplo que introduce aquí el codo de la izquierda (véase el texto correspondiente á la figura 475); y el momento de este acoplo que está dado en $C_1c'_1$ sobre la fig. 479, se encuentra representado aquí por Kk; y como actua en sentido contrario del momento kk' que hemos hallado antes, resulta que el momento de torsion del gorron KL está finalmente representado por Kk', que combinado en cada punto con el momento de flexion da como superficie de los momentos resultante KLc'_2.

Brazo de manivela JK. Este brazo está solicitado á la torsion por el momento Kd de la componente vertical v_3 del polígono de las ordenadas $V_3H_3S_3T_3$. Está igualmente sometido en el plano vertical á una flexion cuyo momento es $Kb=Kk$, conforme lo dicho para la figura 475; y además está sometido en el mis-

mo plano á una flexion debida á la componente vertical de las fuerzas *V*, *VI* y *VII* y cuyo momento en el punto *K* tiene el valor bb_2 (véase para determinar este momento el trazado geométrico superior de la fig. 480). En fin, sufre en el plano horizontal una tercera flexion cuyo momento es bb_1 y corresponde á la componente horizontal h_3 del polígono de las ordenadas. La composicion de todos estos momentos flexibles da la superficie $JKb'_1b'_2$, que combinada á su vez con el rectángulo de torsion KdJ, da JKb''_2 para la superficie de los momentos resultante.

Brazo de manivela LM. El momento de torsion Ld_1 es igual á la componente vertical v_4 del polígono de las ordenadas para la posicion *M*. De las dos flexiones en el plano vertical la una tiene un momento constante $Lb_3=Kk$ y la otra un momento variable cuyo valor es b_3b_4 para el punto *L*; y el tercer momento de flexion b_3b_5 es igual á la componente h_4 del polígono de las ordenadas. La resultante de todos estos momentos de flexion es la superficie MLb'_3, que compuesta con el rectángulo de torsion Ld_1, da definitivamente MLb''_3 para la superficie de los momentos.

De los cuatro brazos de manivela los que tienen las superficies de momentos más considerables son *JK* y *GH*. Así, pues, conviene sobreponer estas dos superficies (JKb''_2 y GHb'''_2) y utilizar aquella que tenga las ordenadas mayores. Aplícanse entonces á los cuatro brazos las dimensiones correspondientes sujetándolas á ciertas simplificaciones si se juzga conveniente.

El trazado del plano de los momentos para un árbol doblemente acodillado es como vemos bastante laborioso y exige que se traten con la mayor atencion las diferentes cuestiones que á él se refieren. Los resultados que da este trazado ofrecen suma importancia, puesto que en definitiva permiten adoptar sin riesgo para las diferentes partes del árbol una tension que llega hasta los dos tercios de la carga límite de elasticidad, ó sea 10^k para el hierro forjado y 15 á 16 para el acero, conforme lo hemos comprobado aplicando el diagrama al exámen de las piezas de ese género de buena construccion.

Para efectuar un trazado de esta índole en una tabla de dibujar, importa mucho no elegir una escala demasiado pequeña, si bien debe evitarse tomarla demasiado grande para que el trazado de las líneas paralelas no sea difícil. La escala más conveniente es la que da para el trazado del árbol entero una longitud de 300 á 400^{mm}; y debe además determinarse en cuanto sea posible para los polígonos de las fuerzas la distancia polar guiándose por trazados anteriores del mismo género. Una distancia polar demasiado pequeña da un diagrama de escesiva altura, en tanto que se halla demasiado bajo con una distancia harto grande. Las distancias que hemos adoptado en las figuras precedentes tienen la ventaja de dar diagramas muy visibles. Podemos limitarnos á un simple trazado de lápiz fino con la condicion de diferenciar las superficies de los diagramas con tintas lijeras y oscuras. Para el último diagrama que representa la superficie de los momentos resultantes, lo mejor es señalar con una simple orla de tinta vigorosa roja oscura, como se indica en la fig. 479 ($d''_1b''_1$...) y limitarla esteriormente con líneas fuertes de punteado. Por regla general es útil unir al trazado una leyenda que indique la clase de las superficies representadas por las diferentes tintas, á fin de facilitar el empleo de este trazado en posteriores aplicaciones. El dibujo de ejecucion del árbol debe á su vez establecerse en cuanto sea posible sobre la misma hoja que el plano de las fuerzas, procurando hacer coincidir las verticales que pasan por el medio de cada figura, de forma que cada seccion del árbol se encuentre directamente en la misma vertical que la ordenada que le corresponde en la superficie de los momentos.

Con un poco de costumbre se llega á distinguir muy fácilmente de entre las acciones á que está sometida la pieza, las que tienen una importancia real bajo el punto de vista de las dimensiones; pero si no se quiere esponerse á errores de cierta gravedad conviene no decidir sino despues de madura reflexion cuales son las fuerzas ó los momentos que pueden despreciarse en el trazado.

El cálculo grafostático de un árbol de locomotora con manivelas esteriores es diferente del que acabamos de indicar; pero sin grande dificultad se puede trascribir el diagrama correspondiente á este caso, modificando levemente el procedimiento anterior.

§ 174

Excéntricos.

Si en una manivela cuyo brazo sea *R* y esté calada en un árbol de diámetro *D* se aumenta el diámetro *d'* del gorron, de manera que sea superior á $D+2R$, el árbol puede estar rodeado por el gorron, que entonces constituye un escéntrico.

Las figs. 482 á 485 dan los dispositivos más sencillos de esta clase de órganos. El más conveniente en los casos ordinarios es el de la fig. 484. Los dos rebordes del collar forman una especie de receptáculo que tiene la ventaja de mantener siempre el disco en el aceite

y reducir por lo tanto de una manera notable el desgaste.

La anchura l del disco es igual á la longitud del gorron del estremo equivalente, es decir, correspondiente á la misma presion; y del valor e del cuello de este gorron se deduce la saliente a del excéntrico por medio de la relacion:

$$a = 1'5\, e = 5 + {}^{7}/_{100}\, l. \qquad (160)$$

A esta longitud a se relacionan la mayor parte de las otras dimensiones.

Los árboles que tienen codos de manivela ó cualesquier otras partes salientes de posicion invariable, no pueden las más de las veces recibir excéntricos dispuestos como los de las figs. 482 á 485; y en los casos de este género conviene formarlos en dos partes que se reunen con pernos. En el caso particular en que el excéntrico deba tener una débil saliente sobre el árbol, se dispone su cubo de fijacion fuera del disco propiamente dicho, procurando darle un espesor suficiente ó sea $3'5\, a$.

§ 175

Manivelas de mano ó manubrios.

En los manubrios propiamente dichos el gorron presenta la forma de un mango. Las figs. 486 y 487 dan los dos dispositivos que se encuentran más amenudo en la práctica. El de la fig. 486 se refiere á un manubrio manejado por dos hombres, mientras que el de la figura 487 corresponde á un solo hombre. Las notaciones de estas figuras reciben generalmente los siguientes valores:

	para 2 hombres:	para 1 hombre:
R =	360 á 450^{mm}	300 á 400^{mm}
l =	400 á 480^{mm}	300 á 330^{mm}
D =	40 á 45^{mm}	30 á 35^{mm}

Los manubrios que se fijan á los dos estremos de un mismo árbol, deben calarse de manera que formen entre sí un ángulo de 120°.

CAPÍTULO XIII

PALANCAS COMPUESTAS

§ 176

De las diferentes especies de palancas compuestas.

Dos palancas simples que tengan un cubo comun constituyen una palanca compuesta. Esta palanca se designa con el nombre de balancin (máxime cuando tiene grandes dimensiones); cuando los dos brazos forman un ángulo igual á los dos rectos; y cuando este ángulo tiene un valor diferente tenemos lo que se llama una palanca quebrada ó un crucero, y en fin se tiene una biela ó una palanca oscilante cuando los dos brazos coinciden y tienen la misma longitud.

La presion Q sobre el eje de una palanca quebrada $A\,O\,B$ (fig. 488) está indicada por la fórmula:

$$Q = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1 P_2 \cos \alpha}. \qquad (161)$$

suponiendo las fuerzas P_1 y P_2 respectivamente perpendiculares en A y B, á los brazos $O\,A$ y $O\,B$. Si representamos gráficamente P_1 por $O\,B$ y P_2 por $O\,A$, la fuerza Q se halla á su vez representada por el tercer lado $A\,B$ del triángulo $A\,O\,B$.

Si las fuerzas P_1 y P_2 están inclinadas sobre los brazos $O\,A$ y $O\,B$, conviene reemplazar estos brazos con las perpendiculares bajadas del punto O sobre las direcciones de las fuerzas.

§ 177

Cabezas de balancines.

La palanca compuesta más importante es el balancin por razon de sus numerosas aplicaciones á las máquinas de vapor. El balancin suele hacerse de hierro colado; y los gorrones de que está dotado á entrambos estremos están muy amenudo dispuestos como el de la fig. 455 (§ 161). Un ejemplo de gorrones de ese género se menciona algo más adelante (en el § 179). Los otros modos de fijacion que se emplean además para los gorrones de balancin, están representados por las figuras 489 á 492.

Fig. 489. Cabeza de balancin de doble gorron, ornada y torneada, con fijacion invariable por medio de clavija ó clavete.

Fig. 490. Cabeza de balancin con pieza de hierro hueca, que lleva los gorrones adaptados exactamente á una parte torneada del balancin y mantenida con una argolla de clavete delante. La pieza de los gorrones

debe ajustarse con la mayor precision para que el ensamble no llegue á tomar juego bajo la accion persistente del movimiento alternativo. Esta disposicion tiene el inconveniente de acarrear gastos de construccion muy considerables.

Fig. 491. Gorron de horquilla. Los dos alcances ó capacidades de este gorron están torneados siguiendo una superficie levemente cónica y se mantienen con un tornillo de cabeza con interposicion de una rondela de bordes fresados. Al otro estremo lleva el gorron una especie de espolon destinado á impedir todo movimiento rotatorio.

Fig. 492. Gorron de cabeza esférica. Este gorron tiene una cola larga que penetra en una parte alisada practicada al estremo del balancin y á la cual está sólidamente unida con un clavete. Este dispositivo asegura á la biela una gran movilidad y permite darle una forma sencilla análoga á la que corresponde al gorron ahorquillado de la fig. 491.

La capacidad de los gorrones se determina segun las indicaciones del § 160 haciendo uso de las fórmulas (93) y (98). Si el balancin es de simple efecto, deben tomarse en estas fórmulas las que se refieren al caso de la presion de direccion constante, y si por el contrario es de doble efecto, deben usarse las que corresponden á una carga de direccion alternativa.

Para los balancines de fuerza muy grande puede hacerse el claveteo de los gorrones conforme lo indica la fig. 186, con 6 ú 8 clavetes que se encajan en ranuras practicadas en el cuerpo del balancin al fundirlo. Cuando ese modo de fijacion se practica con esmero ofrece una seguridad muy grande.

§ 178

Eje y cubo de balancin.

El eje del balancin se puede determinar como un eje sencillo de husos iguales. (Véase cap. VIII). La materia empleada para su ejecucion es generalmente el hierro forjado. Si el balancin es de brazos iguales y ha de trasmitir enteramente á una manivela la potencia que recibe en uno de sus estremos, conviene dar á los gorrones de su eje las dimensiones del gorron de la manivela. Si las fuerzas están repartidas de otro modo cualquiera, debe recurrirse al procedimiento general que consiste en determinar la suma algebraica de los diferentes esfuerzos á que puede hallarse sometido el balancin y en tomar el máximum de esta suma como valor de la presion sobre el eje. En tal caso es muy cómodo recurrir al empleo del método gráfico, siguiendo la marcha, por ejemplo, que hemos indicado para los problemas del § 39. Bajo el punto de vista de las oscilaciones trasversales importa que la longitud del eje del balancin no sea harto pequeña relativamente á la longitud A del brazo. Se consiguen las condiciones de una buena construccion tomando la distancia de los medios de los gorrones igual á $6\,d + {}^{1}/_{10}\,A$.

El cubo debe tener la longitud de $3{}^{\prime}5\,d$ y el espesor $0{}^{\prime}7\,d$ (véase la fig. 493). Si el eje del balancin ha de ser de hierro colado, se le da igual longitud como si fuese de hierro forjado y se determinan sus otras dimensiones segun las indicaciones del cap. VIII. En este caso las dimensiones del cubo deben referirse como antes al gorron ideal de hierro forjado, ó dicho de una manera más general, tales dimensiones deben determinarse segun las fórmulas del § 162.

§ 179

Brazos de balancines.

La fig. 493 representa la forma que en general se da á los brazos de balancines. Estando la altura h de la pieza, en la seccion correspondiente al eje del cubo, determinada en funcion de la distancia de este eje al de los gorrones de cabeza y del diámetro d, es fácil encontrar las otras dimensiones operando conforme hemos indicado en los §§ 164 y 165. Segun las circunstancias la distancia de los medios de los gorrones estremos varia de $4{}^{\prime}6\,d_2$ á $5{}^{\prime}5\,d_2$.

La altura del brazo h está denotado por la espresion

$$h = 4d + \frac{A}{8} \qquad (162)$$

designando por d el diámetro de los gorrones del eje de hierro forjado del balancin y por A la longitud del brazo. Cuando el balancin tiene los brazos desiguales conviene tomar para A el valor de las dos longitudes.

La curva límite del brazo desde el vértice del balancin hasta la cabeza destinada á recibir los gorrones debe trazarse por uno de los métodos indicados en el § 141. La nervadura de refuerzo practicada en medio del brazo tiene el mismo espesor c que la nervadura del reborde. La fig. 493 da los perfiles de dichas nervaduras.

La fig. 494 representa otra forma de brazo de balancin que se compone de dos piezas de fundicion. Para el cálculo de las dimensiones de un balancin de este género conviene considerar como balancin distinto cada una de las piezas. Si como lo indica la figura, se usan gorrones ahorquillados, el diámetro del gorron

doble ideal d'_2 para cada pieza es igual al diámetro d_3 del gorron ahorquillado.

La fig. 495 es un corte del balancin anterior, practicado en el eje del medio. La fig. 496 representa el corte de un balancin de grandes dimensiones formado de dos piezas completamente distintas. Estas dos piezas se hallan firmemente unidas una á otra con pernos y virotillos. Esta disposicion permite marcar los puntos de suspension de los órganos del paralelógramo sobre las fases interiores. Los ejes de balancines en dos piezas deben determinarse como los ejes cargados en dos puntos (véase § 134).

§ 180

Balancin de hierro forjado.

Para los balancines que no están sometidos á cargas muy considerables y cuya longitud de brazos no es demasiado grande puede utilizarse con ventaja la disposicion precedente con dos piezas distintas de palastro, segun indica la fig. 497.

La altura h de cada pieza en la seccion hecha por el eje del cubo debe valer los $^{8}/_{10}$ de la que se ha dado en la fórmula (162). Para los balancines de grandes dimensiones debe desecharse el dispositivo anterior sustituyéndolo por otro en que la seccion presente una de las formas dadas por las figuras 462 y 463.

CAPÍTULO XIV

BIELAS

§ 181

Elementos de las bielas.

La biela es un órgano que recibe en uno de sus estremos por medio de gorrones la accion de una palanca, para trasmitirla á otra pieza móvil en el otro estremo, la cual puede ser á su vez una palanca (balancin y manivela), si bien con más frecuencia es una pieza de movimiento alternativo en línea recta (vástago de émbolo de vapor, de bomba de agua, etc). Esta última pieza está á su vez dotada de gorrones destinados á articularla con la biela.

Existe en las bielas una distincion muy clara entre las cabezas ó los cojinetes que circundan los gorrones de ensambladura, y el cuerpo que está destinado á unir las dos cabezas. Por ello trataremos separadamente estos dos elementos de bielas. Además las dimensiones de cada cabeza deben estar en cierta proporcion con el diámetro del gorron que la recibe, proporcion que por otra parte es diferente segun se trate de un gorron frontal, de un gorron ahorquillado, ó de un gorron intermedio, puesto que para esas tres especies de gorrones los diámetros que corresponden á un mismo valor de la presion son diferentes entre sí. Así, pues, debemos tratar igualmente por separado los dispositivos de las cabezas de bielas que se usan para esos tres géneros de gorrones.

§ 182

Cabeza de biela para gorron frontal.

La cabeza de biela de hierro forjado que representa la fig. 498 es de uso muy generalizado. Los cojinetes están sostenidos por la chapa que les circunda y cuando llegan á cierto grado de desgaste se les puede aproximar por medio del clavete de apretadura. Respecto de las dimensiones que se les deben dar, han de distinguirse, como en los soportes, los cojinetes de las partes que los rodean. La unidad á que se refieren los espesores, las anchuras y las salientes de los rebordes, es la misma que para los cojinetes de soportes:

$$e = 3 + {}^{7}/_{100}\, d \qquad (163)$$

relacion en que d designa el diámetro del gorron. La figura 499 da dos vistas principales de los cojinetes con sus alcances ó diámetros y otras formas accesorias.

Las otras dimensiones de la cabeza están indicadas en el módulo

$$d_1 = \sqrt{P} + 5 \qquad (164)$$

La anchura b puede tomarse igual á $0'8\,d_1$, y en el caso en que la longitud del gorron es igual á su diámetro, se puede tomar $b = d - 2e$.

Ejemplo. *Para* $P = 3600^k$ *se tiene segun la fórmula* (93), $d = l = 60^{mm}$, *y segun la fórmula* (164) *se encuentra para el módulo* $d_1 = 60 + 5 = 65^{mm}$; *teniéndose además* $e = 3 + 4'2 = 7^{mm}$. *Si se toma* $b = d + 2e = 60 - 14 = 46^{mm}$, *se obtiene para el espesor de las paredes de la chapa, por ejemplo,* $0'2 \cdot 65 = 13^{mm}$, *para el espesor en el vértice* $0'3 \cdot 65 = 20^{mm}$, *y en fin, para las dimensiones del clavete* $0'22 \cdot 65$ ó 14^{mm}.

Cuando el clavete reposa libremente, como aquí, entre las superficies móviles, recibe una inclinacion menor que en el caso en que se encuentra afirmada con un tornillo de apretadura ó cualquier otro dispositivo de análoga seguridad. En el primer caso la suma de las inclinaciones sobre ambos lados no debe pasar de $^1/_{12}$, mientras que en el otro puede llegarse hasta $^1/_6$. La parte libre debe además tener suficiente longitud para que se pueda efectuar la aproximacion de los cojinetes hasta el límite de desgaste que se crea conveniente. Hoy se tiende más y más á suprimir toda abertura en la union de los cojinetes, de suerte que cuando resulta cierto juego es necesario limar las superficies de contacto para hacer posible la aproximacion de los dos cojinetes. (Véase, por ejemplo, figs. 502 y 503).

La cabeza de biela que acabamos de examinar, goza de cierta propiedad característica que por efecto del desgaste y aproximacion de los cojinetes que es su consecuencia, el centro del gorron se aproxima al cuerpo de la biela. Lo contrario sucede con la cabeza de biela de *Sharp* (fig. 500), en la que el clavete por medio de una placa de presion impele el cojinete inferior hácia el vértice.

En la cabeza de biela de *Bury* (fig. 501) se puede conforme se quiera alejar ó aproximar del cuerpo de la biela el centro del gorron, segun se obre sobre el clavete superior ó sobre el clavete inferior. Este dispositivo reune por lo tanto las propiedades de los dos precedentes y debe emplearse con preferencia en todos los casos en que importa conservar, á pesar del desgaste, invariable longitud á la biela.

La fig. 502 representa una cabeza de biela de bronce, que tiene la forma de soporte de silleta y que usa con frecuencia *Penn* en sus construcciones. Las dos partes de que se compone esta cabeza están firmemente apretadas una á otra, y cuando se trasportan directamente una sobre otra, las superficies de contacto deben limarse cuantas veces se quiera corregir su desgaste. En algunos casos podemos limitarnos á guarnecer las ranuras con placas de cobre que al cabo de cierto tiempo se reemplazan con otras más delgadas.

El diámetro δ de los pernos debe escojerse de tal manera que el diámetro de su cuerpo ó núcleo no sea inferior al que daria la fórmula (84). Con un filete triangular esta condicion se llena tomando

$$\delta = 0'53\sqrt{0'5\,P}; \qquad (165)$$

y con un filete cuadrado el diámetro debe ser algo mayor. La tension en la seccion del cuerpo del filete hállase en tal caso comprendida entre 5 y 6^k, lo cual es admisible. (Véase el 2.° ejemplo del § 185).

Las tuercas de los pernos del sombrero ó tapa están dotadas del dispositivo de seguridad de *Penn* (fig. 241). En la figura no ha permitido la escala adoptada representar los tornillos de presion. Ese género de cabeza es de uso muy frecuente en las máquinas de vapor de cilindros oscilantes. Para las cabezas de bielas de grandes dimensiones, como las que requieren los árboles acodillados de las poderosas máquinas marinas, se ha procurado tambien economizar la materia empleando cojinetes huecos en los cuales el metal tiene un espesor relativamente débil.

La fig. 503 representa una cabeza de biela cerrada; y en gran número de casos deben estas cabezas de bielas preferirse á las abiertas, porque son á la vez más sólidas y económicas cuando para construirlas se dispone de buenas máquinas-herramientas. El dispositivo representado por esa figura es de forma muy elegante y puede efectuarse completamente por medio de máquinas (torno, máquina de pulir ó acepillar, máquina de entallar, etc.). Los cojinetes son de bronce cubierto con una guarnicion de metal blanco; y su superficie esterior recibe en el torno una forma cilíndrica. El cojinete móvil está ajustado sobre una masa de presion de hierro en la que penetra el clavete que evita así todo desplace lateral. En la figura se halla representada una disposicion especial destinada á facilitar la rotacion y que consiste en añadir al interior de los cojinetes dos superficies cilíndricas encajadas en toda la longitud.

Las dos superficies que limitan el agujero que ha de alojar el clavete, tienen generalmente un perfil semicilíndrico. Tiene esta forma la ventaja de prestarse fácilmente al empleo de la máquina de taladrar agu-

jeros longitudinales y es además preferible bajo el concepto de la mayor resistencia de la cabeza de biela. En cuanto al clavete, descansa sobre la masa de presion por una superficie plana; y este dispositivo tiene por objeto facilitar la interposicion de una plancha de palastro en caso de que esta adicion se considere necesaria. El dispositivo de seguridad adoptado para el clavete es el de la fig. 199; la tuerca del perno de seguridad se encuentra ahogada ó metida en el metal de la cabeza de biela y casi no puede manejarse sino con el auxilio de una llave hueca y de apoyo. Este hundimiento es además indispensable para que el perno no vaya á tropezar con las piezas que hay al otro lado de la línea que señalamos en puntillado.

La fig. 504 da otra forma de cabeza de biela cerrada, que se usa mucho en las locomotoras. A la faz posterior de esta cabeza los cojinetes no tienen reborde alguno, de suerte que es fácil sacarlos del cuadro que los rodea cuando de antemano se quita el clavete. Aplícase esta pieza al cojinete superior y le impide salir adelante. Ese dispositivo, como vemos, no requiere placa de presion, por lo que es necesario aumentar el grueso del cojinete superior y elevarlo hasta $3e$, mientras que el grueso del otro cojinete no pasa de $2e$. El dispositivo de seguridad del clavete es análogo al de la figura anterior. En las bielas de locomotoras la cabeza lleva la caja ordinaria de aceite, que se suprime en las bielas que trabajan verticalmente y en las que tienen una marcha muy lenta. Ciérrase esta caja con una tapa de bronce; y en el orificio abierto en su medio y que el plano representa, va atornillado un tubo de mecha destinado á llevar el aceite al interior de los cojinetes. Para todo lo concerniente á la unidad que corresponde á los números proporcionales de la figura conviene tener en cuenta las observaciones del § 183.

En la posicion del clavete ó de la clavija representada en la figura, el centro de los cojinetes, por efecto del desgaste se aproxima al cuerpo de la biela, cuya longitud se encuentra así disminuida; y si queremos que se realice el efecto inverso, importa practicar el alojamiento de la clavija entre los cojinetes y el cuerpo de la biela. Las superficies esteriores de esa cabeza de biela se ejecutan en la máquina, y de intento se hacen todos los contornos con líneas prolongadas, á fin de evitar las variaciones de tension bruscas de una seccion á otra.

Otra tercera forma de cabeza de biela cerrada es la de *Krauss* (de Munich) representada por la fig. 505. Esta pieza que es de acero, es sobre todo notable por la sencillez del dispositivo de apretadura. El clavete está en dos partes y comprende verdaderamente su dispositivo de seguridad. La doble tuerca que al efecto se usa, tiene la desventaja de presentar una saliente más fuerte que la de la forma anterior. Los cojinetes son de hierro con una guarnicion de metal blanco; y el cojinete de la izquierda lleva en la parte superior un conducto para el aceite.

La fig. 506 es una cabeza de biela de fundicion, igualmente cerrada, en la que por efecto del desgaste el centro de los cojinetes tiende á separarse del cuerpo de la biela como en el dispositivo de *Sharp* (fig. 500). Las bielas completamente de fundicion casi no se emplean más que en las grandes máquinas de balancines y de marcha lenta, en cuyo caso dan satisfactorios resultados.

§ 183

Cabezas de bielas para gorrones ahorquillados.

Un gorron de horquilla (véase § 160) suponiendo que se reducen en lo posible sus dimensiones, debe á lo ménos tener como diámetro $d' = 0{,}7\ d$, designando d el diámetro del gorron frontal equivalente; y su longitud es entonces $2\,d'$. Si damos á d' un valor superior al precedente, conviene al propio tiempo aumentar la longitud en determinada proporcion, de modo que la tension conserve el mismo valor; y así se tiene la ventaja de hacer más débil la presion por unidad de superficie. En razon de esa facultad de variacion de las dimensiones la anchura b' de la cabeza de biela para el gorron de horquilla no queda, como para el gorron frontal, en una proporcion determinada con d_1; y el valor que hay que adoptar para esa proporcion varia segun las circunstancias. A fin de tener en cuenta esa particularidad en el cálculo, en lugar del módulo d_1 dado por la fórmula (164), tomaremos para las cabezas de bielas gorrones de horquilla, determinando el módulo d'_1, por la relacion

$$\frac{d'_1}{d_1} = \sqrt{\frac{b}{b'}} \quad \sqrt{\frac{d'}{d}} \qquad (166)$$

en que b representa la anchura de la chapa en la cabeza de biela normal. Merced á la adopcion de este nuevo módulo, es posible aplicar á las cabezas de bielas de gorrones ahorquillados las dimensiones proporcionales indicadas antes para los gorrones frontales. El módulo e para las dimensiones de los cojinetes debe además suprimirse directamente en funcion del diámetro real d' del gorron. La fórmula (166) suministra un módulo que conduce aproximadamente para la cabeza de biela anormal, á la misma resistencia que la correspondiente á la cabeza de biela practicada para el gorron normal, con la condicion, por supuesto, de emplear la

misma materia en ambos casos. No debe esperarse por lo demás encontrar en las construcciones existentes una verificacion completa de las reglas empíricas que acabamos de indicar. Las dimensiones de cierto número de ellas ofrecen perfecta concordancia con las que se deducen de nuestro módulo; pero otras son demasiado fuertes, como por ejemplo, las que corresponden al módulo diferente $d'_1 = d_1 \left(\frac{b}{b'} \frac{d'}{d} \right)^{3/4}$, suponiéndolo aplicado á los números proporcionales que antes hemos indicado. La seccion de los clavetes no debe sufrir ninguna reduccion, puesto que tales piezas están espuestas á cortarse ó romperse y conviene no someterlas á una presion demasiado fuerte por unidad de superficie. Así pues, admitiremos que los clavetes conservan en el caso actual las mismas dimensiones que para las cabezas de bielas correspondientes á los gorrones frontales.

EJEMPLO. *Se pretende construir la cabeza de biela representada por la fig.* 498 *para un gorron de horquilla que se supone sometido á una presion de* 3600^k. *Las fórmulas* (95) *y* (98) *dan para el diámetro del gorron frontal correspondiente á esta carga,* $d = \sqrt{3600} = 60^{mm}$; *para el del gorron de horquilla,* $d' = 0{,}7 \cdot 60 = 42^{mm}$, *y para la longitud* $l' = 2\,d' = 84^{mm}$. *Daremos á la chapa la anchura que conviene á la cabeza de la biela del gorron frontal, es decir,* $b' = 60 - 2 \cdot 7 = 46^{mm}$, *suponiendo los cojinetes dotados de rebordes. Para el gorron frontal la fórmula* (164) *da:* $d_1 = 60 + 5 = 65^{mm}$, *y la fórmula* (166): $d'_1 = 65 \sqrt{\frac{b}{b'} \frac{d'}{d}} = 65 \sqrt{0{,}7} = 0{,}84 \cdot 65 = 55^{mm}$. *Por medio de ese módulo se encuentra por ejemplo, para el espesor de las bandas de la chapa* $0{,}2 \cdot 55 = 11^{mm}$, *y para el espesor en el vértice* $0{,}3 \cdot 55 = 17^{mm}$. *Estando sometidos los clavetes á acciones de cizalla, deben dárseles las mismas dimensiones que á las de la cabeza de biela del gorron frontal; y así se obtiene para la anchura del clavete* $0{,}22 \cdot 65$ *ó* 14^{mm} *y para su altura menor* $0{,}2 \cdot 65 = 13^{mm}$.

La fig. 507 representa una cabeza de biela cerrada que conviene mucho para un goron de horquilla. Este dispositivo se emplea con frecuencia para la cabeza del estremo oscilante de las bielas de máquinas de vapor, y en particular en gran número de máquinas de los talleres de Seraing.

La cabeza de biela de la fig. 508 en vez de formar soporte de silla para un gorron ahorquillado, lleva en sí misma este gorron que le está invariablemente unido. En este caso la pieza móvil que corresponde al gorron, debe formar soporte de silleta, como lo indica, por ejemplo, la fig. 542, § 192. Análogas disposiciones para la parte oscilante de las bielas se encuentran en las locomotoras *(Polonceau)* y en las máquinas marinas *(Humphry)*. En esta cabeza de biela el valor de b' debe determinarse segun el espacio disponible; y en cuanto á la altura h debe calcularse en cada caso particular, segun las dimensiones de los órganos que han de moverse en el vacio comprendido entre los dos brazos.

Fig. 509. Cabeza de biela para gorron de horquilla. Esta forma que puede emplearse para el estremo oscilante de una biela, es análoga á la de la fig. 503. La superficie esterior de los cojinetes es cilíndrica, y uno de ellos se ajusta á una masa de presion de hierro. La presion del clavete se trasmite á dicha masa por medio de una pieza de bronce. El dispositivo de seguridad es el de la fig. 198. Bajo el punto de vista del aspecto la forma de esta cabeza de biela es muy satisfactoria.

Figura 510. Dispositivo muy usado para el estremo oscilante de una biela, máxime en las locomotoras. Conviene especialmente para las bielas que, al otro estremo (el que está animado de un movimiento de rotacion) terminan en una cabeza de construccion análoga á la de la figura 504. Aquí tampoco llevan los cojinetes reborde alguno en la superficie interior. El desplace del clavete de apretadura dimana de la rotacion de un perno; y á cada sexto de vuelta este perno puede fijarse en una posicion invariable por medio de un pasador que atraviesa su cabeza, á la vez que va á alojarse en una de la ranuras practicadas en la faz superior del diámetro que tiene esta cabeza. En las nuevas construcciones se emplea amenudo un artificio que consiste en practicar tres agujeros en la cabeza del perno y dos ranuras rectangulares en la capacidad, de suerte que la diferencia entre dos posiciones de fijacion no corresponde en este caso más que á un dozavo de vuelta.

§ 184

Cabezas de bielas para gorrones intermedios.

Conforme hemos indicado en el § 92, no existe la menor relacion teórica entre el diámetro d' del gorron intermedio y el diámetro d del gorron frontal equivalente. En cuanto á su longitud hemos admitido que en lo posible no debia bajar de la longitud l del gorron frontal, y esta es la regla que hemos seguido para el establecimiento de las contra-manivelas, de los árboles acodillados y de los excéntricos. Es tambien la que

adoptaremos para la construccion de las cabezas de bielas correspondientes á esta especie de gorrones.

En este caso utilizaremos los números proporcionales que hemos indicado para las cabezas de bielas de los gorrones frontales, poniéndolos en relacion con el módulo que suministra la fórmula (166). En cuanto al módulo *e* de las dimensiones de los cojinetes, debe espresarse como antes en funcion del diámetro real *d'* del gorron.

Ejemplo. *Reemplazado el gorron ahorquillado del ejemplo del § anterior con un gorron intermedio cuyo diámetro d' sea de* 120^{mm} *y la longitud l' de* 80^{mm}, *se pretende construir para ese gorron la cabeza de biela representada por la figura* 498. *En este caso se tiene, como antes,* $d=\sqrt{P}=\sqrt{3600}=60^{mm}$, $d_1=5+60=65^{mm}$, $b=46^{mm}$. *Falta escoger la anchura b' de la chapa; y como en gran número de cabezas de bielas para gorrones intermedios, esta anchura es la misma que para los gorrones frontales equivalentes, podemos tomar* $b'=b$ *y entonces se tiene:* $d'_1=d_1\sqrt{120:60}=65 \cdot 1{,}414=92^{mm}$. *Para los cojinetes se tiene* $e=3+7/_{100} \cdot 120=11^{mm}$.

Las figuras 511 á 518 indican varias disposiciones de cabezas de bielas para gorrones intermedios; y de intento hemos escogido formas diferentes de las que hemos dado antes para los gorrones frontales. Esa manera de operar nos permite realmente dar á conocer gran número de tipos, que son igualmente aplicables á los gorrones frontales.

Fig. 511. Cabeza de biela cerrada (fig. 492) para gorron esférico. Segun las indicaciones del § 169, la relacion del diámetro del gorron esférico de estremo al del gorron cilíndrico equivalente es 1'5. Suponiendo un gorron de ese género tendremos $d' : d=1{,}5$, y si como en el ejemplo anterior tomamos $b'=b$, hallaremos finalmente: $d'_1=d_1\sqrt{1{,}5}=1{,}225\, d_1$. Para $d=60^{mm}$ tendríamos de consiguiente, $d'=90^{mm}$, $d_1=65^{mm}$ $d'_1=1{,}225 \cdot 65=80^{mm}$. Los cojinetes no tienen rebordes más que en la superficie anterior, de suerte que sea posible sacarlos de su cuadro despues de quitar el clavete. En vez de colocarse debajo de los cojinetes, el clavete puede estar encima como en la figura 504, y en tal caso la apretadura (ó el cierre del juego) da por resultado acortar la biela en vez de alargarla como en el dispositivo actual. En las bielas de acoplamiento de las locomotoras esa manera de construir las testas de bielas se halla usado con frecuencia con el refuerzo figurado al lado en punteado (ó sea rayado).

Figura 512. Otra forma de cabeza de biela cerrada que amenudo se encuentra empleada para el paralelógramo de *Watt* y ciertos dispositivos de guiaje, tenemos en esta figura.

Para los gorrones intermedios de árboles acodillados, de las contra-manivelas y de los órganos del mismo género es necesario recurrir á cabezas de bielas que puedan abrirse. Entre las disposiciones que en tal caso pueden adoptarse, son las más convenientes aquellas en que el cierre se opera por medio de una pieza de llenura, ajustada á las ramas de la testa de biela y sujeta por medio de pernos, de modo que se obtenga un verdadero cuadro cerrado para recibir los cojinetes. Las figuras 513 y 514 representan dos cabezas de biela de este género. El dispositivo de la primera entra en el modo de construccion de la fig. 503. La pieza de llenura ó ripio se mantiene en virtud de las dos partes salientes y está firmemente apretada entre las ramas por dos pernos trasversales. La cabeza de biela de la figura 514 (*Krauss*) corresponde á la de la figura 505 y se usa juntamente con ella en las bielas de acoplamiento de las locomotoras. Como la pieza de llenura forma al propio tiempo el cojinete superior, ha de ser de bronce. Esta pieza se mantiene por medio de un solo perno trasversal perfectamente ajustado (que en la figura se supone quitado). Ranuras practicadas en las caras inferiores de las dos ramas del cuadro impiden todo movimiento de rotacion alrededor de dicho perno. Encima de la figura principal se halla representado un corte trasversal del cojinete superior, sobre el cual se ve la guarnicion de metal blanco. La ranura de separacion de los cojinetes se llena con hojas de cobre. La cabeza de biela y el perno son de acero.

Las figuras 515 y 516 son argollas ó cuellos de excéntricos que aquí se suponen hechos de bronce. La anchura $b'=l$ de cada argolla es igual á la longitud del gorron frontal de fundicion que corresponde á la presion del excéntrico (Véase § 92). Para $\sqrt{P}=40$ se tiene $d_1=45^{mm}$, $l=b=60^{mm}$; y entonces se consigue para $d'=400^{mm}$, $b'=l=60^{mm}$, $d'_1=45 \cdot \sqrt{400:40}=45 \cdot 3{,}16=142^{mm}$. Si se hace $d'=d$, los números proporcionales inscritos en las figuras dan dos cabezas de biela en forma de soportes, para gorrones frontales. Todas las dimensiones se determinan con números proporcionales cuyo módulo está indicado por la fórmula (166) escepto las de los dos pernos que reunen las dos partes de cada argolla. Su diámetro δ se calcula por la fórmula

$$\delta=0{,}33d_1+0{,}05d'_1 \qquad (167)$$

en la cual d'_1 designa el módulo de los gorrones intermedios y d_1 el de los gorrones frontales equivalentes.

EJEMPLO. *Para* $d'=400^{mm}$ *tentamos antes* $d'_1=142^{mm}$ *y* $d_1=45^{mm}$, *en cuyo caso debemos tomar* $\delta=0'33\cdot45+0'05\cdot142=15+7'1$, *ó sea* 22^{mm}. *Si hacemos* $d'=d$, *la fórmula* (167) *viene á ser idéntica con la* (165) *del* § 182 *para las cabezas de bielas de gorrones frontales.*

Fig. 517. Cuello de excéntrico de hierro colado, con una guarnicion de bronce (que ciertos constructores suprimen completamente). El cuerpo del vástago está siempre unido al collar con un clavete trasversal establecido paralelamente al eje del excéntrico. Cuando han de establecerse dos excéntricos muy cerca uno de otro conviene inclinar los clavetes á 45° sobre la posicion anterior, á fin de hacerlos fácilmente accesibles.

Fig. 518. Cuello de excéntrico de hierro forjado, provisto de guarnicion de bronce. Aquí, lo propio que en el antecedente dispositivo, los dos cojinetes de bronce deben caer perfectamente el uno sobre el otro, y es preciso limarlos cuando se les quiere acercar. En vez de hacer el vástago de una sola pieza con la parte inferior del cuello suele adoptarse la disposicion representada en punteado en la figura y que consiste en dar al vástago la forma de T, uniéndolo á la cabeza con dos pernos.

§ 185

Vástagos de bielas de seccion circular.

El árbol,.cuerpo ó vástago de una biela puede hacerse de hierro colado ó forjado y de acero y hasta de madera (roble). En el caso de no estar sometido más que á esfuerzos de traccion, y suponiéndole de seccion circular (designando por D el diámetro del cuerpo, por P el esfuerzo de traccion) conviene no bajar para D de los valores siguientes:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Hierro forjado } \dfrac{D}{\sqrt{P}}=0'56, & \text{Acero} & \dfrac{D}{\sqrt{P}}=0'44 \\ \text{Fundicion} & \dfrac{D}{\sqrt{P}}=0'80, & \text{Encina ó roble } \dfrac{D}{\sqrt{P}}=2'18 \end{array}\right\} \qquad (168)$$

A esos valores corresponden tensiones que respectivamente son de 4^k, 2^k, 6^k, $^2/_3$ y $0'27^k$, es decir los $^2/_3$ solamente de los que solemos admitir; y esa reduccion se hace con objeto de tener en cuenta bajo cierta medida la accion de los choques á que pueda estar sometida la biela en ciertos momentos por efecto del desgaste de los cojinetes.

Las mismas fórmulas pueden tambien emplearse con las bielas sometidas á esfuerzos de compresion; pero únicamente en el caso en que la longitud de esas piezas sea muy exigua. Cuando la biela tiene una longitud bastante grande para que pueda sufrir acciones de flexion, conviene generalmente adoptar en cuanto al diámetro un valor superior al que darian dichas fórmulas. Para una biela que se encuentra colocada en las condiciones del n.° II, § 16 (Véase tambien § 127), el esfuerzo P debe ser inferior á $\pi^2\dfrac{EI}{L^2}$, designando I el momento de inercia de la seccion de la biela, y E el coeficiente de elasticidad de la materia que la compone. Así pues, deberemos tomar: $P=\dfrac{1}{m}\pi^2\dfrac{EI}{L^2}$; y en cuanto al coeficiente de seguridad m, el exámen de gran número de bielas demuestra que varia en límites tan estensos como los indicados antes para las columnas. Si dejando provisionalmente indeterminada m reemplazamos I por su valor $^1/_{64}\,\pi\,D^4$ y E por 20,000 para el hierro forjado y el acero, por 10,000 para la fundicion y por 1,100 para la madera, obtendremos para el diámetro del cuerpo de la biela las siguientes espresiones:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Hierro y acero. .} & D=0'10 & \sqrt[4]{m}\sqrt{L\sqrt{P}} \\ \text{Fundicion. . .} & D=0'12 & \sqrt[4]{m}\sqrt{L\sqrt{P}} \\ \text{Roble ó encina. .} & D=0'21 & \sqrt[4]{m}\sqrt{L\sqrt{P}} \end{array}\right\} \qquad (169)$$

Para

$m=$	2	3	4	6	8	10	15	20	25	30	40	50	60
$\sqrt[4]{m}=$	1'19	1'32	1'41	1'56	1'68	1'78	1'97	2'11	2'24	2'34	2'51	2'66	2'78

Si designamos por C los coeficientes de $\sqrt{L}\sqrt{P}$, las fórmulas precedentes pueden ponerse bajo la fórmula:

$$\frac{D}{\sqrt{P}} = C\sqrt{\frac{L}{\sqrt{P}}},$$

en la que deben tomarse para C diferentes valores segun el grado de seguridad que se quiera tener. En la práctica m presenta, como hemos dicho, grandes variaciones. En las máquinas de vapor fijas y sobre todo en las de cortas dimensiones se encuentran para m valores muy altos, que llegan con frecuencia hasta 50 ó 60. Debemos, empero, advertir que las pequeñas máquinas de vapor son poco á propósito para dar indicaciones acerca de las proporciones que se deben adoptar, puesto que en tal caso un esceso en las dimensiones tiene escasísima importancia bajo el punto de vista de la marcha ó de la economia de materia. Para las máquinas de vapor de fuerza media y de grandes dimensiones m queda comprendida entre 5 y 25 y amenudo se la encuentra igual á 20. Esas grandes variaciones deben atribuirse en parte á las diferencias de fijacion de los estremos de las bielas; y así, por ejemplo, cuando uno de los estremos de una biela está dotado de gorron doble, esa biela en concepto de las flexiones y en el plano de los gorrones puede considerarse como si se hallara en las condiciones de la pieza núm. I, párrafo 16, en cuyo caso es evidente que m no puede ser inferior á 4.

Con $m=20$ se tiene, para el hierro (forjado) y el acero, $C=0'21$.

1.er EJEMPLO. *Una biela de hierro forjado, larga de* 3000^{mm} *sometida á una presion de* 14400^{k} *se supone armada de un gorron doble en uno de sus estremos: debe por lo tanto tener como diámetro de su cuerpo,*

$$D=0'21\sqrt{3000.\sqrt{14400}}=0'21\sqrt{3000.120}=21\sqrt{36}=126^{mm}.$$

El cuerpo de la biela va disminuyendo generalmente á partir del medio, de suerte que el diámetro de la seccion á cada estremo no sea más que $0'7\ D$. El perfil está formado por una línea de leve curvadura. Puede al efecto utilizarse la curva sinucicloidal representada con la ecuacion (23).

Trábase á los estremos el cuerpo de la biela con las cabezas por una série de secciones entrecruzadas de una rueda contínua, para que se eviten las variaciones bruscas de tension. Las variaciones de tension tienen efectos tanto más perniciosos cuanto mayor es la velocidad de la biela. Cuando es muy considerable dicha velocidad, como en las locomotoras, por ejemplo, resulta todavia otro efecto sensible de flexion en el cuerpo de la biela. Ese efecto se debe al llamado *latigueo* de la biela, que por cada vuelta de la manivela corresponde á una doble flexion arriba y abajo en el plano de dicha manivela. El valor de esa flexion aumenta con la potencia viva de la biela y su peso. En una biela ordinaria que une la manivela y el émbolo de una máquina de vapor, el punto por el que este efecto de flexion es el más pronunciado, se halla comprendido entre el medio del cuerpo de la biela y el boton de la manivela. Por ese motivo varios constructores en vez de colocar el mayor diámetro del cuerpo en el medio mismo de la longitud, lo sacan lijeramente afuera á la parte de la manivela, conforme lo demuestra la fig. 519, que reproduce un dispositivo usado en la práctica y cuyo aspecto es bastante satisfactorio.

Debemos, sin embargo, hacer notar que con las velocidades ordinarias de los émbolos de $1'2^{m}$ á $1'5^{m}$ la influencia del latigueo es casi nula, y que generalmente puede despreciarse cuando se adoptan los coeficientes de seguridad antes indicados. En este caso la adopcion de la forma dada por la figura precedente, debe en realidad considerarse más bien como un medio elegante de representar la accion de las fuerzas bajo los diferentes puntos, que como una verdadera necesidad de construccion. Conviene añadir que esa forma se presta á la reunion de cabezas de secciones diferentes, y que en este concepto merece á veces recomendarse.

En las máquinas de vapor de rotacion rápida en que es considerable la velocidad del émbolo, se coloca en primer término la cuestion del latigueo. En las máquinas de *Allen* que van á muy grande velocidad, las bielas son muy récias y el abultamiento se encuentra muy aproximado al boton de la manivela. No obstante, estas máquinas no son á propósito para servir de punto de partida para el establecimiento de fórmulas de construccion, puesto que en las locomotoras, conforme veremos en el párrafo que sigue, el coeficiente de seguridad m es en definitiva bastante débil, por más que la celeridad del émbolo sea muy grande.

En las máquinas de barcos el coeficiente m es en general muy elevado; pues amenudo llega á 30, 40, 60 y hasta 80. Por lo que toca á la relacion de D á $\sqrt{P}$ varia muy poco, y siempre está comprendida entre

o'70 y o'78. Esos dos resultados deben atribuirse á que para esas máquinas se tiene la costumbre de tomar el diámetro del cuerpo de biela proporcional al diámetro del cilindro. Conviene observar, además, que en los barcos la fundacion de las máquinas dista mucho de presentar una invariabilidad absoluta, y por lo tanto es necesario adoptar un coeficiente de seguridad elevado. La figura 520 representa una biela de máquina de barco de hélice. El cuerpo es completamente cilíndrico y las cabezas tienen una disposicion análoga á la de la figua 502.

2.° EJEMPLO. *Para una máquina de un buque de hélice se da* $P=43000^k$, $L=1515^{mm}$. *Para* $m=20$ *se tiene, segun lo antedicho,* $D=\sqrt{P.C}\sqrt{L:\sqrt{P}}$ $=207 . o'21\sqrt{1515:207}=o'21 . 207 . 2'7=117^{mm}$. *Maudslay, con los mismos datos, tomó* $D=152^{mm}$, *lo cual corresponde á un coeficiente de seguridad* $m=54'7$. *El diámetro* δ *de los pernos era de* 76^{mm}, *y segun la figura 502 habria debido tomarse* $\delta=o'53\sqrt{43000:2}$ $=o'53 . 146'4=77'7^{mm}$ *ó sea* 78^{mm}. *En otras máquinas de buques de hélice se halla el cociente* $\delta:\sqrt{o'5P}$ *comprendido entre* o'67 *y* o'75. *Este valor elevado puede esplicarse en parte por el empleo de filetes cuadrados de fuerte saliente y en parte por el intento que se tenia de conseguir una seguridad muy grande.*

§ 186

Cuerpo de bielas de seccion rectangular.

Cuando se debe construir un cuerpo de biela de seccion rectangular, puede ante todo determinarse segun las reglas del párrafo precedente el conoide que corresponde á la seccion circular y trasformar luego estas secciones en rectángulos. Si se designa por

h el mayor
b el menor } lado de una seccion rectangular cualquiera,

δ el diámetro de la seccion circular para el mismo punto,

debe tomarse en el caso en que se haya dado la altura h,

$$\frac{b}{\delta}=\sqrt[3]{\frac{3\pi}{16}\frac{\delta}{h}}=o'84\sqrt[3]{\frac{\delta}{h}}\ ; \quad (170)$$

en cambio, si lo que se conoce es la anchura b, se tiene:

$$\frac{h}{\delta}=\frac{3\pi}{16}\left(\frac{\delta}{b}\right)^3=o'59\left(\frac{\delta}{b}\right)^3. \quad (171)$$

Por último, cuando se da simplemente la relacion $\frac{b}{h}$, debe tomarse:

$$\frac{b}{\delta}=\sqrt[4]{\frac{3\pi}{16}\frac{b}{h}}=o'88\sqrt[4]{\frac{b}{h}}\ . \quad (172)$$

La siguiente tabla contiene una série de valores dados por esas fórmulas:

$\frac{h}{\delta}$	$\frac{b}{\delta}$	$\frac{b}{\delta}$	$\frac{h}{\delta}$	$\frac{h}{b}$	$\frac{b}{\delta}$
1'0	o'84	o'50	4'72	1'0	o'88
1'1	o'81	o'53	3'98	1'25	o'83
1'2	o'79	o'56	3'38	1'50	o'79
1'3	o'77	o'60	2'75	1'75	o'76
1'4	o'75	o'63	2'37	2'00	o'74
1'5	o'73	o'66	2'07	2'5	o'70
1'6	o'72	o'70	1'73	3'0	o'67
1'7	o'70	o'75	1'39	3'5	o'64
1'8	o'69	o'80	1'15	4'0	o'62
2'0	o'67	o'84	1'00	4'5	o'60

1er EJEMPLO. *El procedimiento más cómodo consiste en determinar el perfil de las alturas EFGH (figura 521) y fijar las anchuras por medio de las columnas 1 y 2 de la tabla. Despues de trazar el perfil ideal de secciones circulares ABCD, se determina el perfil EFGH prudencialmente, atendiendo á que sus diferentes alturas ST, PQ.... sean superiores á los diámetros correspondientes st, pq.... del cuerpo ideal. Si por ejemplo, se toma* $ST=1'6\ st$, *la tabla da (col. 2, línea 7):* $b=o'72\ st$; *y para* $PQ=1'5\ pq$ *se tiene asimismo* $b=o'73\ pq$, *etc.*

Si b hubiese de ser igual á $o'7D$, *deberia tomarse, segun la tabla (col. 3 y 4, línea 7), la altura* $ST=2'07D$.

Si la altura debiese ser constantemente el doble de la anchura, habria de tomarse segun la tabla, b igual en cada punto á o'74 *del diámetro* δ *correspondiente á este punto.*

Ventajoso es en ciertos casos poder calcular directamente la seccion rectangular del cuerpo de biela en un punto, debiendo entonces introducirse el menor de los momentos de inercia de la seccion. Haciendo $I=\frac{1}{12}hb^3$, se obtienen las siguientes fórmulas respecto de las bielas de hierro forjado y de acero.

para un valor determinado de b:

$$h=o'00006\ m\frac{PL^2}{b^3}; \quad (173)$$

para un valor determinado de h:

$$b=o'039\sqrt[3]{m}\sqrt[3]{\frac{PL^2}{h}} \quad (174)$$

y para un valor dado de la relacion $\frac{h}{b}$:

$$h=o'088\sqrt[4]{m}\sqrt[4]{\left(\frac{h}{b}\right)^3}\sqrt{L\sqrt{P}} \quad (175)$$

En esta última fórmula se tiene:

para $\frac{h}{b}$ = 1'5 1'6 1'7 1'8 1'9 2'0 2'1 2'2 2'3 2'4 2'5

$\sqrt[4]{\left(\frac{h}{b}\right)^3}$ = 1'36 1'42 1'49 1'55 1'62 1'68 1'74 1'80 1'87 1'93 1'99.

En las locomotoras es donde se encuentran las aplicaciones más numerosas de ese género de bielas. La seccion rectangular es la que se emplea casi esclusivamente, primero porque es más fácil de instalar, y luego porque es más ventajosa por lo tocante al latigueo, hallándose su mayor dimension paralela al plano de la manivela. El coeficiente de seguridad tiene muy escaso valor, es decir, la biela se ejecuta tan lijera como sea posible para mantener entre límites bastante estrechos los movimientos de perturbacion. Al propio tiempo se tiene la ventaja de reducir la accion del latigueo, que conforme hemos indicado antes, es directamente proporcional al peso del cuerpo de la biela.

En las bielas de émbolos de locomotoras el coeficiente *m* varia de 2 á 1'5 para la seccion media. A partir de ese punto disminuye la altura hasta uno de sus estremos y acaba por no ser más que 0'8 á 0'7 de la altura de enmedio. En las bielas de acero suele suceder que á ese estremo los esfuerzos de presion y tension alcanzan 5^k. La fig. 522 representa una biela de émbolo de locomotora. A partir del medio la altura *h* vá creciendo hasta la cabeza que abarca el boton de la manivela, lo cual da por resultado facilitar la construccion y el ajuste del cuerpo con la cabeza de la biela.

2.° Ejemplo. *En una locomotora la presion sobre la biela de trasmision* P=13000^k, *la longitud* L *de la biela*=1830^{mm} *y la relacion* $h:b$=2'5. *Para* m=1'5, *es decir* $\sqrt{m}$=1'1, *debe tomarse segun la fórmula* (175), h=0'088 . 1'1 . 1'99 $\sqrt{1830\sqrt{13000}}$=0'088 . 1'1 . 1'99 . 456'7=88^{mm}, *y por lo tanto* b=0'4 . 88^{mm}=35^{mm}. *En una biela ejecutada segun los mismos datos (Borsig), se encontró* h=85^{mm}, b=36^{mm}. *Otras bielas del mismo género y de buena construccion dieron los siguientes resultados:*

P=11500^k, L=1654^{mm}, h=85^{mm}, b=33^{mm};
P=14600^k, L=1700^{mm}, h=95^{mm}, b=36^{mm}.

Para esas dos piezas el coeficiente de seguridad está comprendido entre 1'5 *y* 1'6.

En las bielas de acoplamiento de las locomotoras la accion del latigueo es mucho más pronunciada que en las bielas de trasmision. En el medio es donde se produce el máximo de flexion, y por lo tanto en este punto es donde debe tener más valor la seccion. La figura 523 representa una biela de ese género. Los cojinetes están provistos de clavetes de apretadura á cada lado del gorron, de manera que la aproximacion de dichos cojinetes puede efectuarse sin modificar la longitud de la biela. Con el mismo fin se da á los dos gorrones la misma magnitud para que el desgaste sea sensiblemente igual para entrambos. En el cálculo de la seccion del cuerpo de la biela se suponen las dos ruedas acopladas sometidas en sus circunferencias á una misma fraccion de resistencia. Por consiguiente con dos pares de ruedas acopladas, el esfuerzo sobre la biela de acoplamiento es la mitad de la fuerza de la biela de trasmision: con tres pares de ruedas acopladas, el esfuerzo sobre la primera biela de acoplamiento es igual á $^2/_3$ de dicha fuerza, al paso que el que se ejerce sobre la segunda no es más que $^1/_3$. Pero conviene tener en cuenta que en ciertas circunstancias puede una de las ruedas deslizarse, lo cual conduce á no tomar el coeficiente *m* tan débil para las bielas de acoplamiento como para las de trasmision. Conviene, pues, recomendar que nunca se baje para *m* de 1 y hasta quedarse un poco más arriba, máxime en el caso de dos ruedas acopladas. En tales condiciones el deslizamiento de una rueda jamás puede dar por resultado suscitar un peligro inmediato de rotura para la biela de acoplamiento.

3.er Ejemplo. *La locomotora del ejemplo anterior tiene dos pares de ruedas acopladas, cuyo esfuerzo sobre la biela de acoplamiento es* P=13000 : 2=6500^k. *Si suponemos á más que* L=2563^{mm} *y* $h:b$=2'5, *y tomamos* m=2, *la fórmula* (175) *da*: h=0'088 . 1'19 . 1'99 $\sqrt{2563\sqrt{6500}}$=0'088 . 1'19 . 1'99 . 454'42=99^{mm}, *y por consiguiente* b=0'4 . 99=39^{mm}. *En la práctica se toman para esos mismos datos* h=98^{mm}, b=39^{mm}. *Las medidas sacadas de otras bielas de acoplamiento han dado para los coeficientes de seguridad* 1'9, 2'11, 2'8.

§ 187

Cuerpo de bielas con nervaduras y aletas.

La forma de seccion en cruz cuyo empleo en ciertos árboles hemos señalado ya, conviene muy especialmente para los cuerpos de biela de hierro colado. Igualmente en tal caso se comienza por trazar el cuerpo ideal de seccion circular (calculado para fundicion), luego se elige el perfil de las alturas y se determina el perfil de los anchos. Si para una posicion cualquiera se designa por

δ el diámetro del cuerpo ideal de seccion circular,
h la altura de las nervaduras,
b la anchura ó espesor de las mismas,

debe elegirse b de manera que satisfaga la relacion

$$\frac{\delta}{h}=\frac{b}{h}\sqrt[4]{\frac{16}{3\pi}}\sqrt[4]{\left(\frac{b}{h}\right)^3+\frac{h}{b}-1} \quad (176)$$

La tabla siguiente facilita el empleo de esa fórmula:

$\frac{\delta}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{\delta}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{\delta}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{\delta}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{\delta}{h}$	$\frac{b}{h}$
0'643	0'10	0'700	0'14	0'748	0'18	0'816	0'25	0'901	0'36
0'653	0'11	0'714	0'15	0'758	0'19	0'831	0'27	0'928	0'40
0'673	0'12	0'724	0'16	0'768	0'20	0'855	0'30	0'958	0'45
0'690	0'13	0'736	0'17	0'789	0'22	0'872	0'33	0'987	0'50

Si se quiere determinar el peso del cuerpo de la biela puede recurrirse á la tabla del § 140.

1.er Ejemplo. *En la fig.* 524 *A B C D designa el cuerpo ideal, de seccion circular, para la biela de fundicion que se ha de construir; E F G H es el perfil de las alturas, determinado á ojo. Si suponemos, por ejemplo, que la relacion de S T á s t es* 1'5, *tendremos* $\delta : h = 0'667$, *y segun la tabla* (*col.* 1 *y* 2, *línea* 3), *debe tomarse para el espesor de las nervaduras,* $b = 0'12h = 0'12.ST$. *Si* $PQ = 1'4\ pq$, *se tiene para la posicion P la relacion* $\delta : h = 1 : 1'4 = 0'7$, *y la tabla da para el espesor de la nervadura,* $b = 0'14\ PQ$.

Para llegar á una construccion lijera de las bielas de locomotoras se ha tenido que adoptar la forma de seccion de nervaduras ó de doble *T* (*Krauss*, de Munich). La fig. 525 nos ofrece una biela de acoplamiento con un cuerpo de seccion de ese género. Este cuerpo se obtiene vaciando una pieza llena forjada de acero (por medio de una máquina de taladrar longitudinal). Ese modo de construccion no permite más que un lijero abultamiento esterior, que no es visible en la figura en razon á la pequeñez de escala. La seccion puede ejecutarse con un perfil formado de líneas rectas ó encorvadas (fig. 526). Descuidando la influencia de esas partes encorvadas y conservando las notaciones anteriores se encuentra para el más pequeño momento de inercia de la seccion:

$$I = {}^1/_{12}\,[2\,c\,B^3 + (h - 2\,c)\,b^3].$$

Igualando ese momento de inercia con el de una seccion rectangular, de alto h y de ancho b_0 (Véase § 164) determinada con relacion á las fuerzas que obran sobre la biela, tendremos:

$$\frac{b_0}{b} = \sqrt[3]{1 + 2\frac{c}{h}\left[\left(\frac{B}{b}\right)^3 - 1\right]}, \quad (177)$$

fórmula que permite obtener fácilmente valores numéricos. cuando se han elegido las siguientes relaciones $c : h$ y $B : b$.

2.º Ejemplo. *Una biela de acoplamiento con nervaduras* (*tipo de Krauss*) *tiene como dimensiones de la seccion del medio,* $h = 80^{mm}$, $b = 10^{mm}$, $B = 47^{mm}$, $c = 15^{mm}$; *amen de que* $L = 2450^{mm}$ *y* $P = 4950^{k}$. *Para determinar el coeficiente m, tenemos ante todo segun la fórmula* (177), $b_0 = b\sqrt[3]{1 + 2\,{}^3/_8\,(4'7^3 - 1)} = 10 . 4'28$ *ó sea* 42^{mm}; *la fórmula* (173) *da* $m = \frac{100000}{6}\frac{h\,b_0^3}{P\,L^2} = \frac{100000 . 80 . 42^3}{6 . 4950 . 2450^2} = 3\,{}^1/_3$ *próximamente, valor algo superior al que antes hemos indicado. La superficie de la seccion de nervaduras es á la de la seccion llena como* $\frac{2 . 15 . 47 + 50 . 10}{80 . 43} = \frac{191}{344}$. *El peso total de la pieza completamente apta para recibir los gorrones no es más que de* 62 *kilógramos.*

§ 188

Bielas de hierro forjado y de hierro colado.

Las figuras 527 y 528 representan: la primera una biela de hierro forjado cuyo cuerpo es de seccion circu-

lar; y la segunda una biela de fundicion en seccion de cruz. La primera termina al estremo superior en una chapa que tiene forma de horquilla destinada á recibir un gorron, en tanto que el estremo inferior presenta la forma ordinaria. En la biela de fundicion el cuerpo de aletas está separado, con razon, de las partes correspondientes á las cabezas por medio de anillos llenos que miden escasa longitud. La cabeza inferior se compone de una parte prolongada, de cuatro caras; la que mira á la manivela es plana y de longitud algo superior á la del brazo de esa manivela, aumentada con el radio de su cubo; y ese dispositivo permite acercar mucho los planos medios de la biela y la manivela.

Las figuras 529, 530 y 531 dan algunas formas especiales de cabezas de bielas ahorquilladas. En la 529 la longitud de la horquilla es mucho más corta que en la figura 527. La disposicion de la fig. 530 corresponde á un cuerpo de seccion rectangular, cuyas pequeñas faces están redondeadas. Por último, la figura 531 conviene en especial para las bielas de fundicion de muy grande longitud. En esas diferentes disposiciones las chapas de los cojinetes de los dos brazos son fijas, y la aproximacion de los cojinetes se efectua, como en el dispositivo de *Sharp*, por medio de una placa. A veces se han de ejecutar bielas compuestas de cuadros rectangulares ó trapezoidales. Los brazos de un cuadro de ese género deben determinarse como bielas aisladas, correspondiendo las partes á las cabezas como los cruceros, que vamos á examinar con algunos detalles en el capítulo siguiente:

CAPÍTULO XV

TRAVIESAS

§ 189

Diferentes especies de traviesas.

Se designan con el nombre de traviesas unas piezas con gorrones, destinadas á unir las bielas á los órganos que han de comunicarles movimiento, como los vástagos de los émbolos de máquinas de vapor, ó por el contrario, á los que deben gobernar, como los vástagos de los émbolos de bombas de agua. Las traviesas pueden estar dotadas de gorrones simples, dobles ó de horquilla. Estas dos últimas clases de gorrones son las que se usan con preferencia. Las traviesas, por otra parte, están enlazadas con guias que las obligan á describir un camino determinado. Comunmente se obtiene este resultado por medio de guias articuladas (paralelógramos, etc.), ó de resbaladeras. A veces no lleva la traviesa ninguna de esas piezas especiales y se encuentra simplemente guiada por los vástagos á que está enlazada (vástagos de émbolos, vástagos de las cajas de distribucion ó cajones). Segun esto debemos dividir las traviesas en tres clases:

1.° Traviesas de movimiento libre,

2.° Traviesas con guias articuladas,

3.° Traviesas con deslizaderas.

En esa division hemos prescindido absolutamente del género de gorron empleado. Vamos á indicar ahora algunas de las aplicaciones más importantes de las traviesas.

§ 190

Traviesas de movimiento libre.

Las figuras 532 y 533 indican dos disposiciones de pequeñas traviesas de hierro forjado, de movimiento libre, dotadas de gorrones dobles. El diámetro del agujero practicado para el peso del vástago del émbolo no debe ser inferior á d_1.

La traviesa representada por la figura 534 es una estension de las dos formas precedentes. Para esa pieza se obtienen buenas proporciones tomando para la altura h en su medio:

$$h = 2{,}5 d_1 + \frac{A}{14}. \qquad (178)$$

designando A la longitud del brazo. Si la presion del gorron obra precisamente sobre ese brazo, como en la

palanca de la figura 457, debe tomarse segun la fórmula (156) para su anchura b, que se supone constante:

$$b = \frac{P}{2}\,\frac{A}{h^2} \qquad (179)$$

Si admitimos que d_2 se haya calculado por la fórmula (98) que para el hierro forjado da $d_2 = 0{,}7\sqrt{P}$, la relacion precedente se convierte en:

$$\frac{b}{d_2} = \frac{d_2}{h}\,\frac{A}{h}$$

La curva del perfil puede trazarse por uno de los procedimientos indicados en el § 143.

1.er Ejemplo. *Para la traviesa representada por la figura* 534 *se da la carga* $P = 4000^k$ *y la longitud del brazo* $A = 400^{mm}$. *Tomando para esa pieza gorrones frontales ordinarios tendremos:* $d_2 = \sqrt{2000} = 45^{mm}$. *Entonces la fórmula* (178) *da:* $h = 2{,}5 \cdot 45 + 400 : 14 = 112{,}5 + 28{,}6$ *ó* $141{,}1^{mm}$. *Tomaremos* 140^{mm} *y hallaremos* $b = 45 \cdot \frac{45}{140} \cdot \frac{400}{140} = 41^{mm}$. *El espesor de la pared del cubo es* $0{,}5 d_2 = 0{,}5 \cdot 45$ *ó* 23^{mm}; *la altura del clavete es igual á* $0{,}67 \cdot 45 = 30^{mm}$ *y su anchura á* $0{,}2 \cdot 45 = 9^{mm}$.

2.° Ejemplo. *El barco de vapor de ruedas «La Plata,» de* 3000 *caballos tiene cilindros de vapor de* 2616^{mm} *de diámetro, en las cuales el máximo de presion es* $1\,^3/_4$ *de atmósfera, lo que corresponde por émbolo á una carga* P *de* 102000^k *en cifras redondas. Las poderosas traviesas de los émbolos presentan el dispositivo de la figura* 534 *y se ejecutaron con una longitud de brazos* $A = 1727^{mm}$. *El constructor (Napier) tomó:* $h = 711^{mm}$, $b = 178^{mm}$, *el diámetro de un gorron* $d_2 = 254^{mm}$ *y la longitud* $= 381^{mm}$. *La altura del cubo es de* 762^{mm}, *el espesor de sus paredes de* 127^{mm} *y por último, el diámetro interior de* 254^{mm}. *Las fórmulas precedentes nos habrian dado:* $d_2 = 225^{mm}$, $h = 685^{mm}$, $b = 185^{mm}$.

§ 191

Traviesas con guias articuladas.

Las traviesas que deben estar provistas de guias articuladas permiten á más de sus gorrones de apoyo otros dos que forman la prolongacion de éstos. Las figuras 531 y 536 representan una traviesa de hierro forjado con gorrones-guias, que conviene perfectamente para los vástagos de émbolos de máquinas de balancin, y que desde un principio fué empleada por *Watt*. Los números proporcionales inscritos en las figuras se refieren al mismo módulo que el de las cabezas de bielas:

$$d_1 = \sqrt{P} + 5^{mm}, \qquad (180)$$

en la que P es la carga total de la traviesa. Igual módulo se halla utilizado en las traviesas que nos falta examinar. La carga P_3 de un gorron-guia puede deducirse de la carga P_2 de un gorron de apoyo de la traviesa, por medio de la fórmula

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \beta}, \qquad (181)$$

en que α designa el ángulo mayor que hace, con la direccion del movimiento de la traviesa, la biela aplicada al gorron d_2 y β el ángulo que la contra-guia articulada con el pequeño gorron forma con la normal á esa direccion, cuando α es un máximum. El último ángulo es fácil de determinar gráficamente.

Ejemplo. *Si el ángulo* α *en su máximo es de* 20° *y á la vez* $\beta = 15°$, *se tiene* $\frac{sen\ \alpha}{cos\ \beta} = \frac{0{,}3420}{0{,}9659} = 0{,}35$; *dando entonces la fórmula* $P_3 = 0{,}35\ P_2$.

En las máquinas de vapor de accion directa el ángulo α puede alcanzar 20° y tal vez pasar; pero cuando la biela está unida á un balancin, rara vez pasa de 10° el ángulo α.

La fig. 537 representa otra forma de traviesa de hierro forjado con gorrones-guias. En este dispositivo es muy fácil suprimir la trabazon entre el vástago del émbolo y la cabeza de la traviesa que la recibe, siendo esto una ventaja que hace muy satisfactorio su empleo para las máquinas de accion directa.

§ 192

Traviesas guiadas por deslizaderas.

Las traviesas guiadas por deslizaderas son aquellas que se usan con preferencia para las máquinas de vapor y las bombas. Presentan muy variados dispositivos que se distinguen esencialmente por el número y modo de emplear las deslizaderas.

La fig. 538 ofrece un tipo de traviesa muy usado que permite cuatro deslizaderas. Cuando la máquina gira constantemente en el mismo sentido y la presion sobre el émbolo obra siempre en la direccion de su movimiento ó siempre en el sentido directamente opuesto, sufre la presion una sola de las dos caras de cada deslizadera, y en tal caso la otra cara tiene simplemente

por objeto destruir el efecto de los esfuerzos accidentales que podrian actuar en sentido contrario de la presion precedente. En cambio, cuando la presion sobre el émbolo se ejerce unas veces en la direccion de su movimiento y otras en sentido opuesto, la traviesa sufre presion alternativamente en sus dos caras. En las máquinas de vapor no se produce solamente en la marcha á contra-vapor ese cambio de direccion de la presion sobre la traviesa, sino que además es una consecuencia necesaria del avance de la caja de distribucion, si bien entonces este efecto no se observa más que en los estremos de la carrera. Las superficies frotantes de la traviesa deben estar en lo posible compuestas de una materia mas blanda que la de las deslizaderas, á fin de lograr para estas últimas piezas menor desgaste. Por igual motivo conviene que la superficie de cada parte frotante sea á lo menos de 2'5 P, designando por P la presion ejercida sobre el émbolo; y aun á veces se toma un valor doble, ó sea $5P$. Con las relaciones que se admiten comunmente entre las longitudes de la biela y el brazo de la manivela, la presion p ejercida por unidad de superficie en las partes frotantes es proximamente de $^1/_{12}{}^k$ en el primer caso y $^1/_{24}{}^k$ en el segundo. Las piezas frotantes están aqui fijas en gorrones que terminan el eje de la traviesa. Suponiendo el diámetro de esos gorrones igual á 0'5 d, como lo indica la figura, conviene adoptar el número 3 para su longitud proporcional. Cuando la longitud del brazo de la traviesa es considerable, puede ser necesario tomar para el diámetro d' de los gorrones un valor superior al de un gorron frontal ordinario; y entonces para mayor seguridad debe determinarse ese diámetro considerando el brazo de la traviesa como un huso de eje de longitud a (véase §§ 130 y 138).

En la traviesa representada por la figura 539 el esfuerzo se trasmite por un gorron ahorquillado que afecta además la forma esférica. En la figura la pieza de horquilla que está fija con el clavete en el vástago del émbolo, se supone de hierro forjado; y en caso de ser de fundicion, seria preciso aumentar las dimensiones del cubo que recibe el vástago, elevando su espesor á 0'28 d y su longitud á 1'75 d_1. Las deslizaderas se encuentran aquí notoriamente más aproximadas al vástago del émbolo que en el dispositivo anterior.

En las máquinas de vapor de los barcos de hélice se ha ido introduciendo un sistema de construccion que exije una traviesa de disposicion particular. Es el sistema con bielas de retorno, que permite colocar el árbol acodillado entre la tapa del cilindro y la traviesa. El vástago del émbolo se encuentra entonces descompuesto en dos vástagos paralelos, cuyo plano está inclinado con respecto á este árbol. Hay varios tipos de traviesas de este género. La fig. 540 representa el de *Maudslay*. La traviesa cuya forma es la de un eje ordinario, lleva dos cubos en forma saliente, destinados á recibir los vástagos del émbolo. La saliente E de cada cubo depende del diámetro del árbol acodillado, al paso que la distancia A se determina por la anchura del brazo del codo. Las correderitas de la traviesa se encuentran fuera de los vástagos de émbolo. En otros dispositivos, como el de *Ravenhill*, por ejemplo, se establecen en cambio entre el gorron del medio d' y los vástagos del émbolo, que á tal fin deben estar suficientemente separados. La guarnicion inferior de cada correderita es de bronce y está afirmada con clavetes. Deben determinarse las dimensiones de la traviesa como las de un eje, procurando no perder de vista que las fuerzas $^1/_2 P$ aplicadas al brazo E tienden á producir no solo una flexion, sino tambien una torsion del cuerpo de la traviesa. Cuando se ha determinado el diámetro d' del gorron, debe tomarse para su longitud un valor tal, que la presion por unidad de superficie no sea muy fuerte (véase § 160). En las máquinas inglesas la presion por unidad de superficie en el gorron varia de 0'6^k á 1^k y hasta 1'3^k. En cuanto al diámetro δ de lo pernos, conviene aquí determinarlo tambien por la fórmula (165).

Figura 541. Traviesa de *Stephenson*. En este dispositivo se reducen realmente las deslizaderas á una sola, de suerte que la traviesa no tiene más que dos caras frotantes en vez de las cuatro que tienen los tipos anteriores. Los dos gorrones de la pieza intermedia, que es de hierro forjado, se enlazan en los dos brazos de una biela partida en una gran longitud. Como guarnicion de las superficies frotantes, el bronce es tambien aquí muy conveniente; pero para quedar en las condiciones de los tipos anteriores, importa tomar cada una de estas superficies igual á 5 P. Sin embargo, por efecto del espacio reducido de que se dispone en las locomotoras, se usan á veces superficies más pequeñas, que bajan por ejemplo hasta 2'5 P.

La figura 542 ofrece un dispositivo análogo adoptado por *Borsig*, el cual permite un gorron ahorquillado, para el que convendria que no fuese muy pequeño el producto de las dimensiones l'. d'. Desgraciadamente en la mayoria de los casos el limitado espacio de que se dispone, no permite llenar esa condicion, y no es raro encontrar gorrones de ese género en que la presion p por unidad de superficie se eleva á 2^k, 3^k y hasta más. Compréndese que en semejantes condiciones el gorron y los cojinetes de la biela están espuestos á calentarse con frecuencia y gastarse pronto. El modo de fijar el gorron tal como lo indica la figura, es por demás notable. La

pieza de fundicion que forma el cuerpo de la correderita, está armada de planchas de bronce, ajustadas cuidadosamente, que es posible aproximar con facilidad por medio de hojas de cobre ó de zinc intercaladas entre ellas y las caras de la pieza de fundicion.

La fig. 543 nos ofrece una traviesa que sólo va guiada por un lado. Este dispositivo no se aplica más que en los casos en que el movimiento de rotacion deba efectuarse en un solo sentido siempre el mismo y en que por tanto la direccion de la presion sobre la deslizadera sea constante. Para ponerse á cubierto de los esfuerzos accidentales que pueden ocurrir fuera del plano vertical conducido por el eje de la traviesa, y de la accion de la contra-presion debida al avance en las máquinas de vapor (véase la pág. 218), el patin de la traviesa se determina en sus lados por dos partes talladas á bisel (ó mejor aun en ángulo recto), que se encajan entre dos rebordes de igual inclinacion firmemente fijas en la cara horizontal de la deslizadera. Cuando se emplea el hierro colado la superficie frotante de la traviesa nunca debe ser inferior á $5P$ y hasta conviene darle un valor más considerable en cuanto sea posible.

La fig. 544 indica otra forma de traviesa de un solo patin, tomada de una máquina de buque de *Humphry Tennant*. En este dispositivo la presion trasmitida por la traviesa actua en dos direcciones opuèstas, y por ende el cubrimiento de la deslizadera es mucho más pronunciado que en el caso anterior. La traviesa en vez de llevar un gorron, forma en realidad un soporte correspondiente á una cabeza de biela de construccion análoga á la de la figura.

