TRATADO

DE

CÁLCULO DE PROBABILIDADES,

POR

D. DIEGO OLLERO,

Comandante de Artillería, Profesor de la Academia especial del Cuerpo.

SEGOVIA.

Imprenta de Pedro Ondero.

1879.

A mi querido hermano Pepe

Diego

EXCMO. SEÑOR

DON FRANCISCO SERRANO Y DOMINGUEZ,

DUQUE DE LA TORRE, CONDE DE SAN ANTONIO, CAPITAN GENERAL DE EJÉRCITO, ETC., ETC.

A V. E. que tanto se interesó en mi infancia por mi educacion científica, tengo la honra de dedicar el primer fruto de mis estudios.

Quizá, por su escaso mérito, no merezca ver la luz pública bajo los auspicios de tan ilustre nombre; pero contando con la bondad característica de V. E., espero se digne aceptarlo, como débil muestra del respetuoso cariño y profunda gratitud que le profesa, su afectísimo subordinado

DIEGO OLLERO.

El *modesto trabajo que ofrezco á la consideracion del público, y muy especialmente á la de mis compañeros, puede considerarse como introduccion de otro, que espero publicar en breve, sobre* Balística Esperimental.

Las numerosas aplicaciones que del CÁLCULO DE PROBABILIDADES *se están haciendo á la Balística, adquieren cada dia mas importancia á medida que se van perfeccionando las armas de fuego; así es que el conocimiento de esta rama de las ciencias exactas, que en épocas anteriores era cultivada casi exclusivamente por las personas dedicadas al estudio de la Astronomía y de la Geodésia, ha llegado en la actual á hacerse clásico en la mayoría de las naciones, entre las diversas armas del ejército, viniendo en cierto modo á formar parte de la vasta ciencia militar.*

Con el fin de que esta obra pueda ser de alguna utilidad, no solo á los que se dedican á la carrera de las armas, sino tambien á aquellos que consagren sus estudios á cualquiera ciencia de observacion, he procurado presentar las teorías con la suficiente generalidad.

Cumplidas se verán mis aspiraciones si esta publicacion sirve de estímulo á otros, que con mayores dotes puedan realizar trabajos más perfectos sobre tan importante asunto.

Deber mio es ántes de terminar dar un público testimonio de gratitud á los ilustrados Profesores de la Academia de Artillería D. Manuel Membrillera, D. Guillermo Martinez y D. Roberto Latorre; así como tambien al entendido y celoso Ayudante de Profesor D. Juan Loriga, por el interés con que han seguido el curso de mis trabajos y las atinadas observaciones que se han servido hacerme.

El modesto trabajo que sometemos á la consideración del público, y muy especialmente á la de los MILITARES, puede considerarse como introducción de otro, que espero publicar, en breve, sobre Balística Experimental.

Los elementos que tomamos del CÁLCULO DE PROBABILIDADES se [illegible] á la Balística, adquieren cada día más importancia á medida que se va perfeccionando las armas de fuego; así el conocimiento de esta rama de las ciencias exactas, que en épocas anteriores era cultivada casi exclusivamente por las personas dedicadas al estudio de la Astronomía y de la Geodesia, ha [illegible] en la actualidad á hacerse clásico en la enseñanza de las [illegible], entre los diferentes [illegible] del ejército, viniendo en cierto modo á formar parte de la ciencia militar.

Con el fin de que esta obra pueda ser de [illegible] utilidad, no solo á los que se dedican á la carrera de las armas, sino también á aquellos que [illegible] sus estudios ó cualquiera [illegible] de observación, [illegible] las teorías con la [illegible] generalidad.

[illegible] el estudio [illegible] de este problema, [illegible] á [illegible] que sea mejor [illegible] más perfecto sobre tan importante asunto.

[illegible] de [illegible] gratitud á los ilustrados Profesores de la Academia de [illegible], D. Manuel Mendivil, D. [illegible] Martínez y D. [illegible] Lebrero; [illegible] también [illegible] D. Juan [illegible] por el [illegible] con que ha [illegible] el texto de esta [illegible] y las [illegible] observaciones que [illegible] hecho.

INTRODUCCION.

Considerando el conjunto de las ciencias físico-matemáticas, puede reconocerse, que todas ellas tienen por objeto final la resolucion de las distintas cuestiones, que se derivan de las leyes á que está sometido el mundo material. Un perfecto conocimiento de estas leyes nos permitiría llegar á la solucion exacta de cada cuestion, siempre que además estuviesen determinados con todo rigor los datos correspondientes.

Las leyes físicas han sido deducidas por medio de la observacion. La analogía entre los resultados de un gran número de experiencias del mismo género, dá lugar al establecimiento de una ley; comparando varias de ellas entre sí y examinando la parte que les sea comun, se van obteniendo sucesivamente otras más generales. Una vez descubiertas, se comprueba su exactitud por la aplicacion á nuevos casos y entónces se admiten por induccion como verdaderas, en virtud de la inmutabilidad del órden de la naturaleza.

La observacion, ó la experimentacion que reproduce los hechos, es el punto de partida de la inteligencia, cuando se trata de investigar leyes físicas, y por este mismo procedimiento se determinan tambien gran parte de los datos que han de emplearse en la resolucion de los problemas.

La imperfeccion de los medios de que podemos disponer para llevar á cabo las observaciones ó experiencias, es causa de que tanto los datos como las leyes solo puedan determinarse aproximadamente; y si para comprobar los resultados se multiplica el número de estas experiencias, en cada una de ellas se cometerán evidentemente nuevos errores, pudiendo creerse por tanto, que éstos no se hallan regidos por ley alguna y sí sometidos al azár.

Se presentan pues á la inteligencia varias cuestiones de la mayor importancia.

¿Qué grado de confianza debemos atribuir á los resultados de cada una de las observaciones de determinado género?

Conocidos los resultados de varias observaciones encaminadas á un mismo fin, ¿cómo podrá obtenerse el que, en cuanto sea compatible con la prevision humana, debámos tomar por verdadero?

Y finalmente: despues de establecer los valores de los datos, ¿qué procedimiento conviene seguir y con qué grado de precision se podrá contar en la determinacion de las demás cantidades que de ellos dependen?

Uno de los principales objetos del **Cálculo de probabilidades** es dar solucion á los problemas enunciados, y bajo este punto de vista lo vamos á considerar; por más que, segun veremos, sus principios fundamentales pueden aplicarse tambien á otras cuestiones del órden moral ó económico.

Con arreglo á estas indicaciones, despues de hacer en el primer capítulo una recopilacion de las principales fórmulas que han de emplearse, se exponen en los dos siguientes los principios fundamentales del cálculo de probabilidades, aplicables á toda clase de sucesos: en el cuarto capítulo, con el epígrafe de *Teoría matemática de los errores*, se trata de la investigacion de las cantidades cuando se conocen varios resultados obtenidos por la observacion inmediata; y finalmente, el quinto tiene por objeto la determinacion, por el *método de los mínimos cuadrados*, de las cantidades, que dependen de otras deducidas de la observacion.

CAPÍTULO 1.º

Recapitulacion de las principales fórmulas que sirven de base al cálculo de probabilidades.

1. *Permutaciones con repeticion de letras.*

Se ha demostrado en el álgebra que el número de permutaciones que pueden formarse con s letras es

$$P_s = 1.2.3.4.5 \ldots\ldots s$$

Designemos por $a, b, c, d, \ldots$ las m primeras letras y por $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ las $s-m=n$ restantes, y propongámonos determinar el número de permutaciones diferentes que se obtendrian, reemplazando cada una de las m letras $a, b, c, d, \ldots$ por una de ellas a y análogamente cada una de las $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ por α. Concibamos una permutacion cualquiera de las primitivas y consideremos todas aquellas que no difieran de esta sino en el órden relativo de colocacion de las m letras $a, b, c, d \ldots$, ocupando las restantes un mismo lugar. Su número será evidentemente

$$P_m = 1.2.3.4 \ldots m$$

y todas ellas quedarán idénticas al sustituir a en vez de cada una de dichas m letras.

::

Del mismo modo si se concibe un grupo de permutaciones que solo difieran entre sí en el órden relativo de colocacion de las n letras α, ϵ, γ,....., dicho grupo constará de $P_n = 1.2.3.....n$ permutaciones que se harán idénticas al sustituir α en vez de cada una de estas n letras.

De la combinacion de ambas hipótesis se deduce, que al sustituir en las permutaciones primitivas, a en vez de cada una de las m letras a, b, c,....., y α en vez de cada una de las α, ϵ, γ,....., se obtendrán una série de grupos de permutaciones idénticas entre sí, conteniendo cada uno $1.2.3.....m.1.2.3.....n$ de estas.

Resulta pues, que el número de permutaciones diferentes que pueden formarse con dos letras entrando una repetida m veces y n la otra en cada permutacion es

$$P = \frac{1.2.3.....s}{1.2.3...m.1.2.3...n} = \frac{s\,!}{m\,!\,n\,!}$$

adoptando la notacion $s\,!$ para representar el producto $1.2...s$ y análogamente para los que figuran en el denominador.

Del mismo modo se demostraria que el número de permutaciones que pueden formarse con tres letras entrando cada una de ellas repetida m, n y p veces respectivamente en cada permutacion es:

$$P = \frac{1.2.3......s}{1.2....m.1.2....n.1.2...p} = \frac{s\,!}{m\,!\,n\,!\,p\,!}$$

siendo $s = m + n + p$.

Puede observarse que la primera de estas dos fórmulas es igual á la del número de combinaciones que podrian formarse con las s letras tomadas bien sea de m en m ó de n en n.

2. *Relaciones entre las cantidades imaginarias, y las funciones circulares y exponenciales.*

Sea la cantidad imaginaria

$$a+b\sqrt{-1}$$

y vamos á demostrar que siempre podrá trasformarse en

$$a+b\sqrt{-1}=\mathrm{M}(\cos.x+\mathrm{sen}.x\sqrt{-1}) \qquad (1)$$

siendo M una cantidad positiva y x un ángulo positivo y menor que cuatro rectos.

En efecto la ecuacion (1) se verificará siempre que se tenga

$$a=\mathrm{M}\cos.x, \qquad b=\mathrm{M}\,\mathrm{sen}.x.$$

Elevando al cuadrado estas dos ecuaciones y teniendo presente que

$\mathrm{sen.}^2x+\cos.^2x=1$, resulta $\mathrm{M}^2=a^2+b^2$ de donde

$$\mathrm{M}=\sqrt{a^2+b^2}; \quad \cos.x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \mathrm{sen}.x=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

vemos pues que se obtiene para M un valor positivo, y que el ángulo $x<2\pi$ queda tambien completamente determinado por su seno y coseno.

Ya se ha dicho en el álgebra que á la cantidad

$$\mathrm{M}=\sqrt{a^2+b^2}$$

se le llama módulo. Al ángulo x se le ha dado el nombre de argumento.

Por medio de la fórmula de Maclaurin se obtiene el desarrollo en série

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots\ldots$$

Si en esta série se sustituyen en vez de x, primero $x\sqrt{-1}$ y despues $-x\sqrt{-1}$, tendremos

$$e^{x\sqrt{-1}}=\left(1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\ldots\ldots\right)$$

$$+\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\ldots\ldots\right)\sqrt{-1}$$

y $$e^{-x\sqrt{-1}}=\left(1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\ldots\ldots\right)$$

$$-\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\ldots\ldots\right)\sqrt{-1}$$

y como por otra parte son conocidos los desarrollos

$$\cos.x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\ldots\ldots$$

$$\text{sen.}x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\ldots\ldots$$

se deduce

$$e^{x\sqrt{-1}}=\cos.x+\text{sen.}x\sqrt{-1} \qquad (2)$$

$$e^{-x\sqrt{-1}}=\cos.x-\text{sen.}x\sqrt{-1} \qquad (3)$$

Sumando estas dos fórmulas y dividiendo por dos el resultado; restándolas despues y dividiendo por $2\sqrt{-1}$, se obtiene

$$\cos.x=\frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right) \qquad (4)$$

$$\text{sen.}x=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}\right) \qquad (5)$$

3. *Fórmula de Wallis.*

Consideremos la integral $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$:

la aplicacion del método de integracion por partes tomando á x^{m-1} por factor finito dará

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2}$$

$$+(m-1)\int x^{m-2}\sqrt{1-x^2}\,dx = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2}$$

$$+(m-1)\int \frac{x^{m-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -x^{m-1}\sqrt{1-x^2}$$

$$+(m-1)\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}} - (m-1)\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

de donde

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}:$$

tomando esta integral entre los límites cero y uno se tiene

$$\int_0^1 \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{m-1}{m}\int_0^1 \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si m es par y se representa por $2n$, la aplicacion sucesiva de esta fórmula dá por resultado

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Análogamente si m es impar y se designa por $2n+1$, se tendrá

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\cdots\frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Las integrales que figuran en los segundos miembros de las dos últimas ecuaciones, son inmediatas y tienen por espresiones:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc. sen.}\,x + C \text{ de donde } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \text{ y}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C \text{ de donde } \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

Sustituyendo estos valores en las anteriores ecuaciones tendremos:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdots\cdots\frac{2}{3} \qquad (2)$$

Dividiendo estas dos fórmulas se tiene

$$\frac{\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(1.3.5.....(2n-1))^2(2n+1)}{(2.4.6.....2n)^2} \qquad (3)$$

La variable x solo puede recibir valores comprendidos entre cero y uno segun indican los límites de las integrales y por lo tanto se verificarán las desigualdades

$$\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} > \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} > \frac{x^{2n+2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{de donde}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} > \int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} > \int_0^1 \frac{x^{2n+2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

dividiendo estas cantidades por

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

é invirtiendo las fracciones que resultan se obtiene:

$$1 < \frac{\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}} < \frac{\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int_0^1 \frac{x^{2n+2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}} \qquad (4)$$

Dividiendo la fórmula (1) por la que resulte de cambiar en ella $2n$ en $2n+2$ se tendrá:

$$\frac{\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int_0^1 \frac{x^{2n+2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}{\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdots\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

las desigualdades (4) se reducen por consiguiente á

$$1 < \frac{\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}} < \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1}$$

y suponiendo que n aumenta indefinidamente se tendrá en el límite

$$\text{lím.}\ \frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}} = 1$$

Llevando tambien al límite la fórmula (3) y puesto que acaba de demostrarse que su primer miembro se convierte en la unidad tendremos:

$$1 = \text{lím.}\ \frac{\pi}{2}\ \frac{\left(1.3\ 5.....(2n-1)\right)^2(2n+1)}{(2.4.....2n)^2} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\ \text{lím.}\ \frac{\left(1.3.5.....(2n-1)\right)^2(2n+1)}{(2.4.....2n)^2}$$

de donde

$$\frac{\pi}{2} = \text{lím.}\ \frac{(2.4.6.....2n)^2}{\left(1.3.5.....(2n-1)\right)^2(2n+1)}$$

que es la fórmula de Wallís.

4. *Investigacion de la integral.*

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2}\,dz$$

Empecemos por considerar la integral

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$$

multiplicándola y dividiéndola por a^2, añadiendo y quitando despues al numerador $x^2 dx$ tendremos:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2\,dx}{(a^2+x^2)^n}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{(a^2+x^2-x^2)\,dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

$$-\frac{1}{a^2}\int \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^n}.$$

Empleando el métodо de integracion por partes se obtiene:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(a^2+x^2)^n} = \int \frac{1}{2}x.\frac{2x\,dx}{(a^2+x^2)^n}$$

$$= \frac{1}{2}x\frac{(a^2+x^2)^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-n+1}\int (a^2+x^2)^{-n+1}\,dx$$

$$= -\frac{x}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion anterior resulta:

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{x}{(2n-2)a^2(a^2+x^2)^{n-1}}$$

$$-\frac{1}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}} = \frac{1}{(2n-2)a^2}\cdot\frac{x}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

$$+\frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}$$

::

y tomando esta integral entre los límites cero é ∞, se tiene:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{(2n-3)}{(2n-2)a^2}\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}.$$

El primer término ha desaparecido. Se vé en efecto que se anula con $x=0$, tambien se anula con x igual á ∞ puesto que librada la indeterminacion $\frac{\infty}{\infty}$ que resulta se reduce á cero.

La aplicacion sucesiva de la fórmula anterior dá por resultado:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\cdot\frac{2n-5}{(2n-4)a^2}\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots \frac{1}{2a^2}\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} \qquad (1)$$

La integral que figura en el segundo miembro es inmediata y se tendrá:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\text{ arc. tang. }\frac{x}{a}+\mathrm{C};$$

de donde

$$\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion (1) tendremos

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^{2n-1}} \cdot \frac{1.3.5.....(2n-3)}{2.4.....(2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2};$$

haciendo $x = \frac{z}{\sqrt{n}}$ y $a = 1$ se tiene

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{n}\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n} = \frac{1.3.....(2n-3)}{2.4.....(2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

y suponiendo $n' = \frac{n}{z^2}$ se tendrá:

$$\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'z^2} = \left(\left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'}\right)^{z^2}$$

y en el límite cuando n crece indefinidamente en cuyo caso lo mismo sucederá á n' tendremos:

$$\text{lím.}\left(1+\frac{z^2}{n}\right)^n = \text{lím.}\left(\left(1+\frac{1}{n'}\right)^{n'}\right)^{z^2} = e^{z^2}$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion (2) despues de multiplicar ambos miembros por $\sqrt{n}$ y llevarla al límite se obtiene:

$$\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \text{lím.} \frac{1.3.....(2n-3)}{2.4.....(2n-2)} \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Por otra parte, si se extrae la raíz cuadrada de los dos miembros de la fórmula de Wallís (§ 3), y se cambia n en $n-1$ se tiene

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \text{lím.} \frac{2.4.....(2n-2)}{1.3.5.....(2n-3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$$

Multiplicando esta ecuacion por la anterior y dividiendo los dos miembros de la que resulta por $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ tendremos

$$\int_0^\infty e^{-z^2} d\,z = \text{lím.} \sqrt{\frac{n}{2n-1}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \text{lím.} \sqrt{\frac{1}{2-\frac{1}{n}}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

queda pues demostrada la fórmula

$$\int_0^\infty e^{-z^2} d\,z = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

que es de la mayor importancia en el cálculo de probabilidades.

Tambien puede calcularse el valor de la integral

$$\int_0^\infty e^{-z^2} d\,z$$

por el siguiente procedimiento.

Es evidente que dicha integral es idéntica á

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} d\,x \quad \text{y á} \quad \int_0^{\infty} e^{-y^2} d\,y$$

y por consiguiente podrá establecerse la ecuacion

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-z^2} d\,z\right)^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} d\,x \times \int_0^{\infty} e^{-y^2} d\,y$$

Si en la integral

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} d\,y$$

hacemos $y = tx$ considerando á t como la nueva variable, no cambiará de valor, y se obtendrá

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-z^2} d\,z\right)^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} d\,x \times \int_0^{\infty} e^{-x^2 t^2} x\,d\,t$$

ecuacion que podremos escribir bajo la forma

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-z^2} d\,z\right)^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^2(1+t^2)} x\,d\,x\,d\,t$$

Siendo independientes entre sí las variables t y x, el resultado de la integracion será el mismo ya se entregue primero con respecto á x y despues con respecto á t ó inversamente.

Integrando primero respecto á x se tiene

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2(1+t^2)} x\,d\,x\,d\,t = \frac{d\,t}{2\,(1+t^2)}$$

y sustituyendo este valor en la ecuacion anterior tendremos

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz\right)^2 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

de donde extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros resulta

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

y teniendo en cuenta que la funcion diferencial no se altera cambiando z en $-z$ se deduce

$$\int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

5. *Investigacion de las integrales.*

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx; \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

en las que suponemos que n es un número entero y positivo.

Consideremos la primera de estas dos integrales; empleando el método de integracion por partes tendremos:

$$\int e^{-x^2} x^{2n} dx = \int \frac{1}{2} x^{2n-1} \times e^{-x^2} 2x dx$$

$$= -\frac{1}{2} x^{2n-1} e^{-x^2} + \frac{2n-1}{2} \int e^{-x^2} x^{2n-2} dx$$

limitándola entre cero é infinito y observando que el primer término se anula, tanto con x igual cero, como con x igual infinito se obtiene:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n} dx = \frac{2n-1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n-2} dx,$$

y aplicando sucesivamente esta fórmula, resulta:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n} dx = \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2^n} \int_0^\infty e^{-x^2} dx,$$

y como anteriormente se ha demostrado que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

se deduce que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2n} dx = \frac{1.3.5.....(2n-1)}{2^n} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad (1)$$

Pasemos á ocuparnos de la integral Euleriana

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$$

Por el método de integracion por partes se obtiene:

$$\int e^{-x} x^{n-1} dx = -x^{n-1} e^{-x}$$

$$+(n-1)\int e^{-x} x^{n-2} dx;$$

de donde limitándola entre cero é infinito y teniendo en cuenta que el primer término se anula con dichos valores resulta:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\,dx=(n-1)\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2}\,dx,$$

y aplicando sucesivamente esta fórmula tendremos;

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\,dx=(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx.$$

Se sabe que

$$\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}+C.$$

y por consiguiente

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx=1,$$

Sustituyendo este valor en la integral anterior se deduce:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\,dx=1.2.3\ldots\ldots(n-1),$$

6. *Fórmula de Stirling* (*demostracion de Serret.*) Segun la fórmula de Wallís se tiene:

$$\frac{\pi}{2}=\text{lím.}\,\frac{(2.4\ldots\ldots 2n)^2}{(1.3.5\ldots\ldots(2n-1))^2\,(2n+1)},$$

Esta expresion puede trasformarse del siguiente modo:

$$\frac{\pi}{2} = \text{lím. } 2^{2n} \frac{(1.2.3.....n)^2}{((1.3.5.....(2n-1))^2(2n+1)},$$

Multiplicando los dos términos de esta fraccion por $(2.4.....(2n-2).2n)^2$, se obtiene:

$$(1)\quad \frac{\pi}{2} = \text{lím. } \frac{(1.2.....n)^2(2.4.......2n)^2}{(1.2.3.....2n)^2(2n+1)} : 2^{2n}$$

$$= \text{lím. } 2^{4n} \frac{(1.2.....n)^4}{(1.2.3.....2n)^2(2n+1)}.$$

Hagamos

$$\varphi(x) = \frac{1.2.3.....x}{\sqrt{2\pi} . e^{-x} x^{x+\frac{1}{2}}}$$

y sustituyendo en vez de x, primero n y despues $2n$, se tendrá:

$$\varphi(n) = \frac{1.2.3.....n}{\sqrt{2\pi} . e^{-n} . n^{n+\frac{1}{2}}};\ \varphi(2n) = \frac{1.2.3.....2n}{\sqrt{2\pi} . e^{-2n} . (2n)^{2n+\frac{1}{2}}},$$

elevando á la cuarta potencia y al cuadrado respectivamente estas dos fórmulas, tendremos;

$$\varphi(n)^4 = \frac{(1.2.3.....n)^4}{(2\pi)^2 e^{-4n} . n^{4n+2}};\ \varphi(2n)^2 = \frac{(1.2.3.....2n)^2}{2\pi . e^{-4n} . (2)^{4n+1} . n^{4n+1}},$$

y dividiendo estas dos ecuaciones se obtiene:

$$\frac{\varphi(n)^4}{\varphi(2n)^2} = \frac{(1.2.3.....n)^4}{(1.2.3.....2n)^2 . 2\pi n} . 2^{4n+1}. \quad (2)$$

Volviendo á la fórmula de Wallís, podremos escribirla bajo la forma siguiente, que se deduce inmediatamente de la ecuacion (1)

$$(1)\quad 1=\text{lím.}\,\frac{(1.2.3.....n)^4}{(1.2.3.....2n)^2(2n+1)\pi}.2^{4n+1}$$

$$=\text{lím.}\,\frac{(1.2.....n)^4}{(1.2.3.....2n)^2.2n.\dfrac{2n+1}{2n}\pi}.2^{4n+1}$$

y por ser, lím. $\dfrac{2n+1}{2n}=1$, cuando n aumenta indefinidamente, tendremos;

$$1=\text{lím.}\,\frac{(1.2.....n)^4}{(1.2.....2n)^2.2n\pi}.2^{4n+1},$$

y siendo idéntico el segundo miembro de esta ecuacion, al de la (2) llevada al límite, podrán igualarse los primeros y se tendrá;

$$\text{lím.}\,\frac{\varphi(n)^4}{\varphi(2n)^2}=1 \quad \text{de donde} \quad \text{lím.}\,\frac{\varphi(n)^2}{\varphi(2n)}=1.$$

Vamos ahora á demostrar que tambien se verifica

$$\text{lím.}\,\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}=1.$$

En efecto, si se divide el valor de $\varphi(n)$ por el resultado de cambiar en él, n en $n+1$, obtendremos;

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}=\frac{1.2...n}{1.2...n.(n+1)}.\frac{e^{-n-1}.(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{e^{-n}.n^{n+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{e.n^{n+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{e}\cdot\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

Tomando el logaritmo neperiano del último miembro y hallando despues su número correspondiente en forma de esponencial, se tendrá;

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}=e^{-1+\left(n+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{n}\right)}. \quad (3)$$

Desarrollando en série el $l\left(1+\frac{1}{n}\right)$, por medio de la fórmula

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\ldots\ldots,$$

y limitando esta série en el segundo y tercer término resulta;

$$l\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{\theta}{2n^2}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{\theta'}{3n^3} \quad (*)$$

(*) El desarrollo en série de $l(1+x)$ limitado en el segundo término es:

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+\theta x)^2};$$

y si se limita en el tercer término se obtiene:

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}\cdot\frac{2}{(1+\theta x)^3}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{(1+\theta' x)^3}.$$

Cambiando x en $\frac{1}{n}$, estos desarrollos se convierten en

$$l\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\theta}{n}\right)^2};$$

de donde

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{n}\right)=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{\theta'}{3n^3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{\theta}{2n^2}\right):$$

se ha multiplicado por n el segundo desarrollo y por $\frac{1}{2}$ el primero, con el objeto de obtener solamente términos de primero y segundo órden respecto de $\frac{1}{n}$.

Efectuando las operaciones indicadas y haciendo reducciones, se obtiene;

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{\theta'}{3n^2}-\frac{\theta}{4n^2}. \quad (4)$$

Siendo θ y θ' menores que la unidad, la diferencia

$$\frac{\theta'}{3n^2}-\frac{\theta}{4n^2}=\frac{1}{n^2}\left(\frac{\theta'}{3}-\frac{\theta}{4}\right)$$

$$l\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\theta'}{n}\right)^3}.$$

Las fracciones

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\theta}{n}\right)^2} \text{ y } \frac{1}{\left(1+\frac{\theta'}{n}\right)^3}$$

son menores que la unidad por ser positivos θ, θ' y n; designándolas por θ_1 y θ_1' y suprimiendo por simplificar los índices inferiores, se tiene

$$l\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{\theta}{2n^2};$$

$$l\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{\theta'}{3n^3}.$$

será en valor absoluto menor que $\frac{1}{n^2}$, y la podremos representar por $\frac{\theta''}{n^2}$. La ecuacion (4) se convertirá en

$$\left(n+\frac{1}{2}\right) l \left(1+\frac{1}{n}\right)=1+\frac{\theta''}{n^2}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion (3) quedará;

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}=e^{\frac{\theta''}{n^2}}. \quad (5)$$

Cambiando

$$n \text{ en } n+1,\ n+2,\ n+3, \ldots\ldots 2n-1,$$

esta fórmula se convertirá en

$$\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n+2)}=e^{\frac{\theta_1''}{(n+1)^2}};\ \frac{\varphi(n+2)}{\varphi(n+3)}=e^{\frac{\theta_2''}{(n+2)^2}};\ldots\ldots \frac{\varphi(2n-1)}{\varphi(2n)}=e^{\frac{\theta''_{n-1}}{(2n-1^2)}}$$

Multiplicando ordenadamente la ecuacion (5) por todas estas, se deduce

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)}=e^{\frac{\theta''}{n^2}+\frac{\theta_1''}{(n+1)^2}+\cdots\cdots+\frac{\theta''_{n-1}}{(2n-1)^2}}$$

Siendo en valor absoluto θ''; θ_1''....... menores que la unidad, todos los términos del exponente de e serán menores que $\frac{1}{n^2}$, y su suma será por consiguiente menor que

$$\frac{1}{n^2}\times n=\frac{1}{n}.$$

Dicho exponente podrá representarse por $\frac{\alpha}{n}$, estando α comprendido entre menos uno y mas uno, y se tendrá;

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = e^{\frac{\alpha}{n}}$$

Al hacer crecer indefinidamente á n el límite de $\frac{\alpha}{n}$ será cero, y por lo tanto

$$\text{lím.}\ \frac{\varphi(n)}{\varphi(2n)} = 1,$$

y como anteriormente se ha demostrado que

$$\text{lím.}\ \frac{\varphi(n)^2}{\varphi(2n)} = 1;$$

se deduce que tambien lím. $\varphi(n) = 1$. Segun esto podrá escribirse en el límite

$$1 = \frac{1.2.3\ldots\ldots n}{\sqrt{2\pi}.e^{-n}.n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{n!}{\sqrt{2\pi}\,e^{-n}\,n^{n+\frac{1}{2}}};$$

de donde;

$$n! = \sqrt{2\pi}.e^{-n}.n^{n+\frac{1}{2}};$$

ó bien;

$$n! = \sqrt{2\pi n}.n^n.e^{-n} \quad (6)$$

Tal es la fórmula de Stirling.

Aun cuando esta fórmula solo es rigurosa y exacta en el límite, se ha observado y puede demostrarse, que para valores grandes de n es bastante aproximada. La tabla expuesta á continuacion, pone de manifiesto la rapidez con que van acercándose los valores calculados por medio de la fórmula, á los obtenidos directamente por el procedimiento ordinario.

n	log. n ! OBTENIDOS DIRECTAMENTE.	log. n ! CALCULADOS POR LA FÓRMULA.	ERROR.
10	6,55976.......	6,55615.......	+0,00361
25	25,19065.......	25,18920.......	0,00145
50	64,48307.......	64,48235.......	0,00072
100	157,97000.......	157,96964.......	0,00036

7. *Investigacion de la integral*

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx,$$

en la que se supone que m y n son enteros y positivos.

El procedimiento de integracion por partes dá;

$$\int x^m(1-x)^n\,dx = \frac{(1-x)^n.x^{m+1}}{m+1}$$

$$+\frac{n}{m+1}.\int x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,dx,$$

de donde;

$$\int_0^1 x^m.(1-x)^n\,dx = \frac{n}{m+1}.\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}\,dx.$$

La aplicacion sucesiva de esta fórmula, dá por resultado;

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{n(n-1).....1}{(m+1)(m+2)...(m+n)}\int_0^1 x^{m+n}dx.$$

Esta última integral es inmediata y tiene por valor:

$$\int x^{m+n}dx = \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1},$$

de donde:

$$\int_0^1 x^{m+n}dx = \frac{1}{m+n+1};$$

se deduce por consiguiente:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{1.2.3......n}{(m+1)(m+2)...(m+n)(m+n+1)},$$

que se puede poner bajo la forma:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{1.2.3....n.1.2....m}{1.2.3....(m+n+1)} = \frac{n!\,m!}{(m+n+1)!}.$$

8. *Investigacion de la integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\text{sen.}\,\alpha x.dx}{x},$$

siendo α una cantidad positiva. Antes de encontrar esta integral, consideremos la

$$\int e^{-ax}\,\text{sen.}\,\alpha x.dx.$$

Aplicándole dos veces el método de integracion por partes y tomando á e^{-ax} por factor finito, se tiene:

$$\int e^{-ax}\,\text{sen.}\,\alpha x\,dx = -\frac{e^{-ax}\cos.\alpha x}{\alpha}$$

$$-\frac{a}{\alpha}\int e^{-ax}\cos.\alpha x.\,dx = -\frac{e^{-ax}\cos.\alpha x}{\alpha}$$

$$-\frac{a}{\alpha^2}e^{-ax}\,\text{sen.}\,\alpha x - \frac{a^2}{\alpha^2}\int e^{-ax}\,\text{sen.}\,\alpha x\,dx.$$

Despejando la primera integral tendremos:

$$\int e^{-ax}\,\text{sen.}\,\alpha x\,dx = -\frac{\alpha e^{-ax}\cos.\alpha x + a\,e^{-ax}\,\text{sen.}\,\alpha x}{a^2+\alpha^2}$$

$$= -e^{-ax}\times\frac{\alpha\cos.\alpha x + a\,\text{sen.}\,\alpha x}{a^2+\alpha^2}.$$

Tomando esta integral, entre los límites 0 é ∞, resulta:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\text{sen.}\,\alpha x\,dx = \frac{\alpha}{a^2+\alpha^2}.$$

Encontrada esta integral auxiliar, para deducir la propuesta, multipliquémosla por da, y se tendrá:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,\text{sen.}\,\alpha x\,dx.\,da = \frac{\alpha\,da}{a^2+\alpha^2}.$$

Integrando con respecto á a, entre los límites b y c, se obtiene:

$$\int_0^\infty \text{sen.}\,\alpha x\,dx \int_b^c e^{-ax}da = \int_b^c \frac{\alpha\,da}{a^2+\alpha^2}$$

:

y sustituyendo en vez de la segunda integral del primer miembro y de la del segundo miembro, que son inmediatas, sus valores, se tendrá:

$$\int_0^{\infty} \text{sen.}\,\alpha x\,dx\,\frac{e^{-bx}-e^{-cx}}{x}=\text{arc. tg.}\frac{c}{\alpha}-\text{arc. tg.}\frac{b}{\alpha}\cdot$$

Si ahora suponemos $b=0$ y $c=\infty$, la fórmula anterior se convertirá en

$$\int_0^{\infty}\frac{\text{sen.}\,\alpha x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\cdot \quad (1)$$

Puesto que el elemento diferencial que figura en el primer miembro no se altera cambiando x en $-x$, se deduce:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{sen.}\,\alpha x}{x}\,dx=\pi. \quad (2)$$

En el caso de ser $\alpha=1$, las fórmulas (1) y (2) se convierten en

$$\int_0^{\infty}\frac{\text{sen.}\,x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2};\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{sen.}\,x}{x}\,dx=\pi.$$

9. *Demostracion de la fórmula*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{sen.}\,bn}{n}\,e^{-an^2}\,dn=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_0^{b} e^{-\frac{b^2}{4a}}\,db.$$

De la integral hallada (§ 4)

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

se deduce:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sqrt{\pi}$$

Cambiando x en $x + \frac{b}{a}\sqrt{-1}$ primero, y despues en $x - \frac{b}{a}\sqrt{-1}$, se tiene:

$$\int_0^{\infty} e^{-a\left(x+\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sqrt{\pi},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a\left(x-\frac{b}{a}\sqrt{-1}\right)^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sqrt{\pi},$$

de donde, desarrollando los cuadrados y dividiendo ambos miembros por $e^{\frac{b^2}{a}}$, resulta:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} . e^{-2bx\sqrt{-1}} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sqrt{\pi} . e^{-\frac{b^2}{a}},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} . e^{+2bx\sqrt{-1}} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sqrt{\pi} . e^{-\frac{b^2}{a}}.$$

Sumando estos resultados y dividiendo por dos, se tendrá:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \frac{e^{2bx\sqrt{-1}} + e^{-2bx\sqrt{-1}}}{2} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \sqrt{\pi} . e^{-\frac{b^2}{a}},$$

y recordando las relaciones entre las esponenciales y las líneas trigonométricas, se deduce:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos.2bx\,dx = \frac{1}{2\sqrt{a}}\sqrt{\pi}.e^{-\frac{b^2}{a}}. \quad (1)$$

Multiplicando los dos miembros de esta fórmula por $2db$, é integrando entre los límites 0 y b, resulta:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx\int_0^b \cos.2bx.2db = \int_0^b \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{a}}db;$$

de donde:

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}.2bx}{x}e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\int_0^b e^{-\frac{b^2}{a}}db.$$

Haciendo $2x=u$ y cambiando a en $4a$, se tiene:

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}.bu}{u}e^{-au^2}du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_0^b e^{-\frac{b^2}{4a}}db,$$

y como el elemento diferencial que figura en el primer miembro no cambia sustituyendo $-u$ en vez de u, se deduce:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}.bu}{u}e^{-au^2}du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\int_0^b e^{-\frac{b^2}{4a}}db.$$

TEOREMA DE FOURIER.