Para corregir el juego debido al desgaste se recurre al empleo de planchas de cobre. La que guarnece la ranura vertical se reemplaza á cada cambio por otra más delgada, á la vez que para la ranura horizontal conviene en cambio mantener el contacto entre las dos caras de la resbaladera, introduciendo cada vez una plancha más gruesa que la anterior. Merece recomendarse este dispositivo en gran número de circunstancias. La pieza intermedia que aquí se supone de bronce, puede igualmente hacerse de hierro colado, con la condicion de modificarla debidamente, para permitir que el cubo del gorron pueda dotarse de una guarnicion de metal blanco. El módulo que debe adoptarse para los números proporcionales es d de la fórmula (166), en la que debe introducirse para d el diámetro del gorron normal del estremo, suponiéndolo de hierro forjado. El diámetro δ de los pernos se determina por la fórmula (165).

La fig. 545 representa un tercer tipo muy elegante de traviesa con un solo patin, que *Napier* inventó para las máquinas de vapor con bielas de retorno que antes hemos estudiado. Aquí tambien se supone la biela terminada en cabeza ahorquillada. La pieza intermedia es de fundicion; y la distancia B de cada perno al eje se reduce á lo estrictamente mínimo para llegar á la altura de traviesa tan exígua como se pueda. La dimension h de los brazos se determina en relacion de su anchura, segun un método conocido (casos I y II, § 6). Los pernos cuyo diámetro δ da la fórmula (165), están dotados de contra-tuercas. Para que este ensamble dé buenos resultados es esencial que los cojinetes caigan perfectamente uno sobre otro.

Otro dispositivo de traviesa de la clase que acabamos de examinar y que no es ménos notable, es el de *Maudslay* (fig. 546). La cabeza de la biela presenta la forma ordinaria, la de la fig. 520, por ejemplo. La pieza acodillada en forma de Z se encaja en otra pieza de hierro y terminada en un solo patin. La anchura b' de cada brazo se calcula por los momentos de las fuerzas dadas, cuando se ha escogido el valor de la otra dimension h, que aquí se ha tomado igual á d'. Este diámetro d' se determina como hemos indicado en el capítulo de los ejes. El diámetro δ' de los pernos debe calcularse por la fórmula (165), debiendo ser á lo ménos igual al valor que esta fórmula da para δ. A la derecha de la figura debe notarse un cubo sujeto con pernos, y destinado á recibir un vástago de bomba ó una de estas piezas accesorias análogas, que amenudo se encuentran en las traviesas de las máquinas de barcos. La figura de la izquierda ofrece un corte de la deslizadera y del patin, en que está representada la guarnicion de metal blanco, fundida en la superficie de bronce que termina el patin. Esta última pieza que puede sacarse cuando se ha quitado la pieza de cubrimiento, visible á la derecha y fijada con pernos, recibe una plancha de cobre cuando se ha de corregir el juego causado por el desgaste. Los dos últimos dispositivos de traviesas que acabamos de describir, han resuelto con éxito completo uno de los problemas de construccion más complicados y se han convertido en verdaderos tipos.

§ 193

Deslizaderas ó resbaladeras.

Las deslizaderas se hacen de hierro, de acero ó de fundicion. Cuando toda la presion carga sobre una deslizadera sola, como en los últimos tipos que acabamos de examinar, y no está esa deslizadera apoyada más

que en sus dos estremos separados uno de otro en la cantidad $s_1 + s_2$, conviene calcularla en concepto de la resistencia á la flexion. Designando por Q la presion ejercida en la deslizadera y para la posicion más desfavorable de la manivela, ó sea aquella en que esta manivela es perpendicular á la deslizadera, y por s_1 y s_2 las distancias del medio de la traviesa en los dos puntos de fijacion (figura 547), el momento de flexion de la deslizadera está representada por $Q \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2}$ y para la altura h se deduce, dándose la anchura b:

$$h = \sqrt{\frac{6}{S} \frac{Q}{b} \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2}} \qquad (182)$$

Con el hierro ó el acero se admite para S un valor muy reducido, unos 5^k, á fin de que la flexion de la deslizadera no sea muy pronunciada. En efecto, esa flexion es más perniciosa de lo que se cree comunmente, porque suprimiendo en cierta longitud el contacto entre la deslizadera y la superficie del patin, da en realidad por resultado el aumento notorio de la presion por unidad de superficie de las partes que permanecen en contacto. Con las dimensiones ordinarias de las deslizaderas de locomotoras hállanse amenudo flexiones de 1 mm más (hasta 2'5 mm), que son bastantes para dar una curvatura notable. Cuando se quiere operar con mayor exactitud se puede recurrir al procedimiento grafostático indicado por la figura 548. En el polígono de las fuerzas, AD representa la fuerza Q para la posicion C del punto de aplicacion de la presion, al paso que C_1 C_2 corresponden á las posiciones 1 y 2 de los estremos del patin en la figura 547. Así se obtiene la superficie de los momentos $AB\, c_2\, c_1$; y operando de igual modo para una nueva posicion C' de la traviesa determínase otra superficie de momentos $AB\, c'_2\, c'_1$... etcétera. La curva envolvente de los diversos polígonos así obtenidos, da el perfil definitivo de la superficie de los momentos que interesa utilizar para determinar las dimensiones.

La fig. 549 representa un bastidor de deslizaderas de hierro colado, que es sobre todo ventajoso en el caso en que la presion se ejerce en una direccion sola (de arriba abajo). La deslizadera inferior se supone aquí sostenida en todos los puntos de su longitud, de modo que puede considerarse nula su flexion. La seccion figurada á la izquierda indica el dispositivo adoptado para el engrase, y da muy buenos resultados. La resbaladera inferior y la superficie superior de la correderita de la traviesa están provistas de rebordes que forman verdaderos recipientes de aceite. Las deslizaderas superior é inferior están unidas con pernos, que al girar la máquina en ambos sentidos (máquinas de estraccion de las minas), deben estar firmemente apretados. En tal caso tambien se emplea amenudo un dispositivo en que las dos deslizaderas están reunidas por un cuadro ó bastidor de una sola pieza.

La fig. 550 ofrece una deslizadera para una traviesa de un solo patin, análoga á la de la fig. 545, por ejemplo. En este dispositivo está perfectamente resuelta la cuestion del engrase. Los rebordes forman á cada estremo una verdadera artesa, cuya superficie móvil en cada una de las posiciones 1—1', 2—2', está bañada en la mitad de su longitud, de suerte que se encuentra completamente engrasada á cada carrera. Podríamos preguntarnos si fuera conveniente buscar un dispositivo análogo para las deslizaderas de locomotoras, si bien hay la dificultad de encontrar en la falta de espacio un obstáculo muy serio.

CAPÍTULO XVI

CABLES Y CADENAS

§ 194

Diversas especies de cables y cadenas.

Comunmente se utilizan los cables y cadenas para lograr esfuerzos de traccion, es decir que pueden considerarse como órganos que tienen por objeto esencial la trasmision de los esfuerzos de ese género. Divídense en dos clases principales:

1.° Cables y cadenas fijos,
2.° Cables y cadenas móviles.

En la primera clase entran aquellos órganos que sirven para soportar simplemente cargas ó consolidar ciertas piezas, como de ellos se ven numerosos ejemplos en los puentes colgantes, puentes de barcas, cordaje de barcos, tirantes de chimeneas de palastro, etcétera. Los órganos de la segunda clase se encuentran en los cabrestantes, gruas, muflas ó garruchas, cabrias y en las ruedas de trasmision de accion indirecta. Estos últimos órganos pueden á su vez dividirse en dos categorias:

a Cables y cadenas de carga,
b Cables y cadenas de trasmision.

En la práctica ofrecen esas dos variedades dispositivos diferentes que dimanan en cuanto á los cables y cadenas de trasmision, del cuidado particular que ha de ponerse en evitar el desgaste y en tener á más que darles una forma sin fin (véase cap. XIX).

Para la ejecucion de los cables se usan materias fibrosas, cáñamo (á veces pita), y alambres metálicos, máxime de hierro. Para las cadenas no suele emplearse otro metal que el hierro. Así, pues, nos vemos precisados á estudiar separadamente los cables ó cuerdas de cáñamo, los cables metálicos y las cadenas.

A. CABLES DE CAÑAMO.

§ 195

Cables redondos ó cuerdas.

Los cables cuyo uso está más generalizado, son los redondos de tres ramales. Se hacen más ó ménos apretados segun deban emplearse principalmente como cables fijos ó como cables móviles, siendo la tension que pueden soportar más débil en el segundo caso que en el primero. Si designamos por:

d el diámetro del círculo circunscrito en los tres ramales,

u el contorno del cable (ó la longitud de un hilo que lo abarque),

δ el diámetro del ramal,

tenemos ante todo:

$$\left.\begin{array}{l} d=2{,}15\,\delta \\ u=6{,}14\,\delta=2{,}85\,d \end{array}\right\} \qquad (183)$$

Si á más designamos por P la carga, se puede admitir para los cables flojos ó poco apretados, en la seccion, una tension de $^4/_3{}^k$ y poner por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} d=1{,}2\sqrt{P} \\ u=3{,}42\sqrt{P} \\ P=0{,}7\,d^2=0{,}085\,u^2 \end{array}\right\} \qquad (184)$$

Para los cables firmemente prietos la tension puede elevarse á 2^k y se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} d=\sqrt{P} \\ u=2{,}85\sqrt{P} \\ P=d^2=0{,}125\,u^2 \end{array}\right\} \qquad (185)$$

La tabla del § 197 da una série de valores calculados segun estas fórmulas. Para los cables flojos bien hechos y fabricados de cáñamo de buena calidad la carga de ruptura es de 8 á 9^k, al paso que es de 12 á 13^k para los cables muy prietos. En el cálculo de la tension debe además tomarse por valor de la seccion del cable la suma de las secciones de sus ramales.

En el caso en que se trata de cuerdas móviles sobre poleas ó tambores, el radio de estas poleas ó tambores (medido del centro al medio de la cuerda) nunca debe ser inferior á $3\,d$ ó $4\,d$ para las cuerdas flojas y á $6\,d$ ú $8\,d$ para las cuerdas firmemente apretadas. En las aplicaciones de cierta importancia, como por ejemplo, en los aparatos de estraccion de minas rara vez es inferior á $25\,d$ el radio R.

Los cables planos de cáñamo admiten 4 á 6 cables redondos, yuxtapuestos, que deben calcularse cada uno para una carga igual á $^1/_4$ ó $^1/_6$ de la carga total, suponiendo, empero, que la union de estos cables se hace con el mayor cuidado.

§ 196

Peso de los cables de cáñamo.

El peso G_0 por metro corriente es en promedio:

Para cables poco prietos: $G_0=0{,}00071\,d^2$ (186)

» » muy prietos: $G_0=0{,}00106\,a^2$ (187)

Este peso puede tambien representarse por una misma espresion para las dos clases de cables (redondos ó planos, de 3 ó 4 ramales):

$$\left.\begin{array}{l} G_0=\dfrac{P}{1000} \\ \text{de donde} \qquad P=1000\,G_0 \end{array}\right\} \qquad (188)$$

Esta última fórmula demuestra que el peso de un cable de buen cáñamo y esmerada ejecucion puede servir para determinar el esfuerzo que dicho cable es capaz de soportar. Este esfuerzo, desdeñando la accion del peso propio del cable, se eleva á 1000 veces el valor del peso por metro lineal corriente.

Si queremos tener en cuenta el peso propio de la longitud L (en metros) del cable, que es vertical, lo que comunmente no es necesario, debe reemplazarse P en las fórmulas (184) y (185) con el valor $P:\left(1-\dfrac{L}{1000}\right)$.

Para $L=1000$, d viene á ser infinitamente grande, es decir, para esta longitud límite, un cable no puede soportar más que su propio peso. Para una longitud mayor, el solo peso del cable origina una tension superior al límite admitido. Para $L=5000$ á 6000^m, el cable llega á romperse bajo su propio peso.

Para un cable completamente sumergido en el agua (cable de ancla, de sonda), las longitudes correspondientes á la carga límite y á la rotura alcanzan y hasta superan el doble de los valores precedentes.

§ 197

Tabla relativa á los cables de cáñamo de tres ramales.

DIMENSIONES		CABLES FLOJOS			CABLES PRIETOS			
						R		
d	u	P	R	G_0	P	CABRIAS	APARATOS DE ESTRACCION	G_0
10	28'5	70	30	0'071	100	60	250	0'106
12	34	101	36	0'102	144	72	300	0'153
15	43	158	45	0'160	225	90	375	0'229
20	57	280	60	0'284	400	120	500	0'424
25	71	438	75	0'444	625	150	625	0'663
30	85	630	90	0'64	900	180	750	0'95
35	100	858	105	0'87	1225	210	875	1'30
40	114	1120	120	1'14	1600	240	1000	1'70
45	128	1418	135	1'44	2025	270	1125	2'15
50	143	1750	150	1'78	2500	300	1250	2'65
55	157	2118	165	2'15	3025	330	1375	3'21
60	171	2520	180	2'56	3600	360	1500	3'82
65	185	2958	195	3'00	4225	390	1625	4'48
70	200	3430	210	3'48	4900	420	1750	5'19
75	214	3938	225	4'00	5625	450	1875	5'96
80	228	4480	240	4'54	6400	480	2000	6'78
90	257	5670	270	5'75	8100	540	2250	8'59
100	285	7000	300	7'10	10000	600	2500	10'60

1.er EJEMPLO. *Una cuerda de mufla ó garrucha debe soportar una traccion de* 450^k. *Debiendo suponerse poco apretada esta cuerda conviene, segun la tabla anterior* (*col.* 3, *línea* 5), *darle un diámetro* $d=25^{mm}$. *El radio de las poleas debe ser á lo ménos de* 75^{mm}. *Para una longitud de* 150^{mm}, *el peso de esa cuerda es de* 150 . 0'444=66'6^k.

2.º EJEMPLO. *Una cuerda fuertemente prieta de* 50^{mm} *de diámetro puede someterse á una carga de* 2500^k (*col.* 6, *línea* 10) *y su peso por metro corriente ó lineal es de* 2'65^k. *En el caso en que la parte colgante de esa cuerda tuviese una longitud de* 400^m, *la carga que ha de aplicarse al estremo no seria más que de* $\left(1-\frac{400}{1000}\right)$ 2500=0'6 . 2500=1500^k.

B. CABLES METÁLICOS.

§ 198

Cables redondos de alambre de hierro.

Los cables de alambre son las más de las veces de 36 hilos y comprenden 6 ramales de 6 alambres cada uno. Si designamos por

δ el diámetro del alambre,

i el número de alambres,

P la carga aplicada al cable,

debe tomarse:

$$\delta=\frac{3}{8}\sqrt{\frac{P}{i}} \qquad (189)$$

$$\frac{P}{i}=7'11\ \delta^2 \qquad (190)$$

de donde se deduce para $i=36$:

$$\delta=\frac{1}{16}\sqrt{P} \qquad (191)$$

$$P=256\ \delta^2 \qquad (192)$$

Al propio tiempo se tiene $d=8\delta$. La tension por unidad de superficie que esta carga determina para cada alambre, es de 9^k, valor que se admite amenudo en Alemania. En Francia rara vez se pasa de 8. El arrollo sobre los tambores se produce exactamente en las mismas condiciones que para los cables de trasmision, y resulta de ahí que debe darse á tales tambores un radio R bastante considerable. Si se admite 27^k para la suma de tensiones de alargo y de flexion, lo que equivale á tomar 18^k para la última tension, el valor del radio R, como veremos luego (cap. XIX), no debe ser inferior á la que da esta relacion:

$$\frac{R}{\delta}=555 \qquad (193)$$

la cual para un cable de 36 alambres da próximamente $R=70\ \delta$ (1).

(1) En las máquinas de estraccion de las minas se encuentran aun con frecuencia valores de R más débiles.

EJEMPLO. *Para un cable de estraccion de* 42 *alambres destinado á subir una carga de* 2100^k *debe el diámetro de cada alambre, segun la fórmula* (189), *ser* $\delta = {}^3/_8 \sqrt{2100 : 42} = {}^3/_8 \sqrt{50} = 2'65^{mm}$. *Para un cable de* 36 *alambres sometido á la misma carga, el diámetro segun la fórmula* (191) *seria* $\delta = \sqrt{2100 : 16} = 2'86^{mm}$. *En el primer caso el radio del tambor de arrollo debia á lo ménos ser de* $555 \cdot 2'65 = 1470^{mm}$, *y en el segundo caso de* $555 \cdot 2'86 = 1587^{mm}$.

§ 199

Cables metálicos planos.

Para las cargas considerables se recurre comunmente al empleo de cables planos, que tienen la ventaja de exigir diámetros de tambores relativamente más pequeños que los cables redondos, y de arrollarse de tal modo que su línea media permanezca siempre en el mismo plano. La mayor parte de las veces los cables planos están formados de 6 ramales que comprenden cada uno 24 alambres ($i = 144$) y que están reunidos en conjunto, ya sea por otros alambres trasversales, ya por medio de pasadores planos. Para el cálculo de esos cables pueden utilizarse las fórmulas (189) á (193). Cumple notar que los cables planos de estraccion han sido, á pesar de sus ventajas indudables, de uso ménos general durante mucho tiempo que los cables redondos, resultado que debe atribuirse á la poca solidez que ofrece el ensamble de los ramales en el sentido trasversal.

EJEMPLO. *Para un cable plano de* 144 *alambres destinado á llevar una carga de* 2100^k *el diámetro de cada alambre, segun la fórmula* (189), *debe ser* $\delta = {}^3/_8 \sqrt{2100 : 144} = 1'43^{mm}$, *y segun la fórmula* (193), *debe tomarse para el radio del tambor* $R = 555 \cdot 1'43 = 794^{mm}$.

§ 200

Peso de los cables metálicos.

El peso G_0, por metro lineal de un cable metálico compuesto de i alambres de un diámetro δ está indicado por la espresion:

$$G_0 = 0'007\, i\, \delta^2 \qquad (194)$$

de donde se deduce para $i = 36$:

$$G_0 = \frac{\delta^2}{4} \qquad (195)$$

EJEMPLO. *El cable del párrafo precedente que tiene* 36 *alambres de* $2'86^{mm}$ *de diámetro, tiene por metro corriente un peso de* $2'86^2 : 4 = 2'04^k$.

Del mismo modo que en los cables de cáñamo el peso por metro lineal es tambien proporcional á la carga límite, lo que da

$$\left.\begin{aligned} G_0 &= \frac{P}{1000} \\ P &= 1000\, G_0 \end{aligned}\right\} \qquad (196)$$

De esto se infiere que para la misma longitud y carga un cable metálico tiene un peso igual al de un cable de cáñamo calculado en virtud de las fórmulas que hemos indicado, y por consiguiente del peso de un cable metálico (que se supone de calidad conveniente), puede tambien deducirse directamente la carga límite que puede llevar.

La longitud correspondiente á esta carga es, segun la fórmula (196), igual á 1000^m, y la longitud que corresponde á la carga de rotura, se halla comprendida entre 5000 y 6500^m. Si en la determinacion del diámetro de un cable que cuelga, quiere tenerse en cuenta el peso propio de la parte metálica, conviene como antes reemplazar P por el valor $P : 1 - \frac{L}{1000}$.

Para un cable sumergido en el agua las longitudes correspondientes á la carga límite y á la carga de rotura se encuentran levemente aumentadas en la proporcion de 10 á 9 poco más ó ménos.

EJEMPLO. *Suponiéndose el cable calculado antes para una carga de* 2100^k, *aplicado á un pozo de mina de* 400^m *de profundidad, el valor que conviene introducir para la carga viene á ser* $2100 : (1 - 0'4) = 2100 : 0'6 = 3500^k$, *y el diámetro del alambre debe por lo tanto aumentarse notoriamente. Un alambre de sonda ó un cable submarino de hierro se romperia bajo su propio peso si se hallase á una profundidad igual á* ${}^{10}/_9 \cdot 6500$ *ó* 7200^m *próximamente. La profundidad de* 3000^m *que en ciertos puntos alcanza el cable transatlántico, no puede, pues, considerarse como seriamente peligrosa en el concepto de su rotura.*

§ 201

Tabla relativa á los cables metálicos.

DIÁMETRO DE LOS ALAMBRES	CABLES REDONDOS Á 36 ALAMBRES.			CABLES PLANOS Á 144 ALAMBRES.				R
	d	P	G_0	d	b	P	G_0	(Minim.)
δ^{mm}.	MILL.	KIL.	KIL.	MILL.	MILL.	KIL.	KIL.	MILL.
1	8'0	256	0'25	6'0	36'0	1024	1'00	555
1'2	9'6	369	0'36	7'2	43'2	1474	1'45	666
1'4	11'2	502	0'49	8'4	50'4	2007	1'98	776
1'6	12'8	655	0'64	9'6	57'6	2621	2'58	888
1'8	14'4	829	0'81	10'8	64'8	3317	3'27	999
2'00	16'0	1024	1'00	12'0	72'0	4095	4'03	1110
2'25	18'0	1296	1'26	13'5	81'0	5183	5'10	1249
2'50	20'0	1600	1'56	15'0	90'0	6399	6'30	1388
2'75	22'0	1936	1'89	16'5	99'0	7743	7'62	1526
3'00	24'0	2304	2'25	18'0	108'0	9215	9'07	1665

EJEMPLO. *Una máquina de estraccion debe elevar de una profundidad de* 150^m *cargas de* 600^k *colocadas en cajas de* 950^k *de peso, y suponiendo que al efecto se emplea un cable plano de* 144 *alambres, el valor que ha de fijarse para el esfuerzo de traccion, es* $\frac{950+600}{1-0'150} = \frac{1550}{0'85} = 1820^k$, *para cuyo esfuerzo la tabla indica* (*col.* 1 *y* 9, *línea* 3) *un diámetro para el alambre de* $1'4^{mm}$ *y un radio de tambor de* 777^{mm} *á lo ménos. La anchura de ese cable es* 6 . 6 . $1'4 = 50'4^{mm}$ *y su peso de* $1'98^k$ *por metro corriente ó lineal.*

En iguales condiciones un cable redondo de 36 *alambres deberia tener, segun la tabla* (*col.* 3, *línea* 9), *un diámetro de alambre de* $2'75^{mm}$ *y exigiria un radio de tambor de* 1526^{mm}, *lo cual significa que en tal caso fuera poco satisfactorio el empleo de un cable redondo. No obstante, si hubiese empeño en conservar la forma redonda, convendria aumentar el número de alambres elevándolo á* 50 *ó* 60.

C. CADENAS.

§ 202

Cadenas de carga.

Las cadenas de que se sirve el constructor de máquinas, pueden dividirse en dos categorias principales: las cadenas de carga y las cadenas de trasmision. Están comprendidas en la primera todas las cadenas que sirven simplemente para llevar ó desalojar cargas, en tanto que la segunda abarca las que se emplean para la trasmision del movimiento en las ruedas de accion indirecta. Aquí estudiaremos principalmente las cadenas de carga. Estos órganos en que suele emplearse únicamente el hierro, ofrecen gran variedad de formas, de las cuales son las siguientes las más importantes:

1.° Las cadenas de anchos eslabones (cadenas alemanas) (fig. 551).

2.° Las cadenas de eslabones estrechos (cadenas inglesas) (fig. 552).

3.° Las cadenas de puntales (fig. 553).

4.° Las cadenas de ganchos (cadenas de Vaucanson) (fig. 554).

5.° Las cadenas articuladas (cadenas de Galle) (figura 555).

La distancia de dos mallas ó eslabones consecutivos que en las figs. 551 á 555 está designado por l, se llama la longitud de construccion del eslabon.

La cadena de anchos eslabones no se distingue de la cadena de mallas estrechas, sino por su mayor longitud de construccion, que es en realidad de 3'5 d en vez de 2'6 d. Ese aumento de dimension permite soldar un anillo despues de introducirle los otros dos, lo cual no puede hacerse en los otros casos, y tiene á más la ventaja de dar una cadena algo más lijera. Desígnanse á veces las cadenas 1 y 2 con el nombre de cadenas abiertas por oposicion á la siguiente (3), en la que el eslabon llena en parte el vacio. Esta pieza accesoria tiene por objeto no solamente dar más resistencia á la cadena, sino tambien impedir que se enreden ó encabalguen los eslabones unos con otros; y por este motivo la cadena de puntales se encuentra amenudo empleada como cadena de ancla.

Los números proporcionales indicados en las figuras anteriores suministran para los anillos dimensiones muy convenientes, pero no son completamente invariables. Así, por ejemplo, el almirantazgo inglés tiene adoptada para las cadenas abiertas y de puntales como longitud de construccion $l=4\,d$ y como ancho interior $1'6\,d$, números que son superiores á los que indica la

figura 551 para la cadena de anchas mallas. En Francia se baja hasta la longitud $2'6\,d$ de la fig. 552 con una una anchura interior que es más baja que $1'4\,d$, si bien la marina militar exige la longitud $l=3'25\,d$ y la anchura $1'4\,d$ para las cadenas abiertas; y para las cadenas de puntales las dimensiones correspondientes que se exigen, son $3'85\,d$ y $1'75\,d$ (como en la figura). Otra causa de las variaciones que se notan, depende de las irregularidades de la ejecucion. Para las gruas y otros aparatos de elevacion deben emplearse con preferencia las cadenas calibradas que se han determinado con mucha perfeccion. En estos últimos años la fabricacion de las cadenas ha mejorado en alto grado bajo el punto de vista de la calidad, á consecuencia de la aplicacion de las cadenas en la navegacion fluvial que necesita el empleo de mallas perfectamente calibradas y hechas con el mayor esmero. En tal caso más vale usar cadenas abiertas de anillos estrechos. Así por ejemplo, en el canal de agua dulce de Suez la cadena de halaje tiene de longitud $l=3\,d$, de ancho interior $1'2\,d$ y el diámetro del hierro es $d=17'5^{mm}$; el cubrimiento en la soldadura es de 40^{mm}, al paso que en el método seguido hasta ahora en Inglaterra se llega á lo sumo á la mitad de esa longitud. Además la soldadura se hace en la parte más pequeña del eslabon, en vez de hacerla en la mayor, como en el sistema antiguo. Segun esto, se ve que el procedimiento de fabricacion seguido en Francia para las cadenas de halaje es muy superior al procedimiento inglés. Cumple además observar que en estos últimos tiempos el método francés ha comenzado á introducirse en Inglaterra.

En las cadenas de ganchos, que solo convienen para escasos esfuerzos, los eslabones no están soldados y sí meramente encorvados. Las cadenas de ese género pueden emplearse como órganos de trasmision para fuerzas pequeñas.

En Francia tuvo el ingeniero *Neustadt* la idea de utilizar como cadenas de carga las articuladas que hasta entonces no se habian empleado comunmente sino como órganos de trasmision. Las cadenas de ese género convienen sobre todo para las gruas y aparatos de igual género, porque permiten el uso de tambores de cortos radios y facilitan así la reduccion notable de las dimensiones del mecanismo de trasmision.

§ 203

Cálculo de las cadenas de eslabones soldados.

Las cadenas de mallas soldadas procedentes de buena fabricacion, se hallan en una situacion escepcional con respecto á los demás elementos de máquinas, en razon de su modo de construccion: antes de espendidas se someten siempre á una carga de prueba. De donde resulta que hasta para las cadenas que no están en servicio, se conoce por esperiencia las cargas que pueden soportar. Se admite que la carga de prueba debe ser proporcional á la seccion total de las dos ramas del eslabon. En las cadenas abiertas es de 14^k por milímetro cuadrado, y en las cadenas de puntal ó apoyo de 17^k (en Inglaterra $17'9^k$). Realmente esas cargas corresponden al límite de elasticidad, y con cargas más considerables comienzan á producirse alargamientos permanentes (1). En la marina los esfuerzos reales á que están sometidas las cadenas, no se conocen más que de una manera muy aproximada; y en cambio en los aparatos de elevacion la carga está perfectamente determinada y no conviene en lo posible pasar de la mitad de la carga de prueba.

La carga de rotura de las cadenas precedentes tiene una importancia aun más considerable que la carga de prueba. De manera que para las grandes provisiones de cadenas se prescribe siempre un mínimum para esa carga. La comprobacion se hace en cierto número de eslabones, deducidos al efecto. Comunmente se exige que para las barras de hierro destinadas á la confeccion de eslabones la carga de rotura esté comprendida entre 32 y 36^k por milímetro cuadrado de la seccion y que la de la cadena terminada sea de 23 á 26^k. Se da al propio tiempo gran importancia á la tenacidad de la materia, y se exige, por ejemplo, que antes de la rotura el hierro bruto sea capaz de alargarse de un modo relativamente permanente comprendido entre 10 y 20 por ciento (2).

Para las cadenas abiertas con la hipótesis de una tension de 14^k la carga de prueba, está indicada por la segunda de las relaciones:

$$\left.\begin{aligned} d &= 0'211\sqrt{P} \\ P &= 22\,d^2 \end{aligned}\right\} \qquad (197)$$

y para las cadenas de puntal (con la tension de 17^k):

$$\left.\begin{aligned} d &= 0'194\sqrt{P} \\ P &= 26'7\,d^2 \end{aligned}\right\} \qquad (198)$$

---

(1) La carga de prueba de 16 kilos que se habia prescrito para las cadenas de Suez, debe considerarse por dicha razon como elevada en esceso.

(2) En la fábrica de Guérigny el alargamiento permanente debe ser:

para barras de 40 milím.	á 21 milím.	de diámetro.	. .	18 p. 100.
— — 20 —	á 12 —	—	. .	16 —
	10 —	—	. .	14 —
	8 —	—	. .	12 —
	6 —	—	. .	10 —

En virtud de esas fórmulas se han calculado las cargas de prueba de la tabla que hay en el § 206.

Para las poleas y tambores destinados al arrollo de las cadenas de los cuatro primeros géneros el radio R, que suponemos medido del eje al medio de la cadena, debe estar comprendido entre $10\,d$ y $12\,d$. Para recibir debidamente los eslabones la corona de la polea ha de estar torneada y presentar ó bien una ranura sola (fig. 556) de suerte que de dos eslabones consecutivos se encuentre uno en el plano de la polea y otro en un plano perpendicular, ó bien (segun un dispositivo más moderno) una doble ranura (fig. 557) de modo que los eslabones estén inclinados todos de 45° sobre el eje de la polea. Esa nueva disposicion tiene la ventaja de no obligar la cadena á una flexion trasversal como lo hacia la antigua.

La cadena de *Vaucanson* por efecto de su forma presenta una resistencia en estremo escasa. Su empleo no puede admitirse más que con la condicion de no superar la carga dada por las fórmulas:

$$\left.\begin{array}{l} d = 0{,}5\sqrt{P} \\ P = 4\,d^2 \end{array}\right\} \qquad (199)$$

Esa cadena que es muy fácil de construccion, se emplea no obstante muy rara vez.

§ 199

Cálculo de las cadenas articuladas.

Las aplicaciones que *Neustadt* ha hecho de las cadenas articuladas ó de Galle, son tan numerosas y los resultados conseguidos tan satisfactorios, que pueden considerarse como uno de los perfeccionamientos más serios introducidos en la construccion de las gruas. En Francia las gruas de *Neustadt* están hoy bastante generalizadas, mas no sucede lo mismo en Alemania, donde parece que no se aprecian lo bastante sus ventajas, de las cuales son las más importantes la reduccion del radio del tambor de la cabria y la corta anchura de ese tambor. La disminucion del radio tiene por natural consecuencia simplificar la trasmision por engranajes, puesto que permite adoptar una proporcion más pequeña que en las gruas armadas de cadenas de eslabones soldados; y la escasa anchura del tambor permite igualmente simplificar mucho la armazon, de suerte que la grua con cadena de Galle es más fácil de instalar que los antiguos aparatos del mismo género con cadenas de eslabones soldados. Los aparatos de *Neustadt* comprenden no solamente las gruas de grandes y pequeñas dimensiones que él instaló para el servicio de las canteras y ferro-carriles, sino tambien las grandes máquinas de halar, de la potencia de 50 toneladas y de una altura de 40 metros (1). Los diversos ensayos que han tenido por objeto utilizar las cadenas ordinarias de anillos sobre pequeños tambores (abarcando 6 eslabones) dejando desarrollarse su estremo libre (como en la cabria de *Bernier*), han demostrado que este dispositivo no era aplicable á cargas importantes, pues la cadena sufriria entonces frotes demasiado considerables.

La cadena articulada que se destina á levantar ó halar una carga debe disponerse absolutamente del mismo modo que si hubiese de hacer las veces de cadena de trasmision. Arróllase en un piñon cuyos dientes se encajan entre los husos y lo abandona despues de una rotacion de media vuelta proximamente (fig. 558). El vástago conductor de la cadena está sometido á la traccion de la carga, en tanto que el vástago libre ó conducido se encuentra guiado por una caja (de palastro ó de fundicion) que envuelve el piñon. La abertura de esta caja está desbocada para facilitar la entrada de la cadena que despues de pasar por el piñon se eleva en una vaina. La determinacion rigurosa de las dimensiones de las diferentes partes de la cadena constituye un problema de grande complicacion que no puede evitarse sino recurriendo á un método de aproximacion.

Si suponemos la carga uniformemente repartida en todas las mallas, las acciones ejercidas en los diferentes puntos de un perno ó huso en la parte recta de la cadena pueden representarse gráficamente por la figura 559. La direccion de estas acciones cambia de sentido de un eslabon á otro. Las dimensiones en las cadenas adoptadas por *Neustadt* se determinan de manera que correspondan á las indicaciones de tal diagrama, con la condicion de que la tension S nunca sea superior á 8^k. Sin embargo, este método es inexacto y conviene proceder de otro modo. Se debe comenzar por determinar el máximo de tension de los husos, no en la parte libre de la cadena, sino en la que está arrollada por el piñon que hace el oficio de tambor de cabria. Este piñon tiene á lo ménos 8 dientes, cada uno de los cuales ejerce en el cuerpo de un huso una accion que *à priori* no se conoce. Si suponiendo su actividad 5 dientes, admitimos, como es muy plausible, que las presiones de los dientes aumentan en progresion aritmética y son proporcionales á los números

(1) Véase *Gruas y aparatos de halaje de cadena Galle*, por Camilo Neustadt, Paris, 1867, así como la descripcion de una série de instalaciones de aparatos de ese género en la publicacion industrial y el *Genie industriel* d'Armengaud.

1, 2, 3, 4, y 5, resulta que la carga soportada por el cuerpo del último huso no es más que $^5/_{15}\,P$, ó sea $^1/_3\,P$. Sobre los gorrones de ese mismo huso se ejerce entonces hácia atrás un esfuerzo igual á $^1/_3\,P$ y hácia delante otro esfuerzo igual á $^1/_2\,P$. Partiendo de estas hipótesis y admitiendo además igual reparto de la carga en las mallas, se obtiene el diagrama de la figura 560 formado sobre la misma escala que el anterior. El exámen de este nuevo diagrama demuestra que los husos están sometidos á esfuerzos casi dobles de los que da el primero, lo cual significa que en las cadenas de *Neustadt* la tension máxima es de 16^k en vez de 8^k. Pero cumple notar que las cosas no siempre se efectuan exactamente, conforme hemos supuesto, en estos dos trazados. A causa del estado complejo de la cadena, la direccion del esfuerzo flexible es variable de un eslabon á otro, de suerte que los momentos flexibles no son los que hemos admitido, ó sea la fuerza P no está uniformemente repartida por los eslabones. Parece muy verosímil que se efectua un reparto de la carga análogo al que indica la fig. XI, p. 12. Las mallas interiores están entonces más cargadas que las otras, y de ahí resulta una disminucion notable del momento estático que tiende á producir la flexion del huso. Las dimensiones adoptadas por *Neustadt* han pasado muy satisfactoriamente por las pruebas de la práctica. Sus numerosos esperimentos que para la rotura le han dado siempre una carga cuádruple ó quíntupla de la que hemos admitido en el cálculo anterior, parecen confirmar la observacion que acabamos de hacer. Con efecto, en sus ensayos ha demostrado que las mallas no se rompian todas á la vez, sino solamente una despues de otra. Es probable que la rotura se efectuaba primero en las mallas interiores y luego ocurria en las esteriores, á medida que aumentaba su carga. Los esfuerzos á que está sometido el estremo de la cadena que se sujeta al garfio, no presentan la menor analogia con los que hemos admitido en la fig. 560. Conviene pues reforzar ese estremo dando á las mallas mayor anchura y más diámetro al huso.

Los aparatos construidos por *Neustadt* corresponden á cargas comprendidas entre 500 y 30000^k; y las dimensiones de sus cadenas están debidamente espresadas por las fórmulas siguientes:

$$\delta = \frac{0{,}35}{i+1}\sqrt{P} \qquad (200)$$

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{,}2\,\frac{(i+2)}{(i+1)}\sqrt{P} \\ \text{ó bien} \\ \frac{d}{\delta} &= 0{,}57\,(i+2) \end{aligned}\right\} \qquad (201)$$

En estas relaciones δ representa el espesor del palastro de las mallas, i su número y d el diámetro del gorron de un huso; y como i debe ser un número entero y par, tómase para i el número par que se aproxima más al valor dado por la espresion:

$$i = {}^1/_3\sqrt[3]{P} \qquad (202)$$

El piñon debe tener á lo ménos 8 dientes, y segun *Neustadt*, ese número debe aumentarse lijeramente para las fuertes cargas; de modo que él toma:

$Z = 8$ para $P = 250$ á 3000^k
$Z = 9$ para $P = 4000$ á 20000^k
$Z = 10$ para $P = 20000^k$ en adelante.

El radio r del círculo primitivo debe determinarse de modo que la cuerda correspondiente á un paso sea igual á la longitud l de las mallas. Esto es lo que ocurre haciendo

$$r = \frac{l}{2\,sen\,\frac{180}{Z}} \qquad (203)$$

De donde se deduce:

para $Z =$	8	9	10
	$r = 1{,}3066\,l$	$1{,}3619\,l$	$1{,}6180\,l$.

Los simples rodillos-guias tienen 16 á 30 dientes. En cuanto á las otras dimensiones de la cadena, los suministran los números proporcionales de la fig. 555, los cuales están relacionados con el módulo d.

EJEMPLO. *Supongamos que haya de construirse una cadena de Galle destinada á levantar una carga* $P = 10000^k$. *La relacion* (202) *da* $i = {}^1/_3\sqrt[3]{10000} = 7{,}16$, *y por ende deberemos tomar* 8 *como número de las mallas de un huso, y enseguida tendremos* $\delta = 0{,}35\sqrt{10000} : 9 = 3{,}9$ *ó* 4^{mm}, $d = 4 \cdot 0{,}57 \cdot 10 = 23^{mm}$, *la longitud de construccion* $l = 5 + 2{,}8 \cdot 23 = 70^{mm}$, *la anchura de las mallas* $b = 2{,}6 \cdot 23 = 60^{mm}$, *la longitud del cuerpo del huso* $= 6 + 1{,}67 \cdot 23 = 44^{mm}$ *y su diámetro* $d_1 = 1{,}2\,d = 1{,}2 \cdot 23 = 28^{mm}$, *la saliente del vértice de las mallas sobre el gorron del huso* $= 2 + 0{,}9 \cdot 23 =$

23^{mm}. *Para un piñon de* 8 *dientes el radio* $r = 1'3066 \cdot 70 = 91^{mm}$.

Algo más adelante (§ 207) se encontrará una tabla que contiene para una série de cargas los valores de las diferentes dimensiones de las cadenas articuladas de *Neustadt*.

§ 205

Peso de las cadenas.

La longitud K de la barra de hierro redonda necesaria para formar las mallas de una cadena ordinaria de longitud L, es á esta dimension L en la proporcion de la longitud s de un eslabon desarrollado en la longitud de construccion l de ese eslabon ó malla; es decir, se tiene

$$\frac{K}{L} = \frac{s}{l}. \qquad (204)$$

Para tener en cuenta el desperdicio que acarrea la forja, importa admitir para cada malla una pérdida de longitud igual á $^1/_2\, d$, de suerte que con este desperdicio ó merma la longitud K viene á ser K_1, que está determinada por la relacion

$$\frac{K_1}{L} = \frac{s + \frac{d}{2}}{l} \qquad (205)$$

De ahí resulta que el peso G_0 por metro lineal se obtiene multiplicando por $\frac{s}{l}$ el peso por metro lineal de una barra de hierro redondo de diámetro d. Entonces se tiene:

para las cadenas abiertas de mallas estrechas:

$$G_0 = 0'0226\, d^2 \qquad (206)$$

para las cadenas abiertas de mallas anchas:

$$G_0 = 0'0190\, d^2 \qquad (207)$$

para las cadenas de puntas:

$$G_0 = 0'0235\, d^2 \qquad (208)$$

En el último caso, para tener en cuenta el puntal de fundicion de una manera aproximada, conviene añadir el peso de un cilindro que tenga por diámetro y longitud d, es decir, importa reemplazar $\frac{s}{l}$ con $\frac{s'}{l}$, en la que s' designa la longitud ideal de un eslabon simple que tuviese cabalmente un peso igual al de un eslabon real con su puntal. La tabla que damos á continuacion encierra los valores dados por esas fórmulas.

Para las cadenas lo mismo que para los cables existe una relacion constante entre el peso por metro lineal de una cadena y la carga que se le puede hacer soportar. En esta tabla L_c designa la longitud correspondiente á la carga límite de una cadena, y L_r la longitud de rotura; S es el máximum de tension en la seccion más espuesta para la carga límite, B_r la tension que ocurre en esa misma seccion cuando hay rotura.

Designacion de las cadenas	$\frac{s}{d}$	$\frac{s}{l}$	$\frac{s'}{l}$	S	$\frac{G_0}{P}$	L_c en met.	B_r	L_r en met.
Cadena de mallas anchas. . .	11'0	3'14	—	6	0'0020	500	24	2000
» » » estrechas.. .	9'6	3'68	—	6	0'0024	400	24	1600
» » » de puntal. .	10'6	3'53	3'87	9	0'0017	600	32	2100
» » nudos.	36'0	6'00	—	8'25	0'0014	700	26(?)	2100
» » Vaucanson. . . .	21'25	5'00	—	2'5	0'0078	130	10	520
» » Galle.	—	—	3'58(1)	8'0	0'0034	300	36	1350

Dedúcense muy claramente de esos números los valores relativos de las diferentes cadenas hasta los límites que permite el empleo del hierro. Las longitudes de rotura de todas esas cadenas no son muy considerables, como vemos. Por eso en las grandes profundidades del Oceano Atlántico (3000 á 4000 metros), el peso propio de las cadenas de las anclas puede fácilmente acarrear su rotura, puesto que en el agua las longitudes de rotura son muy poco superiores á las de la tabla (en la proporcion de $^9/_8$ próximamente).

Para las cadenas articuladas la longitud correspondiente á la carga límite es relativamente muy exígua; pero el empleo de esas cadenas es muy admisible para las gruas y cabrias, puesto que en tal caso no se tienen más que longitudes insignificantes.

De una manera general resulta de la fórmula (204) que para una cadena la proporcion entre la carga y el peso propio es tanto más ventajosa cuanto más largas son las mallas respecto al diámetro del hierro de que están formadas; resultando además que para las cadenas verticales es ventajoso componerlas con barras forjadas dispuestas en forma de anillos oblongos (véase § 208).

(1) Este número no es más que un valor medio, puesto que en razon de la constante que entra en la espresion de la longitud de construccion, la relacion $\frac{s}{l}$ no es constante.

§ 206

Tabla relativa á las cadenas ordinarias de eslabones soldados.

CADENAS ABIERTAS.				CADENAS DE PUNTAL.		
d	CARGA DE PRUEBA P	G_0 MALLAS ESTRECHAS.	G_0 MALLAS ANCHAS.	d	CARGA DE PRUEBA P	G_0
6	792	0'81	0'68	15	6008	5'29
7	1078	1'11	0'93	16	6835	6'02
8	1408	1'45	1'21	17	7716	6'79
9	1782	1'83	1'54	18	8651	7'61
10	2200	2'26	1'90	19	9639	8'48
11	2662	2'73	2'30	20	10680	9'40
12	3168	3'25	2'74	22	12923	11'37
13	3718	3'82	3'21	24	15379	13'54
14	4312	4'43	3'72	26	18049	15'89
15	4950	5'09	4'28	28	20933	18'42
16	5632	5'79	4'86	30	24300	21'15
17	6358	6'23	5'49	32	27341	24'06
18	7128	7'32	6'16	34	30865	27'16
19	7942	8'16	6'86	36	34603	30'46
20	8800	9'04	7'60	38	38555	33'93
21	9702	9'97	8'38	40	42720	37'60
22	10648	10'94	9'20	42	47099	41'45
23	11638	11'96	10'05	44	51691	45'50
24	12672	13'02	10'94	46	56497	49'73
25	13750	14'13	11'88	48	61517	54'14
26	14872	15'28	12'84	50	66750	58'75
27	16038	16'48	13'85	52	72197	63'54
28	17248	17'72	14'90	54	77857	68'53
29	18502	19'01	15'98	56	83731	73'70
30	19800	20'34	17'10	58	89819	79'95

1er EJEMPLO. *Así como lo hemos observado, la carga normal para las cadenas de mallas soldadas que se usan en las gruas, no debe pasar mucho de la mitad de la carga de prueba. Si una carga de ese género, de mallas abiertas, ha de soportar una carga* $P=10{,}000^k$, *búscase en la tabla el número que más se aproxima al doble de ese valor, y se halla para el diámetro correspondiente* $d=30^{mm}$. *Si quisiera admitirse para la carga normal los* $^3/_4$ *de la carga de prueba, convendría buscar el diámetro correspondiente á* $^3/_4$. 10,000, *y se hallaría entonces* $d=24^{mm}$. *Con una cadena de puntal y admitiendo como carga normal la mitad solamente de la carga de prueba, el diámetro correspondiente á* $P=10{,}000^k$ *sería* $d=28^{mm}$ *(col. 5, línea 10).*

En los barcos se alojan las cadenas de anclas en cajas especiales. El espacio en metros cúbicos que ocupa una cadena de puntal y de un peso G, es igual á 0'00043 G, si está colocada cuidadosamente, y á 0'00045 G en el caso contrario.

2.° EJEMPLO. *Si la cadena precedente de puntales tiene una longitud de* 200^m, *su peso es* $200 . 18'42 = 3684^k$; *y si está dispuesta sin cuidado ocupa un espacio de* $0'00045 . 3684 = 1'66^{mc}$.

§ 207

Tabla relativa á las cadenas articuladas segun Neustadt.

Carga	Número de las placas *i*	Espesor de las placas *δ*	Anchura de las placas *b*	Diámetro de los gorrones *d*	Longitud de construccion *l*
250	2	2	13	5	18
500	2	3	16'5	6'5	21
750	4	2	19	7'5	23
1000	4	2	23	8	28
1500	4	3	25	10	32
2000	4	3	31	11	38
3000	6	3	34	14	41
4000	6	4	36	16	44
5000	6	4	42	17	51
7500	6	4	56	19'5	66
10000	8	4	61	23	71
15000	8	5	73	29	86
20000	8	6	85	35	100
25000	8	7	96	40	112
30000	8	8	108	44	130

Los valores que esa tabla contiene no están determinados en virtud de las cargas de prueba, sino en virtud de las que pueden admitirse como cargas normales, y no han sido calculadas por nuestras fórmulas, sino que reproducen directamente los datos indicados por el ingeniero *Neustadt*. Sin embargo, esos valores ofrecen una concordancia bastante satisfactoria con los que se deducirian de nuestras fórmulas, como se puede verificar comparando las dimensiones que señala la tabla para una carga de 10,000^{k}, con las que hemos obtenido en el ejemplo del párrafo 204. Los palastros empleados para las mallas son los fabricados en la selva de Audincourt, de primera calidad; y los gorrones deben ser bastante largos para que puedan roblarse fácilmente en su estremo. En cuanto á eso, puede tenerse una guia con las indicaciones de la figura 558 que se ha trazado exactamente segun las prescripciones de *Neustadt*.

CAPITULO XVII

ENSAMBLE Ó UNION DE CABLES Y CADENAS.

§ 208

Organos de ensamble para las cadenas fijas y móviles.

Las cadenas fijas utilizadas como tirantes en las construcciones, como amarras de buques, como anclajes permanentes en los puentes de barcas y en los puentes colgantes, etc., se forman generalmente de eslabones muy largos que permiten en cierto modo reducir los gastos de material y de mano de obra. Para reunir diferentes mallas de una cadena de ese género se usa una pieza de dos brazos en forma de horquilla que se cierra por medio de un perno. La figura 561 representa el dispositivo adoptado por el almirantazgo inglés para las cadena de diques ó muelles. La longitud de construccion l es siempre de $^1/_2$ braza ó de 914^{mm}, sea cual fuere el tamaño de la seccion del hierro que la compone. La longitud de cada uno de los trozos de cadena es de 10 brazas ó 20 eslabones. Los pernos de las piezas de ensambladura de los diferentes trozos, así como sus pasadores, son de acero estañado. La seccion del hierro de los eslabones es un cuadrado de aristas levemente redondas. Los números proporcionales de la figura están en relacion á la longitud del lado de ese cuadrado. La figura 562 ofrece otro dispositivo de cadenas con mallas de largos vástagos. Para hacer más movibles esas cadenas las diferentes mallas de vástagos cuya longitud de construccion alcanza en ciertos casos 1'50 metro, están reunidos de dos en dos por un eslabon ó anillo oval ordinario, y á veces tambien se intercalan tres eslabones de esta clase entre dos vástagos ó barras. La pieza de ensamble de esas cadenas está cerrada por un perno roscado ordinario. Los números proporcionales inscritos en la figura demuestran que la tension en la parte recta de los eslabones grandes se supone el doble que la de cada una de las ramas de los eslabones ovales, lo que por otra parte parece muy lógico.

En las cadenas de puntal se emplea igualmente como medio de ensambladura el dispositivo de la figura 561. Las cadenas de puntal hechas segun las prescripciones del almirantazgo inglés, tienen siempre una longitud de $12^1/_2$ brazas ó de $22'85^m$ y terminan en un estremo, conforme indica la fig. 563. Entre la pieza de ensamble y la cadena propiamente dicha, está siempre interpuesto un eslabon ordinario, sin puntal, en el que se puede introducir una de las ramas de esa pieza. El diámetro del hierro de ese eslabon es igual al de hier-

ro de las mallas de la cadena multiplicado por 1'2 El perno, que tiene seccion oval, es de acero estañado, lo mismo que su pasador. Esta última pieza tiene una longitud algo menor que el orificio correspondiente, de modo que pueda asegurarse su posicion por medio de almohadillas de plomo encajadas firmemente á uno y otro estremo. Cuando la cadena ha de estar enlazada á una malla de diámetro mayor, con una argolla de ancla, por ejemplo, conviene aumentar en consecuencia las dimensiones de la pieza de ensamble. Para una grua ordinaria de muelle, una longitud de cadena de $12^1/_2$ brazas ($22'85^m$) es siempre suficiente, y en tal caso no hay necesidad de recurrir á ningun ensamble.

Cuando una cadena de muy gran longitud ha de pasar por un tambor móvil, como sucede, por ejemplo, con una cadena de halaje, no conviene el dispositivo precedente para el ensamble de los diferentes ramales de las cadenas. En este caso debe evitarse en lo posible el empleo de todo dispositivo de ensamble, cuya forma seria notoriamente diversa de la de las mallas de la cadena, porque ocurririan forzosamente choques al paso de cada pieza de ese género sobre el tambor. Para esas cadenas especiales se recurre siempre á un acoplamiento articulado de acero fundido, que en el esterior ofrece completamente la forma de un eslabon ordinario, pero que en realidad se compone de dos partes iguales unidas por un lado con una articulacion, mientras que por otro están cerradas por medio de un pasador de acero, despues de haberle introducido los dos eslabones estremos de las ramas de las cadenas que se trata de unir.

Para juntar una cadena con otras dos más débiles puede utilizarse con ventaja el eslabon doble representado por la fig. 564, que en razon de su forma recogida es preferible á un anillo redondo. A fin de facilitar la operacion de la soldadura, los tres eslabones que se reunen en la pieza gemela, deben medir longitudes superiores á las de los eslabones normales.

A veces conviene dar á un ramal de cadena la posibilidad de girar alrededor de su eje. En tal caso puede emplearse el modo de ensamble de malla giratoria que la fig. 565 representa tal como se construye normalmente en Inglaterra para las cadenas de puntal ó crucero. A ese eslabon se fijan dos mallas abiertas de una longitud bastante grande, terminando las dos partes que se trata de reunir, y de la cual están formadas de hierro redondo las otras mallas, teniendo por diámetro el módulo de los números proporcionales inscritos en la figura. Es obvio que para ofrecer suficiente resistencia, semejante dispositivo exige un trabajo de forja sumamente esmerado.

La fig. 566 representa un esmerejon de grandes dimensiones para las cadenas de robladura, cuyo modo de construccion está indicado por la fig. 561.

La parte inferior puede recibir dos mallas ó dos pernos de piezas de ensamble de estas cadenas, al paso que el anillo puede á su vez recibir hasta tres. El módulo para los números proporcionales es el diámetro del hierro de los eslabones de ambas cadenas, que este órgano reune conforme se supone.

§ 209

Garfios de cables y cadenas.

Los garfios ó ganchos son aquellos órganos intermedios que se emplean para suspender las cargas á los cables, garruchas y cadenas. La construccion de un garfio exige tanta mayor atencion cuanto más riesgo se corre en tales casos de cometer crasos errores, cuando se quiere evaluar á ojo el límite admisible de carga. Los garfios exigen dimensiones relativamente considerables en razon de los diferentes géneros de accion á que se encuentran sometidos. Cumple además tener presente que la rotura de un garfio puede acarrear graves accidentes (1), y en tal concepto nunca se pecará por esceso de precauciones.

Las dos figuras 567 y 568 representan dos garfios simples. En la primera hay una parte fileteada que soporta el garfio y por tanto la carga. El diámetro del cuerpo del filete puede determinarse por la fórmula 72, es decir se puede tomar

$$d_1 = 0'7\sqrt{P}, \qquad (209)$$

designando por P la carga suspendida del garfio. Esa fórmula corresponde á la hipótesis de un esfuerzo de traccion de $2'8^k$ por milímetro cuadrado sobre el cuerpo del filete; mas no debe perderse de vista que en el caso de obrar un poco oblícuamente la carga, puede fácilmente lograr tal efecto un valor quíntuplo (§ 18). Todas las dimensiones del garfio están relacionadas con el diámetro d_1, determinado por la fórmula (209). Si designamos por w el diámetro interior del garfio y por h la mayor de las dimensiones trasversales del cuerpo de dicho garfio, la otra dimension debe tomarse igual á $^2/_3\ h$, teniendo en cuenta la resistencia compuesta (V. § 18, caso n.° 1), y admitiendo 10^k para máximum de tension en la garganta del garfio, con lo cual se tiene entonces:

(1) En su tratado, *Cranes and machinery*, Glynn observa con razon que de todas las roturas de una grua la del garfio es con mucho la más peligrosa y que á ella corresponde el mayor número de muertos ó heridos.

$$\frac{h}{d_1} = 1{,}30 \sqrt{\frac{w}{h} + {}^3/_4} \text{ ó } \frac{h}{\sqrt{P}} = 0{,}87 \sqrt{\frac{w}{h} + {}^3/_4} . \qquad (210)$$

En la seccion diametralmente opuesta á la que mide por altura h, el diámetro es igual á $^1/_2 h$, y por lo tanto, el círculo que determina el perfil esterior de la parte principal del garfio tiene por diámetro $D = w + 1{,}5\ h$. Esas diferentes relaciones conducen á la série de valores siguiente:

$\frac{w}{h}$ =	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$\frac{h}{d_1}$ =	1,77	1,82	1,86	1,91	1,95	1,99	2,03	2,08	2,12	2,16
$\frac{h}{\sqrt{P}}$ =	1,19	1,22	1,25	1,28	1,31	1,33	1,36	1,39	1,41	1,44
$\frac{w}{d_1}$ =	1,06	1,27	1,49	1,72	1,95	2,19	2,44	2,70	2,97	3,24
$\frac{D}{d_1}$ =	3,72	4,00	4,28	4,59	4,88	5,18	5,48	5,82	6,15	6,48

Las más de las veces se toma $\frac{w}{h} = 1$. En la fig. 568 la pieza giratoria del garfio está unida á la cadena por una malla de perno análoga á la de las figuras 561 y 563. El mejor medio de fijar ese perno en cuanto á las gruas, consiste en un clavete hendido que permite en caso necesario cambiar fácilmente la pieza de suspension y reemplazar por ejemplo un garfio simple por otro doble.

En las gruas de muelles suele tenerse la costumbre de disponer directamente en el garfio un peso bastante considerable para equilibrar el de la cadena, que se desarrolla encaramándose, digámoslo así, por el interior de la flecha y para contrarrestar las resistencias debidas á los frotamientos del tambor, en el movimiento de descenso de esa cadena, siendo evidente que entonces debe adoptarse una forma y unas disposiciones especiales para la pieza de suspension. Puede verse en la figura 569 un dispositivo de ese género para un garfio doble. El garfio doble que tambien se designa con el nombre de ariete, debe considerarse como compuesto de dos garfios simples; si bien encontrándose en tal caso aplicada la fuerza segun el eje de simetria de los dos garfios, la parte vertical no necesita estar hinchada como en el garfio simple. Las dimensiones w, h y D se refieren al módulo $0{,}7 d_1$ y las otras dimensiones referidas á d_1 están indicadas en la figura.

Ejemplo. *Para un garfio simple, cuya forma es la de la figura* 567, *la carga se eleva á* 2000^k. *Segun la fórmula* (209) *el cuerpo ó grueso de la parte fileteada debe tener por diámetro* $d_1 = 0{,}7\sqrt{P} = 0{,}7 \cdot 44{,}7 = 31{,}3$ *milímetros, ó sea* 31^{mm}. *Suponiendo además que se haga* $w : h = 1$ *la tabla precedente dará* $h = w = 1{,}95 \cdot 31 = 60^{mm}$, $D = 4{,}88 \cdot 31 = 151^{mm}$, $^1/_2 h = 30^{mm}$. *Para un garfio doble el módulo en tales condiciones sería* $0{,}7 \cdot 31 = 22^{mm}$, *y suponiendo á más* $h = w$ *se hallaria* $h = w = 1{,}95 \cdot 22 = 43^{mm}$, $D = 4{,}88 \cdot 22 = 107^{mm}$, $^1/_2 h = 21^{mm}$.

En las cadenas articuladas no ofrece ninguna dificultad la aplicacion de garfios simples ó dobles; pero en tal caso conviene armar esos garfios de una parte giratoria, cuyo estremo sea susceptible de recibir un perno trasversal. Este perno se junta directamente con la cadena ó sirve como eje de polea.

§ 210

Cajas de cables. Almohadillas ó tampones de cables.

Para unir un cable redondo de alambres con piezas metálicas rígidas, se encaja su estremo en una caja ó tubo de hierro, cuya longitud sea diez ó doce veces el diámetro de ese cable y presente un lijero desboque cónico en el estremo opuesto. Cuando los alambres pasan de este estremo, se les reune á 180° en una corta longitud; si entonces se hace mover el cable en sentido inverso, como su diámetro se encuentra notoriamente aumentado por todos esos nudos, no puede pasar de la parte desbocada de la caja; y echando zinc derretido en los intersticios que aun subsisten, se obtiene una firme union del cable con el interior de esta caja. En el es

terior la caja de un cable está dispuesta de manera que pueda enlazarse fácilmente con otras partes metálicas de mayor diámetro (puede estar por ejemplo, fileteada, ó provista de bridas). Entonces conviene tratar esta pieza como el estremo de una barra de hierro.

Los cables metálicos planos están provistos de cajas cuya seccion interior es un rectángulo redondeado por sus exiguas fases; pudiendo además estrecharse entre dos planchas de hierro, que se reunen con pernos despues de haber unido los estremos de todos los alambres como acabamos de indicar.

En las máquinas de estraccion de las minas se ha de unir el cable propiamente dicho, con las cadenas (las más de las veces en número de cuatro), que sostienen los esportones de estraccion. Como entonces los cestones en ciertos momentos por estar cargados, ó hasta vacios, pueden encontrarse precipitados y dar márgen por ende á choques bastante violentos con el cable, generalmente se tiene la costumbre de interponer una almohadilla (ó tampon) entre el cable y las cadenas. Esa almohadilla se compone esencialmente de uno ó dos resortes cónicos de acero (Véase n.° 12, pág. 48), que trasmiten al cable la traccion de las cadenas y obran como las almohadillas de los vagones de ferro-carril. El empleo de esas almohadillas reduce muy notablemente el desgaste de los cables de estraccion y en tal concepto nunca se encarecerá bastante su uso en en la mecánica práctica.

CAPÍTULO XVIII

TAMBORES PARA CORREAS Ó POLEAS.

§ 211

Clasificacion de las ruedas.

Las ruedas que se emplean en las instalaciones mecánicas para trasmitir los movimientos de rotacion, se dividen en dos clases principales:

1.° Las ruedas de frotamiento,

2.° Las ruedas dentadas.

En el primer caso efectúase la trasmision del trabajo en virtud del frote producido en los contornos lisos de ruedas que generalmente afectan la forma de sólidos de revolucion, mientras que en el segundo caso esa trasmision se opera por mediacion de partes alternativamente salientes ó huecas que se han practicado en las circunferencias de las ruedas.

Las ruedas de cada una de estas dos clases se subdividen á su vez en otras dos:

a. Las ruedas de accion directa,

b. Las ruedas de accion indirecta,

segun obre una de las ruedas directamente sobre la otra para producir la trasmision, ó bien obre por medio de un órgano de traccion (cuerda, correa, cadena). Por consiguiente las ruedas destinadas á trasmitir los movimientos de rotacion, pueden en definitiva considerarse como formando cuatro clases distintas:

I. Las ruedas de frote por accion directa ó ruedas de friccion;

II. Las ruedas de frote por accion indirecta, tambores, poleas, ruedas de cuerdas, etc.;

III. Las ruedas dentadas de accion directa ó engranajes;

IV. Las ruedas dentadas de accion indirecta ó ruedas de cadenas.

Las ruedas de la segunda y tercera clases suelen ser las más generalizadas, y por esto en lo que sigue las trataremos con más detalles que los de las otras especies.

§ 212

Ruedas de friccion cilíndricas y cónicas.

En una trasmision por tambores de frote cilíndricos (figura 570), los tambores, para vencer una resistencia tangencial P deben ejercer uno sobre otro, segun la direccion de la línea de los centros, una presion Q que cumpla la relacion:

$$Q = \frac{P}{f} \qquad (211)$$

designando f el coeficiente de frote de las partes en contacto, para el cual pueden tomarse los valores siguientes:

Hierro con hierro.	0'10 á 0'30
Madera con hierro.	0'10 á 0'60
Madera con madera.	0'40 á 0'60

Los límites inferiores son aquellos que conviene admitir cuando las superficies frotantes están engrasadas y perfectamente pulidas, como sucede casi siempre.

De la fuerza P, una fraccion bastante considerable (que varia de 3 á 10 %) y que aumenta con el diámetro de los gorrones, se refiere á las resistencias peligrosas del árbol conducido.

La aplicacion más importante de las ruedas de frote cilíndricas, ó al ménos de las ruedas que obran de análoga manera, se encuentra en las locomotoras. El mayor desarrollo que han tomado las vias férreas, se debe directamente al empleo del mecanismo tan sencillo de las ruedas de friccion. Encuéntranse todavia, en muy variadas formas, aplicaciones numerosas de las ruedas de friccion cilíndricas en ciertos elevadores, en las máquinas de labrar la madera (dispositivos de alimentacion), en los aparatos de hilar, etc.

Las dimensiones de las ruedas de friccion se determinan por una parte segun el máximum de presion por unidad de superficie que puede admitirse en las circunferencias de las ruedas, y por otra segun la consideracion de la accion ejercida por la fuerza Q sobre la corona y los brazos de cada rueda (1).

La corona y los brazos deben ejecutarse algo más fuertes que las partes correspondientes de una polea de iguales dimensiones, sometida á la misma fuerza tangencial P (Véase § 224).

En las ruedas de friccion cónicas (fig. 571) se puede suponer con bastante aproximacion aplicada la presion Q al medio de la corona normalmente á la superficie cónica.

Las ruedas de friccion cónicas se emplean como aparatos de trasmision en ciertos tipos de máquinas de secar ú orear en la industria de los aprestos, etc.; pero el número de sus aplicaciones es en definitiva bastante reducido.

(1) Los contornos de las ruedas se allanan en el punto de contacto. Conforme los esperimentos de Krauss, una rueda de vagon, provista de una llanta de acero, ofreceria bajo una carga de 5500 kilos una superficie de contacto con el rail (de hierro) de $264^{\square}$ milímetros; y bajo una carga de 3750 kilos esta superficie no seria más que de $156^{\square}$ milímetros (*Revista politécnica suiza*, 1866, pág. 65).

§ 213

Ruedas de cuñas.

Las ruedas de cuñas son ruedas de friccion cuyas llantas formadas de superficies inclinadas penetran una en otra. Han sido particularmente empleadas en Italia por *Minotto*, en Inglaterra por *Robertson*, y á veces se designan con el nombre de uno de sus ingenieros. Deben utilizarse con preferencia como ruedas rectas (para árboles paralelos). La fig. 572 da los cortes de las coronas para dos ruedas de cuñas simples. La presion Q que ha de ejercer en la direccion de los rádios, es aquí notablemente menor que en las ruedas cilíndricas del párrafo anterior. Designando por θ el ángulo de las dos caras de la cuña, se tiene en efecto:

$$Q = P\left(\frac{sen\frac{\theta}{2}}{f}\right) \qquad (212)$$

Un inconveniente de ese dispositivo y que da por resultado frotes más considerables, estriba en que los únicos círculos que giran realmente uno sobre otro, son los que determinan las intersecciones de las coronas con dos cilindros tangentes uno á otro; pero este inconveniente es tanto ménos pronunciado cuanto más débiles son las longitudes de las superficies de contacto k y k_1 con relacion á los radios R y R_1. Para llegar á valores $\frac{k}{R}$ y $\frac{k_1}{R_1}$ tan cortos como sea posible, para una presion determinada, se usan ruedas de cuñas múltiples (fig. 573). Las más de las veces el ángulo θ es de unos 30°; y las ruedas de *Robertson* tienen todavia un valor más pequeño. Con grandes velocidades en la circunferencia casi inevitablemente se tiene un gran desarrollo de calor, de donde resulta un considerable desgaste. *Minotto* trató de hacer práctico el empleo de las ruedas de cuñas cónicas, y al efecto dotó una de las ruedas de una sola ranura, dispuesta de modo que la cuña de la otra rueda encajase siempre exactamente en el mismo punto. *Robertson* emplea ranuras análogas á las de las ruedas rectas, con lo cual no son susceptibles de desplace. Se ha intentado aplicar el modo de trasmision por ruedas de cuñas á las locomotoras destinadas á subir vivas rampas; pero los ensayos no se han efectuado nunca sino en modelos de pequeña escala, aunque es probable que resultaria un desgaste sumamente rápido. Hace algunos años que en la América del Norte se emplean con buen éxito las ruedas de cuñas en máquinas de estraccion de minas; y su

empleo debe recomendarse con preferencia para las transmisiones de pausado movimiento. Sin embargo *Gwynne*, en Inglaterra, y *Webers*, en Berlin, parecen haber obtenido satisfactorios resultados usándolas para trasmisiones rápidas, las de bombas centrífugas, dando más de 700 vueltas por minuto; más las ruedas empleadas en tal caso ostentaban los perfiles de cuñas encorvados, en los que se encuentra el dispositivo propuesto por *Minotto* para permitir cierto desplace (1).

§ 214

Reglas relativas á la disposicion de las poleas.

Las poleas son ruedas de frote por accion indirecta que se utilizan bajo gran número de formas. Nos ocuparemos en primer lugar de las poleas cilíndricas destinadas á recibir correas de cierta anchura. Los ejes de las poleas reunidas por una misma correa pueden ofrecerse bajo cuatro posiciones respecto una de otra. Con efecto, pueden:

1.° coincidir geométricamente,
2.° ser paralelas,
3.° cortarse,
4.° cruzarse sin estar en un mismo plano.

En estos diferentes casos la correa pasa de la polea motriz á la polea conducida, ya sea directamente, ya por medio de rodillos-guias; pero es indispensable que las poleas esten dispuestas de modo que la correa pueda mantenerse en cada una de ellas sin el recurso de una guia especial. El dispositivo geométrico que permite llenar esta condicion, constituye lo que llamamos la direccion de la correa.

Se llena la condicion antedicha disponiendo las poleas de modo que, para cada una de ellas, la línea media del ramal que se arrolla, esté en el plano medio de dicha polea.

En las poleas cuya llanta está combada, pueden admitirse lijeras variaciones que se eleven de $^1/_2$ á $^3/_4{}^0$ (tg=0'8 á 1'2 %).

§ 215

Trasmisiones por correas que se guian por sí solas.

Así designamos las trasmisiones con las cuales se llena la condicion anterior sin el recurso de rodillos ni guias de otra especie. Las trasmisiones más sencillas que corresponden al caso de los árboles paralelos, están representadas por las figs. 574 y 575. En la primera la correa es recta y en la segunda está cruzada. Con ambos dispositivos pueden las correas arrollarse indistintamente en un sentido ó en otro (1).

Para los árboles cuyos ejes coinciden, lo mismo que para aquellos cuyos ejes se cortan, es de todo punto imposible formar trasmisiones por correas que se guien por sí solas. Lo contrario sucede en el caso en que los árboles se cruzan sin estar en un mismo plano; pues entonces se puede recurrir al dispositivo representado por la figura 576, que es de uso muy frecuente.

Esa trasmision permite prescindir de toda guia esterior, si las poleas se disponen de manera que la línea de interseccion de sus planos medios sea tangente á los círculos contenidos en estos planos, cabalmente en los puntos en que la correa abandona las poleas. En la figura 576, en que estos dos puntos son a y b_1, debe la correa moverse en el sentido de las flechas. Si se quisiera moverla en sentido contrario, seria preciso comenzar por desalojar las poleas en sus árboles, hasta que la línea de interseccion de sus planos medios llegase á ser tangente á los círculos en los dos puntos a_1 y b opuestos á los anteriores. Esta condicion se realiza cuando las nuevas posiciones que ocupan las poleas son simétricas, respecto al cruce de los árboles, con las que ocupaban en el primer caso.

La trasmision representada por la fig. 576, puede considerarse como la solucion general de todas las trasmisiones por correas que se guian por sí mismas. En efecto, da la trasmision por correa recta cuando el ángulo β de los planos medios de las poleas es igual á 0°, y la trasmision por correa cruzada cuando $\beta = 180°$. En todas las posiciones intermedias la correa no está mas que parcialmente cruzada. Para $\beta = 90°$ se tiene una correa semi-cruzada, y para $\beta = 45°$, el cruce de $^1/_4$, etc.

Cuando la correa, parcialmente cruzada, no tiene más que una longitud relativamente pequeña, puede con facilidad proyectarse fuera de las poleas. Segun *Redtenbacher*, para que no se presente este accidente, la menor separacion que puede admitirse para las poleas nunca debe ser inferior al doble del diámetro de la mayor de esas poleas, es decir, el ángulo de desviacion de la correa no puede bajar de 25°. Y además, para que el desgaste de la correa no sea demasiado rápido, la distancia de las poleas (2) debe bajar de $10\sqrt{bD}$,

(1) Véase *Engineering*, 1868, pág. 502 y 593; y 1869, pág. 353.

(1) Conviene renunciar al cruce de la correa siempre y cuando se trate de poleas cuyos diámetros son muy distintos y están á corta distancia de ejes, porque entonces el punto de cruce estaria muy cercano á la polea pequeña y la torsion de la correa daria por resultado disminuir la longitud de su arco de arrollo y menguar por lo tanto la adherencia.

(2) Véase la Memoria de *Wolker* en el *Diario de la Sociedad de ingenieros alemanes*, tomo IV (1860), pág. 115.

designando b la anchura de la correa y D el diámetro de la polea que atrae. Es evidente que en cada caso particular convendrá tomar el mayor de estos dos límites.

§ 216

Trasmisiones por correas con poleas-guias.

Regla. En una trasmision con poleas-guias tiene la correa una direccion conveniente, cuando para cada una de las poleas es el punto de desarrollo el punto de contacto con esa polea de la línea de intersecion de su plano medio con el de la polea siguiente.

Las figs. 577 y 578 representan trasmisiones de ese género para árboles paralelos.

En la fig. 577 las poleas-guias tienen sus planos medios tangentes á las dos poleas de trasmision, y su diámetro comun es precisamente igual á la distancia de los planos medios de estas últimas poleas. Este dispositivo permite el movimiento de la correa en ambos sentidos. En el caso que más comunmente se ofrece y en el que basta que ese movimiento se efectue en un solo sentido, podemos contentarnos con el dispositivo más sencillo de la fig. 578, en el que los ejes de ambas poleas-guias coinciden. A y B son las poleas de trasmision; las dos poleas-guias tienen por planos medios los dos planos paralelos que son respectivamente tangentes á las poleas A y B en los puntos de desarrollo, y su diámetro comun es cabalmente igual á la distancia de los planos de esas mismas poleas. Conforme lo indica la figura, ambas poleas C y D giran en sentido inverso.

Si consideramos B como polea-guia, y en tal caso nada impide suponerla loca en el mismo árbol que A, pueden las dos poleas C y D tomarse como poleas de trasmision, con la condicion de fijarlas en dos árboles distintos cuyas direcciones solas coincidan.

Si las poleas-guias C y D se hallan instaladas entre los dos árboles A y B, como lo indica la fig. 579, giran en el mismo sentido y por lo tanto pueden fijarse en su eje comun. En tal caso la rotacion no puede efectuarse más que en un solo sentido. Pueden tambien las poleas C y D reemplazarse con una polea única, pero entonces esa polea debe colocarse oblícuamente.

La fig. 580 ofrece una trasmision por correa para dos árboles cuyos ejes se cortan. En este dispositivo, que no se diferencia del de la fig. 578 más que por la inclinacion del eje B, la rotacion no puede efectuarse sino en un solo sentido.

Para obtener la rotacion en sentido inverso es menester desplazar las poleas-guias sobre su eje comun, que puede no obstante conservar la misma posicion. No debe olvidarse que las dos poleas-guias giran en sentidos opuestos y que por lo tanto no pueden colocarse ambas en el árbol que las lleva.

Del dispositivo de la fig. 579 se deduce el de la figura 581, que se refiere al caso de árboles que forman un ángulo muy agudo y en que las poleas-guias C y D giran en el mismo sentido.

El dispositivo de la fig. 582 es aun mas sencillo y puede aplicarse á una inclinacion de árboles más marcada (hasta 25°).

Fig. 583. *Correa semi-cruzada con polea-guia.* Las poleas de trasmision tienen posiciones relativas tales, que el dispositivo de la fig. 576 podria aplicarse, si el desvio de las poleas no fuese demasiado pequeño. Para determinar la direccion que ha de darse á la correa, se debe ante todo comenzar por dar á uno de sus ramales la direccion SS, de la interseccion de los planos medios de las poleas, y luego por un punto c escogido arbitrariamente en SS, trazar en las circunferencias de esas poleas las tangentes ca y cb, cuyo plano determina el plano medio de la polea-guia C, que se forma tangencialmente á estas líneas. La rotacion puede efectuarse en ambos sentidos, si bien debemos observar que en el concepto de la construccion la posicion del árbol de la polea es bastante molesto y hace muy difícil instalar la trasmision, por cuyo motivo rara vez se emplea este dispositivo en la práctica.

Fig. 584. *Otro dispositivo de trasmision por correa semi-cruzada con polea-guia.* Las poleas de trasmision están dispuestas en esta figura de tal suerte, que la línea de interseccion SS de sus planos medios es tangente comun á los dos círculos contenidos en estos planos; y el plano medio de la polea-guia coincide entonces con el de la polea de trasmision A. El ramal de la correa que se desarrolla de esta polea A, se inclina como en la correa cruzada para arrollarse en la polea B, mientras que el otro ramal va guiado antes de su arrollo por el rodillo C, que es un contacto con la línea de interseccion SS y una tangente al círculo A, formada por un punto arbitrario de esta línea. El movimiento de rotacion no debe, empero, efectuarse más que en el sentido indicado por las saetas. Ese modo de trasmision por correa se presta muy bien al gobierno de una série de árboles verticales por un mismo árbol horizontal. Así es como se emplea con frecuencia con leves desvios de poleas en los molinos destinados á pulverizar diferentes especies de materias.