10. Antes de ocuparnos de la fórmula de Fourier determinaremos algunas integrales de las cuales se deduce.

Consideremos la integral,

$$\int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx,$$

y vamos á calcular su valor, en el caso de ser $h<\frac{\pi}{2}$ y α una cantidad que vaya creciendo indefinidamente.

Supongamos primero, que $\varphi(x)$ es una funcion positiva y constantemente decreciente para los valores de x comprendidos entre los límites cero y h.

Designemos por $\frac{r\pi}{\alpha}$, el mayor múltiplo de $\frac{\pi}{\alpha}$ contenido en h, y descompongamos la integral propuesta en otras tomadas entre los límites,

$$0 \text{ y } \frac{\pi}{\alpha};\ \frac{\pi}{\alpha} \text{ y } \frac{2\pi}{\alpha};\ldots\ldots \frac{(r-1)\pi}{\alpha} \text{ y } \frac{r\pi}{\alpha};\ \frac{r\pi}{\alpha} \text{ y } h,$$

y se tendrá:

$$\int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{\alpha}}^{2\frac{\pi}{\alpha}} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx+\ldots\ldots+\int_{\frac{(r-1)\pi}{\alpha}}^{\frac{r\pi}{\alpha}} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx$$

$$+\int_{\frac{r\pi}{\alpha}}^{h} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\,\varphi(x)\,dx.$$

A excepcion de la última, todas estas integrales están comprendidas en la fórmula general

$$\int_{\frac{n\pi}{\alpha}}^{\frac{(n+1)\pi}{\alpha}} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx.$$

Examinando esta integral, se observa, que siendo positivo sen. x para todos los valores de x comprendidos entre los límites 0 y $h<\frac{\pi}{2}$, y conservando $\varphi(x)$ por hipótesis el signo positivo, la integral tomará un valor positivo ó negativo, segun que n sea par ó impar; puesto que sen. αx variará entre sen. $n\pi$ que es el valor que toma haciendo $x=\frac{n\pi}{\alpha}$, y sen. $(n+1)\pi$ que es el correspondiente á $x=\frac{(n+1)\pi}{\alpha}$. En el primer caso, cuando n sea par, todos los valores de la diferencial, en el intérvalo que se considera, serán positivos, y negativos en el segundo.

Estas integrales, van disminuyendo á medida que los límites van aumentando, puesto que sen. αx recibe en todas ellas, los valores comprendidos entre cero y uno ó entre cero y menos uno; el denominador sen. x va aumentando, y $\varphi(x)$ por hipótesis, va disminuyendo.

Haciendo

$$\int_{\frac{n\pi}{\alpha}}^{\frac{(n+1)\pi}{\alpha}} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\,\varphi(x)\,dx = \pm u_n \quad (1)$$

se tiene la ecuacion (1) convertida en;

$$\int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\,\varphi(x)\,dx = u_0 - u_1 + u_2 \ldots\ldots + u_{r-1}$$

$$+ \int_{\frac{r\pi}{\alpha}}^{h} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\,\varphi(x)\,dx \quad (2)$$

se ha supuesto r impar; si fuese par, el término u_{r-1} llevaría el signo +.

Haciendo en la ecuacion (1) $\alpha x = z$; de donde

$$x = \frac{z}{\alpha},\ \text{y}\ dx = \frac{dz}{\alpha},$$

se tendrá;

$$\pm u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\text{sen.}\,z}{\text{sen.}\,\frac{z}{\alpha}}\,\varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right).\frac{dz}{\alpha}.$$

Al aumentar α indefinidamente, $\varphi\left(\frac{z}{\alpha}\right)$, se convertirá en el límite en $\varphi(0)$, además sen. $\frac{z}{\alpha}$ podrá reemplazarse por $\frac{z}{\alpha}$, y en el límite tendremos:

$$\pm u_n=\varphi(0)\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\text{sen.}\,z}{\frac{z}{\alpha}}\cdot\frac{d\,z}{\alpha}=\varphi(0)\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\text{sen.}\,z}{z}\,d\,z.$$

Aplicando esta trasformacion, á la suma de los r primeros términos de la ecuacion (2), se obtendrá;

$$u_0-u_1+u_2.....+u_{r-1}=\varphi(0)\int_0^{\pi}\frac{\text{sen.}\,z}{z}\,d\,z$$

$$+\varphi(0)\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\text{sen.}\,z}{z}\,d\,z+....+\varphi(0)\int_{(r-1)\pi}^{r\pi}\frac{\text{sen.}\,z}{z}\,d\,z$$

$$=\varphi(0)\int_0^{r\pi}\frac{\text{sen.}\,z}{z}\,d\,z.\quad (*)$$

Se ha demostrado (§ 8), que:

$$\int_0^{\infty}\frac{\text{sen.}\,z}{z}\,d\,z=\frac{\pi}{2};$$

Por lo tanto, suponiendo á r suficientemente grande, (r aumenta con α), la suma de los r términos mencionados diferirá de $\frac{\pi}{2}\varphi(0)$, en una cantidad tan

(*) La série $u_0-u_1+u_2.....$, es convergente, puesto que tiene sus términos alternativamente positivos y negativos y van decreciendo indefinidamente. El límite de la suma de dicha série, cuando r crezca indefinidamente, estará representado en la expresion

$$\varphi(0).\int_0^{r\pi}\frac{\text{sen.}\,z}{z}\,d\,z.$$

pequeña como se quiera, y podrá reemplazarse por dicho valor, en el límite.

Ahora bien: como se ha supuesto que α vá creciendo indefinidamente, $\frac{\pi}{\alpha}$ irá disminuyendo, teniendo cero por límite, y r irá aumentando tambien indefinidamente; por consiguiente, se verificará en el límite:

$$u_0-u_1+u_2\ldots+u_{r-1}=\frac{\pi}{2}\varphi(0).$$

El último término de la ecuacion (2) tiene cero por límite. En efecto, introduciendo la variable z, se tiene en el límite:

$$\int_{\frac{r\pi}{\alpha}}^{h}\frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx=\varphi(0)\int_{r\pi}^{\alpha h}\frac{\text{sen.}\,z}{z}\,dz$$

$$=\varphi(0)\int_{0}^{\alpha h}\frac{\text{sen.}\,z}{z}\,dz-\int_{0}^{r\pi}\frac{\text{sen.}\,z}{z}\,dz;$$

y como ambas integrales tienen $\frac{\pi}{2}$ por límite, se tendrá:

$$\text{lím.}\int_{\frac{r\pi}{\alpha}}^{h}\frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx=0.$$

En su consecuencia, la ecuacion (2) se convertirá en

$$\text{lím.}\int_{0}^{h}\frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx=\varphi(0)\frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Estos razonamientos son aplicables al caso en que $\varphi(x)$ sea constante.

11. Se ha demostrado la fórmula (3) para el caso en que siendo $h<\frac{\pi}{2}$, $\varphi(x)$ sea positiva y constantemente decreciente; y vamos á probar, que tambien es aplicable sea cualquiera $\varphi(x)$.

Supongamos que $\varphi(x)$ sea constantemente decreciente; pero que toma valores negativos en el intervalo en cuestion. Podremos concebir una constante C tal, que $\varphi(x)+C$, sea siempre positiva; por lo tanto á esta funcion será aplicable la fórmula, y se tendrá:

$$\text{lím.}\int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}(\varphi(x)+C)\,dx=\frac{\pi}{2}(\varphi(0)+C);$$

pero se tiene tambien:

$$\text{lím.}\int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}.C\,dx=\frac{\pi}{2}\,C.$$

Restando estas dos ecuaciones resulta:

$$\text{lím.}\int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\varphi(0).$$

Vemos pues, que tambien es aplicable la fórmula en este segundo caso.

Cuando $\varphi(x)$ sea constantemente creciente, $-\varphi(x)$ será constantemente decreciente; y se tendrá:

$$\text{lím.}\int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\left(-\varphi(x)\right)dx=-\frac{\pi}{2}\varphi(0);$$

de donde:

$$\text{lím.} \int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\,\varphi(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,\varphi(0):$$

lo que hace ver que tambien es la fórmula aplicable á este caso.

Finalmente; consideremos el caso en que $\varphi(x)$ esperimente varias alternativas, en sus crecimientos y decrecimientos. Podrá dividirse el intervalo de 0 á h, en otros varios, tales, que para cada uno de ellos, la funcion $\varphi(x)$ sea constantemente creciente, ó constantemente decreciente: sea uno de estos intervalos de g á h; y veamos cual es el límite de la integral

$$\int_g^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\,\varphi(x)\,dx.$$

Concibamos una funcion $\mathrm{F}(x)$ tal, que en el intervalo de g á h, sea constantemente igual á $\varphi(x)$, y que sea decreciente para todos los valores de x comprendidos entre 0 y h, en el caso de ser $\varphi(x)$ decreciente en el intervalo de g á h; ó que sea creciente en el mismo intervalo de 0 á h, si $\varphi(x)$ tambien lo fuese entre g y h.

Aplicando la fórmula demostrada, se tendrá;

$$\int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\,\mathrm{F}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{F}(0);$$

$$\int_0^g \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\,\mathrm{F}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{F}(0);$$

y por lo tanto

$$\int_g^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x} F(x)\,dx = 0,$$

y como en el intervalo de g á h se verifica que $F(x) = \varphi(x)$, tendremos que

$$\int_g^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Se observa que todas las integrales en que puede descomponerse la propuesta, serán nulas, á excepcion de la correspondiente al primer intervalo, que podremos suponer sea de 0 á h', y como para dicho intervalo se verifica la fórmula, se tendrá;

$$\int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x} \varphi(x)\,dx = \int_0^{h'} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x} \varphi(x)\,dx = \varphi(0)\,\frac{\pi}{2}.$$

12. Pasemos á investigar el valor de la integral anterior; cuando siguiendo con la hipótesis de que α crezca indefinidamente, h sea una cantidad positiva cualquiera.

Supongamos

$$h = n\pi + h'; \quad \text{siendo} \quad h' < \pi.$$

Descomponiendo en dos la integral propuesta, se tendrá

$$(1) \quad \int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x} \varphi(x)\,dx = \int_0^{n\pi} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x} \varphi(x)\,dx$$

$$+ \int_{n\pi}^{h} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x} \varphi(x)\,dx.$$

La primera de estas dos integrales podrá descomponerse en otras varias, dividiendo el intervalo total de 0 á $n\pi$, en partes iguales á $\frac{\pi}{2}$, y se obtiene:

$$(2)\quad \int_0^{n\pi} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx + \ldots + \int_{(2n-1)\frac{\pi}{2}}^{\left(2n\frac{\pi}{2}=n\pi\right)} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,dx.$$

Todas estas integrales parciales son de la forma;

$$\int_{m\frac{\pi}{2}}^{(m+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)\,d\,x.$$

Como nuestro objeto es el hallar los valores que estas integrales van tomando en el límite, cuando α crece indefinidamente, podremos suponer que α es un número entero é impar.

Esto supuesto hagamos, en el caso de ser $(m+1)$ par:

$$x = \frac{m+1}{2}\pi - y; \quad \text{de donde} \quad dx = -d\,y.$$

Puede observarse, que ya sea par ó impar $\frac{m+1}{2}$, se verificará:

$$\frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x} = \frac{\text{sen.}\,\alpha y}{\text{sen.}\,y},$$

y tendremos por consiguiente:

$$\int_{m\frac{\pi}{2}}^{(m+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\,\varphi(x)\,d\,x =$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\text{sen.}\,\alpha y}{\text{sen.}\,y}\,\varphi\left(\frac{m+1}{2}\,\pi-y\right)d\,y$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen.}\,\alpha y}{\text{sen.}\,y}\,\varphi\left(\frac{m+1}{2}\,\pi-y\right)d\,y.$$

Si $m+1$ fuese impar, haríamos:

$$x=\frac{m}{2}\,\pi+y,$$

y se tendría:

$$\int_{m\frac{\pi}{2}}^{(m+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\,\varphi(x)\,d\,x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen.}\,\alpha y}{\text{sen.}\,y}\,\varphi\left(\frac{m}{2}+y\right)d\,y.$$

Aplicando esta trasformacion á todos los términos del segundo miembro de la ecuacion (2), se tiene:

$$\int_{0}^{n\pi} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\,\varphi(x)\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen.}\,\alpha y}{\text{sen.}\,y}\,d\,y\,\Big(\varphi(y)+\varphi(\pi-y)$$

$$+\varphi(\pi+y)+\ldots\ldots+\varphi(n\pi-y)\Big),$$

y sustituyendo este valor en la ecuacion (1) tendremos:

$$\int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\varphi(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen.}\,\alpha y}{\text{sen.}\,y}\,d\,y\Big(\varphi(y)+\varphi(\pi-y)$$

$$+\varphi(\pi+y)+\ldots+\varphi(n\pi-y)\Big)+\int_{n\pi}^{h}\frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\,\varphi(x)\,d\,x. \quad (3)$$

Con arreglo á lo expuesto en el párrafo anterior, la primera de estas dos integrales tendrá por límite:

$$\frac{\pi}{2}\Big(\varphi(0)+2\,\varphi(\pi)+2\,\varphi(2\,\pi)+\ldots\ldots..\,\varphi(n\,\pi)\Big).$$

Para determinar el valor de la segunda integral, hagamos $x=n\,\pi+y$; de donde $d\,x=d\,y$ é $y=x-n\,\pi$, y se obtendrá

$$\int_{n\pi}^{h}\frac{\text{sen.}\,\alpha\,x}{\text{sen.}\,x}\,\varphi(x)\,d\,x=\int_0^{h-n\pi}\frac{\text{sen.}\,\alpha\,y}{\text{sen.}\,y}\,\varphi(n\,\pi+y)\,d\,y.$$

Si fuese $h-n\pi<\frac{\pi}{2}$ el límite de esta integral sería

$$\frac{\pi}{2}\,\varphi(n\,\pi).$$

En el caso de estar comprendida la diferencia $h-n\,\pi$ entre $\frac{\pi}{2}$ y π, puede descomponerse la integral en otras dos y tendriamos:

$$\int_0^{h-n\pi}\frac{\text{sen.}\,\alpha y}{\text{sen.}\,y}\,\varphi(n\pi+y)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{sen.}\,\alpha y}{\text{sen.}\,y}\,\varphi(n\,\pi+y)\,d\,y$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{h-n\pi} \frac{\text{sen.}\,\alpha y}{\text{sen.}\,y}\,\varphi(n\pi+y)\,dy.$$

La primera de estas dos integrales, tendría por límite $\frac{\pi}{2}\varphi(n\pi)$.

Para determinar el de la segunda, supondremos $y=\pi-z$, con lo que se tiene:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{h-n\pi} \frac{\text{sen.}\,\alpha y}{\text{sen.}\,y}\,\varphi(n\pi+y)\,dy=$$

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi-h} \frac{\text{sen.}\,\alpha z}{\text{sen.}\,z}\,\varphi\big((n+1)\pi-z\big)\,dz$$

$$=\int_{(n+1)\pi-h}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}\,\alpha z}{\text{sen.}\,z}\,\varphi\big((n+1)\pi-z\big)\,dz$$

$$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen.}\,\alpha z}{\text{sen.}\,z}\,\varphi\big((n+1)\pi-z\big)\,dz$$

$$-\int_{0}^{(n+1)\pi-h} \frac{\text{sen.}\,\alpha z}{\text{sen.}\,z}\,\varphi\big((n+1)\pi-z\big)\,dz.$$

Estas dos integrales tienen por límite $\frac{\pi}{2}\varphi\big((n+1)\pi\big)$, puesto que se verificará $(n+1)\pi-h<\frac{\pi}{2}$. Dedúcese, por lo tanto, que su diferencia será nula, ó sea

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{h-n\pi} \frac{\text{sen.}\,\alpha y}{\text{sen.}\,y}\,\varphi(n\pi+y)\,dy = 0$$

y la ecuacion (3) se convertirá por consiguiente en:

$$\int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\,\varphi(x)\,dx = \pi\left(\frac{1}{2}\,\varphi(0)+\varphi(\pi)+\varphi(2\pi)+\dots+\varphi(n\pi)\right) \quad (4)$$

13. Consideremos ahora la integral

$$\int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{x}\,\varphi(x)\,dx\,;$$

podrá establecerse la identidad:

$$\int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{x}\,\varphi(x)\,dx = \int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{\text{sen.}\,x}\cdot\frac{\text{sen.}\,x}{x}\,\varphi(x)\,dx. \quad (1)$$

Esta última integral tiene la misma forma que la anteriormente considerada, sin mas diferencia que la funcion $\varphi(x)$ está reemplazada en este caso por

$$\frac{\text{sen.}\,x}{x}\,\varphi(x).$$

Si fuese $h < \frac{\pi}{2}$ el límite de la integral (1) sería $\frac{\pi}{2}\,\varphi(0)$, puesto que $\frac{\text{sen.}\,x}{x}$ tiene por límite la unidad al hacer $x = 0$.

En el caso de ser $h > \frac{\pi}{2}$ podremos aplicar la fórmula 4, § 12, pero puede observarse que la funcion

$$\frac{\text{sen.}\, x}{x}\, \varphi(x),$$

se anula para $x = \pi$, $x = 2\pi$....... y por consiguiente se obtendrá:

$$\int_0^h \frac{\text{sen.}\, \alpha x}{x}\, \varphi(x)\, dx = \frac{\pi}{2}\, \varphi(0).$$

Si esta misma integral se toma entre dos límites cualesquiera a y b positivos tendremos:

$$\int_a^b \frac{\text{sen.}\, \alpha x}{x}\, \varphi(x)\, dx = \int_0^b \frac{\text{sen.}\, \alpha x}{x}\, \varphi(x)\, dx$$

$$- \int_0^a \frac{\text{sen.}\, \alpha x}{x}\, \varphi(x)\, dx;$$

y como cada uno de los términos del segundo miembro tiene por límite $\frac{\pi}{2}\, \varphi(0)$, cuando α crece indefinidamente, quedará:

$$\int_a^b \frac{\text{sen.}\, \alpha x}{x}\, \varphi(x)\, dx = 0.$$

Si los límites fuesen de signo contrario y los representamos por $-a$ y b, se obtiene:

$$\int_{-a}^b \frac{\text{sen.}\, \alpha x}{x}\, \varphi(x)\, dx = \int_{-a}^0 \frac{\text{sen.}\, \alpha x}{x}\, \varphi(x)\, dx$$

$$+\int_0^b \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{x}\,\varphi(x)\,dx$$

y haciendo $x=-y$ en la primera de estas dos integrales se tiene:

$$\int_{-a}^{0} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{x}\varphi(x)\,dx = \int_{a}^{0} \frac{-\text{sen.}\,\alpha y}{-y}\,\varphi(-y)\times -dy$$

$$= \int_0^a \frac{\text{sen.}\,\alpha y}{y}\,\varphi(-y)\,dy;$$

y en el límite se convertirá en:

$$\int_{-a}^{0} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{x}\,\varphi(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,\varphi(0).$$

La segunda integral tiene tambien por límite $\frac{\pi}{2}\,\varphi(0)$, y por lo tanto se tendrá;

$$\int_{-a}^{b} \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{x}\,\varphi(x)\,dx = \pi\,\varphi(0).$$

En el caso de ser negativos los dos límites, bastaría suponer $x=-y$, para deducir inmediatamente, que el límite de la integral es cero.

14. Consideremos la integral inmediata

$$\int \cos.\,nx\,dn = \frac{\text{sen.}\,nx}{x} + \text{C}:$$

limitándola entre 0 y α se tendrá:

$$\int_0^{\alpha} \cos.\,nx\,dn = \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{x}.$$

Multiplicando los dos miembros de esta ecuacion por $\varphi(x)\,dx$, é integrando despues con respecto á x entre los límites cero y h, siendo h positivo y cualquiera, se tiene

$$\int_0^h \varphi(x)\,dx \int_0^\alpha \cos.\,nx\,dn = \int_0^h \frac{\text{sen.}\,\alpha x}{x}\varphi(x)\,dx$$

y cuando α crezca indefinidamente se tendrá en el límite

$$\int_0^h \varphi(x)\,dx \int_0^\alpha \cos.\,nx\,dn = \frac{\pi}{2}\varphi(0);$$

ecuacion que tambien puede escribirse bajo la forma

$$\frac{\pi}{2}\varphi(0) = \int_0^\alpha dn \int_0^h \varphi(x)\cos.\,nx\,dx. \quad (1)$$

15. Pasando á la demostracion de la fórmula de Fourier, propongámonos investigar el límite de la integral

$$\int_0^\alpha \cos.\,tn\,dn \int_a^b \varphi(x)\cos.\,nx\,dx,$$

cuando α crece indefinidamente. Cambiando el órden de la integracion se tiene

$$\int_0^\alpha \cos.\,tn\,dn \int_a^b \varphi(x)\cos.\,nx\,dx$$

$$= \int_a^b \varphi(x)\,dx \int_0^\alpha \cos.\,nx\cos.\,nt\,dn. \quad (1)$$

Trasformando en suma el producto $\cos. nx \cos. nt$, se tiene:

$$\cos. nx . \cos. nt = \frac{\cos. n(x-t) + \cos. n(x+t)}{2};$$

y sustituyendo este resultado en la ecuacion (1), se deduce:

$$\int_0^{\alpha} \cos. tn\, dn \int_a^{b} \varphi(x) \cos. nx\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^{b} \varphi(x)\, dx \int_0^{\alpha} \cos. n(x-t)\, dn$$

$$+ \frac{1}{2} \int_a^{b} \varphi(x)\, dx \int_0^{\alpha} \cos. n(x+t)\, dn$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^{b} \frac{\text{sen}.\alpha(x-t)}{x-t} \varphi(x)\, dx + \frac{1}{2} \int_a^{b} \frac{\text{sen}.\alpha(x+t)}{x+t} \varphi(x)\, dx.$$

Si se hace $x - t = z$, en la primera de las dos últimas integrales, y $x + t = z$ en la segunda, tendremos:

$$\int_0^{\alpha} \cos. tn\, dn \int_a^{b} \varphi(x) \cos. nx\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{a-t}^{b-t} \frac{\text{sen}.\alpha z}{z} \varphi(z+t)\, dz + \frac{1}{2} \int_{a+t}^{b+t} \frac{\text{sen}.\alpha z}{z} \varphi(z-t)\, dz. \quad (2)$$

Segun se ha visto, (§ 13), las integrales que figuran en el segundo miembro, se anulan siendo $\alpha = \infty$ cuando los límites que las definen son del mismo signo, y tienen por valor $\pi\varphi(t)$ y $\pi\varphi(-t)$ respectivamente en el caso contrario.

Se tendrá, por consiguiente, para el caso en que t esté comprendido entre a y b, siendo positivas estas cantidades:

$$\int_0^\infty \cos. tndn \int_a^b \varphi(x) \cos. nx\,dx = \frac{\pi}{2}\varphi(t) \quad (3)$$

y en el caso de no estar t comprendido entre a y b:

$$\int_0^\infty \cos. tndn \int_a^b \varphi(x) \cos. nx\,dx = 0.$$

Si fuese $a=t$, la primera de las dos integrales del segundo miembro de la ecuacion (2) se convertiría, en el límite, en $\frac{\pi}{2}\varphi(t)$, anulándose la segunda, y se obtiene:

$$\int_0^\infty \cos. tndn \int_t^b \varphi(x) \cos. nx\,dx = \frac{\pi}{4}\varphi(t).$$

Verificándose la fórmula (3) para todos los valores positivos de a y b, sin más condicion que la de estar t comprendido entre dichas cantidades, podremos suponer $a=0$ y $b=\infty$, en cuyo caso t podrá tomar un valor cualquiera positivo y se tendrá:

$$\frac{\pi}{2}\varphi(t) = \int_0^\infty \cos. tndn \int_0^\infty \varphi(x) \cos. nx\,dx. \quad (4)$$

Siguiendo el mismo órden de consideraciones que acaba de exponerse, podremos determinar el limite de la integral

$$\int_0^\alpha \text{sen.}\, n t\, d n \int_a^b \varphi(x) \text{sen.}\, n x\, d x\,;$$

se tiene, en efecto, invirtiendo el órden de la integracion;

$$\int_0^\alpha \text{sen.}\, n t\, d n \int_a^b \varphi(x) \text{sen.}\, n x\, d x$$

$$= \int_a^b \varphi(x)\, d x \int_0^\alpha \text{sen.}\, n t\, \text{sen.}\, n x\, d n.$$

El producto sen. $n t$ sen. $n x$, puede trasformarse en la diferencia de dos cosenos, y se tiene:

$$\text{sen.}\, n t\, \text{sen.}\, n x = \frac{\cos.\, n(t-x) - \cos.\, n(t+x)}{2}\,;$$

de donde, sustituyendo en la ecuacion anterior, resulta:

$$\int_0^\alpha \text{sen.}\, n t\, d n \int_a^b \varphi(x) \text{sen.}\, n x\, d x = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\text{sen.}\, \alpha(x-t)}{x-t} \varphi(x)\, d x$$

$$- \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\text{sen.}\, \alpha(x+t)}{x+t} \varphi(x)\, d x.$$

Las integrales que figuran en el segundo miembro son las mismas que anteriormente se obtuvieron; por lo tanto, si se supone que t esté comprendido entre a y b, siendo positivas estas cantidades, se tendrá:

$$\frac{\pi}{2}\varphi(t)=\int_0^\infty \text{sen.}\, n t\, d n \int_a^b \varphi(x) \text{sen.}\, n x\, d x;$$

haciendo $a=0$, $b=\infty$ y atribuyendo á t un valor cualquiera positivo, se obtiene:

$$\frac{\pi}{2}\varphi(t)=\int_0^\infty \text{sen.}\, n t\, d n \int_0^\infty \varphi(x) \text{sen.}\, n x\, d x. \quad (5)$$

Los elementos diferenciales de las fórmulas (4) y (5) no cambian si se reemplaza n por $-n$, por consiguiente, el valor que cada fórmula reciba cuando se tomen las primeras integrales entre los limites $-\infty$ y $+\infty$, será doble del encontrado y se tendrá:

$$\pi\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} \cos.\, n t\, d n \int_0^\infty \varphi(x) \cos.\, n x\, d x. \quad (6)$$

$$\pi\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sen.}\, n t\, d n \int_0^\infty \varphi(x) \text{sen.}\, n x\, d x. \quad (7)$$

Pudiendo ser cualquiera la funcion $\varphi(x)$, podrá reemplazarse por $\varphi(-x)$ en las fórmulas (6) y (7), y se obtendrá:

$$\pi\varphi(-t)=\int_{-\infty}^{\infty} \cos.\, n t\, d n \int_0^\infty \varphi(-x) \cos.\, n x\, d x. \quad (8)$$

$$\pi\varphi(-t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\text{sen.}\,nt\,dn\int_{0}^{\infty}\varphi(-x)\,\text{sen.}\,nx\,dx; \quad (9)$$

haciendo $x=-y$, se tiene:

$$\pi\varphi(-t)=-\int_{-\infty}^{\infty}\cos.\,nt\,dn\int_{0}^{-\infty}\varphi(y)\cos.\,ny\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cos.\,nt\,dn\int_{-\infty}^{0}\varphi(y)\cos.\,ny\,dy;$$

$$\pi\varphi(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}\text{sen.}\,nt\,dn\int_{0}^{-\infty}\varphi(y)\,\text{sen.}\,ny\,dy$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\text{sen.}\,nt\,dn\int_{-\infty}^{0}\varphi(y)\,\text{sen.}\,ny\,dy.$$

El valor de estas integrales no variará porque en vez de y se sustituya x dejando los mismos límites y se tendrá:

$$\pi\varphi(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos.\,nt\,dn\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\cos.\,nx\,dx. \quad (10)$$

$$\pi\varphi(-t)=-\int_{-\infty}^{\infty}\text{sen.}\,nt\,dn\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\,\text{sen.}\,nx\,dx. \quad (11)$$

Sumando las ecuaciones (6) y (10) y restando las (7) y (11) se obtiene;

$$\pi\left(\varphi(t)+\varphi(-t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\cos. nt\,dn\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cos. nx\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cos. nt\cos. nx\,dx\,dn;$$

$$\pi\left(\varphi(t)-\varphi(-t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\text{sen}. nt\,dn\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\text{sen}. nx\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\text{sen}. nt\,\text{sen}. nx\,dn\,dx;$$

y sumando estas dos ecuaciones se tendrá;

$$2\pi\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\cos. n(t-x)\,dn\,dx. \quad (12)$$

que es la fórmula de Fourier.

16. En muchas aplicaciones conviene emplear bajo otra forma la fórmula de Fourier.

Podremos establecer la identidad

$$0=\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,\text{sen}. n(t-x)\,dn\,dx;$$

que tendrá lugar por ser los valores que recibe la funcion diferencial para los valores de n comprendidos entre $-\infty$ y 0, iguales y de signo contrario á los correspondientes á valores de n comprendidos entre 0 y ∞.

Aumentando los dos miembros de esta identidad á los de la ecuacion (12 § 15) se obtendrá:

$$2\pi\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\Big\{\cos.\,n(t-x)$$

$$+\,\text{sen.}\,n(t-x)\sqrt{-1}\Big\}\,dx\,dn. \quad (1)$$

Con arreglo á lo demostrado (§ 2) tendremos;

$$\cos.\,n(t-x)+\text{sen.}\,n(t-x)\sqrt{-1}=e^{n(t-x)\sqrt{-1}}$$

y sustituyendo este valor en la ecuacion (1) resulta:

$$2\pi\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{n(t-x)\sqrt{-1}}\,dx\,dn;$$

ó bien:

$$2\pi\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}dn\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{n(t-x)\sqrt{-1}}\,dx.$$

funcion diferencial para los valores de α comprendidos entre $-\infty$ y 0, iguales y de signo contrario á los correspondientes á valores de α comprendidos entre 0 y ∞.

Aumentando los dos miembros de esta identidad á los de la ecuacion (13 § 10) se obtendrá:

$$2\pi\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)\left\{\cos.\,u\,(t-\alpha)\right.$$

$$\left. + \operatorname{sen.}\,u\,(t-\alpha)\sqrt{-1}\right\} d\alpha\, d\,u. \quad (4)$$

Con arreglo á lo demostrado (§ 2) tendrémos:

$$\cos.\,u\,(t-\alpha) + \operatorname{sen.}\,u\,(t-\alpha)\sqrt{-1} = e^{u(t-\alpha)\sqrt{-1}}$$

y sustituyendo este valor en la ecuacion (4) resulta:

$$2\pi\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)e^{u(t-\alpha)\sqrt{-1}}\,d\alpha\, d\,u;$$

ó bien:

$$2\pi\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\,u \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\alpha)e^{u(t-\alpha)\sqrt{-1}}\,d\alpha.$$

CAPÍTULO 2.º

Principios fundamentales.

Nociones preliminares.—Probabilidad simple, compuesta y total.—Probabilidad de las causas ó hipótesis.

17. La imperfeccion de nuestros conocimientos hace que, por regla general, los juicios que formamos respecto de los sucesos futuros, vayan acompañados de la incertidumbre. De aquí nacen las denominaciones de *ciertos*, *probables*, *dudosos*, *improbables* é *imposibles*, que, segun los casos, se aplican á estos sucesos, y que se emplean frecuentemente en la vida ordinaria para expresar diversos grados de posibilidad.

La certeza acompañaría siempre á todos nuestros juicios y las denominaciones anteriores serían innecesarias, si tuviésemos un exacto conocimiento de las verdaderas causas que producen los distintos sucesos. Al decir en el lenguaje ordinario, que un determinado órden de fenómenos está sujeto al azar, no hacemos en rigor otra cosa, que expresar nuestra ignorancia respecto de las causas que los han producido.

Tanto en las investigaciones científicas, como en la generalidad de las empresas que el hombre acomete, es de suma importancia el inquirir, la mayor ó menor posibilidad de la solucion hallada en el primer caso, ó de obtener un éxito favorable en el segundo.

El procedimiento que se emplea para dar precision matemática á estos diversos grados de posibilidad, consiste en suponer ó concebir descompuesta la prueba ó experiencia, que pueda dar lugar á un suceso determinado, en un cierto número de casos igualmente posibles, es decir: que no tengamos ningun motivo para suponer que uno de ellos se ha de verificar con preferencia á los otros; y es evidente, que á medida que sea mayor el número de casos favorables á la realizacion del suceso con relacion al total de ellos, aumentará su posibilidad.

Si concebimos una experiencia que comprenda n casos igualmente posibles, y que en m de estos tenga lugar el suceso S, á la razon $\frac{m}{n}$, que puede considerarse como la medida de su posibilidad, se le ha llamado la probabilidad del suceso S.

En el caso de ser $m = n$, la posibilidad se convertirá en certeza, y como se verifica que $\frac{m}{n} = 1$, diremos que *la probabilidad igual á la unidad es el símbolo de la certeza.*

Si, por el contrario, fuese $m = 0$, ó lo que es lo mismo, que todos los casos sean desfavorables al suceso S, existirá una imposibilidad absoluta para su realizacion, y como se verifica que $\frac{m}{n}=0$, podremos decir, que *la probabilidad cero es el símbolo de la imposibilidad*.

En todos los demás casos, la probabilidad del suceso estará comprendida entre cero y uno por ser $m<n$ y entendiéndose desde luego, que á medida que se acerque al límite máximo, la posibilidad se irá aproximando á la certeza.

Para la mejor inteligencia de esta primera nocion, concibamos una urna que contenga n bolas y que de éstas sean m blancas. La probabilidad de sacar una de esta clase estará expresada por la fraccion $\frac{m}{n}$. Si se supone $m=n$, es decir, que sean blancas todas las bolas, se tendrá la seguridad de sacar una bola blanca, y esta certeza estará expresada en la igualdad $\frac{m}{n}=1$. Si, por el contrario, se supone $m=0$, ó lo que es lo mismo, que no haya ninguna bola blanca, es evidente la imposibilidad de sacar de esta clase de bolas, y la igualdad $\frac{m}{n}=0$ expresa esta imposibilidad.

Se comprende finalmente, que aumentará la facilidad de sacar una bola blanca á medida que sea mayor el valor $\frac{m}{n}$ de la probabilidad.