Fig. 585. *Correa semi-cruzada con rodillo-guia de posicion variable.* En este dispositivo, que supone un desvio de poleas más considerable que el anterior, se

puede hacer pasar, trasladando el rodillo-guia de la posicion C á la posicion C_0 (en punteado), la correa de la polea fija B á la polea loca B_0, pudiendo así utilizarse el rodillo-guia como medio de destrabazon. La posicion C_0 debe determinarse de manera que la tension correspondiente de la correa sea poco más ó ménos la misma ó levemente menor que la posicion C.

Caso general de árboles cruzados. Cuando las poleas no pueden colocarse de modo que la interseccion de sus planos sea tangente comun á los dos círculos contenidos en estos planos, se tiene que hacer uso de dos rodillos-guias.

La figura 586 representa el dispositivo que puede adoptarse en tal caso y que puede considerarse como la solucion general del problema de las trasmisiones por correas con rodillos-guias. La figura 587 ofrece una aplicacion particular para el caso en que la línea de interseccion SS pase por el centro del círculo medio de una de las poleas. En esta figura el eje de B debe suponerse situado en un plano paralelo á A. Despues de fijar ante todo la interseccion SS de los planos de las poleas, se escogen en esta línea dos puntos arbitrarios c y c_1, por los cuales se trazan en los círculos medios de las poleas las tangentes ca y cb, c_1a_1 y c_1b_1. Determinados así los planos $c\,a\,b$ y $c_1a_1b_1$, son los que conviene adoptar para los rodillos-guias que han de ponerse respectivamente en contacto con las tangentes anteriores. Con este dispositivo puede el movimiento efectuarse en ambos sentidos.

Una simplificacion del modo de trasmision representado por la figura 586, consiste en dar á los ejes de ambos rodillos-guias una direccion comun $m\,m$, paralela á las dos poleas de trasmision (figura 588). En esta figura SS es la interseccion de los planos de las poleas $a\,c$ y b_1c_1, que son planos perpendiculares á esa línea, en los cuales deben instalarse los rodillos C y C_1, tangencialmente á las rectas $a\,c$ y b_1c_1. La desviacion de los ramales se efectua en estos rodillos. Las flechas indican el sentido del movimiento posible. Para girar en sentido inverso seria preciso dar á los rodillos las posiciones C' y C'_1, representadas en punteado.

Una observacion muy importante tenemos que hacer especialmente bajo el punto de vista de las aplicaciones prácticas, y es que la correa en vez de ir de c á a, y de c_1 á a_1, puede dirigirse de c á a_1, y de c_1 á a, lo cual cambia de consiguiente el sentido del movimiento de rotacion.

Los rodillos en vez de colocarse horizontalmente como en la figura, pueden ponerse verticales ó sea de modo que C y C_1 se hallen respectivamente en los planos de las poleas A y B; pero en este caso conviene tener muy en cuenta la magnitud del ángulo de desviacion (§ 215).

Cuando las poleas de trasmision pueden instalarse de manera que la interseccion SS de sus planos medios sea tangente á una de ellas, y que la distancia de los planos paralelos que contengan los ejes de A y B sea suficiente, se puede sustituir el dispositivo de la figura 587 con el de la figura 589, que es muy práctico y en el cual los ejes de los rodillos son paralelos al de la polea A. Los planos de las poleas B y A pueden en tal caso formar un ángulo cualquiera.

Si la distancia $A\,C$ es relativamente considerable respecto á la anchura de la cadena, los rodillos en vez de instalarse encima uno de otro, pueden colocarse en el mismo eje (fig. 590); y por último, si basta la distancia entre B y C, puede armarse de dos poleas el árbol B, la una fija y la otra loca ó móvil.

Cuando por falta de espacio hay que renunciar al empleo de uno de los dispositivos cómodos que acabamos de indicar, debe procurarse á lo ménos colocar los ejes de los rodillos en uno de los planos principales de la instalacion, estando paralelos estos mismos rodillos uno á otro, como por ejemplo en la figura 591. Se traza la tangente ab, y en el plano formado por esta línea trazada normalmente al plano de la figura, se coloca el rodillo C de manera que sea tangente en a á la interseccion de A y C; por el punto a_1 se traza la línea a_1a_2 paralela á ab, y en el plano conducido por esta línea paralelamente á C se instala el segundo rodillo, tangente á la vez á la interseccion de A y C_1 y al plano de B; hallándose de ese modo los ejes mm y m_1m_1 paralelos y situados á más en un plano paralelo á la polea B.

Pasando la correa de la fig. 590 por una cuarta polea se logra un dispositivo que permite conducir dos poleas B y C por medio de una sola polea conductora A.

La fig. 592 representa un dispositivo de ese género muy difundido en las máquinas de hilar. Los árboles B y C están situados en alturas diferentes y llevan cada uno dos poleas, una fija y otra móvil ó loca. En este caso se utiliza la desviacion que puede tomar la correa con respecto á su direccion rigurosa (véase parrafo 214).

La fig. 593 indica otro modo de trasmision por correa, en que el árbol A mueve dos árboles paralelos B y C. Los ejes de estos árboles son á la vez perpendiculares al del árbol A, y el primero le corta mientras que el segundo lo cruza simplemente sin cortarlo.

Se encuentra en las máquinas de hilar gran número de trasmisiones por correas, en las que una misma polea conductora mueve otras tres ó cuatro y á veces más.

Como última observacion debemos añadir que en todas las trasmisiones por correas, en que se emplean rodillos que están en contacto con la superficie superior de la correa, conviene disponerla, si es de cuero, de manera tal, que el contacto con las poleas se verifique siempre por la misma cara (la más rugosa).

§ 217

De las correas de trasmision y sus tensiones.

Las correas de trasmision que comunmente se emplean, se forman de cintas de cuero de buey ó de cauchú, cuya anchura varia de 50 á 300^{mm}. Para trasmitir esfuerzos considerables se usan correas dobles ó triples, en tanto que para fuerzas pequeñas y movimientos muy rápidos se utilizan amenudo cordones de cuero, algodon ó cañamo.

Para que la polea B (fig. 594) pueda poner en movimiento la polea A sometida á una resistencia P en su circunferencia, es preciso que las tensiones de la correa, T y t, en el ramal conductor y en el conducido, tengan á lo ménos los valores indicados por las espresiones:

$$\frac{t}{P}=\frac{1}{e^{f\alpha}-1},\quad \frac{T}{P}=\frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha}-1}=1+\frac{t}{P}, \qquad (213)$$

que se pueden reemplazar aproximadamente con las siguientes:

$$\frac{t}{P}=\frac{1}{f\alpha+\frac{f^2\alpha^2}{2}},\quad \frac{T}{P}=1+\frac{1}{f\alpha+\frac{f^2\alpha^2}{2}}, \qquad (214)$$

representando

$e=2{,}718$ la base de los logaritmos naturales,
f el coeficiente de frote para el deslizamiento de la correa por la polea,
α el ángulo de arrollo espresado por la relacion del arco que abarque toda la circunferencia de la polea considerada.

En las fórmulas (213) y (214) no se consideran la rigidez de la correa ni el frote de los ejes. Para tenerlos en cuenta debe plantearse:

$$\left.\begin{aligned}\frac{t}{P}&=\frac{1}{e^{f\alpha}(1-u)-(1+u)}\\ \frac{T}{P}&=\frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha}(1-u)-(1+u)}\end{aligned}\right\} \qquad (215)$$

ó aproximadamente:

$$\left.\begin{aligned}\frac{t}{P}&=\frac{1}{\left(1+f\alpha+\frac{f^2\alpha^2}{2}\right)(1-u)-(1+u)}\\ \frac{T}{P}&=\left(1+f\alpha+\frac{f^2\alpha^2}{2}\right)\frac{t}{P}\end{aligned}\right\} \qquad (216)$$

espresiones en que u tiene el valor:

$$u=\frac{s\,\delta^2}{R}+\frac{f_1 d}{R}, \qquad (217)$$

y se refiere á la polea cuyo ángulo de arrollo es α.

R representa el radio de la polea,
b — la anchura de la correa,
δ — el grueso de la correa,
d — el diámetro de los gorrones del árbol,
s — el coeficiente de rigidez de la correa,
f_1 — el coeficiente de frote de los gorrones.

Para la correa simple que consideramos primero, pueden tomarse como valores medios $\delta=4{,}5^{mm}$, $d:R=0{,}25$, $s=0{,}009$, $f_1=0{,}08$. Esos valores sustituidos en la fórmula (217) dan:

$$1+u=1{,}02,\qquad 1-u=0{,}98$$

El coeficiente de frote de la correa sobre la polea tiene como valor, segun *Morin*:

para las correas medianamente engrasadas sobre tambores en el mismo estado. . . . 0,28
para las correas perfectamente engrasadas sobre tambores en el mismo estado. . . . 0,12

Los coeficientes para el cauchú no se diferencian probablemente mucho de los anteriores que se refieren á las correas de cuero; y en igualdad de circunstancias parecen ser algo más elevados ó sea más ventajosos.

El ángulo de arrollo α puede bajar hasta $0{,}8\,\pi$, pero en los casos ordinarios se eleva á unos $0{,}95\,\pi$. De donde resulta que admitiendo que el coeficiente f tenga ordinariamente el valor 0,28, y que por tanto del estado de engrase de la correa pueda bajar á 0,24, los valores de T y t estarán comprendidos entre los que se obtinen para $f\alpha=0{,}24\,.\,0{,}8\,\pi$ y $f\alpha=0{,}28\,.\,0{,}95\,\pi$. El primer valor de $f\alpha$ da, segun las relaciones (216):

$$\frac{t}{P}=1{,}37,\quad \frac{T}{P}=2{,}44,\quad \frac{T+t}{P}=3{,}81,\quad \frac{t}{T}=0{,}561, \qquad (218)$$

y el segundo

$$\frac{t}{P}=0{,}89,\quad \frac{T}{P}=1{,}95,\quad \frac{T+t}{P}=2{,}84,\quad \frac{t}{T}=0{,}456. \qquad (219)$$

Observacion. Por causa de la diferencia de las tensiones T y t, las velocidades v y v_1 de las poleas sobre las circunferencias de radios $R+{}^1/_2\,\delta$ y $R_1+{}^1/_2\,\delta$, no son rigurosamente las mismas. El deslizamiento de la correa, que forzosamente se produce, da por resultado una pérdida de velocidad que está indicada por la espresion:

$$\frac{v_1-v}{v}=\frac{1-\frac{t}{T}}{1+\frac{E}{S_1}} \qquad (220)$$

en la que E designa el coeficiente de elasticidad de la correa y S_1 la tension en el ramal conductor. La pérdida de velocidad debida al deslizamiento se eleva en promedio á ${}^1/_2$ por 100 (1), y va acompañada de una pérdida de trabajo que se traduce por el calentamiento y el desgaste de la correa y de las poleas.

§ 218

Cálculo de una correa simple.

En el ramal conductor puede admitirse para la tension por milímetro cuadrado $S_1=\frac{1}{200}\sqrt[4]{b^3}$ (2). Para las correas de grande anchura generalmente se emplea cuero más grueso que para aquellas cuya anchura es menor, y para ese espesor se obtienen valores que se aproximan á los de la práctica, haciendo $\delta=1.5\sqrt[4]{b}$. Si designamos, pues, por $p=S_1\,\delta$ la tension por milímetro de anchura, que se produce en la correa, podemos determinar la siguiente tabla:

b	=	50	100	150	200	250	300^{mm}
δ	=	3'97	4'74	5'25	5'64	5'97	6'24^{mm}
S_1	=	0'09	0'16	0'21	0'27	0'31	0'36^{k}
p	=	0'36	0'76	1'10	1'52	1'85	2'25^{k}

Partiendo de las relaciones precedentes se logran para la longitud de una correa las diversas espresiones siguientes:

1.° Para una resistencia P aplicada tangencialmente á la polea:

$$b=18\sqrt{P}; \qquad (221)$$

2.° Para una fuerza de N caballos que ha de trasmitirse, con una velocidad de n vueltas por minuto:

$$b=15250\sqrt{\frac{N}{Rn}}; \qquad (222)$$

3.° Para una trasmision de N caballos, con una velocidad v (en metros) de la correa:

$$b=156\sqrt{\frac{N}{v}}; \qquad (223)$$

4.° Para un momento estático (PR):

$$b=6'87\sqrt[3]{\frac{b}{R}(PR)} \qquad (224)$$

5.° O bien:

$$b=615\sqrt[3]{\frac{b}{R}\frac{N}{n}}. \qquad (225)$$

La fuerza que por correa puede trasmitirse, es limitada. Segun la fórmula (221) una correa simple de 200^{mm} de ancho puede trasmitir como máximum una fuerza $P=200^2:18^2=123'5^k$; siendo entonces su tension, segun la fórmula (218), de $2'44\,.\,123'5=301'3^k$. Siendo de 32 metros el máximum de velocidad que puede admitirse para una correa, resulta que el mayor trabajo en caballos que sea capaz de trasmitir la correa precedente es, segun la fórmula (223), $N_{max}=200^2\,.\,32:156^2=52'6^{caball}$. Por lo demás es bastante raro que se llegue para una correa á la velocidad de 32 metros. Con las correas dobles (Véase más adelante) los valoles de los máximos de P y de N pueden evaluarse aproximadamente dobles que los anteriores.

§ 219

Anchura de correas simples.

La tabla que sigue se ha calculado por medio de las fórmulas precedentes; si bien, como $\frac{Rn}{N}$ y $\frac{b}{R}\frac{N}{n}$ corresponden á valores numéricos muy pequeños, se han reemplazado con

$$1000\,\frac{N}{Rn} \quad \text{y} \quad 1000\,\frac{b}{R}\,\frac{N}{n}$$

---

(1) Para un valor de E comprendido entre 15 y 20 kilos (V. la tabla del § 2), Hirn determinó ese valor medio tras numerosos esperimentos exactos, ejecutados con correas que habian servido ya, pero que aun se hallaban en buen estado de conservacion. Esperimentos más antiguos de Bevan habian dado para E un valor notoriamente dos veces menor, conduciendo por lo tanto á una pérdida de velocidad mucho mayor que la precedente.—Véase sobre este punto la Nota acerca de las Trasmisiones de movimiento con las correas, por M. Kretz *(Anales de las minas,* 1862).

(2) Ese valor de la tension supone cueros de muy buena calidad. Con cueros ordinarios será prudente tomar $S_1={}^1/_{290}\sqrt[4]{b^3}$

TABLA DE LAS ANCHURAS DE LAS CORREAS

SIMPLES DE CUERO.

ANCHO DE LA CORREA b	P	$1000\,\frac{N}{Rn}$	$\frac{b}{R}(PR)$	$1000\,\frac{b}{R}\,\frac{N}{n}$
50	7'72	0'011	385	0'538
55	9'34	0'013	512	0'715
60	11'11	0'015	665	0'929
65	13'04	0'018	846	1'181
70	15'12	0'021	1056	1'475
75	17'36	0'024	1299	1'814
80	19'75	0'027	1576	2'202
85	22'30	0'031	1890	2'641
90	25'00	0'035	2245	3'135
95	27'85	0'039	2641	3'687
100	30'86	0'043	3080	4'300
110	37'34	0'052	4099	5'732
120	44'44	0'062	5322	7'430
130	52'25	0'073	6767	9'446
140	60'49	0'084	8452	11'799
150	69'44	0'097	10395	14'513
160	79'00	0'110	12616	17'613
170	89'19	0'124	15132	21'126
180	100'00	0'139	17963	25'078
190	111'42	0'155	21126	29'487
200	123'45	0'172	24640	34'392
210	136'11	0'190	28524	39'813
220	149'38	0'208	32796	45'776
230	163'27	0'227	37474	52'306
240	177'76	0'248	42578	59'429
250	192'90	0'269	48125	67'172
260	208'64	0'291	54134	75'559
270	225'00	0'313	60624	84'620
280	242'00	0'337	67612	94'372
290	529'56	0'362	75118	104'848

1.er EJEMPLO. *Una fuerza de 2 caballos ha de trasmitirse por correa de un árbol que da 60 vueltas por minuto, á otro árbol de velocidad angular doble. Se pretende determinar la anchura de la correa y los radios de las poleas que han de emplearse. Si se toma* $\frac{b}{R} = 0'23$, *se tiene:* $1000.\frac{b}{R}\,\frac{N}{n} = \frac{1000 . 23}{30} = 7'66$; *el valor correspondiente de b es levemente superior al que indica la tabla (col. 5, línea 13), y que es* 120^{mm}; *pero se puede aceptar ese valor. Para la segunda polea se tiene* $N : n_1 = {}^1/_{60}$, $R_1 = {}^1/_2 R$, *y por consiguiente* $b : R_1 = 2 . 0'23$, *lo que da* $1000\,b\,N : R_1\,n_1 = 7'66$ *como antes. Para los dos radios se tiene:* $R = 120 : 0'23 = 522^{mm}$, $R_1 = 261^{mm}$; *pudiendo tomarse aquí 520 y* 260^{mm}.

2.° EJEMPLO. *En un elevador destinado á levantar una carga de* 200^k *por medio de una cuerda de* 15^{mm} *de diámetro, el tambor tiene un radio de* 90^{mm} *(medido hasta el eje de la cuerda), y debe ponerse en movimiento por medio de una polea de* 1^m *de diámetro, calada en el mismo árbol y gobernada á su vez por otra polea de igual diámetro: trátase de hallar la anchura de la correa. La resistencia aplicada á la circunferencia de una polea es aquí* $P = 90 . 200 : 500 = 36^k$, *y la anchura correspondiente que suministra la tabla (col. 2, ltn. 12), es de* 110^{mm}.

3.er EJEMPLO. *Una bomba, cuyo piston ó émbolo está sometido á una resistencia de* 40^k, *debe estar gobernada por una manivela de* 300^{mm} *de longitud; y el árbol de esa manivela está á su vez gobernado, merced á una correa, por otro árbol cuya velocidad de rotacion es á la del primero en la proporcion 7 : 4; y los elementos que han de determinarse son los radios de las poleas y la anchura de la correa. La relacion de los radios* $R_1 : R = 7 : 4 = 1'75$; *y si tomamos* $b : R_1 = {}^1/_4$, *lo cual da* $b . PR : R_1 = 0'25 . 40 . 300 = 3000$, *el valor indicado por la tabla es* $b = 100^{mm}$ *(col. 4, línea 11). De ahí se deduce que* $R_1 = 4 . 100 = 400^{mm}$, $R = {}^4/_7 . 400$, *ó sea* 230^{mm}.

4.° EJEMPLO. *Dando á la polea mayor del primer Ejemplo un radio de* 600^{mm} *se tendria:* $\frac{1000\,N}{Rn} = \frac{1000}{600 . 30} = 0'055$. *El número que más se aproxima en la tabla es* 0'052 *(col. 3, línea 12), y da* $b = 110^{mm}$, *valor que puede adoptarse para la anchura de la correa.*

Cuando la anchura que ha de darse á una correa simple pasa de 300^{mm}, conviene repartir la fuerza trasmisible en dos correas de anchura media menor, ó se ha de recurrir al empleo de una correa doble (véase el párrafo siguiente).

§ 220

Correas dobles y triples.

Suponiendo que el espesor de una correa doble sea dos veces el de una correa simple de igual anchura, como sucede harto amenudo en la práctica, la fuerza que puede trasmitir esa correa, es doble de la que hemos indicado para la correa simple; y así tenemos para la anchura b_2 de la correa doble:

$$\left.\begin{aligned} b_2 &= 12'7\sqrt{P} = 0'7\,b \\ P &= 2\,\frac{b_2^2}{18^2} = \frac{b_2^2}{162} \end{aligned}\right\} \qquad (226)$$

lo que equivale á decir que la anchura de la correa doble se obtiene multiplicando por 0'7 la de la correa simple correspondiente á la misma fuerza que debe trasmitirse. Cumple notar que en tal caso debe evitarse el tomar R demasiado pequeña, porque la rigidez tiene un valor mucho más grande que en la correa simple (1).

En algunos casos particulares se usan correas triples, es decir, compuestas de tres hojas de cuero superpuestas, formando un espesor total de 15 á 16^{mm}. Estas correas que no se emplean sino escepcionalmente para trasmitir la potencia del árbol del volante al primer árbol de gobierno (2), nunca deben trabajar á más de 0'20^k á 0'25^k por milímetro cuadrado de seccion.

Tambien se encuentran correas de grande espesor (0'018^m), que están formadas de gran número de hojas, de ancho y grueso igual á los de la correa, y que están reunidas y pegadas firmemente para no formar más que una pieza. El cuero entonces trabaja de canto en vez de trabajar de plano; y así se evita el triplicar la correa por superposicion, que debe dejar que desear en concepto de la homogeneidad. En ciertas correas dobles los cueros superpuestos están soldados ó tan bien adheridos, que por decirlo así no constituyen más que un solo espesor. A veces los bordes están reforzados por bandas de cuero.

Las correas de cuero de mucho espesor y de grande anchura son muy caras, y por esto se acude á la ventaja de sustituirlas con correas de cauchú, ó más propiamente de tejido de cauchú, cuya fabricacion para las dimensiones escepcionales es mucho más económica.

§ 221

Cadenas de cuña articuladas.

Numerosas tentativas se han hecho para sustituir las correas de cuero ordinarias con otros órganos de traccion. De los diversos sistemas propuestos al efecto, debemos citar en primer lugar la correa-cadena (de cuero) de *Rouiller*. Ese órgano que al principio parecia destinado á prestar un buen servicio, no ha justificado esta esperanza, y se ha tenido que renunciar á su empleo á causa de su poca duracion; y no se han obtenido más satisfactorios resultados con las correas formadas por alambres trenzados (*Godin*). En cuanto á las correas de cuero revestidas de gutapercha, no pueden en realidad competir con las correas de cuero ordinarias, y hoy no hay casi más que las correas de cauchú con tejido de cáñamo ó de algodon interpuesto, que parezcan ser á lo ménos tan ventajosas como las correas de cuero puro, máxime cuando se trata de trasmitir esfuerzos bastante considerables.

En ciertos casos especiales para trasmitir grandes fuerzas, como por ejemplo, en las máquinas agrícolas, puede la correa ordinaria suplirse con un dispositivo bastante razonable, la cadena de cuña con articulaciones metálicas de *Clissold* (fig. 595). En esa cadena están las articulaciones enlazadas de dos en dos con bandas de cuero arrolladas, cuyas faces laterales están cortadas oblícuamente para encajarse en una ranura de seccion trapezoidal, que forma la llanta de la polea. *Angström* reemplazó las cuñas de cuero por cuñas de madera guarnecidas de hierro (1). En el concepto del cálculo de las tensiones, conviene introducir aquí el frote de los gorrones de los anillos, en vez de la rigidez que figura en las fórmulas del § 217. Bajo la reserva de esa observacion las fórmulas (215) y (216) pueden aplicarse reemplazando $f\alpha$ por $\frac{f\alpha}{sen\,\Theta}$, designando Θ el ángulo de la cuña.

Para $f=0'24$, $\alpha=0'8\,\pi$, $\Theta=30^\circ$, se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{t}{P}=0'20,\ \frac{T}{P}=1'23,\ \frac{T+t}{P}=1'43,\ \frac{t}{T}=0'163 \\ &\text{y para } f=0'28,\ \alpha=0'95\,\pi,\ \Theta=30^\circ: \\ &\frac{t}{P}=0'12,\ \frac{T}{P}=1'15,\ \frac{T+t}{P}=1'27,\ \frac{t}{T}=0'105 \end{aligned}\right\} \qquad (227)$$

Esos valores son notoriamente más ventajosos que los de las fórmulas (218) y (219) relativas á las correas planas; de donde resulta que la cadena en marcha parece á causa de su peso considerable enteramente distendida con frecuencia. Partiendo de esos valores el diámetro de los gorrones de los anillos puede determinarse por las dos espresiones:

---

(1) Como regla práctica puede admitirse que la relacion del radio de la polea al espesor de la correa doble nunca debe ser inferior á 50.

Las correas dobles deben evitarse en las trasmisiones por correas parcialmente cruzadas que se guian á sí mismas.

(2) En la Exposicion Universal de Paris, 1878, habia gran número de correas dobles ó triples de muy grandes anchuras. La correa de gobierno del motor *Galloway* media 12 milímetros de espesor y 800 de ancho. Además en la Exposicion de Filadelfia pudo verse funcionar una correa de 1 metro 525 milímetros de ancho.

(1) *Annales des Ing. all.* 1868, pág. 706.

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{,}54\sqrt{R} = 457\sqrt{\frac{N}{nR}} \\ \text{y} \qquad & \\ d &= 0{,}46\sqrt[3]{\frac{l}{R}(PR)} = 41\sqrt[3]{\frac{l}{R}\frac{N}{n}} \end{aligned}\right\} \quad (228)$$

fórmulas por las cuales debe hacerse:

$$\frac{l}{d}=3,\quad \frac{b}{d}=2\,{}^{3}/_{4},\quad \frac{c}{d}={}^{1}/_{3},\quad \frac{e}{d}={}^{1}/_{5},\quad \frac{h}{d}=2\,{}^{1}/_{6}. \quad (229)$$

Para las poleas muy pequeñas conviene tomar:

$$\frac{R}{l} \geq 5.$$

En la práctica no suele bajarse de 8^{mm} para d, ni siquiera cuando fuesen suficientes dimensiones más pequeñas. Con la cadena de cuña, el límite del esfuerzo P que se puede trasmitir, suponiéndole aplicado á la circunferencia, se aproxima á 220^{k}, esfuerzo que para una correa simple exigiria una anchura de 270^{mm} poco más ó ménos.

Ejemplo. *Se pretende calcular una trasmision por cadena de cuña para* $N=20$, $n=50$, $n_1=100$. *Suponiendo el radio de la polea más pequeña* $R_1=5\,l$, *la fórmula* (228) *da:* $d=41\sqrt[3]{\frac{1}{5}\cdot\frac{20}{100}}=\frac{41}{\sqrt[3]{25}}=\frac{41}{2{,}924}=$ $14{,}06$, ó sea 14^{mm}. *Dedúcese entonces de las relaciones* (229): $l=3\,.\,14=42^{mm}$, $b=2\,{}^{3}/_{4}\,.\,14=38^{mm}$, $c=5^{mm}$, $e=3^{mm}$, $h=2\,{}^{1}/_{6}\,.\,14=30^{mm}$, $R_1=5l=210^{mm}$, $R=420^{mm}$.

La trasmision por cadena de cuña puede considerarse como una trasmision por rueda de cuña por accion indirecta (Véase § 213). Débese al mismo inventor *(Clissold)* otro dispositivo en el que la cadena está reemplazada por una correa de mucho espesor y de seccion trapezoidal. Pero esa forma de correa ha sido desechada por causa de su poca duracion.

§ 222

Trasmisiones por cuerdas ó cables de cáñamo.

En la clase de ruedas de cuñas por accion indirecta puede entrar la trasmision por cables redondos de cáñamo, que en estos últimos años ha recibido numerosas aplicaciones, sobre todo para trasmitir el movimiento del árbol del volante de un motor al primer árbol de gobierno (1).

En ese modo de trasmision las llantas de los volantes y poleas llevan cierto número de ranuras ó gargantas en forma de V, en las cuales se insertan tangencialmente las cuerdas (fig. 596). El ángulo formado por las dos caras de cada garganta tiene mucha importancia; pues si es demasiado abierto, la adherencia es muy escasa, y en cambio si es demasiado agudo, el acuño es sobrado fuerte y el desgaste se hace harto rápido. La abertura de 40° es la que ha indicado la esperiencia como la de mejores resultados. Las cuerdas para trasmisiones deben ser de cáñamo de primera calidad, de fibra larga, y bien torcida, á más de flexible y elástica. El empalme destinado á juntar los estremos de una misma cuerda, debe hacerse en grande longitud y de modo que no produzca un aumento muy sensible del diámetro. Esa longitud varia de 2'50 á 3 metros por una cuerda de 50^{mm} de diámetro.

Segun ciertas consideraciones teóricas y diversos esperimentos, puede admitirse que la tension normal que debe darse á una cuerda para trasmitir una potencia determinada, llega apenas á los dos tercios de la que debiera darse á una correa para igual potencia. Suponiendo el mismo valor al coeficiente de frote en ambos casos, la diferencia debe atribuirse á la influencia de la garganta.

En la instalacion de una trasmision por cuerdas, conviene tener en cuenta las siguientes observaciones:

La velocidad debe estar comprendida entre 10 y 25 metros por segundo; y el diámetro de la polea más pequeña no ha de ser inferior á 30 veces el diámetro de la cuerda.

La distancia entre los árboles puede variar de 7 á 15 metros. Importa colocar el ramal motor abajo, á fin de aumentar el arco abarcado, máxime cuando la trasmision es horizontal.

Si designamos por K el número de cuerdas que ha de colocarse en el volante, por N el trabajo (en caballos) que hay que trasmitir, n el número de vueltas del árbol del volante, R el radio de ese volante (en milímetros), la fuerza total P (en kilóg.) que debe trasmi-

(1) Arbol principal, el que recibe la accion indirecta del motor.

El empleo de las cuerdas para trasmisiones es muy antiguo; ya en 1830 existian algunos ejemplos en Lincolnshire. Pero cumple notar que ese modo de trasmision no diferia mucho de la trasmision por correas; pues las gargantas tenian la forma de U y no producian por ende ningun frote lateral. *Combe*, de Belfast, es quien hizo las primeras aplicaciones importantes en que se encuentra la forma de V para las ranuras de las poleas, forma que aumenta notablemente la adherencia.

tirse, suponiéndola aplicada á la circunferencia, la tendremos segun la espresion:

$$P = 716200 \,.\, N : nR.$$

Y el esfuerzo correspondiente á una sola cuerda seria:

$$\frac{P}{K} = \frac{716200}{K} \frac{N}{Rn}.$$

El diámetro de esta cuerda puede determinarse con suficiente exactitud por la relacion:

$$d = 4'5 \sqrt{\frac{P}{K}} = 3800 \sqrt{\frac{N}{K n R}} \quad (230)$$

que nos da d espresada en milímetros.

Fijando el diámetro de las cuerdas que se quieren emplear, esta misma relacion permite calcular el valor de K. Para trasmitir el movimiento de un motor al árbol principal, generalmente se usan cuerdas cuyo diámetro varia de 30 á $53^{m.m}$. Para las trasmisiones poco importantes se baja notablemente de la menor de estas dos cifras.

1.er Ejemplo. *En la fábrica de los Sres. Pearce hermanos, de Dundee, el volante de* $6'70^{m}$ *de diámetro tiene una llanta de* $1'47^{m}$ *de anchura, que tiene* 18 *ranuras. El volante, que da* 43 *vueltas por minuto, comunica á la circunferencia una velocidad de* 15^{m} *por segundo. La potencia total trasmitida puede evaluarse en* 400 *á* 430 *caballos, y por tanto el trabajo medio que trasmite cada una de las* 18 *cuerdas es de unos* 23 *caballos. Estas cuerdas tienen un diámetro de* 53^{mm}. *Segun la fórmula* (230) *debiera tomarse* $d = 3800 \sqrt{430 : 18 \,.\, 43 \,.\, 3350} = 49^{mm}$.

2.° Ejemplo. *En una hilanderia de Calcuta la potencia del motor es de* 800 *caballos, y la velocidad de* 40 *vueltas. El volante mide* $8'54^{m}$ *de diámetro; su llanta* $1'75$ *de ancho y tiene* 22 *ranuras, siendo la velocidad de* $17'90^{m}$ *por segundo. El diámetro de las* 22 *cuerdas varia de* 53 *á* 57^{mm}. *Cada una de ellas tiene que trasmitir por término medio un trabajo de* $36'8$ *caballos. Segun la fórmula* (230), *deberia tomarse* $d = 3800 \sqrt{800 : 22 \,.\, 40 \,.\, 4270} = 55^{mm}$.

§ 223

Corona ó llanta de una polea.

La llanta de una polea destinada á recibir una correa plana presenta siempre una leve convexidad (figuras 597 y 598), que tiene por objeto mantener esa correa constantemente en medio de la llanta. La flecha s de esa convexidad es igual á $^{1}/_{20}$ de la anchura b de la correa. Para las poleas aisladas la anchura B es un poco superior á b y á veces se eleva hasta $^{5}/_{4}$ b (1); y en cambio cuando varias poleas deben estar yuxtapuestas para recibir alternativamente la misma correa, se les debe dar una anchura muy poco superior á b. El espesor k del borde de la llanta se halla debidamente determinado por la relacion $k = 2 + {}^{1}/_{100}\, B$. Las poleas que deben girar muy rápidamente y están espuestas á fuertes vibraciones, están dotadas de rebordes laterales como en la fig. 598, ó están reemplazadas con poleas para cuerda, cuya llanta presenta en seccion la forma de una de las ranuras de la fig. 596.

Ejemplo. *Una polea aislada destinada á una correa de* 120^{mm} *de ancho puede tener, segun lo dicho, una anchura de corona igual á* $^{5}/_{4} \,.\, 120 = 150^{mm}$ *y un espesor en los bordes de* $2 + 1'5 = 3'5^{mm}$. *Su convexidad es de* $120 : 20 = 6^{mm}$, *de suerte que el espesor en el medio, ó* $2k + s$, *es igual á* $2 \,.\, 3'5 + 6 = 13^{mm}$.

En las poleas destinadas á recibir dos correas, como por ejemplo, las poleas volantes de las máquinas motoras, la llanta tiene dos combas ó convexidades como indica la fig. 599.

Revistiendo de cuero la llanta de una polea se logra una adherencia mucho más pronunciada, es decir, se aumenta el coeficiente del frote que se opone al deslizamiento de la correa por la llanta. Así, para una guarnicion completamente nueva, el autor ha encontrado la relacion $T' : t$ comprendida entre 6 y 7 (véase la fórmula 218); y despues de algun tiempo de servicio menguó este valor, si bien quedó comprendido entre 4 y 5: el ángulo de arrollo α era igual á π. La relacion $T' : t = 4$ corresponde á $0'44$ para el coeficiente de frote y da sensiblemente $T : P = 1'48$; siendo estos valores muy ventajosos y permitiendo en todo caso una reduccion de anchura en la correa. Cumple observar que se logra igualmente aumentar el valor de $T : t$ y elevarlo á $3'5$, 4 y hasta 5, polvoreando con resina seca la superficie de la corona. En todo caso para ese efecto

(1) Conviene tomar la relacion $B : b$ tanto mayor cuanto más largas son las correas, porque el frote que desplaza la correa sobre la llanta aumenta con la longitud. Por igual razon importa tomarla mayor para las correas de gran velocidad que para las que van despacio, y para las correas verticales mayor que para las horizontales.

Cuando las correas están parcialmente cruzadas, no pudiendo arrollarse perfectamente en línea recta sobre las poleas, conviene tomar para $B : b$ el valor máximo $^{5}/_{4}$. Puede además ser prudente en algunas circunstancias llegar hasta $^{4}/_{3}$.

especial parece que el empleo de una guarnicion de cuero es á lo ménos tan ventajoso y no presenta los inconvenientes de la resina en otros conceptos. Debe además ponerse el mayor cuidado en fijar esa guarnicion de cuero en la llanta.

§ 224

Brazos ó radios de una polea.

Suele darse á los brazos de una polea seccion oval, cuya anchura es en cada punto la mitad de la altura (midiéndose esta última en el plano de la polea). El trazado del perfil trasversal se efectua simplemente por medio de dos arcos de círculo (fig. 600) cuyos centros se hallan en la circunferencia descrita sobre h (altura de la seccion) como diámetro; y estos arcos de círculo se juntan á los estremos por dos líneas encorvadas. El eje de un brazo puede ser rectilíneo como en la fig. 601, ó curvo como en la fig. 602, ó doblemente curvo (en forma de S).

La curvatura de los brazos de la segunda especie puede determinarse muy bien de la siguiente manera: Tómase (fig. 602) el arco AE igual á $^2/_3$ del arco EF de division de los brazos, y se tira á OA la perpendicular OA_1, en la que debe encontrarse el centro C del arco de curvatura del eje del brazo; y debiendo este punto hallarse en la perpendicular que cae en OE tirada por su centro D, se halla perfectamente determinada.

Designando por K el número de brazos se obtiene una division conveniente, si se toma:

$$K = {}^1/_2\left(5 + \frac{R}{b}\right) \qquad (231)$$

relacion que da la série de valores siguientes:

$\frac{R}{b}=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$K=$	3		4		5		6		7		8		9.

Se obtienen además buenas dimensiones para los brazos, determinando su altura h cerca del cubo de la polea con la fórmula:

$$h = 6 + \frac{b}{4} + \frac{1}{10}\frac{R}{K} \qquad (232)$$

y tomando para la altura cerca de la llanta $h' = {}^2/_3\, h$. Estas espresiones se deducen con cierta aproximacion de fórmulas más rigurosas obtenidas admitiendo que la tension al nacimiento del brazo, cerca del cubo, sea de 2^k. Para las poleas de cierta importancia es directamente aplicable la fórmula (232), y el límite de tension es el que acabamos de indicar; pero para las poleas de un peso poco considerable conviene en general forzar lijeramente las dimensiones dadas por el cálculo, á fin de obtener piezas que puedan fácilmente fundirse sin exigir precauciones especiales.

1.er EJEMPLO. *Una polea de* 2764^{mm} *de diámetro y* 228 *de ancho tiene* 6 *brazos, cuya altura á raiz del cubo, es de* 90^{mm}. *Segun la fórmula* (231), *debe el número de brazos ser en realidad* 6 *y su altura* $h = 6 + \frac{228}{4} + \frac{1}{10}\frac{1382}{6} = 86^{mm}$.

2.° EJEMPLO. *Para* $R = 360^{mm}$ *y* $b = 144^{mm}$ *se halla* $K = 4$ *y* $h = 6 + \frac{144}{4} + \frac{1}{10}\frac{360}{4} = 51^{mm}$. *Con* 6 *brazos se tendria simplemente* $h = 48^{mm}$.

Trazado del perfil de los árboles.—a. Brazos rectos, figura 603. Despues de trazar el diámetro EOC, se toma $ab = cC = Cd = {}^2/_3\, h$ y se tiran las líneas $a\,c$ y $b\,d$, que proporcionan á derecha é izquierda de OE los límites del perfil, no faltando despues sino reunir estas líneas, por medio de pequeños arcos, á la corona y al cubo.

b. Brazos curvos, fig. 604. Estando determinado el centro C conforme hemos indicado, se tira la recta ad, luego se toma $aE = Eb = {}^1/_3 h$ y $Cc = Cd = {}^1/_6 h$. Los puntos c y d son entonces los centros de los círculos destinados á formar las curvas límites del perfil, en tanto que cb y da son los radios de estos mismos círculos.

§ 225

Cubo de una polea.

Suele darse al cubo de una polea la forma de un cilindro que se une por arcos ó curvas arqueadas con los nacimientos de los brazos. El espesor de la pared del cubo calado en un árbol de diámetro d, se determina por la espresion:

$$w = 10 + \frac{d}{6} + \frac{R}{50} \qquad (233)$$

En cuanto á la longitud L del cubo, no debe ser inferior á $2{}'5\, w$; y muy amenudo es igual á la anchura

misma de la llanta *b*, como, por ejemplo, en las poleas locas.

1.er EJEMPLO. *La polea del segundo ejemplo del párrafo anterior está calada en un árbol de* 60mm. *Segun la fórmula* (233), *su cubo debe tener como espesor* $w = 10 + \frac{60}{6} + \frac{360}{50} = 27^{mm}$ *y como longitud* 2'5 . 27 = 67mm.

En las poleas locas el diámetro interior del cubo debe ser algo mayor al del árbol sobre el cual gira. Las más de las veces este cubo está guarnecido de bronce ó de metal blanco.

Los clavetes que se emplean para fijar las poleas en sus árboles, pertenecen á la categoria de los clavetes de torsion (véase § 68). Para las poleas ligeras suelen usarse clavetes huecos; para las poleas de dimensiones medianas se practica en el árbol un plano, en tanto que para las poleas de ancho diámetro se meten los clavetes (prisioneros) en una doble ranura practicada á la vez en el árbol y en el cubo. La anchura s y el espesor s_1 del clavete están determinados respectivamente por las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} s &= 4 + \frac{d}{5} \\ s_1 &= 4 + \frac{d}{10} \end{aligned}\right\} \qquad (234)$$

En cuanto á la inclinacion, varia de $^1/_{100}$ á $^1/_{200}$.

2.º EJEMPLO. *Para la polea precedente debe el clavete tener como anchura* $s = 4 + \frac{60}{5} = 16^{mm}$, *y como espesor,* $s_1 = 4 + \frac{60}{10} = 10^{mm}$.

De algunos años á esta parte se usan con frecuencia poleas de dos piezas, que ofrecen la ventaja de poderse aplicar á los árboles más fácilmente que las otras poleas.

En el dispositivo de la figura 606, cada una de las dos mitades del brazo que corresponde á la ranura de separacion debe sensiblemente tener la misma resistencia que uno de los otros brazos.

En el dispositivo de la figura 607 la junta de las dos mitades del cubo tiene lugar fuera de los brazos por medio de 4 pernos. Cuando los brazos son rectos como en esta figura, las ranuras de union de las dos partes de la llanta están en el mismo plano que las de las dos mitades del cubo. Cuando los brazos son curvos no se hace lo mismo, con objeto de que la junta de la llanta tenga lugar fuera de los puntos de arranque de los brazos.

Con las poleas de ese género se suprime amenudo el clavete de fijacion, porque los pernos de ensamble de las dos mitades permiten conseguir una apretadura del cubo sobre el árbol suficiente á impedir que se deslice.

Las dos partes de la polea se funden con una corona de una sola pieza; y despues del torneo y alisamiento se divide esa corona en dos con auxilio de una série de pequeños agujeros yuxtapuestos, correspondientes á la ranura de separacion de los brazos. A fin de facilitar la operacion de la apretadura se da al diámetro de alisamiento del cubo un valor algo menor que el del diámetro del árbol.

§ 226

Tabla de los pesos de las poleas.

Los pesos de las poleas no pueden evidentemente calcularse de antemano sino de una manera aproximada, ya que el alisamiento del cubo depende del árbol y el peso de los brazos ofrece pequeñas variaciones, segun sean rectos ó curvos. Bajo la reserva de esa observacion puede admitirse que en promedio el peso G de una polea deducido de las reglas anteriores se encuentra debidamente representado por la fórmula (235).

EJEMPLO. *Para la polea mayor del* 1.er *ejemplo del* § 219 *se tiene* $R : b = 520 : 120 = 4'33$ *y* $b = 120^{mm} = 1'2^3$. *Segun la columna* 4 (*líneas* 12 *y* 13), *el peso aproximado de esta polea es*: $G = {}^1/_2\,(34'30 + 37'00) \,.\, 1'2^3 = 35'56 \,.\, 1'728 = 61'45^k$. *Siendo el diámetro de la polea pequeña* 260mm *se tiene* $R : b = 260 : 120 = 2'17$ *y por tanto su peso es* (*col.* 2, *líneas* 12 *y* 13): $G = {}^1/_2\,(12'71 + 13'49) \,.\, 1'2^3 = 13'1 \,.\, 1'728 = 22'64^k$.

$$G = \left[4'73 \frac{R}{b} + 0'44 \left(\frac{R}{b}\right)^2 + 0'09 \left(\frac{R}{b}\right)^3 \right] b^3 \qquad (235)$$

En ella R y b están espresadas en decímetros. En virtud de esa fórmula se ha calculado la tabla siguiente:

$\frac{R}{b}$	$\frac{G}{b^3}$	$\frac{R}{b}$	$\frac{G}{b^3}$	$\frac{R}{b}$	$\frac{G}{b^3}$	$\frac{R}{b}$	$\frac{G}{b^3}$
1'0	5'26	2'5	15'98	5'0	45'90	8'25	119'51
1'1	5'86	2'6	16'85	5'2	49'15	8'50	127'26
1'2	6'47	2'7	17'75	5'4	52'54	8'75	135'37
1'3	7'09	2'8	18'67	5'6	56'09	9'00	143'82
1'4	7'73	2'9	19'61	5'8	59,80	9'25	152'63
1'5	8'39	3'0	20'58	6'0	63'66	9'50	161'82
1'6	9'06	3'2	22'59	6'2	67'69	9'75	171'36
1'7	9'75	3'4	24'71	6'4	71'88	10'00	181'30
1'8	10'46	3'6	26'92	6'6	76'26	10'25	191'63
1'9	11'19	3'8	29'27	6'8	80'81	10'50	202'35
2'0	11'94	4'0	31'72	7'0	85'54	11'00	225'06
2'1	12'71	4'2	34'30	7'25	91'72	11'50	249'46
2'2	13'49	4'4	37'00	7'50	98'19	12'00	275'64
2'3	14'30	4'6	39'83	7'75	104'98	12'50	303'65
2'4	15'13	4'8	42'79	8'00	112'08	13'00	333'58

CAPITULO XIX

TRASMISION POR CABLES METÁLICOS

§ 227

Dispositivo de una trasmision por cables metálicos.

El modo de trasmision por cables metálicos se aplicó por vez primera en 1850 por los hermanos *Hinr* (1). El empleo de ese género de cables que permite efectuar á grandes distancias la trasmision de fuerzas considerables, sin pérdidas de monta (2), descansa esencialmente en los mismos principios que la trasmision por correa; y no se diferencia de ella en definitiva sino en que la correa se reemplaza con un cable de alambres, cuya tension es debida á su propio peso.

Las dos poleas principales de una trasmision por cables tienen generalmente sus ejes paralelos, así como un plano medio comun, de suerte que el cable se encuentra guiado por sí solo. Además, los ejes de esas poleas se encuentran comunmente en un mismo plano horizontal, y dan en tal caso lo que se llama una trasmision horizontal por cable. Cierta inclinacion del plano de estos ejes respecto á la superficie del suelo constituye una trasmision oblícua. Las trasmisiones verticales por cables son de uso muy poco generalizado. Cuando la polea guiada debe trasmitir á otro árbol motor la fuerza que ella recibe, llámase compuesta la trasmision. En la simple por cable las dos poleas tienen en general el mismo diámetro.

Para evitar que el cable colocado á suficiente altura toque el suelo cuando la separacion de las poleas es considerable, conviene sostener ese cable con galetes que pueden utilizarse como rodillos tensores en los casos en que tal separacion ó distancia es muy corta. La inclinacion más ó ménos considerable que puede darse á dichos galetes permite guiar debidamente el cable cuando los ejes de las poleas se cortan ó cruzan; si bien se encuentran muy pocos ejemplos de la aplicacion de la trasmision por cables ó ejes no paralelos. Cuando se trata de producir una desviacion bastante pronunciada del cable, se pueden interponer entre dos

(1) En esta primera aplicacion los ejes de las poleas presentaban una separacion de 85 metros; y el trabajo trasmitido era de 42 caballos, con una velocidad de rotacion de 60 vueltas por minuto.

(2) De los esperimentos practicados por la Sociedad industrial de Mulhouse resulta que las pérdidas de trabajo en las trasmisiones por cables metálicos bien instaladas son muy pequeñas, y dependen principalmente de los frotes de los diversos ejes en sus gorrones. Las pérdidas de una trasmision dada parecen poderse considerar como independientes de la fuerza trasmitida y como proporcionales á las velocidades.

rodillos verticales otro horizontal; pero es preferible en tal caso recurrir al empleo de una trasmision compuesta con ruedas de ángulos.

El límite inferior para la separacion de las poleas en la trasmision por cable puede evaluarse de 15 á 20 metros.

Las distancias de los rodillos soportes se determinan segun el grado de flexibilidad del cable y su posicion sobre el suelo.

§ 228

Tensiones de un cable de trasmision.

Los cables de trasmision tales como suelen emplearse, se componen de 36 alambres divididos en seis ramales, cada uno de los cuales comprende 6 alambres arrollados en derredor de una ánima de cáñamo; y á su vez los seis ramales están dispuestos en redor de una ánima igualmente de cáñamo, pero de un diámetro relativamente considerable (fig. 608). En el caso de querer reforzar el cable se puede, aunque parezca ofrecer inconvenientes, reemplazar esa ánima central con un verdadero ramal de alambres, idéntico á los otros seis. Se ha intentado á más sustituir con un alambre metálico el ánima de cáñamo de los diversos ramales, á fin de evitar el aflojamiento del cable, que puede producirse á consecuencia del desgaste del cáñamo. Pero no hay todavia nada fijo tocante á este dispositivo, que tiene la desventaja de hacer el cable ménos elástico. Lo que hay más cierto es que importa hacer las ánimas con cáñamo de primera calidad, y no utilizar en cambio, como solia hacerse al principio, las clases inferiores de esa materia. Los diversos alambres están apretados unos á otros todo lo posible, de suerte que el diámetro del cable terminado no sea en definitiva más que unas ocho veces el de un alambre.

Para los cables de un número de alambres superior al que acabamos de indicar, se conservan generalmente los ramales de seis alambres con ánima de cáñamo; y estos ramales están á su vez arrollados entorno de una ánima central tambien de cáñamo.

Aunque nada implica la necesidad de conservar el número seis para el número de ramales, este es el número que se encuentra casi en todos los cables. Para los diversos tipos empleados el número total de alambres es de 36, 48, 54, 60, 66, 72, etc.

La figura 609 representa el corte de un cable de 60 alambres. En estos diferentes cables el diámetro esterior d con respecto al diámetro δ del alambre, ofrece los siguientes valores:

para el número de alambres:

$i=$	36	48	54	60	66	72
$\frac{d}{\delta}=$	8'00	10'25	11'33	12'80	13'25	14'20

Para obtener las tensiones T y t del brazo conductor y del brazo conducido (fig. 610) conviene emplear las fórmulas (215), en las cuales se debe hacer:

$$u=\frac{f_1 D}{2R},$$

designando f_1 el coeficiente de frote de los gorrones, D el diámetro de esos gorrones y R el radio de las poleas. En esta espresion de u no hemos hecho entrar la rigidez del cable, que para las relaciones adoptadas vemos que tiene un valor muy escaso que puede despreciarse enteramente. En promedio $\frac{D}{R}=\frac{1}{16}$; y si aquí se toma tambien $f_1=0'1$, la fórmula anterior da:

$$u=0'003.$$

Si en las relaciones (215) se toma $f=0'24$ y $\alpha=\pi$, se obtiene para las tensiones más débiles que pueden adoptarse:

$$\frac{t}{P}=0'97\ \frac{T}{P}=2{,}02\ \frac{T+t}{P}=2{,}99,\ \frac{t}{T}=0'48 \quad (236).$$

ó tomándola en números redondos:

$$\frac{t}{P}=1,\ \frac{T}{P}=2,\ \frac{T+t}{P}=3,\ \frac{t}{T}=0'5 \qquad (237).$$

Observacion. La pérdida de velocidad debida al deslizamiento que hemos señalado en el § 217, no alcanza en promedio para una trasmision simple de cables á $^1/_{50}$ por $^0/_0$; siendo por tanto completamente despreciable. Este resultado depende de la magnitud del coeficiente de elasticidad E del alambre.

§ 229

Tablas relativas á los diámetros de los alambres de cables de trasmision.

En una trasmision metálica por cable que comprenda i hilos, á la tension T en el brazo conductor, corresponde para los alambres un esfuerzo de alargamiento S_1. En un cable de trasmision deben distinguirse dos esfuerzos diferentes: el uno, S, corresponde á la tension necesaria para producir el movimiento; y el otro, s, á la tension que determina el arrollo del cable por las poleas.

Al máximo de tension $T=2P$ en el brazo conductor corresponde el esfuerzo máximo de estension S_1

(con respecto al milímetro cuadrado de seccion), de suerte que se tiene: $^1/_4\pi\delta^2 i S_1 = T = 2P$, de donde se saca para δ el valor que da la relacion (238).

Para el segundo esfuerzo s, si se imagina primero un solo alambre de diámetro δ arrollado por una polea de radio R, la fibra más distante del eje sufre con respecto á la fibra neutra, un alargamiento relativo $\frac{\delta}{2R}$, y el esfuerzo máximo s que corresponde á la estension de esa fibra, tiene por espresion $s = E\frac{\delta}{2R}$.

Si entonces se pasa á un cable formado de 36 alambres, por ejemplo, pudiendo estos alambres deslizarse los unos con respecto á los otros, puede admitirse que la flexion es para cada uno de ellos sensiblemente la misma que si estuviesen aislados. Para el alambre en contacto con la polea, el alargamiento relativo es tambien $\frac{\delta}{2R}$ y para el alambre más distante, $\frac{\delta}{2(R+8\delta)}$.

Esta espresion puede reemplazarse con la primera con la condicion de que 8δ ó el diámetro del cable pueda despreciarse con respecto á R; lo cual sucede en realidad en todas las aplicaciones en que $8\delta : R$ es siempre inferior á $^1/_{70}$. Y así puede admitirse que el esfuerzo s es el mismo para todos los alambres y tiene por espresion $s = E\frac{\delta}{2R}$.

Este esfuerzo se combina con S_1 y la tension más elevada que el cable ha de soportar por mílimetro cuadrado, es $s + S_1 = E\frac{\delta}{2R} + \frac{8P}{\pi\delta^2 i}$.

Dividiendo miembro por miembro las ecuaciones que dan S_1 y s, se obtiene la relacion (241).

La relacion (243) no es otra cosa que la espresion de s en la que se ha reemplazado E por 20000.

En este punto el autor admite para la suma $s + S_1$ la cifra de 18^k, que se aproxima mucho á la que da el exámen de varias trasmisiones que marchan bien. Sin embargo, en los estudios de proyectos parece más conveniente no pasar de 15^k para dicha suma. Partiendo de ahí se deben tomar para el diámetro δ de estos alambres los valores siguientes:

1.° Para una resistencia P que obre en la circunferencia de la polea del cable:

$$\delta = 1{'}60\sqrt{\frac{1}{i}}\sqrt{\frac{P}{S_1}} \qquad (238).$$

2.° Por una fuerza N de caballos que deba trasmitirse con una velocidad v (en metros) á la circunferencia de la polea:

$$\delta = 13{'}86\sqrt{\frac{1}{i}}\sqrt{\frac{N}{S_1 v}} \qquad (239)$$

fórmula en la que v no debe pasar de 30 ó 32 metros.

3.° Para una fuerza de N caballos que ha de trasmitirse con una velocidad de rotacion de n vueltas por minuto:

$$\delta = 1349\sqrt{\frac{1}{i}}\sqrt{\frac{N}{S_1 R n}} \qquad (240)$$

4.° Designando por s la tension que en los alambres produce el arrollo del cable en derredor de las poleas y por (PR) el momento estático de rotacion de la polea guiada ó conducida:

$$\delta = 0{'}0634\sqrt[3]{\frac{1}{i}}\sqrt[3]{\frac{s}{S_1}(PR)} \qquad (241)$$

5.° En fin, cuando en vez del momento PR se dan N y n:

$$\delta = 5{'}67\sqrt[3]{\frac{1}{i}}\sqrt[3]{\frac{s\,N}{S_1 n}} \qquad (242)$$

Importa además que la relacion del radio R de las poleas al diámetro de los alambres nunca sea inferior al límite:

$$\frac{R}{\delta} = \frac{10000}{s}. \qquad (243)$$

Esta relacion junta con la condicion $s + S_1 = 18^k$ ha servido para calcular la siguiente tabla:

S_1	s	$\frac{R}{\delta}$	S_1	s	$\frac{R}{\delta}$
0'5	17'5	571	9	9	1111
1	17	588	10	8	1250
2	16	625	11	7	1429
3	15	667	12	6	1667
4	14	714	13	5	2000
5	13	769	14	4	2500
6	12	833	15	3	3333
7	11	909	16	2	5000
8	10	1000	17	1	10000

Para un valor constante de $S_1 + s$ el mínimum del radio de la polea está indicado por esa tabla, haciendo $\frac{s}{S_1} = 2$ (1). Ese mínimum corresponde, por consiguiente,

(1) Se deduce con efecto de las fórmulas (242) y (243) $R = K\sqrt[3]{\frac{1}{s^2 S_1}}$; la suma $s + S_1$ siendo constante, el máximo del producto $s^2 S_1$ tiene efecto para $s = S_1$.

á $S_1=6$, $s=12$, $\frac{R}{\delta}=833$; y para los valores próximos á estos, el valor numérico de R difiere muy poco de su mínimum. Por otra parte, sin inconvenientes puede tomarse R superior á ese valor, cuando se quieren utilizar, por ejemplo, modelos existentes.

§ 230

Tablas relativas á los diámetros de los alambres de cables de trasmision.

De las dos tablas siguientes se ha calculado la primera en virtud de las fórmulas (238) á (240), al paso que para la segunda se han utilizado las (241) y (242). Al objeto de evitar que en la primera tabla hubiese números demasiado pequeños, el valor $\frac{N}{S_1 Rn}$, que entra en la fórmula (240), se ha reemplazado por 1000 $\frac{N}{S_1 Rn}$.

DIÁMETRO DEL ALAMBRE δ PARA UN NÚMERO DE ALAMBRES					$\frac{P}{S_1}$	$\frac{N}{S_1 v}$	$\frac{1000\,N}{S_1 Rn}$
$i=36$	$i=42$	$i=48$	$i=60$	$i=72$			
0'5	0'46	0'43	0'39	0'35	3'52	0'047	0'005
0'6	0'55	0'52	0'46	0'42	5'06	0'068	0'007
0'7	0'65	0'61	0'54	0'49	6'89	0'092	0'010
0'8	0'74	0'69	0'62	0'57	9'00	0'121	0'013
0'9	0'83	0'78	0'70	0'64	11'39	0'153	0'016
1'0	0'92	0'87	0'77	0'71	14'06	0'188	0'020
1'2	1'11	1'04	0'93	0'85	20'25	0'279	0'028
1'4	1'29	1'21	1'08	0'99	27'56	0'369	0'039
1'6	1'48	1'39	1'24	1'13	36'00	0'482	0'051
1'8	1'66	1'56	1'39	1'27	45'56	0'610	0'064
2'0	1'85	1'73	1'55	1'41	56'25	0'753	0'079
2'2	2'03	1'91	1'70	1'56	68'06	0'912	0'096
2'4	2'22	2'08	1'86	1'70	81'00	1'085	0'114
2'6	2'40	2'25	2'01	1'84	95'06	1'273	0'134
2'8	2'59	2'42	2'17	1'98	110'25	1'477	0'155
3'0	2'77	2'60	2'32	2'12	126'56	1'700	0'178

Rara vez se usan en los cables de trasmision alambres de diámetro inferior á $0'5^{mm}$ ó notoriamente superior á 2^{mm}. En la tabla precedente, asi como en la que sigue, todas las columnas desde la segunda hasta la quinta, dan los diámetros de los alambres espresados en céntimos de milímetro; lo cual dimana simplemente de haber calculado de un modo directo los números de esas columnas por medio de los de la primera, y es inútil observar que en la práctica han de ser redondos. La calidad del alambre empleado en los cables de trasmision tiene grande importancia en el concepto de la duracion, y por lo tanto conviene escojerle con el mayor cuidado. El mejor hierro que puede emplearse en estos alambres, es el de Suecia, que tiene á la vez tenacidad especial y estraordinaria resistencia. Los fabricantes de cables deben sobre todo esmerarse en no emplear sino alambres muy largos, á fin de reducir en lo posible el número de junturas. La esperiencia ha enseñado que para los cables de trasmision el empleo del alambre de acero era ménos ventajoso que el de hierro (1).

(1) Un cable de buena calidad y bien instalado puede durar unos 5 años si está cuidado, lo cual se logra simplemente untándolo de aceite si la guarnicion de la polea es de cuero. Mas cuando es de gutapercha, conviene recurrir á un engrase formado con la mezcla de 4 partes de sebo, 2 de aceite y 1 de colofonia.

DIAMETRO DEL ALAMBRE δ PARA UN NÚMERO DE ALAMBRES					$\frac{s}{S_1}(PR)$	$\frac{s}{S_1}\frac{N}{n}$
$i=36$	$i=42$	$i=48$	$i=60$	$i=72$		
0'5	0'47	0'45	0'42	0'40	17'658	0'025
0'6	0'57	0'55	0'51	0'48	30'513	0'043
0'7	0'66	0'64	0'59	0'56	48'454	0'068
0'8	0'76	0'73	0'67	0'63	72'328	0'101
0'9	0'85	0'82	0'76	0'71	102'982	0'144
1'0	0'95	0'91	0'84	0'79	141'265	0'197
1'2	1'14	1'09	1'01	0'95	244'106	0'341
1'4	1'33	1'27	1'18	1'11	387'631	0'542
1'6	1'52	1'45	1'35	1'27	578'621	0'894
1'8	1'71	1'64	1'52	1'43	823'857	1'152
2'0	1'91	1'82	1'69	1'59	1130'120	1'580
2'2	2'09	2'00	1'86	1'75	1504'190	2'103
2'4	2'28	2'18	2'02	1'90	1952'847	2'730
2'6	2'47	2'36	2'19	2'06	2482'874	3'471
2'8	2'66	2'54	2'36	2'22	3101'049	4'335
3'0	2'85	2'73	2'53	2'38	3814'155	5'332

OBSERVACION. En las fórmulas (238) á (240) el radio R de las poleas se supone conocido: los valores que señalan para δ no son admisibles sino cuando la relacion $R:\delta$ da para la tension s un valor que, añadido á S_1, no pase de 18^k. En el caso de encontrarse la suma $s+S_1$ superior á ese límite, conviene rehacer el cálculo admitiendo para R un valor más grande (véase § 232). Para poderse servir de las tablas precedentes y de las fórmulas que de ellas se derivan, debe comenzarse por fijar el valor de la tension S_1. Esa determinacion puede efectuarse muy sencillamente refiriéndose á las consideraciones del párrafo siguiente, y en los ejemplos que vamos á dar supondremos practicada esa operacion preliminar.

1.er EJEMPLO. *Se pretende trasmitir por medio de un cable arrollado por poleas de* 3^m *una fuerza de* 250^k *que obre tangencialmente á una de esas poleas. ¿Qué diámetro ha de darse á los alambres de ese cable suponiendo que son en número de* 36? *Si hacemos* $S_1=7^k$, *tenemos* $P:S_1=250:7=35'71$; *lo que segun la primera tabla de este* § (*col.* 6, *línea* 9) *corresponde á un diámetro de* $1'6^{mm}$. *De donde se deduce:* $R:\delta=1500:1'6=937$; *y como segun la tabla calculada en virtud de la fórmula* (243), *para* $S_1=7$ *y* $s=11$, *debemos tener* $R:\delta\geq 909$, *el valor precedente de* $R:\delta$ *es admisible. Si hubiésemos tomado* $R=1200^{mm}$ *solamente, llegaríamos á* $R:\delta=1200:1'6=750$, *valor inferior al límite precedente y deberíamos por lo tanto aumentar el radio R.*

2.° EJEMPLO. *Trasmitir por cable un trabajo de* 300 *caballos. Para no tener que emplear un cable de muy gran diámetro, supongamos que se le da una velocidad de* $v=25^m$. *Tomemos además* $S_1=8^k$ *y por ende* $s=10^k$. *Entonces tendremos* $N:S_1v=300:8\,.\,25=1'5$. *En la primera tabla el número que más se le aproxima es* 1'477 (*col.* 7, *línea* 15), *que corresponde á un diámetro de* $2'8^{mm}$ *para un cable de* 36 *alambres, y de* $2'17^{mm}$ *ó sea* $2'2^{mm}$ *para* 60 *alambres. Entonces, segun el párrafo* 229, *para* $s=10^k$ *debe tomarse* $R=1000.2'2=2200$ *milímetros. La relacion* $v=\frac{2R\pi\,.\,n}{60\,.\,1000}$ *da además:* $n=\frac{60\,.\,1000\,.\,25}{2\,.\,2200\,.\,\pi}=108$.

3.er EJEMPLO. *¿Cual es el trabajo en caballos que puede trasmitir un cable de* 36 *alambres de* 2^{mm} *de diámetro, arrollándose por poleas de* 3^m, *cuyo número de vueltas es* 90 *por minuto? En este caso se tiene* $R:\delta=1500:2=750$, *lo que, segun la fórmula* (243), *da:* $s=1000:750=13'33^k$ *y por lo tanto* $S_1=4'67^k$. *Para* $\delta=2^{mm}$, *la primera tabla suministra* $\frac{1000}{S_1R}\frac{N}{n}=0'079$; *de donde se deduce:* $N=\frac{0'079\,.\,n\,.\,S_1\,.\,R}{1000}=\frac{0'079\,.\,90\,.\,4'67.1500}{1000}=49'8^{cab}$. *Con una polea de* $2'5^m$ *de diámetro se tendría* $R:\delta=1250:2=625$ *ó* $s=16^k$ *y* $S_1=2^k$. *Por consiguiente:* $N=0'079\,.\,90\,.\,2\,.\,1250:1000=17'78^{cab}$.

4.° EJEMPLO. *En el árbol conducido de una trasmision por cable la resistencia que ha de vencerse y es de* 50^k, *actua de una manera contínua con un brazo de palanca de* 1000^{mm}; *¿qué diámetro debe darse al alambre para un cable de* 36, *suponiendo que se da á las poleas de trasmision el menor radio admisible? Para llenar esta última condicion se debe tomar por lo que hemos visto* (§ 229): $s=12^k$ *y* $S_1=6^k$, *lo cual da* $PR\,.\,s:S_1=2\,.\,50\,.\,1000=100000$. *A ese valor corresponde en la segunda tabla* (*col.* 6, *línea* 5) $\delta=0'9^{mm}$. *Dedúcese enseguida de la tabla del* § 229: $R=833\,.\,0'9=750^{mm}$.

5.° EJEMPLO. *Un cable de* 42 *alambres ha de tras-*

mitir un trabajo de 30 *caballos con una velocidad de* 100 *vueltas por minuto. Si suponemos* $S_1 = 6^k$, *tenemos* $s = 12^k$ *y* $\frac{s}{S_1}\frac{N}{n} = 0'6$. *Estando ese número comprendido entre los de las líneas* 8 *y* 9 *de la* 7.ª *columna, la segunda tabla da para el diámetro del alambre* $\delta = 1'4^{mm}$ *próximamente. Segun la fórmula* (243) *entonces se tiene para el radio de las poleas* $R = 1'4 \cdot 833 = 1166^{mm}$, *y por lo tanto puede tomarse* $R = 1200^{mm}$ *en números redondos.*

§ 231

Flechas de los dos brazos de un cable en una trasmision horizontal. Tabla relativa á estas flechas.

Para que en ambos brazos de un cable de trasmision tengan las tensiones T y t valores convenientes (ni demasiado pequeños porque el cable resbalaria constantemente, ni sobrado grandes pues habria mucho aumento de frotes) la flecha que se da á cada uno de los dos brazos en estado de reposo, debe tener magnitud determinada (1); y es igualmente importante conocer las flechas que se producen durante el movimiento, á fin de poder evaluar el espacio que debe dejarse disponible para el paso de la trasmision. La flecha de un cable depende de la tension de los alambres.

Designemos por

A la separacion de las poleas de una trasmision horizontal evaluada en metros,

h la flecha del cable evaluada igualmente en metros (h_1 para el brazo conductor, h_2 para el brazo llevado, y h_0 en estado de reposo),

S la tension por milímetro cuadrado en los alambres (S_1 para el brazo conductor, S_2 para el brazo conducido, y S_0 en el estado de reposo.)

Para un cable metálico de un número cualquiera de alambres se tienen las relaciones:

$$\frac{h}{A} = 0'3535 \left(160\frac{S}{A} - \sqrt{\left(160\frac{S}{A}\right)^2 - 1} \right) \quad (244)$$

y

$$\frac{S}{A} = 0{,}00877 \left(\frac{h}{A} + \frac{A}{8h} \right) \quad (245)$$

Por medio de esas fórmulas se ha calculado la tabla siguiente. Como primera aproximacion puede simplemente sentarse:

$$\frac{h}{A} = \frac{1}{912}\frac{A}{S} \quad (246)$$

Para poder servirse de la tabla debe comenzarse por formar por medio de cantidades dadas el cociente $\frac{A}{S}$ de la separacion de las poleas y de la tension desarrollada en los alambres: luego se busca en la tabla el número que más se le aproxima; dedúcese entonces el valor de $\frac{h}{A}$, que sirve á su vez para calcular la altura de la flecha h. La tension S_0 del cable en estado de reposo no es el término medio aritmético de S_1 y S_2, y se puede por un medio, si bien bastante complicado, determinarla segun la longitud de los dos brazos. El valor que se necesita es la flecha h_0 de los dos brazos en reposo y se tiene aproximadamente:

$$h_0 = \sqrt{\frac{h_2^2 + h_1^2}{2}} = 0'67\, h_2 + 0'28\, h_1 \quad (247)$$

---

(1) El valor adoptado para la flecha en reposo ejerce una gran influencia sobre la regularidad de la trasmision del movimiento. *Leauté* ha demostrado (Memorias de la Academia de Ciencias de Paris, 8 de Marzo de 1880) que se podia admitir como coeficiente de regularidad en las trasmisiones telodinámicas la espresion

$$\frac{3}{16}\phi A^3 \left(\frac{1}{h_1^3} + \frac{1}{h_2^3} \right)$$

en la que ϕ es el peso del cable por metro lineal:

La discusion de esa espresion prueba que en igualdad de circunstancias la flecha relativa $\frac{h_0}{A}$ (en estado de reposo) debe tomarse tanto mayor cuanto más pequeña es la distancia de las poleas estremas, y debe variar sensiblemente en razon inversa de la raiz cuadrada de esta distancia. Por otra parte la flecha relativa $\frac{h_0}{A}$ que puede alcanzar $\frac{1}{30}$ para las pequeñas distancias de 20 á 30 metros, no debe, á ménos, de circunstancias particulares, bajar de $\frac{1}{40}$ en los cables expuestos al sol y á la lluvia. Con cables más tendidos las variaciones accidentales de la longitud debidas á los cambios de temperatura y humedad producen modificaciones harto considerables en las flechas y pueden dar orígen á esfuerzos peligrosos para el mecanismo.

TABLA RELATIVA Á LAS FLECHAS DE LOS CABLES.

$\frac{h}{A}$	$\frac{A}{S}$	$\frac{h}{A}$	$\frac{A}{S}$	$\frac{h}{A}$	$\frac{A}{S}$	$\frac{h}{A}$	$\frac{A}{S}$
o'003	2'74	o'033	29'84	o'063	55'69	o'093	79'33
o'004	3'65	o'034	30'72	o'064	56'52	o'094	80'07
o'005	4'56	o'035	31'61	o,065	57'34	o'095	80'81
o'006	5'47	o'036	32'49	o'066	58'17	o'096	81'54
o'007	6'38	o'037	33'38	o'067	58'99	o'097	82'27
o'008	7'29	o'038	34'26	o'068	59'80	o'098	83'00
o'009	8'20	o'039	35'14	o'069	60'62	o'099	83'72
o'010	9'11	o'040	36'02	o'070	61'43	o'100	84'44
o'011	10'02	o'041	36'91	o'071	62'24	o'101	85'16
o'012	10'93	o'042	37'79	o'072	63'05	o'102	85'88
o'013	11'86	o'043	38'67	o'073	63'85	o'105	88'05
o'014	12'75	o'044	39'51	o'074	64'66	o'110	91'51
o'015	13'66	o'045	40'39	o'075	65'45	o'115	94'85
o'016	14'56	o'046	41'25	o'076	66'25	o'120	98'13
o'017	15'47	o'047	42'12	o'077	67'04	o'125	101'36
o'018	16'37	o'048	42'98	o'078	67'83	o'130	104'42
o'019	17'28	o'049	43'85	o'079	68'62	o'135	107'47
o'020	18'18	o'050	44'71	o'080	69'41	o'140	110'38
o'021	19'08	o'051	45'56	o'081	70'19	o'145	113'23
o'022	19'99	o'052	46'42	o'082	70'97	o'150	116'00
o'023	20'89	o'053	47'27	o'083	71'75	o'155	118'65
o'024	21'77	o'054	48'13	o'084	72'52	o'160	121'17
o'025	22'69	o'055	48'97	o'085	73'28	o'165	123'53
o'026	23'59	o'056	49'82	o'086	74'05	o'170	126'00
o'027	24'48	o'057	50'67	o'087	74'81	o'175	128'27
o'028	25'37	o'058	51'53	o'088	75'57	o'180	130'37
o'029	26'27	o'059	52'35	o'089	76'33	o'185	132'43
o'030	27'16	o'060	53'19	o'090	77'08	o'190	134'46
o'031	28'06	o'061	54'02	o'091	77'84	o'195	136'41
o'032	28'95	o'062	54'86	o'092	78'58	o'200	138'21

La espresion (247) da para h_0 un valor que es un poco demasiado fuerte, pero que se aproxima tanto más al valor verdadero cuanto menores son las tensiones S_1 y S_2. El error se disminuye aun más reemplazando los valores exactos de h_1 y h_2, con los que da la fórmula (246)

El brazo conductor no ocupa forzosamente la posicion más elevada, como se ha supuesto en la fig. 610; y puede tambien colocarse en la parte inferior como en la fig. 611, en la que el espacio exigido por la flecha del cable se encuentra notablemente reducido con respecto al de la fig. 610. Los dos brazos no se cortan mientras se tiene $h_2 - h_1 < 2R$. En las instalaciones suele ponerse en el punto más bajo de la curva del cable una escala graduada que permite observar á cada instante el estado de tension del cable; y la graduacion de esta escala puede hacerse de manera que dé indirectamente la tension S por simple lectura.

1.er Ejemplo. *En el* 5.° *ejem. del* § 230, *la separacion A de las poleas se supone de* 110m *y se toma* $S_1 = 6^k$. *¿Cuales son las flechas del cable?* (*a*). *Para el conductor la proporcion* $\frac{A}{S} = \frac{110}{6} = 18'33$ *corresponde muy aproximadamente en la tabla* (*col.* 2, *línea* 18) *al valor* $\frac{h}{A} = o'02$. *De lo cual se deduce* $h_1 = 110 \cdot o'02 = 2'20^m$ (*b*). *Para el brazo conducido se tiene, segun la fórmula* (237): $S = 6 : 2 = 3$, *y por consiguiente* $A : S = 110 : 3 = 36'67$; *para cuya proporcion la tabla da* (*columna* 4, *línea* 9) $h : A = o'041$, *de donde se deduce* $h_2 = 110 \cdot o'041 = 4'51^m$ (*c*). *En fin, segun la fórmula* (247), *la flecha del cable en reposo es* $h_0 = o'67 \cdot 4'51 + o'28 \cdot 2'20 = 3'64^m$. *Entonces se tiene* $h_2 = h_1 = 4'51^m - 2'20^m - 2'31^m$ *y* $2R = 2 \cdot 1'20 = 2'40^m$, *siendo este último valor superior al precedente, de lo cual resulta que en caso necesario se puede utilizar el dispositivo de la fig.* 611 (*véase el* 1.er *ejem. del* § 232).

2.° Ejemplo. *En el* 3.er *ejem. del* § 230 *la altura*

disponible encima de la línea de los centros de las poleas es de 3^m. *¿Qué separacion debe adoptarse para esas poleas? Suponiendo aplicable el dispositivo de la fig.* 611, *el mayor valor admisible para tal separacion se deduce de la magnitud de la flecha del cable en reposo. Haciendo uso de la fórmula aproximativa* (246) *y recordando que* S_1 *es igual á* 4'67, *tendremos primero* $h_1 = \frac{A^2}{912 \cdot 4'67}$, *y luego* $h_2 = 2\,h_1$; *dando entonces la fórmula* (247): $h_0 = 3^m = \frac{(2 \cdot 0'67 + 0'28)\,A^2}{912 \cdot 4'67}$, *de donde se deduce* $A = \sqrt{\frac{3 \cdot 912 \cdot 4'67}{1'62}} = \sqrt{7887'11} = 88'8^m$. *La separacion de las poleas debe, pues, ser de* 88 *ó de* 89 *metros. Otra consecuencia puede sacarse de este cálculo y es que la disposicion de la fig.* 611 *puede adoptarse en este caso conforme habíamos supuesto antes.*

§ 232

Trasmision por cable de tension reforzada.

Para una gran separacion de las poleas de trasmision pueden los valores de las flechas dadas por los cálculos anteriores, ser bastante considerables para que sea indispensable dar á los macizos de los soportes una gran elevacion, ó bien practicar en el suelo un foso de bastante profundidad, cuando se quiere evitar que el cable descanse en rodillos intermedios (véase el § 238). En gran número de casos puede obtenerse el mismo resultado con un procedimiento mucho más sencillo, que consiste en dar al cable una tension más considerable que la estrictamente necesaria para impedir el deslizamiento, procurando á la vez tomar un diámetro suficiente de cable para tener en cuenta dicho esceso de tension. Este artificio tan sencillo puede emplearse tanto más fácilmente cuanto menores sean las fuerzas que han de trasmitirse y menor sea el diámetro del cable. Basta además examinar con alguna atencion las reglas que vamos á dar para conocer que el empleo racional de este procedimiento no presenta en realidad dificultad alguna.