De la definicion que hemos dado de la probabilidad de un suceso se deduce, que ésta no se altera cuando se multipliquen por un mismo número los que expresan el de casos favorables á dicho suceso y el total de los posibles.

El cálculo de probabilidades tiene por objeto *la investigacion de las probabilidades de los sucesos que aparecen sometidos al azar.*

La probabilidad toma distintas denominaciones segun los casos. Se llama probabilidad simple, compuesta ó total, segun que el suceso en cuestion se considere aisladamente, que dependa del concurso de otros vários, ó que pueda ser producido por el concurso de várias causas.

La probabilidad simple queda determinada, con arreglo á su definicion, cuando se ha conseguido descomponer la experiencia ó prueba en cuestion, en todos los casos igualmente posibles: la compuesta y la total se determinan tambien por medio de los teoremas que se exponen á continuacion.

18. PROBABILIDAD COMPUESTA.—La probabilidad P de un suceso S compuesto de otros varios s, s', s''..... independientes entre sí, es igual al producto de las probabilidades p, p', p''..... de los sucesos parciales.

Designemos por e la experiencia que puede dar lugar al suceso s y supongámosle descompuesto en n casos igualmente posibles, de los cuales m sean favorables (*) á dicho suceso s.

Del mismo modo representemos por e', e''..... las experiencias que puedan producir los demás sucesos

(*) Siempre que no se advierta otra cosa, se considerarán los casos igualmente posibles, y entenderemos por casos favorables á un suceso aquellos en que pueda asegurarse su realizacion.

parciales; por n', n''..... el número total de casos igualmente posibles, que cada uno de ellos comprenda, así como por m', m''..... respectivamente el de los favorables á cada uno de los sucesos s', s''.....; se tendrá:

$$p=\frac{m}{n};\ p'=\frac{m'}{n'};\ p''=\frac{m''}{n''}..... \quad (1)$$

Puesto que las experiencias parciales son independientes entre sí, el número total de casos de que se compondrá la experiencia compuesta, que podremos designar por E, se obtendrá, combinando de todos los modos posibles, los correspondientes á las experiencias parciales.

Al combinar cada uno de los n casos de la experiencia, e con los de la e', se obtendrá un total de $n \times n'$. Si ahora combinamos cada uno de estos $n \times n$ casos con los de la e'', se obtendrán $n \times n' \times n''$, y continuando este razonamiento se deduce, que el número total de casos posibles de que se compone la experiencia E, es $n \times n' \times n''$..... Lo que acabamos de decir respecto de los casos posibles, puede aplicarse del mismo modo á los favorables á los sucesos s, s', s''....., y deduciremos, que el número total de estos casos será $m \times m' \times m''$.....; por consiguiente, si se representa por P la probabilidad del concurso de los sucesos parciales, tendremos:

$$\mathrm{P}=\frac{m \times m' \times m''.....}{n \times n' \times n''.....}=\frac{m}{n}\times\frac{m'}{n'}\times\frac{m''}{n''}......,$$

:

y teniendo en cuenta las ecuaciones (1), resulta:

$$P = p \times p' \times p'' \ldots\ldots,$$

que es lo que tratábamos de demostrar.

Este teorema suele enunciarse abreviadamente diciendo, que *la probabilidad compuesta es el producto de las probabilidades simples.*

Como aplicacion de este teorema, consideremos dos urnas, conteniendo la primera m bolas blancas y $n-m$ negras, y la segunda m' bolas blancas y $n'-m'$ negras.

Las probabilidades de obtener una bola blanca separadamente en cada urna serán respectivamente $\frac{m}{n}$ y $\frac{m'}{n'}$; luego, segun el principio demostrado, la probabilidad de obtener á la vez bolas blancas de las dos urnas sería $\frac{m}{n} \times \frac{m'}{n'}$.

Consideremos un segundo ejemplo, y sea el de dos personas cuyas edades las representaremos por A y B; y propongámonos determinar la probabilidad de que vivan dentro de t años, tomando como base los datos que arroje una tabla de mortalidad.

De la mencionada tabla podrá deducirse el número de personas que llegan á la edad A, y de éstas, cuántas sobreviven á la edad $A+t$; designándolas respectivamente por n y m concluiremos, que la probabilidad de que la primera persona llegue á los $A+t$ años, está expresada por la fraccion $\frac{m}{n}$.

Del mismo modo, si se designan por n' y m' respectivamente el número de personas que sobreviven á los B y B+t años, la probabilidad de que aquella segunda llegue á la edad de B+t años, será $\frac{m'}{n'}$: luego, segun el teorema demostrado, la probabilidad de que ambas personas vivan t años mas; será $\frac{m}{n} \times \frac{m'}{n'}$.

19. Consideremos el caso en que los sucesos, que solo supondremos dos, no sean independientes entre sí. Á la probabilidad de que uno de los sucesos tenga lugar, suponiendo realizado el otro, se le llama *probabilidad modificada del primer suceso.*

Esto supuesto, vamos á demostrar, que *la probabilidad* P *de un suceso* S, *compuesto del concurso de otros dos* s *y* s', *que tengan entre sí una conexion cualquiera, es igual al producto de la probabilidad absoluta de uno de estos dos sucesos por la modificada del otro.*

Supongamos que el número de casos elementales que puedan presentarse, sean:

a, en que el suceso s se verifique aisladamente;
b, en que el suceso s' se verifique tambien aisladamente;
c, en que los dos sucesos s y s' se realicen á la vez; y
d, en que no se verifique ninguno de los dos sucesos s y s'.

El número total de casos elementales será $a+b+c+d$, así como es c el de los favorables al suceso S, compuesto de los s y s'; por consiguiente la probabilidad de éste será

$$P = \frac{c}{a+b+c+d}.$$

Si designamos por p y p' respectivamente las probabilidades absolutas de los sucesos s y s', segun indica el cuadro anterior, se tendrá:

$$p = \frac{a+c}{a+b+c+d}, \quad p' = \frac{b+c}{a+b+c+d}.$$

Representemos por p_1 y p_1' las probabilidades modificadas de los sucesos s y s'. Se obtendrá p_1, dividiendo el número de casos favorables al suceso s por el total de los posibles; pero todo en la hipótesis de haberse verificado el suceso s'.

El primero de estos dos números es c, y $b+c$ el segundo, por consiguiente tendremos:

$$p_1 = \frac{c}{b+c}.$$

Análogamente se tendrá:

$$p_1' = \frac{c}{a+c}:$$

multiplicando los valores de p y p_1', y los de p' y p_1, se encuentra:

$$p.p_1' = p'.p_1 = \frac{c}{a+b+c+d},$$

y como el último miembro es el valor de P, se deduce:

$$\mathrm{P} = p \,.\, p_1' = p'\, p_1,$$

que es lo que se trataba de demostrar.

Apliquemos esta regla al ejemplo siguiente: Sea una urna que contenga a bolas blancas, b negras y c

azules; y vamos á investigar la probabilidad de extraer, primero una bola blanca y despues, sin que ésta se vuelva á introducir, la de extraer una negra en la segunda tirada.

La probabilidad p de sacar una bola blanca será evidentemente

$$p=\frac{a}{a+b+c}.$$

Para hallar p_1' probabilidad modificada de obtener una bola negra, tendremos en cuenta, que con la extraccion de la blanca ha quedado una ménos, y por lo tanto

$$p_1'=\frac{b}{a+b+c-1};$$

luego, por la aplicacion de la regla, deduciremos:

$$P=\frac{ab}{(a+b+c)(a+b+c-1)}.$$

20. PROBABILIDAD TOTAL.—*La probabilidad de un suceso* S, *que pueda ser atribuido á várias causas* C_1, C_2, C_3... *que se excluyan entre sí, es igual á la suma de las probabilidades correspondientes á las combinaciones de este suceso con cada una de las causas.*

Representemos, en efecto, por n_1, n_2, n_3 el número de casos posibles en que obren respectivamente cada una de las causas C_1, C_2, C_3,..... y por n' el de aquellos en que no funcione ninguna de dichas causas. Puesto que se admite, que el suceso S solo puede producirse cuando estén en accion las causas mencionadas, no podrá presentarse en los últimos n' casos.

Designemos análogamente por m_1, m_2, m_3..... el número de casos favorables al suceso S en que funcionan respectivamente las causas C_1, C_2, C_3....., y por p_1, p_2, p_3..... las probabilidades de dicho suceso en este mismo supuesto. Se tendrá, por lo tanto,

$$p_1 = \frac{m_1}{n_1}; \quad p_2 = \frac{m_2}{n_2}; \quad p_3 = \frac{m_3}{n_3}.....,$$

teniendo en cuenta, que las causas se excluyen mútuamente, el número total de casos posibles, que designaremos por N, será

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + ... + n',$$

y el de casos favorables á S estará expresado por la suma:

$$m_1 + m_2 + m_3 + ...;$$

luego la probabilidad P será:

$$P = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + ...}{n_1 + n_2 + n_3 + ... + n'} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + ...}{N},$$

y podrá escribirse bajo la forma:

$$P = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{n_1}{N} + \frac{m_2}{n_2} \cdot \frac{n_2}{N} + \frac{m_3}{n_3} \cdot \frac{n_3}{N} + ...$$

El producto $\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{n_1}{N}$ representa la probabilidad de la combinacion de la causa C y el suceso S, en virtud del segundo principio de la probabilidad compuesta, puesto que el factor $\frac{n_1}{N}$ es la probabilidad de la causa C_1 y el otro $\frac{m_1}{n_1}$ es la probabilidad de dicho suceso, modificada por la causa C_1. Lo mismo puede observarse en los demás términos, y por consiguiente queda demostrada la proposicion.

Si convenimos en llamar probabilidades parciales á las de cada una de las combinaciones del suceso S con las causas C_1, C_2..., podrá simplificarse el enunciado de este teorema, diciendo que *la probabilidad total es la suma de las probabilidades parciales.*

En el caso particular en que la accion de cada una de las causas C_1, C_2, C_3... produzca ciertamente el suceso S, lo que equivale á suponer:

$$p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = 1 .....;$$

se tendrá:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + ... \quad (5)$$

Se vé pues que las probabilidades parciales, se convierten con esta hipótesis en las P_1, P_2, P_3... de cada una de las causas.

Corolario. Si consideramos una experiencia que pueda dar lugar á varios sucesos S_1, S_2, S_3,... cuyas probabilidades respectivas sean P_1, P_2, P_3...; la probabilidad de que se realice uno cualquiera de ellos, sin fijar cual, será:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + ...$$

En efecto, se presentará el suceso indeterminado de que se trata siempre que se verifique alguno de los S_1, S_2, S_3... que podremos considerar como sus causas; por consiguiente la ecuacion (5) se verificará en virtud de la regla que acaba de demostrarse.

Como caso particular del que acaba de considerarse, concibamos una experiencia que pueda dar lugar á un suceso S y designemos por S′ el suceso contrario (*); así como tambien por p y q sus probabilidades respectivas.

La probabilidad de que se verifique uno de estos dos sucesos, dejándolo indeterminado, se obtendrá por medio de la ecuacion (5) que se convertirá en:

$$P = p + q,$$

y como por otra parte se tiene la certeza de que uno de los dos sucesos ha de presentarse, se tendrá:

$$1 = p + q:$$

ecuacion que expresa, que la suma de las probabilidades de dos sucesos contrarios es igual á la unidad.

Ejemplo. Sean dos grupos de urnas, que para facilitar el lenguaje los designaremos por A y B; supongamos que cada una de las del grupo A contenga m bolas blancas, y $n-m$ negras, y que las del grupo B estén compuestas de m' bolas blancas y $n'-m'$ negras. Si además se admite que haya p urnas de la primera clase y q de la segunda, y que se saca al azar una bola sin dar preferencia á ninguna urna, la probabilidad de obtener una blanca será:

$$\frac{p}{p+q} \cdot \frac{m}{n} + \frac{q}{p+q} \cdot \frac{m'}{n'}.$$

(*) Siempre que un suceso S deje de verificarse, se dice que se realiza el suceso contrario. La negacion de un suceso equivale, pues, á la afirmacion de su contrario.

Como puede observarse, el primer término está compuesto de dos factores: el primero $\frac{p}{p+q}$ expresa la probabilidad de que se extraiga la bola del grupo A, y el segundo la de que sea blanca, en la hipótesis de pertenecer á dicho grupo, cuyo segundo factor es en este caso la probabilidad modificada del suceso.

Análogamente puede decirse de los dos factores de que se compone el segundo término.

Si además de estos dos grupos de urnas se considera un tercero compuesto de r de estas y se supone que no contienen ninguna bola blanca, la probabilidad de extraer una bola de esta clase, tendría por expresion:

$$\frac{p}{p+q+r}\cdot\frac{m}{n}+\frac{q}{p+q+r}\cdot\frac{m'}{n'}.$$

En el caso de que los dos primeros grupos de urnas solo contengan bolas blancas, lo que equivale á suponer:

$$\frac{m}{n}=1;\ \frac{m'}{n'}=1,$$

la probabilidad en cuestion se convertirá en

$$\frac{p}{p+q+r}+\frac{q}{p+q+r}.$$

21. Terminaremos este capítulo, determinando las probabilidades de las causas que pueden producir un suceso, supuesto este realizado. Esto se consigue por medio del siguiente teorema de Bayes, de uso contínuo en el cálculo de probabilidades.

Cuando un suceso S *puede ser atribuido á diferentes causas ó hipótesis* $C_1, C_2, C_3 \ldots$ *que se excluyan entre sí, y se supone que se ha verificado, la probabilidad de que una de estas causas ó hipótesis lo haya producido, se obtiene, dividiendo la probabilidad parcial correspondiente á la combinacion de esta causa con el suceso, por la total de dicho suceso.*

Representemos en efecto por $p_1, p_2, p_3 \ldots$ las probabilidades del suceso S si obrasen respectivamente las causas $C_1, C_2, C_3 \ldots$, y por $q_1, q_2, q_3 \ldots$ las de estas mismas causas ó hipótesis.

En virtud de lo demostrado en el párrafo anterior, la probabilidad P absoluta del suceso, tendrá por valor:

$$P = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + \ldots\ldots$$

Fundándonos en el segundo principio de la probabilidad compuesta (§ 19), deduciremos, que la correspondiente á la combinacion de la causa C_1 y del suceso S, podrá expresarse, bien sea multiplicando la probabilidad P absoluta del suceso por la modificada de la causa C_1, que la designaremos por w_1; ó bien por el producto de la probabilidad absoluta q_1 de la causa C_1 por la modificada p_1 del referido suceso. Estos dos productos serán por lo tanto iguales, dando la relacion:

$$P w_1 = p_1 q_1 \quad \text{de donde} \quad w_1 = \frac{p_1 q_1}{P} \qquad (2)$$

Vemos pues, que la probabilidad w_1, de que la causa C_1 haya producido el suceso, está expresada por una fraccion que cumple con las condiciones enunciadas.

Sustituyendo en la ecuacion (2) en vez de P su valor dado por la (1), se obtiene:

$$w_1 = \frac{p_1 q_1}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 + \ldots\ldots} \cdot \quad (3)$$

En el caso particular de ser todas las causas igualmente probables á priori (es decir, anteriormente á la realizacion del suceso, que es el que por regla general aplicaremos) lo que equivale á suponer:

$$q_1 = q_2 = q_3 = \ldots\ldots,$$

la fórmula (3) se convertirá en:

$$w_1 = \frac{p_1}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots},$$

y expresa, que cuando un suceso S que se supone realizado, puede ser atribuido á varias causas ó hipótesis C_1, C_2, C_3..., que se excluyan mútuamente y sean igualmente probables á priori, *la probabilidad* w_1 *de que haya sido producido por una de estas causas* C_1, *es igual á la probabilidad* p_1 *que esta causa dá al suceso observado, dividida por la suma de las que den al mismo todas las causas.*

La probabilidad w_2 de que el suceso haya sido producido por la causa C_2 será:

$$w_2 = \frac{p_2}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots} \cdot$$

Se deduce por consiguiente, que *entre todas estas* *hipótesis, será la mas probable aquella que dé al suceso observado la mayor probabilidad.*

Dividiendo los valores de w_1 y de w_2 se obtiene:

$$\frac{w_1}{w_2}=\frac{p_1}{p_2},$$

lo que expresa que, *las probabilidades de dos hipótesis, son proporcionales á las que estas dan al suceso observado.*

Ejemplo. Consideremos tres urnas, conteniendo la primera m bolas blancas y $n-m$ negras, la segunda m' bolas blancas y $n'-m'$ negras, y la tercera m'' blancas y $n''-m''$ negras, y supongamos, que sacando al azar una bola sin dar preferencia á ninguna urna, se ha extraido una blanca. ¿Cuál será la probabilidad de que pertenezca á una urna determinada?

Aplicando la regla anterior, las probabilidades de que se haya hecho la extraccion de cada una de las urnas, serán respectivamente:

$$w_1=\frac{\frac{m}{n}}{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}+\frac{m''}{n''}};\ w_2=\frac{\frac{m'}{n'}}{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}+\frac{m''}{n''}};\ w_3=\frac{\frac{m''}{n''}}{\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}+\frac{m''}{n''}}$$

CAPÍTULO 3.°

Leyes de la probabilidad en la repeticion de los sucesos.

22. En el capítulo anterior nos hemos ocupado de la probabilidad de los sucesos en una sola observacion ó experiencia. Si ahora suponemos que estas se repiten, multiplicando cada vez mas su número, se irá dando lugar á que se desarrollen todas las posibilidades que están en gérmen en las diversas causas que se conciban en accion; y por lo tanto si concebimos que estas causas puedan dar lugar á varios sucesos S_1, S_2, S_3..... cuyas probabilidades respectivas sean p_1, p_2..., se comprende instintivamente que en un gran número de experiencias, el número de veces que cada suceso se presente será por regla general tanto mayor cuanto mayor sea su probabilidad, y si suponemos por ejemplo que P_1 sea doble de P_2, deduciremos que, por término medio, el suceso S_1 tendrá lugar doble número de veces que el S_2.

Estas ligeras consideraciones hacen comprender, que debe existir una ley que ligue á las probabilidades de los sucesos, con las correspondientes á su repeticion en un número cualquiera de experiencias ú observaciones del mismo género. Su investigacion será el objeto de este capítulo.

Consideremos una experiencia que pueda dar lugar á los sucesos contrarios S y S′; sean p y q sus probabilidades respectivas y empecemos por determinar la probabilidad P para que estos sucesos se repitan en s experiencias del mismo género; (es decir, que en todas ellas p y q sean constantes), en el órden siguiente:

$$\left.\begin{array}{llll} m_1 & \text{veces el suceso} & & S \\ n_1 & \text{»} \quad \text{»} & \text{»} & S' \\ m_2 & \text{»} \quad \text{»} & \text{»} & S \\ n_2 & \text{»} \quad \text{»} & \text{»} & S' \\ m_3 & \text{»} \quad \text{»} & \text{»} & S \\ n_3 & \text{»} \quad \text{»} & \text{»} & S' \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right\} \text{siendo } m_1+n_1+m_2+n_2+m_3+n_3+\ldots=S$$

Podremos interpretar el conjunto de estos sucesos como uno nuevo compuesto del concurso de los

$$S, S\ldots\ldots m_1 \quad S', S'\ldots\ldots n_1 \quad S, S\ldots\ldots m_2 \quad S', S'\ldots\ldots n_2\ldots\ldots$$

que son independientes entre sí; y fundándonos en el principio de la probabilidad compuesta, se tendrá:

$$(1) \quad P = p^{m_1}.q^{n_1}.p^{m_2}.q^{n_2}\ldots = p^{m_1+m_2+\ldots} \times q^{n_1+n_2+\ldots}$$

Este resultado hace ver, que sea cualquiera el órden en que se verifiquen los sucesos S y S′, siempre que el número total de veces que cada uno de ellos se presente en el conjunto de las s experiencias sea el mismo, la probabilidad P conservará un valor constante.

Si concebimos las diversas permutaciones que pueden hacerse con los sucesos S y S′ entrando repetidos el primero $m_1+m_2+\ldots\ldots=n$ y el segundo $n_1+n_2+\ldots\ldots=n$ veces, la probabilidad de que en la série de s experiencias se presenten en el órden indicado por cada permutacion, será la expresada por la fórmula (1); por consiguiente si este órden se deja indeterminado y solo nos fijamos en la hipótesis, de que el número total de veces que cada suceso se presente sea el mencionado, como dicha hipótesis se realizará siempre que los sucesos se verifiquen en el órden expresado por una permutacion cualquiera, la probabilidad en este caso, que representaremos por P_m, se podrá obtener empleando el principio de la probabilidad total.

Siendo todos los sumandos iguales á $p^m.q^n$, y su número el de permutaciones que puedan hacerse con dos letras, entrando una repetida m veces y n la otra, el que es

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots s}{1.2.3\ldots\ldots m.1.2.3\ldots\ldots n},$$

tendremos:

$$P_m=\frac{1.2.3\ldots\ldots s\ p^m.q^n}{1.2.3\ldots\ldots m.1.2.3\ldots\ldots n}=\frac{s\,!}{m\,!\,.\,n\,!}\,p^m.q^n \quad (2)$$

Puede observarse que este valor es el término $(n+1)$ del desarrollo

$$(p+q)^s=p^s+m\,p^{s-1}q+\ldots.+\frac{s\,!}{m\,!\,n\,!}\,p^m.q^n+\ldots..q^s. \quad (3)$$

Dando á m y n valores particulares en la fórmula

(2) se obtendrían los diferentes términos del desarrollo anterior. El primero de estos términos expresará la probabilidad para que el suceso S se presente en todas las s experiencias; el segundo la correspondiente al caso en que el suceso S se realice $s-1$ veces y solo una el S', y análogamente podríamos decir de los términos sucesivos.

Tratemos ahora de investigar, qué valores han de tener m y n para que la probabilidad P_m adquiera un valor máximo.

Cambiando m en la fórmula (2), primero en $m-1$ y despues en $m+1$ se obtiene:

$$P_{m-1} = \frac{s!}{(m-1)!(n+1)!} p^{m-1} q^{n+1}$$

y

$$P_{m+1} = \frac{s!}{(m+1)!(n-1)!} p^{m+1} . q^{n-1} .$$

Puesto que P_m ha de tener un valor máximo deberá verificarse:

$$P_m > P_{m-1} \qquad \text{y} \qquad P_{m+1} < P_m ;$$

ó lo que es lo mismo:

$$\frac{P_m}{P_{m-1}} > 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{P_{m+1}}{P_m} < 1 .$$

Sustituyendo en vez de estas cantidades sus valores tendremos:

$$\frac{n+1}{m} \cdot \frac{p}{q} > 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{n}{m+1} \cdot \frac{p}{q} < 1 .$$

Sustituyendo tambien en vez de n su igual $s-m$; quitando denominadores y aumentando mp á los dos miembros de la primera desigualdad y $(m+1)p$ á los de la segunda, resulta:

$$(s+1)p > m(p+q) \quad \text{y} \quad (s+1)p < (m+1)(p+q) \ldots\ldots \quad (4)$$

y como por ser S y S′ sucesos contrarios se verifica $p+q=1$, las desigualdades (4) se convierten en:

$$(s+1)p > m \qquad \text{y} \qquad (s+1)p < m+1,$$

que pueden escribirse bajo la forma:

$$(s+1)p > m > (s+1)p-1;$$

luego m ha de ser igual al mayor número entero contenido en el producto $(s+1)p$. Del mismo modo se vería que n tiene por valor el mayor número entero contenido en el producto $(s+1)q$.

Ahora bien, si suponemos que el número s de experiencias sea muy grande, la razon de m á n, es decir, de las partes enteras de los productos $(s+1)p$, y $(s+1)q$, podrá ser reemplazada con gran aproximacion por la de estos mismos productos y resultará entonces:

$$\frac{m}{n}=\frac{p}{q} \ldots\ldots \quad (4)$$

De lo expuesto se deduce, que entre todas las combinaciones que pueden concebirse respecto al número de veces que ha de tener lugar cada suceso, la más probable es aquella en que estos números guarden la razon de las probabilidades respectivas de dichos sucesos.

Si á cada uno de los productos $s!$, $m!$, y $n!$ se aplica la fórmula de Stirling, todo en la hipótesis de que sean muy grandes los números s, m, y n, tendremos:

$$s! = e^{-s}.s^s\sqrt{2\pi s}$$

$$m! = e^{-m}.m^m\sqrt{2\pi m}$$

$$n! = e^{-n}.n^n\sqrt{2\pi n}$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula (2) resulta:

$$(5)\quad P_m = \frac{e^{-s}.s^s.\sqrt{2\pi s}.p^m.q^n}{e^{-m-n}.m^m n^n\sqrt{2\pi}.\sqrt{2\pi m n}}$$

$$= \frac{e^{-s}.s^s\sqrt{s}.p^m.q^n}{e^{-s}.m^m.n^n\sqrt{2\pi m.n}}.$$

Fijándonos en la combinacion más probable de los sucesos, se verificará la ecuacion (4) de la que se deduce;

$$\frac{m}{m+n} = \frac{p}{p+q} \quad \text{y} \quad \frac{n}{m+n} = \frac{q}{p+q}$$

y teniendo en cuenta que $m+n=s$ y $p+q=1$ se tendrá $m=ps$ y $n=qs$.

Sustituyendo estos valores en la ecuacion (5) queda:

$$P_m = \frac{s^s.\sqrt{s}.p^m.q^n}{(ps)^m.(qs)^n.\sqrt{2\pi s^2.p.q}} = \frac{1}{\sqrt{p.q}.\sqrt{2\pi s}}.$$

Se observa desde luego, que aun cuando este valor de P_m sea mayor que los demás análogos, en absoluto es una cantidad muy pequeña, puesto que hemos supuesto que s es un número considerable; lo cual debia esperarse, porque siendo tambien muy considerable el número de hipótesis que pueden hacerse respecto del número de veces que cada suceso se ha de presentar en la série de las s experiencias, la probabilidad total del conjunto de estas hipótesis, que es la unidad, porque forzosamente una de ellas ha de tener lugar, ha de compartirse en $s+1$ partes que es el número de términos del desarrollo.

23. Representando por m_0 y n_0 los valores más probables de m y n, que aproximadamente son iguales á $p\,s$ y $q\,s$, propongámonos determinar la probabilidad P para que el suceso S tenga lugar un número n de veces comprendido entre m_0-k y m_0+k (ambos inclusive), en la série de s experiencias.

Admitiremos como hipótesis que k es muy pequeño respecto de m y n y tambien que k^2 es muy pequeño con relacion á s. En este concepto se despreciarán, en los cálculos que iremos desarrollando, los términos de órden superior al primero con respecto á las razones

$$\frac{k}{m},\ \frac{k}{n},\ \frac{k}{s}\ \text{y}\ \frac{k^2}{s}.$$

La probabilidad P se obtendrá, con arreglo al principio de la probabilidad total, sumando los diferentes valores de P_m correspondientes á los de m comprendidos entre m_0-k y m_0+k.

Cambiando m en m_0-k en el valor de P_m (2), se tendrá:

$$P_{m_0-k}=\frac{s\,!}{(m_0-k)\,!\,(m_0+k)\,!}\,p^{m_0-k}.q^{m_0+k}$$

y sustituyendo en vez de los productos $s\,!$,

$$(m_0-k)\,!\,(n_0+k)\,!$$

sus valores aproximados deducidos de la fórmula de Stirling, quedará:

$$P_{m_0-k}=\frac{e^{-s}s^s\sqrt{2\pi s}}{e^{-m_0+k}.(m_0-k)^{m_0-k}.\sqrt{2\pi(m_0-k)}}$$

$$\times\frac{p^{m_0-k}\;q^{n_0+k}}{e^{-n_0-k}(n_0+k)^{n_0+k}.\sqrt{2\pi(n_0+k)}}.$$

Teniendo además en cuenta las relaciones $m=p\,s$, $n=q\,s$, se deduce:

$$P_{m_0-k}=\frac{s^s\sqrt{2\pi s}}{(p\,s-k)^{m_0-k}(q\,s+k)^{n_0+k}}$$

$$\times\frac{p^{m_0-k}\;q^{n_0+k}}{\sqrt{4\pi^2(p\,s-k)(q\,s+k)}};$$

y sacando á $p\,s$ y $q\,s$ por factor comun en los binomios que figuran en el denominador, se obtiene:

$$P_{m_0-k}=\left(1-\frac{k}{p\,s}\right)^{k-m_0-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{k}{q\,s}\right)^{-n_0-k-\frac{1}{2}}.\frac{1}{\sqrt{2\pi s\,p.g}}\;(6)$$

Haciendo

$$z=\left(1-\frac{k}{p\,s}\right)^{k-m_0-\frac{1}{2}} \quad (7)$$

se tendrá:

$$l.z=\left(k-m_0-\frac{1}{2}\right)l.\left(1-\frac{k}{p\,s}\right)=$$

$$-\left(k-m_0-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{k}{p\,s}+\frac{k^2}{2\,p^2\,s^2}+\frac{k^3}{3\,p^3\,s^3}+\ldots\ldots\right)$$

y, despreciando los términos de órden superior al primero, quedará:

$$l.z=-\frac{k^2}{p\,s}+\left(m_0+\frac{1}{2}\right)\frac{k}{p\,s}+\frac{m_0\,k^2}{2\,p^2\,s^2} \quad (0)$$

y sustituyendo $p\,s$ en vez de m_0 tendremos:

$$l.z=-\frac{k^2}{2\,p\,s}+\left(1+\frac{1}{2\,m_0}\right)k\,;$$

por consiguiente:

$$z=e^{-\frac{k^2}{2\,p\,s}+\left(1+\frac{1}{2\,m_0}\right)k}$$

y poniendo por z su valor (7) se tiene:

$$\left(1-\frac{k}{p\,s}\right)^{k-m_0-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{k^2}{2\,p\,s}+\left(1+\frac{1}{2\,m_0}\right)k}$$

El segundo factor de la fórmula (6) lo obtendremos cambiando k en $-k$, m_0 en n_0 y p en q, en la ecuacion que acaba de obtenerse, lo que dá:

$$\left(1+\frac{k}{q\,s}\right)^{-n_0-k-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{k^2}{2\,q\,s}-\left(1+\frac{1}{2\,n_0}\right)k}$$

La fórmula (6) se convertirá por la sustitucion de estos valores en:

$$P_{m_0-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqs}} e^{-\frac{k^2}{2s}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)+k\left(\frac{1}{2m_0}-\frac{1}{2n_0}\right)}$$

y á causa de ser $p+q=1$

$$P_{m_0-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqs}} e^{-\frac{k^2}{2pqs}} e^{k\left(\frac{1}{2m_0}-\frac{1}{2n_0}\right)} \quad (7)$$

Cambiando k en $-k$ en esta ecuacion se obtiene:

$$P_{m_0+k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqs}} e^{-\frac{k^2}{2pqs}} . e^{-k\left(\frac{1}{2m_0}-\frac{1}{2n_0}\right)} \quad (8)$$

Desarrollando en série las exponenciales

$$e^{k\left(\frac{1}{2m_0}-\frac{1}{2n_0}\right)} \quad \text{y} \quad e^{-k\left(\frac{1}{2m_0}-\frac{1}{2n_0}\right)}$$

y sustituyendo sus valores en las ecuaciones (7) y (8) se convertirán en

$$P_{m_0-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqs}} e^{-\frac{k^2}{2pqs}} \left\{1+k\left(\frac{1}{2m_0}-\frac{1}{2n_0}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{2m_0}-\frac{1}{2n_0}\right)^2+\ldots\ldots\right\}$$

$$P_{m_0+k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi pqs}} e^{-\frac{k^2}{2p.q.s}} \left\{1+k\left(\frac{1}{2m_0}-\frac{1}{2n_0}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{2m_0}-\frac{1}{2n_0}\right)^2+\ldots\ldots\right\}$$

Sumando estas dos ecuaciones y despreciando los términos de órden superior al primero se tiene:

$$P_{m_0-k}+P_{m_0+k}=\frac{2}{\sqrt{2\pi p.q.s}}e^{-\frac{k^2}{2p.q.s}}.$$

La probabilidad P para que el suceso S tenga lugar un número de veces comprendido entre m_0-k y m_0+k la obtendrémos, sumando los diferentes valores de $P_{m_0-k}+P_{m_0+k}$ correspondientes á todos los de k comprendidos entre cero y k, y tendremos:

$$(9)\quad P=\Sigma_0^k\frac{2}{\sqrt{2\pi p.q.s}}e^{-\frac{k^2}{2pqs}}=\frac{2}{\sqrt{2\pi pqs}}\Sigma_0^k e^{-\frac{k^2}{2pqs}}$$

haciendo

$$t^2=\frac{k^2}{2pqs}\quad\text{de donde}\quad t=\frac{k}{\sqrt{2pqs}}\quad\text{y}\quad k=t\sqrt{2pqs};$$

podrá observarse que por ser muy grande s, la variacion que t experimenta cuando k reciba un incremento igual á la unidad será muy pequeño y tendrá por valor:

$$\Delta t=\frac{1}{\sqrt{2pqs}},$$

que será tanto menor cuanto mayor sea s, por lo que á este incremento lo consideraremos igual á dt, y la ecuacion (9) se convertirá en

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{k}{\sqrt{2p.q.s}}}e^{-t^2}\,dt.\qquad(10)$$

El segundo miembro de esta ecuacion, puede calcularse, bien sea desarrollando en série la exponencial e^{-t^2}, ó mejor valiéndose de tablas que contienen el valor de dicha fórmula para cada uno de los de el límite de la integral. Estas tablas hacen ver, que el valor de la referida fórmula tiende rápidamente hácia la unidad á medida que crece el límite.

La fórmula (10) resuelve el problema propuesto dándonos á conocer la probabilidad P para que el suceso S se realice un número m de veces comprendido entre $m_0 - k = ps - k$, y $m_0 + k = ps + k$.

Tambien podemos interpretar dicha fórmula, diciendo que expresa la probabilidad para que la razon $\frac{m}{s}$ esté comprendida entre $p - \frac{k}{s}$, y $p + \frac{k}{s}$.

Adoptando esta segunda interpretacion, se deduce que para un mismo valor de k la probabilidad P aumenta con s aproximándose indefinidamente á la unidad, que como se sabe es símbolo de la certeza; en efecto el límite

$$\frac{k}{\sqrt{2pqs}}$$

puede escribirse bajo la forma

$$\frac{\frac{k}{s}\sqrt{s}}{\sqrt{2pq}},$$

que aumenta indefinidamente con s cuando $\frac{k}{s}$ es constante. Por pequeña que sea la razon $\frac{k}{s}$ siempre podremos obtener á espensas de dar á s un valor suficientemente grande, otro para P tan próximo como se quiera á la unidad, y por lo tanto en el límite, cuando

$$\frac{k}{s}=0 \text{ y } s=\infty, \text{ se tendrá } P=1.$$

Vemos pues, que cuando el número de experiencias sea infinito, la razon $\frac{m}{s}$ entre el número de casos que el suceso s se presenta y el número total de estas experiencias, es igual á la probabilidad simple de dicho suceso.