Una trasmision por cable instalada en estas condiciones constituye con respecto á la trasmision ordinaria por cable, lo que podemos llamar una trasmision detension reforzada (1) y se puede distinguir de la primera afectando con el signo s las fuerzas y las dimensiones que á ella se refieren (T_s, t_s, S_s, δ_s, en vez de T, t, S, δ). Esto sentado, la tension T en el modo ordinario de trasmision debe simplemente no ser inferior á $2\,P$; y en el nuevo procedimiento la tension debe aumentarse en cierta proporcion que designaremos por m, y tendremos:

$$T_s = m\,T,\quad t_s = (2\,m - 1)\,t,\quad \frac{t_s}{T_s} = \frac{2\,m-1}{2\,m} \qquad (248)$$

La tension S_1 en los alambres del brazo conductor no debe cambiar; pero en los alambres del brazo conducido la tension S_{2s} no es ya igual á $\frac{S_1}{2}$ y se debe espresar:

$$S_{2s} = S_1\,\frac{2\,m-1}{2\,m} \qquad (249)$$

El diámetro δ_s del alambre se deduce del diámetro δ dado en una de las fórmulas (238) á (240), por medio de la relacion:

$$\delta_s = \delta\,\sqrt{m} \qquad (250)$$

En cambio si δ se ha calculado por una de las fórmulas (241) ó (242), se debe tomar:

$$\delta_s = \delta\,\sqrt[3]{m} \qquad (251)$$

(1) Los cables de tension reforzada dan mayor regularidad de trasmision del movimiento, y en tal concepto debe aun recomendarse su empleo para las grandes separaciones de poleas.

$m = \frac{T_s}{T}$	$\frac{T_s}{P}$	$\frac{t_s}{t} = \frac{t_s}{P} = \frac{S_{2s}}{S_2}$	$\frac{S_{2s}}{S_1} = \frac{t_s}{T_s}$	$\frac{\delta_s}{\delta} = \sqrt{m}$	$\frac{\delta_s}{\delta} = \sqrt[3]{m}$
1'2	2'4	1'4	0'58	1'10	1'06
1'4	2'8	1'8	0'64	1'18	1'12
1'6	3'2	2'2	0'69	1'26	1'17
1'8	3'6	2'6	0'72	1'34	1'22
2'0	4'0	3'0	0'75	1'41	1'26
2'2	4'4	3'4	0'77	1'48	1'30
2'4	4'8	3'8	0'79	1'55	1'34
2'6	5'2	4'2	0'81	1'61	1'38
2'8	5'6	4'6	0'82	1'67	1'41
3'0	6'0	5'0	0'83	1'73	1'44
3'2	6'4	5'4	0'84	1'79	1'47
3'4	6'8	5'8	0'85	1'84	1'50
3'6	7'2	6'2	0'86	1'90	1'53
3'8	7'6	6'6	0'87	1'95	1'56
4'0	8'0	7'0	0'88	2'00	1'59
4'2	8'4	7'4	0'88	2'05	1'62
4'4	8'8	7'8	0'89	2'10	1'64
4'6	9'2	8'2	0'89	2'14	1'66
4'8	9'6	8'6	0'90	2'19	1'69
5'0	10'0	9'0	0'90	2'24	1'71
5'5	11'0	10'0	0'91	2'36	1'75
6'0	12'0	11'0	0'92	2'45	1'82
6'5	13'0	12'0	0'92	2'55	1'87
7'0	14'0	13'0	0'93	2'65	1'91
7'5	15'0	14'0	0'93	2'74	1'96
8'0	16'0	15'0	0'94	2'83	2'00

Por medio de las relaciones anteriores se han calculado los números de la tabla que acabamos de ver. Cumple notar que en los cables de tension reforzada los alambres no están sometidos á esfuerzos más considerables que en los cables ordinarios, porque su diámetro está determinado teniendo en cuenta el esceso de tension. En otros términos, el cable es más pesado que en el caso normal, y en razon de la mayor seccion que presenta debe estar mucho más tendido, lo cual da por resultado reducir en cierta proporcion la altura de la flecha del brazo conducido.

1.cr EJEMPLO. *El brazo conducido en el 1.er ejemplo del* § 231, *tenia una flecha igual* h_2 *igual á* $4'5^m$, *y el diámetro del alambre* δ *era de* $1'4^{mm}$. *Esa dimension debe aumentarse si se quiere obtener una disminucion del valor de* h_2 *haciendo uso de un cable de tension reforzada. Si se toma* $m=2$, *la tabla da (col.* 4, *línea* 5): $S_{2s} = 0'75\, S_1 = 0'75 \cdot 6 = 4'5$ *y por consiguiente* $\frac{A}{S_{2s}} = \frac{110}{4'5} = 24'44$; *á cuyo número corresponde en la tabla del* § 231 $h_2 = 0'027 \cdot 110 = 2'97^m$. *Conservando la tension de flexion s el valor que primeramente tenia, el cociente* $\frac{s}{S_1}\frac{N}{n}$ *no cambia, y por lo tanto* δ *puede determinarse por la fórmula* (242). *La tabla anterior da entonces (col.* 6, *línea* 5): $\delta_s = 1'26\, \delta = 1'26 \cdot 1'4 = 1'76$ *milímetros ó sea* $1'8^{mm}$.

Cuando en el cálculo del diámetro δ se obtiene para un cable ordinario de 36 alambres un valor muy escaso, puede el mismo cable ser de diámetro tan pequeño, que su ejecucion origine gastos casi tan considerables como la de un cable de mayor diámetro. No podria en tales casos recomendarse demasiado el empleo de una trasmision por cable de tension reforzada, la cual ofrece la ventaja de reducir la flecha del brazo guiado ó conducido, sin aumentar los gastos de una manera considerable. Partiendo de ahí puede sentarse como regla el no emplear jamás alambre de un diámetro inferior á 1^{mm}, de suerte que el mínimum de diámetro de los cables sea de 8^{mm} (1). La observancia de este límite daria por resultado simplificar en cierta medida la ejecucion de trasmision por cables.

(1) La observancia de esta regla reportaria verdaderas ventajas. Sin embargo, para trasmisiones de escasa importancia suelen emplearse cables cuyo diámetro no es más que de 6 milímetros ó hasta de 4.

2.° EJEMPLO. *Para una trasmision por cable se da: $N=5'5$ caballos, $n=100$, $A=180^m$. Si ante todo se supone $S_1=10^k$, $s=8^k$, se tiene:* $\frac{s}{S_1}\frac{N}{n}=\frac{8}{10}\frac{5'5}{100}=0'044$, *lo cual da para $i=36$ (2.ª tabla, § 230), y para el diámetro del alambre $\delta=0'6^{mm}$. Además se tiene:* $\frac{A}{S_1}=\frac{180}{10}=18$, $\frac{A}{S_2}=\frac{180}{5}=36$, *y por tanto (véase la tabla del § 231), $h_1=0'0198\,.\,180=3'56^m$, $h_2=0'04\,.\,180=7'2^m$, $h_2-h_1=7'20-3'56^m=3'64^m$. Más como al propio tiempo $R=1250\,.\,0'6=750^{mm}$, resulta que h_2-h_1 es mayor que $2R$, en cuyo caso no puede colocarse el brazo conductor del cable en la parte superior, y por lo tanto los ejes de las poleas deberian instalarse bajo el suelo á una altura igual á lo ménos á $R+h_2=0'75+7'2=7'95^m$. Admitamos ahora que se da al cable un diámetro de 8^{mm} en vez de $8\times0'6=4'8^{mm}$, es decir que se tome 1^{mm} para el diámetro de los alambres, y tendremos $\delta_s=0'6=1'67\,\delta$, y segun la tabla anterior (línea 18, col. 6 y 4), $S_{2s}=0'89\,.\,S_1=0'89\,.\,10=8'9$; por ende* $\frac{A}{S_{2s}}=\frac{180}{8'9}=20'22$ *y $h_{2s}=0'0228\,.\,180=4'01^m$, $h_{2s}-h_1=4'01-3'56=0'45^m$, y como por otra parte $R=1250$ y $2R=2'5^m$, la desigualdad $h_{2s}-h_1<2R$ queda compensada y puede colocarse el brazo conducido en la parte superior. El máximum de flecha corresponde en tal caso al estado de reposo, para el cual segun la fórmula (247) se tiene: $h_{os}=3'88^m$. La altura en que deben instalarse los ejes de las poleas encima del suelo es entonces $h_{os}+R=3'88+1'25=5'13^m$, es decir inferior en $2'82^m$ á la que era necesaria en la primera hipótesis.*

§ 233

Trasmision por cables inclinada.

De todos los dispositivos que pueden emplearse en las trasmisiones por cables, el que ha tomado más desarrollo, corresponde al caso en que los ejes de las dos poleas están colocados en niveles diferentes y constituye lo que puede denominarse trasmision inclinada. Vamos á dar ahora las reglas aplicables á la instalacion de este dispositivo. En el cable BCD (fig. 612) que forma parte de una trasmision inclinada, el punto elevado C de la curva del eje del cable no cae en medio de la distancia comprendida entre las verticales de los puntos de suspension, y las flechas son forzosamente diferentes de las de un cable que pertenezca á una trasmision horizontal. Pero tales flechas y las abcisas del punto culminante, pueden determinarse fácilmente, conforme vamos á indicar en virtud de los elementos de una trasmision horizontal que tenga la misma separacion de las poleas y presente muy sensiblemente el mismo grado de tension (1).

Supongamos que sean:

h y A la flecha del cable de las poleas de una trasmision horizontal,

S la tension correspondiente al punto de suspension del brazo considerado,

h' y h'' las flechas mayor y menor (FC y EC) en una trasmision inclinada para la cual la distancia de las poleas, medida horizontalmente, es igual á A,

a' y a'' las distancias CB_1 y CD_1 del punto culminante de la curva á las verticales de los puntos de suspension,

S' y S'' las tensiones en (B y D) en los puntos de suspension inferior y superior,

H la diferencia del nivel (EF) de estos puntos de suspension.

Se comienza por determinar por medio de las reglas antes indicadas los valores h y S, y se tiene entonces:

$$h'=h\left(1+\frac{1}{16}\frac{H^2}{h_2}\right)-\frac{H}{2},\quad h''=H+h' \qquad (252),$$

$$a'=\frac{A}{2}\left(1-\frac{1}{4}\frac{H}{h}\right),\quad a''=A-a' \qquad (253)$$

$$S'=S-\frac{h-h'}{114},\quad S''=S+\frac{h''-h}{114},\quad S''-S'=\frac{H}{114} \qquad (254)$$

En ciertos casos el valor a' puede ser negativo; y el punto culminante de la curva del cable prolongada se halla entonces situada á la otra parte de la polea que está á más bajo nivel. La tension de flexion s y por tanto el diámetro de las poleas, se determinan cuando se ha calculado la tension S'', que las más de las veces es poco diferente de S. La diferencia entre estos dos valores no es realmente importante sino en los casos en que varias trasmisiones inclinadas se suceden en el mismo cable ascendiente. La diferencia entre la tension del punto de suspension más bajo y la del punto más alto se halla enseguida espresado por la relacion de la diferencia del nivel de estos dos puntos á 114^m.

---

(1) En los casos ordinarios de la práctica pueden las trasmisiones por cables inclinados calcularse idénticamente como las trasmisiones horizontales, con la sola condicion de tomar por flecha la porcion de vertical GG_1 que está comprendida entre el cable y el medio G_1 de su cuerda (fig. 613).

EJEMPLO. *Una trasmision por cable, cuyos datos son los del 5.º ejemplo del* § 230 *y del* § 231, *tiene sus poleas instaladas á diferentes alturas; y suponiendo la diferencia de nivel igual á* 5^m *se desean saber los valores de las flechas y las posiciones de los puntos culminantes de la curva del cable.*

(*a*) *Para el brazo conductor se tiene:* $S_1=6^k$, $h_1=2'20^m$, $H=5^m$, $A=110^m$; *y partiendo de la polea más cercana al suelo, las fórmulas* (252) *dan:* $h'_1=2'2\left(1+\frac{1}{16}\frac{5^2}{2'2^2}\right)-\frac{5}{2}=2'91-2'5=0'41^m$, $h''_1=5+0'41=5'41^m$: $a'_1=\frac{110}{2}\left(1-\frac{1}{4}\frac{5}{2'2}\right)=55.0'432=23'76^m$, $a''_1=110-23'76=86'24^m$.

(*b*) *Para el brazo conducido* $S_2=3^k$, $h_2=4'51^m$, *y por tanto,* $h'_2=4'51.\left(1+\frac{1}{16}\frac{5^2}{4'51^2}\right)-\frac{5}{2}=4'86-2'50=2'36^m$, $h''_2=5+2'36=7'36^m$.

(*c*) *En fin, para el cable en reposo* $h_0=0'67\,.\,4'5+0'28\,.\,2'2=3'64^m$; *y por consiguiente,* $h'_0=3'64\left(1+\frac{1}{16}\frac{5^2}{3'64^2}\right)-\frac{5}{2}=4'07-2'50=1'43^m$, $h''_0=5+1'43=6'43^m$; $a'_0=\frac{110}{2}\left(1-\frac{1}{4}\frac{5}{3'64}\right)=55\,.\,0'657=36'14^m$, $a''_0=110-36'14=73'86^m$.

Las tensiones en el brazo conductor son las siguientes: $S'_1=6-\frac{2'2-0'41}{114}=6-0'007=5'993$, $S''_1=6+\frac{5'41-2'2}{114}=6+0'028=6'028$. *Estos dos últimos números se diferencian poco de* 6, *y por tanto puede prescindirse de esa diferencia. Aun en los tres casos sucesivos que ofrecen cada uno la misma magnitud que el cable precedente, podria prescindirse de la variacion de tension.*

Las alturas que da el cálculo para las flechas de una trasmision inclinada deben en lo posible señalarse en lo trazado á una escala triple ó quíntupla de la de las líneas horizontales; trázase enseguida la curva del cable como un arco de parábola (véase el párrafo siguiente), y se examina si la disposicion del terreno se presta á la instalacion de la curva obtenida. De lo contrario debe empezarse otra vez el cálculo, adoptando nuevos valores para la tension hasta que se obtenga una curva que llene las condiciones de instalacion. Con alguna práctica se logra rápidamente determinar á una simple ojeada las cantidades que han de admitirse, de modo que en realidad este procedimiento no ofrece dificultad alguna.

§ 234

Trazado de las curvas de cables.

El trazado de una curva de cable se efectua con muy satisfactoria aproximacion asimilando esta curva á un arco de parábola ordinaria. (1). Despues de determinar (fig. 614) el punto culminante C de un brazo BCD (véase el párrafo anterior), se divide en dos partes iguales, en los puntos C_1 y C_2, los dos segmentos B_1C y D_1C de la distancia horizontal B_1D_1, tangente á la curva en su punto culminante, y por los puntos C_1 y C_2 se trazan las líneas BC_1 y DC_2, que dan las direcciones del brazo en los dos puntos en que deja las poleas. Se dividen entonces las longitudes CC_1 y C_1B en un número de partes iguales en los puntos 1, 2, 3.... y *I*, *II*, *III*....; y juntando 1*II*, 2*II*, 3*III*, etc., se obtiene una série de líneas envolventes y tangentes á la parábola buscada. Operando de igual modo para CC_2D se determina la otra parte de la curva del cable. Cuando el punto culminante C cae fuera de las poleas por el lado de la que está en el nivel más bajo, una parte de la parábola en la proximidad de dicho punto culminante no se utiliza, si bien la construccion no por ello se modifica en nada.

§ 235

Trasmision por cables para corta separacion de poleas.

Cuando la separacion de las poleas de una trasmision por cable es de poca consideracion, conviene ante todo procurar que las flechas tengan mucho valor para que el cable se arrolle debidamente y pueda acortarse sin necesidad de correr el peligro de aumentar mucho la tension. Adóptase entonces para S_1 un valor muy corto, haciendo de manera que se obtenga para la flecha un valor determinado; y luego por medio de la fórmula (244) y de la tabla que de ella se deduce, se obtiene S_1. Calcúlanse enseguida i y R conforme hemos

(1) En el órden de ideas indicado en el párrafo anterior el trazado de la curva del cable se hace inmediatamente, una vez conocida la flecha GG_1, utilizando una propiedad de la parábola.

Se toma el punto G_1 medio de BD (fig. 615) y se traza la vertical GG_1 igual á la flecha; por el punto G se tira $D'GB'$ paralela á DB, y por los dos puntos B y D las verticales BB' y DD': júntase enseguida el punto D en el medio G'' de $D'G$ con el punto B en el medio G' de GB'. Las dos rectas DG'' y BG' así obtenidas dan las direcciones del brazo en los puntos en que deja las poleas. Basta enseguida operar como se ha dicho en el texto.

indicado antes. Para una resistencia tangencial de muy escasa importancia y una pequeña separacion de poleas la trasmision por cables puede aun realizarse en condiciones satisfactorias.

EJEMPLO. *Un cable debe trasmitir á una distancia de 20 metros un trabajo de 6 caballos con una velocidad de 150 vueltas por minuto; y además el brazo conductor debe ofrecer una flecha de 1 metro. Tienen entonces* $h : A = 0'05$, *valor que segun el* § 231, *corresponde á* $A : S = 44'71$, *de donde se deduce para la tension* $S_1 = 20 : 44'71 = 0'45$. *A fin de poder determinar* δ *por medio de la tabla del* § 230, *es necesario conocer el valor de s; y admitiendo como antes, que la suma* $s + S_1$ *debe ser igual á* 18^k, *se tiene* $a : s = 17'55$, *lo cual da* $\frac{s}{S_1}\frac{N}{n} = \frac{17'55 \cdot 6}{0'45 \cdot 150} = 1'56$, *sacándose entonces de la segunda tabla del* § 230 (*col.* 7, *lín.* 11) $\delta = 2^{mm}$ *para* $i = 36$. *Segun la fórmula* (243) *debe tomarse:* $R = 2\,\frac{10000}{17'55} = 1140^{mm}$ *próximamente; siendo admisibles estas dos dimensiones de* δ *y R. Si quisiéramos que* $d = 8\,\delta$ *fuese igual á* 12^{mm}, *es decir que* δ *quedase reducida á* $1'5^{mm}$, *bastaria que diésemos á R un valor más considerable, en cuyo caso la tabla del* § 230 (*columna* 7, *lín.* 8 *y* 9) *daria* $\frac{s}{S_1}\frac{N}{n} = 0'718$ *y por tanto,* $s = 0'718\,S_1\,\frac{n}{N} = 0'718 \cdot 0'45 \cdot 25 = 8'08$; *y trasladando ese último valor y el de* δ *á la fórmula* (243), *se encuentra* $R = 1'5 \cdot 10000 : 8'08 = 1856^{mm}$. *Puede acontecer que en el caso de que se trata, no puedan instalarse cómodamente poleas de radio tan grande y que por lo mismo se tenga que recurrir á los valores que antes hemos encontrado y que dan poleas de conveniente diámetro, así como flechas bastante grandes. Para la trasmision de fuerzas considerables únicamente se alcanzan buenos resultados con la condicion, fácil de realizar, de dar á las poleas una velocidad de rotacion conveniente. Los límites que en tal caso deben tenerse en cuenta, se hallan indicados al final del siguiente párrafo.*

§ 236

Corona ó llanta de una polea de cable.

Al principio las llantas de las poleas de cables eran de madera cubierta con una guarnicion de cuero; más no tardó la práctica en demostrar que las coronas metálicas eran muy preferibles; y hoy son éstas casi esclusivas en todas aquellas instalaciones que se quieren de larga duracion. Las figuras 616 y 617 representan dos coronas de hierro colado, simple la primera, y la otra doble. Las faces de la ranura de la primera están inclinadas en 30° sobre el plano medio de la polea. En la corona doble semejante inclinacion acarrearia un peso demasiado considerable para la saliente del medio, y por esto se ha de dar á las caras de esta saliente una inclinacion mayor que á las otras dos. En la fig. 617 (que corresponde á una polea de grandes dimensiones) esa inclinacion no es en realidad más que de 15°. Todos los números proporcionales indicados en ambas figuras se refieren al diámetro *d*. Como rara vez se emplean cables de diámetro inferior á 10 milímetros, resulta que en general el valor $d = 10^{mm}$ puede considerarse como el límite inferior del módulo de construccion de las poleas (1). El fondo de cada ranura termina en una muesca de cola de milano, destinada á recibir una guarnicion compuesta, ó bien de una cinta de gutapercha (fig. 616) firmemente apretada, ó bien de una série de pequeñas duelas de madera de sauce, que se introducen sucesivamente en las muescas por una abertura lateral practicada en la corona, y que luego se tapa por medio de una pieza adecuada. La figura 617 presenta dos aberturas de ese género y las piezas que las cierran están reunidas con pernos. Para los cables de mucho peso se ha vuelto de algun tiempo á esta parte al empleo de las guarniciones de cuero, que duran más que las de gutapercha; á cuyo fin se utilizan con gran ventaja viejas correas grasas, que se cortan en tiras y se introducen en la muesca paralelamente á su plano medio (2).

El profesor *Fink* empleó con buen resultado una guarnicion compuesta de hilo bramante arrollado sobre el fondo de la muesca, y que con la compresion no tarda en formar una masa muy resistente. La guarnicion de corcho es de precio muy módico, pero no se ha probado lo suficiente para las trasmisiones por cables

(1) Importa mucho para la conservacion del cable que éste no frote en las paredes de fundicion de la garganta de la polea. En este concepto conviene generalmente adoptar para esa garganta dimensiones mayores que las del texto, con tanta más razon cuanto que amenudo es preciso al cabo de cierto tiempo emplear cables más gruesos que los previstos al principio cuando se estudiaba el proyecto de instalacion. Se obtendrán dimensiones satisfactorias reemplazando en los números proporcionales de las figuras 616 y 617 el módulo *d* por $1'2\,d$ ó $1'3\,d$. Convendria en las coronas dobles dar al tabique de enmedio una altura mayor que á las caras esteriores de ambas ranuras, para evitar que en ningun caso pasara uno de los cables á la garganta del otro, lo cual podria acarrear inconvenientes muy graves.

(2) Un dispositivo que se usa desde algun tiempo en ciertas fábricas de pólvora y que parece superior en el concepto de la adherencia, consiste en la yuxta-posicion de una série de dovelitas de cuero, perpendiculares al plano medio de la polea y pegadas cuidadosamente unas á otras.

espuestas á resbalamientos. Cuando se usa el hilo bramante, la profundidad de la muesca debajo del cable puede ser más pequeña de lo que indican los números en las figuras 616 y 617. En las tres primeras formas de guarnicion (gutapercha, madera y cuero) el perfil de la ranura propiamente dicha en que se coloca el cable, puede tornearse despues de introducida la guarnicion. Las poleas de 4 á 5^m de diámetro se funden comunmente en dos piezas; y las salientes trasversales practicadas en la corona y el cubo, permiten reunir las dos mitades de la polea por medio de pernos.

Para que la fuerza centrífuga no sea causa de peligro serio para la llanta, conviene no pasar de 30 á 32^m por lo tocante á la velocidad de la circunferencia, conforme hemos notado en el § 229. La velocidad de 28^m que suele adoptarse hoy con los cables parece no acarrear inconveniente alguno.

§ 237

Brazos y cubo de una polea de cable.

En las poleas de cables el cuerpo es comunmente de hierro colado como la corona, si bien en las poleas-soportes se encuentran á veces brazos de hierro forjado que se encajan en la fundicion del cubo y de la corona (Véase fig. 631). En ambos casos el número K de brazos de la polea está indicado por la relacion:

$$K = 4 + \frac{1}{40}\frac{R}{d} \qquad (255)$$

Los brazos de hierro colado son de seccion en cruz ú oval; y en ambos casos la altura h de esta seccion en el plano medio de la polea tiene por espresion:

$$h = 4d + \frac{1}{4}\frac{R}{K} \qquad (256)$$

En la seccion en cruz el espesor de la nervadura principal $e = {}^1/_3\, h$, y el de las nervaduras secundarias e' es igual ${}^2/_3\, e$. En cuanto á la seccion oval la anchura es en cada punto la mitad de la altura, como en las poleas para correas. Cerca de la corona esta altura no es más que los dos tercios de su valor medido junto al cubo.

Los brazos de seccion en cruz son rectos y generalmente en número de ocho (fig. 618), en tanto que los de seccion oval son curvos, ya una sola vez (segun las reglas del § 224), ya dos veces como en la fig. 619.

Para llegar en el segundo caso á determinar una curvatura conveniente, se empieza por describir un círculo con el radio $OA = {}^1/_3\, R$; luego se trazan sobre este círculo las longitudes AB, BC, etc., correspondientes á la division de los brazos, y enseguida se tira el arco OE, que representa la curvatura de una parte del brazo, exactamente lo mismo que se ha hecho en el § 224 para el brazo de una sola curva. Por el centro de curvatura C de este arco (que cuando se trata de ocho brazos está precisamente en la circunferencia ABC), se traza la línea CED, y tomando $ED = EC$ se obtiene el segundo radio de curvatura correspondiente á la parte EF del brazo. Para trazar luego las curvas límites del perfil del brazo, basta seguir el método indicado en el § 224, observando que los centros de los círculos que forman esas curvas límites, se encuentran en CD.

Cuando se usan brazos rectos conviene fundir el cubo dejando abiertas ranuras que enseguida se guarnecen con calas que se encuentran firmemente afianzadas por dos argollas de hierro metidas en caliente, de manera que produzcan un cierre enérgico. Las dimensiones del cubo se determinan de la misma manera que en las poleas de correas (véase § 225).

Ejemplo. *En una trasmision por cable se ha de instalar una polea de fundicion de* 1250^{mm} *de radio, soportada por un árbol de* 120^{mm} *de diámetro y destinada á recibir un cable de* 12^{mm}. *Segun la fórmula* (255), *el número de brazos de esta polea será igual á* $4 + \frac{1}{40}\frac{1250}{12} = 6'6$ *á* 7, *y segun* (256) *deberá tomarse para la altura de cada brazo en su orígen ó arranque* $h = 4 \cdot 12 + \frac{1250}{4 \cdot 7} = 48 + 45 = 93^{mm}$. *La fórmula* (233) *da como espesor de la pared del cubo:* $w = 10 + 120 : 6 + 1250 : 50 = 10 + 20 + 25 = 55^{mm}$; *en cuanto á su longitud* L *debe ser igual á lo ménos á* $2'5 \cdot 55 = 137'5^{mm}$ *ó sea* 140^{mm}.

En las trasmisiones muy importantes es muy cuerdo tener un cable de reserva, es decir, repartir la fuerza en dos cables de fuerza tal, que uno solo baste para trasmitir toda la fuerza. Esto es lo que se hizo al instalarse una trasmision por cables de 600 caballos en Schaffhouse, de que más adelante hablaremos. En dicha instalacion están ambas poleas dispuestas sobre el árbol motor en la forma que representa la fig. 620. Esas dos poleas que son locas sobre dicho árbol, se sujetan á él de una manera invariable con las dos ruedas dentadas B y D, que engranan con las ruedas intermedias A y C. Estas dos últimas ruedas son á su vez locas tambien sobre dos gorrones unidos invariablemente al árbol motor. En virtud de este dispositivo cuando empieza á efectuarse el movimiento, llegan las poleas á

tomar posiciones tales, que las fuerzas trasmitidas por los dos cables tengan ambas á dos el mismo valor. Si uno de los cables se rompe, la polea correspondiente que ha quedado libre, se pone á girar al revés; y en tal caso la marcha de las ruedas de engranaje sigue sin dificultad. A fin de que en este movimiento inútil, la polea que ha quedado loca ó libre no pueda tomar una velocidad peligrosa, la instalacion de Schaffhouse comprende un freno poderoso que permite parar casi instantáneamente las turbinas que proporcionan la fuerza. Quizás convendria reemplazar las ruedas intermedias *A* y *C* por simples sectores, conforme indicamos á la derecha de la figura; y así que ocurriese la rotura de un cable, estos sectores se pondrian en movimiento y como podrian fácilmente disponerse de modo que pasaran de la posicion de movimiento á la posicion de reposo, se comprende que en ello habria un medio de evitar todo peligro para la trasmision.

§ 238

Poleas-soportes y poleas intermedias.

Cuando las dos poleas de una trasmision distan mucho una de otra y están á poca altura sobre el suelo, es indispensable sostener el cable con otras poleas (1). En ciertos casos puede ser suficiente el soportar en un solo punto el brazo conducido, mientras que el brazo conductor queda completamente libre, como lo indica la fig. 628; y cuando es necesario emplear varias poleas-soportes, el brazo conductor tiene generalmente una ménos que el brazo conducido (fig. 622). En cambio otras veces el número de poleas es el mismo para ambos brazos; pero entonces conviene colocar las poleas de los dos brazos más bajo de otras, en vez de yuxta-ponerlas, como se ha ensayado amenudo; pues en esta última disposicion el cable sufre un desgaste muy rápido por efecto del frotamiento en los bordes de las poleas, y además está espuesto á caer muy fácilmente. En el dispositivo de la fig. 623 las poleas-soportes del brazo conductor, con el fin de ganar toda la altura posible, se hallan debajo de las del brazo conducido.

En la mayor parte de los casos cuando obliga á multiplicar el número de puntos de apoyo ese dispositivo, puede reemplazarse ventajosamente con el empleo de una serie de trasmisiones sucesivas (*Ziegler*) (fig. 624). Las poleas-soportes de las figuras anteriores se reemplazan entonces con poleas intermedias de doble ranura, que en lo posible se colocan á igual distancia unas de otras (1); y en efecto de este modo un cable de reserva puede servir para reemplazar á cualquiera de los cables de la série que se rompiese (2).

Los diversos puntos en que el cable se halla soportado llevan el nombre de estaciones de la trasmision, constituyendo las que corresponden á los puntos principales de la trasmision las estaciones de estremo, en tanto que las otras son las estaciones intermedias. En ciertos casos puede necesitarse cambiar la direccion del cable en una estacion de esa última especie; é *Hirn* propuso realizar este cambio de direccion por medio de una polea horizontal (fig. 625), á la vez que otros ingenieros con mayor acierto prefieren emplear ruedas angulares (fig. 626).

El empleo de las trasmisiones por cables tiene además la ventaja de poder repartir entre varios establecimientos pertenecientes á propietarios distintos una fuerza mecánica importante producida en un solo punto; pues basta al efecto hacer partir de ciertas estaciones otras trasmisiones por cable de menor importancia. Las estaciones de ese género llevan el nombre de estaciones de distribucion ó reparto.

Las poleas-soportes encuentran además empleo en los casos particulares en que las poleas del árbol motor y del árbol conducido se encuentran colocados casi verticalmente la una encima de la otra. Habria en efecto serios inconvenientes en emplear un cable inclinado que uniese directamente las dos poleas *A* y *B* (figs. 627 y 628), y es muy preferible recurrir al empleo de poleas-soportes *T*, *T*, dispuestas de modo que una parte *TA* ó *TB* de la trasmision sea horizontal, bastando entonces determinar por medio de los datos precedentes las tensiones que deben darse á los dos brazos de esta parte de la trasmision, sin tener en cuenta la parte inclinada.

El empleo de los cables para la trasmision de fuerzas á grandes profundidades, en los pozos de minas, por ejemplo, está todavia en el periodo de desarrollo;

(1) El trazado de las curvas de los cables asi sostenidos se facilita observando que las flechas de las diferentes porciones de un mismo brazo medidas como se ha dicho en el § 233, están notablemente en razon inversa de las raices cuadradas de sus respectivas longitudes, es decir, de las distancias de las poleas sucesivas.

En las trasmisiones de larga distancia es ventajoso, en concepto de la regularidad del movimiento, emplear cables de tension reforzada.

(1) Conforme lo hizo Ziegler en su hermosa instalacion de Oberursel en Francfort del Mein, en donde logró trasmitir con éxito brillante un trabajo de 100 caballos á una distancia de 984 metros.

(2) Esta disposicion tiene además la inmensa ventaja de dar á cada trecho el empleo de una porcion de la fuerza motriz y dar la posibilidad de cambiar la direccion del cable.

pero en vista de los ensayos practicados hasta hoy se esperan muy buenos resultados.

Se encuentra un ejemplo notable de ese modo de trasmision en la instalacion de Schaffhouse, en la que una fuerza de 600 caballos, debida á la velocidad de la corriente del Rhin (que no debe confundirse con la catarata del Rhin que se halla á pocos kilómetros más abajo) se recoge por medio de turbinas en la orilla izquierda y debe ser trasmitida á la orilla derecha para repartirse en dicho punto entre diferentes fábricas. Esa importante aplicacion debida á la «Sociedad de aparatos hidráulicos de Schaffhouse,» está casi enteramente terminada (1), y ofrece en sus diferentes detalles de instalacion datos de suma importancia y de gran interés para los mecánicos (2).

§ 239

Dimensiones de las poleas-soportes.

TABLA DE DICHAS DIMENSIONES.

S_1	s	$\frac{R_0}{\delta}$	S_1	s	$\frac{R_0}{\delta}$
0'5	17'5	563	9	9	741
1	17	571	10	8	769
2	16	588	11	7	800
3	15	606	12	6	833
4	14	625	13	5	870
5	13	645	14	4	909
6	12	667	15	3	952
7	11	690	16	2	1000
8	10	714	17	1	1053

Las poleas destinadas á sostener el brazo conductor deben siempre tener el mismo diámetro que las poleas de trasmision propiamente dichas. Las del brazo conducido deben en cambio tener dimensiones más pequeñas en las trasmisiones normales. El cuadro anterior indica los límites de los cuales no conviene bajar para el radio R_0 de estas poleas.

Los números de esa tabla han sido calculados por la fórmula

$$\frac{R_0}{\delta} = \frac{10000}{18 - 0'5\, S_1} \qquad (257)$$

Esa tabla da dimensiones muy convenientes de R_0, principalmente para valores bastante elevados de S_1. En las trasmisiones de tension reforzada (§ 232), la diferencia entre R_0 y R es muy poco importante para que se tome sin inconveniente $R = R_0$. En las trasmisiones compuestas (§ 238) no existe bajo el punto de vista del tamaño ninguna diferencia entre las poleas principales de los estremos y las poleas intermedias.

§ 240

Presiones sobre los ejes de las poleas-soportes.

En una trasmision por cables que se ha calculado en toda su longitud, se conocen para cada estacion las tensiones y (segun los trazados de las curvas de los cables, § 234), las direcciones de los diferentes brazos por sostener, esto es, para una polea intermedia, por ejemplo, la de la fig. 629, se conocen las magnitudes de las fuerzas aplicadas T, t, T_1 y t_1 y sus direcciones. Puede además determinarse con las fórmulas que vamos á dar, el peso aproximado de la polea, lo que permite trazar gráficamente, fig. 630, la resultante Q de estas diferentes fuerzas parciales. Al efecto se trazan las líneas AB, BC, CD, DE y EF, respectivamente iguales y paralelas á T, T_1, t, t_1 y G. La línea AF que cierra el polígono, representa en tamaño y direccion la resultante Q. Las poleas soportes ofrecen comunmente una construccion idéntica á la de las poleas principales en lo tocante al mismo diámetro del cable; y en virtud de las reglas de los párrafos 236 y 237 sus pesos se hallan entonces indicados aproximadamente por las fórmulas siguientes:

Para una polea de una sola garganta:

$$\frac{G}{d^3} = \left[\left(45 + \frac{36'4}{d} + \frac{7'22}{d^2}\right)\left(\frac{R}{d}\right) + \left(0'33 + \frac{0'116}{d} + \frac{0'0072}{d^2}\right)\left(\frac{R}{d}\right)^2 + \left(0'005 + \frac{0'0007}{d}\right)\left(\frac{R}{d}\right)^3\right] \qquad (258)$$

para una polea de dos gargantas:

$$\frac{G}{d^3} = \left[\left(84 + \frac{66'4}{d} + \frac{13'30}{d^2}\right)\left(\frac{R}{d}\right) + \left(0'33 + \frac{0'116}{d} + \frac{0'0072}{d^2}\right)\left(\frac{R}{d}\right)^2 + \left(0'005 + \frac{0'0007}{d}\right)\left(\frac{R}{d}\right)^3\right] \qquad (259)$$

(1) El trabajo neto de las tres turbinas instaladas en Schaffhouse se eleva en realidad á 750 caballos. En la actualidad se utilizan más de los dos tercios para diferentes industrias.

(2) Véase al efecto la memoria publicada por Kronauer en la *Revista Politécnica Suiza*, 1867, pág. 1.

En esas fórmulas R y d están espresadas en decímetros.

1.er EJEMPLO. *En el* 4.° *ejemplo del* § 230, *para un radio de polea* $R=750^{mm}$, *el diametro de los alambres del cable, suponiéndolos en número de* 36 *era de* $0'9^{mm}$, *es decir, el diametro del cable debia ser* $8 . 0'9=7'2^{mm}$; *lo cual da* $R : d=720 : 7'2=104$. *El peso de la polea en el caso de una garganta sola es entonces:* $G=0'072^3$ $[(45+13'89 . 36'4+13'89^2 . 7'22)104+(0'33+13'89 . 0'116+13'89^2 . 0'0072)104^2+(0'005+13'89 . 0'0007) 104^3]=95^k$ *próximamente.*

2.° EJEMPLO. *Para la trasmision de* 300 *caballos del* 2.° *ejemplo del* § 230 *se ha encontrado* $\delta=2'2^{mm}$, *lo cual para un cable de* 60 *alambres da:* $d=12'8 . 2'2=28^{mm}$, $R=2200^{mm}$, *y por lo tanto* $R : d=2200 : 28=79$. *El peso de la polea en la hipótesis de una garganta doble es entonces, segun la fórmula* (259): $G=0'28^3[(84+3'57 . 66'4+3'57^2 . 13'30)79+(0'33+3'57 . 0'116+3 . 57^2 . 0'0072)79^2+(0'005+3'57 . 0,0007)79^3=1050^k$.

Para las grandes poleas de trasmisiones importantes el peso, como demuestra el último ejemplo, es muy considerable; de donde se infiere que se haya procurado reducir el peso modificando el sistema de construccion de las poleas y adoptando, por ejemplo, el dispositivo de la fig. 631, en el que los brazos están formados por dos barras inclinadas que van á unirse en la corona; y así puede reducirse en $^1/_4$ próximamente el peso que hemos encontrado para la polea anterior. En Suecia, donde la trasmision por cables está ya sériamente implantada, se emplean con buen éxito poleas de palastro.

§ 241

Pilares de estaciones ó pilones.

La fig. 631 representa el dispositivo de una estacion para las poleas intermedias de una trasmision compuesta. Con el fin de sostener los soportes del eje de una polea de ese género se puede en rigor instalar una armazon de madera, pero es muy preferible recurrir á un verdadero macizo de ladrillos ó piedra, sobre el cual se fijan los soportes, que pueden ser silletas de escasa altura, como los que representa la figura, ó por el contrario soportes elevados por el aditamento de armazon, representando una de las formas de las figuras 339 y 340. Este último dispositivo es principalmente ventajoso cuando los pilares tienen ya mucha altura desde el suelo hasta las planchas de fijacion de tales armazones. Dichas planchas están firmemente adheridas al macizo por cuatro pernos de ancla, que despues de atravesar los pilares penetran en la mampostería del fundamento. La longitud del eje entre los centros de los gorrones es generalmente igual al radio R de la polea. Para las estaciones de dos poleas, el macizo está dividido hasta grande altura y el eje de la polea superior descansa en silletas de armazon metálica. En ciertos casos las poleas están establecidas como en falso, segun indica el trazado en punteado de la figura 631. Ese dispositivo es notablemente cómodo para la colocacion de un cable nuevo. Para esa última operacion el ingeniero *Ziegler* (1) empleó con buen éxito un dispositivo análogo al monta-correas de *Herland*. Este dispositivo que está representado en la figura 632, se compone de un hierro en forma angular, que se fija sobre la ranura de una de las poleas por medio de pernos de gancho. En la figura de la izquierda el cable está al lado de la polea, en tanto que en la figura de la derecha descansa en la ranura de dicha polea.

Por más que en todo el curso de este capítulo hayamos supuesto que las dos poleas de trasmision tenian el mismo tamaño, no se debe deducir que sea imposible adoptar una proporcion diferente para dichas dos poleas. Con efecto, la desigualdad de los radios de esas poleas puede á veces ser sériamente motivada. En todos los casos de esta especie conviene limitarse á determinar el tamaño de la más pequeña de las dos poleas y el diámetro correspondiente del cable, no perdiendo de vista que para una trasmision de buenas condiciones es en gran modo esencial dar á dicha polea un diámetro suficiente.

El buen funcionamiento de un cable depende sobre todo de la manera con que el movimiento se trasmite de un estremo á otro é importa mantener entre límites

---

(1) Este ingeniero es tambien el inventor de una máquina especial destinada á estirar los cables nuevos antes de colocarlos. Ese estiraje tiene por objeto reducir el alargamiento que sufre un cable con el uso, y disminuir por lo tanto el número de acortamientos que debe sufrir.

Cuando se quiere poner un cable en su lugar, se monta sobre las dos poleas y se practica á uno y otro estremo libre una traccion fuerte, hasta que llegue al valor de la flecha en reposo. Júntanse entonces los dos estremos por medio de un empalme que se hace de bastante longitud (5 á 6 metros). Al cabo de cierto tiempo de marcha el cable se ha distendido y alargado; en cuyo caso conviene repetir la operacion precedente.

Para los cables de pequeñas dimensiones se reemplaza con ventaja el empalme con un broche de union dispuesto como indica la fig. 633. Cortado el cable en la longitud conveniente y despues de colocarlo en las poleas y someterlo á la traccion, se encaja cada estremo en un cubo cónico, de donde se le impide salir introduciendo por el eje un tornillo que aumenta artificialmente su diámetro. Despues no falta más que juntar los dos cubos por medio de un pasador *ab*.

convenientes el coeficiente que mide la regularidad. Esa consideracion ha tomado especialmente cierta importancia desde que al generalizarse el empleo de los cables, se les hace gobernar máquinas herramientas aisladas, en las que es muy variable la resistencia, como por ejemplo, máquinas de carpinteria, molinos, etc.

Los límites de que se trata dependen á la vez de la clase del motor y de la regularidad que exigen el género de trabajo por efectuar, y en rigor seria necesario fijarlos en cada caso particular. El conocimiento de esos límites suprimiria la confusion que existe generalmente en la determinacion de los cables de trasmision y permitiria calcular todos los elementos del cable que ha de emplearse en el caso que se tiene á la mira. Sin embargo, en las circunstancias de la práctica puede evitarse hasta cierto punto esta discusion siempre delicada, que exige cálculos muy complicados, tomando por valor del coeficiente de regularidad un promedio entre los límites que presentan cierto número de cables, cuyo funcionamiento se reputa satisfactorio. En ese órden de ideas Leauté formó la tabla que damos á continuacion, de empleo sumamente fácil, y que da con cálculos muy sencillos los principales elementos necesarios para la instalacion de las trasmisiones.

Esa tabla que se ha hecho admitiendo que $s+S_1=15^k$ da naturalmente cables más fuertes que los que se obtienen tomando la cifra de 18^k para la suma de las tensiones. Pero conforme hemos observado antes, ese aumento de dimensiones del cable ofrece notorias ventajas bajo el punto de vista de la regularidad y del desgaste, sin producir más que un corto aumento de gastos de instalacion. Un cable calculado en virtud de esta tabla puede además trasmitir sin graves inconvenientes en momento dado un trabajo muy superior al previsto en el estudio del proyecto primitivo. Con respecto al uso de esa tabla cumple recordar que la fuerza que puede trasmitir un cable, es en igualdad de circunstancias proporcional á la velocidad de este cable y al número de alambres que lo componen, y que siempre se puede sin inconveniente aumentar el diámetro de las poleas ó disminuir el de dos alambres aumentando su número para conservar al cable su mismo peso.

Anotaciones de la tabla:

N_0 Potencia trasmitida (en caballos),

$2R$ Diámetro mínimo de las poleas de garganta,

d Diámetro del cable,

p Peso del cable por metro lineal,

δ Diámetro de los alambres que componen el cable,

A Distancia de las poleas ó longitud del cable,

h_0 Límites entre los que conviene mantener la flecha en reposo,

φ Diferencia aproximada de las flechas durante el movimiento.

TABLA QUE DA EN LA PRÁCTICA EL NÚMERO DE CABALLOS QUE PUEDE TRASMITIR UN CABLE DE 36 ALAMBRES Á LA VELOCIDAD DE 25^{m} POR SEGUNDO, Y EL DIÁMETRO MÍNIMO DE LAS POLEAS QUE DEBEN EMPLEARSE.

A=			20^{m}		30^{m}		40^{m}		50^{m}		60^{m}		80^{m}		100^{m}		120^{m}	
d	p	δ	N_0	$2R$	N_0	$2R$	N_0	$2R$	N_0	$2R$	N_0	$2R$	N_0	$2R$	N_0	$2R$	N_0	$2R$
mm.	k.	mm.	cab.	m.	cab.	m.	cab.	m.	cab.	m.	cab.	m.	cab.	m.	cab.	m.	cab.	m.
4	0'062	0'50	0'7	0'70	1'2	0'70	1'9	0'75	2'7	0'80	3'5	0'85	4'2	0'90	5'1	1'00	6'0	1'15
4'8	0'090	0'60	1'0	0'85	1'8	0'85	2'8	0'90	3'9	0'95	5'1	1'00	6'1	1'10	7'4	1'20	8'7	1'40
5'6	0'122	0'70	1'3	0'95	2'4	1'00	3'8	1'05	5'3	1'10	6'9	1'15	8'3	1'25	10'0	1'40	11'0	1'60
6'4	0'160	0'80	1'8	1'10	3'2	1'15	4'9	1'20	7'0	1'25	9'0	1'30	11'0	1'45	13'0	1'60	15'5	1'80
7'2	0'203	0'90	2'2	1'25	4'1	1'30	6'3	1'35	8'9	1'40	11'5	1'50	14'0	1'60	16'5	1'80	19'5	2'05
8'0	0'250	1'00	2'7	1'40	5'0	1'45	7'7	1'50	11'0	1'55	14'0	1'65	17'0	1'80	20'5	2'00	24'0	2'30
9'6	0'360	1'20	4'0	1'65	7'2	1'70	11'0	1'80	15'5	1'85	20'5	2'00	24'5	2'15	29'5	2'40	35'0	2'70
11'2	0'490	1'40	5'4	1'95	9'8	2'00	15'0	2'10	21'5	2'20	27'5	2'30	33'0	2'50	40'0	2'80	47'5	3'20
12'6	0'640	1'60	7'0	2'20	13'0	2'30	19'5	2'40	28'0	2'50	36'0	2'65	43'5	2'90	52'5	3'20	62'0	3'65
14'4	0'810	1'80	8'9	2'50	16'0	2'55	25'0	2'70	35'5	2'80	46'0	2'95	55'0	3'25	66'5	3'60	78'5	4'10
16'0	1'000	2'00	11'0	2'75	20'0	2'85	31'0	3'00	43'5	3'10	56'5	3'30	68'0	3'60	82'0	4'00	95'0	4'55
17'6	1'210	2'20	13'5	3'05	24'0	3'15	37'5	3'30	53'0	3'40	68'5	3'60	82'0	3'95	99'0	4'40	115'0	5'00
19'2	1'440	2'40	16'0	3'30	29'0	3'40	44'5	3'60	63'0	3'70	81'5	3'95	98'0	4'30	120'0	4'80	140'0	5'45
20'8	1'690	2'60	18'5	3'60	34'0	3'70	52'0	3'90	74'0	4'00	95'5	4'30	115'0	4'70	140'0	5'20	165'0	5'90
22'4	1'960	2'80	21'5	3'85	39'0	4'00	60'5	4'20	85'5	4'35	110'0	4'60	135'0	5'05	160'0	5'60	190'0	6'40
24'0	2'250	3'00	24'5	4'15	45'0	4'30	69'0	4'55	98'0	4'65	125'0	4'95	155'0	5'40	185'0	6'00	215'0	6'85
h_0=			1'05^{m} / 1'50^{m}		1'15^{m} / 1'60^{m}		1'20^{m} / 1'80^{m}		1'25^{m} / 2'00^{m}		1'50^{m} / 2'50^{m}		2'00^{m} / 3'35^{m}		2'50^{m} / 4'15^{m}		3'00^{m} / 5'00^{m}	
φ=			0'75^{m}		0'90^{m}		1'05^{m}		1'15^{m}		1'25^{m}		1'35^{m}		1'40^{m}		1'50^{m}	

OBSERVACIONES. En el caso de que las distancias sean superiores á 120^{m} se tomarán para N_0 los valores que corresponden á 120^{m}. La diferencia de las flechas φ será la misma, y la flecha en reposo deberá mantenerse entre $^{1}/_{40}$ y $^{1}/_{24}$ de la longitud.

Cuando el esfuerzo trasmitido por el cable es muy regular, conviene emplear cables más pesados que los de la tabla, lo cual hace calcular el cable en atencion á una fuerza mayor que la fuerza trasmitida en promedio. En cambio, para un esfuerzo muy regular pueden emplearse cables más ligeros cuando la longitud es un poco considerable.

CAPÍTULO XX

RUEDAS DENTADAS

§ 242

Disposicion de las ruedas dentadas.

Los ejes geométricos de dos ruedas dentadas que se gobiernan mutuamente, pueden presentar uno respecto de otro cuatro posiciones principales, análogas á las indicadas para las poleas en el § 214; y segun las posiciones relativas de los ejes, las ruedas presentan formas y disposiciones diferentes.

Las ruedas destinadas á árboles paralelos reciben una forma cilíndrica (ruedas rectas); para árboles que se cortan tienen forma cónica (ruedas cónicas ó ruedas de ángulo); y en fin, para los árboles que se cruzan sin cortarse, la forma de cada rueda es la de un cilindro ó de un conoide (engranajes hiperboloides). Los ejes de los dientes de las ruedas pueden ser rectos (y es el caso más frecuente), ó curvos en sentido de arcos de hélice. En este último caso la forma de la rueda es una de las que antes hemos indicado. Cuando la trasmision debe efectuarse sin modificar la ley del movimiento, las ruedas deben presentar (prescindiendo aquí de los dientes) la forma de sólidos de revolucion alrededor de sus ejes. Las ruedas de esta especie son las más sencillas y de ellas vamos á ocuparnos ante todo.

A. ENDENTAJE DE LAS RUEDAS RECTAS.

§ 243

Generalidades sobre la forma de los dientes de las ruedas rectas.

Puede en las ruedas rectas adoptarse como perfil de los dientes una forma tal, que todas las ruedas de igual paso puedan endentar rigurosamente unas con otras, es decir, que la relacion de las velocidades angulares de dos cualesquiera de esas ruedas sea siempre constante. Las ruedas que gozan de esa propiedad, pueden designarse con el nombre de ruedas de surtido (1).

En cada par de ruedas que encajen una con otra se designan con el nombre de círculos proporcionales, dos círculos descritos desde los centros de las dos ruedas

(1) En tal caso todas las ruedas de igual paso constituyen en cierto modo una coleccion en que pueden tomarse dos elementos cualesquiera para hacerlos encajar. Véase la *Cinemática*, pág. 71.

con radios tales, que á cada instante sea la velocidad igual en la circunferencia. En los engranajes rectos los círculos proporcionales son tangentes y constituyen los círculos primitivos ó de division. Efectivamente por estos círculos se cuenta el paso de los dientes, esto es, la distancia de los planos medios entre dos dientes consecutivos. Para las ruedas rectas de dientes igualmente rectos, de los que por de pronto vamos á ocuparnos esclusivamente, el eje de cada diente es una generatriz de cilindro trazado por el círculo de division.

Los dientes de las ruedas rectas afectan la forma prismática; las dos bases de un prisma de ese género constituyen los estremos de los dientes; la parte que se halla fuera del cilindro de division, es la cabeza del diente, en tanto que la parte opuesta es el pié; la superficie que limita la cabeza en la cima del diente y la superficie que separa el pié del diente del cuerpo de la rueda, es su raiz ó base. Las superficies que unen la base á la cima del diente, se llaman costados; y la forma que conviene dar á estas superficies, tiene suma importancia y constituye especialmente el problema del endentaje de las ruedas. El espacio comprendido entre dos dientes consecutivos es el vacio ó el hueco de los dientes.

En una rueda recta la longitud l del diente, fig. 634, es la distancia comprendida entre la base y la cima, la anchura b es la separacion de las superficies estremas, y por último, el espesor d, la longitud del arco del círculo primitivo, comprendido entre los costados. El hueco de los dientes está igualmente representado por la longitud del arco de este mismo círculo, comprendido entre las partes llenas de dos dientes consecutivos. Como el hueco es lijeramente superior al espesor y en cambio la longitud de la cabeza es inferior á la del pié, resulta que entonces existe cierto juego entre los costados de los dientes de una pareja ó par de ruedas, así como entre las cimas y las bases de los huecos.

En la construccion de las ruedas dentadas importa atenerse particularmente á dar á los dientes una forma conveniente para que el engranaje de dos ruedas se efectue de una manera satisfactoria. Mas como un error en la forma de los dientes ofrecen ménos dificultades que un error cometido en la division de los círculos, conviene efectuar esa última operacion con la mayor exactitud posible. En tal concepto se tiene mucha más seguridad de los resultados obtenidos, cuando para la construccion de ruedas de engranaje se usan máquinas de dividir ó tallar los dientes. El empleo de máquinas de ese género tiende á generalizarse más y más cada dia, y nunca nos felicitaremos bastante de ello. Para los tornos de filetear, por ejemplo, nunca se deberian emplear otras ruedas que las divididas á máquina; pues los defectos que llevan necesariamente las ruedas meramente fundidas y no talladas, impiden obtener una regularidad suficiente para los diversos filetes de tornillo. Tales defectos tienen consecuencias más perjudiciales todavia, cuando se sirve del torno para tallar los dientes de una rueda destinada á engranar con un tornillo (véase § 261). Con las ruedas de tornillo sin fin, generalmente se quiere obtener una trasmision de movimiento muy suave y sin choques, y ese objeto se logra muy imperfectamente si las porciones de filetes que forman los dientes de una rueda de ese género, presentan ciertas irregularidades producidas por el empleo de un torno de engranajes defectuosos. En un taller de construccion de máquinas, la forma de los dientes que conviene adoptar para una clase determinada de ruedas, no debe ultimarse sino despues de examinar con el mayor cuidado todas las circunstancias que pueden influir en la eleccion de esa forma; y por eso hemos procurado reunir aquí los principios que deben guiarnos para lograr esa determinacion.

§ 244

Radio del círculo primitivo.

En una rueda, cuyo número de dientes es Z y el paso t, nos es dado el radio R del círculo primitivo por la relacion:

$$\frac{R}{t}=\frac{Z}{2\pi}=0'15915\ Z \qquad (260)$$

El radio que se obtiene con esa fórmula es ilógico á causa del número π. Para facilitar su cálculo puede recurrirse á la tabla del párrafo siguiente, que ha sido calculada en virtud de la fórmula (260). Si se quiere evitar que R deje de ser desproporcionado importa elegir el valor del paso, de modo tal que sea una parte alícuota ó un múltiplo, no de la unidad de medida (milímetro), sino de π veces esta unidad; cuyo procedimiento se usa en varios talleres de construccion, y espresándose t por medio de esa nueva unidad, la ecuacion precedente da siempre para R un valor lógico ó proporcionado.

$$R=\frac{Z}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right) \qquad (261)$$

Ejemplo. *Una rueda de* 24 *dientes da un paso de* $6\times3'14...$ *miltmetros. Segun la fórmula* (261) *el radio del círculo de division tiene como valor* $R=24\,.\,6:2=72^{mm}$.

Para señalar en la circunferencia el paso y sus subdivisiones es cómodo servirse de una escala de periferia. Para obtener una escala de ese género, en el sistema métrico se toma en una regla prismática de madera ó metal una longitud de 314^{mm}, y se divide en semi-milímetros: al lado opuesto se toma la misma longitud que se divide en 100 partes, subdividiéndose luego cada una en dos. Las longitudes que en ambos lados llevan las mismas cifras, se encuentran en la proporcion de $1 : \pi$.

Esa escala puede emplearse con ventaja para la rectificacion de arcos de círculos.

En lo que sigue emplearemos siempre los dos métodos que acabamos de indicar: en el primero, el paso referente á la escala ordinaria es proporcionado, y por lo tanto el radio de círculo no puede serlo, mientras que en el segundo el paso espresado en unidades de la escala de periferia es todavia proporcional, lo mismo que el radio, refiriéndose este último á la escala métrica ordinaria. La tabla del párrafo siguiente no debe nunca confundirse con la de *Donkin*, calculada por medio de la espresion $\frac{r}{t} = \frac{1}{2\,sen\left(\frac{180^\circ}{Z}\right)}$, que da el radio de círculo circunscrito en un polígono regular de Z lados, de longitud t. Ese radio, máxime para los cortos valores de Z, es diferente del radio R que antes hemos definido. La confusion que hay á veces entre esas dos tablas suele dar por resultado formar ruedas de construccion viciosa.

§ 245

Tabla relativa al radio del círculo primitivo de los dientes.

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0'159	0'318	0'477	0'637	0'798	0'955	1'114	1'273	1'432
10	1'59	1'75	1'91	2'07	2'23	2'39	2'55	2'71	2'86	3'02
20	3'18	3'34	3'50	3'66	3'82	3'98	4'14	4'30	4'46	4'62
30	4'77	4'93	5'09	5'25	5'41	5'57	5'73	5'89	6'05	6'21
40	6'37	6'53	6'68	6'84	7'00	7'16	7'32	7'48	7'64	7'80
50	7'96	8'12	8'28	8'43	8'59	8'75	8'91	9'07	9'23	9'39
60	9'55	9'71	9'87	10'03	10'19	10'34	10'50	10'66	10'82	10'98
70	11'14	11'30	11'46	11'62	11'08	11'94	12'10	12'25	12'41	12'57
80	12'73	12'89	13'05	13'21	13'37	13'53	13'69	13'85	14'01	14'16
90	14'32	14'48	14'64	14'80	14'96	15'12	15'28	15'44	15'60	15'76
100	15'92	16'07	16'23	16'39	16'55	16'71	16'87	17'03	17'19	17'35
110	17'51	17'67	17'82	17'98	18'14	18'30	18'46	18'62	18'78	18'94
120	19'10	19'26	19'42	19'58	19'73	19'89	20'05	20'21	20'37	20'53
130	20'69	20'85	21'01	21'17	21'33	21'49	21'64	21'80	21'96	22'12
140	22'28	22'44	22'60	22'76	22'92	23'08	23'24	23'40	23'55	23'71
150	23'87	24'03	24'19	24'35	24'51	24'67	24'83	24'99	25'15	25'30
160	25'46	25'62	25'78	25'94	26'10	26'26	26'42	26'58	26'74	26'90
170	27'06	27'21	27'37	27'53	27'69	27'85	28'01	28'17	28'33	28'49
180	28'65	28'81	28'97	29'12	29'28	29'44	29'60	29'76	29'92	30'08
190	30'24	30'40	30'56	30'72	30'88	31'03	31'19	31'35	31'51	31'67
200	31'83	31'99	32'15	32'31	32'47	32'63	32'78	32'94	33'10	33'26
210	33'42	33'58	33'74	33'90	34'06	34'22	34'38	34'54	34'69	34'85
220	35'01	35'17	35'33	35'49	35'65	35'81	35'97	36'13	36'29	36'45
230	36'60	36'76	36'92	37'08	37'24	37'40	37'56	37'72	37'88	38'04
240	38'20	38'36	38'51	38'67	38'83	38'99	39'15	39'31	39'47	39'63
250	39'79	39'95	40'11	40'26	40'42	40'58	40'74	40'90	41'06	41'22
260	41'38	41'54	41'70	41'86	42'02	42'17	42'33	42'49	42'65	42'81
270	42'97	43'13	43'29	43'45	43'61	43'77	43'93	44'08	44'24	44'40
280	44'56	44'72	44'88	45'04	45'20	45'36	45'52	45'68	45'84	45'99
290	46'45	46'31	46'47	46'63	46'79	46'95	47'11	47'27	47'43	47'59

Primer modo de empleo de la tabla anterior.

EJEMPLO. *¿Cuál debe ser el radio del círculo primitivo de una rueda de* 63 *dientes con un paso de* 30^{mm}? *La col.* 5, *lín.* 7 *da:* $R : t = 10'03$, *y por tanto* $R = 10'03 \,.\, t = 10'03 \,.\, 30 = 300'9^{mm}$ *ó sea* 301^{mm}.

Segundo modo de empleo. Tambien se puede en virtud de esa tabla determinar el número de los dientes de una rueda cuando se conoce el paso (calculado) y se da el radio del círculo primitivo.

EJEMPLO. *¿Cuál ha de ser el número de dientes de una rueda cuyo radio de círculo primitivo es de* 1000^{mm} *con un paso de* 40^{mm}? *En tal caso se tiene* $R : t = 1000 : 40 = 25$. *En la tabla se encuentra (col.* 7, *lín.* 16) *el número* 24'99 *que se le aproxima mucho, y por lo tanto debe tomarse para la rueda* 150+7=157 *dientes. En rigor el radio deberia reducirse á* 24'99 . 50=999'6^{mm}; *pero la diferencia entre ese último valor y el precedente puede desecharse por completo.*

Tercer modo de empleo.—Permite á más la tabla determinar el paso de una rueda cuando se conoce el radio R y el número de dientes.

EJEMPLO. *Se da* $R=400$ *y* $Z=54$. *A ese último valor corresponde en la tabla (col.* 6, *línea* 6.) *el cociente* $R : t = 8'59$. *Luego debe tomarse:* $t = R : 8'59 = 400 : 8'59 = 46'56^{mm}$.

Para obtener las divisiones de los dientes en la rueda, el procedimiento más exacto consiste en trazar el círculo cuyo radio R se haya determinado con cuidado, conforme acabamos de indicar, y en dividir la circunferencia en Z partes iguales.

§ 246

Problema general del trazado de los dientes.

En un sistema de dos ruedas rectas las superficies de los dientes que han de gobernarse mútuamente, constituyen partes cilíndricas, cuyas bases están determinadas por una seccion perpendicular á los ejes de las ruedas, pudiendo así limitarse á trazar el perfil de los dientes en una seccion de ese género y particularmente en uno de los planos que limitan los dientes. El problema del endentaje que debe adoptarse, se reduce, pues, en toda su generalidad á lo siguiente: dado el perfil de un diente para una de las ruedas, determinar el perfil del diente de la segunda rueda que ha de encajar con la primera, en la hipótesis de que la trasmision del movimiento tiene que efectuarse de una manera uniforme.

I. PRIMER PROCEDIMIENTO. (*Reuleaux*). Fig. 635. Se conoce el perfil de diente *aSbc* y el círculo primitivo de la rueda O, así como el círculo primitivo de la rueda O_1. Trátase de determinar el perfil de diente a_1S.... para esa rueda O_1. Si la curva dada está colocada de manera que su punto de interseccion S con el círculo primitivo se halle en la línea de los centros OO_1, el punto S pertenece igualmente al perfil que se busca. Para determinar un segundo punto a_1 de este perfil, que en el movimiento de las ruedas debe coincidir con el punto a_1 de la primera curva, tracemos la normal $a1$ á esa curva, tomemos el arco $S1'$ igual al arco $S1$, la línea $1s_1$ igual á la cuerda $S1'$ y Ss_1 igual á $11'$. Si entonces desde los puntos S y $1'$ como centros, con s_1a y $1a$ respectivamente por radios, describimos dos arcos de círculo, el punto de interseccion a_1 de dichos arcos será el punto buscado y $a_1 1'$ será la normal en a^1. Los puntos del perfil dado, que como el punto c, ocupan una posicion tal que sus normales no encuentran el círculo correspondiente, no pueden utilizarse con los círculos primitivos tales como se han dado. Para que sucediese de otro modo seria preciso modificar tales círculos (aumentarlos en el caso de la figura). La curva hallada puede además presentar *nudos* ó puntos de revolucion geométrica, ó en una palabra, una forma completamente impracticable, sin dejar por ello de ser admisible en el concepto meramente geométrico (1).

II. PROCEDIMIENTO ABREVIADO. (*Poncelet*). Figura 636. En el círculo primitivo T_1 se determinan los puntos s_1, t_1, u_1, v_1... que deben coincidir con los puntos s, t, u, v... del otro círculo T. Si de los puntos s_1, t_1, u_1,... como centros con las longitudes de las normales á la curva dada va, uc, etc., se describen arcos de círculo, basta trazar una curva contínua tangente á todos esos arcos para obtener el perfil buscado. Los puntos s, t, u, v... deben tomarse bastante aproximados los unos de los otros.

Si en los dos procedimientos distintos que acabamos de indicar se calculan, á partir de los puntos s_1, t_1, u_1..., las longitudes de las normales va, uc... en sentido inverso, se obtiene para la rueda O_1T_1, un perfil de diente que corresponde á la hipótesis de ser interior el endentaje.

III. SEGUNDO PROCEDIMIENTO. (*Reuleaux*). Figura 637. Se da como antes el perfil *abcSde* y los dos círculos primitivos T y T_1. Se trazan las normales $a1$, $b2$, $c3$..., y por los puntos a, b, c... se describen desde el punto O arcos de círculo, en los que se toman puntos I, II, III..., tales como $SI=a1$, $SII=b2$, $SIII=c3$..., etcétera, y se traza la curva que pasa por los puntos I, II, III, IV, V.... Esta curva que se designa con el nombre de línea de endentamiento, es el lugar geométrico de los puntos de contacto de los dientes, es decir, el contacto tiene lugar en los puntos a, b, c... del perfil dado, cuando esos puntos se hallan en las posiciones I, II, III.... Si entonces desde el punto O_1 se descri-

(1) Véase la *Cinemática*, pág. 70.

ben arcos de círculo que pasen por los puntos *I*, *II*, *III*, se toman sobre T_1 los arcos $S1'$, $S2'$, $S3'$... iguales á los arcos $S1$, $S2$, $S3$... y se hace además $1'a_1=1a$, $2'b_1=2b$, $3'c_1=3c$..., la curva contínua $a_1\,b_1\,c_1$... que se obtiene reuniendo los puntos a_1, b_1, c_1... así determinados, y representa el perfil buscado. Este procedimiento, que es más sencillo que el del N.° I, es á lo ménos tan exacto, y tiene además la ventaja de dar la línea de engranaje. (Véase el párrafo siguiente).

Perfil teórico de la parte inferior de los dientes. Fig. 638. Sucede á veces que para dar al pié del diente una resistencia satisfactoria, es necesario reforzarlo á cada lado por una rinconera que ocupa una parte del vacio. Es evidente que esa rinconera debe estar dispuesta de forma que se encuentre fuera del camino descrito por la arista del diente de la otra rueda, y puede determinarse del modo siguiente: Sean aSb y a_1Sb_1 los perfiles de los dientes de las ruedas T y T_1, a_1 y a_0 la prolongacion del perfil del pié del segundo diente, $ISII$ la línea de endentamiento limitado por los círculos de cabeza K y K_1. A partir del punto S tomemos en los círculos T y T_1, longitudes de arcos respectivamente iguales $S1$, 12, 23... $S1'$, $1'2'$, $2'3'$... y con aberturas de compás sucesivamente iguales á las rectas Sa, $1a$, $2a$, $3a$..., describamos desde los puntos $1'$, $2'$, $3'$... arcos de círculo. La envolvente aa_1g de estos círculos determinará lo que se llama perfil teórico de la base del diente, al cual se sustituye en realidad el perfil a_1f_1, que le es tangente en S y que viene á unirse con el círculo límite F_1. El perfil teórico es una curva cicloidal alargada ó acortada (V. § 249). En la figura, en que el círculo T se reduce á una recta (cremallera), esa curva es una porcion de desarrollante (V. § 254).

§ 247

Del engranaje de los dientes.

El tercer procedimiento que acabamos de indicar, permite determinar no solo el perfil de los dientes, sino tambien la línea de engranaje de dos ruedas que encajan mutuamente; y para completar esa cuestion del engranaje, debemos añadir aquí algunas observaciones importantes.

La línea de engranaje pasa por el punto de interseccion del perfil de cada diente con el círculo primitivo, y encuentra ese perfil en ángulo recto, es decir, la tangente NN á esa línea es normal en S al perfil del diente. A cada punto de la línea de engranaje corresponde un contacto de dientes, y por tanto un punto de contacto en cada uno de los círculos primitivos. Así, por ejemplo, al punto *II* de esta línea corresponden los puntos 2 y 2' en T y T_1. La longitud del arco del círculo primitivo, comprendida entre el punto de encuentro de ese círculo con la línea de engranaje y el punto de contacto en este mismo círculo, correspondiente á un punto cualquiera de esta línea, se denomina arco de arrollo para el punto de engranaje considerado. $S2$ y $S2'$ representan respectivamente en los círculos T y T_1 los arcos de arrollo correspondientes al punto de engranaje *II*.

La suma de los arcos de arrollo para los puntos más distantes de engranaje ($1S+S5$ ó $1'S+S5'$), constituye lo que se llama el arco de engranaje; y su longitud espresada en número de pasos, representa la duracion del engranaje de los dientes considerados, que es fácil determinar aquí gráficamente. Esa duracion depende de la longitud de la parte utilizada de la línea de engranaje. Como la longitud del pié del diente debe aumentarse por efecto de la adicion de una rinconera y de la necesidad de dar paso suficiente á la cabeza del diente de la otra rueda, resulta que en las ruedas ordinarias esa parte utilizada (V-I) está limitada por los círculos de cabeza K y K_1.

En una rueda de perfil de diente determinado en un círculo primitivo conocido, corresponde una sola línea de engranaje, y recíprocamente para una línea dada de engranaje no existe más que un solo perfil de diente satisfactorio. Ese perfil no puede determinarse por medio de otra línea, sino en el caso de conocer los arcos de arrollo que corresponden á los diferentes puntos de esa línea; y siendo así, el perfil del diente puede trazarse fácilmente, y el problema se reduce entonces al que hemos resuelto con el procedimiento indicado al final del párrafo anterior.

En los perfiles que pertenecen al género cicloidal, el arco de arrollo es cabalmente igual á la longitud del engranaje, y de ahí que los dientes de esa especie presenten una sencillez especial bajo el punto de vista de sus propiedades geométricas.

En las ruedas dentadas que se gobiernan debidamente, las líneas de engranaje son congruentes y los arcos de arrollo para los puntos homólogos de esas líneas son de igual longitud. Llenando esta condicion puede construirse un número indeterminado de ruedas destinadas á engranar con una dada.

Las ruedas de ese género son las que hemos denominado ruedas de surtido (§ 243), cuando la línea de engranaje tiene una forma tal que se divida en dos partes congruentes, no solo por el círculo primitivo,

sino tambien por el radio de su punto de interseccion con ese círculo.

En todas las ruedas de surtido que engranen con una cremallera, son congruentes las dos partes del perfil de arriba y abajo del círculo primitivo.

Si por el punto de interseccion de la línea de engranaje con el círculo primitivo se traza un radio que vaya á parar á otro punto cualquiera de esta línea (*SI*, por ejemplo, fig. 637), ese radio da la direccion y el punto de aplicacion da la presion ejercida sobre el diente para el punto de engranaje que consideramos. Para que esa presion que tiende á separar los ejes de las dos ruedas no sea harto considerable, conviene que esa direccion no forme ángulo pequeño con la línea de los centros.

§ 248

Curvas descritas por un punto de un círculo arrollante.

Las curvas descritas por el arrollo de un círculo son aquellas que mejor se prestan á trazados de dientes de las ruedas de surtido, ó más particularmente á trazados de dientes para los cuales interesa determinar de antemano las propiedades geométricas. Cuando un círculo gira sobre otro sin resbalar, cada punto de un radio de ese círculo describe una curva que se designa con los nombres de cicloide simple, alargada ó acortada, segun se halle el punto describente en la circunferencia misma del círculo que gira, en la prolongacion del radio ó en el interior.

El círculo fijo es el círculo director de la curva y designaremos su radio por R, siendo el círculo móvil de radio r el círculo generador ó de arrollo. En el caso en que uno de los dos círculos es interior al otro, su radio conserva el signo +, en tanto que se señala el segundo con el signo —. Esto admitido pueden dividirse en cinco clases distintas las curvas obtenidas por las diferentes combinaciones de R y r, así como de sus signos.

CÍRCULO DIRECTOR.	CÍRCULO DE ARROLLO.	CURVAS CORRESPONDIENTES.
$+ R$	$+ r$	Epicicloide.
$\pm \infty$	$+ r$	Cicloide.
$- R$	$+ r$	Hipocicloide.
$+ R$	$\pm \infty$	Desarrollante de círculo.
$+ R$	$- r$	Pericicloide.

Esas dos especies de curvas gozan de las dos propiedades siguientes:

1.° La normal en un punto de la curva descrita pasa por el punto de contacto correspondiente del círculo generador.

2.° El centro de curvatura para un punto de la curva está determinado por la interseccion de la normal en este punto con la línea que reune el centro del círculo director en el punto diametralmente opuesto al punto describente.

En los casos en que se trata de curvas alargadas ó acortadas, el punto que ha de unirse al centro del círculo director es el punto de interseccion de la prolongacion del radio y de la perpendicular tirada á la normal por el punto de contacto.

A la primera propiedad se debe la superioridad del empleo de las curvas cicloidales para los trazados de dientes; y la segunda propiedad da el medio de reemplazar sin inconvenientes en el trazado de los dientes los perfiles cicloidales con simples arcos de círculo.

§ 249

Trazados de las curvas cicloidales.

I. Procedimiento exacto. Figuras 639 y 640. G es el círculo director, W el círculo de arrollo, A el punto de partida de la curva. Desde el punto A y en ambas circunferencias G y W se trazan á un mismo lado pequeños arcos de igual longitud. Sean a y a_1 dos puntos de division correspondientes. Si desde el punto A con la distancia $a\ a_1$ y desde el punto a con la cuerda $A\ a_1$, se describen dos arcos de círculo, el punto de interseccion P de estos dos arcos será un punto de la curva buscada. Ese procedimiento que en las figuras 639 y 640 se aplica simplemente á la epicicloide y á la hipocicloide, puede igualmente utilizarse para las otras tres clases de curvas cicloidales.

II. Procedimiento abreviado. Si de los puntos de division 1, 2, 3... a,... como centros, con las longitudes de las cuerdas correspondientes en el círculo generador, medidas desde el punto A, se trazan arcos de círculo, estos arcos deben ser tangentes á la curva buscada, y pueden por tanto permitir su trazado en caso que la longitud de los arcos de division A—1, 1—2... se haya tomado bastante pequeña.

En el caso de una curva alargada ó acortada que tenga su punto de partida en B, se empieza por determinar el punto P, no siendo necesario trazar para ello la curva; se describen luego desde los puntos a y P con $a_1 B$ y AB como radios, dos arcos de círculos, cuya interseccion Q es un punto de la curva buscada.

Puede tambien operarse de otra manera: trazar por

el punto a_3 el radio a_3b del círculo generador, hacer pasar por el punto b un arco concéntrico al círculo director y tomar $a_3Q_1=ab$; y el punto Q_1 es entonces el punto de la curva correspondiente al arrollo sobre el arco $Aa_3=Aa_3$.

§ 250

Perfiles de los dientes de las ruedas de surtido.

En las ruedas de ese género puede el perfil de los dientes formarse en rigor con un arco de epicicloide y un arco de hipocicloide, siendo engendrados estos dos arcos por un círculo móvil de un radio determinado para cada valor del paso.

I. Trazado de una rueda de dientes esternos. Fig. 641. Se da el número de dientes Z y el paso t ó la relacion $t:\pi$.

Tomemos $OS=R=\frac{Zt}{2\pi}=\frac{Z}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right)$ y para el radio r_0 del círculo de arrollo W, $r_0=0'875\,t=2'75\left(\frac{t}{\pi}\right)$. Tracemos el círculo de cabeza K y el círculo de pié F distantes del círculo primitivo T, el primero de $0'3\,t$ y el segundo de $0'4\,t$, y fijemos el espesor de los dientes en $^{19}/_{40}\,t$. Tomado el arco Sb igual al arco ab y el arco Sc igual al arco ic, Sa es un arco de epicicloide, engendrado por el rollo de W al esterior de T y Si un arco de hipocicloide, engendrado por el rollo de un círculo de igual radio en el interior de T.