El resultado de este análisis podremos expresarlo en el siguiente teorema debido á Bernoulli: «en una série de s experiencias, que puedan dar lugar á un suceso S cuya probabilidad simple p sea conocida, la probabilidad para que la razon $\frac{m}{s}$, entre el número de veces que dicho suceso pueda presentarse al número total de estas experiencias, esté comprendida entre $p-\alpha$ y $p+\alpha$, siendo α tan pequeño como se quiera, aumenta con el número s aproximándose indefinidamente á la certeza.»

TEOREMA INVERSO DEL DE BERNOULLI.

24. Consideremos una série de s experiencias en las que se ha observado m veces, un suceso S, cuya probabilidad p desconocida suponemos constante, y por lo tanto el contrario habrá tenido lugar $s-m$ veces.

Con estos datos propongámonos determinar el valor más probable de p, que designaremos por x.

Suponiendo resuelta la cuestion, anteriormente á la ejecucion de las experiencias, la probabilidad para que los sucesos S y S$'$ se presenten m y $s-m=n$ veces respectivamente, será

$$P_m = \frac{s!}{m!(s-m)=n!} x^m (1-x)^n .$$

Para cada valor que se le atribuya á x, corresponderá á P_m otro y la probabilidad P$'$ de una cualquiera de estas hipótesis, podrá determinarse aplicando el teorema de Balles, dividiendo la probabilidad que esta hipótesis dá al suceso compuesto observado, que es el valor de P_m, por la suma de las probabilidades al mismo suceso den todas las hipótesis, que serán los diversos valores de P_m correspondientes á los que x puede recibir.

La probabilidad de un suceso cualquiera ha de estar comprendida entre cero y uno; luego x solo podrá variar en este intervalo. Tendrémos por consiguiente:

$$P' = \frac{\frac{s!}{m!\,n!} x^m (1-x)^n}{\frac{s!}{m!\,n!} \sum_0^1 x^m (1-x)^n},$$

que se podrá trasformar en

$$P' = \frac{x^m (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx}$$

La hipótesis más probable respecto al valor de x la obtendremos hallando el máximo de P' y como el denominador es constante bastará determinar el valor de x que haga máximo á $z = x^m (1-x)^n$.

Siguiendo la regla general para esta clase de cuestiones, igualaremos á cero la derivada de z y se tendrá

$$\frac{dz}{dx} = m x^{m-1} (1-x)^n - n x^m (1-x)^{n-1} = 0;$$

de donde, dividiendo los dos miembros por $x^{m-1} (1-x)^{n-1}$ resulta:

$$m(1-x) - nx = 0 \quad \text{y} \quad x = \frac{n}{m+n} = \frac{m}{s}.$$

Vemos pues, que la hipótesis más probable es la de tomar por valor de la probabilidad x del suceso, la razon entre el número de veces que este suceso se ha realizado al número total de experiencias.

25. Pasemos á calcular la probabilidad para que el valor de x esté comprendido entre

$$\frac{m}{s} - \alpha \quad \text{y} \quad \frac{m}{s} + \alpha;$$

que segun el segundo principio de la probabilidad total, se obtendrá sumando las correspondientes á los valores de x comprendidos en el intervalo dado, y por consiguiente tendremos:

$$P = \frac{\int_{\frac{m}{s}-\alpha}^{\frac{m}{s}+\alpha} x^m (1-x)^n \, dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx}.$$

La determinacion de P exige el cálculo de las integrales que figuran en el segundo miembro, lo que si bien no ofrece dificultad, dá lugar á cálculos prolijos, por cuya razon nos valdremos, siguiendo á Laplace, de otras consideraciones.

Se ha demostrado (§ 23) que la fórmula

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{k}{\sqrt{2pqs}}} e^{-t^2} dt \qquad (1)$$

expresa la probabilidad para que se verifique:

$$p - \frac{k}{s} < \frac{m}{s} < p + \frac{k}{s},$$

desigualdades que pueden trasformarse en

$$p < \frac{m}{s} + \frac{k}{s} \quad \text{y} \quad p > \frac{m}{s} - \frac{k}{s};$$

ó lo que es lo mismo, haciendo

$$\frac{k}{s} = \alpha, \quad \frac{m}{s} - \alpha < p < \frac{m}{s} + \alpha.$$

Podremos por lo tanto, interpretar la fórmula (1) diciendo que expresa la probabilidad para que el valor de P esté comprendido entre

$$\frac{m}{s}-\alpha \text{ y } \frac{m}{s}+\alpha,$$

que es lo que se trata de determinar.

Para calcular el valor de P se necesita conocer el límite superior de la integral, en el que entran las cantidades desconocidas p y q; pero suponiendo muy pequeña la cantidad α podremos tomar como valor aproximado de dicho límite

$$\frac{k}{\sqrt{2pqs}}=\frac{\frac{k}{s}\sqrt{s}}{\sqrt{2pq}}=\frac{\alpha\sqrt{s}}{\sqrt{2pq}};$$

el que obtendríamos reemplazando á p por $\frac{m}{s}$ y por lo tanto á q por $1-\frac{m}{s}$.

El valor que así se obtenga para P será muy próximo al verdadero, puesto que si designamos por C el valor aproximado de el límite

$$\frac{\alpha\sqrt{s}}{\sqrt{2pq}}$$

y por $C+h$ su valor exacto se tendrá:

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{C+h} e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{C} e^{-t^2}dt+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_C^{C+h} e^{-t^2}dt.$$

Cada una de las integrales del último miembro simboliza la suma de todos los valores del elemento diferencial $e^{-t^2}dt$ correspondientes á los de t comprendidos entre los límites y se observa inmediatamente, que la suma representada por la segunda integral será muy pequeña con respecto á la otra, tanto por ser el intervalo muy pequeño, como tambien principalmente, porque debiendo t tomar los mayores valores, sus términos son tambien los menores; y si por otra parte se tiene en cuenta que la fórmula (1) dá valores que al principio, partiendo del límite cero, crecen rápidamente y que despues los incrementos que van recibiendo son cada vez mas pequeños, se comprenderá que se puede contar con una gran aproximacion, tomando solo el primer término del segundo miembro por valor de P.

Esto supuesto, si hacemos $x_0 = \frac{m}{s}$ y sustituimos en la fórmula (1) en vez de p y q las cantidades ya indicadas x_0 y $1 - x_0$, tendremos:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\alpha\sqrt{s}}{\sqrt{2 x_0 (1 - x_0)}}} e^{-t^2} dt.$$

Analizando esta fórmula se observa, que la probabilidad P aumenta con s cuando α permanezca constante por pequeña que sea, puesto que el límite de la integral crece indefinidamente; por lo tanto cuando sea $s = \infty$ y $\alpha = 0$ se tendrá:

$$\frac{\alpha \sqrt{s}}{\sqrt{2 x_0 (1 - x_0)}} = \infty$$

y la probabilidad P se convertirá en

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1.$$

Vemos pues, que cuando el número de experiencias es infinito, la probabilidad de que la razon $\frac{m}{s}$, entre el número de casos en que el suceso S tenga lugar y el número total de experiencias, sea igual á la simple p de dicho suceso es la unidad, lo que equivale á afirmar con certeza la igualdad $\frac{m}{s}=p$.

Como consecuencia de este análisis, podemos enunciar el siguiente teorema inverso del de Bernoulli. En una série de s experiencias que puedan dar lugar á un suceso S cuya probabilidad simple p desconocida sea constante; si se supone que este suceso ha tenido lugar m veces, la probabilidad para que la razon $\frac{m}{s}$ difiera de p en una cantidad α tan pequeña como se quiera aumenta indefinidamente con s, teniendo la unidad, símbolo de la certeza, por límite.

Puede observarse que tanto el teorema de Bernoulli como su inverso nos conducen á la importante propiedad de que: la razon entre el número m de veces, que un suceso S se presente en s experiencias, al de éstas tiene por límite la probabilidad p simple del suceso, cuando el número de éstas crece indefinidamente.

Á medida que el número de experiencias aumenta la probabilidad de que la razon $\frac{m}{s}$ difiera poco de p se aproxima rápidamente á la unidad. En la tabla (1.ª) puede verse que basta que sea igual á tres el límite de la integral para que la probabilidad p adquiera un valor 0,99..... muy próximo á la unidad, y por otra parte no es preciso dar á s un valor escesivamente grande para que dicho límite tome el valor 3 aun siendo $\frac{k}{s}=\alpha$ una cantidad pequeña.

El teorema de Bernoulli viene á comprobar lo que al principio se habia previsto de que en un número grande de experiencias el número de veces que se repite un suceso S cuya probabilidad simple p sea constante guardará con el número total de estas una razon que diferirá poco de p; pero además (y esto es lo que le dá su mayor importancia) nos permite calcular hasta dónde deben continuarse estas experiencias para poder contar con una probabilidad tan próxima como se quiera á la certeza de que difieran la razon $\frac{m}{s}$ y p en una cantidad dada por pequeña que sea.

La aplicacion más importante, que de este teorema se hace, es la de investigar, á posteriori, la probabilidad simple de un suceso S cuando se conoce el resultado de un número grande de experiencias.

26. Terminaremos esta teoría, resolviendo el siguiente problema: suponiendo que en s experiencias se ha presentado m veces un suceso S cuya probabilidad simple desconocida permanezca constante, determinar la probabilidad para que dicho suceso tenga lugar en una nueva experiencia.

Representando por x uno de los valores que puede atribuirse á la probabilidad desconocida p, la probabilidad de esta hipótesis tiene por expresion (21)

$$\frac{x^m(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx}.$$

La probabilidad correspondiente á otra hipótesis $p=x$, sería del mismo modo:

$$\frac{x_1^{\ m}(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx};$$

por consiguiente, aplicando el principio de la probabilidad total, se obtendrá la del suceso S, sumando los productos que resulten de multiplicar la probabilidad de cada causa ó hipótesis por la que esta causa dá al suceso. Estos productos serán, en el caso presente, las expresiones anteriores multiplicadas la primera por x, la segunda por x_1 y así sucesivamente las demás, que pueden considerarse correspondientes á los valores de x comprendidos entre cero y uno.

Así se obtendrá, llamando P la probabilidad total

$$\mathrm{P}=\frac{\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n\,dx}{\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx}.$$

Sustituyendo en vez de las integrales del segundo miembro sus valores deducidos de la fórmula demostrada (§ 7) se obtiene:

$$P = \frac{\dfrac{(m+1)!\,n!}{(m+n+2)!}}{\dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}},$$

de donde

$$P = \frac{m+1}{m+n+2} = \frac{m+1}{s+2}.$$

En la práctica suele tomarse por valor de P la fraccion $\frac{m}{s}$ que diferirá muy poco de la hallada cuando m y s sean muy grandes. Esta sustitucion será evidentemente rigorosa siempre que se verifique $s=2m$.

En el caso particular de ser $n=0$ y por lo tanto $s=m$, tendremos:

$$P = \frac{s+1}{s+2}$$

cuyo valor difiere de la unidad en $\frac{1}{s+2}$, cantidad muy pequeña cuando s sea muy grande, lo que indica que en este caso la probabilidad de la reproduccion del suceso es muy próxima á la certeza.

Supongamos que en vez de una sola experiencia se hacen $m'+n'=s'$, posteriores á las $m+n=s$ mencionadas y vamos á determinar la probabilidad $P_{m'}$ para que el suceso S se presente m' veces en la nueva série de experiencias.

Ya se ha dicho antes (§ 21) que la probabilidad de una hipótesis respecto al valor de P, por ejemplo $p=x$ tiene por expresion:

$$\frac{x^m (1-x)^n dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx} \quad (1)$$

y la que esta hipótesis daría al suceso compuesto de que se trata sería (§ 22)

$$\frac{s\,!}{m'\,!\,n'\,!}\, x^{m'} (1-x)^{n'}; \quad (2)$$

por lo tanto la probabilidad total de dicho suceso se obtendrá sumando los productos de las expresiones (1) y (2) para todos los valores que x pueda tomar, que estarán comprendidos entre cero y uno y se tendrá

$$\mathrm{P}_{m'} = \frac{s'\,!}{m'\,!\,n'\,!}\, \frac{\int_0^1 x^{m+m'} (1-x)^{n+n'} dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^n dx}.$$

Aplicando la fórmula demostrada (7) á las integrales del segundo miembro se tiene:

$$\int_0^1 x^{m+m'} (1-x)^{n+n'} = \frac{(m+m')\,!\,(n+n')\,!}{(m+m'+n+n'+1)\,!}$$

$$= \frac{(m+m')\,!\,(n+n')\,!}{(s+s'+1)\,!}$$

y la

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m\,!\,n\,!}{(m+n+1)\,!} = \frac{m\,!\,n\,!}{(s+1)\,!}$$

de donde sustituyendo estos valores en la ecuacion anterior tendremos:

$$P_{m'} = \frac{(m+m')!}{m!\,m'!} \times \frac{(n+n')!}{n! \times n'!} \times \frac{(s+1)!\,s'!}{(s+s'+1)!}, \quad (3)$$

fórmula que dá la probabilidad para que el suceso S tenga lugar m' veces en la segunda série de s' experiencias.

Así como en la primera série de s experiencias se determinó el valor más probable de m cuando se conocia la probabilidad simple p del suceso; en esta segunda série de s' experiencias podemos tambien determinar el valor de m', que dá al suceso compuesto de las s' experiencias una probabilidad máxima, hallando la condicion de máximo para el valor de P'_m, considerando como datos el número m de veces que dicho suceso S ha tenido lugar en la primera série de s experiencias.

Con este objeto, cambiemos en la ecuacion (3) m' en $m'-1$ y en $m'+1$, y por lo tanto n' en $n'+1$ y $n'-1$, y tendremos:

$$P'_{m'-1} = \frac{(m+m'-1)!}{m!\,(m'-1)!} \cdot \frac{(n+n'+1)!}{n!\,(n'+1)!} \cdot \frac{(s+1)!\,s'!}{(s+s'+1)!} \quad (4)$$

$$P'_{m'+1} = \frac{(m+m'+1)!}{m!\,(n'+1)!} \cdot \frac{(n+n'+1)!}{n!\,(n'-1)!} \cdot \frac{(s+1)!\,s'!}{(s+s'+1)!} \quad (5)$$

Dividiendo la ecuacion (3) por la (4), y la (5) por la (3) se obtiene:

$$\frac{P'_{m'}}{P'_{m-1}} = \frac{m+m'}{m'} \cdot \frac{n'+1}{n+n'+1} \text{ y } \frac{P'_{m'+1}}{P'_{m'}} = \frac{m+m'+1}{m'+1} \cdot \frac{n'}{n+n'}$$

$P_{m'}$ tomará un valor máximo siempre que se verifique

$$\frac{m+m'}{m'} \cdot \frac{n'+1}{n+n'+1} > 1 \quad \text{y} \quad \frac{m+m'+1}{m'+1} \cdot \frac{n'}{n+n'} < 1$$

de donde

$$m(n'+1) > m'n \quad \text{y} \quad mn' < (m'+1)n.$$

Aumentando $m'm$ á los dos miembros de la primera desigualdad, $(m'+1)\,m$ á los de la segunda y teniendo presente las relaciones $m+n=s$ y $m'+n'=s'$, tendremos:

$$m(s'+1) > m's \quad \text{y} \quad m(s'+1) < (m'+1)s$$

de donde se deduce:

$$\frac{m}{s}(s'+1) > m' > \frac{m}{s}(s'+1)-1.$$

Vemos pues que m' es el mayor número entero contenido en el producto

$$\frac{m}{s}(s'+1).$$

Del mismo modo deduciremos que n' es el mayor número entero contenido en

$$\frac{n}{s}(s'+1).$$

En el supuesto, que s' sea muy grande, la razon de m' á n' podrá ser reemplazada por la de los números

$$\frac{m}{s}(s'+1) \quad \text{y} \quad \frac{n}{s}(s'+1)$$

lo que dará:

$$\frac{m'}{n'}=\frac{m}{n}.$$

De esta ecuacion se deducen las siguientes:

$$\frac{m'}{s'}=\frac{m}{s}; \quad \frac{m'}{s'}=\frac{n}{s}$$

y de ellas los valores aproximados de m' y n'

$$m'=\frac{m}{s}s' \quad \text{y} \quad n'=\frac{n}{s}s'.$$

Se vé pues, que el número más probable de veces que se presentará el suceso S en la segunda série de experiencias, guarda con el número de éstas la misma razon, que aquel en que se presente dicho suceso en la primera série con el número de las de esta série.

Siguiendo un procedimiento enteramente análogo al empleado (§ 23) pudiera determinarse la probabilidad para que el suceso S tenga lugar un número de veces comprendido entre

$$\frac{m}{s}s'-k=m_0-k, \quad \text{y} \quad \frac{m}{s}s'+k=m_0+k$$

en la segunda série de experiencias. Ninguna dificultad presentan los cálculos por más que sean prolijos; pero, teniendo en cuenta que no hemos de hacer uso del resultado de esta investigacion, omitimos el ocuparnos de ella.

CAPÍTULO 4.°

Aplicacion del cálculo de probabilidades á las ciencias de observacion.

TEORÍA MATEMÁTICA DE LOS ERRORES.

27. Expuestos, en los capítulos precedentes, los principios del cálculo de probabilidades de aplicacion general, vamos á entrar de lleno en el objeto principal que nos hemos propuesto, que es la aplicacion de estos principios á las ciencias de observacion.

Distinguiremos dos clases de cuestiones; la una, que comprende aquellas cuyo fin es investigar los valores de las cantidades, valiéndose de mediciones ú observaciones inmediatas; la otra, que abraza cuántas se proponen la determinacion de estas mismas cantidades, cuando están, por leyes conocidas, ligadas á otras deducidas de la observacion.

En este capítulo solo nos ocuparemos de la primera clase de cuestiones.

Tanto al efectuar una medicion cualquiera, como en toda clase de observaciones y experiencias, nos vemos forzosamente obligados á cometer errores que pueden dimanar de infinidad de causas, entre otras, la imperfeccion de nuestros sentidos, la de los aparatos ó instrumentos de que se haga uso, la falta de habilidad del operador, etc.

Estos errores pueden clasificarse en accidentales ó irregulares, sistemáticos ó constantes, y regulares.

Entendemos por errores accidentales ó irregulares, los debidos á causas variables en magnitud y que pueden tener opuestos medios de existencia, lo que hace que estos errores se produzcan indiferentemente en uno ú otro sentido.

Errores constantes son los debidos á causas permanentes en intensidad y modo de existencia, lo que dá por resultado el que estos errores tengan valores fijos en magnitud y sentido.

Finalmente se llaman errores regulares aquellos que, en cada série parcial ó grupo de experiencias, satisfacen á la definicion de los errores constantes; pero que en el conjunto de los distintos grupos ó séries se producen indistintamente en uno ú otro sentido. Se ve pues, que estos errores deben considerarse comprendidos en los accidentales cuando se multiplica suficientemente el número de experiencias; por lo que no los tomaremos en consideracion.

Aun cuando pudiera creerse que los errores cometidos en las experiencias no pueden someterse á ninguna ley, la práctica demuestra contínuamente, que cada vez que se hace un gran número de estas, en condiciones análogas, los errores iguales se repiten próximamente el mismo número de veces.

Ordinariamente estos errores no pueden pasar de ciertos límites, por más que no sea posible señalarlos con exactitud. Si nos fijamos en los errores accidentales, será tanto más fácil que pasen desapercibidos, y por regla general habrá mas probabilidad de cometerlos, á medida que sean menores. Un error que difiera mucho de todos los restantes, debe considerarse como un indicio de negligencia ó ignorancia en el modo de hacer la observacion ó experiencia, y ésta debe ser por lo tanto rechazada.

Si representamos en general por x el error cometido en la medida de una cantidad C es evidente, que la probabilidad P de cometer un error comprendido entre cero y x, aumentará con x. Esta probabilidad será pues una funcion de x, que aun cuando no conozcamos podremos designar por $F(x)$ y que comprendemos desde luego que dependerá del género de observaciones ó experiencias que hayan dado ésta medida.

Designando por p_x la probabilidad para que el error esté comprendido entre x y $x + dx$, en virtud del principio de la probabilidad total (§ 20), podremos establecer la ecuacion:

$$F(x+dx) = F(x) + p_x; \quad (1)$$

puesto que el primer miembro representa la probabilidad para que el error esté comprendido entre cero y $x + dx$, y esto se verificará cuando lo esté entre cero y x ó entre x y $x + dx$.

De la ecuacion (1) se deduce:

$$p_x = F(x+dx) - F(x) = \varphi(x)\, dx; \quad (2)$$

designando por $\varphi(x)$ la derivada de $F(x)$.

Teniendo en cuenta que dx es una cantidad infinitamente pequeña con relacion á x y con el fin de abreviar el lenguaje diremos, que la fórmula (2) expresa la probabilidad de cometer un error x en vez de decir que es la de cometer un error comprendido entre x y $x+dx$; sin que por esto pueda creerse que introducimos el menor error en los cálculos, pues siempre debe sobreentenderse el verdadero significado de P.

El conocimiento de la funcion $\varphi(x)$ nos permitiría determinar la probabilidad para que el error cometido en una observacion esté comprendido entre dos números dados a y b, lo que se verificará estándolo en alguno de los intervalos infinitamente pequeños en que podemos concebir descompuesto el que se considera, deduciendo por la aplicacion del principio de la probabilidad total, que tendría por valor:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Más adelante se verá tambien, que conocida que sea la funcion $\varphi(x)$, puede determinarse fácilmente la probabilidad de que el error esté comprendido entre dos límites dados, cuando en vez de deducir el valor de una cantidad por medio de una sola observacion ó experiencia se considera un número cualquiera de éstas.

Antes de ocuparnos de determinar la forma de la expresada funcion $\varphi(x)$, á la que se le ha dado el nombre de *facilidad de cometer el error* x, conviene hacer mencion de algunas cantidades auxiliares que juegan un papel importante en esta teoría.

Concibamos una série de experiencias, que tengan por objeto determinar el valor de una cantidad C, tales, que pueda considerarse constante la probabilidad correspondiente á cada valor del error. Si se conciben efectuadas un número N infinitamente grande de estas experiencias y suponemos que en n_x casos el error ha resultado comprendido entre x y $x+dx$, se podrá tomar por valor de la probabilidad p_x del error x, con arreglo al teorema de Bernoulli, la razon $\frac{n_x}{N}$ y se tendrá:

$$p_x = \frac{n_x}{N}$$

y como por otra parte está expresada, segun se ha visto en el párrafo anterior, por:

$$p_x = \varphi(x)\, dx$$

se deduce, que

$$\frac{n_x}{N} = \varphi(x)\, dx\,,$$

de donde

$$n_x = N.\varphi(x)\, dx\,,$$

y multiplicando por x^r, los dos miembros de esta última ecuacion, siendo r un número entero positivo cualquiera, se tendrá:

$$n_x\, x^r = N.x^r.\varphi(x)\, dx\,.$$

El primer miembro de esta ecuacion es la suma de las potencias r de los n_x errores iguales á x. Si concebimos todas las ecuaciones análogas á esta, correspondientes á los diversos valores de x y las sumamos ordenadamente, tendremos:

$$\Sigma n_x x^r = \mathrm{N}\int_{-\infty}^{\infty} x^r \varphi(x)\,dx$$

que dará la suma de las potencias r de todos los errores posibles (*) y como su número total es N, si dividimos ambos miembros por dicho número, el primero representará la media diferencial de las potencias r de los errores y designándole por M_r se tiene:

$$\mathrm{M}_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \varphi(x)\,dx.$$

Haciendo $r = 0, 1, 2, 3\ldots.$ se obtiene:

$$\mathrm{M}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx;\ \mathrm{M}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,dx;\ \mathrm{M}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\varphi(x)\,dx\ldots.$$

La primera de estas cantidades es igual á la unidad. En efecto: la potencia *cero* de cada error se convierte en la unidad, y como M_0 es la media diferencial de estas potencias se reduciría á $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}} = 1$.

(*) En rigor, el error no puede pasar de ciertos límites y si suponemos que haya de estar comprendido entre $-a$ y b, la funcíon $\varphi(x)$ deberá ser nula fuera de este intervalo, ó por lo ménos y esto es lo que despues veremos que hay que admitir, se la supone con un valor tan pequeño que sea despreciable. Por este motivo podemos reemplazar los límites $-a$ y b por los empleados $-\infty$ y $+\infty$.

A esta misma conclusion se llega sin mas que observar que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx$$

expresa la probabilidad para que el error esté comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$ y como ciertamente tendrá esto lugar, la probabilidad se convierte en certeza y tendrá por valor la unidad. Se podrá escribir por lo tanto $M_0 = 1$.

La segunda cantidad M_1 representa la media diferencial de los errores y será evidentemente nula cuando solo existan errores accidentales; puesto que en este caso $\varphi(x)$ será igual á $\varphi(-x)$ y el elemento diferencial $x\varphi(x)\,dx$ cambiará de signo con x.

M_2 expresa la media díferencial de los cuadrados de los errores, y si se supone $M_2 = \text{E}^2$, de donde $\text{E} = \sqrt{M_2}$, á la cantidad E se le llama error medio cuadrático, que como vemos no puede confundirse con el medio diferencial de los errores.

No debe perderse de vista, que todas estas consideraciones se han hecho bajo la hipótesis de ser infinitamente grande el número de experiencias, con lo cual se habrán producido todos los errores posibles, y que la significacion de M_0, M_1 M_2..... está esencialmente basada en esta hipótesis.

En los párrafos siguientes trataremos de investigar las relaciones que ligan á estas cantidades, con sus análogas, en el caso de ser limitado el número de observaciones.

Media diferencial de los errores.

28. Concibamos una série de m experiencias que designaremos por

$$E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots E_m,$$

y representemos por

$$x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m,$$

los errores cometidos en cada una de ellas al investigar el valor de una cantidad C.

Estando expresada la probabilidad de un error x por la fórmula (§ 27)

$$p = \varphi(x)\, d\, x,$$

la de los errores mencionados tendrá por expresion:

$$p_1 = \varphi(x_1)\, d\, x_1;\ p_2 = \varphi(x_2)\, d\, x_2;$$

$$p_3 = \varphi(x_3)\, d\, x_3 \ldots\ldots p_m = \varphi(x_m)\, d\, x_m;$$

luego la probabilidad P' de que sucesivamente se hayan cometido estos errores, en virtud del primer principio de la probabilidad compuesta será:

$$P' = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \varphi(x_3) \ldots\ldots \varphi(x_m)\, d\, x_1 \cdot d\, x_2 \cdot d\, x_3 \ldots\ldots d\, x_m$$

y la probabilidad P para que la suma

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_m$$

de los errores esté comprendida entre $\alpha - l$ y $\alpha + l$ se obtendrá, con arreglo al principio de la probabilidad total (§ 20) sumando todos los valores que P' puede recibir correspondientes á los de $x_1, x_2 \ldots\ldots x_m$ que satisfagan á la condicion

$$\alpha - l < x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m < \alpha + l; \quad (1)$$

y tendremos:

$$P = \int\int\int \ldots\ldots \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\ldots\varphi(x_m)\, dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_m$$

siendo variables los límites de estas integrales que deben satisfacer á las desigualdades (1). Estos límites variables pueden reemplazarse por los constantes $-\infty$ y $+\infty$ siempre que se multiplique á la funcion diferencial por un factor, que sea igual á la unidad para los valores de $x_1, x_2 \ldots\ldots x_m$ que verifiquen á las mencionadas desigualdades, y que se anule en el caso contrario.

Este factor puede determinarse por la fórmula de Fourier que encontramos en el párrafo (16) bajo la forma:

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{u(t-x)\sqrt{-1}}\, dx.$$

Hagamos

$$t = x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_m$$

y supongamos que para los valores de t

$$\left.\begin{matrix} t > \alpha - l \\ t < \alpha + l \end{matrix}\right\} \text{ se verifica } \quad \psi(t) = 1$$

y que para los valores

$$t < \alpha - l \quad \text{ó} \quad t > \alpha + l \quad \text{se tiene} \quad \psi(t) = 0.$$

En este supuesto podremos reemplazar los límites $-\infty$ y $+\infty$ de la segunda integral por $\alpha-l$ y $\alpha+l$ puesto que fuera de ellos se anula $\Psi(x)$. Una vez reemplazados los límites podrá sustituirse la unidad en vez de $\Psi(x)$ y tendremos:

$$\Psi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\,u \int_{\alpha-l}^{\alpha+l} e^{u(t-x)\sqrt{-1}}\,d\,x.$$

Efectuando la segunda integracion resulta:

$$\Psi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\,u\,\frac{e^{u(t-\alpha+l)\sqrt{-1}}-e^{u(t-\alpha-l)\sqrt{-1}}}{u\sqrt{-1}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{u(t-\alpha)\sqrt{-1}}\times\frac{e^{ul\sqrt{-1}}-e^{-ul\sqrt{-1}}}{u\sqrt{-1}}\,d\,u$$

y teniendo en cuenta la fórmula

$$\text{sen.}\,x=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

de donde

$$\text{sen.}\,u\,l=\frac{e^{ul\sqrt{-1}}-e^{-ul\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

se tendrá:

$$\Psi(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{u(t-\alpha)\sqrt{-1}}\cdot\frac{\text{sen.}\,u\,l}{u}\,d\,u,$$

que es el factor que hemos de introducir y que satisface á las dos condiciones mencionadas.

El valor de P podremos trasformarlo en el siguiente:

$$P=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\dots\varphi(x_1)\,d\,x_1\,\varphi(x_2)\,d\,x_2\dots\dots$$

$$\varphi(x_m)\,d\,x_m\,.\,e^{u(t-\alpha)\sqrt{-1}}\,.\,\frac{\text{sen.}\,u\,l}{u}\,d\,u$$

y recordando, que

$$t=x_1+x_2+\dots\dots+x_m$$

se deduce:

$$P=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\dots\varphi(x_1)e^{u\,x_1\sqrt{-1}}d\,x_1\times\varphi(x_2)e^{u\,x_2\sqrt{-1}}\,d\,x_2$$

$$\times\dots\dots\varphi(x_m)e^{u\,x_m\sqrt{-1}}\,d\,x_m\times e^{-u\alpha\sqrt{-1}}\,.\,\frac{\text{sen.}\,u\,l}{u}\,d\,u\,.$$

Quedando así efectuada la separacion de las variables $x_1, x_2\dots\dots x_m$, podremos efectuar las integraciones con respecto á cada una de ellas y se obtendrá:

$$P=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha u\sqrt{-1}}\,\frac{\text{sen.}\,u\,l}{u}\,d\,u\times\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1)e^{u\,x_1\sqrt{-1}}\,d\,x_1$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_2)\,e^{u\,x_2\sqrt{-1}}\,d\,x_2\dots\dots\times\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_m)e^{u\,x_m\sqrt{-1}}\,d\,x_m$$

y haciendo

$$T=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{u\,x\sqrt{-1}}\,d\,x\,,\quad(2)$$

las m integrales con respecto á $x_1, x_2 \ldots\ldots x_m$, que figuran en el valor de P, serán evidentemente iguales á T, y se tendrá por lo tanto:

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T^m . e^{-n\alpha\sqrt{-1}} . \frac{\text{sen.}\, u\, l}{u} d\, u. \qquad (3)$$

Sustituyendo en la fórmula (2) en vez de la exponencial $e^{ux\sqrt{-1}}$ su desarrollo en série tendremos:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d\, x \left(1 + \frac{u\, x\sqrt{-1}}{1} - \frac{u^2 x^2}{1.2} - \frac{u^3 x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \ldots\right)$$

de donde,

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d\, x + u\sqrt{-1} \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\, d\, x - \frac{u^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x)\, d\, x \ldots\ldots$$

Puede observarse que las integrales que aparecen en el segundo miembro son las ya designadas por las notaciones

$$M_0 = 1, M_1, M_2, M_3 \ldots\ldots$$

y por lo tanto el valor de T podrá escribirse bajo la forma:

$$T = 1 + u\, M_1 \sqrt{-1} - \frac{u^2 M_2}{1.2} - \frac{u^3 M_3}{1.2.3} \sqrt{-1} \ldots\ldots$$

La experiencia ha demostrado, que por regla general, las cantidades $M_1, M_2, M_3 \ldots.$ que como ya se ha dicho expresan respectivamente las medias diferenciales de las primeras, segundas, terceras... potencias de los errores, van disminuyendo rápidamente á medida que aumenta su índice; lo que no debe extrañarse si se tiene en cuenta, que es mucho mayor la facilidad de cometer errores pequeños que grandes. Por otra parte, analizando las fórmulas (2) y (3) se observa, que la (2) dará para T un valor cuyo módulo será menor que la unidad; puesto que el módulo de la suma representada en la integral, será menor que la suma de los módulos de los sumandos que tiene por valor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d\,x = 1\,;$$

y si nos fijamos en la (3) deducimos, que el módulo de T^m que será igual á la potencia m del módulo de T, será con mayor razon menor que la unidad, tanto menor cuanto mayor sea m; además, á medida que u aumente, el factor $\frac{\text{sen.}\, u\, l}{u}$ tomará valores cada vez más pequeños y el módulo de p, que será la misma cantidad p por ser real, y que ha de ser menor que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Mod.}^{\text{o}} \left(T^m \frac{\text{sen.}\, u\, l}{u}\, d\, u\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen.}\, u\, l}{u}\, d\, u\, \left(\text{Mod.}^{\text{o}}\, T\right)^m$$

solo tomará valores sensibles para los pequeños de u. Atendiendo á estas consideraciones y con el fin de simplificar los cálculos, despreciaremos los términos del desarrollo anterior que contengan las cantidades M_3, M_4... y las potencias de grado superior al segundo de u. El valor de T se reducirá á

$$T = 1 + u\, M_1 \sqrt{-1} - \frac{u^2\, M_2}{1\,.\,2},$$

de donde, tomando los logaritmos y aplicando la fórmula

$$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\cdots\cdots$$

tendremos:

$$l\mathrm{T}=\mathrm{M}_1 u\sqrt{-1}-\frac{\mathrm{M}_2 u^2}{1.2}+\frac{\mathrm{M}_1{}^2 u^2}{1.2}. \quad (4)$$

Se han despreciado en este desarrollo todos los términos que contienen potencias de u superiores á la segunda, que aparecen combinadas con otras de M_1 y M_2.

De la ecuacion (4) se deduce:

$$\mathrm{T}=e^{\mathrm{M}_1 u\sqrt{-1}-\frac{\mathrm{M}_2 u^2}{2}+\frac{\mathrm{M}_1{}^2 u^2}{2}}=e^{\mathrm{M}_1 u\sqrt{-1}}\,e^{-u^2\frac{\mathrm{M}_2-\mathrm{M}_1{}^2}{2}}$$

y sustituyendo este valor en la fórmula (3) se tiene:

$$\mathrm{P}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(m\mathrm{M}_1-\alpha)u\sqrt{-1}}\quad e^{-u^2\frac{\mathrm{M}_2-\mathrm{M}_1{}^2}{2}m}\;\frac{\text{sen.}\,u\,l}{u}\,du;$$

fórmula que expresa la probabilidad para que la suma de los errores esté comprendida entre $-\alpha$ y $+\alpha$. Suponiendo á l constante, á cada valor de α corresponderá otro para p y esta última cantidad tomará un valor máximo cuando sea $\alpha=m\,\mathrm{M}_1$: en efecto, por ser p cantidad real, es igual á su módulo, y este será menor que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2\frac{\mathrm{M}_2-\mathrm{M}_1{}^2}{2}.m}\times\frac{\text{sen.}\,u\,l}{u}\,du$$

que es la suma de los módulos de los diversos valores del elemento diferencial, y solo en el caso de ser $\alpha = M_1 m$ es cuando p llegará á ser igual á esta suma. Siendo este razonamiento independiente del valor atribuido á l, podrá suponerse á esta cantidad tan pequeña como se quiera y concebir en el límite, que se han hecho iguales las tres cantidades $\alpha - l$, α y $\alpha + l$, deduciéndose por lo tanto que el valor más probable de la suma de los errores es, $\alpha = m M_1$; lo que equivale á decir, que el valor más probable de la media diferencial de los errores es M_1.

Si se supone $\alpha = m M_1$ tendremos:

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 \frac{M_2 - M_1^2}{2} \times m} \times \frac{\text{sen.}\, u\, l}{u} \, d\, u$$

y haciendo

$$a = m \frac{M_2 - M_1^2}{2}$$

se tiene:

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a u^2} \times \frac{\text{sen.}\, u\, l}{u} \, d\, u.$$

En el (§ 9) se encontró la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen.}\, b\, u}{u} \, e^{-a u^2} \, d\, u = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_0^b e^{-\frac{b^2}{4a}} \, d\, b.$$

Cambiando b en l y sustituyendo el resultado en el valor de p se obtiene:

$$P = \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \int_0^l e^{-\frac{l^2}{4a}} dl;$$

resultado que puede simplificarse haciendo

$$\lambda = \frac{l}{2\sqrt{a}} = \frac{l}{2\sqrt{m\frac{M_2 - M_1^2}{2}}} = \frac{l}{\sqrt{2(M_2 - M_1^2)}},$$

de donde

$$d\lambda = \frac{dl}{2\sqrt{a}} \quad \text{y} \quad dl = 2\sqrt{a}\, d\lambda$$

y se tendrá:

$$(5) \quad p = \frac{1}{\sqrt{a\pi}} \int_0^\lambda e^{-\lambda^2} . 2\sqrt{a} . d\lambda$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda e^{-\lambda^2} d\lambda = \theta(\lambda).$$

Tal es la fórmula que expresa la probabilidad para que la suma

$$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m$$

de los errores esté comprendida entre

$$m M_1 - l \quad \text{y} \quad m M_1 + l,$$

ó lo que es lo mismo para que la media diferencial

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots.. + x_m}{m},$$

esté comprendida entre

$$M_1 - \frac{l}{m} \text{ y } M_1 + \frac{l}{m}.$$

Examinando la fórmula (5) podremos observar, que su segundo miembro es el mismo encontrado en el (§ 23) al tratar del teorema de Bernoulli, sin más diferencia que la del límite de la integral. Por simplificar designaremos en lo sucesivo á esta expresion por $\theta(\lambda)$ segun expresa la ecuacion (5) y como segun veremos vuelve á presentarse en las investigaciones más importantes de que hemos de ocuparnos, es necesario poder calcular fácilmente su valor, y á este fin, se emplea la tabla 1.ª que contiene los valores correspondientes de λ y $\theta(\lambda)$.

La simple inspeccion de la tabla mencionada hace ver, la suma rapidez con que $\theta(\lambda)$ se aproxima á la unidad, cuando crece λ, bastando hacer $\lambda = 2{,}6$ para que sea $\theta(\lambda) = 0{,}99...$

Segun se lleva dicho, podremos interpretar la fórmula (5), que expresa la probabilidad para que la suma de los errores esté comprendida entre $M_1 m - l$ y $M_1 m + l$, diciendo que expresa la probabilidad para que la media diferencial

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m}{m}$$

de los errores esté comprendida entre

$$M_1 - \frac{l}{m} \text{ y } M_1 + \frac{l}{m}.$$

El límite λ puede escribirse bajo la forma

$$\lambda = \frac{\frac{l}{m}\sqrt{m}}{\sqrt{(2\,M_2 - M_1^2)}}$$

y puede observarse que para un valor constante de $\frac{l}{m}$, este límite λ irá aumentando con m y cuando sea $m=\infty$ se tendrá $\lambda=\infty$, en cuyo caso el valor de P se convertirá en

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1.$$

Dedúcese por consiguiente que la probabilidad P de que la media diferencial de los errores esté comprendida entre

$$M_1 - \frac{l}{m} \quad \text{y} \quad M_1 + \frac{l}{m},$$

permaneciendo constante $\frac{l}{m}$, se va aproximando indefinidamente á la certeza á medida que m aumente. A esta conclusion se llega, sea cualquiera el valor de $\frac{l}{m}$, por pequeño que se suponga; por lo tanto, en el límite, cuando $\frac{l}{m}=0$ y m crezca indefinidamente, deduciremos que la media diferencial de los errores se irá tambien aproximando indefinidamente á M_1.

Puede notarse por otra parte, que siendo ordinariamente M_1 y M_2 cantidades pequeñas, aun cuando tambien se atribuya un valor pequeño á la razon $\frac{l}{m}$, no es necesario que m sea muy grande para que λ adquiera un valor igual ó superior á 3, obteniéndose entónces para P, segun indica la tabla 1.ª, un valor extremadamente próximo á la unidad, que como se sabe, simboliza la certeza.

Este análisis demuestra, que siendo algo considerable el número de experiencias, se puede tomar como valor muy aproximado de M_1, la media diferencial de los errores.

Terminaremos este párrafo con una observacion que puede evitar el que se incurra posteriormente en un error. Es evidente que para un valor dado de P podrá conseguirse que la media diferencial de los errores esté comprendida en un intervalo

$$M_1 - \frac{l}{m} \ldots M_1 + \frac{l}{m},$$

tanto más pequeño cuanto mayor sea m; puesto que el límite λ del cual depende P, puede hacerse que sea constante, sin mas que hacer variar á $\sqrt{m}$ en razon inversa de $\frac{l}{m}$; pero si en vez de fijarnos en dicha media diferencial lo hiciésemos en la suma de los errores, para que λ, y P por lo tanto, permanezcan constantes cuando m aumente, será preciso que tambien aumente l; por consiguiente el intervalo

$$m M_1 - l \ldots . . m M_1 + l$$

lejos de ir disminuyendo iria aumentando.

29. *Nueva interpretacion de* M_1.

El error, que se comete en una observacion ó experiencia, proviene por regla general de gran número de causas, de las cuales consideradas aisladamente, unas producen errores constantes y otras los accidentales. Designemos por K el error producido por el concurso de las primeras, que será constante para todas las observaciones; y por x' el correspondiente á las otras causas, y supongamos que x' tome los valores x'_1, x'_2..... x'_m en las m observaciones.

Podrán establecerse las ecuaciones:

$$x_1 = K + x', \quad x_2 = K + x'_1, \ldots\ldots x_m = K + x'_m$$

que, sumándolas y dividiendo por m el resultado, darán

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m}{m} = K + \frac{x'_1 + x'_2 + \ldots\ldots + x'_m}{m}.$$

Si ahora suponemos que m vá aumentando indefinidamente, el primer miembro se convertirá, en el límite, en M_1, y por ser entónces los errores accidentales de dos en dos iguales y de signo contrario, se anulará el término correspondiente del segundo miembro y quedará $\qquad M_1 = K.$

30. *Investigacion del error constante en un sistema de experiencias ú observaciones del mismo género.* (*)

Acaba de demostrarse que siendo considerable el número de observaciones de un mismo género, se puede tomar como valor muy aproximado de M_1 la media diferencial de los errores. Debemos sin embargo tener presente, que siendo los errores $x_1, x_2, \ldots x_m$, diferencias entre el valor exacto de la cantidad que se trata de determinar y sus valores aproximados obtenidos en las experiencias, cuando nos propongamos

(*) Entendemos por observaciones del mismo género, aquellas en que exista igual probabilidad de cometer un mismo error.

determinar el error constante, deberán hacerse estas sobre cantidades anteriormente conocidas y con el solo fin de conocer dicho error. Si por ejemplo, se trata de investigar el error constante correspondiente á la medida de un ángulo con un teodolito, se operará sobre un ángulo conocido y se hallarán los valores de dicho ángulo en un número considerable de observaciones; restando del valor exacto del ángulo cada uno de estos últimos, se obtendrán los errores respectivos y calculando su media diferencial quedará encontrado con gran aproximacion el error constante.

Una observacion deberá tenerse en cuenta para no confundir el error constante con el que pudiera producirse por las causas accidentales. Se comprende desde luego, que de no existir error constante, (ó lo que es lo mismo, de ser $M_1=0$) la probabilidad para que la media diferencial de los errores $x_1, x_2, \ldots x_m$ de las observaciones, esté comprendida entre

$$-\frac{l}{m} \text{ y } +\frac{l}{m}$$

estará expresada por la fórmula:

$$P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int^{\lambda} e^{\lambda^2}\, d\lambda \text{ siendo } \lambda=\frac{l}{\sqrt{2mM_2}}=\frac{\frac{l}{m}\sqrt{m}}{\sqrt{2M_2}} \quad (1)$$

En vez de M_2 puede sustituirse la media diferencial de los cuadrados de los errores, que como inmediatamente veremos, puede considerarse como su valor aproximado. En este supuesto, si se hace $\lambda=3$ podrá determinarse en la ecuacion (1) el valor de $\frac{l}{m}$, y como en esta hipótesis la probabilidad es tan grande, que puede considerársela como la certeza misma, deduciremos que la media diferencial de los errores deberá estar comprendida entre $-\frac{l}{m}$ y $+\frac{l}{m}$, dando á $\frac{l}{m}$ el valor hallado, que por regla general será muy pequeño. Por lo tanto siempre que, despues de haber calculado el valor de esta media diferencial, se viera que estaba comprendido entre dichos límites, deberá admitirse que solo obran causas accidentales y por lo tanto que $M_1=0$.

Media diferencial de los cuadrados de los errores.

31. Siguiendo un procedimiento enteramente análogo al anteriormente expuesto, deduciremos, que la probabilidad P para que la suma de los cuadrados de los errores esté comprendida entre $\alpha-l$ y $\alpha+l$ tiene por expresion:

$$P=\int\int\int \ldots\ldots \varphi(x_1)\,d\,x_1\,\varphi(x_2)\,d\,x_2\ldots\ldots\varphi(x_m)\,d\,x_m.$$

Los límites de estas integrales deben satisfacer á la condicion

$$\alpha-l<x_1^2+x_2^2+x_3^2+\ldots\ldots+x_m^2<\alpha+l.$$

El factor

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{u(t-\alpha)\sqrt{-1}}\times\frac{\text{sen.}\,u\,l}{u}\,d\,u$$

determinado en el párrafo anterior por medio de la fórmula de Fourier, puede servirnos tambien en este caso para hacer constantes los límites y conseguir al mismo tiempo la separacion de las variables, y suponiendo

$$t = x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_m^2$$

se tendrá:

$$P = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots\ldots \varphi(x_1)\,dx_1\,\varphi(x_2)\,dx_2 \ldots\ldots$$

$$\varphi(x_m)\,dx_m \,.\, e^{u(x_1^2+x_2^2+\ldots\ldots+x_m^2-\alpha)\sqrt{-1}} \times \frac{\text{sen.}\,u\,l}{u}\,du$$

que se puede escribir bajo la forma:

$$P = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ldots\ldots \varphi(x_1)\,e^{u x_1^2\sqrt{-1}}\,dx_1$$

$$.\, \varphi(x_2)\,e^{u x_2^2\sqrt{-1}}\,dx_2 \ldots\ldots \times \frac{\text{sen.}\,u\,l}{u}\,e^{-\alpha u\sqrt{-1}}\,du,$$

y haciendo

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,e^{u x^2\sqrt{-1}}\,dx \quad (1)$$

e tendrá:

$$P = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T^m \frac{\text{sen.}\,u\,l}{u}\,e^{-\alpha u\sqrt{-1}}\,du. \quad (2)$$

Desarrollando en série la exponencial que entra en la fórmula (1) resulta:

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\left(1 + u x^2 \sqrt{-1} - \frac{u^2 x^4}{1.2} \ldots\right) d x$$

$$= 1 + M_2 u \sqrt{-1} - \frac{M_4 u^2}{2} \ldots$$

y despreciando los términos que siguen al tercero se tendrá aproximadamente

$$T = 1 + M_2 u \sqrt{-1} - \frac{M_4 u^2}{2},$$

de donde

$$l T = M_2 u \sqrt{-1} - \frac{M_4 u^2}{2} + \frac{M_2^2 u^2}{2}$$

despues de haber despreciado en este desarrollo los términos que contengan las potencias de u superiores á la segunda, por las mismas razones expuestas en el párrafo anterior.

De esta última ecuacion se deduce:

$$T = e^{M_2 u \sqrt{-1} - \frac{M_4 u^2}{2} + \frac{M_2^2 u^2}{2}} = e^{M_2 u \sqrt{-1}} \times e^{-u^2 \frac{M_4 - M_2^2}{2}}$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (2) se tiene:

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(m M_2 - \alpha) u \sqrt{-1}} \times e^{-m u^2 \frac{M_4 - M_2^2}{2}} \times \frac{\text{sen.}\, u l}{u} d u$$

y suponiendo $\alpha = m M_2$ tendremos:

$$P = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m u^2 \frac{M_4 - M_2^2}{2}} \cdot \frac{\text{sen.}\, u l}{u} d u$$

resultado que solo difiere del obtenido en el párrafo anterior en que M_1 y M_2 están reemplazados en este caso por M_2 y M_4; podemos por lo tanto aprovecharnos de los cálculos anteriores y se tendrá:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2} d\lambda \quad (3)$$

siendo

$$\lambda = \frac{l}{\sqrt{2m(M_4 - M_2^2)}} = \frac{\frac{l}{m}\sqrt{m}}{\sqrt{2(M_4 - M_2^2)}}.$$

El análisis de la fórmula (3) idéntico al hecho anteriormente, hace ver que la probabilidad para que la media diferencial

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots . x_m^2}{m}$$

de los cuadrados de los errores esté comprendida entre

$$M_2 - \frac{l}{m} \text{ y } M_2 + \frac{l}{m},$$

suponiendo constante $\frac{l}{m}$; pero tan pequeño como se quiera, aumenta aproximándose indefinidamente á la unidad, ó sea á la certeza, á medida que el número m de experiencias sea mayor; y no es preciso que m sea excesivamente grande para que esta probabilidad adquiera un valor muy próximo á la certeza.

Se deduce por consiguiente que siendo algo considerable m podremos tomar por valor muy aproximado de M_2, la media diferencial de los cuadrados de los errores.

En la práctica para calcular los valores de P tanto en el caso anterior como en este, es preciso conocer los límites, pero teniendo en cuenta que las sumas M_1, M_2, y lo mismo se demostrará para la M_4, difieren muy poco respectivamente de las medias diferenciales de los errores, de los cuadrados y de las cuartas potencias, pueden sustituirse estas cantidades en vez de las otras que son desconocidas.

32. En muchos casos conviene tomar en consideracion la media diferencial de los valores absolutos de los errores, que podremos representar por

$$\frac{\sqrt{x_1^2}+\sqrt{x_2^2}+\ldots\ldots+\sqrt{x_m^2}}{m}.$$

Si se designa por μ el valor que reciba esta media diferencial, cuando el número de observaciones sea infinito, empleando el procedimiento expuesto (§ 27.) se tendrá:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x^2}\, \varphi(x)\, dx,$$

y repitiendo las consideraciones hechas (§ 28) deduciremos, que cuando es grande el número de observaciones, puede considerarse á la media diferencial de los valores absolutos de los errores, como un valor muy aproximado de μ.

A esta cantidad μ la denominaremos en lo sucesivo, *error medio aritmético*; sobreentendiéndose que el número de observaciones á que se refiere este medio diferencial, es infinito.

33. *Principio de la media diferencial.*

En el (§ 30) se ha expuesto el procedimiento que debe seguirse para determinar el error constante, si lo hay, de un género dado de observaciones. Una vez conocido este error, bastará para eliminarle, el disminuir á cada uno de los errores $x_1, x_2, \ldots. x_m$ dicha parte constante y operar con los resultados como si se hubieran obtenido inmediatamente de la observacion. En lo sucesivo, pues, solo consideraremos los errores accidentales y supondremos por lo tanto $M_1 = 0$.

Designando por $c_1, c_2, c_3 \ldots.. c_m$ los valores de la cantidad C obtenidos en las observaciones, se tendrá:

$$x_1 = C - c_1,\ x_2 = C - c_2 \ldots.. x_m = C - c_m$$

de donde

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots.. + x_m}{m} = C - \frac{c_1 + c_2 + \ldots.. + c_m}{m}.$$

Con arreglo á lo demostrado (§ 28) el valor más probable del primer miembro de esta ecuacion es M_1, que es cero por el supuesto; por lo tanto el valor más probable de la cantidad C será:

$$\frac{c_1 + c_2 + \ldots.. + c_m}{m},$$

que es la media diferencial de los obtenidos en las observaciones.

Aplicando la fórmula

$$(1)\ P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2} d\lambda, \text{ siendo } \lambda = \frac{\frac{l}{m}\sqrt{m}}{\sqrt{2 M_2}} \text{ por ser } M_1 = 0,$$

podrá calcularse la probabilidad para que la media diferencial

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m}{m}$$

esté comprendida entre

$$-\frac{l}{m} \text{ y } +\frac{l}{m},$$

ó lo que es lo mismo para que sea

$$-\frac{l}{m} < \mathrm{C} - \frac{c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_m}{m} < \frac{l}{m}.$$

Podrá por consiguiente interpretarse la fórmula (1) diciendo, que expresa la probabilidad para que la diferencia entre la cantidad C y la media diferencial de los valores deducidos de la observacion, sea en valor absoluto menor que $\frac{l}{m}$.

Ya se ha dicho que aun cuando se suponga que $\frac{l}{m}$ es muy pequeña, á expensas de dar á m un valor suficientemente puede conseguirse, que la probabilidad p difiera poco de la unidad ó sea de la certeza, sin que para ello sea necesario dar á m un valor excesivamente grande.

Dedúcese de este análisis, 1.º: *que el valor más probable de una cantidad* C *de la que se conocen otros* m *deducidos de observaciones del mismo género, es la media diferencial de estos valores;* 2.º: *que siendo suficientemente grande el número de observaciones, puede* *tomarse á dicha media diferencial como valor muy aproximado de la cantidad.*

A la media diferencial de los valores observados, la consideraremos por lo tanto, como el valor más racional de la cantidad.

EXPRESION ANALÍTICA DE LA LEY DE PROBABILIDAD DE LOS ERRORES.

34. Consideremos una série de m experiencias que tengan por objeto el determinar el valor de una cantidad w, y supongamos primero, que en todas ellas sea constante la probabilidad de cometer un mismo error, lo que tambien se expresa diciendo, que son del mismo género ó de igual precision; y segundo, que no existan errores constantes, bien sea porque se hayan eliminado ó porque realmente se cumpla esta hipótesis.

Es evidente, que la ley de probabilidad que nos proponemos encontrar, quedará conocida, cuando lo esté la funcion $\varphi(x)$, que expresa la facilidad de un error x. Para determinar esta funcion emplearemos el método seguido por Gauss que está basado en el principio de la media diferencial demostrado en el párrafo anterior y que muy comunmente suele admitirse como un axioma.

Supongamos que en las m experiencias se han obtenido los valores $C_1\ C_2 \ldots . C_m$ para la cantidad w y designando por $x_1, x_2 \ldots . x_m$ los errores correspondientes, tendremos:

$$x_1 = w - C_1\,,\quad x_2 = w - C_2 \ldots . x_m = w - C_m. \quad (1)$$

Las probabilidades respectivas de cometer estos errores serán:

$$\varphi(x_1)\,dx_1 \quad \varphi(x_2)\,dx_2 \ldots\ldots \varphi(x_m)\,dx_m$$

y por lo tanto la probabilidad p para que todos estos errores se produzcan en las m observaciones, en virtud del primer principio de la probabilidad compuesta tendrá por expresion:

$$p = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\ldots\varphi(x_m)\,dx_1\,dx_2\ldots\ldots dx_m$$

Esto supuesto, el método que vamos á seguir, consiste, en operar con la funcion $\varphi(x)$ como si fuese conocida, determinando por medio del teorema de Bayes, las relaciones que deben existir entre los errores $x_1, x_2, \ldots x_m$ para que correspondan al valor más probable de w; estableceremos despues la ecuacion que expresa que dicho valor más probable es el deducido del principio de la media diferencial y la combinacion de todas estas ecuaciones dará, segun veremos, la forma de la funcion $\varphi(x)$.

Los errores $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_m$ dependen segun expresa la ecuacion (1) del valor que tenga la cantidad desconocida w y á cada hipótesis que se haga respecto á éste corresponderán otros determinados para $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$ y por consiguiente para p. La hipótesis más probable será, segun el teorema de Bayes, la que dé la mayor probabilidad al suceso compuesto observado, es decir, la que dé un valor máximo para p.

Si hacemos

$$z = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\ldots\varphi(x_m)$$

es evidente que p tomará su valor máximo cuando tambien lo sea z y por consiguiente $l.z$, que consideraremos con preferencia á z por facilitar los cálculos. Dicho logaritmo tendrá por expresion:

$$l.z = l.\varphi(x_1) + l.\varphi(x_2) + l.\varphi(x_3) + \ldots\ldots + l.\varphi(x_m).$$

El máximo de $l.z$ se obtendrá igualando á cero su derivada, y para hallar ésta se tendrá en cuenta que x_1, x_2, $x_3 \ldots\ldots x_m$ son funciones de w. Así se obtendrá:

$$\frac{\varphi'(x_1)}{\varphi(x_1)} + \frac{\varphi'(x_2)}{\varphi(x_2)} + \ldots\ldots + \frac{\varphi'(x_m)}{\varphi(x_m)} = 0. \quad (1)$$

Haciendo

$$F(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \quad (2)$$

la ecuacion (2) podrá escribirse bajo la forma:

$$F(x_1) + F(x_2) + \ldots\ldots + F(x_m) = 0. \quad (3)$$

Por otra parte de la ecuacion (1) se deduce:

$$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m = m\,w - (c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_m)$$

y como segun el principio de la media diferencial se tiene:

$$w = \frac{c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_m}{m} \quad \text{de donde} \quad mw = c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_m$$

se tendrá:

$$x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m = 0. \quad (4)$$

La ecuacion (3) ha de verificarse sea cualquiera la série de observaciones que se considere, ó lo que es lo mismo, con todos los valores de x_1, $x_2 \ldots\ldots x_m$ que satisfagan á la (4). Podremos pues considerar á todos los errores ménos uno como variables independientes y el restante que supondremos sea x_1, como funcion de los demás, teniendo por expresion:

$$x_1 = - x_2 - x_3 \ldots\ldots x_m . \qquad (5)$$

Derivando la ecuacion (3) con respecto á cada una de las variables supuestas independientes se obtiene:

$$\frac{d\,\mathrm{F}(x_1)}{d\,x_1} \cdot \frac{d\,x_1}{d\,x_2} + \frac{d\,\mathrm{F}(x_2)}{d\,x_2} = 0$$

$$\frac{d\,\mathrm{F}(x_1)}{d\,x_1} \cdot \frac{d\,x_1}{d\,x_3} + \frac{d\,\mathrm{F}(x_3)}{d\,x_3} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\,\mathrm{F}(x_1)}{d\,x_1} \cdot \frac{d\,x_1}{d\,x_m} + \frac{d\,\mathrm{F}(x_m)}{d\,x_m} = 0$$

De la ecuacion (5) se deduce:

$$\frac{d\,x_1}{d\,x_2} = \frac{d\,x_1}{d\,x_3} = \frac{d\,x_1}{d\,x_m} = -1$$

y por lo tanto las anteriores se convertirán en

$$\frac{d\,\mathrm{F}(x_1)}{d\,x_1} = \frac{d\,\mathrm{F}(x_2)}{d\,x_2}$$

$$\frac{d\,\mathrm{F}(x_1)}{d\,x_1} = \frac{d\,\mathrm{F}(x_3)}{d\,x_3}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\,\mathrm{F}(x_1)}{d\,x_1} = \frac{d\,\mathrm{F}(x_m)}{d\,x_m}$$

ó lo que es lo mismo:

$$\frac{d\,F(x_1)}{d\,x_1} = \frac{d\,F(x_2)}{d\,x_2} = \frac{d\,F(x_3)}{d\,x_3} = \ldots\ldots = \frac{d\,F(x_m)}{d\,x_m}.$$

Vemos pues que la derivada $\frac{d\,F(x)}{d\,x}$ tiene un valor constante y designándolo por K tendremos:

$$\frac{d\,F(x)}{d\,x} = K, \quad \text{de donde} \quad d\,F(x) = K\,d\,x$$

é integrando

$$F(x) = K\,x + C. \qquad (6)$$

Para determinar la constante C sustituyamos en esta ecuacion por x sus valores $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_m$ y sumando los resultados se obtendrá:

$$F(x_1) + F(x_2) + \ldots\ldots + F(x_m) = K\,(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_m) + m\,C,$$

y teniendo en cuenta las ecuaciones (3) y (4) quedará ésta reducida á

$$m\,C = 0 \quad \text{de donde} \quad C = 0$$

y la (6) se convertirá en

$$F(x) = K\,x.$$

Si ahora reemplazamos $F(x)$ por su equivalente $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ quedará:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(x)} = K\,x.$$

Multiplicando ambos miembros por $d\,x$ é integrando se obtiene

$$l\,\varphi(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{K}\,x^2 + \mathrm{C}'$$

de donde

$$\varphi(x) = e^{\frac{1}{2}\mathrm{K}x^2 + \mathrm{C}'} = e^{\mathrm{C}'} \times e^{\frac{1}{2}\mathrm{K}\,x^2}$$

La constante K deberá ser negativa puesto que se sabe, que la facilidad de un error x disminuye cuando este aumenta y cero por límite. Si se supone pues

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{K} = -h^2 \quad \text{y} \quad e^{\mathrm{C}'} = \mathrm{A}$$

tendremos

$$\varphi(x) = \mathrm{A}\,e^{-h^2x^2}. \qquad (7)$$

Aun cuando aparecen dos constantes en la expresion formular de $\varphi(x)$ vamos á ver, que A puede determinarse en funcion de h, quedando por consiguiente una sola indeterminada.

Se sabe en efecto, que la probabilidad de cometer un error comprendido entre a y b tiene por expresion

$$\int_a^b \varphi(x)\,d\,x$$

y es evidente, segun ya hemos dicho en otras ocasiones, que esta probabilidad se convierte en certeza y toma por valor la unidad cuando sean $a = -\infty$ y $b = \infty$, esto es

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,d\,x = 1.$$

Sustituyendo en vez de $\varphi(x)$ su valor (7) tendremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{A}\, e^{-h^2x^2}\, dx = 1. \quad (8)$$

Haciendo $t = h\,x$, de donde $d\,t = h\,d\,x$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}\, d\,x = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, d\,t.$$

La integral que figura en el segundo miembro la hemos encontrado (§ 4) y se vió que tenia por valor $\sqrt{\pi}$, luego la ecuacion anterior se convertirá en:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2x^2}\, d\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

y la (8) despues de sacar fuera de la integral la constante A se reducirá

$$\frac{\mathrm{A}\sqrt{\pi}}{h} = 1 \text{ de donde } \mathrm{A} = \frac{h}{\sqrt{\pi}};$$

luego la ecuacion (7) quedará como se habia indicado con una sola constante, sustituyendo en vez de A su valor, y será

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2x^2}$$

La constante h solo puede determinarse por la experiencia, empleando procedimientos que despues expondremos, y no puede ménos de ser así, puesto que de otro modo la probabilidad de cometer un error comprendido entre dos límites dados, sería independiente de las circunstancias que producen los errores, lo que es absurdo.

Una vez obtenida la funcion $\varphi(x)$ se puede espresar la probabilidad de cometer un error x (ó hablando con más exactitud, de cometer un error comprendido entre x y $x+d\,x$) por medio de la fórmula

$$p_x = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}\, d\,x \qquad (9)$$

y la probabilidad para que el error esté comprendido entre dos límites a y b estará determinada por la fórmula

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2 x^2}\, d\,x \qquad (10)$$

Las fórmulas (9) y (10) no deben considerarse de rigurosa exactitud; para comprenderlo basta tener en cuenta, primero que se ha admitido tácitamente la posibilidad de expresar la funcion $\varphi(x)$ en forma analítica, y segundo, que hemos partido como fundamento, del principio de la media diferencial que solo hemos demostrado por aproximacion. Sobre este asunto se expresa Gauss del modo siguiente: «La funcion que acabamos de encontrar

$$\left(\text{refiriéndose á } \varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}\right)$$

no puede expresar con todo rigor la probabilidad de los errores, puesto que, estando comprendidos los errores posibles entre ciertos límites, la probabilidad de los errores más grandes deberia ser nula, y la funcion $\varphi(x)$ tiene siempre un valor finito: sin embargo, este defecto que presentaria igualmente cualquiera otra funcion analítica no tiene ninguna importancia en las aplicaciones por que el valor de la funcion decrece tan rápidamente á poco considerable que sea $h\,x$, que puede con toda seguridad estimarse igual á cero.»

35. *Procedimiento que se sigue en la práctica para determinar la probabilidad de cometer un error comprendido entre dos límites dados.*

Supongamos conocida la constante h que figura en la fórmula (9 § 34) y distingamos dos casos en la cuestion indicada: 1.° que se trate de encontrar la probabilidad de cometer un error comprendido entre o y a; y 2.°, que estos dos límites sean a y b, distintos de cero.

En el primer caso, la probabilidad P tendrá por valor:

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-h^2x^2}\,h\,dx \qquad (1)$$

y haciendo $hx = t$, se obtendrá:

$$P = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\,\theta(a\,h).$$

La funcion $\theta(a\,h)$ que aparece en esta fórmula, es la misma que se encontró al tratar del teorema de Bernoulli y ya se dijo que para calcular sus valores se emplea la tabla 1.ª por medio de la cual se puede determinar el valor de $\theta(\lambda)$ para cada uno de los de λ, siendo en este caso $\lambda = ah$; bastaría por lo tanto hallar el producto ah para que inmediatamente pudiera conocerse $\theta(ah)$ y por consiguiente P.

Como por hipótesis no existen errores constantes, la probabilidad de cometer un error comprendido entre $-a$ y $+a$ será doble del valor hallado para P y así tambien lo indica la fórmula (1) por no sufrir alteracion al cambiar x en $-x$. Esta probabilidad, que designaremos por P_1, tendrá por expresion:

$$P_1 = \theta(ah).$$

Podemos interpretar la cantidad P_1 diciendo, que es la probabilidad de cometer un error menor que a, en valor absoluto.

Pasemos al segundo caso y tratemos de encontrar la probabilidad P, de cometer un error comprendido entre dos límites cualesquiera a y b, que estará expresada por la fórmula

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2x^2}\,dx. \quad (2)$$

El valor de P podrá escribirse bajo la forma

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^b e^{-h^2x^2}\,dx - \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-h^2x^2}\,dx$$

y de este modo, cada uno de los términos se podrá calcular por el procedimiento expuesto en el caso anterior. En ambos, hemos supuesto conocida la constante h de cuyo valor depende, segun veremos enseguida, el grado de precision de las observaciones. Las diversas cantidades, que pueden servir para hacernos formar idea de este grado de precision y que sucesivamente iremos considerando, han recibido las denominaciones siguientes:

Medida de precision, ó módulo de convergencia;

Error medio aritmético, ó sea medio diferencial de los valores absolutos de los errores;

Error medio cuadrático, que tambien suele llamarse simplemente error medio;

Error probable;

Error máximo;

Coeficiente de exactitud;

Peso de las observaciones.

36. *Medida de precision ó módulo de convergencia.* Recibe este nombre la constante h que entra en el valor de P.

Examinando la fórmula (2) del párrafo anterior se observa desde luego, que para un mismo valor de a, la probabilidad P_1 de cometer un error menor que este número a, será tanto, mayor cuanto mayor sea la cantidad h y por lo tanto que al comparar dos géneros de observaciones, podremos afirmar, que el de más precision será aquel en que h tenga el mayor valor.

Concibamos un género de observaciones en que el módulo de convergencia tenga un valor h y otro en el que tenga por valor h'.

La probabilidad P de cometer en el primer género de observaciones un error menor que δ será:

$$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2 x^2} \, dx = \theta(h\delta)$$

y la probabilidad P′ de cometer en el segundo un error menor que δ' tendria por expresion:

$$P' = \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta'}^{+\delta'} e^{-h'^2 x^2} \, dx = \theta(h'\delta').$$

Estas dos probabilidades serán iguales siempre que se tenga

$$h\delta = h'\delta', \text{ de donde } \frac{h}{h'} = \frac{\delta'}{\delta}.$$

Vemos pues, que habrá igual facilidad de cometer en ambos géneros de observaciones errores respectivamente menores que δ y δ' siempre que estas cantidades sean inversamente proporcionales á los módulos de convergencia.

Si por ejemplo se supone $h = 2h'$, la facilidad de cometer un error menor que δ, en el primer género de observaciones, será la misma que la de cometer otro menor que 2δ en el segundo.

La presion de las observaciones aumenta por consiguiente con la cantidad h.

37. *Error medio aritmético.* Segun se ha visto (§ 32) tiene por expresion:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \sqrt{x^2} \, dx$$

y sustituyendo en vez de $\varphi(x)$ su valor quedará:

$$\mu = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2} \sqrt{x^2}\, d\,x;$$

de donde, por no cambiar el elemento diferencial al reemplazar x por $-x$, se deduce:

$$\mu = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-h^2 x^2} \sqrt{x^2}\, d\,x = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-h^2 x^2} x\, d\,x,$$

habiendo sustituido x en vez de $\sqrt{x^2}$, por ser x positivo en esta última integral.

Efectuando la integracion se obtiene:

$$\mu = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-h^2 x^2}\, 2\,h^2\, x\, d\,x = \frac{1}{h\sqrt{\pi}};$$

fórmula que hace ver, que el error medio aritmético disminuye á medida que vaya aumentando el módulo de convergencia, y por lo tanto la precision de las observaciones, variando en razon inversa del referido módulo de convergencia.

38. *Error medio cuadrático.* Ya se ha dicho que tiene por valor:

$$\mathrm{E} = \sqrt{\mathrm{M}_2}, \quad \text{siendo } \mathrm{M}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, x^2\, d\,x.$$

Sustituyendo en vez de $\varphi(x)$ su valor se tendrá:

$$\mathrm{M}_2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2} x^2\, d\,x = \frac{2\,h}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-h^2 x^2} x^2\, d\,x,$$

que se puede poner bajo la forma:

$$M_2 = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x . e^{-h^2 x^2}\, 2 h^2 x\, d x$$

y aplicando el método de integracion por partes se obtiene:

$$M_2 = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \left\{ -\left(x e^{-h^2 x^2}\right)_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-h^2 x^2}\, d x \right\}. \quad (1)$$

El producto $x e^{-h^2 x^2}$ se anula evidentemente con $x=0$, y tambien se anula con $x=\infty$, lo que se deduce despues de salvar la indeterminacion que se presenta: desaparecerá por lo tanto el primer término de la cantidad comprendida dentro del paréntesis. Respecto del segundo término, puede determinarse, recordando que segun se vió (34) se verifica:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-h^2 x^2}\, d x = 1,$$

de donde

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-h^2 x^2}\, d x = 1 \quad \text{y} \quad \int_0^{\infty} e^{-h^2 x^2}\, d x = \frac{\sqrt{\pi}}{2h}.$$

La ecuacion (1) se convertirá por consiguiente en

$$M_2 = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2h} = \frac{1}{2h^2},$$

y el error medio cuadrático tendrá por valor:

$$E = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Vemos pues que el error medio cuadrático varía en razon inversa del módulo de convergencia y disminuirá por consiguiente á medida que sea mayor la precision de las observaciones.