En el caso en que el número de dientes sea once, el arco Si se reduce á una recta dirigida segun el radio. Para que la hipocicloide se reduzca á una recta, es preciso en efecto que r_0 sea igual $^1/_2\,R$. Ahora bien, $2\pi R=Zt$ y $r_0=0'875t$. De donde se saca $Z=0'875\,.\,4\,.\,\pi=11$. Esa forma de dientes puede tambien aplicarse debidamente, aun cuando baje hasta siete el número de los dientes de la rueda; pero para $Z<11$, la curvatura del arco de hipocicloide es diferente de la que está representada en la figura, de suerte que el espesor del diente, á partir del círculo primitivo iria en disminucion hasta el círculo de pié. En vez de dar enteramente á los costados del diente ese perfil teórico, solo se utiliza una parte de su longitud, adaptándola por medio de fuertes rinconeras á la corona de la rueda (V. § 246, en que se da un ejemplo por la fig. 638 de ese género de endentaje para un piñon de siete dientes que engrana con una cremallera). En este caso conviene tambien reforzar los dientes por medio de discos laterales procedentes de fundicion con ellos. Las relaciones indicadas antes dan como juego $^1/_{10}\,t$ al estremo de los dientes y $^1/_{20}\,t$ entre los costados.

II. Trazado de una rueda de dientes internos. Fig. 642. Prescindiendo del juego, la forma de los dientes para una rueda interior es exactamente la misma que para una rueda dentada esteriormente de igual tamaño. Sean O el centro de la rueda, T el radio del círculo primitivo, K el círculo de cabeza trazado en el interior de T á una distancia igual á $0'3\,t$ y F el círculo de pié trazado al esterior de T y distante de $0'4\,t$. Tomemos $r_0=0'875\,t=2'75\,\frac{t}{\pi}$ y para el espesor de los dientes, $^{19}/_{40}\,t$. Sa representa un arco de epicicloide engendrado por el arrollo de W sobre T, y Si un arco de hipocicloide engendrado por el arrollo del mismo círculo al interior de T.

Para la cremallera se tiene $R=\infty$. Sa y Si son en tal caso arcos congruentes de cicloide ordinaria (véase figura 638, § 246).

Con el sistema de endentaje que antes hemos indicado, la línea de engranaje coincide con el círculo generador, y el arco de engranaje tiene como valor el arco ba, aumentado con el arco b_1a_1 que le corresponde en la otra rueda, cuando las dos ruedas son dentadas esteriormente. En el caso en que una de las ruedas sea de dientes internos, dicho arco es igual al arco ba aumentado con el arco ci en esta rueda. La duracion del endentamiento ε varia de $1'22$ á $1'60$.

§ 251

Trazado de los arcos de cicloide por arcos de círculo.

Los arcos de cicloide que constituyen los perfiles de los dientes, pueden prácticamente reemplazarse de una manera bastante aproximada con dos porciones de arcos de círculos de curvatura.

Fig. 643. Desde el punto O como centro se describe el círculo primitivo T y los círculos de cabeza y de pie K y F, determinados como hemos indicado antes; y tambien desde los centros M y M_1 se describen los círculos de arrollo W y W_1, tangentes los dos en S al círculo T. Luego despues se trazan los diámetros BMD y $B_1M_1D_1$, que forman los dos con la línea de los centros un ángulo de 30°, y se traza la recta C_1BSB_1, que pasa por los tres puntos B, S y B_1. Uniendo los puntos D y D_1 al punto O, se obtienen las rectas OD y OD_1C_1, cuyos puntos de interseccion C y C_1 con la recta anterior son precisamente los centros de curvatura de los arcos aBb y cB_1i. Si se trazan

estos arcos terminando en los círculos descritos primeramente desde el punto O, no se ha de hacer otra cosa más que juntarlos para obtener el perfil completo del diente.

El cálculo da para la espresion de los radios de curvatura:

$$\frac{\rho}{t}=0'45\,\frac{2Z\pm 11}{Z\pm 11}\quad\text{y}\quad\frac{\rho}{\left(\frac{t}{\pi}\right)}=1'42\,\frac{2Z\pm 11}{Z\pm 11}\qquad(262)$$

El signo + corresponde al radio de curvatura CB (ρ_a) del arco de epicicloide, y el signo — al radio de curvatura C_1B_1 (ρ_i) del arco de hipocicloide. El pié del diente debe entonces, como hemos visto, adaptarse por medio de una rinconera á la corona de la rueda.

1.er Ejemplo. *Suponiendo* $Z=63$, $t=30$ *se obtiene para el radio de curvatura del arco de epicicloide:* $\rho_a=30\,.\,0'45\,\frac{126+11}{63+11}=30\,.\,0'45\,.\,\frac{137}{74}=0'8333\,.\,30$, *ó muy aproximadamente* 25^{mm}; *á la vez que se tiene para el radio de curvatura del arco interior:* $\rho_i=30\,.\,0'45\,\frac{126-11}{63-11}=30\,.\,0'45\,.\,\frac{115}{52}=0'995\,.\,30=30^{mm}$.

2.° Ejemplo. $Z=11$, $t:\pi=10$; *y entonces se tiene* $\rho_a=10\,.\,1'42\,.\,33:22=42'6:2=21'3^{mm}$, y $\rho_i=10\,.\,1'42\,.\,11:0=\infty$, *es decir, en este caso los costados se componen de simples líneas rectas trazadas por el centro de la rueda.*

3.er Ejemplo. *Se hace* $Z=7$, $t=50$; *y se tiene* $\rho_a=50\,.\,0'45\,\frac{14+11}{7+11}=50\,.\,0'45\,.\,\frac{25}{18}=31'2^{mm}$, *ó sea* 31^{mm}. *En consecuencia se encuentra para el radio del arco interior* $\rho_i=50\,.\,0'45\,.\,\frac{14-11}{7-11}=-50\,.\,0'45\,.\,\frac{3}{4}=-50\,.\,0'3375=-17^{mm}$. *En este caso los costados del diente están dispuestos como se indica en la fig.* 638.

Observacion. Cuando el número de dientes no llega á 15, es preferible recurrir al trazado exacto indicado en el § 250, porque en tal caso la forma aproximativa que daria el trazado por arcos de círculo, no facilitaria una marcha bastante regular.

En los talleres ingleses se usa generalmente para determinar el perfil de los dientes un procedimiento indicado por *Willis*. Tiene este procedimiento la condicion de dar los mismos valores á las constantes que los que aquí hemos indicado. Da una aproximacion muy suficiente cuando el número de dientes de la pequeña rueda no baja de 12. Se puede resumir de la manera siguiente ese procedimiento:

Se toma un trasportador (fig. 644) de cuerno ó de carton, llamado odontógrafo, $ABDEF$, en el que la línea DE forma con el lado FB un ángulo NAB igual á 75° y cuyo mismo lado FB lleva dos escalas graduadas, para cada una de las cuales el cero está en el punto A. En la circunferencia primitiva, á partir del orígen S de un diente, se marcan los puntos A y A', de tal modo que los arcos SA y SA' sean iguales á un semi-paso; y luego se aplica el odontógrafo sucesivamente y siguiendo los radios OA y OA' como lo indica la figura. Los centros I é I' de los dos arcos de círculo que deben constituir los perfiles de la cabeza y del pié del diente, se determinan entonces con escalas, por medio de una tabla numérica que suministra las longitudes AI y $A'I'$.

Leauté demostró (*Boletin de la Sociedad matemática de Francia*, 1876) que era posible obtener una aproximacion muy superior á la que da el trazado de *Willis*, sin modificar en nada la série de operaciones por efectuar, y sin introducir la menor complicacion en los cálculos. Basta para ello dar al odontógrafo un ángulo de 82'5° en vez de 75, tomar SA y SA' iguales á un cuarto de paso y aumentar los radios IS é $I'S$ en la proporcion $^{41}/_{25}$.

La aproximacion á que conduce este procedimiento es muy suficiente en los casos ordinarios de la práctica, y hace además posible retroceder mucho en la cuestion de los límites, adoptando la regla siguiente que segun *Leauté* da el máximo de aproximacion:

Determinar el centro del círculo con dos odontógrafos que tengan por ángulos $7'1°\,\frac{t}{R}$ y $16'3°\,\frac{t}{R}$ *que se aplicarán, el primero á los* 0'25 *del paso y el segundo á los* 0'57 *del mismo.*

§ 252

Endentajes de costados rectos.

El trazado de los costados rectos de un diente es un caso sencillo del trazado de cicloides, si bien las ruedas que de ese modo se obtienen, no son ruedas de surtido (véase § 243), ya que ese género de trazado conviene especialmente para los engranajes cónicos, conduciendo en este caso á adoptar para los costados de dientes de madera, superficies planas que son las más ventajosas en todos conceptos para esa materia.

I. Ruedas que engranan esteriormente.—Figura 645. Sean Z el número de dientes, R el radio de

la rueda de dientes de madera, Z_1 y R_1 los datos correspondientes para la rueda dentada de fundicion, t el paso, k y f, k_1 y f_1 las longitudes de cabeza y de pié de los dientes para ambas ruedas, W el círculo de arrollo que engendra el perfil de los dientes de la rueda R_1. Debe tomarse $R=\frac{Zt}{2\pi}=\frac{Z}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right)$, el radio de W igual á $\frac{R}{2}$, $R_1=\frac{Z_1}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right)$, $k=0'1\,t$, $f=0'6\,t$, $k_1=0'5\,t$, $f_1=0'2\,t$, y el espesor de los dientes para ambas ruedas igual á $\frac{19}{40}t$. El perfil aSi del diente de costados rectos se compone de la recta Si dirigida segun un radio de círculo O y de un cuarto de arco de círculo Sa, cuyo radio es $^1/_{10}\,t$. El arco Sb_1 se toma igual al arco b_1a_1, y Sa_1 representa un arco de epicicloide engendrado por el arrollo del círculo W sobre el círculo T_1; el arco a_1S está prolongado por una porcion de recta Si_1, que se enlaza por medio de una rinconera con el arco de la rueda. El conjunto de esas dos líneas a_1S y Si_1, ó sea a_1Si_1 da el perfil del diente de costados curvos.

II. Ruedas de engranaje interno. Fig. 646. La rueda de endentamiento interno tiene los dientes curvos de fundicion. Su radio es R_1 y el número de sus dientes Z_1; para la segunda rueda el número de dientes es Z y el radio R; el círculo generador W tiene por radio $^1/_2\,R$; y en cuanto á las longitudes de la cabeza y del pié de cada diente, tienen las mismas espresiones que antes. El perfil del diente de madera es la recta aSi que es levemente redonda en la parte superior; y el perfil del diente de fundicion es a_1S_1, que se compone del arco de hipocicloide a_1S engendrado por el arrollo de W sobre T_1 y de la parte de enlace Si_1. A querer que los dientes sean de costados rectos en la rueda de endentamiento interior, se habria de adoptar para el perfil de los dientes de la otra rueda un arco de pericicloide engendrado por el arrollo, sobre el círculo primitivo de esa rueda, y de un círculo generador cuyo radio fuese la mitad del de la primera rueda. Bajo el punto de vista de la ejecucion las formas de los dientes así obtenidos serian ménos ventajosos que los suministrados por el método anterior.

En el trazado por costados rectos para el endentaje de una cremallera y su piñon puede operarse de dos maneras: tomar R_1 infinito, conservando para R un valor definido, y en tal caso el perfil de los dientes de la cremallera habria de componerse de arcos de cicloide ordinaria. Si en cambio se tomase R infinito conservando R_1 un valor definido ó finito, la cremallera tendria dientes de costados rectos, en tanto que los del piñon estarian formados por desarrollantes de círculo.

En el trazado por costados rectos la línea de engranaje coincide con el círculo generador $^1/_2\,R$; la longitud del arco de engranaje es igual al arco b_1a_1, y por último la duracion del engranaje ε está comprendida entre 1'7 y 3'7. Cuando los dos perfiles del diente de flancos ó costados curvos se cortan antes de encontrar el círculo de cabeza, no es admisible ese diente sino con la condicion de ser ε mayor que 1; y en caso contrario conviene aumentar el número de los dientes.

§ 253

Endentajes de husos. Endentajes mixtos.

Aun se utiliza muy amenudo el trazado por líneas rectas armando las dos ruedas de dientes cuyo pié está formado de caras rectas y la cabeza de caras curvas. Pero los dientes que así se obtienen, no gozan de la propiedad de encajar rigurosamente unos con otros, y por ese motivo no deben admitirse en la construccion ordinaria de las máquinas. Casi únicamente en los engranajes de relojeria se puede en rigor conservar ese método de trazado, porque permite á la vez tallar fácilmente los huecos con la lima y emplear ruedas de corto número de dientes.

Si se toma el diámetro del círculo generador más grande de cierta fraccion que el radio del círculo primitivo correspondiente, se obtienen endentajes que son todavia de posible ejecucion, por más que en la práctica no sean admisibles sino en casos muy especiales.

Cuando para círculo generador se toma el círculo primitivo de una de las dos ruedas, se obtienen para el perfil de los dientes de la rueda correspondiente al círculo primitivo sobre el cual gira, arcos de epicicloide, en tanto que para la otra rueda el perfil de los dientes se reduce á un punto. En este género de trazados entran los engranajes de huso.

Engranaje esterno de husos. Fig. 647. Desde el punto á que se reduce el perfil del diente de la rueda R se describe con $\frac{19}{80}\,t$, como radio, un círculo que da el perfil del huso correspondiente á este punto. En cuanto al perfil del diente de la rueda R_1, está formado por una curva paralela (ó equidistante) al arco de epicicloide Sa engendrado por el punto S en el arrollo de T sobre T_1 (el arco ab = al arco Sb): la envolvente de los círculos descritos desde diferentes puntos de Sa con un radio igual al del huso, da el perfil cd de una parte de este diente; y la otra parte di está formada por un cuarto de círculo. La línea de engranaje coincide

con el círculo T; su longitud SI cuyo límite I está determinado por el círculo de cabeza K_1 y que es igual al arco de engranaje, debe ser superior á t, y por lo tanto igual á lo ménos á 1'1 t. Ese último valor sirve para determinar la longitud k'_1 y la longitud real de la cabeza k_1 que de ella se deduce.

Engranaje interno de husos. Fig. 648. La marcha que ha de seguirse es idéntica á la anterior. La parte cd del perfil del diente está formada por una curva paralela al arco de hipocicloide Si engendrado por el arrollo de T' sobre T_1 (el arco Sb = al arco ib); la longitud SI del engranaje, que es la misma que la del arco, debe tomarse á lo ménos igual á 1'1 t. El perfil da del pié del diente es una recta dirigida segun el radio y no tiene necesidad de enlazarse con la corona por un arco de círculo de radio tan grande como en la fig. 647.

En la fig. 649 es hueca la rueda que lleva los husos; el perfil cd es paralelo al arco de pericicloide. Sa engendrado por el arrollo de T sobre T_1 (el arco Sb = al arco ab); la longitud SI del engranaje que como antes es la misma que la del arco, debe ser á lo ménos igual á 1'1 t, y el perfil di del pié del diente es una recta radial.

La fig. 650 representa un caso particular del trazado de la figura 648. En este caso se tiene $R = {}^1/_2 R_1$, y por tanto $Z = {}^1/_2 Z_1$ lo que para $Z = 2$ da $Z_1 = 4$. El perfil cd es una paralela á la recta Si, á la que se reduce aquí la hipocicloide (el arco Sb = al arco bi); y la longitud SI del engranaje tiene todavia el mismo valor que el arco de engranaje. Este arco es aquí necesariamente más pequeño que t; si bien cómo la forma recta de los costados de los dientes de la rueda R_1 permite suprimir todo juego, de manera que el mismo huso engrana con los dos costados opuestos, resulta que el valor del arco de engranaje puede considerarse como igual al doble de SI.

Muchos autores miran ese género de engranaje como un mecanismo especial; y en las instalaciones en que se adopta, los husos son verdaderos rodillos móviles dotados de gorrones.

Si en la figura 648 se aumenta indefinidamente el radio R_1, se obtiene el mecanismo de cremallera en el que los perfiles de los dientes de la misma están formados por líneas paralelas á cicloides ordinarias.

Si en cambio es el radio R el que aumenta indefinidamente, se obtiene en la fig. 649 una forma de cremallera muy sencilla, de fácil ejecucion y que mas amenudo se emplea con preferencia á la primera. En el piñon se forman los perfiles de los dientes con paralelas de desarrollantes de círculo.

Los engranajes de husos en las instalaciones que exigen cierta exactitud y no se repiten amenudo, ofrecen la ventaja de que los husos pueden ejecutarse muy sencilla y exactamente al torno; las cremalleras de husos de hierro forjado se emplean mucho en la práctica para todos los aparatos expuestos al frio, como los aparatos de maniobra de las esclusas, de los puentes giratorios, etc.

Dentaje de dos puntos. Fig. 651. Si se reunen á la vez dos endentajes en un solo punto, se obtiene un nuevo endentamiento que permite adoptar para una de las ruedas un número muy corto de dientes, y pasar por lo tanto de una velocidad á otra muy diferente, empleando ruedas de dimensiones poco considerables. En la figura los dos círculos primitivos son al propio tiempo círculos generadores. Sa es un arco de epicicloide (engendrado por el arrollo de T_1 sobre T) que en la longitud SI engrana con el punto S de la rueda T; Sa_1 es otro arco de epicicloide (engendrado por el arrollo de T sobre T_1) que en la longitud SII engrana con el punto S de la rueda T_1. Si y Si_1 son los perfiles de los pies de los dientes para las ruedas R y R_1, y Sag y Sa_1g_1 los perfiles teóricos de los huecos de las mismas ruedas (véase § 246). La pequeña rueda es de empleo muy conveniente con la condicion de engastar los dientes entre dos coronas laterales. Ese modo de engranaje se encuentra con mucha frecuencia en las cabrias de carruajes y en los aparatos de elevacion.

Endentaje mixto. Fig. 652. Ese género de endentaje que es muy conveniente para los pequeños piñones de los aparatos de elevacion, tiene la ventaja de disminuir el vaciado del pié del diente; y ese resultado se debe al empleo de los costados rectos en el pié de los dientes de la rueda pequeña. A fin de obtener una duracion suficiente de engranaje (en la rueda de tres dientes con cremallera alcanza 1'15), conviene utilizar en las dos ruedas las curvas que determinan la cabeza de los dientes hasta su punto de encuentro. En la figura Sa es un arco de desarrollante de círculo engendrado por el arrollo sobre T del círculo primitivo T_1 (que aquí se reduce para la cremallera á una línea recta). Si es una línea recta radial engendrada por el arrollo sobre T del círculo W del radio ${}^1/_2 R$, y Sa_1g_1 es el perfil teórico del hueco de la rueda T. El engranaje de Sa con el punto S de la cremallera tiene lugar en la longitud SII. El arco de cicloide Sa_1 engendrado por el arrollo de W sobre T_1 engrana en la longitud SI con el costado Si del pié del diente de la rueda T.

§ 254

Endentajes por desarrollantes de círculo.

Endentajes esterno é interno. Figs. 653 y 654.

Supongamos que se han dado el número Z de dientes y el paso t, en que la relacion $t:\pi$ de la rueda, cuyos dientes han de trazarse con un perfil formado por un arco de desarrollante de círculo. Tomemos $OS=R=\frac{Zt}{2\pi}=\frac{Z}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right)$; tracemos luego los círculos de cabeza y de pié, F y K, á distancias f y k del círculo primitivo, respectivamente iguales á $0'4t$, y $0'3t$, y adoptemos $^{19}/_{40}\,t$ para el espesor de los dientes. Tiremos por el punto S la línea NSN_1, inclinada de 75° sobre la línea OS; y el círculo G trazado tangencialmente á esa recta tendrá como radio $r=0'966\,R=0'154\,Zt=0'483\,Z\left(\frac{t}{\pi}\right)$. Los arcos Sa y Sg descritos por el punto S de la recta, durante su desarrollo y su arrollo sobre el círculo G, dan el perfil buscado aSg del diente que en el caso del endentaje esterior y para un número de dientes inferior á 55, debe ser prolongado por una parte recta radial gi y enlazado por una cuña ó rinconera con la corona de la rueda.

La línea de engranaje es NN_1; y su longitud total se compone de dos segmentos Sb y Sb_1, determinados por las intersecciones de esa linea con los círculos de cabeza. En la rueda de endentaje interno (fig. 654) el segmento inferior es Sc. Para determinar la duracion ε del engranaje basta tirar por los estremos de un arco igual al paso, tomado del círculo primitivo, dos radios, y tomar el arco que comprenden en el círculo de radio r como unidad de medida para la longitud del engranaje. Para dos ruedas de igual tamaño, cada una de las cuales tenga 14 dientes, ε es poco superior á la unidad. Por lo general ε se halla comprendido entre 1 y 2'5.

La desarrollante que limita el perfil de los dientes puede reemplazarse por un arco de círculo. El máximo de aproximacion que se pueda obtener, está designado por la regla siguiente: (Leauté, *Estractos de la Academia de las ciencias de Paris*, 3 de Junio de 1878):

Tomar (fig. 656), á partir del punto A de la circunferencia primitiva un arco $AK=^{7}/_{16}$ del paso; trazar el radio OK que corta en T la tangente en A, y escoger para este centro de círculo el punto C de OK y situado entre K y T y tal que nos dé: $CK=^{1}/_{9}\,KT$.

Trazar enseguida la tangente á la circunferencia primitiva en el punto M situado á los 0'35 del paso y tomar en esa tangente á partir de M y por el lado A, una longitud MD igual al arco AM. El círculo debe pasar por D.

Este círculo difiere tan poco de la desarrollante que en la práctica puede dejar de construirse el punto D y hacer pasar el círculo por el punto mismo A.

Cremallera. (Fig. 655). El perfil de los dientes se reduce á una recta aSi inclinada de 75° sobre el círculo primitivo T, que es aqui una línea recta. El ángulo de 75° se obtiene fácilmente yuxta-poniendo dos escuadras comunes, una á 45° y otra á 30.

En las ruedas de corto número de dientes, el círculo de radio r, que limita la parte curva del perfil de los dientes, se aproxima mucho al círculo primitivo. De donde resulta un inconveniente bastante grave en el concepto del engranaje. Efectivamente en ese caso el segmento SB de la recta NN que está comprendido entre los dos círculos, es más pequeño que el otro segmento determinado por la interseccion de la recta NN con el círculo de cabeza del diente de la rueda conductora (fig. 657), de suerte tal, que la arista a tiende á tallar el pié del otro diente por el perfil correspondiente al arco afg (véase fig. 638). Para evitar ese inconveniente seria menester que la línea que limita la cabeza del diente, á la que pertenece el punto a, no se elevase más que la línea KK', ni aun por el punto B.

Pero la contradiccion que implicaria el resultado de un endentamiento geométricamente exacto que condujese á un engranaje inadmisible, no es en realidad mas que aparente. Conforme á las hipótesis hechas con respecto á la longitud de las cabezas de dientes, el perfil del pié del diente en la rueda pequeña deberia formarse, no ya de un arco de simple curvatura, sino de una doble curva (Υ), compuesta de dos arcos de desarrollantes que se unan en punta sobre el círculo de radio r. De esos dos arcos el uno iria á parar en el vacio y por lo tanto seria impracticable. Luego, pues, aqui se trata realmente de uno de los casos estudiados antes (I, § 246). La curva de pié indicada en la fig. 657 no es admisible, porque cercena una parte de la curva rigurosa.

Con el modo de endentaje que acabamos de indicar, no se realiza la condicion anterior para las ruedas que encajen con una cremallera, sino cuando Z es á lo ménos igual á 28. Otro medio de evitar ese apuntalamiento consiste en suprimir la arista a reemplazándola con una parte redondeada; y ese es el medio que amenudo se usa en la práctica; si bien nos interesa añadir que en ciertos casos es menester mucho trabajo para evitar todo riesgo de apuntalamiento.

§ 255

Frote de los dientes de engranajes rectos.

El frote de los dientes de engranajes depende esencialmente en las ruedas rectas de las curvas adoptadas

para los perfiles, y se determina segun la forma, magnitud y posicion de la línea de engranaje. Generalmente el frote aumenta con la duracion ε del engranaje. En la espresion de ese frote ε se halla afectado de un coeficiente, variable con la posicion de la línea de engranaje, y es igual á $^1/_2$, cuando el arco de engranaje, como sucede comunmente en los dientes de perfiles cicloidales, se encuentra repartido en dos partes iguales por la línea de los centros de los círculos primitivos. Es igual á 1 cuando ese arco se halla por entero situado á un mismo lado de la línea de los centros, como en los dientes de costados rectos; y por último puede tomarse igual á $^3/_4$, cuando la division de la línea de engranaje, como en los endentamientos por desarrollantes, es intermedia entre las dos anteriores. El frote depende en gran parte del número de los dientes, ya que es inversamente proporcional á ese número, y por tanto disminuye muy rápidamente á medida que ese número aumenta.

Si designamos por f el coeficiente de frote, por Z y Z_1 los números de dientes, la pérdida de trabajo p_r, debida al frote de los dientes, se espresa con las fórmulas siguientes:

a) para endentajes de perfiles cicloidales:

$$p_r = \pi f \left(\frac{1}{Z} \pm \frac{1}{Z_1}\right) \frac{\varepsilon}{2}$$

b) para endentajes de costados rectos:

$$p_r = \pi f \left(\frac{1}{Z} \pm \frac{1}{Z_1}\right) \varepsilon \qquad (263)$$

c) para endentajes de desarrollantes:

$$p_r = \pi f \left(\frac{1}{Z} \pm \frac{1}{Z_1}\right) \frac{3}{4} \varepsilon$$

El coeficiente f, aun para las ruedas cuyos dientes están pefectamente engrasados, conserva un gran valor, porque generalmente la presion por unidad de superficie es muy grande. Las más de las veces puede adoptarse el valor $f = 0'15$; si bien con las ruedas nuevas y las que no están engrasadas f se eleva á 0'20 ó 0'25 y hasta más. En las fórmulas debe tomarse el signo — cuando una de las ruedas (Z_1) es de endentaje interno.

1.er Ejemplo. *En un par de ruedas que tengan siete dientes de perfiles cicloidales, la duracion del engranaje tiene como valor* $\varepsilon = 1'225$. *Tomando* $f = 0'15$, *la fórmula* (263, *a*) *da para la pérdida de trabajo por frote:* $p_r = \frac{3'14 \cdot 0'15 \cdot 2 \cdot 1'225}{2 \cdot 7} = 0'08243$ *ó* $8\,^1/_4\,\%$.

2.° Ejemplo. *Endentaje de perfiles cicloidales:* $Z = Z_1 = 40$. *En este caso* $\varepsilon = 1'44$ *y se tiene:*

$$p_r = \frac{3'14 \cdot 0'15 \cdot 2 \cdot 1'44}{2'40} = 0'016995 \text{ ó } 1'7\,\%.$$

3.er Ejemplo. *Dentaje de perfiles cicloidales:* $Z = 7$, $Z_1 = 60$ *(rueda de endentaje interno). Entonces se tiene* $\varepsilon = 1'40$ *y por lo tanto,*

$$p_r = 3'14 \cdot 0'15 \cdot 0'7 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{60}\right) \text{ ó } 4'2\,\%.$$

4.° Ejemplo. *Endentaje de perfiles cicloidales:* $Z = Z_1 = \infty$ *(cremallera). En este caso* $\varepsilon = 1'37$ *y* $p_r = \frac{3'14 \cdot 0'15 \cdot 1'37}{2} \left(\frac{1}{7} + 0\right)$ *ó* $4'6\,\%$.

5.° Ejemplo. *Dentaje de costados rectos:* $Z = Z_1 = 40$. *En este caso se encuentra* $\varepsilon = 1'85$, *y la fórmula* (263, *b*) *da entonces:* $p_r = \frac{3'14 \cdot 0'15 \cdot 1'85 \cdot 2}{40}$ *ó* $4'3\,\%$, *es decir, una pérdida que es* $2\,^1/_2$ *veces la que hemos encontrado en el 2.° ejemplo.*

6.° Ejemplo. *Endentamiento por desarrollantes:* $Z = Z_1 = 40$. *Entonces* $\varepsilon = 1'92$ *y la fórmula* (263, *c*) *da:* $p_r = \frac{3'14 \cdot 0'15 \cdot 2 \cdot 0'75 \cdot 1'92}{40} = 0'0339$ *ó* $3'4\,\%$, *valor doble del del ejemplo 2.°*

De ahí puede deducirse que para los tres géneros de endentaje, el máximo de pérdida por frote corresponde á los costados rectos y el mínimo á los perfiles cicloidales.

El desgaste de los dientes no depende únicamente del valor del coeficiente de frote, sino tambien de las variaciones de la presion mútua de los dientes en los diversos puntos y de la relacion de las longitudes de las partes frotantes de los perfiles de los dientes de dos ruedas. Es obvio, segun esto, que en los dientes de presion constante el desgaste no es por ello forzosamente igual en todos los puntos, y es un grave error suponer, como sucede muy amenudo, que en los endentajes de desarrollantes (en que es constante la presion) no modifica el desgaste, la forma de los dientes. Por el contrario las deformaciones debidas en ese género de endentaje al desgaste, son relativamente las más considerables, puesto que en tal caso la diferencia de longitud entre las partes frotantes (comprendidos el costado interno del círculo primitivo y la cabeza del otro diente) es cabalmente mayor que en los otros sistemas. Muchas veces se ha tenido ocasion de comprobar en la

práctica la exactitud de esa advertencia: de dos ruedas que engranen y estén dotadas de dientes de desarrollantes, la más pequeña (el piñon) ofrece amenudo huecos de mucha profundidad en la parte del perfil situada al interior del círculo primitivo. En concepto del desgaste el sistema más ventajoso de los tres principales de endentaje que hemos examinado, es tambien el de perfiles cicloidales.

Réstanos, al terminar, advertir que se puede trazar geométricamente la pérdida de trabajo debida al frote que acabamos de calcular. Tómanse al efecto las diferencias de longitud de las partes frotantes de los perfiles, se las divide por las cuerdas correspondientes del arco de engranaje, y se multiplica por el coeficiente de frote la suma de los dos cocientes asi obtenidos. El resultado es la pérdida del trabajo p_r. En los endentajes por desarrollantes, las dos cuerdas se confunden cabalmente con los dos segmentos de la linea de engranaje. La misma regla da igualmente el valor de p_r para los endentamientos de husos. Esa regla da al delineante la manera de trazar con el compás en su dibujo la pérdida de frote correspondiente al sistema de endentaje que ha adoptado.

§ 256

Ventajas é inconvenientes de los diversos sistemas de endentajes.

Los dos sistemas principales de endentajes por desarrollantes y perfiles cicloidales ofrecen á la par ventajas é inconvenientes que vamos á esponer sucesivamente.

Dentajes de perfiles cicloidales. Una de las grandes ventajas de este sistema consiste en que para ruedas de igual tamaño el límite del número de los dientes puede bajar hasta 7, mientras que en el sistema por desarrollantes y para las ruedas de igual tamaño el límite inferior es 14, y para las ruedas desiguales es 11 en la más pequeña. Con los perfiles cicloidales la pérdida de trabajo debida al frote es relativamente muy pequeña, y el desgaste no modifica sino muy levemente la forma de los dientes. Un inconveniente, si bien corto, es la doble curvatura (en forma de S) que deben presentar los perfiles y que hace algo difícil su ejecucion. Otro inconveniente dimana de que la separacion de los ejes de dos ruedas que engranen, no puede modificarse sensiblemente sin alterar la regularidad de la trasmision de movimiento.

Dentajes por desarrollantes. Las ventajas más importantes de este sistema provienen en primer lugar de la forma muy sencilla de los dientes, y en segundo lugar de poder los ejes de las dos ruedas desplazarse lijeramente, sin que tales ruedas dejen de trasmitir el movimiento en una relacion constante. Pero estas ventajas quedan contrarestadas, á lo ménos en las ruedas de corto número de dientes, por el inconveniente que antes hemos señalado y que en tal caso consiste en que la cabeza del diente de una de las ruedas debe describir con relacion al diente que engrana con ella, ó mejor dicho con relacion á su costado recto, un camino tal que forzosamente le comunica velocidad irregular.

Puede ese inconveniente corregirse apartando los ejes de las ruedas en cantidad suficiente para que en ambas ruedas los dientes salgan á lo ménos de la línea de engranaje al mismo tiempo. De ahí resulta que ese dentaje da por sí mismo el medio de corregir uno de sus defectos, si bien cuando se trata de trasmisiones importantes en que son de temer choques muy frecuentes, importa evitar que el mecanismo marche con ruedas así separadas, máxime cuando el número de los dientes es poco considerable.

El dentaje por desarrollantes no debe, pues, en general recomendarse sino para las ruedas de gran número de dientes (aquellas en que el piñon no tiene ménos de 30), porque en tal caso pueden utilizarse debidamente las propiedades que ofrece, mientras que para los engranajes en que especiales condiciones conducen al empleo de piñones de un diámetro tan pequeño como sea posible, es forzoso recurrir al empleo de perfiles cicloidales. Ese último sistema de endentaje es además escelente, conforme hemos dicho, para las ruedas de gran número de dientes, y ofrece muy serias ventajas en concepto del frote y desgaste. Su empleo tiende sobre todo á generalizarse en los talleres de construccion para las ruedas rectas fabricadas de manera que una rueda cualquiera goce de la propiedad de engranar debidamente con todas las ruedas de igual paso; lo cual tiene la ventaja de reducir considerablemente el número de modelos. Para las ruedas cónicas á las que en general no se pretende dar la misma propiedad, es preferible el dentaje por desarrollantes, en virtud de la forma más sencilla de los dientes.

En los dentajes de costados rectos que por efecto de la forma igualmente sencilla del perfil hallan tan ventajosamente su empleo en las ruedas cónicas, la parte recta que sigue la direccion del radio, en la que se produce el engranaje con el diente de madera, es á veces de muy escasa longitud (siendo tanto más pequeña cuanto más considerable es el número de los dientes de la rueda de costados rectos); y de ahí resulta que el efecto del desgaste sobre este diente puede ser muy sensible, si no se toma la precaucion de dis-

minuir ese desgaste por el medio sencillo que consiste en dar á los dientes una anchura bastante considerable.

Los dentajes de husos, así como los designados con el nombre de dentajes mixtos, prestan como hemos dicho, grandes servicios en varios casos particulares, verbigracia para los aparatos de elevacion y otros en que se hace uso de ruedas con dientes de hierro. Para todos los aparatos de ese género las reglas que hemos indicado anteriormente encuentran aquí su natural aplicacion.

B. TRAZADOS DE LOS DIENTES DE LAS RUEDAS CÓNICAS.

§ 257

Generalidades sobre los dientes de las ruedas cónicas.

En las ruedas cónicas los círculos proporcionales á las velocidades se hallan situados en los dos conos principales, cuyas cúspides coinciden con el punto de interseccion de los ejes geométricos de esas ruedas. Tomaremos como círculos primitivos los dos círculos proporcionales SD y SE, fig. 658, que forman las bases de los dos conos. Las longitudes de los dientes se miden para cada rueda sobre el cono suplementario del cono principal correspondiente; SB y SC son las generatrices de los dos conos suplementarios, suponiéndose la línea BC perpendicular á AS. Las longitudes de los dientes se cuentan entonces segun SB y SC, la anchura segun SA y el espesor por los círculos primitivos. Los dientes están formados por pirámides que tienen por cúspide comun el punto A.

Para determinar los radios SD y SE de los conos principales, basta dividir el ángulo α de los ejes de las ruedas por la generatriz de contacto SA, de manera que las perpendiculares SD y SE, bajadas de un punto S de esta línea sobre los ejes, sean directamente proporcionales al número de dientes de las ruedas, ó al revés, proporcionales al número de vueltas, es decir, de modo que se tenga: $\frac{SD}{SE} = \frac{Z}{Z_1} = \frac{n_1}{n}$. De ahí se infiere que el problema admite dos soluciones segun se trace la línea de division en el interior del ángulo α ó del ángulo suplementario; en otros términos, segun se considere como ángulo de los ejes el ángulo α ó su suplemento. La diferencia entre esas dos soluciones consiste en que para un mismo sentido de rotacion del árbol motor, el árbol conducido gira á la derecha en uno de los casos y á la izquierda en el otro (fig. 658). Una de estas soluciones puede dar una rueda de dentaje interno, y es lo que sucede cuando se tiene:

$$\frac{n_1}{n} < \cos \alpha$$

Cuando las ruedas cónicas hayan de llenar la condicion del § 243, es decir, hayan de instalarse de manera que una rueda dentada pueda engranar debidamente con una série de otras, conviene no solo que el paso sea el mismo, sino tambien que la generatriz de contacto (AS, fig. 658) tenga la misma longitud para todas esas ruedas. Rara vez se llena esa última condicion, y por ende, las ruedas cónicas que tengan el mismo paso y el mismo modo de dentaje, no gozan generalmente de la propiedad de engranar debidamente unas con otras. Además, en la práctica se consideran como admisibles, ó sea como capaces de engranar lo bastante una con otra, las ruedas instaladas con longitudes de líneas de contacto cuya diferencia no pase de 5 %. Las ruedas que para un mismo ángulo de los ejes están dispuestas con una diferencia de la clase como la que acabamos de indicar, constituyen lo que se llama ruedas bastardas. Así, por ejemplo, cuando dos ruedas cónicas de ángulo recto, de 80 y 45 dientes, están dispuestas de manera que engranen debidamente una con otra, la tolerancia práctica de que acabamos de hablar, permite hacer engranar en ángulo recto con la rueda de 45 dientes una rueda bastarda, cuyo número de dientes estuviese comprendido entre 80 (1+0'05) y 80 (1 −0'05), es decir entre 84 y 76 dientes.

§ 258

Ruedas ausiliares de las ruedas cónicas.

Se obtienen para las ruedas cónicas, formas de dientes convenientes, refiriendo á las superficies desarrolladas de los conos suplementarios los perfiles de dientes que corresponden á las ruedas ausiliares, consideradas como ruedas rectas, y si se juntan los diversos puntos de estos perfiles al punto de interseccion de los ejes. Las ruedas ausiliares de dos ruedas cónicas R y R_1 son las rectas de idéntico paso, cuyos radios r y r_1 son las generatrices BS y CS de los conos suplementarios de esas ruedas.

Para un valor dado α del ángulo de los ejes, el radio r y el número de dientes z de una rueda ausiliar se deducen de los valores conocidos de los radios R y R_1 de las ruedas cónicas y de sus números de dientes Z y Z_1 por medio de las fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned}\frac{r}{R}&=\frac{\sqrt{R^2+R_1^2+2RR_1\cos\alpha}}{R_1+R\cos\alpha}\\ \frac{z}{Z}&=\frac{\sqrt{Z_2+Z_1^2+2ZZ_1\cos\alpha}}{Z_1+Z\cos\alpha}\end{aligned}\right\}\quad(264)$$

En el caso en que el ángulo α es recto estas fórmulas se convierten en:

$$\frac{r}{R}=\frac{\sqrt{R_2+R_1^2}}{R_1},\quad \frac{z}{Z}=\frac{\sqrt{Z^2+Z_1^2}}{Z_1},\quad \frac{r}{r_1}=\left(\frac{n_1}{n}\right)^2\quad(265)$$

EJEMPLO *Para dos ruedas cónicas que encajen mútuamente, los números de dientes son* 30 y 50 *y el ángulo de los ejes* $\alpha=60^\circ$. *Entonces se tiene* $\cos\alpha=1/2$ *y por lo tanto, para la rueda ausiliar de la rueda cónica de* 30 *dientes:* $z=\frac{30.\sqrt{30^2+50^2+2.30.50.0'5}}{50+30.0'5}=\frac{6.\overline{00}}{13}=32'3$, *pudiendo tomarse* 32. *Para la otra rueda de* 50 *dientes se tendria tambien:* $z_1=\frac{50.\sqrt{4900}}{30+50.0'5}=\frac{50.70}{55}$, *ó próximamente* 64. *Con esos elementos deben trazarse los dientes de las ruedas ausiliares.*

El empleo de corto número de dientes para las ruedas cónicas debe en lo posible evitarse, porque la importancia que pueden tomar los errores en tal caso, perjudica siempre el método de las ruedas ausiliares. Cuando no se baja de 24 en el número de los dientes de una rueda cónica, su rueda ausiliar tiene á lo ménos 28, y entonces se puede (véase § 254) adoptar el dentaje por desarrollantes. Las facilidades que ofrece para la ejecucion de los dientes le hacen preferible en ese caso á todos los demás, no obstante los pequeños inconvenientes á que da lugar. Como los errores de ejecucion en el dentaje de las ruedas cónicas son aun más temibles que para las ruedas rectas, conviene siempre tomar el mayor número posible de dientes.

La pérdida de trabajo debida al frote de los dientes en las ruedas cónicas es sensiblemente la misma que la de las ruedas ausiliares.

§ 259

Rueda plana.

Las ruedas cónicas de dentaje interno no son admisibles bajo el punto de vista práctico porque la ejecucion de sus modelos y su ajuste presentarian muchas mas dificultades que en las ruedas ordinarias. Debemos con todo señalar un caso límite interesante que ocupa el término medio entre esos dos géneros de ruedas. Si suponemos que la relacion de las velocidades de dos ruedas cónicas es numéricamente igual á $\cos\alpha$, vemos que en una de las soluciones indicadas antes, el cono principal de una de las ruedas (SE en la fig. 660) se trasforma en disco plano. La rueda cónica correspondiente viene á ser entonces lo que puede llamarse una rueda plana. El cono suplementario de esa rueda es un cilindro, y el radio de su rueda ausiliar se hace infinito, lo que vale decir que la forma de los dientes de esa rueda debe ser la de los dientes de una cremallera.

Con el trazado por desarrollantes esa última forma es particularmente simple, de suerte que la construccion de la rueda plana merece en tal concepto llamar la atencion.

La relacion de las velocidades angulares es, conforme hemos dicho:

$$\frac{R_2}{R_1}=\cos\alpha,\qquad(266)$$

lo cual para $\alpha=60^\circ$, por ejemplo, conduce á $R_2=1/2R_1$. De lo dicho se infiere que para un valor determinado del ángulo de los ejes el empleo de la rueda plana no permite más que una sola relacion de las velocidades angulares. Esa relacion puede igualmente espresarse en virtud del semi-ángulo de la cúspide γ_2 de la rueda cónica R_2, y se tiene:

$$\frac{R_2}{R}=\operatorname{sen}\gamma_2\qquad(267)$$

Debemos observar que dos ruedas cónicas de un mismo par de ruedas, pueden encajar separadamente con la misma rueda plana. Suponiendo que esas dos ruedas R_2 y R_3 (fig. 661) tengan sus ejes rectangulares y que sus ángulos en la cúspide sean γ_2 y γ_3, la relacion de sus velocidades angulares es:

$$\frac{R_2}{R_3}=tg.\ \gamma_2=cotg.\ \gamma_3$$

y se tiene

$\frac{R_2}{R_3}=tg\ \gamma_2=$	$1/4$	$1/3$	$1/2$	$3/4$	1	$4/3$	2	3	4
$\gamma_2=$	14°	$18'30^\circ$	$26'40^\circ$	$36'50^\circ$	45°	$53'10^\circ$	$63'20^\circ$	$71'30^\circ$	76°
$\frac{R_2}{R_1}=\operatorname{sen}\gamma_2=$	0'242	0'317	0'499	0'600	0'707	0'800	0'894	0'948	0'970

Una de las dos ruedas R_2 y R_3 no puede, á decir verdad, emplearse con la rueda plana R_1, sino cuando los números de dientes permiten realizar con suficiente aproximacion la relacion $sen\,\gamma_2$.

Por más que su empleo sea muy limitado, puede la rueda plana utilizarse con ventaja en ciertos casos particulares, puesto que da una solucion de práctica muy fácil.

C. RUEDAS Y TORNILLOS SIN FIN.

§ 260

Del tornillo sin fin.

Desígnase con el nombre de tornillo sin fin un dispositivo especial de engranaje, compuesto de una rueda dentada cilíndrica y de un tornillo, el cual se emplea para lograr una comunicacion de movimiento entre dos árboles que se cruzan sin cortarse. El ángulo de los ejes de esos dos árboles suele ser un ángulo recto (figura 662); y en tal caso los dientes de la rueda deben estar inclinados sobre las generatrices de la corona de esa rueda de un ángulo γ, precisamente igual al de los filetes del tornillo, de suerte que se tenga:

$$tg\,\gamma = \frac{t}{2\pi R} = 0{,}15915\,\frac{t}{R},$$

designando t el paso del tornillo y R el radio del cilindro por el cual se ha medido este paso.

Cuando los dos ejes pueden inclinarse uno sobre otro, es posible usar una rueda recta ordinaria, con tal de colocar el eje del tornillo en una posicion que haga con el plano de esa rueda un ángulo γ. Este dispositivo representado por la fig. 663, es muy conveniente cuando las planchas de fijacion de los soportes del tornillo pueden instalarse paralelamente á los dos ejes. Debe advertirse además que, en tal caso, en vez de ser el paso del tornillo, segun hemos dicho antes, el paso t de la rueda, debe tomarse igual á $t : cos\,\gamma$.

Designando por Z el número de filetes, por n el número de vueltas del tornillo, por Z_1 el número de dientes y por n_1 el número de vueltas de la rueda, la relacion de trasmision ó de las velocidades angulares llena la proporcion:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{Z}{Z_1}.$$

Comunmente $Z=1$ (tornillo de un solo filete), y entonces se tiene:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{1}{Z_1}.$$

El frote del tornillo con los dientes de la rueda es muy considerable en virtud del deslizamiento longitudinal del filete sobre los costados de los dientes. Designando por f el coeficiente de frote, la fuerza P' que es menester aplicar realmente para hacer girar el tornillo, y la fuerza P que aplicada al mismo brazo de palanca seria suficiente si el filete no sufriese ningun frote, hállanse entre sí en la proporcion:

$$\frac{P'}{P} = \frac{1 + f\frac{2\pi R}{t}}{1 - f\frac{t}{2\pi R}}.$$

Para $f=0{,}16$ esa espresion se reduce á:

$$\frac{P'}{P} = 1 + \frac{R}{t} \qquad (268),$$

de donde resulta que para disminuir la fuerza por frote conviene hacer $\frac{R}{t}$ tan pequeño como se pueda.

Morin aconseja tomar $R = 3\,t$, lo que da $P' : P = 4$
Redtenbacher » » $R = 1{,}6\,t$. . . $P' : P = 2{,}6$
Reuleaux » » $R = t$, . . $P' : P = 2$

El valor $R : t = 1$ es muy admisible, pero casi no podria bajar más sin esponerse á dificultades de la práctica. Con nuestro valor límite $R : t = 1$ el efecto útil es aun bastante escaso, puesto que no llega al 50 %. Segun esto, vemos que en este dispositivo de engranaje puede el tornillo conducir el piñon, pero éste no puede conducir el tornillo, ya que con los valores admitidos para f y $R : t$, y el frote de resbalamiento seria cabalmente igual al esfuerzo que tiende á hacer girar en sentido opuesto. Cumple además observar que al frote que hemos calculado se unen el frote ordinario de los dientes y el de los gorrones, los cuales obran en el mismo sentido. El dentaje que se ha de emplear para un tornillo y su rueda puede disponerse como el de una cremallera y su piñon, efectuando el trazado de los dientes en un plano que pase por el eje del tornillo normalmente á la superficie cilíndrica de la rueda (véase párrafo 262). El trazado por desarrollantes tiene la ventaja de dar entonces líneas rectas para los perfiles de los dientes de la rueda, más no debe olvidarse que el número de esos dientes debe ser superior á 28 (§ 254). El contacto que geométricamente solo se efectua en un punto, se reparte en realidad en una pequeña superfi-

cie. Si se quiere obtener un contacto más estenso, conviene tallar los dientes con una fresa dispuesta de modo que actue cabalmente lo mismo que el propio tornillo.

Las ruedas dentadas en que el contacto no se efectua teóricamente más que en un solo punto, constituyen lo que en general se designa con el nombre de engranajes de precision, mientras que se reserva el de engranajes de fuerza para las ruedas en que el contacto de los dientes se efectua geométricamente en direccion de una línea. Las diferencias de aplicaciones que al parecer implican esas designaciones, no están, en resúmen, perfectamente determinadas, como resulta del ejemplo anterior, como quiera que los tornillos sin fin se emplean igualmente bien para las trasmisiones de pequeñas fuerzas y de considerables esfuerzos.

§ 261

Ruedas cilíndricas de dientes helicoidales.

Las ruedas cilíndricas de dientes helicoidales que constituyen una generalizacion del dispositivo precedente gozan de propiedades especiales. Las ruedas A y B, en la fig. 664 están dotadas de partes fileteadas á la izquierda. Los ángulos de inclinacion γ y γ_1 de esas porciones de filetes están determinadas de una manera que en el punto de contacto tengan las hélices situadas en los cilindros primitivos una tangente comun, es decir, que designando por α el ángulo de los ejes se debe tener:

$$\gamma + \gamma_1 + \alpha = 180^\circ \qquad (269)$$

En el trazado de las ruedas de dientes helicoidales debe procurarse con el mayor cuidado que los ángulos γ y γ_1 se cuenten en el mismo sentido, ó sea, por ejemplo, los dos á la derecha del plano medio de cada rueda, como en la figura.

Si se descomponen las velocidades en la circunferencia v y v_1 siguiendo las direcciones de cada tangente y de la normal que les corresponde, se obtiene:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{sen\ \gamma}{sen\ \gamma_1} \text{ y por tanto } \frac{n_1}{n} = \frac{R\ sen\ \gamma}{R_1\ sen\ \gamma_1} \qquad (270)$$

Como además los pasos de los dientes medidos perpendicularmente á la direccion de los filetes y que tienen como valores respectivos $\tau = t\ sen\ \gamma$ y $\tau_1 = t_1\ sen\ \gamma_1$ deben ser iguales, resulta que debe tenerse tambien $t : t_1 = sen\ \gamma : sen\ \gamma_1$, de donde se deduce como antes:

$$\frac{Z}{Z_1} = \frac{n_1}{n}.$$

En tal caso los números de dientes son proporcionales, como se ve, no á los radios de las ruedas, sino á sus proyecciones sobre dos líneas tiradas normalmente á las hélices de los dientes; y esa relacion da el medio de determinar aproximadamente los radios por una construccion gráfica.

En virtud de las componentes v' y v'_1 de las velocidades, los costados de los dientes de una de las ruedas deslizan sobre los de la otra con una velocidad relativa dada por la espresion:

$$c' = v' + v'_1 = c(cotg\ \gamma + cotg\ \gamma_1) \qquad (271)$$

La consecuencia de ese deslizamiento es una pérdida de trabajo y un desgaste muy considerable. Por ese motivo las ruedas helicoidales deben reservarse con preferencia para la trasmision de cortos esfuerzos. El mínimo de c' corresponde á la igualdad de los valores de v' y v'_1, es decir, á $\gamma = \gamma_1$. En este caso la normal c á los costados de los dientes divide en dos partes iguales el ángulo de los planos medios de las dos ruedas.

Por efecto de los valores muy diversos que pueden adoptarse para las inclinaciones de los filetes, nos vemos conducidos para los engranajes helicoidales á una grande variedad de dispositivos, así como lo demuestran los siguientes ejemplos:

1er. Ejemplo. *Datos:* $\frac{n_1}{n} = \frac{1}{2}$, *el ángulo de los ejes* $\alpha = 40^\circ$ *y la más corta distancia de esos ejes* $a = R + R_1$. *Si se toma* $\gamma = 60^\circ$, *la fórmula* (265) *da:* $\gamma_1 = 180^\circ - 60 - 40 = 80^\circ$ (*fig.* 665), *y se tiene, segun la fórmula* (270): $\frac{R}{R_1} = \frac{sen\ \gamma_1}{sen\ \gamma}\frac{n_1}{n} = \frac{sen\ 80^\circ}{sen\ 60^\circ}\cdot\frac{1}{2} = \frac{0{,}9848}{0{,}8660}\cdot\frac{1}{2} = 0{,}5686$; *lo cual permite determinar* R *y* R_1. *Si suponemos por ejemplo,* $a = 100^{mm}$, *se tiene:* $R_1 = \frac{a}{1 + \frac{R}{R_1}} = \frac{100}{1{,}5686} = 63{,}751^{mm}$ *y* $R = 36{,}249^{mm}$. *Para* $Z = 20$, $Z_1 = 40$, *el paso contado normalmente á los dientes, equivale á* $\tau = t\ sen\ \gamma = \frac{2\pi R}{Z}\ sen\ \gamma = \frac{2 \cdot \pi \cdot 36{,}249 \cdot 0{,}866}{20} = 0{,}272 \cdot 36{,}249 = 9{,}862^{mm}$. *Para los pasos de los filetes de las ruedas se tiene:* $t = \frac{\tau}{sen\ \gamma} = \frac{9{,}862}{0{,}866} = 11{,}388^{mm}$ $t_1 = \frac{9{,}862}{0{,}9848} = 10{,}014^{mm}$. *La fórmula* (271) *da para la velocidad de resbalo de los dientes:* $c' = c\ (cotg\ 60^\circ + cotg\ 80^\circ) = c(0{,}5774 + 0{,}1763) = 0{,}7537\ c$.

2.° EJEMPLO. *Para reducir c' á su mínimo, tomemos* $\gamma = \gamma_1 = \frac{180-\alpha}{2} = \frac{180-40}{2} = 70^0$ (*fig.* 666). *Entonces*: R : $R_1 = {}^1/_2$, $R_1 = 66'667^{mm}$, $R = 33'333^{mm}$, $\tau = \frac{2 \cdot \pi \cdot 33'333 \cdot 0'9397}{20} = 9'840^{mm}$, $t = t_1 = \frac{9'840}{0'9397} = 10'472^{mm}$ *y* $c' = 2.\ cotg\ 70^0.\ c = 2 \cdot 0'3640 \cdot c = 0'768\ c$, *lo cual prueba que el valor precedente de c' estaba ya muy aproximado á su mínimo.*

3.er EJEMPLO. *Para tener más facilidad en la práctica supongamos* $\gamma = 90^0$, *lo cual conduce á una rueda recta comun* (*fig.* 667); *y entonces tendremos*: $\gamma_1 = 180 - 40 - 90 = 50^0$, R : $R_1 = {}^1/_2 \cdot 0'7660 = 0'383$, *de donde* $R_1 = 72'307^{mm}$, $R = 27'693^{mm}$, $\tau = 11'842^{mm}$, $t = \tau$, $t_1 = 15'459^{mm}$, *y en fin* $c' = 0'8391\ c$.

Si en vez de *a* se da el paso τ como suele suceder con las ruedas talladas á la fresa, se escoge γ y γ_1 y entonces se tiene: $R\ sen\ \gamma = \frac{Z\tau}{2\pi}$, de donde se deduce:

$$R = \frac{Z\tau}{2\pi\ sen\ \gamma},\quad R_1 = \frac{Z_1\tau}{2\pi\ sen\ \gamma_1} \qquad (272).$$

Puede igualmente darse R y τ, en cuyo caso γ ya no es arbitrario, pues que en efecto se tiene:

$$sen\ \gamma = \frac{Z\tau}{2\pi R} \qquad (273).$$

4.° EJEMPLO. $\alpha = 90^0$, $Z = Z_1$. *Para reducir el resbalo á su mínimum hagamos* $\gamma = \gamma_1 = \frac{180-90}{2} = 45^0$. *Las dos ruedas en este caso son iguales y las dos están fileteadas á la izquierda ó bien á la derecha como en la fig.* 668. *La velocidad de deslizamiento* $c' = 2\ .\ cotg\ 45^0\ .c = 2c$.

5.° EIEMPLO. *Dadas dos ruedas helicoidales A y B en ángulo recto* (fig. 669), *si con la rueda B se hace engranar otra C, tambien de ángulo recto, las dos ruedas A y C tienen sentidos de rotacion opuestos. Luego, la rueda intermedia B permite cambiar el sentido de la rotacion como en las ruedas cónicas.*

6.° EJEMPLO. *Suponiendo* $\alpha = 0^0$, *es decir, si los ejes son paralelos, las ruedas se reducen á ruedas rectas con dientes helicoidales* (fig. 670); *y la suma de los ángulos* γ *y* γ_1, *siendo igual á* 180^0, *da por resultado que una de las ruedas es siempre fileteada á izquierda y la otra á derecha. En cuanto á la velocidad de resbalo c' viene á ser nula. Si con* $\alpha = 0^0$ *se tiene además* $\gamma = 0^0$, *las ruedas helicoidales vienen á ser verdaderas ruedas de cuñas.*

El exámen de otros casos límites de las ruedas de dientes helicoidales suministra una serie de dispositivos dignos de llamar la atencion.

7.° EJEMPLO. $\alpha = 90^0$, $\gamma = 10^0$, *y por tanto* $\gamma_1 = 80^0$, $R_1 = \infty$. *En este caso se obtiene una cremallera que engrana con un tornillo* (fig. 671). *Si hacemos* $\gamma = 10^0$, $\gamma_1 = 90^0$, α *es igual á* 80^0. *En las máquinas de acepillar Sellers da á los dientes de la cremallera* (fig. 672) *una inclinacion tal, que la presion lateral que de ahí resulta, sea cabalmente susceptible de anular el esfuerzo que se ejerce por el otro lado y que proviene del frote de deslizamiento entre los costados de los dientes.*

8.° EJEMPLO. $R = R_1 = \infty$. *En este caso se obtienen dos cremalleras que se desplazan una á otra* (fig. 673). *Entonces se tiene como antes* $\frac{v_1}{v} = \frac{sen\ \gamma}{sen\ \gamma_1}$. *Si como en la fig.* 674 *se tiene* $\alpha = 90^0$ *y para reducir el deslizamiento á su mínimo se toma* $\gamma = \gamma_1 = 45^0$, *se tiene* $v = v_1$. *Ese mecanismo se encuentra muy amenudo en las máquinas de rayar cañones y en otras de filetear ó tallar tornillos.*

9.° EJEMPLO. $\alpha = 90^0$, $\gamma_1 = 90^0$ *y por consiguiente* $\gamma = 0^0$. *Con dos radios de grandor finito* (fig. 675) *se obtiene lo que llamamos una cremallera de rotacion, cuyo uso se encuentra con frecuencia en los reguladores y aparatos del mismo género. La rotacion del eje A no produce ningun desplace de B.*

10. EJEMPLO. *El engranaje de tornillos sin fin es, conforme hemos observado, un caso particular de las ruedas helicoidales. Este engranaje se presenta tambien, aunque muy rara vez, bajo otras dos formas particulares, caracterizadas por el empleo de una rueda de dentaje interno* (1). *La fig.* 676 *representa una de ese género de dientes rectos ó inclinados* (2). *En el dispositivo de la fig.* 677 *el tornillo sin fin es el que está hueco; y la rueda es una rueda recta de dentaje esterno* (3).

§ 262

Dentaje de ruedas helicoidades. Frote.

Los dientes de las ruedas helicoidales se tallan las

(1) Las ruedas huecas corresponden al caso en que el punto de engranaje deba encontrarse en *a* fuera de los ejes, en vez de caer entre esos ejes.

(2) Empleada en el reloj astronómico de Praga.

(3) Empleada en la máquina de taladrar de Stehelin.

más de las veces en forma de fresa. Ese resultado puede obtenerse por medio de un torno de puntas sobre cuyo util ó porta-herramienta se coloca la fresa oblicuamente. El procedimiento es análogo al que se sigue para filetear los tornillos. El paso s de los filetes de la rueda se deduce de la relacion:

$$s=2\pi R tg\gamma \qquad (274)$$

En la eleccion de los ángulos de inclinacion γ y γ_1 deben tomarse en consideracion las ruedas de recambio de que se dispone para el torno (1).

Para la forma de los dientes se escoge la que corresponde á la curvatura del filete complementario del que se trata de tallar, es decir, del que es perpendicular. Los radios de curvatura r y r_1 que deben usarse, están determinados por las relaciones:

$$r=\frac{R}{sen^2\gamma}, \qquad r_1=\frac{R_1}{sen^2\gamma_1} \qquad (275)$$

Esos valores deben emplearse como radios de las ruedas ausiliares con el paso τ; y segun el modo de endentaje adoptado, se obtiene para el vacio de los dientes el mismo perfil de la fresa.

1.er Ejemplo. *Para las ruedas del 1.er Ejem. del párrafo precedente se tiene*: $r=\frac{36'249}{sen^2\,60^0}=\frac{4}{3}36'249$ $=48'332^{mm}$, $r_1=\frac{63'751}{sen^2\,80^0}=\frac{63'751}{0'9848^2}=65'734^{mm}$.

El valor de r dado por la fórmula (275) puede obtenerse gráficamente por el procedimiento del párrafo 29.

Las resistencias debidas al frote de las ruedas helicoidales son á veces muy considerables. Si fuesen nulas se tendria con la relacion de las fuerzas P y Q obrando respectivamente en la circunferencia de la rueda motriz y de la rueda conducida:

$$\frac{P}{Q}=\frac{sen\,\gamma}{sen\,\gamma_1} \qquad (276)$$

El frote ordinario de los dientes es el mismo que el de las ruedas ausiliares y puede calcularse por las indicaciones del § 255. En tanto que α no sea nulo, tiene generalmente un valor mucho más bajo que el del frote de deslizamiento de los costados.

(1) Para las diversas combinaciones que pueden conseguirse con la série de ruedas de engranajes de un torno, puede consultarse con provecho la obra de Brocot *(Cálculo de rodajes por aproximacion*, Paris, 1862).

El valor c' de la velocidad de deslizamiento, que antes hemos indicado, da una idea de la magnitud de este último frote. Para calcular la pérdida de trabajo, que es consiguiente, puede servir la relacion:

$$\frac{P'}{P}=\frac{sen\,\gamma_1}{sen\,\gamma}\,\frac{sen\,(\gamma+\varphi)}{sen\,(\gamma_1-\varphi)}, \qquad (277)$$

en la que φ sepresenta el ángulo de frote correspondiente al coeficiente f, esto es, se tiene $tg\varphi=f$. Para $f=0'16$ se tiene próximamente $\varphi=9^0$.

2.° Ejemplo. *Para las ruedas precedentes la pérdida debida al frote es* $\frac{P'}{P}=\frac{sen\,80^0\,.\,sen\,69^0}{sen\,60^0\,.\,sen\,71^0}=$ $\frac{0'9848\,.\,0'9336}{0'8660\,.\,0'9455}=1'12$ (*añadiéndose á esta pérdida la que proviene del frote ordinario de los dientes*).

Otra pérdida de trabajo corresponde á las fuerzas laterales K y K_1, que obran en las direcciones de los ejes. Para estas fuerzas se tiene:

$$\frac{K}{P'}=cotg\,(\gamma+\varphi), \quad \frac{K_1}{Q}=cotg\,(\gamma_1-\varphi) \qquad (278)$$

3er. Ejemplo. *Para las ruedas precedentes se tiene* $K=P'\,cotg\,69^0=0'3839\,P'$, $K_1=Q\,cotg\,71^0=0'3443\,Q$; *y de esos valores de las fuerzas puede deducirse la pérdida que acarrean cuando se conocen las dimensiones de los gorrones.*

Cuando α es igual á 0^0, es decir, cuando los ejes son paralelos, la relacion $P' : P$ viene á ser igual á 1 (siendo entonces suplementarios los ángulos γ y γ_1), y por consiguiente es nulo el resbalo de los costados. En otros términos, en las ruedas helicoidales de ejes paralelos el engranaje se efectua sin deslizamiento de los costados, si bien queda entonces el frote ordinario de los dientes, por más que éste se halle reducido á cierta medida, y al que se debe á las fuerzas K y K_1. Puede por otra parte el frote de los dientes reducirse á un valor enteramente despreciable, con tal de dar á los costados de los dientes de una de las ruedas la forma de aristas agudas, de suerte que el contacto de dichos dientes con los de la otra rueda (cuyos costados tienen cierta estension) tenga lugar geométricamente en un solo punto. Ese género de endentaje inventado por *Hook* en 1666, y propuesto de nuevo en 1808 por *White* casi no puede emplearse más que en los engranajes de precision, que es cuando presta muy buenos

servicios (1). Las ruedas helicoidales ordinarias de ejes paralelos con perfiles de dientes bastante bien escogidos se parecen á las ruedas sin frote de *Hook*. En estas últimas ruedas puede igualmente anularse la accion de las fuerzas K y K_1 que actuan siguiendo la direccion de los ejes, haciendo uso de ruedas dobles de filetes simétricos (fig. 678). Hállanse aplicaciones de ruedas de ese género en ciertas máquinas de la hilatura. Estos últimos años propuso *Wethli* usarlas para las vias férreas en rampas muy pronunciadas (2).

§ 263

Ruedas de filetes cónicas.

Se ha procurado igualmente en las ruedas cónicas suprimir poco más ó ménos todo frote, con el empleo de dientes formados de porciones de filetes. Ruedas de ese género solo son realmente ruedas helicoidales que se obtienen suponiendo nula la distancia a de los ejes. La curvatura más conveniente para los ejes de los dientes es la que nos da la hélice cónica de inclinacion constante, cuya proyeccion en la base del cono es una espiral de *Arquímedes*. Las ruedas cónicas de filetes se emplean en algunas máquinas de hilar. Pero la construccion de las ruedas de ese género ofrece muchas y grandes dificultades, aun cuando se trate de los modelos más sencillos (3).

D. ENGRANAJES HIPERBOLOIDES.

§ 264

Superficies primitivas de los engranajes hiperboloides.

Los engranajes hiperboloides están destinados á unir árboles cuyos ejes se cruzan sin cortarse; y efectuándose el contacto de los dientes en direccion de una línea, tales engranajes entran en la clase de los de fuerza (véase § 260). Sus superficies primitivas son hiperboloides de revolucion, que se tocan siguiendo una generatriz comun que puede determinarse de la manera siguiente:

En la fig. 679, que es una proyeccion trazada normalmente á la más corta distancia de los ejes, dividamos el ángulo de inclinacion α de esos ejes en otros dos β y β_1, de manera que las perpendiculares AB y AC, bajadas sobre sus direcciones de un punto cualquiera A de la línea de division SA, sean inversamente proporcionales á los números de vueltas de las ruedas. Entonces SA es la generatriz de contacto de dos hiperboloides; $AB = R'$ y $AC = R'_1$, representan las proyecciones de los radios de las dos secciones normales hechas por el punto A y se tiene:

$$\frac{R'}{R'_1} = \frac{sen\ \beta}{sen\ \beta_1} = \frac{n_1}{n} = \frac{Z}{Z_1} \qquad (279)$$

Los radios verdaderos R y R_1 están aun por determinar, así como los radios $SD = r$ y $SE = r_1$ de los círculos de garganta. Entre estos últimos se tiene ante todo la relacion:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{tg\ \beta}{tg\ \beta_1} = \frac{\dfrac{n_1}{n} + cos\ \alpha}{\dfrac{n}{n_1} + cos\ \alpha} \qquad (280)$$

es decir que r y r_1 deben estar entre sí en la misma proporcion que los dos segmentos AF y AG, que las proyecciones de los ejes determinan sobre la recta FG trazada por el punto A perpendicularmente á la generatriz de contacto.

Designando por a la más corta distancia de esos ejes se tiene:

$$\frac{r}{a} = \frac{1 + \dfrac{n}{n_1}\ cos.\ \alpha}{1 + 2\dfrac{n}{n_1}\ cos.\ \alpha + \left(\dfrac{n}{n_1}\right)^2} \qquad \frac{r_1}{a} = \frac{1 + \dfrac{n_1}{n}\ cos\ \alpha}{1 + 2\dfrac{n_1}{n}\ cos\ \alpha + \left(\dfrac{n_1}{n}\right)^2} \qquad (281)$$

Los radios R y R_1 son las hipotenusas de los triángulos cuyos lados son respectivamente R' y r, R'$_1$ y r'_1, y por consiguiente tienen como valores:

$$R = \sqrt{R'^2 + r^2}, \quad R_1 = \sqrt{R'^2_1 + r_1^2} \qquad (282)$$

Por lo que precede R' y R'$_1$ son conocidos cuando se da la longitud $SA = l$.

En cuanto á los ángulos β y β_1, están determinados por las relaciones:

(1) Se encuentra usado en varios aparatos de Breguet, en los que las velocidades de rotacion pasan de 2000 vueltas por minuto.

(2) Esas ruedas han recibido en estos últimos años muy numerosas aplicaciones con el nombre de ruedas de cuñas.

(3) Véase en el *Genie industriel*, tomo XII, pág. 255, la descripcion de una máquina para la rigorosa ejecucion de los dientes de las ruedas cónicas de filetes.

$$tg\,\beta = \frac{sen\,\alpha}{\frac{n}{n_1} + cos\,\alpha}, \qquad tg\,\beta_1 = \frac{sen\,\alpha}{\frac{n_1}{n} + cos\,\alpha} \qquad (283)$$

Lo mismo que en el caso de las ruedas cónicas (párrafo 257) el problema admite dos soluciones segun se trace la línea *SA* en el interior del ángulo α ó al esterior (es decir en el ángulo suplementario), fig. 680. Esas dos soluciones difieren entre sí por el sentido de la rotacion del árbol conducido. Una de estas soluciones puede, como antes, conducir á una rueda de dentaje interior; pero este dispositivo nunca, que sepamos, se ha efectuado, si bien, empero, no tendria ningun valor práctico. Cuando el ángulo de inclinacion α es igual á 90° se tiene:

$$\frac{r}{r_1} = tg^2\beta = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \qquad (284)$$

y

$$\frac{r}{a} = \frac{n_1^2}{n^2 + n_1^2}, \qquad \frac{r_1}{a} = \frac{n^2}{n^2 + n_1^2} \qquad (285)$$

Fácil es segun esto, ver que en los engranajes hiperboloides dan soluciones en número más limitado que las ruedas helicoidales, con las que además presentan mucha analogia. En estas últimas ruedas se puede en efecto dar para un valor determinado del ángulo α un valor arbitrario al ángulo de inclinacion de los filetes de una de las dos ruedas, mientras que en los engranajes hiperboloides no hay más que un solo par de valores de ángulos de inclinacion que sea admisible, condicion de la que parece tenerse bastante cuenta. Las superficies primitiva de dos engranajes están formadas por dos zonas correspondientes de las dos hiperboloides. Cuando la distancia de los ejes es corta, no se pueden muchas veces utilizarse al efecto las zonas que comprenden los círculos de garganta y es preciso recurrir á zonas situadas á cierta distancia, las cuales pueden comunmente reemplazarse con suficiente aproximacion por simples troncos de conos. Vamos á aplicar las nociones anteriores á varios ejemplos:

1.er EJEMPLO. $\alpha = 40°$, $\frac{n_1}{n} = \frac{1}{2}$ (*Véase el ejemplo* 1.° § 261), $a = 100^{mm}$. *Se tiene entonces:* $\frac{R'}{R_1} = \frac{1}{2}; \frac{r}{r_1} = \frac{0'5 + cos\,40°}{2 + cos\,40°} = \frac{1'266}{2'766} = 0'4577, \frac{a}{r} = \frac{1 + 2cos\,40°}{1 + 2\,.\,2\,cos\,40° + 4} = \frac{2'532}{8'064} = 0'31398$, $r = 31'398^{mm}$, $r_1 = 68'601^{mm}$. *A más,* $tg\,\beta = \frac{sen\,40°}{2 + cos\,40°} = \frac{0'6428}{2'766} = 0'232393 = tg\,13°, 5'$ *y* $\beta_1 = 40° - \beta = 26°, 55'$. *Para la distancia* $SA = l = 200^{mm}$, *se tiene* $R' = l\,sen\,13°, 5' = 200\,.\,0'226368 = 45'27^{mm}$, $R'_1 = 200\,.\,sen\,26°, 55' = 200\,.\,0'452634 = 90'04^{mm}$; *y en fin* $R = \sqrt{45'72^2 + 31'40^2} = 55'10^{mm}$ *y* $R_1 = \sqrt{90'54^2 + 68'60^2} = 113'59^{mm}$.

2.° EJEMPLO. $\alpha = 90°, \frac{n_1}{n} = \frac{5}{9}$ (*valor á que satisfacen los números de dientes* $Z = 36$ *y* $Z_1 = 20$); $a = 20^{mm}$ (*esos datos son los que hay en los bancos de brocas*). *Segun las fórmulas* (284) *y* (285), *se tiene:* $\frac{r}{r_1} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{81}{25} = 3'24$, $r = a\,.\,\frac{9^2}{5^2 + 9^2} \frac{20.81}{106} = 15'28^m$ *y* $r_1 = 4'72^{mm}$. *Se tiene á más,* $tg\,\beta = \frac{n_1}{n} = 1'80$, *ó* $\beta = 60°, 57'$, *y por tanto,* $\beta_1 = 29°, 3'$. *Para* $R = 49^{mm}$, *la fórmula* (282) *da:* $R' = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{49^2 - 15'28^2} = 46'557^{mm}$, *y de la relacion* (279) *se saca entonces:* $R'_1 = \frac{5}{9}R' = \frac{5\,.\,46'557}{9} = 25'865^{mm}$; *se tiene luego:* $R_1 = \sqrt{25'865^2 + 4'72^2} = 26'292^{mm}$.

La fig. 681 *da á medio tamaño el engranaje correspondiente á esas dimensiones. Conforme las indicaciones de la tabla del* § 245, *el paso en la rueda grande es* $t = \frac{R}{5'73} = \frac{49}{5'73} = 8'55^{mm}$ *y en la pequeña* $t_1 = \frac{26'29}{3'18} = 8'27^{mm}$.

3.er EJEMPLO. $\alpha = 90°$, $\frac{n_1}{n} = 1$. *En este caso se encuentra* $\beta = 45°$, $r = r_1$, $R = R_1$; *y las dos hiperboloides son entonces congruentes* (*véase el ejemplo* 4.° *del párrafo* 261).

4.° EJEMPLO. *En el caso particular en que la relacion* $\frac{n_1}{n}$ *es numéricamente igual á cos* α *y en que la línea de division que determina al ángulo* β, *se halla situado en el ángulo suplementario de* α, *de suerte que teniendo en cuenta el signo se tenga* $\frac{n_1}{n} = -cos\,\alpha$, *una de las superficies primitivas se reduce á un cono y la segunda á una hiperboloide plana. Esa rueda plana hiperboloide corresponde á la rueda plana en los engranajes cónicos* (*véase* § 259) *y puede engranar debidamente con una rueda cónica ordinaria, no ofreciendo por otra parte ninguna ventaja práctica, porque la reu-*

da plana no permite prolongar el arbol de la rueda cónica. Para $\alpha=60^0$, $n_1 : n = -1/2 = -\cos 60^0$, *se obtiene la rueda plana. En este caso se tiene:* $tg\,\beta = 1/3\sqrt{3}$, $\beta=30^0$, $tg\,\beta_1=\infty$, $\beta_1=90^0$, $\frac{R'}{R'_1}=\frac{sen\,30^0}{sen\,90^0}=\frac{1}{2}$, $r=0$, $r_1=a$, $R=K'$, $R_1=\sqrt{R'^2_1+a^2}-\sqrt{4R^2+a^2}$. *Si* $\frac{n_1}{n}$ *fuese negativo y* $<\cos\alpha$, *se obtendria una rueda hiperboloide de endentaje interno; pero los engranajes de ese género no son prácticos.*

Con los engranajes hiperboloides se puede obtener igualmente como caso límite el endentamiento de una cremallera con un piñon. La cremallera tiene entonces dientes oblícuos, mientras que el piñon está formado por la zona correspondiente al círculo de garganta de una hiperboloide, pero como la construccion de ese piñon es ménos sencilla en la práctica que la rueda de filetes helicoidales de la fig. 682, cuyo efecto es equivalente, resulta que esa última debe con frecuencia utilizarse en todos los casos en que se quiera obtener dicho efecto.

§ 265

Endentamiento de engranajes hiperboloides.

A querer dar á los dientes de engranajes hiperboloides formas perfectamente rigurosas se tropezaria con grandes dificultades prácticas. Pero podemos contentarnos como en las ruedas cónicas con una forma aproximada. Para determinar en este caso los dientes de un engranaje hiperboloide, se comienza por trazar el cono suplementario de la zona de hiperboloide que se debe utilizar; la cúspide H de ese cono (fig. 683) se obtiene tirando una perpendicular AH á la generatriz SA, paralela al plano de la figura; se determina enseguida el perfil de los dientes por el paso normal τ en el círculo de garganta, como si se tratara de una rueda helicoidal de diámetro r y de inclinacion $\gamma=90^0-\beta$, y luego se traza el perfil así obtenido sobre la superficie cónica HJL, procurando aumentar las dimensiones paralelas al círculo de division en la proporcion $t : \tau$ y las longitudes en la proporcion $K : r$, representando K la longitud de la generatriz del cono suplementario. Se repite la misma construccion para el cono suplementario correspondiente á la otra base de la zona, teniendo cuidado, por supuesto, de contar con la disminucion de los valores de t y de K. Así se obtienen para cada diente dos perfiles bastante exactos, cuyos puntos correspondientes basta reunir por medio de líneas rectas para formar el cuerpo de ese diente.

En ciertos casos se puede sustituir la zona de hiperboloide con un tronco de cono con tal de determinar debidamente su cúspide. Al efecto se hace girar la generatriz SA alrededor del eje HS hasta que el punto A coincida con el punto J. La proyeccion de la generatriz determina en esa posicion por medio de su interseccion con HS la cúspide buscada M del cono.