Dividiendo los valores del error medio aritmético y del error medio cuadrático se obtiene:

$$\frac{\mu}{\mathrm{E}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \quad \text{de donde} \quad \pi = 2\left(\frac{\mathrm{E}}{\mu}\right)^2 \; (1)$$

Se sabe que haciendo gran número de observaciones pueden determinarse con mucha aproximacion las cantidades $\mathrm{E} = \sqrt{\mathrm{M}_2}$, y μ, que diferirá poco del medio diferencial de los errores observados, por lo tanto se podrá hallar por la fórmula (1) el valor aproximado de π y comprobar así las consecuencias de esta teoría.

39. *Error probable*. Se dá este nombre á aquel en que se verifica, que la probabilidad de cometer un error menor en valor absoluto que él, sea igual á $\frac{1}{2}$; lo que equivale á decir, que debe existir igual facilidad para cometer los errores mayores y menores que él.

Se ha demostrado, que la probabilidad de cometer un error menor en valor absoluto que a está dada por la fórmula

$$\mathrm{P} = \theta\,(a\,h),$$

y como en el caso actual ha de ser igual á $\frac{1}{2}$, se tendrá

$$\theta\,(a\,h) = \frac{1}{2}.$$

De la tabla (1.ª) se deduce por medio de la interpolacion

$$a\,h = 0{,}476936\,;$$

si á este número se le designa por ρ, tendremos:

$$a\,h = \rho, \quad \text{de donde} \quad a = \frac{\rho}{h}\ (*), \qquad (1)$$

siendo por hipótesis

$$\rho = 0{,}476936$$

fórmula que hace ver, que tambien el error probable varía en razon inversa del módulo de convergencia.

40. *Error máximo.* Se sabe que por medio de la fórmula

$$P = \theta\,(\delta\,h) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-x^2 h^2}\,d\,x \qquad (1)$$

se puede encontrar la probabilidad de cometer un error menor en valor absoluto que δ. A medida que δ crece, tambien aumenta P como indica la tabla (1.ª). El valor máximo de P corresponde rigurosamente á $\delta = \infty$; pero si se observa que haciendo $\delta\,h = 1{,}9$ el valor de P difiere en una cantidad sumamente pequeña de la unidad, y tenemos por otra parte en cuenta

(*) Si se divide este valor de a por el hallado para el error medio en el párrafo anterior se tiene:

$$\frac{a}{E} = \rho\sqrt{2} = 0{,}476936 \times \sqrt{2} = 0{,}66\ldots\ldots$$

y se observa que el error probable es próximamente los $\frac{2}{3}$ del error medio cuadrático. En lo sucesivo designaremos por r este valor de a ó sea el error probable.

que la fórmula (1) es aproximada y los errores de las observaciones están siempre comprendidos entre ciertos límites, podremos admitir, que con dicho valor de δh se tendrá la certeza de que todos los errores estén comprendidos entre $-\delta$ y $+\delta$, es decir que sean menores que δ y por lo tanto podremos tomar como valor máximo del error el expresado en la ecuacion

$$\delta = \frac{1,9}{h} \quad (2)$$

que es el que suelen admitir varios autores.

Lo que hemos llamado error máximo no es en rigor otra cosa que aquel en que la probabilidad de obtener los menores que él es 0,99. Comparado con el error probable se deduce que el error máximo es cuádruplo del probable.

Aceptando la fórmula (2) deduciremos que el error máximo varía en razon inversa del módulo de convergencia.

41. *Coeficiente de exactitud*. Designando por P la probabilidad de cometer un error comprendido entre 0 y δ, el General Didion dá este nombre al límite hácia el cual tiende la razon

$$\frac{d\,\mathrm{P}}{d\,\delta} = \frac{d\,\frac{1}{2}\,\theta\,(h\,\delta)}{d\,\delta}$$

cuando δ tiende indefinidamente hácia cero.

Sabido es, que una funcion crece más ó ménos rápidamente, á partir de un valor de su variable, segun sea mayor ó menor su derivada, y comprendemos además que en el caso presente á medida que tenga valores mayores la derivada $\frac{dP}{d\delta}$ para $\delta = 0$ nos indicará que es tambien mas grande el número de los errores próximos á cero, y por lo tanto nos hará formar una idea de la precision del sistema de observaciones.

Esto supuesto, derivemos la ecuacion

$$P = \frac{1}{2}\theta(h\delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\delta} e^{-h^2\delta^2} d\delta$$

y se tendrá

$$\frac{dP}{d\delta} = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\delta^2}$$

y haciendo $\delta = 0$, y designando por j el coeficiente de exactitud tendremos:

$$j = \left(\frac{dP}{d\delta}\right)_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \quad (1)$$

Esta fórmula indica, que el coeficiente de exactitud varia proporcionalmente al módulo de convergencia.

Al comparar varios géneros de observaciones, será de mas precision aquella en que sea mayor el coeficiente de exactitud.

42. *Peso de las observaciones.* Gauss ha dado este nombre á una serie de números proporcionales á los cuadrados de los módulos de convergencia cuando se consideran varios géneros de observaciones.

Designemos por h, h_1, h_2,.... los módulos de convergencia correspondientes á otros tantos géneros de observaciones y por g, g_1, g_2,.... sus pesos respectivos.

Segun la definicion de estas cantidades se tendrá:

$$\frac{h^2}{g}=\frac{h_1^2}{g_1}=\frac{h_2^2}{g_2}=\ldots..$$

Si ahora convenimos en tomar por unidad de peso el correspondiente á una de estas observaciones (que puede ser real ó ficticia) y hacemos $g_1=1$ tendremos:

$$\frac{h^2}{g}=h_1^2 \text{ de donde } g=\frac{h^2}{h_1^2} \quad (1)$$

$$\text{y} \qquad h=h_1\sqrt{g}\,. \quad (2)$$

La fórmula (1) expresa, que el peso de una observacion es la razon de los cuadrados de su módulo de convergencia y del correspondiente á la unidad de peso; y la fórmula (2) podemos traducirla diciendo, que el módulo de convergencia de un sistema de observaciones es igual á la raiz cuadrada de su peso por el módulo de convergencia correspondiente á la unidad de peso.

La consideracion de los pesos de las observaciones es de la mayor importancia segun veremos en lo sucesivo.

43. *Investigacion del módulo de convergencia.* Las fórmulas de las probabilidades de los errores correspondientes á observaciones del mismo género, contienen segun se ha visto una indeterminada h á la que se ha dado el nombre de módulo de convergencia y de la cual depende la ley de las probabilidades de estos errores.

Con el fin de determinar el valor que debe atribuirse en cada caso á esta constante h, supongamos que se han hecho un número n de observaciones del mismo género y que por medio de ellas se han obtenido para la cantidad D los valores aproximados $D_1\ D_2\ D_3 \ldots\ldots D_n$.

Designando por $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_n$ los errores cometidos en cada una de estas observaciones, podremos establecer las ecuaciones

$$\delta_1 = w - D_1;\quad \delta_2 = w - D_2 \ldots \delta_n = w - D_n\ .$$

Representando por h el módulo de convergencia, que es desconocido, la probabilidad de cometer cada uno de los mencionados errores será

$$p_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta_1^2} d\delta;$$

$$p_2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta_2^2} d\delta \ldots\ldots p_n = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta_n^2} d\delta$$

y la correspondiente á la produccion de todos ellos en el conjunto de las esperiencias, que designaremos por p, tendrá por expresion

$$(1)\quad p = \left(\frac{d\delta}{\sqrt{\pi}}\right)^n h^n e^{-h^2(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots\ldots + \delta_n^2)}$$

$$= \left(\frac{d\delta}{\sqrt{\pi}}\right)^n h^n e^{-h^2 \Sigma \delta^2}$$

designando por el símbolo $\Sigma\,\delta^2$ la suma de los cuadrados de los errores.

Segun el principio de la media diferencial el valor más probable de w será la media diferencial de las cantidades D_1, D_2.... D_n, y si lo tomamos por el verdadero, no quedará en la ecuacion (1) mas indeterminada que h.

Segun el teorema de Bayes, entre las diversas hipótesis que pueden hacerse respecto de la indeterminada h, la más probable será aquella que dé al suceso observado mayor probabilidad. Determinaremos por consiguiente el valor de h por la condicion que ha de hacer máximo á p, ó lo que es equivalente, al producto

$$z = h^n e^{-h^2 \Sigma \delta^2}$$

Igualando á cero la derivada de esta expresion se tiene:

$$n h^{n-1} e^{-h^2 \Sigma \delta^2} - 2 h^{n+1} \Sigma \delta^2 e^{-h^2 \Sigma \delta^2} = 0$$

Dividiendo ambos miembros por

$$h^{n-1} e^{-h^2 \Sigma \delta^2} \text{ resulta } n - 2 h^2 \Sigma \delta^2 = 0,$$

de donde

$$h = \sqrt{\frac{n}{2 \Sigma \delta^2}}$$

De este valor de h podriamos deducir el del error medio cuadrático por medio de la fórmula hallada (§ 38) y tendriamos:

$$\Sigma = \frac{1}{h\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{n}}$$

Esta fórmula dá para valor del error medio cuadrático la raiz cuadrada de la media diferencial de los cuadrados de los errores deducidos de la observacion, lo que equivale á decir que debe operarse con estos errores como lo hariamos con todos los posibles, de ser conocidos, para obtener segun su definicion dicho valor.

44. La demostracion anterior está basada en la hipótesis de que el verdadero valor de w es la media diferencial de los deducidos de la observacion; pero debemos observar que por mas que dicho valor sea el más probable, no puede asegurarse que sea el verdadero, y por lo tanto será más riguroso el procedimiento en que se consideren los diversos valores que á w pueden atribuirse en la medida de sus probabilidades respectivas.

Para aplicar este procedimiento vamos primero á dar otra forma más conveniente al valor de P.

Designando por w_0 la media diferencial de las cantidades $D_1, D_2 \ldots D_n$ se tendrá:

$$w_0 = \frac{D_1 + D_2 + \ldots D_n}{n}; \quad (1)$$

hagamos $w = w_0 + \Delta$, con lo que uno cualquiera de los errores, por ejemplo δ_1, tendrá por expresion:

$$\delta_1 = w_0 + \Delta - D_1,$$

y su cuadrado

$$\delta_1^2 = (w_0 - D_1)^2 + 2\Delta(w_0 - D_1) + \Delta^2$$

Sumando esta ecuacion con las análogas á ella, que pueden obtenerse para los demás errores, tendremos:

$$\Sigma\delta^2 = \Sigma(w_0 - D)^2 + n\Delta^2;$$

puesto que la suma de los segundos términos se convierte en

$$2\,\Delta\big(n w_0 - (D_1 + D_2 + \dots + D_n)\big),$$

que se anula en virtud de la ecuacion (1); así como debe sobreentenderse, que los signos Σ hacen referencia á los diversos valores que se obtienen afectando las cantidades δ y D de los índices 1, 2, 3..... n.

Sustituyendo el valor hallado para $\Sigma\delta^2$ en la fórmula (1) del párrafo anterior se deduce:

$$P = \left(\frac{d\delta}{\sqrt{\pi}}\right)^n h^n e^{-h^2(\Sigma(w_0 - D)^2 + n\Delta^2)},$$

que puede escribirse bajo la forma

$$P = \left(\frac{d\delta}{\sqrt{\pi}}\right)^n h^n e^{-h^2\Sigma(w_0 - D)^2} \times e^{-nh^2\Delta^2}.$$

Si se atribuye á h un valor determinado, ó lo suponemos conocido, para cada valor de w, y por lo tanto de Δ, P recibirá otro valor determinado y en esta hipótesis la probabilidad total del suceso compuesto observado, que designaremos por P$'$, sería:

$$P' = \left(\frac{d\delta}{\sqrt{\pi}}\right)^n h^n e^{-h^2\Sigma(w_0 - D)^2} \times \Sigma e^{-nh^2\Delta^2}.$$

La probabilidad de que el valor supuesto para h sea el verdadero la obtendremos segun el teorema de Bayes, dividiendo el valor que acaba de encontrarse por la suma de todos los análogos, que resulten de atribuir á h todos los valores posibles. Así, despues de multiplicar los dos términos de la fraccion que resulta por $d\Delta . dh$ y designándola por P_1 se obtiene:

$$P_1 = \frac{h^n e^{-h^2 \Sigma (w_0 - D)^2} dh \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh^2 \Delta^2} d\Delta}{\int_0^{\infty} h^n e^{-h^2 \Sigma (w_0 - D)^2} dh \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh^2 \Delta^2} d\Delta}$$

La integral que figura en el numerador podemos trasformarla en otra conocida y se tendrá

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh^2 \Delta^2} d\Delta = \frac{1}{h\sqrt{n}} . \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh^2 \Delta^2} h \sqrt{n}\, d\Delta;$$

y haciendo, $\sqrt{n}\; h\Delta = t$ quedará

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh^2 \Delta^2} d\Delta = \frac{1}{h\sqrt{n}} . \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{n}}$$

El denominador del valor de P_1 es una cantidad constante, que podremos designar por K, y tendremos

$$P_1 = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}} . h^{n-1} e^{-h^2 \Sigma (w_0 - D)^2} dh}{K}.$$

Esto supuesto, el valor más probable de h será aquel que haga máximo á P_1 y esto tendrá lugar siempre que tome un valor máximo el producto

$$z = h^{n-1} e^{-h^2 \Sigma (w_0 - D)^2}.$$

Igualando á cero la derivada de esta expresion resulta:

$$(n-1)h^{n-2}e^{-h^2\Sigma(w_0-D)^2}-2h^n\,\Sigma(w_0-D)^2\,e^{-h^2\Sigma(w_0-D)^2}=0$$

Dividiendo los dos miembros de esta ecuacion por

$$h^{n-2}\,e^{-h^2\Sigma(w_0-D)^2}$$

y despejando h se obtiene:

$$h=\sqrt{\frac{n-1}{2\,\Sigma(w_0-D)^2}}$$

y aplicando la fórmula demostrada (§ 38) se tendrá para valor del error medio cuadrático

$$E^2=\frac{\Sigma(w_0-D)^2}{n-1}.\ (*)$$

Se ve pues que el valor más probable del error

(*) Para calcular el numerador de esta fraccion desarrollaremos el cuadrado de (w_0-D) y se tiene

$$\Sigma(w_0-D)^2=\Sigma(w_0^2-2w_0D+D^2)$$

Esta suma, que contendrá n términos, correspondientes á los diversos valores de D, podremos descomponerla en otras tres y quedará

$$\Sigma(w_0-D)^2=n\,w_0^2-2\,w_0\,\Sigma D+\Sigma D^2,$$

y sustituyendo en vez de w_0 su igual $\frac{\Sigma D}{n}$, resulta:

$$\Sigma(w_0-D)^2=n\left(\frac{\Sigma D}{n}\right)^2-2\frac{(\Sigma D)^2}{n}+\Sigma D^2=\Sigma D^2-\frac{(\Sigma D)^2}{n}$$

Por medio de esta fórmula podemos evitarnos el determinar las diferencias w_0-D; bastará solo hallar la suma de los cuadrados de los valores observados y disminuirla en la enésima parte del cuadrado de la suma de dichos valores, con lo que se obtendrá el mencionado numerador.

El valor de E^2 podrá escribirse bajo la forma

$$E^2=\frac{\Sigma D^2-\frac{(\Sigma D)^2}{n}}{n-1}$$

medio se obtiene extrayendo la raiz cuadrada del resultado de dividir la suma de los cuadrados de los errores tomados con relacion á la media diferencial, por el número de observaciones disminuido en una unidad.

Para calcular en la práctica la medida de precision de un sistema de observaciones, se empezará determinando el error medio cuadrático E, empleando la regla anterior y una vez conocido este se obtendrá el valor de h por la fórmula ya demostrada $h=\frac{1}{E\sqrt{2}}$.

Tambien puede obtenerse el valor de h por los siguientes procedimientos.

De la fórmula encontrada (37) se deduce: $h=\frac{1}{\mu\sqrt{\pi}}$ y suponiendo que se ha hecho un número suficientemente grande de observaciones, podrá admitirse, como valor aproximado de μ, la media diferencial de los valores absolutos de los errores tomados con relacion á la media diferencial. Este procedimiento suele emplearse con frecuencia en la práctica por ser mucho más sencillo que el primero, si bien no conduce á un resultado tan exacto.

Otra de las fórmulas que pueden servir para determinar h es (39) $h=\frac{\rho}{r}$, siendo r el error probable.

Si se supone que se ha hecho un gran número de observaciones y que despues de determinar los errores referidos á la media diferencial, se escriben en una línea por órden de magnitud, podemos tomar aproximadamente por valor del error probable el que esté equidistante de los estremos, si el número de observaciones es impar, ó el medio diferencial de los dos consecutivos, que estén á igual distancia de los extremos, en caso de ser par dicho número de observaciones.

45. Por regla general, los errores cometidos en las observaciones son producidos por muchas causas, que obran simultáneamente y que supondremos independientes entre sí. Tratemos de investigar la influencia de cada una de estas causas en las leyes de probabilidad de los errores, y como estas dependen del valor del módulo de convergencia, que á la vez queda determinado cuando lo está el error medio, la cuestion quedará resuelta si determinamos dicho error medio E en funcion de los $E_1, E_2, E_3, \ldots$ correspondientes á cada causa si obrasen aisladamente. Concibamos que se ha hecho un número infinitamente grande de experiencias, para que se hayan desarrollado todas las probabilidades contenidas en gérmen en las causas que se consideren, ó lo que es lo mismo, para que se hayan obtenido todos los errores posibles, y admitiremos además que estas causas solo producen errores accidentales.

Designemos por $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots\ldots$ los errores de las observaciones, por $e_1, e_2, e_3 \ldots\ldots$ las partes de estos errores producidos por una de las causas, por $e'_1, e'_2, e'_3 \ldots\ldots$ las partes análogas correspondientes á otra causa y así sucesivamente.

Se tendrá por lo tanto:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= e_1 + e'_1 + e''_1 + \ldots\ldots \\ \delta_2 &= e_2 + e'_2 + e''_2 + \ldots\ldots \\ \delta_3 &= e_3 + e'_3 + e''_3 + \ldots\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Elevando estas ecuaciones al cuadrado, sumando los resultados y dividiendo los dos miembros por el número total de observaciones, que representaremos por n, tendremos:

$$\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\dots}{n}$$

$$=\frac{(e_1+e_1'+e_1''+\dots.)^2+(e_2+e_2'+\dots.)^2+(e_3+e_3'+\dots.)^2}{n} \quad (1)$$

Al desarrollar los cuadrados que figuran en el segundo miembro se destruirán entre sí los dobles productos de los errores, puesto que en virtud de considerar solo los accidentales, á cada uno de estos términos corresponderá otro igual y de signo contrario. Así, por ejemplo, si representamos por α y ε los valores absolutos de los errores, debidos á distintas causas, aparecerán en los desarrollos mencionados los términos

$$2\alpha\varepsilon,\ 2\times-\alpha\times\varepsilon=-2\alpha\varepsilon,\ 2\alpha\times-\varepsilon=-2\alpha\varepsilon$$

y
$$2\times-\alpha\times-\varepsilon=2\alpha\varepsilon,$$

que se destruyen entre sí.

La ecuacion (1) podremos por consiguiente escribirla bajo la forma:

$$\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\dots}{n}=\frac{e_1^2+e_2^2+e_3^2+\dots}{n}+\frac{e_1'^2+{}_2'^2+e_3'^2+\dots}{n}+\dots.;$$

y recordando, que con arreglo á la definicion del error medio cuadrático se tiene

$$E^2=\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\delta_3^2+\dots}{n};\ E_1^2=\frac{e_1^2+e_2^2+\dots}{n};\ E_2^2=\frac{e_1^2+e_2^2+\dots}{n}$$

deduciremos

$$E^2 = E_1{}^2 + E_2{}^2 + E_3{}^2 + \ldots\ldots,$$

ecuacion que expresa, que el cuadrado del error medio de un sistema de observaciones es igual á la suma de los cuadrados de los errores medios que producirían cada una de las causas en accion, si obrasen separadamente.

Se deduce como consecuencia, que cuando en un sistema de observaciones se introduce una causa nueva, el cuadrado del error medio quedará aumentado en el cuadrado del error medio correspondiente á dicha causa.

Si se conoce el error medio E de un sistema de observaciones y tambien el valor E' que dicho error medio toma despues de haber introducido una causa nueva, con arreglo á lo expuesto, el error medio E_1 correspondiente á dicha causa tendrá por valor

$$E_1 = \sqrt{E^2 - E'^2}$$

46. *Investigacion de la medida de una cantidad* w *de la que se conocen* n *valores* $D_1, D_2, D_3 \ldots\ldots D_n$ *obtenidos en otras tantas observaciones.*

Consideremos primero el caso en que todas las observaciones tengan el mismo módulo de convergencia h, y designemos por $\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots \delta_n$ los errores cometidos en cada una de ellas.

Tendremos las ecuaciones

$$\delta_1 = w - D_1;\ \delta_2 = w - D_2 \ldots\ldots \delta_n = w - D_n \quad (1)$$

Representando por $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ las probabilidades de cometer cada uno de estos errores se tendrá (34)

$$p_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta_1^2} d\delta;$$

$$p_2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \delta_2^2} d\delta \ldots\ldots p_n = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h_n^2 \delta_n^2} d\delta$$

y con arreglo al principio de la probabilidad compuesta, la correspondiente al concurso de estos errores será

$$p = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n d\delta^n e^{-h^2(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots\ldots + \delta_n^2)} \qquad (2)$$

Segun indican las ecuaciones (1) los errores $\delta_1, \delta_2 \ldots\ldots$ son funciones de w. Entre las distintas hipótesis que pueden hacerse respecto del valor de esta cantidad, la más probable, segun el principio de Bayes, será aquella que dé un máximo de probabilidad al suceso observado, y es evidente que p tomará un valor máximo cuando la suma

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots\ldots + \delta_n^2$$

sea un mínimo, puesto que las demás cantidades que entran en su expresion son constantes.

Igualando á cero la derivada de dicha suma y dividiendo por 2 el resultado se obtiene:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \ldots\ldots + \delta_n = 0;$$

y reemplazando $\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots$ por sus valores (1) tendremos:

$$n w - (D_1 + D_2 + \ldots\ldots + D_n) = 0,$$

de donde

$$w = \frac{D_1 + D_2 + \ldots\ldots + D_n}{n} \qquad (3)$$

Vemos pues, que como debia esperarse, el valor más probable de w es la media diferencial de los obtenidos en las observaciones.

Para poder apreciar el grado de confianza, que ofrece esta determinacion, vamos á investigar la probabilidad de que el error con respecto á ella sea Δ, lo que equivale á suponer $w = w_0 + \Delta$, expresando por w_0 la media diferencial obtenida.

Sustituyendo en las ecuaciones (1) en vez de w el valor $w_0 + \Delta$, elevándolas al cuadrado y sumándolas, despues de simplificar el resultado por medio de la (3), tendremos:

$$\delta_1^2 + d_2^2 + \ldots\ldots + \delta_n^2 = \Sigma(w_0 - \mathrm{D})^2 + n\Delta^2,$$

y la ecuacion (2) podrá escribirse bajo la forma:

$$p = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n d\,\delta^n e^{-h^2\Sigma(w_0 - \mathrm{D})^2} \times e^{-nh^2\Delta^2}.$$

La probabilidad P_1 de la hipótesis en cuestion $w = w_0 + \Delta$ se obtendrá, segun el teorema de Bayes, dividiendo este valor de p por la suma de los correspondientes á las demás hipótesis, ó lo que es lo mismo para todos los valores de Δ, y se tendrá despues de multiplicar por $d\,\Delta$ los dos términos de la fraccion

$$P_1 = \frac{\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n d\,\delta^n e^{-h^2\Sigma(w_0 - \mathrm{D})^2} \times e^{-nh^2\Delta^2} d\,\Delta}{\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n d\,\delta.^n e^{-h^2\Sigma(w_0 - \mathrm{D})^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh^2\Delta^2} d\,\Delta}$$

$$= \frac{e^{-nh^2\Delta^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh^2\Delta^2}\, d\,\Delta}$$

:

La integral escrita en el denominador puede fácilmente trasformarse en otra conocida y tendrá por valor

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh^2\Delta^2}\, d\Delta = \frac{1}{h\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh^2\Delta^2}\, h\sqrt{n}\, d\Delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h\sqrt{n}}$$

y el valor de P_1 se convertirá en

$$P_1 = \frac{h\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} e^{-nh^2\Delta^2}\, d\Delta;$$

si ahora suponemos $H = h\sqrt{n}$ se tendrá:

$$P_1 = \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2\Delta^2}\, d\Delta,$$

expresion idéntica en la forma á la que se obtuvo para la probabilidad de cometer un error δ en una sola observacion, no existiendo otra diferencia que la de estar cambiado h por H y δ por Δ. La cantidad H será por lo tanto el módulo de convergencia de la media diferencial y podremos enunciar la siguiente regla: «El módulo de convergencia de la media diferencial de un número cualquiera de valores obtenidos para una cantidad en observaciones de igual precision, es igual á el de una de estas observaciones por la raíz cuadrada del número de ellas.»

Se deduce como consecuencia, que este módulo de convergencia variará en razon de las raices cuadradas de los números de observaciones que los formen.

Si convenimos en tomar como unidad de peso el correspondiente á cada una de las n observaciones consideradas, el de la media diferencial se obtendrá (§ 42) dividiendo el cuadrado de su módulo de convergencia por el de las observaciones, y será:

$$G = \frac{H^2}{h^2} = \frac{n\,h^2}{h^2} = n.$$

Se concluye por consiguiente que el peso de la media diferencial de observaciones, cuyo peso sea la unidad, es igual al número de estas observaciones. Recíprocamente, siempre que convenga, podrá reemplazarse la determinacion de una cantidad por medio de una observacion de peso n, siendo n entero, por la que resultaría del conjunto de otras n observaciones reales ó ficticias cuya media diferencial sea el valor primeramente obtenido y cuyos pesos sean iguales á la unidad.

47. *Segundo caso.* Consideremos ahora el caso en que las observaciones tengan distinto módulo de convergencia y adoptemos las notaciones convenidas sin más diferencia que la de representar por $h_1, h_2 \ldots h_n$ estos módulos de convergencia.

Las probabilidades de cometer cada uno de los errores $\delta_1, \delta_2 \ldots\ldots \delta_n$ tendrán por expresion:

$$P_1 = \frac{h_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 \delta_1^2} d\delta_1;\ P_2 = \frac{h_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 \delta_2^2} d\delta_2 \ldots\ldots P_n$$

$$= \frac{h_n}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2_n \delta^2_n} d\delta_n ;$$

y la del concurso de estos errores será

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n (\ ) d\delta . d\delta_1 \ldots\ldots d\delta_n\, e^{-(h^2_1 \delta^2_1 + h^2_2 \delta^2_2 + \ldots + h^2_n \delta^2_n)} \quad (h_1 h_2 -$$

El valor más probable de w será aquel que haga tomar á P un valor máximo, ó lo que es lo mismo, que dé un mínimo para la suma

$$h^2_1\delta^2_1+h^2_2\delta^2_2+\ldots\ldots+h^2_n\delta^2_n.$$

Igualando á cero la derivada de esta suma y dividiendo por 2 el resultado, se obtiene:

$$h^2_1\delta_1+h^2_2\delta_2+\ldots\ldots+h^2_n\delta_n=0;$$

y sustituyendo en vez de $\delta_1, \delta_2\ldots\ldots\delta_n$ sus valores y despejando w resulta:

$$w=\frac{h^2_1 D_1+h^2_2 D_2+\ldots\ldots+h^2_n D_n}{h^2_1+h^2_2+\ldots\ldots+h^2_n};$$

valor que se convierte en la media diferencial si se supone

$$h_1=h_2=h_3\ldots\ldots=h_n.$$

Las cantidades h^2_1, $h^2_2\ldots\ldots h^2_n$ pueden reemplazarse por los pesos de las observaciones, por ser proporcionales á ellas, y designándolos por $g_1, g_2\ldots\ldots g_n$ tendremos:

$$w=\frac{g_1 D_1+g_2 D_2+\ldots\ldots+g_n D_n}{g_1+g_2+g_3+\ldots\ldots+g_n}.$$

Esta fórmula puede tambien demostrarse por medio de sencillas consideraciones.

Suponiendo que los pesos g_1, $g_2\ldots\ldots g_n$ sean números enteros, (y esta hipótesis puede siempre realizarse, puesto que todo se reduce á elegir como unidad de peso la de una observacion real ó ficticia, cuyo módulo de convergencia elevado al cuadrado esté contenido en los otros un número exacto de veces, ó lo que es lo mismo sea comun medida de los cuadrados de los módulos de convergencia de las observaciones consideradas) la primera observacion podrá reemplazarse por otras g_1 cuyo peso sea la unidad y en la que la media diferencial de los valores hallados para w sea D_1; del mismo modo la segunda observacion será equivalente á otras g_2 de peso unidad y en las que la media diferencial de los valores de w sea D_2, y así sucesivamente podremos decir de las demás.

Esto supuesto, la suma de los valores de w en las observaciones parciales en que hemos descompuesto la primera será $g_1 D_1$ y análogamente $g_2 D_2$, $g_3 D_3$..... expresarán las sumas correspondientes á las otras observaciones.

El número total de observaciones parciales será $g_1 + g_2 + \ldots\ldots + g_n$; por consiguiente aplicando la fórmula (3 § 46) tendremos:

$$w = \frac{g_1 D_1 + g_2 D_2 + \ldots\ldots + g_n D_n}{g_1 + g_2 + \ldots\ldots + g_n};$$

y como en vez de los pesos $g_1, g_2 \ldots\ldots g_n$ podrán sustituirse los cuadrados de los respectivos módulos de convergencia, que les son proporcionales, se tendrá tambien

$$w = \frac{D_1 h^2{}_1 + D_2 h^2{}_2 + \ldots\ldots + D_n h^2{}_n}{h^2{}_1 + h^2{}_2 + \ldots\ldots + h^2{}_n}.$$

El peso de este valor pudiera determinarse, empleando un procedimiento enteramente análogo al seguido en el primer caso; pero es mucho más sencillo el reemplazar cada observacion por otras parciales de peso unidad. Hecho esto, se ha dicho que el número total de observaciones de unidad de peso es $g_1+g_2+\ldots\ldots+g_n$; por consiguiente, en virtud de la regla demostrada (§ 46) este mismo número será el peso del valor de w, y designándole por G se tendrá:

$$G=g_1+g_2+g_3+\ldots\ldots+g_n.$$

Fórmula que expresa que el peso del valor que hemos hallado como más probable de w, es la suma de los pesos de las observaciones que lo han determinado.

Si en esta ecuacion se reemplazan los pesos por los módulos de convergencia, que como diferentes veces se ha dicho les son proporcionales, se tendrá:

$$H^2=h^2{}_1+h^2{}_2+\ldots+h^2{}_n \quad \text{de donde } H=\sqrt{h_1{}^2+h^2{}_2+\ldots+h^2{}_n}$$

Vemos pues, que el módulo de convergencia correspondiente al valor de una cantidad deducida de varias observaciones de distinta precision, es igual á la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de los módulos de convergencia de dichas observaciones.

Puede observarse, que tanto en el primer caso como en el segundo, el módulo de convergencia correspondiente al valor de w, aumenta con el número de observaciones y á expensas de multiplicar este número podremos conseguir que H sea tan grande como se quiera, y por lo tanto, que la probabilidad de que el error cometido con respecto al verdadero valor de w sea menor que una cantidad δ por pequeña que sea, puede hacerse que difiera de la unidad ó sea de la certeza, en tan poco como se desee. Dicha probabilidad se calculará empleando la tabla (1.ª)

Aplicaciones.

1.ª Determinar el valor más probable de un ángulo A, conociendo el resultado de diez mediciones, de igual precision.

Supongamos que operando con un teodolito se han hallado los valores siguientes:

Número de las observaciones.	Valores de A.	Error δ tomado con respecto á la media diferencial.	Valores de δ^2.
1.....	30° 20′ 7″,24 ...	0,247	0,061
2.....	» 6,52 ...	0,473	0,223
3.....	» 7,33 ...	0,337	0,113
4.....	» 6,25 ...	0,743	0,552
5.....	» 6,50 ...	0,493	0,243
6.....	» 7,01 ...	0,017	0,003
7.....	» 7,12 ...	0,127	0,016
8.....	» 6,94 ...	0,053	0,003
9.....	» 7,22 ...	0,227	0,052
10.....	» 7,80 ...	0,807	0,651

$$\frac{\Sigma A}{10} = 30° \; 20' \; 6{,}993 \qquad \Sigma \delta^2 = 1{,}915$$

En el cuadro anterior debe sobreentenderse que todos los valores de A tienen la parte comun 30° 20′ que no se ha repetido por simplificar.

El valor más probable de A será la media diferencial 30°, 20′, 6″,993 y el error medio cuadrático tendrá por expresion:

$$E = \sqrt{\frac{\Sigma\delta^2}{9}} = \sqrt{\frac{1,915}{9}} = 0,461.$$

Con estos datos se puede formar la siguiente tabla:

Valor más probable de A.......$A = 30° \ 20' \ 6'',993$

Error medio cuadrático de las observaciones............ } ...$E = 0,461$

Módulo de convergencia de las observaciones............ } ...$h = \dfrac{1}{E\sqrt{\cancel{\pi}}} = 1,53$ 2

Error medio aritmético de las observaciones............ } ...$\mu = \dfrac{1}{h\sqrt{\pi}} = 0,367$

Error probable de las observaciones................. } ...$r = \dfrac{\rho}{h} = \dfrac{0,477}{h} = 0,309$

Módulo de convergencia de la media diferencial........ } ...$H = h\sqrt{10} = 4,835$

Error probable de la media diferencial .... } ...$R = \dfrac{0,477}{H} = 0,09$

2.° *Ejemplo.*

En 29 experiencias hechas por Cavendish con el fin de determinar la densidad media de la tierra, ha obtenido (tomando como unidad la del agua) los valores siguientes:

5,50	5,55	5,57	5,94	5,42	5,30
5,61	5,36	5,53	5,79	5,47	5,75
5,88	5,29	5,62	5,10	5,63	5,68
5,07	5,58	5,29	5,27	5,34	5,85
5,26	5,65	5,44	5,39	5,46	

La media diferencial de estos valores, ó sea el que consideraremos más probable de la densidad, es 5,48.