En los engranajes hiperboloides, el deslizamiento de los costados de los dientes es el orígen de un frote considerable. Este frote puede evaluarse por la velocidad de deslizamiento c', la que es igual á la que se obtendria con dos ruedas helicoidales que correspondiesen á los dos círculos de garganta (véase § 262).

E. CALCULO DEL PASO Y ANCHURA DE LOS DIENTES DE ENGRANAJE.

§ 266

Division de los engranajes. Seccion de los dientes.

Para un mismo valor de la presion mútua de los dientes las dimensiones de éstos deben ser en virtud de los choques tanto más fuertes cuanto más considerable es la velocidad en la circunferencia. Debiendo igualmente aumentarse la anchura de los dientes se pretende disminuir su desgaste. No merece tenerse en cuenta los efectos dinámicos en los engranajes de marcha lenta. De ahí que nos vemos precisados á dividir las ruedas dentadas en dos clases principales.

En la primera comprenderemos todos los engranajes cuya velocidad en la circunferencia del círculo primitivo es inferior á medio metro, y en la segunda todos aquellos en quienes esa velocidad es más considerable.

En la clase de engranajes de poca velocidad suelen entrar todos los que van movidos á la mano, como los engranajes de cabrias, gruas, etc., mientras que los de velocidad mayor de medio metro van las más de las veces movidos mecánicamente.

El paso t de los dientes, la anchura b, la longitud l, el espesor en la corona, la presion P y la tension S están relacionados de una manera general por la proporcion:

$$bt = 6\,\frac{P}{S}\left(\frac{l}{t}\right)\left(\frac{t}{h}\right)^2 \qquad (286)$$

Introduciendo en esa fórmula los valores que antes hemos admitido en las relaciones de la longitud y espesor con el paso, esta fórmula se reduce á:

$$bt = 16'8\,\frac{P}{S} \qquad (287)$$

Esa relacion indica que la resistencia de un diente es proporcional á su seccion, y que por lo tanto bajo este punto de vista puede adoptarse indistintamente para la relacion entre b y t el valor que se desea. Esa es una circunstancia que amenudo se utiliza con provecho en la construccion.

§ 267

Paso y anchura de los dientes de engranaje de poca velocidad.

Si en una rueda de fundicion de poca velocidad designamos por:

(PR) el momento estático del esfuerzo por trasmitir,

Z el número de dientes,

R el radio del círculo primitivo,

t el paso de los dientes,

tendremos entre esos diversos elementos las relaciones:

$$\left.\begin{aligned} t &= 2'32\,\sqrt[3]{\frac{(PR)}{Z}},\quad \frac{t}{\pi} = 0'74\,\sqrt[3]{\frac{(PR)}{Z}} \\ t &= 1'4\,\sqrt{\frac{(PR)}{R}},\quad \frac{t}{\pi} = 0'45\,\sqrt{\frac{(PR)}{R}} \end{aligned}\right\} \qquad (288),$$

lo que permite determinar t, una vez dadas las otras cantidades. Al propio tiempo se tiene para la anchura de los dientes, b:

$$b = 2t \qquad (289)$$

En esas fórmulas se ha admitido para la tension S de los dientes el valor 4'25. La tension que realmente existe es más pequeña, ya que el espesor del pié del diente es en general superior á $^1/_2\,t$, conforme lo hemos supuesto en la fórmula (287)

Como la relacion (PR): R representa el esfuerzo P en la circunferencia del círculo primitivo, resulta que la fórmula (288) es aplicable al caso en que la fuerza P se ha dado directamente, como por ejemplo, en las cremalleras.

Cuando se ha calculado por medio de las fórmulas precedentes ó de la tabla del párrafo siguiente, las dimensiones del diente de fundicion, se pueden obtener inmediatamente las del diente de hierro forjado, multiplicando las primeras por coeficientes:

Esos coeficientes son respectivamente:

$$\left.\begin{aligned} &\text{para los resultados de la 1.ª fórmula (288),} && \sqrt[3]{0'5} = 0'79 \\ &\text{» » » 2.ª » (288),} && \sqrt{0'5} = 0'71 \end{aligned}\right\} \qquad (290),$$

y debe tomarse como antes $b : t = 2$. Puede modificarse, como hemos dicho, la anchura b sin variar la resistencia del diente, con tal de cambiar t al propio tiempo, de modo que el producto bt conserve un valor constante.

§ 268.

Tabla de pasos de engranajes de poca velocidad.

t	$\frac{(PR)}{Z}$	$\frac{(PR)}{Z}$	$\frac{t}{\pi}$	$\frac{(PR)}{Z}$	$\frac{(PR)}{R}$
10	80	51	3	67	44
12	138	73	4	158	79
15	270	115	5	308	123
18	467	165	6	533	178
22	853	247	7	846	242
26	1408	345	8	1263	316
30	2162	459	9	1799	400
35	3433	625	10	2468	494
40	5125	816	11	3285	598
45	7297	1033	12	4264	711
50	10010	1276	14	6772	968
60	17298	1837	16	10108	1264
70	27468	2500	20	19742	1975
80	41002	3265	24	34114	2844
90	58380	4133	28	54172	3872

1.er EJEMPLO. *En un manubrio de* 400mm *de longitud se ejerce un esfuerzo de* 50k. *¿Qué paso y anchura de diente debe adoptarse para un piñon de* 10 *dientes destinado á trasmitir ese esfuerzo? En este caso se tiene* PR : $Z = 50 \cdot 400 : 10 = 200$; *este número está comprendido en la tabla entre los de las líneas* 6 *y* 7, *col.* 2, *y se puede tomar aproximadamente* $t = 30^{mm}$. *La misma tabla demuestra que* $t : \pi$ *está comprendido entre* 9 *y* 10. *La anchura* $b = 2t = 60$ mm.

2.º EJEMPLO. *Una cremallera debe producir una traccion de* 2500k. *La tabla indica que ha de tomarse en tal caso* $t = 70^{mm}$ *ó bien* $t : \pi = 22$: *la anchura de los dientes debe ser de* 140mm. *Si esta cremallera fuese de hierro forjado deberia tomarse segun la fórmula* (290) : $t = 0'71 \cdot 70 = 50^{mm}$ *y* $b = 2 \cdot 50 = 100^{mm}$.

§ 269

Paso y anchura de los dientes de engranaje movido mecánicamente.

En los engranajes movidos mecánicamente que

suelen tener una velocidad superior á $^1/_4$ metro, debe admitirse para la tension S que produce la fuerza P en los dientes supuestos en el estado de reposo, un valor tanto más pequeño cuanto mayor es la velocidad v en la circunferencia del círculo primitivo, con objeto de tener en cuenta los choques y vibraciones. Al efecto conviene tomar para los dientes de fundicion:

$$S = \frac{3'37}{\sqrt[3]{v}} \qquad (291)$$

y para los dientes de madera el valor precedente multiplicado por 0'8, sin que S pueda nunca pasar de 2^k. Asi se obtiene para la serie de los siguientes valores:

$v = 0'5^m$	1	2	4	6	8	10	12	14	16
$S = 4'25^k$	3'37	2'69	2'13	1'86	1'67	1'56	1'47	1'40	1'34

y para la madera:

$$S = 2'00^k \quad 2'00 \quad 2'00 \quad 1'70 \quad 1'49 \quad 1'34 \quad 1'25 \quad 1'17 \quad 1'12 \quad 1'07.$$

La velocidad v (en metros) se determina en virtud del número de vueltas n por minuto y del radio R (en milímetros) con la fórmula:

$$\left.\begin{aligned} v = \frac{\pi Rn}{30 \cdot 1000} = 0'10472\left(\frac{Rn}{1000}\right) \\ \text{ó simplemente } v = \frac{Rn}{10000}. \end{aligned}\right\} \qquad (292)$$

Además suele variarse la anchura de los dientes b con el valor de P. Recomienda *Tredgold* que nunca se pase de 7'15 para la presion por milímetro de anchura, es decir para la relacion $P : b$. Cumple, empero, notar que rara vez se sigue esta regla; y en gran número de esmeradas instalaciones se encuentran para esta relacion valores mucho más altos, que llegan á veces hasta 25. Es además evidente que para evitar un gran desgaste conviene que el producto $\frac{P}{b} \cdot n$ no sea demasiado considerable. En ciertos casos el valor de ese producto se eleva hasta 1200; pero entonces se observa un desgaste muy rápido. En los engranajes de fundicion con fundicion, la rueda pequeña es la que se gasta más pronto. Entonces no conviene pasar de 500 para el producto $\frac{Pn}{b}$, y aun es mejor quedarse más abajo, si es posible; y para esfuerzos pequeños que deban trasmitirse, se puede bajar fácilmente á 200 y aun á 100 sin salir de las dimensiones aceptables. En los engranajes de dientes de fundicion con dientes de madera, el desgaste se efectua casi únicamente en estas últimas, y por ende es inútil preocuparse del de los dientes de fundicion. Igualmente nunca se recomendará demasiado el quedarse más abajo de 500 para el valor $\frac{Pn}{b}$ en las ruedas de dientes de madera, permaneciendo en lo posible entre 300 y 400. No se pueden dar tocante al particular reglas perfectamente exactas, porque es preciso en las cuestiones de ese género tomar en cuenta las dificultades de construccion de toda especie, hacerse cargo de los modelos existentes, etcétera; y es al constructor á quien incumbe apreciar en los diferentes casos particulares la medida que conviene adoptar entre los valores sancionados por la esperiencia.

Para los grupos de engranaje ó sea para aquellos que están compuestos de varias ruedas que encajan con una sola, debe tomarse para n el número de sus contactos de dientes en vez del número de vueltas de la rueda media, esto es: debe tomarse el producto del número de vueltas de esa rueda por el número de las ruedas laterales.

Cuando de ese modo se ha logrado fijar el valor de $P : b$, es decir el de b, así como el que se quiere admitir para S, el paso t se calcula por la fórmula (287), que da:

$$t = \frac{16'8\,P}{S\,b} = \frac{16'8 \cdot 716200}{S\,b\,R}\,\frac{N}{n} \qquad (293),$$

designando N el número de caballos que ha de trasmitirse.

En los engranajes movidos mecánicamente nunca debe el número de dientes ser inferior á 20, si se quiere que los errores de ejecucion no tengan demasiada importancia; y por el mismo motivo, aunque más especialmente en concepto del desgaste, debe tomarse Z tanto mayor cuanto más considerable es la velocidad de rotacion. Así sucede que en los engranajes de turbinas, que están animados de un movimiento rápido,

de rotacion, rara vez el número de dientes es inferior á 40 y con frecuencia se eleva hasta 80.

En los engranajes de dientes de fundicion con dientes de madera hay la ventaja, para llegar al desgaste más pequeño, de colocar los dientes de madera en la rueda motriz, porque en esta rueda comienza el engranaje á la raiz del diente para acabar en la cabeza, mientras que en la rueda conducida sucede al revés (1).

Cuando se ha escogido en Z en virtud de dichas consideraciones, determinado b por las indicaciones de la esperiencia y fijado la tension S, el valor de t está espresado por la relacion:

$$t=8695\sqrt{\frac{N}{SbZn}} \qquad (294)$$

En el caso de estar determinado $\frac{b}{t}$ en vez de b, se tiene:

$$t=423\sqrt[3]{\frac{N}{nSZ}\left(\frac{t}{b}\right)} \qquad (295)$$

1.er EJEMPLO. *Una rueda hidráulica destinada á trasmitir un trabajo de* 60 *caballos tiene el diámetro de* 8^m *y una velocidad de* $1'3^m$ *en la circunferencia: está dotada de una corona de fundicion con dentaje interno, cuyo círculo primitivo coincide aproximadamente con la circunferencia interior de la corona, cuyo espesor es de* 400^{mm}*: esta corona debe conducir un piñon de hierro colado que da* 40 *vueltas por minuto. Entonces se tiene:* $n=\frac{30\cdot 1'3}{\pi\cdot 4}=3'1$ *y por tanto* $\frac{n_1}{n}=\frac{40}{3'1}$*; teniéndose además* $v=1'3\cdot\frac{4000-400}{4000}=1'17^m$*, y por consiguiente:* $P=\frac{75\cdot 60}{1'17}=3846^k$*. Debiendo* S *estar comprendida, segun las observaciones anteriores, entre* $3'37^k$ *y* $2'69^k$*, tomaremos* $S=3'2^k$*. Para la pequeña rueda el valor de* $Pn:b$ *conforme á las indicaciones de la esperiencia, puede tomarse igual á* 500*, y entonces tendremos:* $\frac{P}{b}=\frac{500}{n_1}=\frac{500}{40}=12'5$ *De donde se deduce ante todo:* $b=\frac{P}{12'5}=\frac{3846}{12'5}=307'7$ *ó sea* 310^{mm}*, y por consiguiente la fórmula* (293)*:* $t=\frac{16'8\cdot 3846}{3'2\cdot 310}=65'1$ *ó bien* 65^{mm}*; lo cual da provisionalmente:* $Z=\frac{2\pi R}{t}=\frac{2\cdot 3600\cdot\pi}{65}=347'9$*. Hagamos* $Z=348$*, lo cual permite dividir la corona en* 12 *segmentos, comprendiendo cada una* 29 *dientes, y da por lo tanto una division muy cómoda. Con este valor de* $Z=348$ *el radio de* R *queda exactamente igual poco más ó ménos á* 3600*. Por lo que hace á la rueda conducida se tiene entonces:* $Z_1=\frac{n}{n_1}Z=\frac{3\cdot 1}{40}\cdot 348=26'97$ *ó* 27*, número que puede admitirse definitivamente. De ahí se deduce como valor del radio* $R_1=\frac{27\cdot 65}{2\pi}=279'3^{mm}$.

2.º EJEMPLO. *Una turbina cuyo árbol vertical da* 96 *vueltas por minuto debe trasmitir una fuerza de* 100 *caballos á un árbol horizontal que da* 144 *vueltas. Trátase de determinar las dos ruedas cónicas necesarias para esa trasmision. Supondremos que la rueda conducida es de dientes de madera, la conductora de dientes de fundicion, y tomaremos* $Z=72$, $Z_1=48$*. La velocidad* v *evaluada aproximadamente está comprendida entre* 6 *y* 7^m*, y por ello podemos admitir para* S $1'4^k$ *próximamente. Si conforme á las indicaciones de la esperiencia tomamos* $b=240^{mm}$*, la fórmula* (294) *nos dará:* $t=8695\sqrt{\frac{100}{1'4\cdot 240\cdot 72\cdot 96}}$ *ó* 57^{mm}*. Segun la tabla del* § 245 *ese valor da* $R=57\cdot 11'46=653'2^{mm}$*; lo cual conduce para* v *á* $6'57^m$ *y demuestra que el valor* $1'4$*, admitido para* S*, es muy conveniente. Entonces tenemos* $P=\frac{75\cdot N}{v}=\frac{7500}{6'57}$ *ó* 1140^k*; de donde se deduce* $\frac{P}{b}=\frac{1140}{240}=4'75$ *y* $\frac{P}{b}n=96\cdot 4'57=456$*, valores que son perfectamente admisibles.*

3er. EJEMPLO. *En un mecanismo de ruedas dentadas (fig.* 684*), en que la rueda y el piñon de cada árbol son respectivamente del mismo tamaño que la rueda y el piñon del árbol precedente, los esfuerzos en las circunferencias de las ruedas son inversamente proporcionales á los números de vueltas; y en ese caso para que el valor de* $Pb:n$*, es decir, el desgaste sea constante en todos los acoplos de ruedas, conviene dar á todas éstas la misma anchura. Este dispositivo es el que se emplea*

(1) En este dispositivo que ofrece igualmente ciertas ventajas en concepto de la facilidad de las reparaciones, conviene que los dientes de fundicion estén bien tallados ó á lo ménos se les quite con la lima toda aspereza. Como por otra parte los dientes (de fundicion ó de madera) no todos presentan el mismo grado de dureza, importa que cada uno de los dientes de las ruedas engrane sucesivamente con todos los de la otra, lo cual lleva á tomar para los números de dientes de ambas ruedas números que sean primeros entre sí. Siempre es fácil llegar á ese resultado cuando sin inconvenientes se puede modificar lijeramente la relacion de las velocidades de los árboles.

en las combinaciones de ruedas dentadas que se destinan á trasmitir el movimiento al árbol principal de los tornos de puntas

En los engranajes espuestos á choques violentos deben adoptarse dimensiones bastante superiores á las que dan los cálculos anteriores; y así se hace con los engranajes de molinos; en los que la resistencia de los dientes rara vez está en relacion con las presiones estáticas. En esos engranajes el paso es con frecuencia de 3 á 6 veces mayor que el que daria nuestro cálculo. El valor adoptado para $\frac{Pn}{b}$ es igualmente muy corto (100 y aun ménos). Una observacion análoga se aplica á los engranajes de laminadores en que el valor de t es, en promedio, de 2 á 3 veces el del cálculo, y aun amenudo más considerable.

4.° Ejemplo. *Un árbol de rueda de molino, que tiene la velocidad de* 120 *vueltas por minuto, exige un trabajo de* 4 *caballos, que debe serle trasmitido por dos ruedas dentadas de fundicion y de madera. El radio R es igual á* 250^{mm}. *De la fórmula* (292) *se deduce para la velocidad* $v=3'15^{m}$, *y por tanto* $P=95^{k}$. *Para llegar á un desgaste muy pequeño tomemos* $\frac{Pn}{b}$ *muy reducido é igual, por ejemplo, á* 120; *lo cual da* $b=95 . 120 : 120=95^{mm}$. *Como segun la fórmula* (291), S *debe suponerse igual á* $1'85^{k}$, *resulta que deberia tomarse:* $t=\frac{16'8 . 95}{1'85 . 95}=9^{mm}$. *Realmente en la práctica para tener en cuenta los choques y vibraciones se adopta para* t *un valor mucho más considerable comprendido entre* 40 *y* 50^{mm}.

En vez de continuar demostrando con ejemplos las divergencias entre los valores dados por el cálculo y los que se admiten en la práctica para los casos especiales de que se trata, preferimos intercalar aquí una série de tablas que contienen las dimensiones adoptadas en la realidad para ciertos engranajes espuestos á choques.

ENGRANAJES CILÍNDRICOS.

N.os	N	n	R	Z	t	b	v	P	S	$\frac{P}{b}$	$\frac{Pn}{b}$	OBSERVACIONES.
1	300	$\frac{25}{100}$	$\frac{3724}{939}$	$\frac{230}{58}$	102	356	9'70	2320	1'1	6'52	$\frac{2.163}{622}$	*F*/*F* Máquina de vapor.
2	270	$\frac{60}{12}$	$\frac{498}{2490}$	$\frac{19}{95}$	158	525	3'13	6500	1'3	12'40	$\frac{744}{149}$	*F*/*F* Máquina de vapor.
3	240	$\frac{13'3}{44}$	$\frac{2790}{843}$	$\frac{208}{68}$	79	406	3'89	4633	2'3	11'60	$\frac{154}{510}$	*F*/*F* Engranajes de trasmision del N.° 8.
4	192	$\frac{1'33}{15'14}$	$\frac{10193}{897}$	$\frac{704}{62}$	91	381	1'42	10110	5'1	26'53	$\frac{35}{402}$	*F*/*F* Rueda hidráulica.
5	192	$\frac{15'14}{50}$	$\frac{2691}{815}$	$\frac{208}{63}$	81	381	4'27	3375	1'6	8'86	$\frac{134}{443}$	*F*/*F* Engranajes de trasmision del N.° 4.
6	140	$\frac{30}{55}$	$\frac{1485}{815}$	$\frac{132}{72}$	71	218	4'62	2273	$\frac{3'0}{3'4}$	10'42	$\frac{313}{573}$	*F*/*F* Máquina de vapor.
7	140	$\frac{30}{54'5}$	$\frac{1690}{905}$	$\frac{138}{76}$	77	330	5'31	1977	2'6	5'99	$\frac{180}{326}$	*F*/*F* Máquina de vapor.
8	120	$\frac{1'51}{13'3}$	$\frac{7391}{838}$	$\frac{560}{80}$	79	381	1'22	7377	4'0	19'36	$\frac{29.2}{257}$	*F*/*F* Rueda hidráulica.
9	90	$\frac{26}{80}$	$\frac{2170}{705}$	$\frac{228}{74}$	60	150	5'91	1142	2'1	7'61	$\frac{198}{609}$	*B*/*F* Máquina de vapor.
10	82'5	$\frac{54}{83}$	$\frac{1400}{910}$	$\frac{114}{74}$	78	$\frac{2.120}{300}$	7'92	1563	$\frac{1'3}{1'0}$	6'50	$\frac{351}{2.540}$	*B*/*F* Barco de hélice.
11	50	$\frac{4.0}{7'32}$	$\frac{1282}{700}$	$\frac{96}{52}$	83	270	0'53	7075	5'3	26'20	$\frac{105}{192}$	*F*/*F* Rueda hidráulica.
12	20	$\frac{7'74}{40}$	$\frac{2170}{420}$	$\frac{248}{48}$	55	160	1'67	900	1'7	5'60	$\frac{43}{224}$	*F*/*F* Rueda hidráulica.

ENGRANAJES CÓNICOS.

13	300	$\frac{93}{50}$	$\frac{620}{1160}$	$\frac{50}{93}$	78	330	6'04	3730	$\frac{2'3}{2'6}$	11'23	$\frac{1044}{562}$	*F*/*F* Turbina.
14	300	$\frac{100}{111'8}$	$\frac{755}{679}$	$\frac{55}{49}$	68	254	8'01	2806	2'7	11'04	$\frac{110}{123}$	*F*/*F* Engranajes de trasmision del N.° 1.
15	240	$\frac{44}{44}$	1067	75	89	457	4'92	3659	1'5	7'70	389	*F*/*F* Engranajes de trasmision del N.° 3.
16	200	$\frac{41}{80}$	$\frac{1500}{765}$	$\frac{98}{50}$	96	300	6'40	2344	1'4	7'80	$\frac{320}{624}$	*B*/*F* Turbina.
17	130	$\frac{93}{124}$	$\frac{795}{630}$	$\frac{80}{60}$	62	204	7'74	1260	$\frac{1'6}{1'7}$	6'18	$\frac{575}{766}$	*B*/*F* Turbina.
18	100	$\frac{93}{144'7}$	$\frac{595}{380}$	$\frac{70}{45}$	53	160	5'79	1300	$\frac{2'1}{2'7}$	8'14	$\frac{757}{1178}$	*B*/*F* Turbina.
19	50	$\frac{93}{218}$	$\frac{645}{275}$	$\frac{75}{32}$	54	160	6'20	597	$\frac{1'1}{1'3}$	3'70	$\frac{344}{807}$	*B*/*F* Turbina.

ENGRANAJES HIPERBOLOIDES.

20	16	$\frac{72}{81'6}$	$\frac{548}{483}$	$\frac{68}{60}$	$\frac{50'7}{50'6}$	150	4'13	291	$\frac{0'65}{0'88}$	1'94	$\frac{140}{158}$	*F*/*B* Engranajes de trasmision.

§ 270

Observaciones relativas á las tablas precedentes.

Conforme demuestra la primera columna, los elementos suministrados por esas tablas se refieren especialmente á engranajes destinados á la trasmision de fuerzas considerables y para las cuales se ha dado, lo más exactamente posible, el número de dientes. La materia de que están formados esos dientes está indicada en la última columna. Los diversos signos $F|F$, $B|F$, $F|B$ designan respectivamente engranajes de fundicion sobre fundicion, de madera sobre fundicion y de fundicion sobre madera, refiriéndose siempre la primera letra á los dientes de la rueda conductora. El trabajo indicado es el trabajo real en caballos y no el trabajo nominal. En las columnas 3, 4, 5, 10 y 12 los dos números separados por una línea horizontal corresponden respectivamente para cada número á la rueda conductora y á la rueda conducida. Los diversos ejemplos de las tablas dan márgen á las siguientes observaciones:

N.° 1. La rueda conductora es un volante dentado que engrana con dos piñones de igual tamaño y trasmiten un trabajo de 300 caballos á cada uno de ellos, ó sea un trabajo total de 600 caballos. Por consiguiente, para el volante, $\frac{Pn}{b}$ ha debido multiplicarse por 2 (Véase la penúltima columna).

N.° 2. Máquina impelente del antiguo ferro-carril atmosférico de Saint-Germain. El valor de $\frac{Pn}{b}$ es muy elevado; y ese defecto debia ser muy sensible cuando el servicio funcionaba sin interrupcion.

N.° 3. El valor de $\frac{P}{b}$ es más elevado aun; pero en virtud del corto número de vueltas $\frac{Pn}{b}$ no pasa del límite admisible.

N.° 4 y 5. Los datos de esos dos números se refieren á la poderosa rueda hidráulica de *Greenock* (que aun hoy es la mayor de cuantas existen). La presion por unidad de anchura de la corona dentada es muy considerable; pero la trasmision por engranajes parece estar en condiciones relativamente satisfactorias, lo cual debe sin duda atribuirse al escaso valor de $\frac{Pn}{b}$.

Para el piñon del n.° 5 el valor de $\frac{Pn}{b}$ es poco más ó ménos el mismo que para el piñon del n.° 4. Esos dos piñones deben estar muy sensiblemente sometidos al mismo grado de desgaste.

N.° 6. Los dientes de la pequeña rueda (piñon) son más débiles que los de la grande (volante dentado), conforme lo indica la columna de las tensiones (S). Es probable que al principio llevaba el volante dientes de madera.

N.° 8. Si bien la presion por unidad de anchura es muy considerable, el valor de $\frac{Pn}{b}$ es aun bastante pequeño. En este caso, como en el número 4, la tension de los dientes es bastante fuerte. La aplicacion de la fórmula (291) nos habria dado valores más débiles.

N.° 9. Los dientes de madera se han afilado al cabo de cierto tiempo de marcha; y esa disminucion de espesor debe atribuirse á la presion demasiado considerable, sufrida por dichos dientes, y que es aquí de $2'1^k$. En las mismas condiciones habríamos adoptado, á seguir la fórmula (287), $1'5^k$ solamente.

N.° 10. Dos ruedas de dientes de madera encajan con un piñon de dientes de fundicion calado en el árbol de una hélice. Teniendo cada una de estas ruedas una anchura de diente de 120^{mm}, la anchura total que ha de introducirse, segun el cálculo de S y de $\frac{Pn}{b}$, es de $2 \cdot 120^{mm} = 240^{mm}$.

N.° 11. Presion por unidad de anchura muy considerable que se traduce por desgaste de los dientes. Con un valor tan fuerte de $\frac{P}{b}$ es á todas luces difícil mantener esos dientes en buen estado.

N.° 13. Los dientes son demasiado débiles y se rompen algunos bastante amenudo. El desgaste de estos dientes debe ser en estremo rápido, lo cual además se esplica por el valor escepcional de $\frac{Pn}{b}$.

N.° 15. Ese par de ruedas (instalado por *Fairbairn*) puede tener que trasmitir un trabajo doble del que está indicado, ó sea que en ciertos casos puede trasmitir el trabajo de 4 ruedas hidráulicas en vez de 2, teniendo cada una de estas ruedas un poder de 120 caballos. En estas condiciones la tension de los dientes se elevaria á 3^k, valor admisible; mas para una marcha permanente el valor de $\frac{Pn}{b}$ seria entonces algo demasiado fuerte.

N.° 18. El valor de $\frac{Pn}{b}$ que parece ya muy elevado para la rueda de dientes de madera, es en estremo fuerte para la rueda de dientes de fundicion; pero cum-

ple notar que en tal caso el desgaste debe efectuarse casi esclusivamente en los dientes de madera.

N.° 20. Ese tipo de engranajes está tomado de un nuevo modo de trasmision en un taller de construccion de máquinas, que antes habia empleado con el mejor éxito ruedas hiperboloides como órganos de trasmision. Uno de los defectos del dispositivo adoptado dimana de hallarse colocados los dientes de madera en la rueda conducida, lo cual da por consecuencia, conforme hemos visto, aumentar notoriamente las probabilidades de desgaste (véase § 269).

F. DIMENSIONES DEL CUERPO DE LAS RUEDAS DE ENGRANAJES.

§ 271

Corona de una rueda dentada.

Desígnase con el nombre de corona ó llanta de una rueda, la seccion anular en que están fijados los dientes; si bien la designacion de llanta se aplica en mecánica más especialmente al conjunto de segmentos separados, que en ciertos casos constituyen por su reunion la corona de la rueda. En los engranajes cilíndricos de fundicion puede tomarse para el espesor de la corona:

$$\delta = 3 + 0{,}4\, t \qquad (296)$$

(Figs. 685 á 687). El espesor de la corona no es uniforme; pues hasta el medio, ó sea de un estremo á otro aumenta de δ á $^6/_5\,\delta$, estando además reforzada por una nervadura que en los pasos de corta dimension y brazos de seccion oval, puede perfilarse en arco de círculo (fig. 687). Segun la fórmula (296), un paso de 20^{mm} exije un espesor de corona de $3+8=11^{mm}$. Para $t=10^{mm}$, δ no es más que de 7^{mm}.

En las ruedas cónicas de fundicion (figs. 688 á 690), el espesor de la llanta vá en aumento del interior al esterior donde alcanza $^6/_5\,\delta$, y se enlaza con los brazos como indican esas figuras. En las ruedas de dientes de madera la corona debe tener mayor espesor y estar además reforzada lateralmente. Ese aumento de dimensiones tiene por objeto especial permitir un encaje conveniente de los dientes. Los números proporcionales para las ruedas cilíndricas y cónicas están indicados respectivamente por las figs. 691 á 693 y 694-695. Los dientes de madera de muy grande anchura están formados de dos piezas (fig. 695), cuyas colas están separadas por una nervadura trasversal.

Las ruedas cilíndricas de muy cortas dimensiones (pequeños piñones) cuando deben trasmitir un esfuerzo algo considerable, están reforzadas lateralmente por uno ó dos discos (figs. 696 y 697); conviniendo tornear exactamente estos discos hasta el radio del círculo primitivo cuando el piñon debe engranar con una cremallera (fig. 698). Esta lleva en tal caso guias laterales acepilladas, en las cuales ruedan los discos del piñon. Los pequeños piñones de 7 á 8 dientes que encajan con ruedas de dientes de fundicion, se hacen amenudo de hierro, y en tal caso no están provistos de discos laterales.

Sin embargo, para los piñones dentados que han de trasmitir un trabajo de cierta importancia y que están espuestos á choques ó variaciones bruscas de fuerza, como suele suceder con los piñones que engranan con el volante de una máquina motriz ó como sucede con los piñones de laminadores, puede utilizarse ventajosamente el dispositivo de la fig. 699, inventado por los constructores *Windsor*, en Ruan.

En ese dispositivo la corona dentada B es independiente del cuerpo A de la rueda propiamente dicha. Esa corona lleva una série de partes salientes vaciadas T, T... procedentes de fundicion como ella; y en la llanta de la rueda existen salientes análogas K, K, K... En los espacios que dejan libres esas diversas salientes, se intercalan alternativamente planchas de madera i, i, i, y de cauchú c, c, de suerte que las caras de las hojas de cauchú no estén en contacto con el hierro colado. Merced á la interposicion de esas materias elásticas la trasmision del movimiento de la corona al árbol del piñon se efectua con gran suavidad, evitándose á más en gran parte el efecto destructor de los choques sobre los dientes, á la vez que se atenua el ruido.

El corte trasversal indica el modo de enlazar la corona con el cuerpo de la rueda en el sentido perpendicular á su plano. Para poner la corona en su lugar se encaja por el lado, hasta que su reborde interior se ajuste exactamente al reborde de la llanta, que está representado á la derecha de la figura. Introdúcense entonces las placas de madera y de cauchú en los diferentes huecos; y cuando ha terminado esa operacion, se aplican los pernos de union D, D..., cuyas tuercas se aprietan por las contra-placas M, M, que toman sus puntos de apoyo sobre la corona y la llanta, á la vez que quedan libres de desplazarse lijeramente en sentido de la circunferencia.

§ 272

Brazos de una rueda dentada.

La seccion de los brazos que conviene adoptar para las diferentes formas de coronas que acabamos de indicar, están representadas por las figs. 700 á 702.

Las figs. 700 y 701 son secciones de nervaduras con tamaño diferente. En la fig. 701 el trazado en punteado representa la forma de seccion más conveniente para el empleo de gábilos, en el moldeo con arena. La figura 702 representa una seccion oval, para la que en cada punto, la anchura β es la mitad de la anchura h. El número K de brazos de una rueda está debidamente determinado por la relacion:

$$\left.\begin{aligned} K &= {}^1/_4 \sqrt{Z}\,\sqrt[4]{t} \\ \text{ó}\quad K &= {}^1/_3 \sqrt{Z}\,\sqrt[4]{\frac{t}{\pi}} \end{aligned}\right\} \qquad (297)$$

por medio de la cual está determinada la série de los valores siguientes:

K =	3	4	5	6	7	8	10	12
$Z\sqrt{t}$ =	144	256	400	576	784	1024	1600	2304
$Z\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ =	81	144	225	324	441	576	900	1296

Ejemplo. *Para una rueda de* 50 *dientes y* 50^{mm} *de paso el valor de* $Z\sqrt{t}$ *es* $50 \cdot 7 = 350$, *que se aproxima mucho á* 400. *Luego, la rueda debe tener* 5 *brazos. Si el paso no fuese más que de* 16^{mm}, $Z\sqrt{t}$ *seria igual á* $50 \cdot 4 = 200$, *número comprendido entre* 144 y 256: *luego el número de brazos deberia ser* 3 ó 4.

En la seccion de nervaduras, la altura h del brazo contenida en el plano medio de la rueda se determina á ojo; pero debemos observar que las más de las veces se obtiene para h un valor muy conveniente tomando para la relacion $h : t$ un número comprendido entre 2 y 2'5. El espesor constante B de la nervadura se determina por medio de la fórmula:

$$\frac{\beta}{b} = 0{'}07\,\frac{Z}{K}\left(\frac{t}{h}\right)^2 \qquad (298).$$

Cuando esa fórmula dá un espesor de nervadura sobrado grande ó pequeño bajo el punto de vista del aspecto ó de la práctica en la fundicion, se modifica el valor primitivamente admitido para $h : t$ y se repite el cálculo. Esos tanteos pueden sin embargo reducirse notablemente con el uso de la tabla que va en el párrafo próximo.

La altura de la segunda nervadura cerca de la corona es lijeramente inferior á b, en tanto que cerca del cubo le es igual y hasta un poco mayor.

En los brazos de seccion oval la altura h cerca del cubo es casi siempre igual á $2\,t$ y va disminuyendo hasta la corona donde únicamente es ${}^2/_3\,2\,t$.

§ 273

Tabla relativa á las dimensiones de los brazos de ruedas dentadas.

Valores de $\frac{\beta}{b}$ para

$\frac{h}{t}$	$\frac{Z}{K}$=7	9	12	16	20	25	30	35	40
1'50	0'20	0'28	0'37	0'50	0'62	0'78	0'93	1'08	1'24
1'75	0'16	0'21	0'27	0'37	0'46	0'57	0'69	0'80	0'91
2'00	0'12	0'16	0'21	0'28	0'35	0'44	0'53	0'61	0'70
2'25	0'10	0'12	0'17	0'22	0'28	0'35	0'41	0'48	0'55
2'50	0'08	0'10	0'13	0'18	0'22	0'28	0'34	0'39	0'45
2'75	0'06	0'08	0'11	0'15	0'18	0'23	0'28	0'32	0'37
3'00	0'05	0'07	0'09	0'12	0'16	0'19	0'23	0'27	0'31

EJEMPLO. *La rueda anterior de* 50 *dientes y* 50^{mm} *de paso tiene como anchura de dientes* 100^{mm}. *Si se toma para la altura h de la nervadura en el plano medio de la rueda,* $h=2t=100^{mm}$, *la tabla precedente da para el espesor:* $\beta=0'35 \cdot 100=35^{mm}$. *Pero si este espesor es incómodo y se prefiere una nervadura más escasa, puede tomarse* $h=2'25 \cdot t=2'25 \cdot 50=113^{mm}$ *y la tabla da entonces* $\beta=0'28 \cdot 100=28^{mm}$.

Los brazos de nervaduras en cruz de una rueda dentada de madera y de la rueda dentada de fundicion que encaja con ella, no deben tener, como dimensiones sino los $^{8}/_{10}$ de las que se dan á las ruedas de fundicion sobre fundicion. Cuando se quiere operar con más exactitud puede comenzarse por determinar los dientes de fundicion equivalentes á los de madera dados, y buscar enseguida las dimensiones de los brazos correspondientes á los pasos, á la anchura y al número de esos dientes de fundicion.

§ 274

Cubo de una rueda dentada.

Segun sea la forma de seccion adoptada para los brazos, la superficie esterior del cubo de una rueda dentada admite una ó dos partes ligeramente cónicas. En las ruedas de grandes dimensiones cada tronco de cono termina en una parte redondeada cuyo perfil es un cuarto de elipse. La longitud L del cubo que comunmente es igual á $^{3}/_{4}\ b$, puede tomarse algo mayor en el caso de que las ruedas tengan un gran radio. El espesor del cubo está indicado por la espresion $w=10+0'4\ h$, designando h la altura del brazo.

Cuando el cubo no está destinado á calzarse en caliente, se vacia un poco en el interior en una parte de su longitud, de suerte que no se tenga que labrar al torno más que una anchura á cada estremo igual á $^{3}/_{4}\ w$. El paso de la clavija de fijacion está abierto en toda la longitud del cubo y presenta una inclinacion igual á la de la clavija. En las ruedas destinadas á trasmitir esfuerzos considerables se refuerza el cubo con una saliente practicada directamente encima del alojamiento de la clavija, á fin de evitar que la introduccion de esta última acarree la rotura. Una precaucion que parece preferible, consiste en reforzar cada uno de los estremos del cubo, ó á lo ménos uno de ellos, con un anillo de hierro agregado. Estos anillos de seccion cuadrada, cuyo lado puede tomarse igual á $^{1}/_{3}\ w$, aumentan muy notablemente la resistencia del cubo y permiten apretar con fuerza la clavija sin el menor riesgo de rotura.

§ 275

Peso de las ruedas dentadas.

El peso G de una rueda cilíndrica construida segun las reglas anteriores, puede representarse aproximadamente con la espresion:

$$G=bt^{3}\ (6'25\ Z+0'04\ Z^{3}) \qquad (299)$$

en la que b y t están espresadas en decímetros.

El uso de esa fórmula se encuentra notablemente facilitado por la tabla siguiente, que da $\frac{G}{b\ t^{3}}$ para una série de valores del número de dientes. Cada una de las cantidades dadas por esta tabla corresponde á un número de dientes, que es cabalmente la suma de las cifras inscritas á la entrada de las dos líneas horizontal y vertical correspondientes.

Z	0	2	4	6	8
20	141'0	156'9	173'0	189'5	206'4
30	223'5	241'0	258'7	276'8	295'3
40	314'0	333'0	352'4	372'1	392'2
50	412'5	433'2	454'1	475'4	497'1
60	519'0	541'3	563'8	586'7	610'0
70	633'5	657'4	681'5	706'0	730'7
80	756'0	781'5	807'2	833'3	859'8
90	886'5	913'6	940'9	968'6	996'7
100	1025'0	1053'7	1082'6	1111'9	1141'6
120	1326'0	1357'9	1390'0	1422'5	1455'4
140	1659'0	1694'1	1729'4	1765'1	1801'1
160	2024'0	2062'3	2100'8	2139'7	2179'0
180	2421'0	2462'5	2504'2	2546'3	2588'8
200	2850'0	2894'7	2936'9	2984'9	3030'6
220	3311'0	3358'9	3407'0	3455'5	3504'4

EJEMPLO. *Una rueda dentada de fundicion construida segun las reglas anteriores tiene* 50 *dientes,* $0'5^{dcm}$ *de paso y* 1^{dcm} *de anchura. En este caso se tiene* $b\ t^{3}=0'25$, *y la tabla (col.* 2, *lín.* 4) *da para el peso:* $G=0'25 \cdot 412'5=103'1^{k}$. *Si la rueda, teniendo tambien* 50 *dientes tuviese* 30^{mm} *de paso y* 60 *de anchura, su peso seria:* $G=0'6 \cdot 0'3^{3}\ 412'5=0'054 \cdot 412'5=22'28^{k}$.

Las ruedas cónicas y las dentadas de madera con ligeros brazos en cruz (véase § 273) tienen pesos un poco menores que los indicados en la tabla precedente.

CAPÍTULO XXI

TUBOS Y ENSAMBLES DE TUBOS

§ 276

Fórmulas empiricas referentes al espesor de las paredes de los tubos

En la construccion de las máquinas suelen emplearse tubos de fundicion y de hierro. Los de acero, bronce, cobre, plomo, madera, barro y papel embetunado son de uso mucho ménos general. Para los conductos subterráneos de agua y gas los tubos de fundicion ofrecen hasta ahora ventajas incontestables. En este último caso, la cuestion de la construccion de los tubos tiene tanta importancia, que para determinar el espesor que debe darse á sus paredes, para nada se tiene en cuenta la presion interna, á ménos de ser muy considerable, y se prefiere recurrir al empleo de fórmulas puramente empíricas. Vamos á dar aquí las fórmulas de ese género que son las más generalmente adoptadas.

Designando por D el diámetro interior y por δ el espesor de pared de un tubo por instalar, espresando esas dimensiones en milímetros, deben tomarse para δ los valores siguientes:

Tubos de fundicion para conductos de agua ó gas:

$$\delta = 8 + \frac{D}{80} \qquad (300);$$

Tubos de vapor de fundicion y cilindros de bombas de aire:

$$\delta = 12 + \frac{D}{50} \qquad (301);$$

Cilindros de vapor y cuerpos de bombas alisados de fundicion:

$$\delta = 20 + \frac{D}{100} \qquad (302);$$

Las dimensiones δ y D son las que debe haber despues de la alisadura.

EJEMPLO. *Un tubo de bomba de* 300^{mm} *de diámetro debe tener segun la fórmula* (300) *el espesor* $\delta = 8 + 300 : 80 = 11'75^{mm}$, *ó sea* 12^{mm}. *Para un tubo de vapor del mismo diámetro se tendria, segun la fórmula* (301): $\delta = 12 + 300 : 50 = 18^{mm}$.

En los aparatos de horadar y de orear del túnel del Mont-Cenis, los tubos de conduccion de aire, de 200^{mm} *de diámetro, que habian de soportar una presion interna de* 5 *atmósferas, y que además estaban en una longi-*

tud de 600 á 800m, naturalmente sometidos á muy fuertes variaciones de temperatura, habrian debido tener segun la fórmula (300) *el espesor* $\delta = 8 + 200 : 80 = 10'5^{mm}$*; y se les dió* 10^{mm}. *Para un cilindro de vapor de* 400^{mm} *de diámetro, el espesor es segun la fórmula* (302): $\delta = 20 + 400 : 100 = 24^{mm}$.

Con respecto al espesor de las paredes de los cilindros de vapor, los diferentes talleres de construccion casi no tienen otra regla que la rutina; si bien en ciertos casos se atiende para ese espesor á la cualidad de la fundicion de que se dispone y al objeto que debe llenar la máquina. Pueden esas consideraciones estenderse tambien á los tubos de vapor y agua. En las máquinas de vapor de barcos de escaso consumo de agua, se encuentran amenudo cilindros de un espesor en estremo débil y hasta inferior á la mitad del que indicaria la fórmula (302), mientras que en las máquinas de vapor de grandes buques, para los cuales la consideracion de la carga producida por el motor tiene muy escasa importancia, los resultados que nos da esa fórmula ofrecen muy grande concordancia con las dimensiones adoptadas en la práctica. Esa misma fórmula da igualmente espesores muy convenientes para los cilindros de las máquinas fijas.

Los tubos de hierro estirado suelen emplearse en conductos de agua y gas hasta un diámetro inferior de 150^{mm}; y para su espesor se obtienen valores que concuerdan con los que se encuentran en la práctica cuando se les determina por la fórmula:

$$\delta = 2 + \frac{D}{12} \qquad (303)$$

Los tubos de acero han sido hasta ahora de uso muy limitado; pero se comienza á utilizarlos más cada dia para las calderas de vapor; amen de que en virtud de la estension dada á la fabricacion del acero, es de esperar que este metal no tardará en generalizarse para la construccion de las prensas hidráulicas de muy elevada presion.

Los tubos de hierro obtenidos por la robladura de planchas se examinan en el § 280.

Los tubos de cobre y laton se hacen con espesores que corresponden sensiblemente á la mitad de los que indica la fórmula (303).

Los tubos de plomo se fabrican mecánicamente y se encuentran en el comercio, de suerte que el constructor de máquinas no tiene que preocuparse sobre la determinacion de sus espesores, comprendidos todos entre 3 y 6^{mm}.

Los tubos de madera de pino, de *Herzog*, cuyo modo de construccion es análogo al de los toneles, tienen un espesor variable de 80 á 120^{mm}, que se determina enteramente en virtud de las condiciones de construccion.

§ 277

Cálculo de los tubos sometidos á una fuerte presion interna.

La fórmula de *Lamé*, indicada en el § 19, da para el espesor de los tubos sometidos á una fuerte presion interna:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{S+p}{S-p}} - 1\right) \qquad (304)$$

designando p la presion interna por unidad de superficie y S el máximo de tension de la materia en la pared del tubo. Para tubos de dimensiones determinadas el máximum de tension está indicado por la espresion:

$$S = p\,\frac{\left(\frac{D}{2}+\delta\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}{\left(\frac{D}{2}+\delta\right)^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2} \qquad (305)$$

Ese máximum es, como vemos, directamente proporcional á la presion interior, y cuando esa presion está indicada en atmósferas y es por ejemplo superior de n atmósferas á la presion esterna, debe tomarse $p = \frac{n}{100}$.

Fácil es, segun esto, determinar los espesores que han de adoptarse para los cilindros de prensas hidráulicas admitiendo para S los valores siguientes:

Fundicion. . .	3 á 7^k	por milím.	cuad.
Hierro. . . .	6 á 14	»	—	—
Acero. . . .	13 á 20	»	—	—
Bronce. . . .	2 á 5	»	—	—
Cobre. . . .	2 á 2'5	»	—	—

La tabla que sigue da una série de valores correspondientes á esas tensiones, que están calculadas por la fórmula (304). En esta tabla se ha supuesto que la presion por milímetro cuadrado, para una atmósfera, era simplemente $0'01^k$, en vez de $0'0103^k$. La diferencia es enteramente despreciable.

Cuando el valor de δ es corto en relacion al de D, la fórmula (304) puede reemplazarse con una aproximacion satisfactoria por la siguiente:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{1}{2}\cdot\frac{p}{S} \qquad (306)$$

que para pequeños valores de p da resultados perfectamente admisibles.

§ 278

Tabla relativa á los espesores de los recipientes cilíndricos sometidos á una presion interior elevada.

PRESION INTERNA.		VALORES DE $\frac{\delta}{D}$, PARA LOS VALORES DE LA TENSION EN LA MATERIA (en kil. por ^{mmc}.)								
n Atm.	p En kil. por^{mmc}	$S=2$	3	4	5	6	8	10	15	20
50	0'5	0'14	0'09	0'07	0'05	0'04	0'03	0'03	0'02	0'01
100	1'0	0'37	0'21	0'14	0'11	0'09	0'07	0'05	0'03	0'03
150	1'5	0'82	0'50	0'24	0'18	0'15	0'11	0'08	0'05	0'04
200	2'0	—	0'62	0'37	0'26	0'21	0'15	0'11	0'07	0'05
250	2'5	—	1'66	0'54	0'37	0'28	0'19	0'15	0'09	0'07
300	3'0	—	—	0'82	0'50	0'37	0'24	0'18	0'11	0'08
350	3'5	—	—	1'43	0'69	0'47	0'30	0'22	0'13	0'10
400	4'0	—	—	—	1'00	0'61	0'37	0'26	0'15	0'11
450	4'5	—	—	—	1'71	0'82	0'44	0'31	0'18	0'12
500	5'0	—	—	—	—	1'16	0'54	0'37	0'20	0'14
600	6	—	—	—	—	—	0'82	0'50	0'26	0'16
700	7	—	—	—	—	—	1'43	0'69	0'32	0'22
800	8	—	—	—	—	—	—	1'00	0'40	0'26
900	9	—	—	—	—	—	—	1'68	0'50	0'31
1000	10	—	—	—	—	—	—	—	0'61	0'37

Las rayas que hay en las diversas columnas de esa tabla, indican que la fórmula (304) da valores imaginarios, lo cual significa en otros términos que la pared del cilindro sometida á las presiones correspondientes á esas rayas se romperia en todo caso, fuese cual fuere su espesor. Las partes más espuestas corresponden á las secciones longitudinales del cilindro, de manera que en caso de rotura deben abrirse grietas dirigidas en sentido de la longitud, conforme se comprueba muy amenudo en la práctica. El cilindro está igualmente sometido á esfuerzos considerables de rotura en las secciones perpendiculares al eje y sobre todo en las partes en que se junta con el fondo, siendo además el peligro de rotura tanto más pronunciado cuanto más bruscamente se efectua el cambio de direccion; por lo que importa poner mucha atencion al enlace del cilindro con el fondo.

Las prensas hidráulicas de gran potencia tienen las más de las veces cilindros de fundicion, cuyo empleo presenta tantas más dificultades cuanto más considerable debe ser el espesor. Por lo tanto se procura reducir ese espesor admitiendo una tension bastante elevada, y al efecto se pone el mayor cuidado en la ejecucion del cilindro, de manera que se obtenga una fundicion tan densa y resistente como sea posible. La esperiencia enseña que se logra una materia bastante apropiada á los cilindros de las prensas, haciendo uso de fundicion sometida cierto número de veces á la fusion, procurando cada vez colarla en planchas delgadas. Tambien se han obtenido muy buenos resultados añadiendo cierta cantidad de hierro en el horno de reverberacion (metal de *Stirling*). Es evidente que puede admitirse para S un valor tanto más elevado cuanto mejor se han escogido las primeras materias y con más esmero se han trabajado. Antes hemos indicado que para la fundicion el valor de S podia ser de 3 á 7^k. En la práctica aun suele pasarse á veces de este último número, si bien no conviene más que en los casos de todo punto escepcionales, en los que se tiene completa seguridad de disponer de una fundicion de superior calidad. A iguales observaciones da márgen el bronce. El cobre rojo ó roseta ordinario y bueno no es susceptible de soportar, sin permanentes deformaciones, tensiones superiores á 3 ó 3'5^k. Si se quiere sobrepujar este número, conviene recurrir al empleo de una aleacion más resistente.

Vamos á dar aquí algunos ejemplos, tomados de la práctica, que pueden suministrar útiles indicaciones.

1.^{er} EJEMPLO. *Para la elevacion del puente de Conway* (1) *se hizo uso de una prensa hidráulica cuyas dimensiones eran las siguientes: Diámetro del émbolo* $K=457^{mm}$, *diámetro del cilindro* $D=508$, *espesor de las paredes* $\delta=222^{mm}$. *La carga que habia de levantar era de* 660000^k. *La presion del agua debia ser en tal*

(1) V. Clark, *The Britannia and Conway Tubular bridges*. Lóndres, 1850.

caso de 402 atmósferas ó de 4'02^k por milímetro cuadrado, y la fórmula (305) da entonces para la tension: $S=\frac{(10+8'75)^2+10^2}{(10+7'75)^2-10^2}\cdot 4'02=7'2^k$. *El cilindro empleado es el indicado por la fig. 703.*

2.° EJEMPLO. *Para montar el puente Britannia se emplearon prensas hidráulicas de diferentes géneros de construccion. Uno de los aparatos se componia de una doble prensa cuyos cilindros tenian las mismas dimensiones que el de la prensa del ejemplo anterior; si bien la carga sobre cada émbolo era únicamente de 467900^k y correspondia por lo tanto á una presion de agua de 285 atmósferas. En esas condiciones el cálculo da 5'1^k para el máximo de tension.*

3.er EJEMPLO. *Entre los aparatos de elevacion empleados en esa operacion gigantesca habia una prensa simple (fig. 704), destinada á levantar una pieza cuyo peso era de 1162400^k; el diámetro del émbolo era de 508^{mm}, el del cilindro de 559, y el espesor de las paredes 254^{mm}. Con esas dimensiones la presion del agua se elevaba á 573 atmósferas, y la fórmula (305) daba entonces para la tension la enorme cifra de 10^k. Antes de que la pieza levantada llegase al nivel de las pilas el cilindro de la prensa se rompió, y la carga al caer sobre los soportes de seguridad que se habian aplicado, sufrieron grandes averías La rotura no se efectuó longitudinalmente, como era de suponer, sino trasversalmente, habiéndose separado del cilindro el fondo, como lo indica la figura 704. Así pues, á pesar del valor exagerado de la tension en todo su contorno el cilindro demostró que era capaz de una gran resistencia, resultado que debe atribuirse al cuidado especial empleado en la eleccion y mezcla de las primeras materias y á las precauciones tomadas en la operacion de fundir el metal (1). La separacion del fondo dimanaba de haberse hecho su trabazon con el cilindro de arista ó ángulo vivo. El nuevo cilindro recibió las mismas dimensiones que el primero, pero la trabazon se dispuso de una manera más conveniente, conforme indica en punteado la misma fig. 704.*

4.° EJEMPLO. *Los inconvenientes que acarrea la trabazon ó enlace del fondo con el cilindro, se encuentran completamente evitados en una gran prensa inventada por Hummel, de Berlin, merced á un dispositivo que consiste en reemplazar el fondo con una plancha separada, de superficie plana, á la cual está unido el cilindro por una pieza de rebordes rectangulares (figura 705). La prensa, una de las mas poderosas que existen, comprende dos cilindros yuxta-puestos. El diámetro de los émbolos K=601^{mm}, el de los cilindros D=628^{mm}, el espesor de las paredes δ=222^{mm}. La presion P en cada émbolo puede alcanzar hasta un millon de kilógramos, lo cual da dos millones para la presion total de la prensa. La presion correspondiente del agua es de 352 atmósferas y la tension S calculada por la fórmula (305) es entonces de 7'18^k.*

De una manera general es preferible para las prensas que han de desarrollar una gran potencia, aumentar el diámetro del émbolo antes que dar al agua una presion exagerada, puesto que la cantidad de materia que ha de emplearse para la prensa, en vez de aumentar con el diámetro, disminuye. Con efecto, se tiene para la superfieie de la seccion de la pared del cilindro: $F=\pi(D+\delta)\delta$ y reemplazando δ por su valor, sacado de la relacion (304), se tiene: $F=\frac{\pi}{4}D^2\frac{2p}{S-p}$, ó $F=\left(\frac{D}{K}\right)^2\frac{2P}{S-p}$, designando por P la presion total y por K el diámetro del émbolo; pudiendo á más considerarse como constante la relacion $\frac{D}{K}$, en cuyo caso se ve que para un valor determinado de S la seccion F disminuye con la presion p por unidad de superficie.

5.° EJEMPLO. *La bomba de bronce de la prensa del puente de Conway tenia un émbolo de 27^{mm} de diámetro y el espesor de la pared del cuerpo de bomba y su diámetro tenian el mismo valor. La presion del agua, como hemos dicho, alcanzaba 402 atmósferas. Calculando por la fórmula (305) el máximo de tension que se produce en la superficie interior del cilindro, se encuentra* $S=4'02\cdot\frac{(r+2r)^2+r^2}{(r+2r)^2-r^2}=1'25\cdot 4'02$, *ó sea* 5^k.

6.° EJEMPLO. *Calculando por la fórmula de Lamé (305) las tensiones de la materia en los tubos de conduccion, cuyos espesores hemos determinado antes con la fórmula empírica (300), se obtienen los valores siguientes:*

(1) En la primera operacion el cilindro se fundió invertido (el fondo hacia arriba) y hubo de desecharse porque el fondo era poroso; en la segunda operacion, en la que el fondo estaba abajo, se obtuvo el cilindro que, como hemos dicho, se rasgó; y esa rotura demostró que la fundicion era de granos irregulares. El tercer cilindro cuya fundicion se sujetó previamente á doble fusion, resistió perfectamente; y un cuarto cilindro fundido como pieza de recambio, quedó sin empleo.

D=80	400	800	1200
δ = 9	13	18	23
$\frac{S}{n}$ = 0'050	0'159	0'227	0'266
Para n=10, S =	0'50^k	0'59^k	2'27^k	2'66^k.

De ahí resulta que esos tubos se hallan perfectamente en estado de soportar la presion de prueba de 10 *atmósferas, á que comunmente se someten, con la condicion, por supuesto, de que se hayan fundido con un núcleo perfectamente concéntrico al eje.*

§ 279

Recipientes esféricos sometidos á una fuerte presion interna.

Para los recipientes esféricos de un diámetro interior igual á D_1, la fórmula de Lamé está reemplazada por la fórmula siguiente:

$$\frac{\delta_1}{D_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{2(S+p)}{2S-p}} - 1\right) \qquad (307)$$

que da un espesor mucho más delgado que el de un tubo cilíndrico de igual diámetro. Para un mismo espesor de pared y para idéntico coeficiente de seguridad los diámetros de dos recipientes cilíndrico y esférico están en la relacion:

$$\frac{D_1}{D} = \frac{\sqrt{\frac{S+p}{S-p}} - 1}{\sqrt[3]{\frac{2(S+p)}{2S-p}} - 1} \qquad (308)$$

Ejemplo. *Para* S=6 *y* p=3 *la última fórmula da:*

$$\frac{D_1}{D} = \frac{\sqrt{\frac{9}{3}} - 1}{\sqrt[3]{\frac{18}{9}} - 1} = \frac{0'73}{0'26}$$ *ó* 2'8. *Por consiguiente para un casquete esférico empleado como fondo de cilindro es fácil obtener una resistencia muy superior á la del cilindro mismo. Pero importa poner cuidado en pasar gradualmente de una forma á otra, evitando los ángulos vivos ó aristas.*

§ 280

Espesor de las paredes de calderas de vapor de presion interna.

Las tensiones que se admiten para las calderas de vapor son muy pequeñas con respecto á las que se efectuan en las grandes prensas hidráulicas. La ordenanza prusiana que regulaba antes los espesores de las calderas de vapor, prescribia en el caso de una presion interna el empleo de la fórmula:

$$\delta = \frac{D}{2}\left(e^{0'003\,n} - 1\right) + 0'01 \qquad (309)$$

en que δ y D se espresan en pulgadas (26^{mm}). Esa fórmula puede reemplazase muy aproximadamente por la que sigue:

$$\delta = 1'54\,n\,D + 2'6^{mm}, \qquad (310)$$

en la cual δ designa el espesor en milímetros, D el diámetro en metros y n la presion efectiva en atmósferas. La ordenanza que regulaba en Francia el espesor de las calderas antes del decreto de 1865, conducia á un espesor algo más recio correspondiente á la fórmula:

$$\delta = 1'8\,n\,D + 3^{mm}. \qquad (311)$$

Para las calderas de locomotoras solo se exigian los $^2/_3$ de ese espesor.

Por razon de las constantes que encierran, pueden considerarse esas tres fórmulas como puramente empíricas.

La fórmula (310) se deduce en realidad de la fórmula (306) por la adicion de una constante (2'6^{mm}) correspondiente al desgaste. Suponiendo que se prescinda de esa constante, la tension de la materia será la que indica la fórmula (306), es decir S=3'25^k. Verdaderamente la tension se encuentra disminuida por efecto de ese supra-espesor, conforme lo indica la siguiente tabla:

D	PRESION EFECTIVA EN ATMÓSFERAS.					
	n=4		7		10	
	δ	S	δ	S	δ	S
600	6'3	1'90	9'1	2'31	11'8	2'54
800	7'5	2'13	11'2	2'50	14'9	2'70
1000	8'8	2'27	13'4	2'61	18'0	2'78

Las tensiones indicadas en esta tabla se refieren al palastro entero; pues con una robladura esas tensiones se encuentran aumentadas en la proporcion poco más ó ménos de 3 á 2 (véanse §§ 55 á 60). Para las calderas de acero, no teniendo en cuenta más que la resistencia á la estension, los espesores deberian ser inferiores á los que dan las fórmulas precedentes, ya que la resistencia de ese metal es mayor que la del hierro.

Cuando una caldera cilíndrica termina en casquete esférico, de radio r_1, el espesor de ese casquete puede determinarse por la fórmula:

$$\delta_1 = 1'54\, nr_1 + 2'6^{mm} \qquad (312)$$

EJEMPLO. *Una caldera de vapor cuya presion efectiva es de* 4 *atmósferas debe terminar en casquetes esféricos de dos metros de radio. Segun la fórmula* (312), *el espesor de estos casquetes debe tomarse igual á* $\delta_1 = 1'54 \cdot 4 \cdot 2 + 2'6^{mm}$, *ó muy aproximadamente* 15^{mm}.

§ 281

Tubos de calderas de vapor sometidos á una presion externa.

Los tubos cilíndricos sujetos esteriormente á presion, sufren un efecto análogo al que hemos señalado para las piezas cargadas de pié; lo que equivale á decir que en cierto valor límite de la presion, una leve deformacion que ocurra accidentalmente ó que exista de antes, puede acarrear la rotura. En los tubos de calefaccion de las calderas de locomotoras ó de barcos, los espesores que han de darse en razon del desgaste, son suficientes para evitar los peligros de rotura. Mas no sucede lo mismo con ciertas calderas de hogar interno, cuyos tubos suelen tener dimensiones tales, que conviene tener en mucha consideracion ese peligro. Los experimentos de *Fairbairn* han demostrado, conforme con las indicaciones de la teoria, que la longitud de los tubos es uno de los elementos más importantes en concepto del valor de la resistencia al aplastamiento; y ésta es tanto menor cuanto más largo es el tubo, ó más exactamente, cuanto mayor es la distancia entre las dos secciones protegidas contra la deformacion. De sus esperimentos dedujo *Fairbairn* que la presion externa efectiva p capaz de producir el aplastamiento podia representarse con la fórmula:

$$p = 806300 \frac{\delta^{2'10}}{lD} \qquad (313)$$

en que p se espresa con libras inglesas por pulgada cuadrada, D y δ con pulgadas y l con piés. Trasformando todas las dimensiones en milímetros y la presion p en kilógramos por milímetros cuadrados se llega á la relacion:

$$p = \frac{n}{100} = 367937 \frac{\delta^{2'10}}{lD} \qquad (314)$$

designando n la presion en atmósferas. Esa fórmula se presenta bajo una forma muy molesta. *Love* propuso reemplazarla por otra de segundo grado (1). Se obtiene una aproximacion muy satisfactoria con la fórmula:

$$100\, p = n = 376721 \frac{\delta^2}{lD} + 116 \frac{\delta^2}{D} - 93 \frac{\delta}{D} \qquad (315)$$

que permite calcular la presion bajo la cual se efectua el aplastamiento de un tubo, de conocidas dimensiones y comprimido esteriormente.

En la fórmula de *Love* las constantes tienen valores diferentes de los de la fórmula (315). Espresándose l, D y δ en centímetros y p en kilógramos por centímetros cuadrados, se tiene segun *Love:*

$$p = 512820 \frac{\delta^2}{lD} + 641 \frac{\delta^2}{D} - 224 \frac{\delta}{D} \qquad (313)$$

mientras que con las mismas unidades la fórmula (315) trasformada da:

$$p = 376721 \frac{\delta^2}{lD} + 1160 \frac{\delta^2}{D} - 93 \frac{\delta}{D}$$

Las constantes de la fórmula (315) quedaban por determinar segun los esperimentos de *Fairbairn*. La sociedad *die Hütte* se encargó de ese trabajo, cuyos resultados consignó en las Memorias del año 1870, página 115. La comparacion de la fórmula de *Love* con la de *Fairbairn* y otras anteriores, hace resaltar entre todos los resultados, diferencias que si bien siempre son notorias, nunca son considerables, suponiendo que nos circunscribimos á las condiciones de los esperimentos de *Fairbairn*, los cuales se refieren á tubos de corto espesor. La fórmula (315) es la más exacta de todas. Pero las diferencias se hacen muy marcadas en los casos de la práctica en que δ tiene muy amenudo un gran valor. Los resultados que da la fórmula de Love presentan entonces diferencias de 30 á 40 %. En el ejemplo último esa fórmula daria $n = 4'59 + 4'51 - 2'42 = 6'68$ atmósferas, en vez de 10'52 atmósferas.

EJEMPLO. *En una caldera de hogar interno construida para una presion efectiva de* 2 *atmósferas y* $^1/_2$ *el tubo del fuego tenia una longitud* $l = 7845^{mm}$, *un diámetro* $D = 601^{mm}$ *y un espesor* $\delta = 6'5^{mm}$. *Calculando segun la fórmula* (315), *la presion del vapor en fuerza del cual habria de efectuarse el aplastamiento, se encuentra:* $n = 376721 \frac{6'5^2}{7845 \cdot 601} + 116 \frac{6'5^2}{601} - 93 \frac{6'5}{601} = 3'375 + 8 \cdot 154 - 1'005 = 10'524$ *atmósferas. En realidad el tubo se rompió á una presion menor. Pero si queremos notar que el desgaste puede fácilmente reducir el*

(1) V. Civil-Ingénieur, tomo VII, pág. 238.

espesor en algunos milímetros, se esplica naturalmente la esplosion. En un tubo de vapor de igual diámetro sometido á una presion interna, la tension de la materia, teniendo en cuenta la robladura, seria segun la tabla del párrafo anterior, de unos $2'7^k$, *lo cual corresponde á un coeficiente de seguridad igual á* $\frac{42}{2'7}$ *ó* 15 *en número redondo; es decir, la rotura en tal caso no se produciria sino por una tension de vapor de unas* 55 *atmósferas. Hay aquí entre los dos casos una desproporcion para el coeficiente de seguridad que nada motiva.*

Un medio sencillo de elevar el coeficiente de seguridad sin que se deba aumentar el espesor, consiste en disminuir el valor de *l;* y por eso *Fairbairn* aconseja el empleo de argollas ó aros de refuerzo aplicados á las junturas de ensamble de las hojas de palastro que forman los tubos. Causa grande estrañeza que en Alemania se haga tan rara vez uso de ese dispositivo tan sencillo como eficaz; tanto más cuanto que la estadística de las esplosiones demuestra que el aplastamiento del tubo del hogar, tan frecuente en las calderas, jamás sucede en aquellas que están dotadas de argollas de refuerzo. En Inglaterra los dos dispositivos que se emplean con preferencia son los de *Adamson* (fig. 706) y de *Hick* (fig. 707). El segundo es de más fácil ejecucion, pero el primero tiene la ventaja de no esponer al fuego ninguna cabeza de perno ó robladura. En todas las calderas de hogar interno conviene, pues, como lo hacen ya algunos constructores, practicar un refuerzo á cada juntura de ensamble de las hojas de palastro del cilindro ó tubo del fuego.

§ 282

Ensambladuras de tubos de fundicion.

El modo de ensamblar que más generalmente se usa es el de bridas, que está representado por la fig. 708. Las dimensiones proporcionales que deben adoptarse en tal caso, están indicadas en la figura. Antes solia dejarse un espacio entre los agujeros de los pernos y el borde interior; pero hoy se suprime generalmente y se trabaja al torno toda la superficie de la brida, lo cual da un ensamble más riguroso y de aspecto más satisfactorio, sin acarrear por otra parte exceso de gasto extraordinario. En estos últimos años se ha usado con frecuencia, como guarnicion de la juntura, un anillo hecho de alambre de cobre que se encuentra apretado entre dos ranuras practicadas al torno y da á la juntura un cierre completo (1). En los tubos ordinarios, que no han de someterse á fuerte presion, puede tomarse para el número K de los pernos de las bridas:

$$K = 2 + \frac{D}{50} \qquad (316)$$

espresándose D en milímetros.

De ahí resulta que para un tubo de 100^{mm} de diámetro se necesitan 4 pernos, 6 para un tubo de 200^{mm}, y así sucesivamente. La misma fórmula da para el cilindro de una bomba de aire, cuyo diámetro es de 1500 milímetros, $2 + 1500 : 50 = 32$ pernos.

Para una presion interna media es preferible recurrir al empleo de la fórmula:

$$K = \frac{n}{180}\left(\frac{D}{d}\right)^2 \qquad (317)$$

en la que d designa el diámetro de los pernos, D el diámetro del tubo y n el número de atmósferas de la presion ejercida sobre ese tubo.

Ejemplo. *Un cilindro de vapor de* 1000^{mm} *de diámetro, sometido á una presion efectiva de* 4 *atmósferas, debe tener como espesor, segun la fórmula* (302): $\delta = 20 + 1000 : 100 = 30^{mm}$; *y segun las indicaciones de la figura debe tomarse para el diámetro de los pernos de la tapa:* $d = {}^4/_3 \cdot 30 = 40^{mm}$. *Finalmente, el número de esos pernos, dado por la fórmula* (317), *es:* $K = \frac{4}{180}\left(\frac{1000}{40}\right) = \frac{625}{45} = 14$.

La brida de orejas y de 2 á 4 pernos (figuras 709 y 710) que es una modificacion de la brida circular, es de uso bastante frecuente; y como la superficie de contacto es más débil, el espesor debe elevarse á $2\,\delta$ ó $2'5\,\delta$ en vez de ${}^4/_3\,\delta$.

La fig. 711 representa un codo de tubo con ensambladura de brida. La curvatura no debe ser demasiado brusca, para que el líquido al pasar por ese codo no sufra una pérdida demasiado considerable de carga. Para cada ángulo diferente que forman los ejes de los tubos de un conducto, es preciso hacer un modelo de

(1) Este anillo se halla tambien á veces reemplazado por un pequeño tubo hueco de plomo, provisto interiormente de diversas materias elásticas (carton, mechas de algodon, de cáñamo, etc.); y entonces las ranuras sobre las bridas pueden suprimirse sin gran inconveniente. En otros casos la guarnicion se compone simplemente de una rodaja anular que tenga sensiblemente la anchura de las bridas y que segun las circunstancias es de plomo, carton, cuero ó cauchú. Usase tambien á veces una juntura hecha con el minio, particularmente cuando el conducto ha de estar atravesado por vapor.

codo. Bajo ese punto de vista es más ventajoso el empleo del codo universal de *Brown* (fig. 712). Una sola de las dos piezas que componen cada codo, tiene sus agujeros de pernos abiertos de antemano; y los de la segunda no se abren hasta el momento de la aplicacion despues de trazarlos en su puesto. Segun la posicion relativa de las bridas, el ángulo del codo puede variar entre 2α y 180°. En la figura se admite el valor $\alpha = 40^{\circ}$, lo cual corresponde aproximadamente á todas las exigencias de la práctica.

El ensamble por manguitos (figs. 713 á 715), se emplea sobre todo para los tubos de conduccion de agua ó gas.

La guarnicion se hace por medio de plomo al que se da la forma de un anillo en dos partes (fig. 716); y este anillo se introduce y aprieta de firme sobre una primera guarnicion de estopas.

Las dimensiones de los manguitos de tubos están dadas por los números proporcionales que vamos á esponer y que se han elegido con mucho cuidado. El espesor δ del tubo está indicado por la fórmula (300), lo cual significa que: $\delta = 8 + \frac{D}{80}$. Luego tenemos:

Espesor de la pared del manguito.	$\delta_1 = 10 + 0{'}0135\, D$
Anchura de la corona.	$k = 18 + 0{'}0025\, D$
Longitud interna.	$l_1 = 67 + 0{'}11\, D$
Longitud del cuello.	$l_2 = 49 + 0{'}09\, D$
Longitud total.	$l = 116 + 0{'}20\, D$
Anchura de la guarnicion. . . .	$b = 5 + 0{'}007\, D$
Altura del anillo de plomo. . . .	$h = 28 + 0{'}07\, D$
Altura del rodete.	$a = 1{'}2\, \delta$
Espesor del rodete.	$c = \delta + b - 2.$

Ciertos constructores practican en el interior de la corona del manguito una ranura anular destinada á sostener la guarnicion de plomo; y otros miran esa ranura como enteramente inútil con un metal tan blando como el plomo. De algunos años á esta parte se suprime con frecuencia el rodete al estremo del tubo envuelto; y esta supresion es principalmente ventajosa cuando se emplea el método inglés para la fundicion de los tubos, en cuyo caso el manguito está dotado de una saliente interior cerca del borde. Para los tubos de conduccion de agua que están firmemente colocados, puede sustituirse la guarnicion de plomo con otra mucho más económica empapando en una mezcla, operada en caliente, de pez y polvo de ladrillo, trenzas de cáñamo, que se introducen luego fuertemente en el manguito.

La fig. 717 representa el ensamble de tubos por el sistema *Petit*. En un manguito muy corto se introduce una rodaja de cauchú, que se comprime fuertemente, sirviéndose de los tubos mismos como de palancas. Dos grapas con patas de hierro mantienen el cierre. Ese sistema de ensambladura que se ha utilizado en gran número de instalaciones de agua, tiene la ventaja de hacer muy rápida y económica la colocacion de los tubos, dando además á los conductos cierta flexibilidad que es de suma importancia para los que están instalados en un suelo espuesto á sentamientos. La única observacion que debe hacerse sobre este sistema de ensambladura, se refiere á las orejas, para las cuales parece conveniente adoptar dimensiones superiores á la que les dió el inventor.

La fig. 718 indica un ensamble de manguito fileteado para tubos de fundicion que hayan de ser conductos de agua. Los filetes se hacen al fundir la pieza, y la guarnicion consiste en una rodaja de plomo que se encuentra comprimida por la superficie plana anular que termina la parte fileteada esterior. Esa ensambladura puede considerarse como una juntura de bridas de un solo perno practicado concéntricamente al tubo y con tales dimensiones de anchura, que pueda estar taladrado con una abertura igual á la seccion del conducto. Como la parte fileteada es de una sola pieza con el tubo, importa para el cierre que cada tubo pueda girar alrededor de su eje; y al efecto cada tubo está dotado delante del manguito de un abultamiento de varias piezas, que se pueden coger por medio de una gruesa llave.

Fig. 719. Manguito de *Normandy*. La guarnicion se compone de dos rodajas de cauchú. Ese modo de ensambladura es de construccion en estremo sencilla y puede emplearse ventajosamente en todos los casos en que el cauchú no está espuesto á una alteracion demasiado rápida. Como el sistema *Petit*, permite cierto grado de deformacion en la línea de tubos, al propio tiempo que hace su reunion ó separacion sumamente fáciles.

En ciertos conductos de agua se encuentra un dispositivo análogo con una guarnicion de plomo. La rodaja forma entonces una especie de doble manguito, y los tubos se hallan perfectamente unidos sin esceso de espesor ni rodete á los estremos (1).

(1) Con frecuencia cuando se trata de tubos de agua de un gran diámetro, no se hace más que rodearlos de un manguito ligeramente cónico al interior y de una abertura más considerable. Una vez calado muy concéntricamente con respecto á los tubos de este manguito, se llena el vacio con plomo al cual se da mate fuertemente. La disposicion de *Normandy* no es muy aplicable cuando por una causa cualquiera tienden los tubos á separarse, puesto que únicamente se sostienen por el frote de las rodajas de cauchú.

La distancia de los planos medios de las dos ensambladuras de un tubo constituye lo que se llama su longitud útil ó de construccion. En todos los tubos rectos de fundicion esa longitud debe hallarse siempre comprendida entre 1 y 2 metros á lo ménos. Para los conductos de considerable estension debe tomarse tan grande como sea posible. En los tubos de manguitos para conductos de gas y de agua se adoptan en general los siguientes valores:

$D = 100^{mm}$.	Longitud de construccion	2 á 3^{m}
300^{mm}.	—	— 3 á 4^{m}
600^{mm}.	—	— 4^{m}.

§ 283

Ensambles de tubos de hierro.

Los tubos de conduccion de agua formados con hojas robladas de palastro, se ensamblan por medio de bridas de hierro (fig. 722) ó de bridas de fundicion (figura 723).

Para obtener las dimensiones de los diferentes elementos de esas ensambladuras, se comienza por buscar el diámetro d y el número de pernos, utilizando las fórmulas (316 y 317). Las otras dimensiones se encuentran entonces determinadas por medio de los números proporcionales indicados en las figuras.