El error medio cuadrático de una observacion aislada es:

$\mathrm{E}=\sqrt{\frac{1,1967}{28}}$; siendo 1,1967 la suma de los cuadrados de los errores.

El error probable de una observacion aislada es. . . . . $r=0,137$

El error medio cuadrático del resultado es $\mathrm{E}_1=0,0384$

El error probable del resultado es. . . . $\mathrm{R}=0,0259$

Módulo de convergencia de una observacion. . . . . $h=3,48$

Módulo de convergencia del resultado. . $\mathrm{H}=18,745$

3.er *Ejemplo.*

Supongamos que sobre un mismo ángulo A se hayan hecho tres observaciones cuyos resultados se expresan á continuacion; pero que en lugar de ser simples, la 1.ª sea el resultado de otras 10 parciales, la 2.ª el de 15 y la 3.ª el de 20; admitamos que todas las observaciones parciales se han hecho en idénticas circunstancias (con el mismo aparato, por la misma persona, etc.) y adoptemos por unidad de peso el de una de estas observaciones parciales.

Número de las observaciones.	Valores de A.
1.................	$20^{o}\ 4'\ 20'',42 = A_1$
2.................	» » $12'',10 = A_2$
3.................	» » $50'' = A_3$

Los pesos de las tres observaciones tendrán respectivamente por valores 10, 15, 20, por consiguiente aplicando la fórmula (§ 47) tendremos para valor más probable de A

$$A = \frac{10\,A_1 + 15\,A_2 + 20\,A_3}{45}.$$

CAPÍTULO 5.º

Determinacion por el método de los mínimos cuadrados, de los valores más probables de las cantidades, que dependen de otras deducidas de la observacion.

En esta teoría nos proponemos resolver dos clases de cuestiones:

1.ª *Determinar los valores más probables de un sistema de incógnitas, que estén ligadas por ecuaciones conocidas con cantidades obtenidas por medio de la observacion.*

2.ª *Investigar la precision que debe atribuirse á estos valores de las incógnitas.*

Es evidente que si los datos obtenidos por medio de la observacion fuesen exactos, bastaría encontrar un número de ecuaciones igual á el de incógnitas, para que aplicándoles los procedimientos ordinarios del álgebra, pudiera venirse en conocimiento de sus valores. En tal supuesto, todas las demás ecuaciones, que de la observacion pudieran deducirse, deberían ser consecuencia de las primeras, sin lo que, las ecuaciones serían incompatibles y la cuestion absurda.

Ahora bien, si se tienen en cuenta los errores cometidos en las observaciones, conviene que el número de estas sea muy superior al de las incógnitas; así se logra, en cuanto es posible, establecer una compensacion entre aquellos errores, y eliminándolos de los resultados finales se hallan los valores más exactos de las cantidades que se desean conocer. Ciertamente que así se obtiene un sistema de ecuaciones incompatibles; pero las mismas contradicciones en ellas expresadas, al par que evidencian los errores cometidos, sirven de base para estudiar la manera de salvarlas y aproximarnos á los resultados verdaderos.

Empecemos por considerar el caso en que las ecuaciones, que liguen á las incógnitas con las cantidades deducidas de la observacion, sean de primer grado y tambien de la misma precision todas las observaciones.

En este supuesto, consideremos el sistema de n ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l}
a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1 v+k_1=l_1 \\
a_2 x+b_2 y+c_2 z+d_2 v+k_2=l_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_n x+b_n y+c_n z+d_n v+k_n=l_n
\end{array}\right\} \quad 1$$

Aun cuando para facilitar los cálculos nos hemos fijado en el caso de existir cuatro incógnitas, las consideraciones que hagamos serán generales y podrán aplicarse á cualquiera otro.

Supondremos que n es mucho mayor que 4 y que

$l_1, l_2 \ldots\ldots l_n$ son las cantidades obtenidas por medio de la observacion. Si designamos por $\delta_1, \delta_2 \ldots\ldots \delta_n$ los errores cometidos en la determinacion de estas cantidades, sus verdaderos valores serán:

$$l_1+\delta_1;\ l_2+\delta_2; \ldots\ldots l_n+\delta_n$$

y sustituyéndolos en vez de los segundos miembros, las ecuaciones se harán compatibles y desaparecerán las contradiciones, puesto que admitimos, que se sabe á priori la posibilidad de la cuestion. Así se obtendrá:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+d_1v+k_1=l_1+\delta_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2v+k_2=l_2+\delta_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3v+k_3=l_3+\delta_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx+b_ny+c_nz+d_nv+k_n=l_n+\delta_n \end{array}\right\} 2$$

Determinaremos los errores $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots\ldots \delta_n$ haciéndolos satisfacer á dos condiciones, 1.ª la de hacer compatibles las ecuaciones (2) y 2.ª que dén los valores más probables para las incógnitas.

Desde luego se comprende que sería indeterminado el problema si solo hiciesemos que los errores satisfaciesen á la primera condicion. En efecto, podriamos atribuir un sistema de valores arbitrarios á las incógnitas, sustituirlos en las ecuaciones (2) y tomar para valores de $\delta_1, \delta_2 \ldots\ldots \delta_n$ las diferencias respectivas entre los primeros miembros y las cantidades $l_1, l_2, l_3 \ldots\ldots l_n$; con lo que se harían compatibles. Cualquier sistema de valores de las incógnitas verificaría á las ecuaciones (2), dando á $\delta_1, \delta_2 \ldots\ldots \delta_n$ los correspondientes. Esta indeterminacion desaparece, como vamos á ver, si se toma en cuenta la segunda condicion.

Representando por $p_1, p_2 \ldots\ldots p_n$ las probabilidades respectivas de los errores $\delta_1, \delta_2 \ldots\ldots \delta_n$, y por h el módulo de convergencia, que por hipótesis es el mismo para todas las observaciones, se tendrá:

$$p_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\delta^2_1} d\delta_1;$$

$$p_2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\delta^2_2} d\delta_2 \ldots\ldots p_n = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\delta^2_n} d\delta_n.$$

En virtud del primer principio de la probabilidad compuesta, la del concurso de todos estos errores será:

$$p = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2(\delta^2_1+\delta^2_2+\ldots\ldots+\delta^2_n)} d\delta_1\, d\delta_2 \ldots\ldots d\delta_n$$

Para cada sistema de valores que atribuyamos á las incógnitas x, y, z, v se obtendrá otro correspondiente de los errores $\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots \delta_n$ y segun el principio de Bayes, la hipótesis más probable será la que dé máxima probabilidad al suceso observado, y ésta que hemos representado por p será un máximo cuando la suma $\delta^2_1+\delta^2_2+\ldots\ldots+\delta^2_n$ de los cuadrados de los errores tome un valor mínimo. Designando esta suma por 2S tendremos:

$$2S = \delta^2_1+\delta^2_2+\ldots\ldots+\delta^2_n$$

y sustituyendo en esta ecuacion en vez de $\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots \delta_n$ sus valores deducidos del sistema (2) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
2S = & (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 v + k_1 - l_1)^2 \\
& + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 v + k_2 - l_2)^2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + (a_n x + b_n y + c_n z + d_n v + k_n - l_n)^2
\end{aligned}
$$

y haciendo, para abreviar los cálculos,

$$l_1 - k_1 = q_1; \quad l_2 - k_2 = q_2 \ldots\ldots l_n - k_n = q_n,$$

quedará:

$$
\begin{aligned}
2S = & (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 v - q_1)^2 \\
& + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 v - q_2)^2 \\
& \vdots \\
& (a_n x + b_n y + c_n z + d_n v - q_n)^2
\end{aligned}
$$

Puesto que $2S$ ha de tener un valor mínimo, sus derivadas parciales con respecto á x, y, z y v han de ser nulas y se verificará:

$$
\left.
\begin{aligned}
& a_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 v - q_1) \\
& + a_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 v - q_2) \\
& \vdots \\
& + a_n (a_n x + b_n y + c_n z + d_n v - q_n)
\end{aligned}
\right\} = 0
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
& b_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 v - q_1) \\
& + b_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 v - q_2) \\
& \vdots \\
& + b_n (a_n x + b_n y + c_n z + d_n v - q_n)
\end{aligned}
\right\} = 0
$$

$$\left.\begin{aligned} &c_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1v-q_1)\\ &+c_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2v-q_2)\\ &\vdots\\ &+c_n(a_nx+b_ny+c_nz+d_nv-q_n)\end{aligned}\right\}=0$$

$$\left.\begin{aligned} &d_1(a_1x+b_1y+c_1z+d_1v-q_1)\\ &+d_2(a_2x+b_2y+c_2z+d_2v-q_2)\\ &\vdots\\ &+d_n(a_nx+b_ny+c_nz+d_nv-q_n)\end{aligned}\right\}=0$$

Adoptando la notacion de Gauss, convengamos en representar por medio de los símbolos

$$[aa],\ [ab],\ [ac].....$$

las sumas siguientes:

$$\begin{aligned}[aa]&=a^2_1+a^2_2+a^2_3+.....+a^2_n\ ;\\ [ab]&=a_1b_1+a_2b_2+.....+a_nb_n\\ [ac]&=a_1c_1+a_2c_2+.....+a_nc_n\\ &\vdots\end{aligned}$$

Las ecuaciones (3), despues de sacar á cada incógnita por factor comun de las cantidades á quienes multiplica, podrán escribirse bajo la forma

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[ac]z+[ad]v&=[aq]\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bd]v&=[bq]\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+[cd]v&=[cq]\\ [ad]x+[bd]y+[cd]z+[dl]v&=[dq]\end{aligned}\right\}\ (4)$$

Se observa desde luego que *una cualquiera de estas ecuaciones se forma, multiplicando á cada una de las ecuaciones primitivas por el coeficiente que en ella lleve una misma incógnita, y sumando los resultados.*

A estas ecuaciones, cuyo número es igual al de incógnitas, puesto que respectivamente proceden de derivar la suma de los cuadrados de los errores con respecto á una de las incógnitas, se las denomina ordinariamente, ecuaciones normales, así como á las propuestas (1) las llamaremos ecuaciones primitivas.

Por medio de las ecuaciones normales se podrán determinar los valores más probables de las incógnitas x, y, z y v, y para resolverlas emplearemos el método de sustitucion.

Antes de desarrollar este procedimiento, haremos algunos otros convenios, respecto á las notaciones, que tienen por objeto facilitar los cálculos.

Fijándonos en un caso general, en el que el número de incógnitas sea cualquiera; se ha dicho, que por medio del símbolo $[gr]$, por ejemplo, se expresa la suma de los resultados que se obtienen afectando á estas cantidades de los índices $1, 2, \ldots\ldots n$, siendo n el número de ecuaciones.

Hagamos ahora

$$[gr]_1 = [gr] - \frac{[ag]}{[aa]} \times [ar];$$

$$[gr]_2 = [gr]_1 - \frac{[bg]_1}{[bb]_1}.[br]_1 \ldots [gr]_{m+1} = [gr]_m - \frac{[fg]_m}{[ff]_m}.[fr]_m$$

La cantidad $[gr]_1$ se forma, restando de $[gr]$, que resulta de suprimir el índice 1, el producto $[ag] \times [ar]$, que se deduce, escribiendo á la derecha de cada una de las letras g y r la a que ocupa el primer lugar en las ecuaciones primitivas, y dividiendo este producto por la suma cnadrática $[aa]$.

En general se designa por el símbolo $[g\,r]_{m+1}$ al resultado de restar del símbolo análogo, cuyo índice tenga una unidad ménos, el producto $[f g]_m \times [f r]_m$, que se forma escribiendo á la derecha de la letra f, que en las líneas de las ecuaciones primitivas ocupe el lugar m, cada una de las que entran en el símbolo considerado, encerrando cada una de estas combinaciones dentro de un paréntisis afectado del índice m, y dividiendo despues este producto por $[f f]_m$.

Esto supuesto, despejando x en la primera de las ecuaciones normales, se obtiene:

$$x = \frac{[a\,a]}{[a\,a]} - \frac{[a\,b]}{[a\,a]} y - \frac{[a\,c]}{[a\,a]} z - \frac{[a\,d]}{[a\,a]} v$$

y sustituyendo este valor en las otras tres, teniendo en cuenta los convenios establecidos, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} [b\,b]_1 y + [b\,c]_1 z + [b\,d]_1 v &= [b\,q]_1 \\ [b\,c]_1 y + [c\,c]_1 z + [c\,d]_1 v &= [c\,q]_1 \\ [b\,d]_1 y + [c\,d]_1 z + [d\,d]_1 v &= [d\,q]_1 \end{aligned}\right\} 3$$

Despejando y en la primera de estas ecuaciones se tendrá:

$$y = \frac{[b\,l]_1}{[b\,b]_1} - \frac{[b\,c]_1}{[b\,b]_1} - \frac{[b\,d]_1}{[b\,b]_1}$$

y sustituyendo este valor en las otras dos, resulta:

$$\left.\begin{aligned} [c\,c]_2 z + [c\,d]_2 v &= [c\,q]_2 \\ [c\,d]_2 z + [d\,d]_2 v &= [d\,q]_2 \end{aligned}\right\} 4$$

De la primera de estas dos ecuaciones se puede deducir el valor de z,

$$z = \frac{[c\,q]_2}{[c\,c]_2} - \frac{[c\,d]_2}{[c\,c]_2} v$$

y sustituyendo en la segunda

$$[d\,d]_3 v = [d\,q]_3 ;$$

de ésta última ecuacion puede obtenerse el valor de v, que sería

$$v = \frac{[d\,q]_3}{[d\,d]_3}$$

y por los métodos demostrados en el Algebra se deducen despues los de las demás incógnitas.

El sistema de las ecuaciones que determinarán inmediatamente las incógnitas será por lo tanto

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{[a\,q]}{[a\,a]} - \frac{[a\,b]}{[a\,a]} y - \frac{[a\,c]}{[a\,a]} z - \frac{[a\,d]}{[a\,a]} v \\
y &= \frac{[b\,q]_1}{[b\,b]_1} - \frac{[b\,c]_1}{[b\,b]_1} z - \frac{[b\,d]_1}{[b\,b]_1} v \\
z &= \frac{[c\,q]_2}{[c\,c]_2} - \frac{[c\,d]_2}{[c\,c]_2} v \\
v &= \frac{[d\,q]_3}{[d\,d]_3}
\end{aligned}\right\} 5$$

En atencion á lo prolijo de estos cálculos conviene mucho seguir un órden, que permita fácilmente la comprobacion y además, que puedan ser ejecutados simultáneamente por várias personas.

A continuacion exponemos la norma de cálculo aceptada por vários autores, y que es tambien la seguida en las excelentes memorias de nuestro Instituto Geográfico.

$[aq]=$	$[aa]x$	$[ab]y$	$[ac]z$	$[ad]v$	$[bq]$	$[bb]$	$[bc]$
$\mathrm{l.}\,[aq]$	$\mathrm{l.}[aa]$	$\mathrm{l.}[ab]$	$\mathrm{l.}[ac]$	$\mathrm{l.}[ad]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[aq]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$-\frac{[ab]}{[ac]}[ac]$
$\mathrm{l.}\frac{[aq]}{[aa]}$		$\mathrm{l.}\frac{[ab]}{[aa]}$	$\mathrm{l.}\frac{[ac]}{[aa]}$	$\mathrm{l.}\frac{[ad]}{[aa]}$	$[bq]_1=$	$[bb]_1 y$	$[bc]_1 z$
$\frac{[aq]}{[aa]}$		$\mathrm{l.}y$	$\mathrm{l.}z$	$\mathrm{l.}v$	$\mathrm{l.}\,[bq]_1$	$\mathrm{l.}[bb]_1$	$\mathrm{l.}[bc]_1$
$-\frac{[ab]}{[aa]}y$		$\mathrm{l.}y\frac{[ab]}{[aa]}$	$\mathrm{l.}z\frac{[ac]}{[aa]}$	$l.v\frac{[ad]}{[aa]}$	$\mathrm{l.}\frac{[bq]_1}{[bb]_1}$		$\mathrm{l.}\frac{[bc]_1}{[bb]_1}$
$-\frac{[ac]}{[aa]}z$					$\frac{[bq]_1}{[bb]_1}$		$\mathrm{l.}z$
$-\frac{[ad]}{[aa]}v$					$-\frac{[bc]_1}{[bb]_1}z$		$\mathrm{l.}z\frac{[bc]_1}{[bb]_1}$
z					$-\frac{[bd]_1}{[bb]_1}v$		
					y		

$[bd]$	$[cq]$	$[cc]$	$[cd]$	$[dq]$	$[dd]$
$-\frac{[ab]}{[aa]}[ad]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[aq]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[ad]$	$-\frac{[ad]}{[aa]}[aq]$	$-\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$
$[bd]_1 v$	$[cq]_1$	$[cc]_1$	$[cd]_1$	$[dq]_1$	$[dd]_1$
$\mathrm{l.}[bd]_1$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[aq]$	$-\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bc]_1$	$-\frac{[bc]_1}{[bb]_1}[bd]_1$	$-\frac{[bd]_1}{[bb]_1}[bq]_1$	$-\frac{[bd]_1}{[bb]_1}[bd]_1$
$\mathrm{l.}\frac{[bd]_1}{[bb]_1}$	$[cq]_2=$	$[cc]_2 z$	$[cd]_2 v$	$[dq]_2$	$[dd]_2$
$\mathrm{l.}v$	$\mathrm{l.}\,[cq]_2$	$\mathrm{l.}\,[cc]_2$	$\mathrm{l.}\,[cd]_2$	$-\frac{[cd]_2}{[cc]_2}[cd]_2$	$-\frac{[cd]_2}{[cc]_2}[cq]_2$
$\mathrm{l.}v\frac{[bd]_1}{[bb]_1}$	$\mathrm{l.}\frac{[cq]_2}{[cc]_2}$		$\mathrm{l.}\frac{[cd]_2}{[cc]_2}$	$[dq]_3=$	$[dd]_3 v$
	$\frac{[cq]_2}{[cc]_2}$		$\mathrm{l.}v$	$\mathrm{l.}[dq]_3$	$\mathrm{l.}[dd]_3$
	$-\frac{[cd]_2}{[cc]_2}v$		$\mathrm{l.}\,v\frac{[cd]_2}{[cc]_2}$	$\mathrm{l.}\frac{[dq]_3}{[dd]_3}$	
	z			v	

Como puede observarse, á la cabeza de cada subdivision figura el cálculo de los coeficientes de cada ecuacion final; debajo está escrita dicha ecuacion, y finalmente, debajo de ésta, se encuentra el correspondiente á la investigacion de la incógnita que dicha ecuacion determina.

48. Para formarse idea de la extension de estos cálculos, consideremos el caso general de que las n ecuaciones primitivas contengan m incógnitas.

En las ecuaciones normales entrarán los coeficientes

$$\begin{array}{ccccc}
[a\,a] & [a\,b] & [a\,c] & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & [a\,q] \\
 & [b\,b] & [b\,c] & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & [b\,q] \\
 & & [c\,c] & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & [c\,q] \\
 & & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
 & & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
 & & & [r\,r] & [r\,q]
\end{array}$$

admitiendo que sea r el coeficiente de la última incógnita y no escribiendo los coeficientes repetidos. La primera de estas líneas contendrá $(m+1)$ coeficientes, m la segunda, y así sucesivamente hasta la que ocupa el lugar m que contiene dos. El número total de estas cantidades será

$$(m+1)+m+(m-1)+\ldots..$$

$$+2=\Big((m+1)+m+\ldots..+1\Big)-1=\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1$$

El sistema siguiente de ecuaciones, obtenido por la eliminacion tiene por coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} [b\,b]_1\,[b\,c]_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [b\,q]_1 \\ \quad [c\,c]_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [c\,q]_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad [rr]_1\,[r\,q]_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{cuyo número será} \\ \text{análogamente} \\ \dfrac{m\,[m+1]}{2} - 1 \end{array}$$

El siguiente á éste contendrá $\dfrac{(m-1)\,m}{2} - 1$ y así sucesivamente.

Efectuando las restas indicadas, se obtienen los resultados:

$$\frac{1}{2}\,m\,(m+3) = \frac{1}{2}\,(m^2+3\,m)$$

$$\frac{1}{2}\,(m-1)\,\Big((m-1)+3\Big) = \frac{1}{2}\,\Big((m-1)^2+3\,(m-1)\Big)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2}\,1\,(1+3) = \frac{1}{2}\,(1^2+3),$$

cuya suma total es

$$\frac{1}{2}\,(S_2 + 3\,S_1),$$

designando por S_2 y S_1 respectivamente las sumas de los cuadrados y de las primeras potencias de la série natural de los números desde uno hasta m. Sustituyendo en vez de estas sumas sus valores

$$S_1 = \frac{m\,(m+1)}{2} \quad \text{y} \quad S_2 = \frac{m\,(m+1)\,(2\,m+1)}{b}$$

obtenidos en Álgebra, resulta:

$$\frac{1}{2}(S_2+3S_1)=\frac{m(m+1)(m+5)}{6},$$

que es el número de coeficientes auxiliares que deben formarse.

En el caso que hemos considerado de ser $m=4$, el número de estos coeficientes es 30; pero además hay que tener en cuenta, que cada coeficiente de las ecuaciones normales, que en este caso son 4, es una suma compuesta de tantos términos como expresa el número de las ecuaciones primitivas.

Determinados los valores más probables de las incógnitas solo nos resta poder apreciar su grado de precision, para lo cual, resolveremos ántes el siguiente problema auxiliar.

50. *Determinar el peso del valor de una incógnita que sea funcion lineal conocida de cantidades obtenidas por medio de la observacion y cuyos pesos sean dados.*

Consideremos la ecuacion

$$x=aq_1+bq_2+cq_3+\ldots\ldots \quad (1)$$

en la que $q_1, q_2, \ldots\ldots$ son las cantidades encontradas por medio de la observacion y por lo tanto afectadas de error.

Representemos por $X, Q_1, Q_2 \ldots.$ los verdaderos valores de las cantidades $x, q_1, q_2 \ldots.$ y por $\Delta, \delta_1, \delta_2 \ldots.$ los errores cometidos en cada una de ellas. Se tendrá por consiguiente:

$$X=x+\Delta;\ q_1=q_1+\delta_1;\ q_2=q_2+\delta_2+\ldots\ldots$$

La ecuacion (1) que la consideraremos como expresion de una ley que existe entre las cantidades mencionadas, se verificará cuando se sustituyan en vez de éstas cantidades afectadas de error, sus verdaderos valores y tendremos:

$$x+\Delta=a(q_1+\delta_1)+b(q_2+\delta_2)+c(q_3+\delta_3)+\ldots.. \quad (2)$$

Restando las ecuaciones (2) y (1) resulta:

$$\Delta=a\delta_1+b\delta_2+c\delta_3+\ldots.. \quad (4)$$

Para cada sistema de observaciones, los errores $\delta_1, \delta_2, \delta_3$..... tomarán distintos valores y por lo tanto tambien Δ.

Elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuacion (4) se obtiene:

$$\Delta^2=a^2\delta_1{}^2+b^2\delta_2{}^2+c^2\delta_3{}^2+\ldots..+2ab\delta_1\delta_2+2ac\delta_1\delta_3+\ldots...$$

y si concebimos las ecuaciones análogas á ésta, que se obtendrían considerando todos los sistemas de valores de que son susceptibles δ_1, δ_2...... y se suman, tendremos:

$$\Sigma\Delta^2=a^2\Sigma\delta_1{}^2+b^2\Sigma\delta_2{}^2+c^2\Sigma\delta_3{}^2+\ldots+2ab\Sigma\delta_1\delta_2+2ac\Sigma\delta_1\delta_3+\ldots.$$

Admitiendo que no existen errores constantes y por lo tanto que los positivos y negativos tengan igual facilidad de cometerse, se tendría:

$$\Sigma\delta_1\delta_2=0;\ \Sigma\delta_1\delta_2=0\ldots..$$

y la ecuacion anterior se convertiría en

$$\Sigma\Delta^2=a^2\Sigma\delta_1{}^2+b^2\Sigma\delta_2{}^2+c^2\Sigma\delta_3{}^2+\ldots.. \quad (5)$$

Designemos ahora por E, E_1, E_2.... los errores medios cuadráticos correspondientes á los diversos valores de cada una de las cantidades X, Q_1, Q_2..... en las diferentes observaciones y por n el número total de sistemas de éstas que supondremos infinitamente grande. Con arreglo á la definicion del error medio cuadrático se tendrá:

$$E^2 = \frac{\Sigma\Delta^2}{n};\quad E_1^2 = \frac{\Sigma\delta_1^2}{n};\quad E_2^2 = \frac{\Sigma\delta_2^2}{n}\,.....$$

de donde

$$\Sigma\Delta^2 = n\,E^2;\quad \Sigma\delta_1^2 = n\,E_1^2;\quad \Sigma\delta_2^2 = n\,E_2^2.....$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion (5) y dividiendo por n quedará:

$$E^2 = a^2\,E_1^2 + b^2\,E_2^2 + c^2\,E_3^2 + ... \quad (6)$$

Esto supuesto, representemos por H_1, h_1, h_2..... los módulos de convergencia de la determinacion de X y de cada una de las observaciones correspondientes á las cantidades Q_1, Q_2.... y teniendo en cuenta (§ 38) la relacion que liga á este módulo de convergencia con el error medio cuadrático se tendrá:

$$E^2 = \frac{1}{2\,H^2};\quad E_1^2 = \frac{1}{2\,h_1^2};\quad E_2^2 = \frac{1}{2\,h_2^2}....;$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion (6) y multiplicándola por 2 resulta:

$$\frac{1}{H^2} = \frac{a^2}{h_1^2} + \frac{b^2}{h_2^2} + \frac{c^2}{h_3^2} + ...,$$

de donde

$$H^2 = \frac{1}{\dfrac{a^2}{h_1^2} + \dfrac{b^2}{h_2^2} + \dfrac{c^2}{h_3^2} + ...} \quad (7)$$

Esta fórmula podrá servirnos para calcular el módulo de convergencia de la determinacion de X, cuando se conozcan los de los valores observados.

Si designamos por G el peso de la determinacion de X, por $g_1, g_2, g_3 \ldots\ldots$ los correspondientes á cada una de las observaciones que dan los valores de $Q_1, Q_2 \ldots\ldots$ y además representamos por h' el módulo de convergencia de la unidad de peso, segun lo demostrado (§ 42) tendremos:

$$H = h'\sqrt{G}; \quad h_1 = h'\sqrt{g_1}; \quad h_2 = h'\sqrt{g_2} \ldots\ldots$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion (7) se obtendrá:

$$G = \frac{1}{\frac{a^2}{g_1} + \frac{b^2}{g_2} + \frac{c^2}{g_3} + \ldots\ldots}; \quad (8)$$

fórmula que resuelve el problema.

En el caso de ser todas las observaciones que han dado los valores $q_1, q_2, q_3 \ldots\ldots$ de la misma precision, y por lo tanto del mismo peso, si se conviene en tomarle por unidad, lo que equivale á hacer

$$g_1 = g_2 = g_3 = \ldots\ldots = 1$$

tendremos:

$$G = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots\ldots}$$

fórmula muy sencilla y de la mayor importancia.

Si el valor de x constára de un solo término $x = a\,q_1$ su peso tendría por expresion $G = \frac{g_1}{a^2}$ que resulta de hacer esta hipótesis en la fórmula (8) en que se deja indeterminada la unidad de peso, y si además de esta hipótesis hacemos $a=\sqrt{g_1}$ quedaría $g=1$.

Vemos pues, que siendo g_1 el peso de un valor q_1 el del producto $q_1\sqrt{g'}$ es la unidad. Mas adelante haremos uso de esta consecuencia.

51. Tratemos ya de investigar los pesos de las determinaciones de las incógnitas x, y, z, v, deducidas de las ecuaciones normales para lo que, elegiremos por unidad de peso el correspondiente á las observaciones que han dado los valores $q_1, q_2 \ldots.$

Volvamos á considerar las ecuaciones primitivas

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x+b_1 y+c_1 z+d_1 v=l_1 \\ a_2 x+b_2 y+c_2 z+d_2 v=l_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n x+b_n y+c_n z+d_n v=l_n \end{array}\right\} (1)$$

y las normales

$$\left.\begin{array}{l} [aa]x+[ab]y+[ac]z+[ad]v=[aq] \\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bd]v=[bq] \\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+[cd]v=[cq] \\ [ad]x+[bd]y+[cd]z+[dd]v=[dq] \end{array}\right\} (2)$$

Designemos por X, Y, Z, V, los verdaderos valores de x, y, z, y v, así como tambien por $Q_1, Q_2, Q_3 \ldots$ los de las cantidades $q_1, q_2 \ldots.$

Si estos valores fuesen conocidos, sustituidos en las ecuaciones primitivas deberian verificarlas, y se tendría:

$$a_1 X + b_1 Y + c_1 Z + d_1 V = Q_1$$
$$a_2 X + b_2 Y + c_2 Z + d_2 V = Q_2$$
$$a_3 X + b_3 Y + c_3 Z + d_3 V = Q_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n X + b_n Y + c_n Z + d_n V = Q_n$$

Podemos operar con estas ecuaciones (que forzosamente han de ser compatibles) del mismo modo que con las primitivas cuando se dedujeron las ecuaciones normales (*) y se tendrá:

$$[aa]X + [ab]Y + [ac]Z + [ad]V = [aQ]$$
$$[ab]X + [bb]Y + [bc]Z + [bd]V = [bQ]$$
$$[ac]X + [bc]Y + [cc]Z + [cd]V = [cQ]$$
$$[ad]X + [bd]Y + [cd]Z + [dd]V = [dQ]$$

Esto supuesto, multipliquemos respectivamente estas ecuaciones por los factores indeterminados $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\dots$ elegidos de modo que al sumarlos, el coeficiente de X se reduzca á la unidad y los de las demás incógnitas se anulen, lo que equivale á decir que han de satisfacer á las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
[aa]\alpha_1 + [ab]\alpha_2 + [ac]\alpha_3 + [ad]\alpha_4 &= 1 \\
[ab]\alpha_1 + [bb]\alpha_2 + [bc]\alpha_3 + [bd]\alpha_4 &= 0 \\
[ac]\alpha_1 + [bc]\alpha_2 + [cc]\alpha_3 + [cd]\alpha_4 &= 0 \\
[ad]\alpha_1 + [bd]\alpha_2 + [cd]\alpha_3 + [dd]\alpha_4 &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(*) Esto equivale á decir, que debemos multiplicar cada una de dichas ecuaciones por el coeficiente que en ella lleva X y sumarlas; despues multiplicarlas por el coeficiente de Y y sumarlas tambien; y así sucesivamente.

y de este modo obtendremos para valor de X

$$X=[aQ]\alpha_1+[bQ]\alpha_2+[cQ]\alpha_3+[dQ]\alpha_4$$

Si en esta ecuacion se sustituyen en vez de cada uno de los símbolos $[aQ]$, $[bQ]$, $[cQ]$ y $[dQ]$, las sumas que representan y despues se sacan Q_1, Q_2, Q_3.... por factor comun de las cantidades á quienes multiplican, tendremos:

$$X=(a_1\alpha_1+b_1\alpha_2+c_1\alpha_3+d_1\alpha_4)\,Q_1+(a_2\alpha_1+b_2\alpha_2+c_2\alpha_3+d_2\alpha_4)\,Q_2$$
$$+(a_3\alpha_1+b_3\alpha_2+c_3\alpha_3+d_3\alpha_4)Q_3+(a_4\alpha_1+b_4\alpha_2+c_4\alpha_3+d_4\alpha_4)Q_4+\ldots$$

y haciendo

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1=a_1\,\alpha_1+b_1\,\alpha_2+c_1\,\alpha_3+d_1\,\alpha_4 \\ \varepsilon_2=a_2\,\alpha_1+b_2\,\alpha_2+c_2\,\alpha_3+d_2\,\alpha_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n=a_n\,\alpha_1+b_n\,\alpha_2+c_n\,\alpha_3+d_n\,\alpha_4 \end{array}\right\}\quad(4)$$

se tiene

$$X=\varepsilon_1\,Q_1+\varepsilon_2\,Q_2+\varepsilon_3\,Q_3+\ldots\ldots$$

Aplicando á las ecuaciones normales este mismo procedimiento se obtendrá:

$$x=[a\,q]\,\alpha_1+[b\,q]\,\alpha_2+[c\,q]\,\alpha_3+[d\,q]\,\alpha_4+\ldots\ldots\quad(5)$$

y tambien

$$x=\varepsilon_1\,q_1+\varepsilon_2\,q_2+\varepsilon_3\,q_3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(6)$$

Se vé pues que la incógnita x es funcion lineal de las cantidades q_1, q_2.... obtenidas por medio de la observacion. El peso de esta determinacion podrá obtenerse por la regla demostrada en el párrafo anterior y designándolo por g_1 tendremos:

$$g_1 = \frac{1}{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \ldots\ldots}$$

ecuacion que empleando la notacion de Gauss podrá escribirse bajo la forma

$$g_1 = \frac{1}{[\varepsilon\varepsilon]} \quad (5)$$

Para determinar el valor de $[\varepsilon\varepsilon]$ multipliquemos respectivamente las ecuaciones (4) por $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots\ldots$ y sumemos los resultados, con lo que se obtendrá:

$$[\varepsilon\varepsilon] = [a\varepsilon]\,\alpha_1 + [b\,\varepsilon]\,\alpha_2 + [c\,\varepsilon]\,\alpha_3 + [d\,\varepsilon]\,\alpha_4 \quad (6)$$

La cantidad $[a\varepsilon]$ puede obtenerse multiplicando tambien cada una de las ecuaciones (4) por $a_1; a_2; \ldots. a_n$ y sumando los resultados; y este mismo procedimiento puede emplearse para deducir los valores de $[b\,\varepsilon], [c\varepsilon] \ldots$ de este modo se tiene:

$$[a\varepsilon] = [a\,a]\alpha_1 + [a\,b]\alpha_2 + [a\,c]\alpha_3 + [a\,d]\,\alpha_4$$
$$[b\varepsilon] = [a\,b]\alpha_1 + [b\,b]\alpha_2 + [b\,c]\alpha_3 + [b\,d]\,\alpha_4$$
$$[c\varepsilon] = [a\,c]\alpha_1 + [b\,c]\alpha_2 + [c\,c]\alpha_3 + [c\,d]\,\alpha_4$$
$$[d\varepsilon] = [a\,d]\alpha_1 + [b\,d]\alpha_2 + [c\,d]\alpha_3 + [d\,d]\,\alpha_4$$

Comparando estas ecuaciones con las (3) se deduce:

$$[a\varepsilon] = 1\,;\; [b\,\varepsilon] = 0\,;\; [c\varepsilon] = 0\,;\; [d\,\varepsilon] = 0$$

y sustituyendo estos valores en la ecuaciou (6) resulta:

$$[\varepsilon\varepsilon] = \alpha_1\,;$$

por consiguiente la (5) se convertirá en

$$g_1 = \frac{1}{\alpha_1} \quad (7)$$

Representando por k_1, k_2, k_3 y k_4 los segundos miembros (aq), (bq), (cq) y (dq) de las ecuaciones normales, la fórmula (5) se podrá escribir bajo la forma:

$$x = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \alpha_4 k_4 \quad (8)$$

La fórmula (7) podrá traducirse al lenguaje ordinario diciendo, que el peso de la determinacion de la incógnita x es recíproco del coeficiente del segundo miembro k_1 de la primera ecuacion normal en la expresion de dicha incógnita.