Ejemplo. *Se han de construir las bridas de hierro de un tubo de turbina hecho de palastro, que tiene* 1000 *milímetros de diámetro y debe soportar una tension de dos atmósferas. Calculando ese tubo como el de una caldera de vapor, deberia dársele un espesor* $\delta = 1'54 \cdot 2 + 2'6 = 5'68^{mm}$, *que sin inconveniente puede reducirse á* 5^{mm}. *Si tomamos* $d = 20^{mm}$, *para el diámetro de los pernos encontramos por su número segun la formula* 316: $K = 2 + 1000 : 50 = 22$, *y segun la* (317): $K = \frac{2}{180}\left(\frac{1000}{20}\right)^{2} = \frac{2500}{90} = 27$. *Esta última cifra es la que admitiremos: La fig.* 722 *da entonces para el espesor de las bridas* $^{8}/_{8} \cdot 20$ *ó* 13^{mm} *y por la anchura en sentido del radio* $^{18}/_{8} \cdot 20 = 38^{mm}$, *etc.*

Los tubos de hierro estirado se ensamblan á veces por medio de manguitos fileteados (fig. 724 y 725). En el dispositivo de la fig. 724 uno de los bordes está tallado á bisel y se aprieta contra la base del otro, dando un cierre hermético. En la fig. 725 se recurre á la interposicion de una guarnicion especial. Para practicar el atornillamiento de los manguitos se cogen los tubos con tenazas de apretar, de una manera conveniente. La longitud de construccion de los tubos de hierro varia de 3 á 4 metros.

§ 284

Ensambles de tubos de plomo. —Ensambladuras diversas.

Los tubos de plomo se juntan á veces por medio de bridas de hierro que aprietan uno con otro los rebordes que se obtienen rebajando los estremos de los tubos. La fig. 726 representa un manguito fileteado para tubos de plomo (sistema *Louch*). Las tres partes que componen este manguito son de fundicion. Al mismo inventor se debe el dispositivo de la fig. 727 para el ensamble de un tubo de plomo con otro de hierro. En este último tubo está atornillado un pequeño reborde de bronce contra el cual se encuentra apretado el reborde del tubo de plomo por medio de un manguito de fundicion. Las dos partes del manguito que miran á los tubos, terminan esteriormente en superficies de 6 ú 8 planos, lo mismo que la tuerca que los reune. Aquí lo propio que en los dos dispositivos siguientes se efectua tambien el ensamble por medio de lo que hemos llamado un tornillo ensanchado (§ 86). Los tubos de plomo tienen una longitud de construccion muy considerable que alcanza muchas veces hasta 10^{m}.

Figs. 728 y 729. Ensambles de tubo de fundicion con tubos de plomo. En tal caso se emplea una guarnicion intermedia, compuesta de una rodaja de cauchú ó de una materia del mismo género.

Las figs. 730 y 731 representan dos ensambles de bridas libres, destinados á reunir á un reborde de fundicion, el primero un tubo de cobre rojo con una brida de hierro, y el segundo un tubo de bronce. Esos dos

---

En tal caso es preferible el empleo de los tubos del sistema *Lavril* (fig. 720). Uno de los collares, de forma oval, que se ha hecho de fundicion con uno de los tubos, al paso que el otro es movil y se aprieta luego con el primero por medio de dos pernos, es el que perfecciona la juntura comprimiendo una rodaja de cauchú. Ese sistema, lo propio que los dos precedentes, permite cierta deformacion de la linea de los tubos; y su colocacion es muy rápida y sencilla.

La juntura universal *Legat* (fig. 721) que ofrece cierta analogia con la juntura *Normandy* es de empleo más general, pero esa ventaja se encuentra en parte compensada con su mayor complicacion. Los tubos están dotados de rebordes entre los cuales se puede intercalar una cualquiera de las materias empleadas para las junturas (rodajas de cauchú, de cuero, de plomo, almáciga, etc.) los collares forman verdaderos prensa estopas, destinados á comprimir contra los rebordes de los tubos y el manguito esterior una materia elástica (estopas, trapos, etc.). La hermeticidad de la juntura queda así doblemente asegurada y se impide por completo la separacion de los tubos.

modos de ensambladura ú otros análogos (1) se emplean con frecuencia para los tubos de prensas hidráulicas, máxime cuando están formados de un metal de poco espesor. Igualmente se hallan en las bombas de incendios.

Estos diversos ensambles, segun el objeto especial que deben llenar, reciben formas y proporciones diferentes que seria prolijo enumerar aquí.

§ 285

Peso de los tubos de fundicion.

La tabla siguiente señala los pesos de los tubos por metro lineal sin manguito ni bridas. Para determinar el peso de estos accesorios, se trasforman en un cilindro hueco de diámetro D, de espesor δ y de longitud l, pudiendo entonces tomarse su peso en la tabla. La longitud l para una brida ejecutada segun las indicaciones de la fig. 708, puede en promedio tomarse igual á $10\,\delta$. Para los manguitos ejecutados segun la fig. 716 la longitud l es igual á $125+0{,}3\,D$.

1.er EJEMPLO. *Un conducto de* 120^m *de largo comprende* 40 *tubos de* 3^m *de longitud,* 300^{mm} *de diámetro y* 12^{mm} *de espesor. La tabla da para el peso de cada uno de esos tubos sin bridas:* $3 . 85{,}19 = 255{,}57^k$. *Siendo las dos bridas equivalentes á una longitud de tubo igual á* $2 . 10\,\delta = 2 . 10 . 12$, *resulta que el peso de un tubo con sus bridas es* $3{,}240 . 85{,}19 = 276{,}02^k$ *y el peso total del conducto* $40 . 276{,}02 = 11041^k$.

2.° EJEMPLO. *Para los manguitos de un conducto del mismo diámetro suponiéndolos practicados segun las proporciones de la fig.* 716, *el peso es el de una longitud de tubo igual á* $125+0{,}3 . 300 = 215$, *es decir* $0{,}215 . 85{,}19 = 18{,}3^k$. *Un tubo completo de* 3^m *pesa entonces* $3 . 85{,}19 + 18{,}3 = 274{,}87^k$, *y el conducto entero* $40 . 274{,}87 = 10995^k$.

(1) Entre los diferentes dispositivos inventados de algun tiempo á esta parte para los ensambles de tubos sometidos á presiones considerables de agua, creemos deber mencionar aquí el de *Taverdon* representado en la figura 732. Los dos tubos están rodeados por un manguito de fundicion, dentro del cual hay dos cueros amartillados, que la presion interna del agua mantiene firmemente aplicados contra la superficie esterior de cada tubo y el manguito mismo. Cada uno de los tubos tiene cerca de su estremo una abertura circular por la cual pasa un clavete, que se introduce desde fuera en un agujero abierto en el manguito mismo. Tales clavetes forman saliente al interior y se oponen por lo tanto á la separacion de los tubos en el sentido longitudinal. El empleo de cueros amartillados ó batidos permite cierto grado de deformacion en la línea de los tubos.

TABLA RELATIVA AL PESO DE LOS TUBOS DE FUNDICION.

DIÁMETRO de los TUBOS. D.	PESO POR METRO LINEAL DE LOS TUBOS DE ESPESOR δ.						
	8	10	12	14	16	18	20
60	12'40	15'93	19'66	23'57	27'67	31'94	36'41
70	14'19	18'20	22'39	26'76	31'31	36'04	40'96
80	15'99	20'48	25'12	29'94	34'95	40'14	45'51
90	17'85	22'75	27'85	33'13	38'59	44'23	50'06
100	19'64	25'79	30'59	36'32	42'23	48'33	54'61
110	21'44	27'30	33'33	39'50	45'87	52'42	59'16
120	23'06	29'58	36'05	42'69	49'52	56'31	63'71
130	25'15	31'85	38'78	45'87	53'16	60'62	68'26
140	26'94	34'13	41'50	49'06	56'79	64'72	72'81
150	28'74	36'41	44'24	52'24	60'44	68'81	77'37
160	30'59	38'68	46'97	55'43	64'08	72'90	81'92
180	34'18	43'24	52'43	61'80	71'37	81'10	91'02
200	37'83	47'78	57'89	68'17	78'64	89'29	100'12
220	41'49	52'34	63'35	74'54	85'92	97'48	109'22
240	45'14	56'86	68'81	80'92	93'20	105'66	118'32
260	48'79	61'44	74'27	87'29	100'48	113'86	127'42
300	56'09	70'55	85'19	100'03	115'04	130'24	145'63
350	65'21	81'92	98'85	115'95	133'25	150'72	168'39
400	74'33	93'29	112'47	131'88	151'46	171'20	191'14
500	92'43	116'05	139'51	163'74	187'86	211'33	236'64
600	110'67	138'78	167'11	194'00	224'27	253'11	282'16
700	128'91	161'56	194'41	225'82	260'68	294'08	327'66
800	147'15	184'31	221'73	257'72	297'08	335'02	373'16
900	165'40	207'06	249'02	289'57	333'50	375'96	418'66
1000	183'63	229'82	276'34	323'03	369'90	416'93	464'16

CAPÍTULO XXII

OBTURADORES

§ 286

Clasificacion de los obturadores.

Desígnanse con el nombre de obturadores los diversos dispositivos que tienen por objeto producir; segun se quiera, el cierre ó abertura de los tubos de conduccion y recipientes; ó en otros términos detener ó provocar la corriente de los fluidos encerrados en tales recipientes y conductos. Los aparatos de formas en estremo variadas que se emplean al efecto pueden dividirse en dos clases principales:

1. Los obturadores por deslizamiento,
2. Los obturadores por elevacion.

A la primera clase pertenecen las espitas ó grifos, los cajones (*tiruars*) y en general todos los obturadores en que la parte móvil debe resbalar ó deslizarse por la parte fija para destapar ó tapar los orificios que en ésta se hallan practicados. Comprende la segunda clase todos los dispositivos en que el orificio se destapa quitando ó elevando la parte móvil, como por ejemplo, en las válvulas cónicas, esféricas, etc.

Cada una de estas clases da á su vez orígen á dos subdivisiones, si consideramos el movimiento de la pieza de obturacion como producido por una rotacion alrededor de un eje que puede estar á una distancia finita ó infinita. Los obturadores por deslizamiento dan así como subdivisiones:

a. Los grifos ó espitas y los tiruars de rotacion,
b. Los tiruars de movimiento rectilíneo.

Igualmente se tiene para los obturadores por elevacion:

a. Las válvulas articuladas,
b. Las válvulas de movimiento rectilíneo.

Sentada esa clasificacion, vamos á examinar sucesivamente los dispositivos de obturacion de uso más generalizado.

A. OBTURADORES POR DESLIZAMIENTO.

§ 287

Grifos cónicos. Grifos de válvula.

En el grifo cónico la parte móvil que produce la ob-

turacion, tiene la forma de un cono truncado. Las figuras 733 y 734 representan los dos dispositivos más empleados para ese género de grifo. El orificio presenta una forma oblonga que permite reducir el diámetro de la llave; y la inclinacion de esta llave es en general de $^1/_9$ por cada lado, de suerte que para una longitud de 60^{mm}, por ejemplo, el mayor diámetro de la llave sobrepuje al menor en $2 \cdot 60 : 9 = 13'33^{mm}$ ó sea 13^{mm}. Cuando el cuerpo es de fundicion, su espesor δ se determina por la fórmula (301), ó sea tomando: $\delta = 12 + {}^1/_{50} D$. Para los cuerpos de bronce que llevan bridas como los de fundicion, el espesor no pasa de los $^2/_3$ del precedente. En los conductos de agua las superficies frotantes deben estar siempre compuestas de bronce, ó á lo ménos de una materia análoga, que no esté espuesta á enmohecerse como el hierro ó la fundicion.

Las figs. 735 á 738 reproducen cuatro dispositivos diferentes del grifo cónico. El de la fig. 735 está destinado á reunir dos tubos inclinados; los grifos de las dos figs. 736 y 737 son de tres vias, y por último el de la fig. 738 representa un grifo de cuatro. Cuando se conoce la anchura de los orificios á la vez que el valor del cubrimiento, se puede determinar el diámetro medio de la llave del modo siguiente. En las figuras que acabamos de mencionar se describen desde el centro de la llave dos círculos que tengan por diámetro, el uno la anchura de los orificios, y el otro esa misma anchura aumentada con el cubrimiento, es decir *cd*: tangencialmente al primer círculo se trazan las líneas límites de los orificios, se divide con la línea *ab* el ángulo menor de los dos orificios contíguos, y luego se tiran paralelamente á *ab* las dos líneas *cc* y *dd*, que cortan los orificios en los puntos *p*, *p*, por los cuales debe pasar el círculo correspondiente á la seccion media de la llave (1).

Las figs. 743 y 744 representan dos grifos de llaves huecas que se emplean amenudo como espitas de inyeccion de los condensadores.

Si hacemos el ángulo del cono igual á 180°, el grifo cónico se convierte en tiruar ó cajon plano de rotacion. Suponiendo ese ángulo igual á 0°, la llave es ci-

---

(1) A más de los grifos cónicos de llave se emplean especialmente para los conductos de diámetro algo considerable un gran número de otros dispositivos, con los cuales se efectua la obturacion en condiciones muy distintas. Nos limitaremos á indicar aquí algunos de los tipos usados para los conductos de vapor y agua.

La fig. 739 representa el grifo de vapor directo de Chatel. En esta espita que se fabrica de bronce, la llave en vez de girar dentro del cuerpo como en la espita ordinaria, produce el cierre desplazándose en el sentido de su eje. Al efecto la llave *bb* está invariablemente unida con aletas á la tuerca *d*, que puede ponerse en accion por medio de un tornillo de triple filete, cuyo vástago lleva un volante para la maniobra. Las aletas abrazan las guias *cc* procedentes de fundicion con la cubierta, de suerte que la rotacion del vástago ó espita fileteada da por resultado imprimir á la tuerca y por ende á la llave un movimiento de traslacion en sentido del eje. En este sistema la estension de la superficie de guarda es relativamente muy grande, de suerte que da pocas probabilidades de que se produzca el agarramiento; y por otra parte en virtud del tornillo de tres filetes es muy rápida la maniobra. Para hacer el esfuerzo tan constante como sea posible, la espiga gira en una guarnicion metálica del sistema Pile que más adelante indicaremos.

La fig. 740 representa uno de los tipos de grifos-válvulas de la casa *Lethuillier* y *Pinel*. El órgano principal de esa espita es una válvula cónica suspendida al estremo de una espiga fileteada *T*, de manera que pueda aplicarse exactamente en toda la superficie de su asiento. El vástago ó espiga está al propio tiempo dotado de una pequeña rama *e*, que va á dar contra una saliente de la caja y le impide girar sobre sí misma. El cubo del volante forma cuerpo con la tuerca, que puede girar libremente en un estribo fijo en la cubierta. Fuera de la parte fileteada, la espiga lleva una graduacion que permite apreciar el grado de abertura de la válvula. La figura supone las dos aberturas tubulares del conducto en línea recta, pero el mismo sistema se aplica tambien á dichas aberturas colocadas en ángulo recto.

Ese empleo de una válvula cónica con vástago fileteado, dispuesta de modo que pueda tomar un movimientode traslacion, sin girar, se encuentra en gran número de grifos usados para conducir el vapor.

La fig. 741 es un grifo-compuerta del sistema *Herdevin*, para grandes conductos de distribucion de agua.

La compuerta *B* se mueve en una caja de fundicion formada de un cilindro *A* y de dos casquetes esféricos *C* y *D*. Esa caja está atravesada por dos aberturas tubulares *E* y *F*, cuyos bordes interiores están hechos en sentido de los planos ligeramente inclinados sobre el plano medio de la compuerta. El casquete esférico *C* que forma la cubierta, y la abertura tubular *F*, estan relacionados con el cuerpo *A* de la caja y sujetos por medio de pernos. El fondo de esta caja está taladrado por un orificio *D* cerrado por medio de una placa que se puede quitar para la limpieza.

En cuanto á la compuerta *B*, está constituida por un disco de fundicion, cuyas caras laterales de forma circular presentan la misma inclinacion que los orificios de las aberturas tubulares *E* y *F*, y tienen anchura que corresponde exactamente á la de los orificios. Para reducir los frotes y hacer más perfectos los contactos, todas las bocas de esas aberturas están guarnecidas de aros de bronce perfectamente trabajados y sujetos con tornillos. La compuerta está vaciada en dos direcciones perpendiculares; y uno de estos vaciados sirve de paso al tornillo de maniobra, mientras que el otro está destinado á permitir la introduccion, por el lado de la tuerca de bronce *G*, de la espiga fileteada. Finalmente la misma compuerta está provista lateralmente en el plano perpendicular al de la figura, de pequeñas aletas que encajan con salientes practicadas en la pared interior de la caja é impiden todo movimiento de rotacion. Basta el exámen de la figura para darse cuenta de la maniobra de ese grifo.

La fig. 742 representa en corte un distribuidor del sistema Wenger, cuyo empleo es muy conveniente para el agua á muy elevada presion.

Este aparato se compone de un cilindro hueco de bronce en el que están alojados cueros amartillados, por los cuales puede deslizarse una espiga *T*, hueca en una parte de su longitud. El agua comprimida llega por el tubo *C* á un espacio anular comprendido entre los dos cueros amartillados *d*, *d'*, cuyo vacio se mantiene con un aro que se aplica á las paredes del cilindro y está abierto por tres ventanas en el sentido longitudinal.

Enfrente del tubo *P* destinado á llevar el agua comprimida al órgano sobre el cual debe obrar, existe otro espacio dispuesto como el primero, pero de mayor longitud y está limitado por los dos cueros *c* y *c'*.

En su parte hueca *AB*, la espiga *T* está igualmente taladrada por tres aberturas estrechas, una de las cuales se vé en corte. En *B* hay un tapon encajado.

En la posicion indicada por la figura, el agua comprimida que llega por el tubo *C*, no encuentra salida; pero si se levanta la espiga *T*, las aberturas de la parte hueca de esa espiga llegan á pasar del cuero *d'* y entonces

líndrica, y se tienen los distribuidores de las máquinas de Corliss; y aumentando indefinidamente su radio, se obtiene el tiruar plano de movimiento rectilíneo. Como la construccion de los tiruars entra esencialmente en la de las máquinas, no nos detendremos en ese género de órganos.

B. OBTURADORES POR LEVANTAMIENTO.

§ 288

Válvulas de elevacion.

En los obturadores por deslizamiento la parte móvil nunca puede desplazarse por accion del fluido, mientras que en los órganos de la segunda clase la presion de ese fluido, cuando se ejerce por el lado del asiento, levanta por si misma la parte móvil, ó en otros términos, el levantamiento de los órganos de ese género puede efectuarse automáticamente, y esto es lo que sucede las más de las veces, como por ejemplo, en las bombas. Las válvulas articuladas automáticas constituyen las válvulas ordinarias ó de elevacion.

Las figuras 745 y 746 representan una válvula doble de elevacion con su caja. La guarnicion está formada de cuero ó de cauchú (con tiras de lienzo interpuestas). Para un diámetro D de la válvula por elevacion, la longitud s del asiento está espresada en la fórmula:

$$s=4+\sqrt{D} \qquad (318)$$

Así por ejemplo, para $D=100^{mm}$ debe tomarse

$$s=4+\sqrt{100}=14^{mm}.$$

Los números proporcionales indicados en las figuras se refieren al módulo s. La caja de la válvula está cerrada por una puerta que puede girar entorno de una articulacion colocada lateralmente.

La figura 747 da una válvula por elevacion en cuatro partes. En este dispositivo, lo mismo que en el precedente, se usan planchas de hierro robladas para dar rigidez á las tiras de cuero ó cauchú. En las partes contiguas á la articulacion, esas placas deben cubrir ó á lo ménos tocar la superficie de apoyo de la válvula, á fin de evitar que la presion del agua encorve el cuero.

La figura 748 representa una válvula redonda formada de un disco de cauchú, disco que no está guarnecido de placas de hierro, á fin de que pueda encorvarse hácia arriba y aplicarse á la superficie encorvada destinada á limitar su deformacion; y en la parte inferior descansa en una rejilla instalada al nivel del asiento. Esa válvula se encuentra amenudo empleada en las bombas de aire de los condensadores de las máquinas de vapor.

Una válvula de bronce que se encuentra tambien mucho en las bombas de aire de las máquinas de vapor y de los aparatos de evaporacion de las refinerias de azúcar, es la de la figura 749. El asiento de esa válvula está formado por dos clavetes de hierro sólidamente enclavados, y su caja está cerrada por una cubierta que en la figura se supone quitada. Para determinar la anchura del asiento, se puede tambien aquí emplear la fórmula (318), tomando para D el valor del lado más pequeño de la seccion rectangular del conducto. Para todos los dispositivos de válvulas por elevacion que acabamos de indicar, las figuras representan las piezas que limitan la elevacion. El ángulo de abertura de las espresadas válvulas está generalmente comprendido entre 30 y 40° (1).

§ 289

Válvulas simples de forma circular.

Entre las válvulas de elevacion rectilínea, las que más generalmente se usan, son las cónicas, que como las válvulas de elevacion articuladas pueden actuar automáticamente. La figura 750 representa dos válvulas de ese género, que están dispuestas de una manera muy conveniente para una bomba alimentadora. A fin de evitar los efectos de la herrumbre, las válvulas de elevacion se hacen de bronce. En la figura se supone de fundicion el asiento de la válvula inferior; pero es preferible hacerlo tambien de bronce. En ese dispositivo las superficies de los dos asientos forman dos conos truncados idénticos. La fórmula (318) sirve para

---

queda establecida la comunicacion entre C y P. La cantidad de agua que pasa es naturalmente tanto mayor cuanto más considerable es la abertura destapada.

En cambio si se baja la espiga T, se interrumpe la comunicacion entre P y E por interposicion de la parte hueca de T.

El movimiento se comunica con la mano ó por motor en virtud de una palanca unida por un gorron á la horquilla que termina esta espiga y cuyo eje de rotacion se encuentra en una parte saliente procedente de fundicion con el cilindro.

Existen distribuidores del mismo género que tienen doble efecto, en los cuales hay simultáneamente introduccion por un lado y evacuacion por el otro.

(1) Respecto de esas válvulas y otras análogas conviene consultar el notable trabajo del profesor Finck, *Ueber Pumpenventile und Klappen*. Anales de la Sociedad de ingenieros alemanes, 1870, pág. 497.

determinar su anchura s, que aquí tambien es el módulo á que se refieren los números proporcionales inscritos en la figura. La proyeccion de la superficie cónica anular tiene como anchura $s-4^{mm}$, y de ahí resulta que en las pequeñas válvulas el ángulo del cono es más agudo que en las grandes.

En la construccion de la caja de las válvulas debe procurarse con el mayor cuidado que el orificio de salida encima del vértice de cada válvula, se halle instalado á suficiente altura para que la corriente de retorno no mantenga abierta la válvula. Ese es un efecto que ocurre muy amenudo á consecuencia de la posicion viciosa de los orificios. El modo de cerrar la caja indicado en la figura, dispensa del uso de toda guarnicion. En cambio es indispensable no emplear más que una, cuando la cubierta reposa simplemente en la caja por una superficie plana.

Fig. 751. Válvula esférica ó de bala. La anchura s del asiento y la de su proyeccion se calculan como antes. Para determinar luego el diámetro de la esfera que conviene adoptar, basta levantar perpendiculares por los puntos medios de ambos lados del asiento, contenidos en una seccion hecha por el eje y tomar su punto de interseccion m como centro de la esfera. Por razon de la grande altura de la válvula es esencial que el orificio de escape ó salida esté á suficiente distancia sobre el asiento.

Gran número de buenos constructores estiman que la válvula de bala no es superior á la válvula cónica. El buen funcionamiento de esas dos clases de válvulas depende esencialmente de la posicion dada al orificio de escape. Cuando se escoje mal esa posicion, las válvulas de bala llegan, como las otras, á tener pronto una marcha irregular (1).

La elevacion h de una válvula cónica ó esférica debe ser igual ó levemente superior á $^1/_4\ D$.

§ 290

Válvulas de doble asiento.

Cuando en una válvula cónica ordinaria se ejerce la presion del fluido sobre la base superior, el levantamiento de la válvula exige un esfuerzo esterior bastante considerable, proporcional á la proyeccion total del aparato. En iguales condiciones una válvula cónica de doble asiento que presenta una de las tres formas que vamos á examinar, exige para su levantamiento un esfuerzo mucho menor, porque ese esfuerzo es simplemente proporcional á la proyeccion de las superficies que constituyen el doble asiento. Por esa razon las válvulas de ese género se utilizan muy generalmente en las distribuciones de las máquinas de vapor de gran potencia.

Figura 752. Válvula de *Hornblower*. En este dispositivo el fluido se introduce en la caja de la válvula por la parte inferior para ser enseguida distribuido igualmente por ambos lados. Si se quisiera rechazarlo por un solo lado, convendria adoptar para el conducto de evacuacion una seccion sensiblemente doble de la que está indicada en la figura.

Designando por D el diámetro del tubo de entrada, debe hacerse el diámetro medio D' de la válvula por elevacion, igual ó superior á $0'8\ D$. Cuando se toma $D' > 0'8\ D$, la carrera h de la válvula debe ser menor que en el otro caso, y entonces puede determinarse h como mínimum por la relacion:

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{D'} &= \frac{1}{8}\left(\frac{D}{D'}\right)^2 \\ \text{ó} \qquad \frac{h}{D} &= \frac{1}{8}\,\frac{D}{D'} \end{aligned}\right\} \qquad (319)$$

1.er Ejemplo. *Si se quiere obtener una válvula lo más reducida posible y se toma por consiguiente* $D' = 0'8\ D$, *debe hacerse* $h : D = {}^1/_8 \cdot 1'25^2 = 0'195$, *ó bien* $h : D = 1 \cdot 25 : 8 = 0'156$. *Para* $D' = D$ *conviene* $h : D' = h : D = {}^1/_8 = 0'125$, *y para* $D' = {}^5/_4\ D$, $h : D' = {}^1/_8\ (0'8)^2 = 0'08$ *y* $h : D = 0'10$.

La anchura $^1/_2\ s$ de cada asiento es la mitad del valor dado por la fórmula (318) que aquí se convierte en:

$$s = 4 + \sqrt{D'} \qquad (320)$$

y como antes, debe tomarse la suma de las proyecciones de los asientos igual á $s-4^{mm}$. En estos últimos tiempos algunos constructores han adoptado para las válvulas dobles un valor de s todavia menor, bajando hasta la mitad del que da la fórmula (320).

2.° Ejemplo. *Para un diámetro de conducto de* 300^{mm}, *se ha tomado* $D' = 0'8\ D = 0'8 \cdot 300 = 240^{mm}$. *La parte anular de cada asiento tiene en ese caso como anchura:* $^1/_2\ s = {}^1/_2\ (4 + \sqrt{240}) = {}^1/_2\ (4 + 15'5) = 10^{mm}$, *y como proyeccion* $^1/_2\ (s-4) = 8^{mm}$.

La válvula de *Gros* (fig. 753) es de empleo muy sa-

(1) Dispositivo para las válvulas esféricas es la de Weidtmann.

tisfactorio siempre y cuando el fluido haya de introducirse lateralmente en la caja de la válvula y escapar por la parte inferior. El diámetro medio D' de la válvula debe tomarse igual ó superior al diámetro D del orificio de escape. Los fórmulas (319) y (320) son aplicables para la determinacion de h y s. La seccion trazada en punteado en la figura demuestra que es fácil hacer llegar el fluido á la caja por dos orificios laterales.

El dispositivo de la válvula tubular indicado por la figura 754 deriva del de *Hornblower*. La introducion del fluido se efectua por abajo y su salida se verifica lateralmente. El diámetro medio de la válvula D' es igual á $D+s$, y por consiguiente el diámetro inferior D_1 debe tomarse igual á D. El levantamiento de la válvula y la anchura de los asientos se calculan por las fórmulas anteriores.

En esta misma fig. 754 la espiga de la válvula está provista de un émbolo hueco, sobre el cual actua en el interior la presion del fluido. Este dispositivo que puede igualmente aplicarse á las dos válvulas anteriores, ofrece grande interés para las de grandes dimensiones, cuyo levantamiento exije á veces un esfuerzo considerable, por más que la presion no obre en sentido contrario al movimiento más que en una superficie pequeña. Con el émbolo se puede reducir ese esfuerzo al valor que se juzgue conveniente, con tal de dar suficiente diámetro á este émbolo. Fácil es como lo demuestran las líneas de punteado, practicar un segundo orificio de evacuacion en los casos necesarios. Reemplazando la seccion circular por otra rectangular para el conducto de escape, puede llegar á reducirse muy notablemente la separacion de los asientos, es decir, la altura de la válvula.

En el Norte de América las válvulas de *Hornblower*, así como las de la forma anterior, se construyen las más de las veces en dos partes que se juntan con pernos. El plano de separacion está trazado normalmente al eje por la mitad de la altura. Merced á ese artificio puede aumentar el asiento inferior, hacerlo muy sensiblemente igual al asiento superior y reducir así el esfuerzo de levantamiento, no dejando subsistir más que la presion indispensable para asegurar el cierre de la válvula.

Para todas las válvulas de doble asiento debe procurarse en la ejecucion el mayor cuidado y esmero en que las dos partes cónicas de la válvula descansen á la vez perfectamente bien en sus asientos. El guiaje de la válvula en la direccion del eje tiene igualmente suma importancia. Así, en cierto número de aparatos de reciente construccion, la válvula en vez de terminar por una espiga de pequeño diámetro, como en las figuras que hemos estudiado, lleva inmediatamente encima de la seccion cónica un cilindro de gran diámetro, que parece más idóneo para guiar la válvula en su movimiento.

Entre las tres formas de émbolos ó válvulas que acabamos de examinar, la válvula de *Hornblower* es la que exige menores dimensiones.

CAPITULO XXIII

ÉMBOLOS Ó PISTONES

§ 291

Diferentes espresiones de émbolos y sus guarniciones.

Los émbolos son órganos móviles que, segun los casos, se ponen en movimiento por efecto de los fluidos, ó sirven para trasmitir el movimiento que poseen, á líquidos ó gases. La accion de un órgano de ese género se funda enteramente en las variaciones que su movimiento relativo determina para el volúmen comprendido entre él y las paredes del recipiente dentro del cual se mueve.

Si se quiere que á cada instante se encuentre ese volúmen completamente aislado, es esencial que el émbolo se aplique á las paredes del recipiente por medio de una guarnicion bastante ajustada para producir un cierre sin ser un obstáculo para el movimiento. Segun esto salta á la vista que el dispositivo de esa guarnicion debe depender de la forma del émbolo y del recipiente que le encierra. Las más de las veces tienen los émbolos movimiento rectilíneo, y afectan por lo tanto la forma prismática, que en la mayor parte de los casos es, además, de seccion circular. No examinaremos aquí más que los émbolos cilíndricos, siendo por lo demás fácil deducir de las reglas que vamos á dar para cada caso particular las que convendria adoptar para émbolos de formas diferentes.

La hermeticidad de la guarnicion puede obtenerse de muchísimas maneras. Una de las guarniciones más empleada es la que está compuesta de un anillo flexible, elástico que circunda el émbolo. En este caso un dispositivo móvil permite ejercer en la materia de esa guarnicion una presion bastante fuerte para impedir que el fluido pase al través.

El anillo de que se compone la guarnicion, puede alojarse en el interior de la pared del cilindro fijo ó por el contrario en la del cilindro lleno, es decir, el émbolo ó piston. Así tenemos dos especies de guarnicion esterior é interior, representadas por las figuras 755 y 756. La figura 757 da una guarnicion doble para un émbolo solo. El dispositivo de la figura 756 entra en la categoria de las guarniciones con caja de estopas, al paso que el de la figura 755 constituye más particularmente lo que se llama una guarnicion de émbolo. Cuando el cilindro fijo está abierto por un lado como en las figuras 755 á 757, el émbolo se llama de simple efecto, designándosele especialmente con el nombre de émbolo sumergente cuando afecta una de las formas de las figuras 756 y 757.

Cuando el cilindro fijo tiene abertura á cada lado

del émbolo, como en las figuras 758 á 760, el émbolo ó piston se llama de doble efecto. Para que un piston de ese género pueda recibir su movimiento fuera del cuerpo de la bomba, se dota comunmente de un vástago (árbol ó espiga) que salga al esterior (figuras 761 y 762), pase á través de otra guarnicion y sea en realidad un verdadero piston sumergente unido al primero. La guarnicion del vástago puede ser interior como por ejemplo en *a* ó esterior como en *a'* (fig. 761).

Ese vástago ó espiga que actua sobre el fluido como sumergente, hace que la accion de este fluido sea diferente arriba y abajo del émbolo. Si se quiere evitar esa diferencia, conviene establecer otro vástago debajo, de igual diámetro que el de arriba, conforme lo demuestra la fig. 761 (en punteado). Puede evitarse la adicion del vástago de varias maneras, adoptando por ejemplo, un dispositivo análogo al de la fig. 763 en el que se halla establecida una directiva de manubrio en el interior del cilindro; y otro procedimiento consiste en poner el piston en movimiento por la presion de un fluido (prensa hidráulica, distribucion del martillo de vapor por *Joy*, etc.).

Los émbolos de simple y doble efecto suelen estar taladrados de aberturas provistas de válvulas, por lo que se designan entonces con el nombre de émbolos de válvulas.

En el modo de guarnicion que acabamos de examinar, no se consigue la hermeticidad sino ejerciendo una presion externa sobre la misma guarnicion. Imaginemos entre esa guarnicion y la superficie por la que se desliza una capa delgada del fluido que el émbolo debe aislar (agua, aire, vapor, etc.); y es evidente que la porcion del fluido situada al lado en que la presion del émbolo es más fuerte, no podrá pasar del otro lado, si se ejerce en la guarnicion una accion tal que la presion trasmitida á la capa fluida interpuesta, equivalga cabalmente á la mayor de las que reinan en las faces del émbolo. Esa presion entre la guarnicion y la superficie de deslizamiento se encuentra muy sencillamente realizada en las guarniciones automáticas ó autoclaves.

Las figs. 764 y 765 representan guarniciones de ese género (de cuero) para émbolos de discos y émbolos sumergentes; el fluido sometido á la presion más fuerte actua sobre la faz posterior del reborde de la guarnicion y tiende á aplicarle á las paredes de la parte fija con una fuerza cabalmente igual á la que hemos indicado como necesaria para dar un cierre hermético. La figura 766 es una guarnicion metálica que suele emplearse amenudo para los émbolos planos y con ménos frecuencia para los émbolos sumergentes: el fluido sometido á la presion más fuerte actua sobre la faz interior del anillo metálico y á la vez lo aprieta contra la superficie fija y contra uno de los rebordes del disco, en el cual está practicado el alojamiento de ese anillo.

La guarnicion de membrana, cuyo dispositivo es análogo al de los fuelles, se utiliza para los émbolos de bombas semejantes á las de la figura 767. Empleando una materia realmente impermeable, no puede ese dispositivo dar lugar á ningun escape. En 1852 le aplicó *Martini* á una máquina de vapor haciendo uso de planchas metálicas (de acero). Para obtener en este caso una superficie muy elástica, conviene adoptar, como para los manómetros, una forma ondulada (fig. 768). El dispositivo de la fig. 769 que es una modificacion del anterior y que se designa con el nombre de guarnicion de bolsa, se ha empleado con buen éxito como émbolo de una bomba destinada á comprimir aire.

En la categoria de las guarniciones automáticas pueden incluirse tambien los dos dispositivos de cierre hidráulico (para émbolos sumergentes), que representan las figs. 770 y 771. La primera forma se emplea para estraccion del agua en los aparatos de lavar menas, al paso que la segunda se utiliza para gasómetros, bombas de aire, aparatos elevatorios de presion de aire de *Seiler*, campanas de los buzos, cajas de aire de las construcciones debajo el agua (fundamentos de pilotis), etc. Con las guarniciones de estopas de rebordes ú ordinarias el émbolo está muy amenudo cubierto con una capa de agua ó de aceite destinada á impedir toda introduccion de aire (fig. 772).

Otra clase de guarniciones de émbolos es la que representa la fig. 773, en la que el contorno del émbolo está dotado de una serie de ranuras que forman un verdadero laberinto, por el cual debe circular el fluido antes de escaparse. Este dispositivo se utiliza con preferencia para los émbolos de aire. Por efecto de las variaciones de la seccion del canal que ha de seguir para escapar, el aire realmente circula por ese laberinto con una celeridad que va disminuyendo continuamente, de suerte que su tension al salir del émbolo es notoriamente menor que en el otro lado, y la diferencia es tanto mayor cuanto más considerable es la celeridad del émbolo en la direccion de la marcha del aire. Al límite inferior de ese género de guarniciones están los dispositivos análogos al de la fig. 774, en el que el émbolo se compone de una simple placa, cuyos bordes se hallan á una distancia muy corta de las paredes del cuerpo de bomba, como por ejemplo, en los rosarios de noria destinados á la elevacion de agua, en las ruedas de lado, y en los ventiladores de aletas, en los de

Fabry, de *Lemielle*, etc. Al sistema de émbolos de ranuras puede tambien añadirse el dispositivo de émbolo de cepillos que representa la fig. 775, cuya aplicacion se encuentra en una via férrea de aire comprimido, instalada en el palacio de Sydenham.

Los émbolos cilíndricos sin ninguna clase de guarnicion rara vez se emplean, si bien pertenecen á ese género los émbolos de los indicadores, é igualmente se encuentra otro ejemplo de ellos en las bombas de *Metz*, en las que estos émbolos parecen prestar un buen servicio y pueden utilizarse lo mismo para la estraccion del aire que para la del agua. Sucede á más que en ciertas circunstancias los émbolos de aros ó de anillos metálicos pierden su elasticidad y acaban por actuar como verdaderos cilindros fijos, introducidos á frote suave en sus barriletes ó cuerpos de bomba.

§ 292

Cajas de estopas ó Stuffing-bochs.

Segun hemos dicho, entre las cajas de estopas y las guarniciones de émbolos no existe en realidad más que una simple diferencia de construccion. En las cajas de estopas la materia que forma la guarnicion (cáñamo, cuero, algodon con talco, cauchú, fieltro, serrin, segmentos metálicos) está colocada en la superficie cóncava del cuerpo envolvente, mientras que las guarniciones de émbolos propiamente dichos, están instaladas en la superficie convexa del cuerpo envuelto.

Las figs. 776 y 777 representan por entero dos cajas cilíndricas de estopas, dispuestas ambas para recibir una guarnicion de cáñamo, si bien que en sentido inverso.

A fin de disminuir el desgaste las dos partes que abrazan el vástago (el grano y el sombrero), suelen componerse de piezas de bronce reunidas. El perfil en cuña anular que las termina y que se debe á *Farcot*, es preferible al dispositivo antiguo de un solo bisel, que tenia el inconveniente de dar á veces paso al fluido entre la guarnicion y la superficie cóncava á la cual se suponia aplicada. En los últimos tiempos se ha adoptado una disposicion intermedia entre la de *Farcot* y la antigua. La pieza destinada á trasmitir la presion á la guarnicion termina en superficie enteramente plana, como en la fig. 779, ó bien en superficie levemente curva, como en la fig. 778. Esa última figura indica un dispositivo muy conveniente de caja de estopas suspendida. En el fondo del cilindro y alrededor del orificio de esta caja hay practicado un pequeño reborde, destinado á impedir que el agua de condensacion se escape por la caja. Al estremo libre terminan los dos pernos en una parte cilíndrica, cuyo diámetro es cabalmente el del cuerpo de la parte fileteada y ese dispositivo, cuyo empleo tiende á generalizarse desde algun tiempo, tiene la ventaja de facilitar mucho la entrada de la tuerca en el filete.

Debiendo ser la prensa-estopas siempre concéntrica á la espiga del piston para que no hayan de temerse desgastes de los ángulos, resulta que se debe procurar que las dos tuercas avancen constantemente en la misma cantidad. En las grandes máquinas de vapor, las de marina por ejemplo, se logra fácilmente ese resultado dotando las tuercas de ruedas dentadas gobernadas por dos tornillos sin fin é instaladas en un eje comun. En las cajas de estopas de cortas dimensiones se puede emplear un dispositivo todavia más sencillo, que consiste en producir la apretura por medio de una tuerca sola concéntrica al eje de la espiga (fig. 779). La caja de estopas que representa esa figura y que es muy conveniente para los vástagos de tiruars ó cajones de distribucion, se supone enteramente de bronce. La tuerca llamada tuerta, lleva 6 ú 8 muescas prismáticas, en las que se encajan los dientes de la llave destinada á producir el ajuste ó apretura.

Las guarniciones de cáñamo (ú otras materias análogas) tienen el inconveniente de quemarse bajo la accion del vapor y dar en todo caso valores muy diferentes para el frote, desde el momento en que se colocan hasta el en que se quitan. Además, se exigen durante su funcionamiento presiones ó ajustes repetidos con frecuencia; y para evitar esos inconvenientes se ha tenido empeño esos últimos años en sustituir con guarniciones metálicas las de cáñamo para los aparatos de vapor.

La fig. 780 representa una guarnicion metálica (sistema *Pile*), que ha recibido gran número de aplicaciones en la industria y en los ferro-carriles.

Esa guarnicion se compone esencialmente de segmentos metálicos *d*, *d*, *d*, que están alojados alrededor de la espiga, en una cavidad cuya forma es la de un cilindro terminado por un tronco de cono, cuyo diámetro menor es precisamente el de la espiga. Esa cavidad está practicada en una pieza de bronce *AA* dotada de gargantas anulares *r*, *r*, *r*, destinadas á cortar la accion del vapor. Una tuerca *CC* fileteada interiormente actua sobre una baga de bronce *B*, que trasmite la presion á los segmentos metálicos. Formados éstos por una aleacion fusible á una temperatura relativamente baja (metal blanco, metal anti-friccion, compuesto de plomo, estaño y antimonio) se amoldan exactamente alrededor de la espiga. A medida que hay desgaste los segmen-

tos bajan á la parte cónica y se reemplazan por otros que se introducen en dos piezas, despues de haber deslizado de antemano la baga por la espiga para hacer el alojamiento libre. En las guarniciones bien instaladas no se hace hasta tres ó cuatro meses la adicion de una nueva rodaja. Como los segmentos están humedecidos por el vapor condensado en las gargantas, esa guarnicion exige poco engrase.

Cuando la espiga es horizontal, debe estar perfectamente guiada y de manera que no cargue desigualmente sobre los segmentos.

Ultimamente *Belleville* inventó una guarnicion semimetálica que puede emplearse en una caja de estopas, ordinaria, levemente modificada por el aditamento de una baga de fondo cónico, de bronce, representada en la fig. 781.

La materia empleada como guarnicion es una pasta constituida esencialmente por granos de anti-friccion aglomerados en una masa formada por restos de corcho, amianto, etc., y materias grasas.

Colocada la baga de bronce en el fondo de la cámara, se introduce dicha pasta procurando repartirla lo más regularmente posible alrededor de la espiga, á cuyo efecto se apisona varias veces añadiendo á cada una la cantidad necesaria para llenar la caja. Cuando la caja de estopas está así llena de pasta bien comprimida, se coloca encima una trenza de cáñamo ó de algodon, ó mejor aun una rodaja de cauchú afieltrado, y se aprieta el todo con el plato ó sombrero.

Para las prensa-estopas de vapor, el calor facilita el apisonamiento y moldeo rápido de la pasta, así como la licuefaccion de la materia grasa que sirve de trabazon; y así el volúmen de esta caja disminuye sensiblemente luego de puesta en marcha. Por lo tanto es útil apretarla de nuevo y hasta á veces recargar la caja de estopas despues de dar la máquinas algunas vueltas. Por igual motivo importa recargar cada dia durante los dos ó tres primeros de marcha; y esa operacion no se repite despues más que cada semana ó bien cada quince dias, de manera que se mantenga la caja casi siempre llena. Como cada vez basta retirar la rodaja de cauchú y añadir un poco de pasta, la carga se verifica en realidad de una manera muy rápida y sencilla.

La misma guarnicion puede emplearse tan ventajosamente para el agua y el gas.

El módulo de los números proporcionales indicados en las figs. 776 á 779 está designado por la fórmula empírica:

$$s=4\sqrt[4]{d+1}-3, \qquad (321)$$

designando d el diámetro interior de la prensa-estopas. Los resultados calculados por medio de esa fórmula están consignados en la tabla siguiente:

d	s	d	s	d	s
5	3	150	11	915	19
9	4	198	12	1093	20
16	5	256	13	1296	21
26	6	326	14	1526	22
39	7	410	15	1785	23
57	8	509	16	2076	24
81	9	625	17	2401	25
112	10	760	18	3164	26

EJEMPLO. *Una caja de estopas de* 80^{mm} *de diámetro interno tiene por módulo de construccion, segun la fórmula* (321), $s=9^{mm}$. *El espesor de la guarnicion es entonces* $1'8 \,.\, s=1'8 \,.\, 9=16^{mm}$. *En cuanto á la altura de la prensa-estopas es* $12 \,.\, s=12 \,.\, 9=108^{mm}$ *para el dispositivo de la fig.* 778, *y* $21 \,.\, s=21 \,.\, 9=189$ *para el de la figura* 776, *etc.*

Cuando una caja de guarnicion de cáñamo debe colocarse horizontalmente, conviene dar á la seccion del fondo una longitud bastante considerable, de 8 á 12 s, á fin de que no esté espuesta á un desgaste sobrado rápido. Para los espesores de las paredes de la caja se puede en ciertos casos separarse de las dimensiones indicadas por los números proporcionales, como sucede, por ejemplo, cuando las paredes de las partes contiguas tienen más considerable espesor, y lo cual importa tener en cuenta á fin de obtener piezas bien fundidas. En todos los casos de ese género los datos precedentes deben utilizarse simplemente como indicaciones. En las cajas de estopas de los vástagos de cajones de máquinas de vapor, la prensa-estopas suele hacerse en dos partes separadas por un plano que pasa por el eje del vástago. El plano de los rebordes de la caja de tiruar pasa entonces por ese mismo eje. Ese dispositivo tiene la ventaja de facilitar el ajuste del tiruar y la introduccion del vástago.

Las figuras 782 y 783 representan dos dispositivos de cajas de estopas con guarniciones de cuero batido ó amartillado que se usan especialmente en las prensas hidráulicas, siendo el primero aplicable á los émbolos de corto diámetro, al paso que el segundo conviene sobre todo para los de diámetro bastante considerable. El cuero batido de la fig. 783 está sostenido por un anillo de hierro hendido que le obliga á colocarse debidamente antes que la presion del agua haya comenzado á obrar. Cuando una caja de estopas del género

de la fig. 783 debe disponerse horizontalmente, conviene introducir debajo del cuero batido (en la cavidad figurada en punteado) un anillo de bronce en varias partes, cuyo diámetro sea rigurosamente igual al del émbolo, para que impida que ese émbolo frote por la pared de fundicion del cuerpo de la bomba; y ese anillo forma además leve saliente sobre el borde interior del alojamiento del cuero, á fin de evitar por completo el contacto del émbolo con esa pared de fundicion.

El frote que tienen un émbolo sumergente ó una espiga de émbolo en una guarnicion ordinaria, cuyo ajuste se hace por medio de tuercas, no puede calcularse de antemano, porque depende esencialmente de la presion ejercida en la guarnicion. No sucede lo mismo con las guarniciones de cuero batido, en que la presion de la guarnicion es cabalmente la del fluido encerrado. De los notables esperimentos de *Hick* resulta que en una guarnicion de cuero batido perfectamente engrasada el frote (contra lo que la opinion cree) es independiente de la altura del reborde y está en simple relacion con la presion del agua y el diámetro del émbolo. Si designamos por P la carga del émbolo de la prensa, por D el diámetro de ese émbolo y por F el frote, tenemos:

$$\frac{F}{P} = \frac{1}{D} \qquad (322)$$

Para un cuero nuevo el valor del frote es próximamente una vez y media el que da esa fórmula. Si en vez de P se introduce la presion p del agua por milímetro cuadrado, la relacion anterior se convierte en:

$$\frac{F}{p} = \frac{\pi}{4} D. \qquad (323)$$

Ejemplo. *Para un émbolo de prensa de* 10^{mm} *de diámetro la fórmula* (322) *da para pérdida debida al frote* $^1/_{10}$ *ó sea el* $10\,^0/_0$ *de la carga total. Para un diámetro de émbolo de* 600^{mm}, *esa pérdida no es más que de* $0{\cdot}00167$ *ó* $^1/_6\,p.^0/_0$. *Si suponemos, por ejemplo, que la presion del agua es de* 300 *atmósferas ó de* 3^k *por milímetro cuadrado, la resistencia correspondiente al frote es, segun la fórmula* (323), $F = {}^1/_4\pi \cdot 600 \cdot 3 = 1414^k$; *y la presion P ejercida sobre el émbolo es* $P = {}^3/_4 \cdot \pi \cdot 600^2 = 3 \cdot 282743 = 848229^k$.

§ 293

Émbolos de vapor.

De todos los émbolos son los más importantes aquellos que se usan en las máquinas de vapor. Para las máquinas de baja presion se emplean aun con bastante frecuencia émbolos de guarnicion de cáñamo; pero en las máquinas de alta presion se recurre á las guarniciones metálicas, que se componen de aros ó segmentos aplicados por medio de resortes á las paredes del cilindro, y están firmemente apretados contra esas paredes por la presion misma del vapor. En cierto número de casos se logra un resultado muy satisfactorio haciendo uso de una guarnicion mixta, en la que los anillos metálicos se hallan comprimidos interiormente por una guarnicion de cáñamo que hace las veces de resortes.

El módulo que adoptaremos para las dimensiones de los émbolos, es el mismo que el del párrafo anterior:

$$s = 4\sqrt[4]{D+1} - 3, \qquad (324)$$

designando D el diámetro del émbolo.

Fig. 784. Embolo con guarnicion de cáñamo en forma de caja hueca de fundicion y dispuesto segun el sistema de construccion de *Penn*. El ajuste de la guarnicion se efectua por medio de una tapa anular móvil; y los pernos sobre los cuales se maniobra para obtener ese efecto, se encajan en tuercas fijas de bronce. En los casos de grandes diámetros el cuerpo del émbolo ofrece en el centro cierta comba, que se determina tomando para la altura en el medio $6s + {}^1/_{10}D$ y para la de los bordes $7{\cdot}8s$. En el caso en que ese último valor sea superior al precedente, se le debe adoptar tambien para la altura en el centro, y entonces ya no hay comba.

Ejemplo. *Para un émbolo de guarnicion de cáñamo, cuyo diámetro D es igual á* 600^{mm}, *se tiene:* $s = 17$. *El espesor de la guarnicion es por lo tanto de* $1{\cdot}8 \cdot 17 = 31^{mm}$ *y su altura cerca de los bordes de* $7{\cdot}8 \cdot 17 = 133^{mm}$. *La altura del émbolo cerca del cubo tiene por valor* $6 \cdot 10 + 600 : 10 = 162^{mm}$, *que es notablemente superior á la altura precedente.*

La figura 785 representa un émbolo metálico (de *Krauss*) que da muy buenos resultados. La guarnicion está formada de dos aros cortados oblícuamente, de acero cubierto de metal blanco. Si se quiere que desaparezca el defecto de hermeticidad que corresponde al corte de cada aro, puede recurrirse á uno cualquiera de los dispositivos representados por las figs. 786 á 789. Las diferentes piezas reunidas han de ajustar exactamente con las muescas ó incisiones correspondientes

del aro. Y lo mismo debe suceder con el primer modo de cierre, que es de simple cubierta.

Importa sobre manera emplear para los aros un metal más blando que el del barrilete, á fin de que el desgaste se efectue principalmente en tales aros, como quiera que son más fáciles de reemplazar. En este concepto son muy ventajosos los aros de bronce; y en cambio son poco satisfactorios los de hierro y acero. Se obtienen bastante buenos resultados con aros de fundicion muy blanda, máxime cuando la fundicion de las paredes del cilindro presenta bastante dureza.

Fig. 790. Embolo de *Ramsbottom*. La guarnicion de este émbolo, que tiene en favor suyo la sancion de una larga esperiencia, se compone de 3 á 6 anillos de acero blando ó de laton, arqueados segun exija el barrilete; y cada uno de ellos está cortado de manera que una vez el émbolo en su lugar, estén sus dos estremos casi en contacto. Las junturas están cruzadas de uno á otro círculo.

La fig. 791 representa lo que llamamos un émbolo sueco. Los círculos cuya juntura es de simple cubrimiento, como en el dispositivo de la fig. 790, son de fundicion blanda muy homogénea (1), de bronce elástico, ó bien (aunque no es tan bueno) de hierro; y estos círculos reciben una curvatura tal, que pueden aplicarse exactamente á las ranuras practicadas en el cuerpo del émbolo.

Numerosas aplicaciones de ese último dispositivo se encuentran en las máquinas de los barcos de Suecia, así como en los ferro-carriles franceses (2). El émbolo sueco se aplica igualmente con buen éxito á las bombas de aire.

La fig. 792 representa un émbolo sueco para una máquina fija tomado de una gran máquina soplante de construccion muy notable *(Egestorff)*. El cuerpo del émbolo tiene la forma de una caja hueca, como el de la fig. 784. En la figura se hallan indicados los agujeros redondos que sirven para desprender el cubo cuando la pieza es de fundicion. La guarnicion se compone de anillos fundidos que se ajustan por cubrimiento, como en los dispositivos de la fig. 786, y cuya posicion está asegurada con pequeños espigones. La manera de fijar el cubo del émbolo merece llamar la atencion. La clavija trasversal se mantiene fija por medio de otra clavija ó clavete, que á su vez está provisto de un perno de seguridad (3).

La fig. 793 representa un émbolo de guarnicion mixta aplicable á una máquina de simple efecto. La guarnicion de cáñamo apretada detrás de los aros metálicos asegura una hermeticidad satisfactoria, porque se le puede dar gran resistencia, conservándole además la suficiente elasticidad. Ese modo de guarnicion que da resultados muy satisfactorios en las máquinas de mineria, podria sustituir con ventaja en las máquinas de barcos á las guarniciones enteramente metálicas, que están espuestas á deterioros muy rápidos, á consecuencia de vibraciones que tienden á imprimir al émbolo los movimientos de oscilacion de la nave cuando son muy pronunciados.

§ 294

Émbolos de bombas.

Para los émbolos de bombas las guarniciones de cuero pueden emplearse con ventaja mientras que la temperatura del fluido sobre el cual se debe actuar no pase de 30°; pues para las temperaturas más elevadas suele recurrirse á guarniciones de cáñamo, como por ejemplo, las que se emplean muy amenudo para las bombas de alimentacion de las calderas de vapor, así como para las bombas de aire de las máquinas de condensar y de los aparatos de cocer el azúcar.

---

(1) Los círculos de fundicion se preparan en forma de tubos de un diámetro mayor que el definitivo: esos tubos se alisan luego interiormente, se cortan á la altura que se quiere y se hienden dejando una arista. Entonces se corta cada círculo y se tornea esteriormente segun el diámetro del cilindro; y cuando estos círculos se ponen en su lugar, basta la elasticidad de la fundicion para aplicarlos á las paredes y dar una juntura bastante hermética. Como la curvatura de cada círculo es ménos fuerte á la proximidad de la hendidura, se hace levemente escéntrica á veces la pared interior, de modo que tenga un espesor algo más débil hácia la hendidura que en la parte opuesta.

(2) Los émbolos de locomotoras se obtienen por estampado al martillo. La forma de la fig. 791 tiene el inconveniente de dar un modelo bastante complicado para los fondos del cilindro. Actualmente suele preferirse el émbolo de hierro de dos fondos planos. Se preparan al estampado dos piezas cilíndricas, cada una de las cuales presenta la forma de la fig. 791, pero con menor altura; luego se sobreponen borde á borde, se calientan hasta el blanco y se sueldan bajo el martinete.

(3) Para los aparatos de fuelles verticales de poca velocidad se emplean todavia con frecuencia como guarnicion dos cueros amartillados dispuestos en sentido inverso, como los de la fig. 794. Cada cuero se encuentra apretado por pernos entre una corona fija hecha de fundicion con el émbolo, y otra corona agregada que se forma con cierto número de segmentos, los cuales terminan por una parte convexa, mientras que la parte correspondiente á la corona fija, es por el contrario cóncava, de manera que permita para el cuero una rotundez muy pronunciada.

En los aparatos de fuelles de alta presion (sistema Bessemer), el émbolo tiene la forma de una caja vacia terminada en su contorno por una garganta de seccion rectangular en la que se aloja la guarnicion. Esta se compone de dos hiladas de segmentos de nogal, taladrados por gran número de agujeros llenos con clavijas de guayaco. Resortes de acero en forma de arco clavados en los segmentos se apoyan en el fondo de la garganta, obligando así á que la guarnicion de madera se aplique á las paredes del cilindro.

La fig. 794 representa un émbolo de discos con guarnicion de cuero batido y la fig. 795 un émbolo con guarnicion simple de cuero y con doble válvula, que conviene perfectamente á las bombas de pozos, á las cuales suele aplicarse más comunmente. La guarnicion de ese émbolo se compone de rodajas cónicas de cuero, ó de cáñamo superpuestas. En ambos émbolos la guarnicion se aplica á las paredes del cuerpo de bomba por la presion del agua. En cuanto á las bombas de agotamiento de las minas, cuando se trata de estraer aguas ácidas que atacarian las guarniciones de cuero, suelen armarse de aros metálicos de fundicion dulce los émbolos. En Fahlun, en Suecia, se decidió en un caso de esta naturaleza emplear para la guarnicion de los émbolos la corteza de álamo blanco, que despues de múltiples ensayos fué juzgada como la más conveniente. El módulo que corresponde á los números proporcionales de las figuras es la unidad s de la fórmula (324). En las bombas de pozos de émbolos sumergentes la guarnicion de las cajas de estopas se compone de trenzas de cáñamo.

§ 295

Cálculo de los vástagos ó espigas de los émbolos.

Los vástagos de los émbolos suelen hacerse de hierro ó de acero; y cuando un vástago de ese género no debe someterse más que á esfuerzos de traccion, conviene calcularle teniendo en cuenta la resistencia de estension. Mas cuando tiene que resistir igualmente á esfuerzos de compresion y su longitud es relativamente considerable, debe calcularse como una pieza cargada de pié. En cambio si la longitud es poca, basta tener en cuenta la resistencia de compresion que conduce á las mismas dimensiones que la resistencia á la traccion. Por consiguiente los vástagos que deben calcularse como piezas cargadas en pié, nunca pueden tener diámetros inferiores á los que se determinarian teniendo simplemente á la mira la resistencia de traccion.

a. *Cálculo de un vástago de émbolo no teniendo en cuenta más que la traccion.*

Designando por D el diámetro del émbolo y por n la presion efectiva en atmósferas, la presion total P del vapor sobre el émbolo, tiene por espresion $\frac{n}{100}\frac{\pi}{4}D^2$. Para un vástago que se suponga de hierro y esté simplemente sometido á la traccion no debe la seccion en el punto más débil tener que soportar una tension superior á 6^k. Así, pues, debe tomarse para el diámetro δ de esta seccion:

$$\frac{\delta}{D} = 0{,}0408\sqrt{n}, \qquad (325)$$

ó con suficiente aproximacion:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{57+7n}{1000}. \qquad (326)$$

Ejemplo. *Para $n=4$ la fórmula* (325) *da* $\delta : D = 0{,}0816$; *y por tanto se tiene para un diámetro de émbolo de* 500^{mm}, $\delta = 500 \cdot 0{,}0816 = 40{,}8$ *ó sea* 41^{mm}. *La fórmula aproximativa* (326) *daria* $\frac{\delta}{D} = \frac{57+28}{1000} = 0{,}085$ *ó sea* $\delta = 42{,}5^{mm}$.

Para un vástago de acero sometido simplemente á un esfuerzo de traccion, el diámetro debe tomarse igual á 0,8 del de un vástago de hierro.

Cuando el vástago de un émbolo está debilitado por un agujero de clavija ó por un fileteado, debe esa debilidad estar compensada en ciertos casos con un aumento de diámetro. Por ese motivo se adopta en ciertos casos una comba en los estremos del vástago, como, por ejemplo, en las locomotoras; y de ahí la necesidad de hacer en dos partes el sombrero de la caja de estopas.

b. *Cálculo de un vástago de émbolo como pieza cargada en pié.*

Conservando las notaciones precedentes y designando además por L la longitud del vástago debe tomarse:

$$\frac{\delta}{D} = 0{,}0573\sqrt{\frac{L}{D}}\sqrt[4]{n}, \qquad (327)$$

fórmula que ha servido para calcular la siguiente tabla:

$\frac{D}{L}$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
1,5	0,070	0,083	0,093	0,099	0,105	0,110	0,114	0,118
2,0	0,081	0,096	0,107	0,115	0,121	0,127	0,132	0,136
2,5	0,091	0,108	0,120	0,128	0,136	0,142	0,148	0,158

Los valores que suministra esa tabla, son tan aplicables á los vástagos de acero como á los de hierro. (Véase el cálculo de los cuerpos de bielas, § 185, y la proporcion de los coeficientes de elasticidad de esas dos materias, tabla del § 2).

Ejemplo. *En un cilindro de vapor de* 400^{mm} *de diámetro y de* 1000^{mm} *de carrera del émbolo, la presion efectiva es de* 4 *atmósferas. Como* $L : D = 1000 : 400 = 2'5$, *debe tomarse, segun la tabla* (*col.* 5, *línea* 3) : $\delta : D = 0'128$ *ó bien* $\delta = 0'128 \cdot 400 = 51^{mm}$.

Para la clavija del émbolo que debe ser siempre de acero, se determinan sus dimensiones de manera que no esté sometida más que á un esfuerzo de cizalla de 4 á 6^k. Importa además no dar á esa clavija una anchura demasiado escasa, para que la presion por unidad de superficie en el lado más pequeño no sea demasiado considerable. Segun las indicaciones dadas por construcciones que han recibido la sancion de la esperiencia, esa presion por unidad de superficie varia de 5 á 6^k en las máquinas fijas y de 8 á 10 en las locomóviles.

CUARTA PARTE

TABLAS Y FÓRMULAS MATEMÁTICAS.

---

§ 296

Curvas, superficies y volúmenes.

Las tablas que aquí vamos á reproducir dan reunidas en una forma bastante cómoda las propiedades geométricas y mecánicas de la serie de las curvas usuales que ofrecen el mayor interés para el constructor de máquinas; y esas tablas suministran además las espresiones de las superficies limitadas por esas curvas y las de los volúmenes simples que engendran. Las notaciones inscritas en las figuras son suficientes en general para dar á entender las fórmulas, por más que nosotros creamos deber añadir aquí algunas esplicaciones relativas á la significacion de esas fórmulas.

En la rectificacion de las curvas s es la longitud de la parte de curva comprendida entre el punto escogido como orígen y el punto xy; φ es el ángulo correspondiente, y S la longitud total de la curva.

Para los momentos de inercia se ha supuesto la densidad igual á 1, al efecto de no multiplicar inútilmente el número de las letras. El momento de inercia de una superficie es ecuatorial ó polar segun el eje con respecto al cual se elijen los momentos. Llámase ecuatorial ese eje cuando está situado en el plano de la superficie, y polar si es perpendicular á ese mismo plano. Todo eje de la primera especie que pase por el centro de gravedad de la superficie, es más especialmente un eje de ecuador, del mismo modo que se da el nombre de eje de polo al eje polar que pasa por el propio centro de gravedad. Segun esto, vemos que una superficie no tiene más que un solo eje de polo, por más que tiene una infinidad de ejes de ecuador.

Se obtiene el momento de inercia polar I_p de una superficie efectuando la suma de los dos momentos de inercia ecuatoriales I_{q_1} y I_{q_2}, cuyos ejes se encuentran en ángulo recto en el eje polar:

$$I_p = I_{q_1} + I_{q_2}.$$

El momento de inercia I' de una superficie en relacion con un eje situado á una distancia a del centro de gravedad S de esta superficie, puede deducirse del momento de inercia I con relacion al eje paralelo, trazado por S, y en tal caso está representado por la espresion:

$$I' = I + a^2 F,$$

designando F la medida de la superficie. Esa relacion

es igualmente aplicable á un volúmen con la condicion de reemplazar F por la masa del cuerpo.

Puede admitirse para los volúmenes una division enteramente análoga á la anterior. En cada uno de los cuerpos que vamos á dar aquí, puede considerarse como eje de polo uno de los ejes principales que pasan por los centros de gravedad de todas las secciones que les son normales, y como seccion de ecuador la trazada normalmente á ese eje por el centro de gravedad del cuerpo; pudiendo así dividir tambien los momentos de inercia en ecuatoriales y polares, segun la posicion de sus ejes con relacion á la seccion ecuatorial. En todos los ejemplos que damos para los volúmenes, los ejes son siempre en realidad ejes de ecuador y de polo.

Para un prisma recto cuya semi-altura es l y cuya base tiene por momento de inercia polar i_p, el momento de inercia polar es:

$$I = 2\,l i_p$$

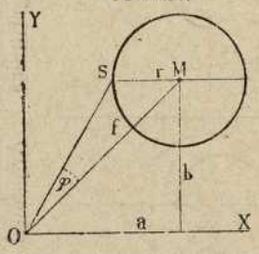
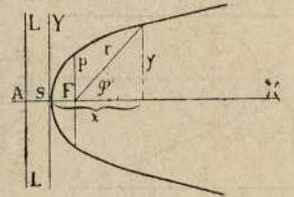
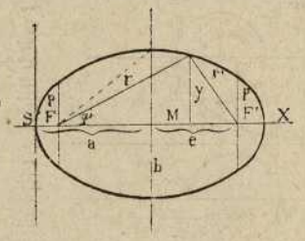
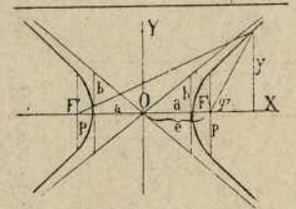
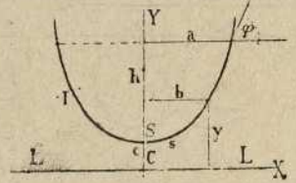
y el momento de inercia con relacion á un eje de ecuador

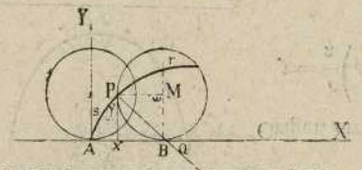
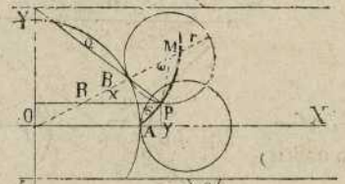
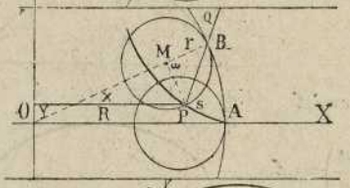
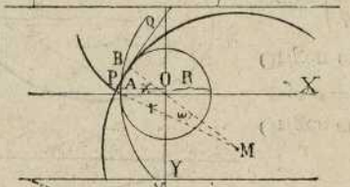
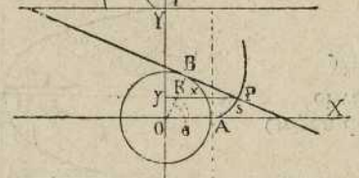
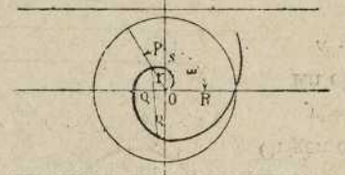
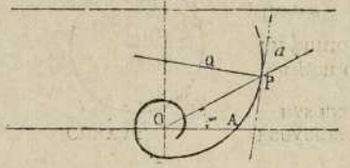
$$I_q = {}^2/_3 f l^3 + 2\,l i_q,$$

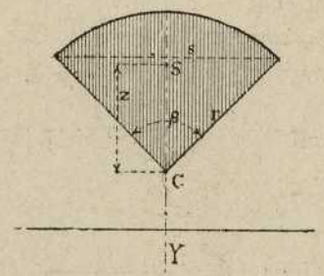
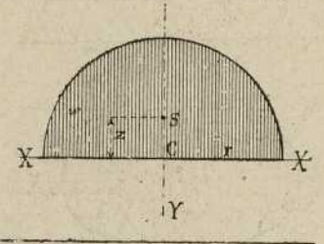
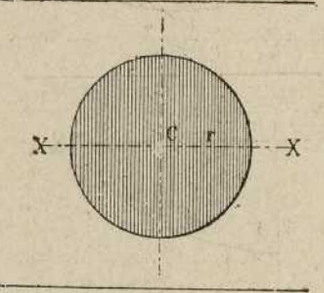
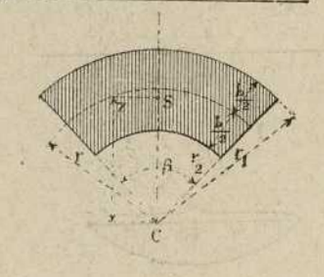
designando por f la medida de superficie de la seccion y por i_q el momento de inercia ecuatorial de esta superficie con relacion al mismo eje que I_q.

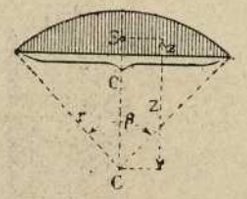
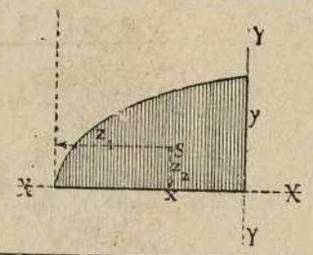
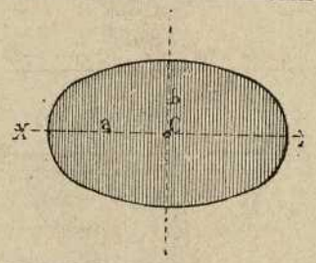
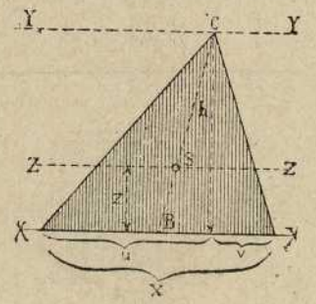
Los centros de gravedad y los momentos de inercia para las superficies de formas irregulares pueden en gran número de casos determinarse muy fácil y exactamente con ausilio del método gráfico. El procedimiento que ha de seguirse, se puede deducir de la solucion de los problemas que hemos tratado en el cap. VIII, y consiste realmente en el empleo repetido del polígono de las fuerzas y del polígono funicular.

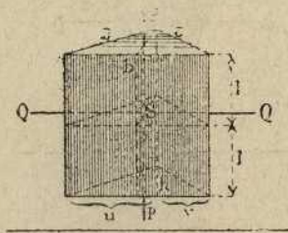
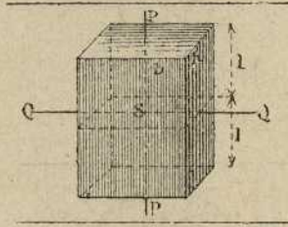
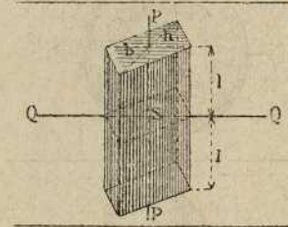
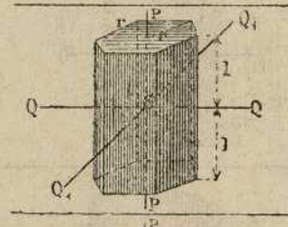
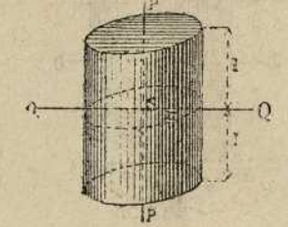
CONST.—42.—T. I.

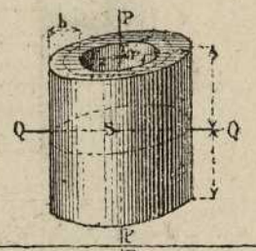
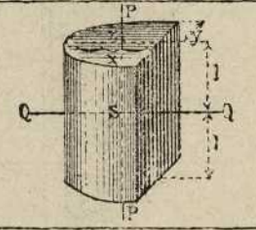
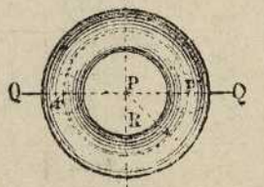
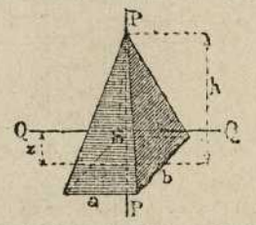
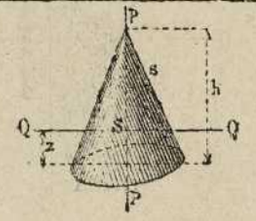
N.os CURVAS.	ECUACION EN COORDINADAS RECTANGULARES.	PROPIEDADES DIVERSAS.	ECUACION POLAR.	RADIO DE CURVATURA.	RECTIFICACION.
I. Círculo. 	Orígen de los ejes en un punto cualquiera O: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Orígen en el vértice S: $y^2=2rx-x^2$. En el centro M: $x^2+y^2=r^2$.	Próximamente para un corto valor de $\frac{x}{y}$, $\frac{r}{y}=\frac{y}{2x}$.	Referente á un punto cualquiera O: $\rho^2+f^2-2f\cos\varphi=r^2$ En el vértice S: pasando el eje polar por M, $\rho=2r\cos\varphi$.	$\rho=r$.	Orígen en el centro: $s=r\varphi$. Longitud total: $S=2r\pi$.
II. Parábole. 	Orígen de los ejes en el vértice S: $y^2=2px$.	Semi parámetro $=p$ $AS=SF=\frac{p}{2}$. LL Directriz. F Foco.	En el foco F: $r=\frac{p}{2}+x$ $r=\frac{p}{2\,sen^2\,{}^1/_2\varphi}$.	$\rho=p\sqrt{\left(1+2\frac{x}{p}\right)^3}$.	$s=\frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1+\frac{2x}{p}\right)}+log.\,nat.\left(\sqrt{\frac{2x}{p}}+\sqrt{1+\frac{2x}{p}}\right)\right]$. Próximamente para $\frac{x}{y}$ débil: $s=y\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right]$.
III. Elipse. 	Orígen en el centro M: $y^2a^2+x^2b^2=a^2b^2$. Orígen en el vértice S: $y^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2(2ax-x^2)$ $y^2=2px-\frac{p}{a}x^2$.	Escentricidad: lineal $e=\sqrt{a^2-b^2}$ numérica $\varepsilon=\frac{e}{a}$. Semi parámetro: $p=a(1-\varepsilon^2)=\frac{b^2}{a}$.	En el foco F: $r=p+\varepsilon x=\frac{a^2-e^2}{a-e\cos\varphi}=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$. Radios vectores: $r=a+\varepsilon x$, $r'=a-\varepsilon x$.	$\rho=\frac{(rr')^{3/2}}{ab}$. En S: $\rho=\frac{b^2}{a}$, En A: $\rho=\frac{a^2}{b}$.	$S=(a+b)\left(1+\frac{n^2}{4}+\frac{n^4}{64}+\frac{n^6}{256}+\ldots\right)$, ó $n=\frac{a-b}{a+b}$
IV. Hipérbole. 	Orígen en el centro O: $-y^2a^2+x^2b^2=a^2b^2$.	Escentricidad: lin. $=OF=e=\sqrt{a^2+b^2}$ numérica $\varepsilon=\frac{e}{a}$ Eje $b=a\sqrt{\varepsilon^2-1}$ Semi parámetro: $p=a(\varepsilon^2-1)=\frac{b^2}{a}$.	En el foco F: $r=p+\varepsilon x=\frac{e^2-a^2}{a-e\cos\varphi}=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$. Radios vectores: $r=\varepsilon x-a$, $r'=\varepsilon x+a$.	$\rho=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4}$.	Muy complicada.
V. Cadenita. 	Orígen en el punto C: $y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)$	tg $\varphi=\frac{l}{c}=\sqrt{\frac{h^2+2hc}{c^2}}$. LL Directriz.	—	$\rho=\frac{y^2}{c}$	$s=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}-e^{-\frac{x}{c}}\right)$ $=\sqrt{y^2-c^2}$, $l=\sqrt{h^2+2hc}$.

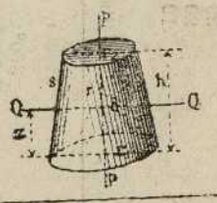
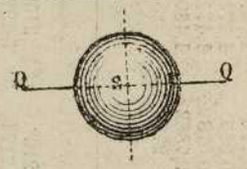
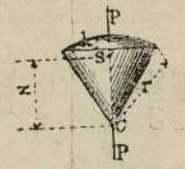
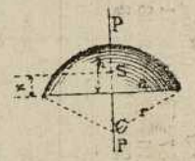
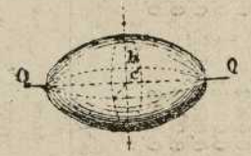
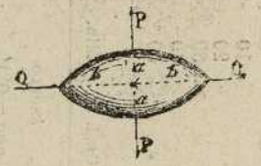
N.os	CURVAS.	ECUACION.	RECTIFICACION.	RADIO DE CURVATURA.	OBSERVACIONES.
VI.	Cicloide. 	$x=r\left(\omega-\frac{r'}{r}sen\,\omega\right)$. $y=r\left(1-\frac{r'}{r}cos\,\omega\right)$.	$s=4r\left(1-cos\frac{\omega}{2}\right)$ $S=8r.$	$\rho=4r\,sen\frac{\omega}{2}$. doble de la normal PB.	
VII.	Epicicloide. 	$x=(R+r)\,cos\frac{r}{R}\omega-r'\,cos\frac{R+r}{R}\omega$ $y=(R+r)\,sen\frac{r}{R}\omega-r'\,sen\frac{R+r}{R}\omega$.	$s=4r\frac{R+r}{R}\left(1-cos\frac{\omega}{2}\right)$ $S=8r\frac{R+r}{R}$.	$\rho=4r\frac{R+r}{R+2r}sen\frac{\omega}{2}$.	r' es el radio para el punto describente. Si $r'=r$, como lo hemos supuesto aquí en las espresiones de la rectificacion y de la curvatura, las ecuaciones dan la cicloide, la epicicloide, la hipocicloide y la pericicloide ordinarias. Asimismo en las ecuaciones de la desarrollante de círculo, R′ designa la distancia del punto describente en el centro O del círculo fijo, para $\theta=0$; y para $R'=R$ se obtiene la desarrollante de círculo ordinaria.
XIII.	Hipocicloide. 	$x=(R-r)\,cos\frac{r}{R}\omega+r'\,cos\frac{R-r}{R}$ $y=(R-r)\,sen\frac{r}{R}\omega-r'\,sen\frac{R-r}{R}\omega$.	$s=4r\frac{R-r}{R}\left(1-cos\frac{\omega}{2}\right)$ $S=8r\frac{R-r}{R}$.	$\rho=4r\frac{R-r}{R-2r}sen\frac{\omega}{2}$.	
IX.	Pericicloide. 	$x=(r-R)\,cos\frac{r}{R}\omega-r'\,cos\frac{r-R}{R}\omega$ $y=(r-R)\,sen\frac{r}{R}\omega-r'\,sen\frac{r-R}{R}\omega$.	$s=4r\frac{r-R}{R}\left(1-cos\frac{\omega}{2}\right)$ $S=8r\frac{r-R}{R}$.	$\rho=4r\frac{r-R}{2r-R}sen\frac{\omega}{2}$.	
X.	Desarrollante de círculo. 	$x=R'\,cos\,\theta+R\theta\,sen\,\theta$ $y=R'\,sen\,\theta-R\theta\,cos\,\theta$.	$s=\frac{R\theta}{2}\theta$.	$\rho=R\theta$.	
XI.	Espiral de Arquímedes. 	$r=a\omega=R\frac{\omega}{2\pi}$.	$s=\frac{\omega}{4\pi}\sqrt{1+\omega^2}$ $+\frac{1}{2}log.\,nat.\,(\omega+\sqrt{1+\omega^2})$.	$\rho=\frac{(r^2+a^2)^{3/2}}{2(r^2+2a^2)}$	En la espiral logarítmica forma la tangente en un punto cualquiera, P, con el radio vector OP, un ángulo constante α, que está indicado por la espresion: $cotg.\,\alpha=log.\,nat.\,a$.
XII.	Espiral logarítmica. 	$r=a^{(\omega)}$.	$s=r\frac{\sqrt{1+(log.\,nat.\,a)^2}}{log.\,nat.\,a}$.	$\rho=\sqrt{1+(log.\,nat.\,a)^2}$ $=\frac{r}{sen\,\alpha}$, ó $cotg.\,\alpha=log.\,nat.\,a$.	

N.os	FORMA.	MEDIDA DE LA SUPERFICIE.	POSICION DEL CENTRO DE GRAVEDAD.	MOMENTO DE INERCIA.
XIII. Sector de círculo.		$F=r^2\frac{\beta}{2}$.	$z=\frac{4}{3}r\frac{sen\frac{\beta}{2}}{\beta}$. $=\frac{s_1^2}{3F}$. $=\frac{2}{3}\frac{\text{radio}\times\text{cuerda}}{\text{arco}}$.	Para el eje polar tirado por el centro C: $I_c=\frac{\mu}{2}r^2=\frac{r^4\beta}{4}$. Para el eje de polo que pasa por el centro de gravedad S: $I_s=\frac{\mu}{2}r^2\left(1-\frac{16}{9}\frac{1-cos\,\beta}{\beta^2}\right)=\frac{r^4}{4}\left(\beta-\frac{16}{9}\frac{1-cos\,\beta}{\beta}\right)$.
XIV. Semi-círculo.		$F=\frac{r^2\pi}{2}$.	$z=\frac{4}{3\pi}r$.	Para el eje polar C: $I_c=\frac{\mu}{2}r^2=\frac{\pi}{4}r^4$. Para el eje de polo S: $I_s=\frac{\mu}{2}r^2\left(1-\frac{32}{9\pi^2}\right)=0'320\mu r^2$ $=\frac{r^4}{4}\left(\pi-\frac{32}{9\pi}\right)=0'500\,r^4$. Para los ejes ecuatoriales XX y YY: $I_x=I_y=\frac{\mu r^2}{4}=\frac{\pi}{8}\pi r^4$.
XV. Círculo.		$F=r^2\pi$.	Centro de figura.	Para el eje de polo C: $I_c=\frac{\mu}{2}r^2=\frac{\pi}{2}r^4$. Para el eje de ecuador XX: $I_x=\frac{\mu}{4}r^2=\frac{\pi}{4}r^4$.
XVI. Porcion de corona circular.		$F=(r_1^2-r_2^2)\frac{\beta}{2}$ $=br\beta$.	$z=\frac{4}{3}\frac{sen\frac{\beta}{2}}{\beta}\frac{r_1^3-r_2^3}{r_1^2-r_2^2}$ $=\frac{sen\frac{\beta}{2}}{\beta}r\left(2+\frac{1}{6}\frac{b^2}{r^2}\right)$.	Para el eje polar C: $I_c=\frac{\mu}{2}(r_1^2+r_2^2)=\mu\left(r^2+\frac{b^2}{4}\right)$ $=\frac{\beta}{4}(r_1^4+r_2^4)=\frac{\beta}{4}(4br^3+rb^3)$.

N.os	FORMA.	MEDIDA DE LA SUPERFICIE.	POSICION DEL CENTRO DE GRAVEDAD.	MOMENTO DE INERCIA.
XVII. Segmento de círculo.		$F=\frac{r^2}{2}(\beta-sen\beta).$	$z=\frac{c^3}{12F}$ $=\frac{4}{3}r\frac{sen^3\frac{\beta}{2}}{\beta-sen\beta}.$	Para el eje polar C: $I_c=\frac{r^4\beta}{4}-\frac{1}{4}\left[cr^3cos^3\frac{\beta}{2}+\frac{rc^3cos\frac{\beta}{2}}{12}\right]$ $=\frac{r^4}{4}\left[\beta-\frac{2}{3}sen\,\beta-\frac{1}{3}sen\,\beta cos\,\beta\right].$
XVIII. Parábole.		$F=\frac{2}{3}xy.$	$z_1=\frac{3}{5}x$ $z_2=\frac{3}{8}y.$	Para los ejes ecuatoriales XX y YY: $I_x=\mu\frac{y^3}{5}=\frac{2}{15}xy^3$ $I_y=\frac{8}{35}\mu x^3=\frac{16}{105}yx^3.$
XIX. Elipse.		$F=ab\pi.$	Centro de figura.	Para el eje de ecuador XX: $I_x=\frac{\pi}{4}ab^3.$ Para el eje de polo C: $I_c=\frac{\mu}{4}(a^2+b^2)=\frac{\pi}{4}ab^3\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right).$
XX. Triángulo.		$F=\frac{bn}{2}.$	En la media, en el punto: $z=\frac{h}{3}.$	$I_x=\mu\frac{h^2}{6}=\frac{bh^3}{12}$ $I_x=\mu\frac{h^2}{18}=\frac{bh^3}{36}$ $I_y=\mu\frac{b^2}{2}=\frac{b^3h}{4}$ $I_c=\frac{bh^3}{4}+\frac{h}{12}(u^3+v^3)$ $I_b=\frac{bh^3}{12}+\frac{h}{4}(u^3+v^3)-\frac{bh}{24}[8(u^2+v^2)-3b^2]$ $I_z=\frac{bh^3}{36}+\frac{h}{12}(u^3+v^3)-\frac{bh}{18}[2(u^2+v^2)-b^2]$ $=\frac{\mu}{36}(a^2+b^2+c^2),$ siendo a,b,c los tres lados.

N.os	FORMA.	ESPRESION DE LA SUPERFICIE.	MEDIDA DEL VOLÚMEN.	MOMENTO DE INERCIA.
XXI. Prisma triangular.		Superficie lateral: $F_1=2l\,(a+b+c)$. Superficie de una base: $F_2=\frac{bh}{2}$.	$V=bhl$.	Para el eje de ecuador QQ: $I_q=m\left[\frac{l^2}{3}+\frac{h^2}{18}\right]=\frac{bhl^3}{3}+\frac{blh^3}{18}$. Para el eje de polo PP: $I_p=l\left[\frac{bh^3}{18}+\frac{h}{6}(u^3+v^3)-\frac{bh}{9}(2[u^2+v^2]-b^2)\right]$.
XXII. Prisma rectangular.		Superficie lateral: $F_1=4l\,(b+h)$. Superficie de una base: $F_2=bh$.	$V=2bhl$.	Para el eje de ecuador QQ: $I_q=m\left(\frac{l^2}{3}+\frac{h^2}{12}\right)$. Para el eje de polo PP: $I_p=\frac{m}{12}(h^2+b^2)$.
XXIII. Prisma romboidal.		Superficie lateral: $F_1=8l\sqrt{h_2+\frac{b^2}{4}}$. Superficie de una base: $F_2=bh$.	$V=2bhl$.	Para el eje de ecuador QQ: $I_q=m\left(\frac{l^2}{3}+\frac{h^2}{6}\right)$. Para el eje de polo PP: $I_p=m\left(\frac{b^2}{6}+\frac{b}{24}\right)$.
XXIV. Prisma de 6 caras.		Superficie lateral: $F_1=12lr$. Superficie de una base: $F_2=\frac{3}{2}r^2\sqrt{3}=2'598\,r_2$.	$V=3lr_2\sqrt{3}=5'196lr^3$.	Para los ejes de ecuador QQ y Q_1Q_1: $I_q=I_{q_1}=m\left(\frac{l^2}{3}+\frac{5}{24}r^2\right)$. Para el eje de polo PP: $I_p=\frac{5}{12}mr^2$.
XXV. Cilindro.		Superficie lateral: $F_1=4lr\pi$. Superficie de una base: $F_2=r_2\pi$.	$V=2\pi lr^2$.	Para el eje de ecuador QQ: $I_q=m\left(\frac{l^2}{3}+\frac{r^2}{4}\right)$. Para el eje de polo PP: $I_p=\frac{1}{2}mr^2$.

N.os	FORMA.	ESPRESION DE LA SUPERFICIE.	MEDIDA DEL VOLÚMEN.	POSICION DEL CENTRO DE GRAVEDAD.	MOMENTO DE INERCIA.
XXVI. Cilindro hueco.		Superficie lateral: $F_1=4\pi l(r_1+r_2)=8\pi lr.$ Superficie de una base: $F_2=\pi(r_1^2-r_2^2)=2\pi rb.$	$V=2\pi l(r_1^2-r_2^2)=4\pi rbl.$	Centro de figura.	Para el eje de ecuador QQ: $I_q=m\left[\frac{l^2}{3}+\frac{r_1^2+r_2^2}{4}\right]=m\left[\frac{l^2}{3}+\frac{r^2}{2}+\frac{b^2}{8}\right].$ Para el eje de polo PP: $I_p=\frac{m}{2}[r_1^2+r_2^2]=m\left[r^2+\frac{b^2}{4}\right].$
XXVII. Prisma parabólico.		Superficie de una base: $F_2=\frac{4}{3}xy.$	$V=\frac{8}{3}lxy.$	$z=\frac{3}{5}x.$	Para el eje de ecuador QQ: $I_q=m\left[\frac{l^2}{3}+\frac{y^2}{5}\right].$ Para el eje de polo PP: $I_p=m\left[\frac{y^2}{5}+x^2\left(\frac{8}{35}-\frac{4}{25}\right)\right].$
XXVIII. Toro.		$F=4\pi^2Rr.$	$V=2\pi^2Rr^2.$	Centro de figura.	Para el eje de ecuador QQ: $I_q=m\left[\frac{R^2}{2}+\frac{5}{8}r^2\right].$ Para el eje de polo PP: $I_p=m\left[R^2+\frac{3}{4}r^2\right].$
XXIX. Pirámide rectangular.		Superficie lateral: $F_1=a\sqrt{h^2+\frac{b^2}{4}}+b\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}.$ Superficie de la base: $F_2=ab.$	$V=F_2\frac{h}{3}=\frac{abh}{3}.$	$z=\frac{h}{4}.$	Para el eje de ecuador QQ: $I_q=m\left[\frac{3}{80}h^2+\frac{b^2}{20}\right].$ Para el eje de polo PP: $I_p=\frac{m}{20}[a^2+b^2].$
XXX. Cono recto.		Superficie lateral: $F_1=r\pi\sqrt{h^2+r^2}=sr\pi.$ Superficie de la base: $F_2=r^2\pi.$	$V=\frac{\pi r^2h}{3}.$	$z=\frac{h}{4}.$ Para la envoltura sola: $z'=\frac{h}{3}.$	Para el eje de ecuador QQ: $I_q=\frac{3}{20}m\left[r^2+\frac{h^2}{4}\right].$ Para el eje de polo PP: $I_p=\frac{2}{10}mr^2.$

N.os	FORMA.	EXPRESION DE LA SUPERFICIE.	MEDIDA DE VOLÚMEN.	POSICION DEL CENTRO DE GRAVEDAD.	MOMENTO DE INERCIA.
XXXI. Tronco de cono.		Superficie lateral: $F_1=\pi(r_1+r_2)\sqrt{h^2-(r_1-r_2)^2}=2\pi rs.$ Superficie de las bases: $F_2'=r_1^2\pi, \quad F_2''=r_2^2\pi.$	$V=\frac{\pi}{3}h[r_1^2+r_1r_2+r_2^2].$	$z=\frac{h}{4}\left(\frac{r_1^2+2r_1r_2+3r_2^2}{r_1^2+r_1r_2+r_2^2}\right).$	Para el eje de polo PP: $I_p=\frac{3}{10}m\frac{r_1^3-r_2^3}{r_1^3-r_2^3}.$
XXXII. Esfera.		$F=4r^2\pi.$	$V=\frac{4\pi}{3}r^3.$	Centro de figura.	Para el eje de ecuador QQ: $I_q=\frac{2}{5}mr^2.$
XXXIII. Sector esférico.		Superficie de la envoltura cónica: $F_1=a\pi r=\pi r\sqrt{2rh-h^2}.$	$V=\frac{2}{3}\pi r^2h.$	$z=\frac{3}{4}\left(r-\frac{h}{2}\right).$	Para el eje de polo PP: $I_p=\frac{m}{5}(3rh-h^2).$
XXXIV. Segmento esférico.		Superficie de la zona: $F_1=2\pi rh=\pi(a^2+h^2).$ Superficie de la base: $F_2=a^2\pi, \quad r=\frac{a^2+h^2}{2h}.$	$V=\pi h^2\left(r-\frac{h}{3}\right)=\frac{\pi}{6}h(3^2a+h^2).$	$z=\frac{3}{4}\frac{(2r-h)^2}{3r-h}.$ Para la zona solamente: $z'=\frac{h}{2}.$	Para el eje de polo PP: $I_p=m\left(r^2-\frac{3}{4}rh+\frac{3}{20}h^2\right)\frac{2h}{3r-h}.$
XXXV. Elipsoide.		—	$V=\frac{4}{3}\pi abc.$	Centro de figura.	Para el eje de ecuador QQ que coincide con a: $I_a=\frac{m}{5}(b^2+c^2).$
XXXVI. Lente biconvexo.		$2(a^2+b^2)\pi.$	$\frac{1}{3}\pi a(a^2+3b^2).$	Centro de figura.	Para el eje de polo PP: $I_p=\frac{m}{10}\frac{a^4+5a^2b^2+10b^4}{a^2+3b^2}=\frac{\pi a}{30}(a^4+5a^2b^2+10b^4).$ Para el eje de ecuador QQ: $I_q=\frac{m}{20}\frac{7a^4+15a^2b^2+10b^4}{a^2+3b^2}=\frac{\pi a}{60}(7a^4+15a^2b^2+10b^4).$

§ 297

Líneas trigonométricas.

La tabla siguiente contiene en la forma ordinaria los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de los ángulos de 0° á 90°, de 10 en 10 minutos, dando además las longitudes de arcos (para el radio 1). Con objeto de facilitar la determinacion de las longitudes de arcos correspondientes á grandes ángulos, se ha indicado, á la parte inferior de cada página, las longitudes de varios arcos que son de uso frecuente y que corresponden, los unos á ángulos en extremo pequeños, y los otros á ángulos superiores á 90°. Los números intercalados son las diferencias para las partes correspondientes de la tabla.

ÁNGULO		ARCO	SENO	COSENO	TANG.	COTANG.	ARCO	ÁNGULO	
Grad.	Min.							Grad.	Min.
0	0	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	∞	1,5708	90	0
	10	0,0029	0,0029	1,0000	0,0029	343,77	1,5679		50
	20	0,0058	0,0058	1,0000	0,0058	171,89	1,5650		40
	30	0,0087	0,0087	1,0000	0,0087	114,59	1,5621		30
	40	0,0116	0,0116	0,9999	0,0116	85,940	1,5592		20
	50	0,0145	0,0145	0,9999	0,0145	68,750	1,5563		10
			29	1	29	11,460			
1	0	0,0175	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	1,5533	89	0
	10	0,0204	0,0204	0,9998	0,0204	49,104	1,5504		50
	20	0,0233	0,0233	0,9997	0,0233	42,964	1,5475		40
	30	0,0262	0,0262	0,9997	0,0262	38,188	1,5446		30
	40	0,0291	0,0291	0,9996	0,0291	34,368	1,5417		20
	50	0,0320	0,0320	0,9995	0,0320	31,242	1,5388		10
			29	1	29	2,606			
2	0	0,0349	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	1,5359	88	0
	10	0,0378	0,0378	0,9993	0,0378	26,437	1,5330		50
	20	0,0407	0,0407	0,9992	0,0407	24,542	1,5301		40
	30	0,0436	0,0436	0,9990	0,0436	22,904	1,5271		30
	40	0,0465	0,0465	0,9989	0,0465	21,470	1,5243		20
	50	0,0495	0,0494	0,9988	0,0495	20,206	1,5213		10
			29	1	29	1,125			
3	0	0,0524	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	1,5184	87	0
	10	0,0553	0,0552	0,9985	0,0553	18,075	1,5155		50
	20	0,0582	0,0581	0,9983	0,0582	17,169	1,5126		40
	30	0,0611	0,0610	0,9981	0,0612	16,350	1,5097		30
	40	0,0640	0,0640	0,9980	0,0641	15,605	1,5068		20
	50	0,0669	0,0669	0,9978	0,0670	14,924	1,5039		10
			29	2	29	623			
4	0	0,0698	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	1,5010	86	0
	10	0,0727	0,0727	0,9974	0,0729	13,727	1,4981		50
	20	0,0756	0,0756	0,9971	0,0758	13,197	1,4951		40
	30	0,0785	0,0785	0,9969	0,0787	12,706	1,4923		30
	40	0,0814	0,0814	0,9967	0,0816	12,251	1,4893		20
	50	0,0844	0,0843	0,9964	0,0846	11,826	1,4864		10
			29	2	29	396			
5	0	0,0873	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	1,4853	85	0
	10	0,0902	0,0901	0,9959	0,0904	11,059	1,4806		50
	20	0,0931	0,0929	0,9957	0,0934	10,712	1,4777		40
	30	0,0960	0,0958	0,9954	0,0963	10,385	1,4748		30
	40	0,0989	0,0987	0,9951	0,0992	10,078	1,4719		20
	50	0,1018	0,1016	0,9948	0,1022	9,7882	1,4690		10
			29	3	29	2738			
Grad.	Min.							Grad.	Min.

ÁNGULO	ARCO	COSENO	SENO	COTANG.	TANG.	ARCO	ÁNGULO
ang.=0°1′	0°5′	135°	180°	225°	270°	315°	360°
arc.=0,0003	0,0015	2,3562	3,1416	3,9270	4,7124	5,4978	6,2832

ÁNGULO Grad.	Min.	ARCO	SENO	COSENO	TANG.	COTANG.	ARCO	ÁNGULO Grad.	Min.
6	0	0,1047	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	1,4661	84	0
	10	0,1076	0,1074	0,9942	0,1080	9,2553	1,4632		50
	20	0,1105	0,1103	0,9939	0,1110	9,0098	1,4603		40
	30	0,1134	0,1132	0,9936	0,1139	8,7769	1,4573		30
	40	0,1164	0,1161	0,9932	0,1169	8,5555	1,4544		20
	50	0,1193	0,1190	0,9929	0,1198	8,3450	1,4515		10
			29	4	29	2007			
7	0	0,1222	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	1,4486	83	0
	10	0,1251	0,1248	0,9922	0,1257	7,9530	1,4457		50
	20	0.1280	0,1276	0,9918	0,1287	7,7704	1,4428		40
	30	0,1309	0,1305	0,9914	0,1317	7,5958	1,4399		30
	40	0,1338	0,1334	0,9911	0,1346	7,4287	1,4370		20
	50	0,1367	0,1363	0,9907	0,1376	7,2687	1,4341		10
			29	4	29	1533			
8	0	0,1396	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	1,4312	82	0
	10	0,1425	0,1421	0,9899	0,1435	6,9682	1,4283		50
	20	0,1454	0,1449	0,9894	0,1465	6,8269	1,4254		40
	30	0,1484	0,1478	0,9890	0,1495	6,6912	1,4224		30
	40	0,1526	0,1507	0,9886	0,1524	6,5606	1,4195		20
	50	0,1542	0,1536	0,9881	0,1554	6,4348	1,4166		10
			28	4	30	1210			
9	0	0,1571	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	1,4137	81	0
	10	0,1600	0,1593	0,9872	0,1614	6,1970	1,4108		50
	20	0,1629	0,1622	0,9868	0,1644	6,0844	1,4079		40
	30	0,1658	0,1650	0,9863	0,1673	5,9758	1,4050		30
	40	0,1687	0,1679	0,9858	0,1703	5,8708	1,4021		20
	50	0,1716	0,1708	0,9853	0,1733	5,7694	1,3992		10
			28	5	30	981			
10	0	0,1745	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	1,3963	80	0
	10	0,1774	0,1765	0,9843	0,1793	5,5764	1,3934		50
	20	0,1804	0,1794	0,9838	0,1823	5,4845	1,3904		40
	30	0,1833	0,1822	0,9833	0,1853	5,3955	1,3875		30
	40	0,1862	0,1851	0,9827	0,1883	5,3093	1,3846		20
	50	0,1891	0,1880	0,9822	0,1914	5,2257	1,3817		10
			28	6	30	811			
11	0	0,1920	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	1,3788	79	0
	10	0,1949	0,1937	0,9811	0,1974	5,0658	1,3759		50
	20	0,1978	0,1965	0,9805	0,2004	4,9894	1,3730		40
	30	0,2007	0,1994	0,9799	0,2035	4,9152	1,3701		30
	40	0,2036	0,2022	0,9793	0,2065	4,8430	1,3672		20
	50	0,2065	0,2051	0,9787	0,2095	4,7729	1,3643		10
			28	6	31	683			
12	0	0,2094	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	1,3614	78	0
	10	0,2123	0,2108	0,9775	0,2156	4,6382	1,3584		50
	20	0,2153	0,2136	0,9769	0,2186	4,5736	1,3555		40
	30	0,2182	0,2164	0,9763	0,2217	4,5107	1,3526		30
	40	0,2211	0,2193	0,9757	0,2247	4,4494	1,3497		20
	50	0,2240	0,2221	0,9750	0,2278	4,3897	1,3468		10
			28	6	31	582			
13	0	0,2269	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	1,3439	77	0
	10	0,2298	0,2278	0,9737	0,2339	4,2747	1,3410		50
	20	0,2327	0,2306	0,9730	0,2370	4,2193	1,3381		40
	30	0,2356	0,2334	0,9724	0,2401	4,1653	1,3352		30
	40	0,2385	0,2363	0,9717	0,2432	4,1126	1,3323		20
	50	0,2414	0,2391	0,9710	0,2462	4,0611	1,3294		10
			28	7	31	503			

Grad.	Min.							Grad.	Min.
ÁNGULO		ARCO	COSENO	SENO	COTANG.	TANG.	ARCO	ÁNGULO	
ang.=0°1′		0°5′	135°	180°	225°	270°	315°	360°	
arc.=0,0003		0,0015	2,3562	3,1416	3,9270	4,7124	5,4978	6,2832	

ÁNGULO Grad.	Min.	ARCO	SENO	COSENO	TANG.	COTANG.	ARCO	ÁNGULO Grad.	Min.
14	0	0,2443	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	1,3264	76	0
	10	0,2473	0,2447	0,9696	0,2524	3,9617	1,3235		50
	20	0,2502	0,2476	0,9689	0,2555	3,9136	1,3206		40
	30	0,2531	0,2504	0,9681	0,2586	3,8667	1,3177		30
	40	0,2560	0,2532	0,9674	0,2617	3,8208	1,3148		20
	50	0,2589	0,2560	0,9667	0,2648	3,7760	1,3119		10
			28	7	31	439			
15	0	0,2618	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	1,3090	75	0
	10	0,2647	0,2616	0,9652	0,2711	3,6891	1,3061		50
	20	0,2667	0,2644	0,9644	0,2742	3,6470	1,3032		40
	30	0,2705	0,2672	0,9636	0,2773	3,6059	1,3003		30
	40	0,2734	0,2700	0,9628	0,2805	3,5656	1,2974		20
	50	0,2763	0,2728	0,9621	0,2836	3,5261	1,2945		10
			28	8	31	387			
16	0	0,2793	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	1,2915	74	0
	10	0,2822	0,2784	0,9605	0,2899	3,4495	1,2886		50
	20	0,2851	0,2812	0,9596	0,2931	3,4124	1,2857		40
	30	0,2880	0,2840	0,9588	0,2962	3,3759	1,2828		30
	40	0,2909	0,2868	0,9580	0,2994	3,3402	1,2799		20
	50	0,2938	0 2896	0,9572	0,3026	3,3052	1,2770		10
			28	9	31	343			
17	0	0,2967	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	1,2741	73	0
	10	0,2996	0,2952	0,9555	0,3089	3,2371	1,2712		50
	20	0,3025	0,2979	0,9546	0,3121	3,2041	1,2683		40
	30	0,3054	0,3007	0,9537	0,3153	3,1716	1,2654		30
	40	0,3083	0,3035	0,9528	0,3185	3,1397	1,2625		20
	50	0,3113	0,3062	0,9520	0,3217	3,1084	1,2595		10
			28	9	32	307			
18	0	0,3142	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	1,2566	72	0
	10	0,3171	0,3118	0,9502	0,3281	3,0475	1,2537		50
	20	0,3200	0,3145	0,9492	0,3314	3,0178	1,2508		40
	30	0,3229	0,3173	0,9483	0,3346	2,9887	1,2479		30
	40	0,3258	0,3201	0,9474	0,3378	2,9600	1,2450		20
	50	0,3287	0,3228	0,9465	0,3411	2,9319	1,2421		10
			27	10	32	277			
19	0	0,3316	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	1,2392	71	0
	10	0,3345	0,3283	0,9446	0,3476	2,8770	1,2363		50
	20	0,3374	0,3311	0,9436	0,3508	2,8502	1,2334		40
	30	0,3403	0,3338	0,9426	0,3541	2,8239	1,2305		30
	40	0,3432	0,3365	0,9417	0,3574	2,7980	1,2275		20
	50	0,3462	0,3393	0,9407	0,3607	2,7725	1,2246		10
			27	10	33	250			
20	0	0,3491	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	1,2217	70	0
	10	0,3520	0,3448	0,9387	0,3673	2,7228	1,2188		50
	20	0,3549	0 3475	0,9377	0,3706	2,6985	1,2159		40
	30	0,3578	0,3502	0,9367	0,3739	2,6746	1,2130		30
	40	0,3607	0,3529	0,9356	0,3772	2,6511	1,2101		20
	50	0,3636	0,3557	0,9346	0,3805	2,6279	1,2072		10
			27	10	34	228			
21	0	0,3665	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	1,2043	69	0
	10	0,3694	0,3611	0,9325	0,3872	2,5826	1,2014		50
	20	0,3723	0,3638	0,9315	0,3906	2,5605	1,1985		40
	30	0,3752	0,3665	0,9304	0,3939	2,5386	1,1955		30
	40	0,3782	0,3692	0,9293	0,3973	2,5172	1,1926		20
	50	0,3811	0,3719	0,9283	0,4006	2,4960	1,1897		10
			27	11	34	209			

Grad.	Min.	ÁNGULO	ARCO	COSENO	SENO	COTANG.	TANG	ARCO	ÁNGULO Grad.	Min.
		ang.=0°1′	0°5′	135°	180°	225°	270°	315°	360°	
		arc.=0,0003	0,0015	2,3562	3,1416	3,9270	4,7124	5,4978	6,2832	

ÁNGULO Grad.	Min.	ARCO	SENO	COSENO	TANG.	COTANG.	ARCO	ÁNGULO Grad.	Min.
22	0	0,3840	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	1,1868	68	0
	10	0,3869	0,3773	0,9261	0,4074	2,4545	1,1839		50
	20	0,3898	0,3800	0,9250	0,4108	2,4342	1,1810		40
	30	0,3927	0,3827	0,9239	0,4142	2,4142	1,1781		30
	40	0,3956	0,3854	0,9228	0,4176	2,3945	1,1752		20
	50	0,3985	0,3881	0,9216	0,4210	2,3750	1,1723		10
			27	11	35	191			
23	0	0,4014	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	1,1694	67	0
	10	0,4043	0,3934	0,9194	0,4279	2,3369	1,1664		50
	20	0,4072	0,3961	0,9182	0,4314	2,3183	1,1636		40
	30	0,4102	0,3987	0,9171	0,4348	2,2998	1,1606		30
	40	0,4131	0,4014	0,9159	0,4383	2,2817	1,1577		20
	50	0,4160	0,4041	0,9147	0,4417	2,2637	1,1548		10
			26	12	35	177			
24	0	0,4189	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	1,1519	66	0
	10	0,4218	0,4094	0,9124	0,4487	2,2286	1,1490		50
	20	0,4247	0,4120	0,9112	0,4522	2,2113	1,1461		40
	30	0,4276	0,4147	0,9100	0,4557	2,1943	1,1432		30
	40	0,4305	0,4173	0,9088	0,4592	2,1775	1,1403		20
	50	0,4334	0,4200	0,9075	0,4628	2,1609	1,1374		10
			26	12	35	164			
25	0	0,4363	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	1,1345	65	0
	10	0,4392	0,4253	0,9051	0,4699	2,1283	1,1316		50
	20	0,4421	0,4279	0,9038	0,4734	2,1123	1,1286		40
	30	0,4451	0,4305	0,9026	0,4770	2,0965	1,1257		30
	40	0,4480	0,4331	0,9013	0,4806	2,0809	1,1228		20
	50	0,4509	0,4358	0,9001	0,4841	2,0655	1,1199		10
			26	13	36	152			
26	0	0,4538	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	1,1170	64	0
	10	0,4567	0,4410	0,8975	0,4913	2,0353	1,1141		50
	20	0,4596	0,4436	0,8962	0,4950	2,0204	1,1112		40
	30	0,4625	0,4462	0,8949	0,4986	2,0057	1,1082		30
	40	0,4654	0,4488	0,8936	0,5022	1,9912	1,1054		20
	50	0,4683	0,4514	0,8923	0,5059	1,9768	1,1025		10
			26	13	36	142			
27	0	0,4712	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	1,0996	63	0
	10	0,4741	0,4566	0,8897	0,5132	1,9486	1,0966		50
	20	0,4771	0,4592	0,8884	0,5169	1,9347	1,0937		40
	30	0,4800	0,4617	0,8870	0,5206	1,9210	1,0908		30
	40	0,4829	0,4643	0,8857	0,5243	1,9074	1,0879		20
	50	0,4858	0,4669	0,8843	0,5280	1,8940	1,0850		10
			26	14	37	133			
28	0	0,4887	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	1,0821	62	0
	10	0,4916	0,4720	0,8816	0,5354	1,8676	1,0792		50
	20	0,4945	0,4746	0,8802	0,5392	1,8546	1,0763		40
	30	0,4974	0,4772	0,8788	0,5430	1,8418	1,0734		30
	40	0,5003	0,4797	0,8774	0,5467	1,8291	1,0705		20
	50	0,5032	0,4823	0,8760	0,5505	1,8165	1,0676		10
			25	14	38	125			
29	0	0,5061	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	1,0647	61	0
	10	0,5091	0,4874	0,8732	0,5581	1,7917	1,0617		50
	20	0,5120	0,4899	0,8718	0,5619	1,7796	1,0588		40
	30	0,5149	0,4924	0,8704	0,5658	1,7675	1,0559		30
	40	0,5178	0,4950	0,8689	0,5696	1,7556	1,0530		20
	50	0,5207	0,4975	0,8675	0,5735	1,7437	1,0501		10
			25	15	39	116			

Grad.	Min.	ÁNGULO	ARCO	COSENO	SENO	COTANG.	TANG.	ARCO	ÁNGULO Grad.	Min.
ang.=0°1′		0°5′	135°	180°	225°	270°	315°	360°		
arc.=0,0003		0,0015	2,3562	3,1416	3,9270	4,7124	5,4978	6,2832		

ÁNGULO Grad.	Min.	ARCO	SENO	COSENO	TANG.	COTANG.	ARCO	ÁNGULO Grad.	Min.
30	0	0,5236	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	1,0472	60	0
	10	0,5265	0,5025	0,8646	0,5812	1,7205	1,0443		50
	20	0,5294	0,5050	0,8631	0,5851	1,7090	1,0414		40
	30	0,5323	0,5075	0,8616	0,5890	1,6977	1,0385		30
	40	0,5352	0,5100	0,8601	0,5930	1,6864	1,0356		20
	50	0,5381	0,5125	0,8587	0,5969	1,6753	1,0326		10
			25	15	40	110			
31	0	0,5411	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	1,0297	59	0
	10	0,5440	0,5175	0,8557	0,6048	1,6534	1,0268		50
	20	0,5469	0,5200	0,8542	0,6088	1,6426	1,0239		40
	30	0,5498	0,5225	0,8526	0,6128	1,6319	1,0210		30
	40	0,5527	0,5250	0,8511	0,6168	1,6212	1,0181		20
	50	0,5566	0,5275	0,8496	0,6208	1,6107	1,0152		10
			25	16	41	104			
32	0	0,5585	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	1,0123	58	0
	10	0,5614	0,5324	0,8465	0,6289	1,5900	1,0094		50
	20	0,5643	0,5348	0,8450	0,6330	1,5798	1,0065		40
	30	0,5672	0,5373	0,8434	0,6371	1,5697	1,0036		30
	40	0,5701	0,5398	0,8418	0,6412	1,5597	1,0007		20
	50	0,5730	0,5422	0,8403	0,6453	1,5497	0,9977		10
			24	16	41	98			
33	0	0,5760	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	0,9948	57	0
	10	0,5789	0,5471	0,8371	0,6536	1,5301	0,9919		50
	20	0,5818	0,5495	0,8355	0,6577	1,5203	0,9890		40
	30	0,5847	0,5519	0,8339	0,6619	1,5108	0,9861		30
	40	0,5876	0,5544	0,8323	0,6661	1,5013	0,9832		20
	50	0,5905	0,5568	0,8307	0,6703	1,4919	0,9803		10
			24	17	42	93			
34	0	0,5934	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	0,9774	56	0
	10	0,5963	0,5616	0,8274	0,6778	1,4733	0,9745		50
	20	0,5992	0,5640	0,8258	0,6830	1,4641	0,9716		40
	30	0,6021	0,5664	0,8241	0,6873	1,4550	0,9687		30
	40	0,6050	0,5688	0,8225	0,6916	1,4460	0,9657		20
	50	0,6080	0,5712	0,8208	0,6959	1,4370	0,9628		10
			24	17	43	89			
35	0	0,6109	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	0,9599	55	0
	10	0,6138	0,5760	0,8175	0,7046	1,4193	0,9570		50
	20	0,6167	0,5783	0,8158	0,7089	1,4106	0,9541		40
	30	0,6196	0,5807	0,8141	0,7133	1,4019	0,9512		30
	40	0,6225	0,5831	0,8124	0,7177	1,3934	0,9483		20
	50	0,6254	0,5854	0,8107	0,7221	1,3848	0,9454		10
			24	17	44	84			
36	0	0,6283	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	0,9425	54	0
	10	0,6312	0,5901	0,8073	0,7310	1,3680	0,9396		50
	20	0,6341	0,5925	0,8056	0,7355	1,3597	0,9367		40
	30	0,6370	0,5948	0,8039	0,7400	1,3514	0,9338		30
	40	0,6400	0,5972	0,8021	0,7445	1,3432	0,9308		20
	50	0,6429	0,5995	0,8004	0,7490	1,3351	0,9279		10
			23	18	46	81			
37	0	0,6458	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	0,9250	53	0
	10	0,6487	0,6041	0,7969	0,7581	1,3190	0,9221		50
	20	0,6516	0,6065	0,7951	0,7627	1,3111	0,9192		40
	30	0,6545	0,6088	0,7934	0,7673	1,3032	0,9163		30
	40	0,6574	0,6111	0,7916	0,7720	1,2954	0,9134		20
	50	0,6603	0,6134	0,7898	0,7766	1,2876	0,9105		10
			23	18	47	77			

Grad.	Min.							Grad.	Min.
ÁNGULO		ARCO	COSENO	SENO	COTANG.	TANG.	ARCO	ÁNGULO	
ang.=0°1′		0°5′	135°	180°	225°	270°	315°	360°	
arc.=0,0003		0,0015	2,3562	3,1416	3,9270	4,7124	5,4978	6,2832	

ÁNGULO Grad.	Min.	ARCO	SENO	COSENO	TANG.	COTANG.	ARCO	ÁNGULO Grad.	Min.
38	0	0,6632	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	0,9076	52	
	10	0,6661	0,6180	0,7862	0,7860	1,2723	0,9047		50
	20	0,6690	0,6202	0,7844	0,7907	1,2647	0,9018		40
	30	0,6720	0,6225	0,7826	0,7954	1,2572	0,8988		30
	40	0,6749	0,6248	0,7808	0,8002	1,2497	0,8959		20
	50	0,6778	0,6271	0,7790	0,8050	1,2423	0,8930		10
			23	19	48	74			
39	0	0,6807	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	0,8901	51	0
	10	0,6836	0,6316	0,7753	0,8146	1,2276	0,8872		50
	20	0,6865	0,6338	0,7735	0,8195	1,2203	0,8843		40
	30	0,6894	0,6361	0,7716	0,8243	1,2131	0,8814		30
	40	0,6923	0,6383	0,7698	0,8292	1,2059	0,8785		20
	50	0,6952	0,6406	0,7679	0,8342	1,1988	0,8756		10
			22	19	49	70			
40	0	0,6981	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	0,8727	50	0
	10	0,7010	0,6450	0,7642	0,8441	1,1847	0,8698		50
	20	0,7039	0,6472	0,7623	0,8491	1,1778	0,8668		40
	30	0,7069	0,6494	0,7604	0,8541	1,1708	0,8639		30
	40	0,7098	0,6517	0,7585	0,8591	1,1640	0,8610		20
	50	0,7127	0,6539	0,7566	0,8642	1,1571	0,8581		10
			22	19	51	67			
41	0	0,7156	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	0,8552	49	0
	10	0,7185	0,6583	0,7528	0,8744	1,1436	0,8523		50
	20	0,7214	0,6604	0,7509	0,8796	1,1369	0,8494		40
	30	0,7243	0,6626	0,7490	0,8847	1,1303	0,8465		30
	40	0,7272	0,6648	0,7470	0,8899	1,1237	0,8436		20
	50	0,7301	0,6670	0,7451	0,8952	1,1171	0,8407		10
			21	20	52	65			
42	0	0,7330	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	0,8378	48	0
	10	0,7359	0,6713	0,7412	0,9057	1,1041	0,8348		50
	20	0,7389	0,6734	0,7392	0,9110	1,0977	0,8319		40
	30	0,7418	0,6756	0,7373	0,9163	1,0913	0,8290		30
	40	0,7447	0,6777	0,7353	0,9217	1,0850	0,8261		20
	50	0,7476	0,6799	0,7333	0,9271	1,0786	0,8232		10
			21	20	54	62			
43	0	0,7505	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	0,8203	47	0
	10	0,7534	0,6841	0,7294	0,9380	1,0661	0,8174		50
	20	0,7563	0,6862	0,7274	0,9435	1,0599	0,8145		40
	30	0,7592	0,6884	0,7254	0,9490	1,0538	0,8116		30
	40	0,7621	0,6905	0,7234	0,9545	1,0477	0,8087		20
	50	0,7650	0,6926	0,7214	0,9601	1,0416	0,8058		10
			21	21	56	61			
44	0	0,7679	0,6947	0,7193	0,9657	1,0335	0,8029	46	0
	10	0,7709	0,6967	0,7173	0,9713	1,0295	0,7999		50
	20	0,7738	0,6988	0,7153	0,9770	1,0235	0,7970		40
	30	0,7767	0,7009	0,7133	0,9827	1,0176	0,7941		30
	40	0,7795	0,7030	0,7112	0,9884	1,0117	0,7912		20
	50	0,7824	0,7050	0,7092	0,9942	1,0058	0,7883		10
			21	21	58	58			
45	0	0,7854	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	0,7854	45	0
Grad.	Min.							Grad.	Min.

ÁNGULO	ARCO	COSENO	SENO	COTANG.	TANG.	ARCO	ÁNGULO
ang.=0°1′	0°5′	135°	180°	225°	270°	315°	360°
arc.=0,0003	0,0015	2,3562	3,1416	3,8270	4,7124	5,4978	6,2832

TABLA DE LOS LOGARITMOS ORDINARIOS DE LOS NÚMEROS 1 Á 100

NÚMEROS	LOGARITMOS	NÚMEROS	LOGARITMOS	NÚMEROS	LOGARITMOS	NÚMEROS	LOGARITMOS
1	0000000	26	4149733	51	7075702	76	8808136
2	3010300	27	4313638	52	7160033	77	8864907
3	4771213	28	4471580	53	7242759	78	8920946
4	6020600	29	4623980	54	7323938	79	8976271
5	6989700	30	4771213	55	7403627	80	9030900
6	7781513	31	4913617	56	7481880	81	9084850
7	8450980	32	5051500	57	7558749	82	9138139
8	9030900	33	5185139	58	7634280	83	9190781
9	9542425	34	5314789	59	7708520	84	9242793
10	0000000	35	5440680	60	7881513	85	9294189
11	0413927	36	5563025	61	7853298	86	9344985
12	0791812	37	5682017	62	7923917	87	9395193
13	1139434	38	5797836	63	7993405	88	9444827
14	1461280	39	5910646	64	8061800	89	9493900
15	1760913	40	6020600	65	8129134	90	9542425
16	2041200	41	6127839	66	8195439	91	9590414
17	2304489	42	6232493	67	8260748	92	9637878
18	2552725	43	6334685	68	8325089	93	9684829
19	2787536	44	6434527	69	8388491	94	9731279
20	3010300	45	6532125	70	8450980	95	9777236
21	3222193	46	6627578	71	8512583	96	9822712
22	3424227	47	6720979	72	8573325	97	9867717
23	3617278	48	6812412	73	8633229	98	9912261
24	3802112	49	6901961	74	8692317	99	9956352
25	3979400	50	6989700	75	8750613	100	0000000

TABLA DE LOS LOGARITMOS NATURALES DE 1 Á 100

NÚMEROS	LOG. NAT.	NÚMEROS	LOG. NAT.	NÚMEROS	LOG. NAT.
1	0,0000000000	36	3,5935186385	71	4,2626798770
2	0,6931471806	37	3,6109179126	72	4,2766661190
3	1,0986122887	38	3,6375861597	73	4,2904594411
4	1,3862943611	39	3,6635616461	74	4,3040650932
5	1,6094379124	40	3,6888794541	75	4,3174881135
6	1,7917594692	41	3,7135720667	76	4,3307333405
7	1,9459101491	42	3,7376696183	77	4,3438054219
8	2,0794415417	43	3,7612001157	78	4,3567088267
9	2,1972245773	44	3,7941896339	79	4,3694478525
10	2,3025850930	45	3,8066624898	80	4,3820266547
11	2,3978952728	46	3,8286413965	81	4,3944491547
12	2,4849066498	47	3,8501476017	82	4,4067192473
13	2,5649493575	48	3,8712010109	83	4,4188406078
14	2,6390573296	49	3,8918202981	84	4,4308167988
15	2,7080502011	50	3,9120230054	85	4,4426512565
16	2,7725887222	51	3,9318256327	86	4,4543472963
17	2,8332133441	52	3,9512437186	87	4,4659081187
18	2,8903717579	53	3,9702919136	88	4,4773368145
19	2,9544389792	54	3,9889840466	89	4,4886363697
20	2,9957322736	55	4,0073331852	90	4,4998096703
21	3,0445224377	56	4,0253516907	91	4,5108595065
22	3,0910424534	57	4,0430512678	92	4,5217885770
23	3,1354942159	58	4,0604430105	93	4,5325994932
24	3,1780538303	59	4,0775374439	94	4,5432947823
25	3,2188758249	60	4,0943445622	95	4,5538768916
26	3,2580965380	61	4,1108738642	96	4,5643481915
27	3,2958368660	62	4,1271343850	97	4,5747109785
28	3,3322045102	63	4,1431347264	98	4,5849674787
29	3,3672958300	64	4,1588830834	99	4,5951198501
30	3,4011973817	65	4,1743872699	100	4,6051701860
31	3,4339872045	66	4,1896547420		
32	3,4657359028	67	4,2046926194		
33	3,4965075615	68	4,2195077052		
34	3,5263605246	69	4,2341065046		
35	3,5553480615	70	4,2484952520		

TABLA PRIMERA DE NÚMEROS DEL CONSTRUCTOR

n	$\frac{1}{n}$	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$	$\sqrt[4]{n}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$
0,30	3,333	0,090	0,027	0,548	1,825	0,669	1,495	0,740	1,351
0,375	2,667	0,141	0,053	0,612	1,634	0,721	1,387	0,783	1,277
0,60	1,667	0,360	0,216	0,775	1,291	0,843	1,186	0,880	1,136
0,625	1,600	0,391	0,244	0,791	1,265	0,855	1,170	0,889	1,125
0,70	1,429	0,490	0,343	0,837	1,195	0,888	1,126	0,915	1,093
0,75	1,333	0,563	0,422	0,866	1,155	0,909	1,100	0,931	1,074
0,875	1,143	0,766	0,670	0,935	1,070	0,956	1,047	0,967	1,034
0,90	1,111	0,810	0,729	0,949	1,054	0,965	1,036	0,987	1,013
1,10	0,909	1,210	1,331	1,049	0,953	1,032	0,969	1,016	0,976
1,2	0,833	1,440	1,728	1,095	0,913	1,063	0,941	1,047	0,955
1,25	0,800	1,563	1,953	1,118	0,894	1,077	0,928	1,054	0,946
1,50	0,667	2,250	3,375	1,225	0,816	1,145	0,874	1,105	0,904
1,75	0,571	3,063	5,273	1,323	0,756	1,205	0,830	1,149	0,869
2,0	0,500	4,0	8,0	1,414	0,707	1,260	0,794	1,189	0,841
2,25	0,444	5,063	11,391	1,500	0,667	1,310	0,763	1,225	0,816
2,50	0,400	6,250	15,625	1,581	0,632	1,357	0,737	1,257	0,795
2,75	0,364	7,563	20,797	1,658	0,603	1,401	0,714	1,286	0,777
3,0	0,333	9,0	27,0	1,732	0,577	1,442	0,693	1,318	0,759
3,25	0,308	10,563	34,328	1,803	0,555	1,481	0,675	1,342	0,745
3,50	0,286	12,250	42,875	1,871	0,535	1,518	0,659	1,368	0,731
3,75	0,267	14,063	52,734	1,936	0,516	1,554	0,644	1,392	0,719
4,0	0,250	16,0	64,0	2,0	0,500	1,587	0,630	1,414	0,707
4,5	0,222	20,250	91,125	2,121	0,471	1,651	0,604	1,457	0,687
5,0	0,200	25,0	125,0	2,236	0,447	1,710	0,585	1,495	0,669
5,5	0,182	30,250	166,375	2,345	0,426	1,754	0,567	1,531	0,653
6,0	0,167	36,0	216,0	2,450	0,408	1,817	0,551	1,565	0,639
6,5	0,154	42,25	274,625	2,550	0,392	1,866	0,536	1,597	0,626
7,0	0,143	49,0	243,0	2,646	0,378	1,913	0,523	1,627	0,615
7,5	0,133	56,250	421,875	2,739	0,365	1,957	0,510	1,655	0,604
8,0	0,125	64,0	512,0	2,828	0,354	2,0	0,500	1,682	0,595
8,5	0,118	72,250	614,125	2,915	0,343	2,041	0,490	1,708	0,586
9,0	0,111	81,0	729,0	3,000	0,333	2,080	0,481	1,732	0,577
9,5	0,105	90,250	857,375	3,082	0,324	2,118	0,472	1,756	0,570
10	0,100	100,0	1000,0	3,162	0,317	2,154	0,464	1,778	0,562
11	0,091	121,0	1331,0	3,317	0,302	2,224	0,446	1,821	0,549
12	0,083	144	1728	3,464	0,289	2,289	0,436	1,860	0,537
13	0,077	169	2197	3,606	0,277	2,351	0,425	1,899	0,527
14	0,071	196	2744	3,742	0,267	2,410	0,415	1,934	0,517
15	0,067	225	3375	3,873	0,258	2,466	0,405	1,968	0,508
16	0,063	256	4096	4,000	0,250	2,520	0,397	2,000	0,500
17	0,059	289	4913	4,123	0,243	2,571	0,389	2,031	0,492
18	0,056	324	5832	4,243	0,236	2,621	0,381	2,060	0,486
19	0,053	361	6859	4,359	0,229	2,668	0,375	2,088	0,479
20	0,050	400	8000	4,472	0,224	2,714	0,368	2,115	0,473
50	0,020	2500	125000	7,071	0,141	3,684	0,271	2,659	0,376
100	0,010	10000	1000000	10,0	0,10	4,642	0,215	3,162	0,316
1000	0,001	1000000	1000000000	31,623	0,032	10,0	0,100	5,627	0,178
$\pi = 3,142$	0,318	9,870	31,006	1,772	0,564	1,465	0,683	1,331	0,751
$2\pi = 6,283$	0,159	39,478	248,050	2,507	0,409	1,845	0,542	1,583	0,632
$\frac{\pi}{2} = 1,571$	0,637	2,467	3,878	1,253	0,798	1,162	0,860	1,120	0,893

n	$\frac{1}{n}$	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$	$\sqrt[4]{n}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$
$\frac{\pi}{3}=$ 1,047	0,955	1,097	1,148	1,023	0,977	1,015	0,985	1,012	0,989
$\frac{4}{3}\pi=$ 4,186	0,239	17,546	73,496	2,047	0,501	1,612	0,620	1,431	0,699
$\frac{\pi}{4}=$ 0,785	1,274	0,617	0,484	0,886	1,128	0,923	1,084	0,941	1,062
$\frac{\pi}{6}=$ 0,584	1,910	0,274	0,144	0,724	1,382	0,806	1,241	0,851	1,176
$\pi^2=$ 9,870	0,101	97,409	961,390	3,142	0,318	2,145	0,466	1,772	0,564
$\pi^3=$31,006	0,032	961,390	29809,910	5,568	1,796	3,142	0,318	2,360	0,424
$\frac{\pi}{32}=$ 0,098	10,186	0,0096	0,001	0,313	3,192	0,461	2,168	0,560	1,787
$\frac{3\pi}{16}=$ 0,589	1,698	0,347	0,204	0,768	1,303	0,838	1,193	0,876	1,142
$g=$ 9,808	0,102	96,197	943,610	3,132	0,319	2,141	0,467	1,770	0,565
$2g=$19,616	0,051	384,888	7547,996	4,429	0,226	2,697	0,371	2,105	0,475

TABLA SEGUNDA DE NÚMEROS DEL CONSTRUCTOR

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
0,01	0,10000	0,21544	0,26	0,50990	0,63825
0,02	0,14142	0,27144	0,27	0,51962	0,64633
0,03	0,17321	0,31072	0,28	0,52915	0,65421
0,04	0,20000	0,24200	0,29	0,53852	0,66191
0,05	0,22361	0,36840	0,30	0,54772	0,66943
0,06	0,24495	0,39149	0,31	0,55678	0,67679
0,07	0,26458	0,41213	0,32	0,56569	0,68399
0,08	0,28284	0,43089	0,33	0,57446	0,69104
0,09	0,30000	0,44814	0,34	0,58310	0,69795
0,10	0,31623	0,46416	0,35	0,59161	0,70473
0,11	0,33166	0,47914	0,36	0,60000	0,71138
0,12	0,34641	0,49324	0,37	0,60828	0,71791
0,13	0,36056	0,50658	0,38	0,61644	0,72432
0,14	0,37417	0,51925	0,39	0,62450	0,73061
0,15	0,38730	0,53133	0,40	0,63246	0,73681
0,16	0,40000	0,54288	0,41	0,64031	0,74290
0,17	0,41231	0,55397	0,42	0,64807	0,74889
0,18	0,42426	0,56462	0,43	0,65574	0,75478
0,19	0,43589	0,57489	0,44	0,66332	0,76059
0,20	0,44721	0,58480	0,45	0,67082	0,76631
0,21	0,45826	0,59439	0,46	0,67823	0,77194
0,22	0,46904	0,60368	0,47	0,68557	0,77750
0,23	0,47958	0,61269	0,48	0,69282	0,78297
0,24	0,48990	0,62145	0,49	0,70000	0,78837
0,25	0,50000	0,62996	0,50	0,70711	0,79370

$sen\ 30^\circ = cos\ 60^\circ = \frac{1}{2}$;

$sen\ 75^\circ = cos\ 15^\circ = 0{,}9659$;

$cos\ 75^\circ = sen\ 15^\circ = 0{,}2558$;

$cos\ 30^\circ = sen\ 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}8660$;

$tg\ 30^\circ = cotg\ 60^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0{,}5773$;

$cotg\ 30^\circ = tg\ 60^\circ = \sqrt{3} = 1{,}7321$;

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
0,51	0,71414	0,79896	0,76	0,87178	0,91258
0,52	0,72111	0,80415	0,77	0,87750	0,91657
0,53	0,72801	0,80927	0,78	0,88318	0,92052
0,54	0,73485	0,81433	0,79	0,88882	0,92443
0,55	0,74162	0,81932	0,80	0,89443	0,92832
0,56	0,74833	0,82426	0,81	0,90000	0,93217
0,57	0,75498	0,82913	0,82	0,90554	0,93599
0,58	0,76158	0,83396	0,83	0,91104	0,93978
0,59	0,76811	0,83872	0,84	0,91652	0,94354
0,60	0,77460	0,84343	0,85	0,92195	0,94727
0,61	0,78102	0,84809	0,86	0,92736	0,95097
0,62	0,78740	0,85270	0,87	0,93274	0,95464
0,63	0,79373	0,85726	0,88	0,93808	0,95828
0,64	0,80000	0,86177	0,89	0,94340	0,96190
0,65	0,80623	0,86624	0,90	0,94868	0,96549
0,66	0,81240	0,87066	0,91	0,95394	0,96905
0,67	0,81854	0,87503	0,92	0,95917	0,97259
0,68	0,82462	0,87937	0,93	0,96437	0,97610
0,69	0,83066	0,88366	0,94	0,96954	0,97959
0,70	0,83666	0,88790	0,95	0,97468	0,98305
0,71	0,84261	0,89211	0,96	0,97980	0,98648
0,72	0,84853	0,89628	0,97	0,98489	0,98990
0,73	0,85440	0,90041	0,98	0,98995	0,99329
0,74	0,86023	0,90450	0,99	0,99499	0,99666
0,75	0,86603	0,90856	1,00	1,00000	1,00000

$$n = \frac{60 \cdot 75 \cdot 1000}{2\pi} = 716198; \qquad \frac{1}{n} = 0{,}000001396; \qquad \log. n = 5{,}8550322;$$

$$\sqrt{n} = 846{,}285; \qquad \sqrt{n} = 89{,}470; \qquad \sqrt[4]{n} = 29{,}091; \qquad \log. \pi = 0{,}4971499;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}001182; \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0{,}001176; \qquad \frac{1}{\sqrt[4]{n}} = 0{,}034376; \qquad \log. g = 0{,}9915805.$$

ÍNDICE DE MATERIAS.

PRIMERA PARTE

Resistencia de materiales.

§ 1. Observaciones preliminares. 5
2. Coeficientes de resistencia. 6
3. Resistencia á la traccion y á la compresion. 7
4. Sólidos de igual resistencia á la estension y á la compresion.. 8
5. Resistencia trasversal de resbalamiento ó cizalle. 8
6. Resistencia á la flexion. 9
7. Tablas de secciones. 14
8. Valor de la tension. 22
9. Secciones de igual resistencia. . . . 22
10. Sólidos de igual resistencia á la flexion. . 23
11. Resistencia al resbalamiento en la capa neutra. 28
12. Vigas de carga comun. 29
13. Resistencia á la torsion. 29
14. Momento de inercia polar y módulo de seccion. 30
15. Sólidos de igual resistencia á la torsion. . 31
16. Resistencia de piezas cargadas en pié.. . 34
17. Formas de igual resistencia para las piezas cargadas en pié. 36
18. Resistencia compuesta. 36
19. Resistencia de las envolturas. 40
20. Cálculo de los resortes. 44

SEGUNDA PARTE

Nociones de grafostática.

§ 21. Consideraciones preliminares. . . . 54
22. Multiplicacion de las líneas. 55
23. Division de las rectas. 56
24. Multiplicacion y division combinadas. . 57
25. Superficie del triángulo. 57
26. Superficie de los cuadriláteros. . . . 57
27. Superficie de los polígonos. 58
28. Potencias de las líneas. 58
29. Potencias de las funciones trigonométricas. 60
30. Estraccion de raices. 60
31. Adicion y sustraccion de fuerzas.. . . 60
32. Resultante de un sistema de fuerzas. . . 61
33. Fuerzas que obran sobre un sistema material en un plano.—Polígono funicular. . 61
34. Equilibrio de las fuerzas esteriores en el polígono funicular. 62
35. Equilibrio de las fuerzas interiores en el polígono funicular. 63
36. Resultante de un sistema de fuerzas dispuestas de una manera cualquiera en un plano. 64

37. Condiciones de equilibrio de fuerzas dispuestas de una manera cualquiera en un plano. 65
38. Pares. 65
39. Equilibrio de tres fuerzas paralelas. . . 66
40. Resultante de un número cualquiera de fuerzas paralelas.. 67
41. Descomposicion de fuerzas en dos ó más fuerzas paralelas.. 67
42. Fuerzas paralelas uniformemente repartidas. 69
43. Momentos estáticos de las fuerzas paralelas. 69
44. Composicion y descomposicion de los momentos estáticos.. 70
45. Composicion gráfica de los momentos de torsion y de flexion. 70
46. Determinacion del centro de gravedad por medio del plano de las fuerzas. . . 71
47. Resultante de las acciones del agua en una rueda hidráulica.. 71
48. Planos de las fuerzas en las armazones. . 72
49. Planos de las fuerzas para las vigas armadas. 73
50. Plano de las fuerzas para los cuchillos. . 74
51. Plano de las fuerzas de un cuchillo teniendo en cuenta la presion del viento. . 76
52. Plano de las fuerzas para una pieza enrejada, libre en uno de sus estremos. . 77
53. Observaciones finales. 78

TERCERA PARTE

Construccion de elementos de máquinas.

CONSIDERACIONES PRELIMINARES. 79

CAPÍTULO PRIMERO

Robladuras.

§ 54. Roblones. 80
55. Resistencia de las robladuras. . . . 81
56. Tabla y escala de proporciones para las robladuras de fuerza.. 83
57. Robladuras de fuerza, con disposicion convergente de los roblones. . . . 83
58. Ribeteado ó robladura de las calderas de vapor. 85
59. Tabla relativa á las robladuras de las calderas de vapor. 86
60. Tabla de los pesos de las planchas metálicas. 87
61. Otras formas de ensamble con roblones. . 88

CAPÍTULO II

Birolados y calzados.

§ 62. Birolados y calzados en caliente. . . 90
63. Birolados y calzados en frio.. . . . 91
64. Tabla relativa á las presiones de calzado en los ferro-carriles. 92
65. Cálculo de los anillos ó aros calzados en frio.. 94

CAPÍTULO III

Claveteado.

§ 66. Clavetes de ensamble. 96
67. Ensambles de clavetes trasversales. . . 97
68. Ensambles con clavetes longitudinales. . 98
69. Ensambles de clavetes de altura.. . . 98
70. Ensambles de clavetes en las hélices de los barcos. 99
71. Clavetages descargados.. 99
72. Disposiciones de seguridad para los clavetes. 99

CAPÍTULO IV

Pernos y ensambles de pernos.

§ 73. Principios geométricos de los pernos de tuerca. 101
74. Dimensiones de los filetes en los tornillos de filete triangular. 102
75. Sistema de filetes de Whitworth.. . . 103
76. Sistema de filetes de Sellers.. . . . 104
77. Sistema de filetes métricos. 105
78. Sistemas de Delisle (n.° I), de la sociedad de los ingenieros de Saarbruck y de Delisle (n.° II). 106
79. Nuevos sistemas propuestos.. . . . 106
80. Tuercas, rodajas, cabezas de pernos.. . 108
81. Tabla y escala de proporciones para los pernos. 108
82. Tablas de los pesos de las barras de hierro redondas.. 110
83. Tipos diversos de pernos fijos. . . . 111
84. Llaves de pernos ó de monturas.. . . 111
85. Disposiciones de seguridad para los pernos.. 111
86. Filetes cuadrados y trapezoidales.—Tor-

nillos de presion.—Tornillos ensanchados. 113
87. Ensambles por pernos.—Ensambles con rebordes. 114
88. Ensambles de pernos descargados. . . 116

CAPÍTULO V

Gorrones.

§ 89 Diferentes clases de gorrones. . . . 118
A. GORRONES DE CARGA TRASVERSAL.
90. Cálculo de los gorrones frontales. . . 118
91. Ejemplos y tablas relativas á los gorrones frontales. 121
92. Gorrones intermedios ó de cuello ó garganta. 122
93. Gorrones de horquilla. 123
94. Gorrones de carga en las articulaciones de hojas. 124
95. Semi-gorrones. 124
96. Frotamiento de los gorrones de carga. . 125
97. B. GORRONES DE APOYO, PIVOTES Ó ESPIGONES. 127
98. Frotamiento de un espigon terminado por superficie plana. 130
99. Gorrones de apoyo de garganta ó cuello.. 130
100. Gorrones acanalados. 130
101. Articulaciones de láminas como gorrones de apoyo. 131
102. Ensamble de gorrones. 132

CAPÍTULO VI

Soportes de gorrones.

§ 103. Disposiciones y dimensiones. . . . 133
A. SOPORTES PARA GORRONES DE CARGA.
104. Soporte horizontal. 134
105. Escala de proporciones para los soportes horizontales. 134
106. Diferentes formas de cojinetes. . . . 134
107. Soporte sin chapin.—Gran soporte horizontal. 135
108. Soporte horizontal con cojinete inferior móvil. 135
109. Soporte horizontal articulado. . . . 136
110. Soporte horizontal de tres cojinetes. . 137
111. Soporte de caballete. 137
112. Soportes-repisas. 138
113. Soporte ahorquillado. 138
114. Soporte frontal. 138
115. Soportes de suspension ó sillas.. . . 139
116. Sillas de rótula. 140
117. Disposiciones particulares de soportes de carga. 140
B. SOPORTES DE APOYO.
118. Crapodina de chapin horizontal. . . 142
119. Crapodina con placa de fijacion vertical. 142
120. Crapodina de cabeza móvil. . . . 142
121. Soportes de apoyo con cabeza de madera. 142
122. Soportes acanalados. 143
123. Ejemplos de soportes acanalados. . . 144

CAPÍTULO VII

Sostenes ó armazones de soportes.

§ 124. Generalidades sobre las armazones de soportes. 146
125. Apoyo simple.. 146
126. Armazones de soportes compuestos. . 147
127. Cálculo de las columnas metálicas. . . 149
128. Disposiciones de las columnas metálicas. 153

CAPÍTULO VIII

Ejes.

§ 129. Division de los ejes. 156
A. SECCIONES DE FORMA CIRCULAR.
130. Ejes simples de husos iguales. . . . 156
131. Eje simple de husos desiguales.. . . 157
132. Cálculo grafostático de un eje simple. . 157
133. Determinacion de la resistencia de un eje dado. Diagrama de ensayo. . . . 159
134. Eje cargado en dos puntos de su longitud. 159
135. Aplicacion de la grafostática á los ejes cargados en dos puntos. 160
136. Arbol sometido á dos esfuerzos oblícuos. Eje de vagon. Arbol de grua. . . 161
137. Arbol cargado en un número de pesos igual ó superior á tres. 162
138. Arbol sometido á fuerzas situadas en planos diferentes. 163
B. ARBOLES DE SECCIONES DE FORMAS COMPLEJAS.
139. Seccion anular. 163
140. Seccion en cruz. Tabla ó meseta. . . 164
141. Seccion de estrella. Meseta. . . . 164
142. Arbol de nervaduras terminadas por un reborde. Tabla. 165
143. Trazado de los perfiles de las nervaduras de los árboles. 167
144. Ejes de madera. 167

CAPÍTULO IX

Arboles de trasmision.

§ 145. Cálculo de los árboles cilíndricos. . . 169
146. Aplicacion de los árboles de hierro forjado. 171
147. Arboles de trasmision de las máquinas. 171
148. Cálculo del ángulo de torsion de un árbol. 173
149. Gorrones de rotacion de los árboles. . 174
150. Secciones compuestas.—Arboles de madera. 174
151. Arboles cargados. 175

CAPÍTULO X

Ensambles y acoplamientos de árboles.

§ 152. Division de los acoplamientos. . . . 177
I. ACOPLAMIENTOS FIJOS.
153. Acoplamientos por manguitos. . . . 177
II. ACOPLAMIENTOS MÓVILES.
154. De los diferentes modos de movilidad de los acoplamientos. 179
155. Acoplamientos móviles longitudinal y trasversalmente.. 179
156. Acoplamientos articulados.. . . . 180
III. MANGUITOS DE TRABAZON Y DESTRABAZON.
§ 157. Manguitos de dientes. 182
158. Manguitos de friccion. 183
159. Manguitos de acoplamiento para máquinas motoras. 186

CAPÍTULO XI

Gorrones de palancas.

§ 160. Gorrones de palancas. 188
161. Fijacion de los gorrones de las palancas. 189
162. Eje y cubo de una palanca.. . . . 189
163. Brazo de palanca de seccion rectangular. 189
164. Secciones compuestas de brazos de palancas. 190
165. Tabla para trasformar las secciones rectangulares de las palancas en secciones compuestas.. 191

CAPÍTULO XII

Manivelas.

§ 166. Diferentes especies de manivelas. . . 192
167. Manivelas de hierro forjado. . . . 192
168. Aplicacion de la grafostática al cálculo de una manivela. 192
169. Manubrios de hierro colado. . . . 194
170. Contra-manivela. 194
171. Cálculo grafostático de la contra-manivela.. 194
172. Arboles de un solo codo. 196
173. Arboles de codos múltiples. Arboles de locomotoras. 198
174. Excéntricos. 201
175. Manivelas de mano ó manubrios. . . 202

CAPÍTULO XIII

Palancas compuestas.

§ 176. De las diferentes especies de palancas compuestas. 203
177. Cabezas de balancines.. 203
178. Eje y cubo de balancin. 204
179. Brazos de balancines. 204
180. Balancin de hierro forjado.. . . . 205

CAPÍTULO XIV

Bielas.

§ 181. Elementos de las bielas. 206
182. Cabeza de biela para gorron frontal. . 206
183. Cabezas de bielas para gorrones ahorquillados. 208
184. Cabezas de bielas para gorrones intermedios.. 209
185. Vástagos de bielas de seccion circular. . 211
186. Cuerpo de bielas de seccion rectangular. 213
187. Cuerpo de bielas con nervaduras y aletas. 215
188. Bielas de hierro forjado y de hierro colado 215

CAPÍTULO XV

Traviesas.

§ 189. Diferentes especies de traviesas. . . 217
190. Traviesas de movimiento libre.. . . 217
191. Traviesas con guias articuladas. . . 218
192. Traviesas guiadas por deslizaderas. . . 218
193. Deslizaderas ó resbaladeras. . . . 220

CAPÍTULO XVI

Cables y cadenas.

§ 194. Diversas especies de cables y cadenas. . 222
A. CABLES DE CÁÑAMO.
§ 195. Cables redondos ó cuerdas. . . . 222

196. Peso de los cables de cáñamo. . . . 223
197. Tabla relativa á los cables de cáñamo de tres ramales. 224

B. CABLES METÁLICOS.

198. Cables redondos de alambre de hierro. . 224
199. Cables metálicos planos. 225
200. Peso de los cables metálicos. . . . 225
201. Tabla relativa á los cables metálicos. . 226

C. CADENAS.

202. Cadenas de carga. 226
203. Cálculo de las cadenas de eslabones soldados. 227
204. Cálculo de las cadenas articuladas. . . 228
205. Peso de las cadenas. 230
206. Tabla relativa á las cadenas ordinarias de eslabones soldados. 231
207. Tabla relativa á las cadenas articuladas segun Neustadt.. 232

CAPÍTULO XVII

Ensamble ó union de cables y cadenas.

§ 208. Organos de ensamble para las cadenas fijas y móviles. 233
209. Garfios de cables y cadenas. . . . 234
210. Cajas de cables. Almohadillas ó tampones de cables. 235

CAPÍTULO XVIII

Tambores para correas ó poleas.

§ 211. Clasificacion de las ruedas.. . . . 237
212. Ruedas de friccion cilíndricas y cónicas. 237
213. Ruedas de cuñas. 238
214. Reglas relativas á la disposicion de las poleas. 239
215. Trasmisiones por correas que se guian por sí solas.. 239
216. Trasmisiones por correas con poleas-guias. 240
217. De las correas de trasmision y sus tensiones. 242
218. Cálculo de una correa simple. . . . 243
219. Anchura de correas simples. . . . 243
220. Correas dobles y triples. 244
221. Cadenas de cuña articuladas. . . . 245
222. Trasmisiones por cuerdas ó cables de cáñamo. 246
223. Corona ó llanta de una polea. . . . 247
224. Brazos ó radios de una polea. . . . 248
225. Cubo de una polea. 248
226. Tabla de los pesos de las poleas. . . . 249

CAPÍTULO XIX

Trasmision por cables metálicos.

§ 227. Dispositivo de una trasmision por cables metálicos. 251
228. Tensiones de un cable de trasmision. . 252
229. Tablas relativas á los diámetros de los alambres de cables de trasmision. . 252
230. Tablas relativas á los diámetros de los alambres de cables de trasmision. . 254
231. Flechas de los dos brazos de un cable en una trasmision horizontal. Tabla relativa á estas flechas. 256
232. Trasmision por cable de tension reforzada. 258
233. Trasmision por cables inclinada. . . 260
234. Trazado de las curvas de cables. . . 261
235. Trasmision por cables para corta separacion de poleas. 261
236. Corona ó llanta de una polea de cable. . 262
237. Brazos y cubo de una polea de cable. . 263
238. Poleas-soportes y poleas intermedias. . 264
239. Dimensiones de las poleas-soportes.. . 265
240. Presiones sobre los ejes de las poleas-soportes. 265
241. Pilares de estaciones ó pilones. . . . 266

CAPÍTULO XX

Ruedas dentadas.

A. ENDENTAJE DE LAS RUEDAS RECTAS.

§ 242. Disposiciones de las ruedas dentadas. . 269
243. Generalidades sobre la forma de los dientes de las ruedas rectas. 269
244. Radio del círculo primitivo. . . . 270
245. Tabla relativa al radio del círculo primitivo de los dientes. 271
246. Problema general del trazado de los dientes.. 272
247. Del engranaje de los dientes. . . . 273
248. Curvas descritas por un punto de un círculo arrollante. 274
249. Trazados de las curvas cicloidales. . . 274
250. Perfiles de los dientes de las ruedas de surtido. 275
251. Trazado de los arcos de cicloide por arcos de círculo. 275
252. Endentajes de costados rectos. . . . 276
253. Endentajes de husos. Endentajes mixtos. 277

254. Endentajes por desarrollantes de círculo. 278
255. Frote de los dientes de engranajes rectos. 279
256. Ventajas é inconvenientes de los diversos sistemas de endentajes. 281

B. TRAZADOS DE LOS DIENTES DE LAS RUEDAS CÓNICAS.

257. Generalidades sobre los dientes de las ruedas cónicas. 282
258. Ruedas ausiliares de las ruedas cónicas. 282
259. Rueda plana. 283

C. RUEDAS Y TORNILLOS SIN FIN.

260. Del tornillo sin fin. 284
261. Ruedas cilíndricas de dientes helicoidales. 285
262. Dentaje de ruedas helicoidales. Frote. . 286
263. Ruedas de filetes cónicas. 288

D. ENGRANAJES HIPERBOLOIDES.

264. Superficies primitivas de los engranajes hiperboloides. 288
265. Endentamiento de engranajes hiperboloides. 290

E. CÁLCULO DEL PASO Y ANCHURA DE LOS DIENTES DE ENGRANAJE.

266. Division de los engranajes. Seccion de los dientes. 290
267. Paso y anchura de los dientes de engranaje de poca velocidad. 291
268. Tabla de pasos de engranajes de poca velocidad. 291
269. Paso y anchura de los dientes de engranaje movido mecánicamente. . . 291
270. Observaciones relativas á las tablas precedentes. 296

F. DIMENSIONES DEL CUERPO DE LAS RUEDAS DE ENGRANAJES.

271. Corona de una rueda dentada. 297
272. Brazos de una rueda dentada. . . . 298
273. Tabla relativa á las dimensiones de los brazos de ruedas dentadas. . . . 298
274. Cubo de una rueda dentada. . . . 299
275. Peso de las ruedas dentadas. . . . 299

CAPÍTULO XXI

Tubos y ensambles de tubos.

§ 276. Fórmulas empíricas referentes al espesor de las paredes de los tubos. . . . 300
277. Cálculo de los tubos sometidos á una fuerte presion interna. 301
278. Tabla relativa á los espesores de los recipientes cilíndricos sometidos á una presion interior elevada. 302
279. Recipientes esféricos sometidos á una fuerte presion interna. 304
280. Espesor de las paredes de calderas de vapor de presion interna. 304
281. Tubos de calderas de vapor sometidos á una presion externa. 305
282. Ensambladuras de tubos de fundicion. . 306
283. Ensambles de tubos de hierro. . . . 308
284. Ensambles de tubos de plomo.—Ensambladuras diversas. 308
285. Peso de los tubos de fundicion. . . . 309

CAPÍTULO XXII

Obturadores.

§ 286. Clasificacion de los obturadores. . . 310

A. OBTURADORES POR DESLIZAMIENTO.

§ 287. Grifos cónicos. Grifos de válvula. . . 310

B. OBTURADORES POR LEVANTAMIENTO.

§ 288. Válvulas de elevacion. 312
289. Válvulas simples de forma circular. . . 312
290. Válvulas de doble asiento. 313

CAPÍTULO XXIII

Émbolos ó pistones.

§ 291. Diferentes espresiones de émbolos y sus guarniciones. 315
292. Cajas de estopas ó Stuffing-bochs. . . 317
293. Émbolos de vapor. 319
294. Émbolos de bombas. 320
295. Cálculo de los vástagos ó espigas de los émbolos. 321

CUARTA PARTE

Tablas y fórmulas matemáticas.

296. Curvas, superficies y volúmenes. . . 323
297. Líneas trigonométricas. 332
Tabla de las líneas trigonométricas, 332 á 337
Tabla de los logaritmos ordinarios de los números 1 á 100.. 338
Tabla de los logaritmos naturales de 1 á 100. 338
Tabla primera de números del Constructor. 339
Tabla segunda de números del Constructor. 340

ESTANTE 10
Tabla 4.ª
N.º 2

F. NACENTE
EDITOR
BARCELONA

F. REULEAUX

MECÁNICA

TOMO

I

16.455

A. DOMINGO
BARCELONA