Idénticas consideraciones nos conducirian á la consecuencia de que el peso de la determinacion de la incógnita g es el valor recíproco del coeficiente que lleva el segundo miembro k_2 de la segunda ecuacion normal en la expresion de dicha incógnita, y así sucesivamente diríamos de los pesos de las otras incógnitas.

Siendo los coeficientes α_1, α_2, α_3...... independiente de los valores de los segundos miembros, (puesto que no contienen dichos segundos miembros las ecuaciones (3) que los determinan); no variará α_1 por que se haga el segundo miembro K_1 de la primera ecuacion normal igual á la unidad, é iguales á cero los segundos miembros de las ecuaciones restantes; solo sí deberá tenerse en cuenta que las incógnitas cambiarán de valor y perderán su significacion. Dedúcese pues que si resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}[a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,c]\,z+[a\,d]\,v=1\\ [a\,b]\,x+[b\,b]\,y+[b\,c]\,z+[b\,d]\,v=0\\ [a\,c]\,x+[b\,c]\,y+[c\,c]\,z+[c\,d]\,v=0\\ [a\,d]\,x+[b\,d]\,y+[c\,d]\,z+[d\,q]\,v=0\end{array}\right\}(9)$$

el valor de x deducido de estas ecuaciones, que será igual al resultado de hacer

$$k_1=1;\ k_2=0;\ k_3=0;\ k_4=0$$

en la ecuacion (8) se reducirá á

$$x=\alpha;\quad (10).$$

Este resultado indica que el peso de la determinacion de x es recíproco del valor de x deducido de las ecuaciones (9).

Análogamente el peso de la determinacion de y lo encontrariamos por medio de las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}[a\,a]\,x+[a\,b]\,y+[a\,c]\,z+[a\,d]\,v=0\\ [a\,b]\,x+[b\,b]\,y+[b\,c]\,z+[b\,d]\,v=1\\ [a\,c]\,x+[b\,c]\,y+[c\,c]\,z+[c\,d]\,v=0\\ [a\,d]\,x+[b\,d]\,y+[c\,d]\,z+[d\,d]\,v=0\end{array}\right\}$$

hallando el valor recíproco del que obtuviéramos para y; y del mismo modo se encontrarian los pesos correspondientes á las demás incógnitas.

Aun podemos indicar una tercera regla para la investigacion de estos pesos. Si suponemos que la eliminacion de las incógnitas, se ha hecho en las ecuaciones normales por el método de sustitucion y que de este modo se han eliminado todas las incógnitas menos la x, y suponemos que se ha tenido cuidado de no introducir ningun factor en los dos miembros de la ecuacion final, esta será de la forma

$$Mx = k_1 + H.$$

Siendo H una cantidad compuesta de términos que contendrán como factores á k_2 k_3 y k_4.

Esta ecuacion deberá ser equivalente á la (10) haciendo

$$k_1 = 0 \text{ y } k_2 = 0; \; k_3 = 0 \text{ y } k_4 = 0$$

con lo que se reducirá á $Mx = 1$ por ser M independiente de k_1, k_2 y k_3. Comparándola con la ecuacion (9) se deduce

$$M = \frac{1}{\alpha};$$

luego M será el peso de la determinacion de x.

Deduciéndose como consecuencia, que si en las ecuaciones normales se efectúa la eliminacion de todas las incógnitas menos la x, por el método de sustitucion y no se ha introducido ningun factor en la ecuacion final, el coeficiente de que resulte afectada esta incógnita será el peso de su determinacion. Esta misma consecuencia puede deducirse cualquiera que sea el método de eliminacion empleado, siempre que se tenga cuidado de dividir por el coeficiente de k_1 los dos miembros de la ecuacion final en x.

Igualmente si concebimos que se han pasado á los primeros miembros las cantidades que figuran en los segundos de las ecuaciones normales y despues reemplazamos los nuevos segundos miembros que serán cero por una série de cantidades indeterminadas N_1, N_2.....

Se convertirán dichas ecuaciones en

$$\left.\begin{array}{l}[aa]x+[ab]y+[ac]z+[ad]v-k_1=N_1\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bd]v-k_2=N_2\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+[cd]v-k_3=N_3\\ [ad]x+[bd]y+[cd]z+[dd]v-k_4=N_4.\end{array}\right\}(11)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, el coeficiente de que resulte afectada la cantidad N_1 en el valor de x, será el mismo que el que se obtuvo afectando á la cantidad k_1 en el valor de x al resolver las ecuaciones normales, es decir, que será α_1.

Si en el valor de x deducido de las ecuaciones (11) se hace $N_1=0$; $N_2=0$..... desaparecerán los términos que contengan estas cantidades y la suma de las cantidades restantes darán el valor de estas incógnitas. Dedúcese por consiguiente: 1.° que una vez resueltas las ecuaciones (11) los coeficientes de N_1 en el valor de x, de N_2 en el de y, de N_3 en el de z y de N_4 en el de v serán recíprocos de los pesos de las determinaciones de estas incógnitas, y 2.° que los valores de las incógnitas estarán espresados en cada una de las fórmulas encontradas, por los términos que sean independientes de las indeterminadas $N_1 N_2 N_3$ y N_4.

52. Determinados los pesos correspondientes á los valores de las incógnitas deducidos de las ecuaciones normales; si préviamente se supone conocido el

módulo de convergencia de la unidad de peso, que en el caso actual es el de cada una de las observaciones que han dado los valores q_1; q_2....; podrán determinarse los módulos de convergencia de cada uno de los referidos valores de las incógnitas, multiplicando dicha cantidad h por la raiz cuadrada de sus pesos (§ 42).

Generalmente no puede operarse de este modo por ser desconocido el módulo de convergencia de la unidad de peso y para determinar esta cantidad de la cual dependen todas las demás análogas, hay que seguir un procedimiento semejante al empleado (§ 43) al investigar el módulo de convergencia de un género determinado de observaciones, cuando solo se trataba de hallar el valor de una cantidad.

Volviendo á considerar las mismas ecuaciones primitivas empleadas en los párrafos anteriores, se ha visto (§ 48) que los errores cometidos en las observaciones tienen por valor

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 v - q_1 \\ \delta_2 = a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 v - q_2 \\ \vdots \\ \delta_n = a_n x + b_n y + c_n z + d_n v - q_n \end{array}\right\} (1)$$

y la probabilidad P del concurso de estos errores está dada por la fórmula

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n h^n e^{-h^2(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta^2_n)} d\delta_1 \, d\delta_2 \ldots\ldots d\delta_n$$

Esta cantidad P recibirá diferentes valores segun las distintas hipótesis que pueden hacerse respeto de los de x, y, z, v y h. La probabilidad P_1 de una de estas hipótesis se obtendrá por medio del teorema de Bayes, dividiendo el valor que con ella tome P por la suma de los infinitos valores que esta cantidad recibiria con todas las combinaciones posibles de los valores de x, z, v y h y tendria por espresion:

$$P_1 = \frac{h^n e^{-h^2(\delta_1^2+\delta_2^2+\ldots+\delta^2_n)} dx\, dy\, dz\, dv\, dh}{\int_0^{\infty} h^n\, dh \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-h^2(\delta_1^2+\delta_2^2+\ldots+\delta^2_n)}}$$

cuya fraccion resulta despues de hacer las reducciones y de multiplicar los dos términos por $dx\, dy\, dz\, dv\, dh$.

La probabilidad P de un valor de h combinado con valores indeterminados de x, y, z, y v la obtendremos segun el principio de la probabilidad total, sumando los diferentes valores que tome la fraccion anterior para todos los que puedan recibir dichas cantidades x, y, z, y v: y se tendrá:

$$P = \frac{h^n\, dh \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-h^2(\delta_1^2+\delta_2^2+\ldots)}}{\int_0^{\infty} h^n\, dh \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-h^2(\delta_1^2+\delta_2^2+\ldots)}}$$

Con el fin de facilitar el cálculo de las integrales que figuran en el numerador de esta fraccion, vamos á dar una forma conveniente á la suma

$$\delta_1^2+\delta_2^2+\ldots+\delta_n^2$$

que la representaremos por $2S$.

Elevando al cuadrado cada una de las ecuaciones (1) y sumándolas, se tiene

$$\left.\begin{array}{rl} 2S=[aa]x^2+2[ab]xy+2[ac]xz+2[ad]xv-2[aq]x & \\ +\ [bb]y^2+2[bc]yz+2[bd]yv-2[bq]y & \\ +\ [cc]zz+2[cd]zv-2[cq]z & \\ +\ [dq]v^2-2[dq]v & \\ +\ [qq] & \end{array}\right\} \quad (2)$$

Derivando los dos miembros de esta ecuacion con respecto á x, dividiendo ambos miembros por 2 y representando por w el resultado se obtiene

$$\frac{dS}{dx}=w=[aa]x+[ab]y+[ac]z+[ad]v-[al] \quad (3)$$

haciendo $$2S'=2\delta-\frac{w^2}{[aa]}$$

puede observarse que S′ será independiente de x: en efecto, derivando esta ecuacion con relacion á x y dividiendo por 2 se tendrá:

$$\frac{dS'}{dx}=\frac{dS}{dx}-\frac{w}{[aa]}\cdot\frac{dw}{dx}=w-\frac{w}{[aa]}\cdot\frac{dw}{dx}; \quad (4)$$

De la ecuacion (3) se deduce $\frac{dw}{dx}=[aa]$ y sustituyendo este valor en la (4) tendremos: $\frac{dS'}{dx}=0$ lo que prueba que S′ no depende de x.

El valor de 2S′ lo obtendremos restando de la ecuacion (2), el resultado de elevar al cuadrado los dos miembros de la (3) y dividirla por $[aa]$ y quedará

$$\left.\begin{aligned}2\,S' = [bb]_1\,y^2 + 2\,[b\,c]_1\,y\,z + 2\,[b\,d]_1\,y\,v - 2\,[b\,q]_1\,y\\ + \;[c\,c]_1\,z^2 + 2\,[c\,d]_1\,z\,v - 2\,[c\,q]_1\,z\\ + \;[dd]_1\,v^2 - 2\,[d\,q]_1\,v\\ + \;[q\,q]_1\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

á cuya expresion se llega sin dificultad teniendo en cuenta la significacion de los símbolos $[bb]_1$, $[bc]_1$... &.

Derivando con respecto á y los dos miembros de la ecuacion (5) dividiendo por 2 y designando por w_1 el resultado se tiene:

$$\frac{dS'}{d\,y} = w_1 = [b\,b]_1\,y + [b\,c]_1\,z + [b\,d]_1\,v - [b\,q]_1 \quad (6)$$

y haciendo

$$2\,S'' = 2\,S' - \frac{w_1^{\,2}}{[b\,b]_1}.$$

La cantidad S'' será independiente de y por ser nula la derivada $\frac{d\,S''}{d\,y}$, y como desde luego se observa que no contiene x, será independiente de las dos incógnitas x é y. Si en la expresion de $2\,S''$ sustituimos en vez de $2\,S'$ y de w_1 sus valores dados por las ecuaciones (5) y (6), teniendo presente la significacion de los símbolos $[b\,c]_2$ y $[c\,d]_2$.... &., se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}2\,S'' = [c\,c]_2\,z^2 + 2\,[c\,d]_2\,z\,v - 2\,[c\,q]_2\,z\\ + \;[d\,d]_2\,v^2 - 2\,[dq]_2\,v\\ + \;[q\,q]_2\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

y derivando los dos miembros de esta ecuacion con respecto á z, dividiendo por 2 ambos miembros y representando el resultado por w_2 tendremos:

$$\frac{d\,S''}{d\,z} = [c\,c]_2\,z + [c\,d]_2\,v - [c\,q]_2 = w_2$$

y haciendo

$$2\,S''' = 2\,S'' - \frac{w_2^{\,2}}{[c\,c]_2}$$

se deduce, razonando del mismo modo que se hizo con el valor de $2\,S''$, que el de $2\,S'''$ es independiente de x, y y z.

Sustituyendo en vez de $2\,S''$ y de w_2 sus valores, se tendría:

$$\left.\begin{array}{r} 2\,S''' = [d\,d]_3\,v^2 - 2\,[d\,q]\,v \\ +\ \ [q\,q]_3 \end{array}\right\} (8)$$

y derivando esta ecuacion con relacion á v_1, dividiendo por 2 y designando por w_3 el resultado, se obtiene:

$$\frac{d\,s'''}{d\,v} = [d\,d]_3\,v - [d\,q]_3 = w_3 \quad (9)$$

y haciendo

$$2\,S^{IV} = 2\,S''' - \frac{w_3^{\,2}}{[d\,d]_3},$$

se vería del mismo modo que S^{IV} es independiente de todas las incógnitas, y para obtener su valor bastará sustituir en vez de $2\,S'''$ y de w_3 los expresados en las ecuaciones (8) y (9) y resultará:

$$2\,S^{IV} = [q\,q]_4$$

En resúmen, se han obtenido las ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
2\,S' &= 2\,S - \frac{w^2}{[a\,a]} \\
2\,S'' &= 2\,S' - \frac{w_2{}^2}{[b\,b]_1} \\
2\,S''' &= 2\,S'' - \frac{w_1{}^2}{[c\,c]_2} \\
2\,S^{IV} &= 2\,S''' - \frac{w_3{}^2}{[d\,d]_3} \\
[q\,q]_4 &= 2\,S^{IV}
\end{aligned}\right\} 2\,S = [q\,q]_4 + \frac{w^2}{[a\,a]} + \frac{w_1{}^2}{[b\,b]_1} + \frac{w_2{}^2}{[c\,c]_2} + \frac{w_3{}^2}{[d\,d]_4}$$

estando dadas las cantidades w, w_1, w_2, w_3 por las ecuaciones

$$\begin{aligned}
w &= [aa]x + [ab]y + [ac]z + [ad]v - [aq] \\
w_1 &= [bb]_1 y + [bc]_1 z + [bd]_1 v - [bq]_1 \\
w_2 &= [cc]_2 z + [cd]_2 v - [cq]_2 \\
w_3 &= [dd]_3 v - [dq]_3 .
\end{aligned}$$

La primera de estas cantidades w depende de las cuatro incognitas x, y, z. y v; la segunda w_1 solo depende de las tres incógnitas x, y, y z; la tercera de z y v, y finalmente la cuarta cantidad w_3 no depende mas que de v.

Esto supuesto, si sustituimos en la espresion P en vez de

$$\partial_1{}^2 + \partial_2{}^2 + \ldots\ldots\ldots + \partial^2 n = 2\,S$$

el valor que acaba de encontrarse y representamos por D el denominador de la fraccion escrita en el segundo miembro, que es una cantidad constante, tendremos:

$$P = \frac{h^n\, dh \int_{-\infty}^{\infty} dv \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-h^2\left[[qq]_4 + \frac{w^2}{[aa]} + \frac{w_1^2}{[bb]_1} + \frac{w_2^2}{[cc]_2} + \frac{w_3^2}{[dd]_3}\right]}}{D}$$

y teniendo en cuenta las variables de quien depende cada una de las cantidades

$$w,\ w_1,\ w_2 \text{ y } w_3,$$

se podrá escribir el valor de P bajo la forma

$$P = \frac{h^n\, e^{-h^2[qq]_4}}{D}\, dh$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2 w_3^2}{[dd]_3}} dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2 w_2^2}{[cc]_2}} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2 w_1^2}{[bb]_1}} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2 w^2}{[aa]}} dx; \quad (10)$$

Empecemos por determinar la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2 w^2}{[aa]}} dx$$

y hagamos con este objeto

$$t^2 = \frac{h^2 w^2}{[aa]} \quad \text{de donde} \quad t = \frac{hw}{\sqrt{[aa]}} \quad \text{y} \quad dt = \frac{h}{\sqrt{[aa]}}\, dw.$$

De la espresion del valor de w se deduce

$$d\,w = [a\,a]\,d\,x$$

y por consiguiente sustituido en la ecuacion anterior se tendrá:

$$d\,t = \frac{h}{\sqrt{[a\,a]}}[a\,a]\,d\,x = h\sqrt{[a\,a]}\,d\,x;$$

de donde

$$d\,x = \frac{1}{h\sqrt{[a\,a]}}\,d\,t,$$

y podremos establecer la ecuacion

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2 w^2}{[a\,a]}}\,d\,x = \frac{1}{h\sqrt{[a\,a]}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,d\,t$$

Los límites siguen siendo los mismos, puesto que w se hace infinito con x, y t con w.

Se sabe que la integral que entra en el segundo miembro, tiene por valor $\sqrt{\pi}$ y por lo tanto la ecuacion anterior se convertirá en

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2 w^2}{[a\,a]}}\,d\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{[a\,a]}}\,h^{-1}$$

Este resultado puede sustituirse en la ecuacion (10) y por ser independiente de las incógnitas lo sacaremos fuera de todas las integrales y se tendrá:

$$P = \frac{h^n e^{-h^2[qq]_4}}{D} \, dh$$

$$\times \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{[aa]}} h^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2 w^2}{[dd]_3}} dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2 w_2^2}{[cc]_2}} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2 w_1^2}{[bb]_1}} dy$$

La integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2 w_1^2}{[bb]_1}} dy$$

puede determinarse, empleando el mismo procedimiento que el seguido para la anterior y tendríamos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{h^2 w_1^2}{[bb]_1}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{[bb]_1}} h^{-1}$$

y tambien podría sacarse despues de sustituidos en el valor de P, fuera de las demás integrales

Idénticas consideraciones pueden aplicarse á las dos integrales restantes y como el resultado de cada integracion es h^{-1} multiplicado por un factor constante, si se representa por A la cantidad constante que entrará como factor en el valor de P resultará:

$$P = A \, e^{-h^2 [qq]_4} \, h^{n-h}$$

Esta fórmula determina la probabilidad de un valor cualquiera de h dejando indeterminados los de las incógnitas.

La hipótesis más probable respecto de h será aquella que haga tomar á P un valor máximo.

Siguiendo el método general, hallaremos dicho valor de h igualando á cero la derivada $\frac{dp}{dh}$ y se obtiene:

$$\frac{dP}{dh}=A(n-4)e^{-h^2[qq]_4}h^{n-5}-2A[qq]_4e^{-h^2[qq]_3}h^{n-3}=0$$

Se pueden dividir los dos miembros de esta ecuacion por $A e^{-h^2[qq]_4} h^{n-5}$, puesto que los valores $h=0$ y $h=\infty$ que anulan á esta cantidad no puede recibirlos h, y se obtendrá:

$$(n-4)-2[qq]_4h^2=0 \text{ de donde } h^2=\frac{n-4}{2[qq]_4} \text{ y } h=\sqrt{\frac{n-4}{2[qq]_4}}$$

Este valor de h corresponde á un máximo de P, puesto que la segunda derivada $\frac{d^2p}{dh^2}$ tiene por espresion

$$\frac{d^2P}{dh^2}=Ah^{n-5}e^{-h^2(qq)_4}\times-4[qq]_4h+$$

$$+((n-4)-2[qq]_4h^2)\frac{d(Ah^{n-5}e^{-h^2[qq]_4})}{dh}$$

que con el valor encontrado para h, el primer término es negativo y se anula el segundo, cumpliéndose por consiguiente la condicion de máximo.

Del valor de h puede deducirse el correspondiente del error medio cuadrático: bastará para ello hacer uso de la fórmula

$$E^2 = \frac{1}{2h^2}$$

que se convertirá por la sustitucion del valor de h en

$$E^2 = \frac{[qq]_4}{n-4};$$

puede observarse que $[qq]_4$ representa la suma de los cuadrados de los errores cometidos en las observaciones, tomando como verdaderos valores de las incógnitas los deducidos de las ecuaciones normales.

En efecto los segundos miembros de los valores de w, w_1, w_v y w_3 no son otra cosa que los primeros de las ecuaciones finales que se encontraron al resolver las ecuaciones normales y por lo tanto estas cantidades w, w_1...... se anularan si en vez de las incógnitas se sustituyen los valores encontrados por medio de las referidas ecuaciones normales y el valor de 2S, que como se sabe es la suma de los cuadrados de los errores, se convertirá en $[qq]_4$.

Vemos pues que podrá reemplazarse $[qq]_4$ por ΣS_2 y se obtiene

$$E^2 = \frac{\Sigma \delta^2}{n-4}$$

Si generalizando la fórmula se supone que el número de incógnitas es m, deduciremos por analogía

$$E^2 = \frac{\Sigma \delta^2}{n-m}; \qquad (11)$$

$$\text{y } E^2 = \frac{[qq]_m}{n-m} \qquad (12)$$

La primera de estas dos fórmulas puede traducirse al lenguaje ordinario, diciendo que el error medio cuadrático correspondiente á las observaciones de unidad de peso, es igual al cociente de la division de la suma de los cuadrados de los errores de dichas observaciones, tomando como verdaderos valores de las incógnitas los deducidos de las ecuaciones normales, por la diferencia entre el número total de dichas observaciones ó sea el de ecuaciones primitivas, y el de incógnitas. En la práctica conviene emplear la segunda de estas fórmulas. El numerador $[qq]_m$ se obtiene, calculando sucesivamente $[qq]$, $[qq]_1$, $[qq]_2$,... $[qq]_m$ con arreglo á la definicion de estos símbolos.

Conocido el error medio cuadrático y por lo tanto el módulo de convergencia h correspondiente á la unidad de peso, se podrá obtener el del valor de una cualquiera de las incógnitas, multiplicando dicho módulo de convergencia h por la raiz cuadrada del peso de la determinacion de dicha incógnita. Una vez encontrados los módulos de convergencia de los diferentes valores deducidos para las incógnitas, quedarán tambien determinadas las fórmulas de las probabilidades de los errores.

53. En la demostracion anterior se ha admitido tácitamente que las cantidades

$$[a\,a],\ [b\,b]_1,\ [c\,c]_2,\ldots\ldots$$

son positivas y distintas de cero, lo que fácilmente puede comprovarse.

La primera cantidad

$$[a\,a]=a_1^2+a_2^2+\ldots\ldots+a^2_n$$

evidentemente cumple con esta condicion. La $[bb]_1$ esta definida por la ecuacion

$$[b\,b]_1 = [b\,b] - \frac{[a\,b]^2}{[a\,a]} = [a\,a]^{-1}\Big([a\,a]\,[b\,b] - [a\,b]^2\Big)$$

y reemplazando los símbolos

$$[a\,a],\ [b\,b]\ y\ [a\,b]$$

por las sumas que representan, tendremos

$$[bb]_1 = [aa]^{-1}\Big\{(a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + \ldots\ldots + b_n^2)$$

$$- (a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \ldots\ldots + a_n\,b_n)^2\Big\}$$

Puede observarse, que los productos de los términos que ocupan el mismo lugar en los dos factores del minuendo de la cantidad comprendida dentro del paréntesis, se destruirán con los cuadrados de los diferentes términos $a_1\,b_1$, $a_2\,b_2$,... Por otra parte, si, refiriéndonos al mismo minuendo, multiplicamos el término r de cada factor por el s del otro, se obtendrá

$$a_r^2 . b_s^2 + a_s^2\, b_r^2$$

y como en el sustraendo de dicha diferencia uno de los términos será

$$-2\, a_r . b_r\, a_s\, b_s$$

la reunion de los tres se podrá escribir bajo la forma

$$\left(a_r . b_s - a_s\, b_r\right)^2$$

Teniendo esto presente, podremos dar al valor de $[bb]_1$ la forma

$$[bb]_1=[aa]^{-1}\times$$
$$\times\left\{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\ldots+(a_rb_s-a_sb_r)^2+,\ldots\right\}$$

El factor $[aa]^{-1}$ es una cantidad positiva y tambien lo es el polinomio comprendido dentro del paréntesis, por ser suma de cuadrados. Cada uno de estos cuadrados no puede ser nulo separadamente, puesto que entonces se tendria

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots..$$

y los dos primeros términos de las ecuaciones primitivas se podrian poner bajo la forma $(ax+by)$ C, siendo C una constante que variaría de una á otra ecuacion y la cantidad $ax+by$ haria el papel de una sola incógnita, con lo que se disminuiría en una unidad el número de estas.

Fijémonos ahora en la cantidad $(cc)_2$ que, segun se ha convenido, tiene por expresion

$$[cc]_2=[cc]_1-\frac{[bc]_1^2}{[bb]_1}=[bb]_1^{-1}\left([cc]_1[bb]_1-[bc]_1^2\right)$$

Con arreglo á lo anteriormente espuesto se tendrá:

$$[bb]_1=[aa]^{-1}\times$$
$$\times\left((a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\ldots+(a_rb_s-a_sb_r)^2+\ldots.\right)$$

:

$$[cc]_1 = [aa]^{-1} \times$$
$$\times\left((a_1 c_2 - a_2 c_1)^2 + (a_1 c_3 - a_3 c_1)^2 + \ldots + (a_r c_s - a_s c_r)^2 + \ldots\ldots\right)$$

Si designamos á cada una de las cantidades que tienen la forma

$$\left(a_r b_s - a_s b_r\right),$$

por

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots,$$

y á las comprendidas en la forma

$$\left(a_r c_s - a_s c_r\right)$$

por

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots\ldots,$$

y adoptamos la notacion de Gauss, tendremos

$$[b\,b]_1 = [a\,a]^{-1}[\alpha\,\alpha] \text{ y } [c\,c]_1 = [a\,a]^{-1}[\varepsilon\,\varepsilon].$$

Queda por determinar la cantidad $[b\,c]_1$, que entra en la expresion de $[c\,c]_2$, y este valor lo hallaremos siguiendo un procedimiento análogo al empleado para $[b\,b]_1$. De este modo se deduce

$$[bc]_1 = [bc] - \frac{[a\,b]\,[a\,c]}{[a\,a]} = [a\,a]^{-1}\left([aa]\,[bc] - [ab]\,[ac]\right)$$

$$= [a\,a]^{-1}\left\{\begin{array}{l}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_n c_n) \\ -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)(a_1 c_1 + a_2 c_2 + \ldots + a_n b_n)\end{array}\right\}$$

$$= [aa]^{-1}\Big((a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 c_2 - a_2 c_1) + (a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_1 c_3 - a_3 c_1) + \ldots$$

$$+ \left(a_r b_s - a_s b_r\right)\left(a_r b_s - a_s c_r\right) + \ldots\ldots\Big) = [a\,a]^{-1}[\alpha\,\varepsilon].$$

El valor de $[cc]_2$ podrá escribirse bajo la forma

$$[cc]_2=[bb]_1^{-1}[aa]^{-2}\left([\alpha\alpha]\,[\epsilon\epsilon]-[\alpha\epsilon]^2\right)$$

que podrá trasformarse en

$$[cc]_2=[bb]^{-1}[aa]^{-2}\Big([\alpha_1\epsilon_2-\alpha_2\epsilon_1]^2+\alpha_1\epsilon_3-\alpha_3\epsilon_1)^2+\ldots..$$

$$+\left(\alpha_r\epsilon_s-\alpha_s\epsilon_r\right)^2+\ldots...\Big),$$

que es una cantidad positiva y que no puede ser nula, porque si así sucediese, tendria que verificarse

$$\frac{\alpha_1}{\epsilon_1}=\frac{\alpha_2}{\epsilon_2}=\frac{\alpha_3}{\epsilon_3}=\ldots\ldots\ldots;$$

pero podemos observar que

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots\ldots;\ \epsilon_1,\ \epsilon_2,\ldots\ldots$$

son respectivamente los coeficientes de y y de z en las ecuaciones que resultarian de eliminar x entre cada dos de los ecuaciones primitivas por el método de reduccion, y por consiguiente los dos primeros términos de las ecuaciones obtenidas en esta eliminacion, podrian ponerse bajo la forma

$$(\alpha_1\ y+\epsilon_1\ z)\ C_1,$$

variando la constante C_1 de una á otra ecuacion; y esto equivaldria á considerar á

$$\alpha_1\ y+\epsilon_1\ z$$

como una sola incógnita, quedando disminuido en una unidad el número de éstas.

Del mismo modo se continuaria demostrando que $[d\,d]_3\ldots\ldots$ son cantidades positivas y distintas de cero.

54. *Caso en que las observaciones, que determinan los segundos miembros de las ecuaciones primitivas, sean de distinto peso.* Consideremos nuevamente las ecuaciones primitivas

$$\left.\begin{array}{l} a_1\,x+b_1\,y+c_1\,z+d_1\,v+k_1=q_1 \\ a_2\,x+b_2\,y+c_2\,z+d_2\,v+k_2=q_2 \\ \vdots \\ a_n\,x+b_n\,y+c_n\,z+d_n\,v+k_n=q_n \end{array}\right\} (1)$$

y designemos por $g_1, g_2, g_3, \ldots\ldots g_n$ respectivamente los pesos de las observaciones que han dado los valores $q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$.

Multipliquemos por $\sqrt{g_1}$ la primera de las ecuaciones 1, por $\sqrt{g_2}$ la segunda y así sucesivamente y tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\sqrt{g_1}x+b_1\sqrt{g_1}\,y+c_1\sqrt{g_1}\,z+d_1\sqrt{g_1}v+k_1\sqrt{g_1}=q_1\sqrt{g_1} \\ a_2\sqrt{g_2}x+b_2\sqrt{g_2}\,y+c_2\sqrt{g_2}\,z+d_2\sqrt{g_2}\,v+k_2\sqrt{g_2}=q_3\sqrt{g_2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n\sqrt{g_2}x+b_n\sqrt{g_n}y+c_n\sqrt{g_n}z+d_n\sqrt{g_n}\,v+k_n\sqrt{q_n}=q_n\sqrt{q_n} \end{array}\right\}$$

Segun lo demostrado (§ 50), el peso de la cantidad representada por el producto $q_1\sqrt{g_1}$ será la unidad, é igual consideracion puede hacerse respecto de los demás productos análogos.

$$q_2\sqrt{g_2},\ q_3\sqrt{g_3}\ldots\ldots q_n\sqrt{g_n}$$

Podremos pues considerar á todos estos segundos miembros como si se hubiesen obtenido directamente de observaciones cuyo peso sea la unidad; con lo que habremos reducido este caso al anteriormente considerado.

Todos los cálculos hechos en la investigacion última podrán servirnos para la presente, teniendo en cuenta la modificacion de los coeficientes. Así por ejemplo, el símbolo

$$[b\,d]=b_1d_1+b_2d_2+\ldots\ldots+b_n\,d_n=[b\,d\,g]$$

deberá reemplazarse por

$$[b\sqrt{g}\,.\,d\sqrt{g}]=b_1d_1g_1+b_2d_2g_2+\ldots\ldots+b_nd_ng_n$$

Esto supuesto, si convenimos en que el mismo símbolo $[b\ d]$ exprese la suma de los productos b_1d_1, b_2d_2,...... multiplicados respectivamente por g_1, g_2....., no habrá necesidad de introducir ninguna modificacion en los cálculos del caso anterior y solo en los resultados finales, es en donde deberá tenerse en cuenta la distinta significacion de los símbolos considerados.

Frecuentemente se determinan las cantidades q_1, q_2....., hallando para cada una la media diferencial de varias observaciones. Si suponemos que q_1 sea la media diferencial de g_1 observaciones, q_2 la media diferencial de g_2 observaciones etc. y admitimos que todas estas observaciones sean de la misma precision, tomando su peso por unidad, los números $g_1, g_2 \ldots\ldots$ expresarán los pesos de las cantidades $q_1, q_2 \ldots\ldots$

55. *Caso en que las ecuaciones primitivas sean de un grado cualquiera con respecto á las incógnitas.*

Sean las ecuaciones primitivas

$$\left.\begin{array}{l} F_1(X, Y, Z\ldots\ldots) = q_1 \\ F_2(X, Y, Z\ldots\ldots) = q_2 \\ \vdots \\ F_n(X, Y, Z\ldots\ldots) = q_n \end{array}\right\} (1)$$

en las que $q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$ suponemos que representan los valores de las cantidades deducidas de la observacion. Admitimos siempre que el número de ecuaciones es mayor que el de las incógnitas.

Muchas veces, el resultado de trabajos anteriores, hace conocer un sistema de valores aproximados de las incógnitas X, Y, Z..... y si así no fuese, podríamos obtenerlos, eligiendo el mismo número de ecuaciones que incógnitas y resolviéndolas por los procedimientos que el álgebra aconseje.

Esto supuesto, representemos por $x_0, y_0, z_0 \ldots\ldots$ los valores aproximados de las incógnitas y hagamos

$$X = x_0 + x; \; Y = y_0 + y; \; Z = z_0 + z \ldots\ldots \quad (2)$$

Las cantidades $x, y, z \ldots\ldots$ serán en general muy pequeñas y esto nos permitirá el que despues de reemplazar las incógnitas en las ecuaciones (1) por los valores (2) y desarrollar los primeros miembros por la fórmula de Taylor, puedan despreciarse los términos de órden superior al primero con respecto á $x, y, z.....$: así se obtendrá:

$$F_1(x_0, y_0....) + \frac{d\,F_1(x_0, y_0, z_0...)}{d\,x_0} x + \frac{d\,F_1(x_0, y_0, z_0...)}{d\,y_0} y$$
$$+ \frac{d\,F_1(x_0, y_0, z_0...)}{d\,z_0} z + ... = q_1$$

$$F_2(x_0, y_0....) + \frac{d\,F_2(x_0, y_0, z_0...)}{d\,x_0} x + \frac{d\,F_2(x_0, y_0, z_0...)}{d\,y_0} y$$
$$+ \frac{d\,F_2(x_0, y_0, z_0...)}{d\,z_0} z + ... = q_2$$

....

....

$$F_n(x_0, y_0....) + \frac{d\,F_n(x_0, y_0, z_0...)}{d\,x_0} x + \frac{d\,F_n(x_0, y_0, z_0...)}{d\,y_0} y$$
$$+ \frac{d\,F_n(x_0, y_0, z_0...)}{d\,z_0} z + ... = q_n$$

Si ahora se representan por $a_1, b_1, c_1....$ los coeficientes, que llevan las incógnitas en la primera ecuacion, por $a_2, b_2, c_2.....$ los correspondientes de la segunda ecuacion y así sucesivamente, se podian escribir dichas ecuaciones bajo la forma:

$$\left.\begin{array}{l}
a_1 x + b_1 y + c_1 z + ... = q_1 - F_1(x_0, y_0.....) \\
a_2 x + b_2 y + c_2 z + ... = q_2 - F_2(x_0, y_0.....) \\
.... \\
.... \\
a_n x + b_n y + c_n z + ... = q_n - F_n(x_0, y_0.....)
\end{array}\right\}(3)$$

y quedará la cuestion reducida á investigar los valores más probables de $x, y, z\ldots$ en un sistema de ecuaciones de primer grado. Aumentando estos valores á x_0, y_0, z_0...., se tendrán los de X, Y, Z.... que es lo que nos proponíamos.

La trasformacion que acaba de indicarse, se aplica muchas veces aún al caso de ser las funciones

$$F_1(X, Y, Z.....),\ F_2(X, Y, Z.....).....$$

de primer grado con respecto á las incógnitas X, Y, Z..... Ocurre en efecto con frecuencia, que préviamente se conocen valores aproximados $x_0, y_0\ldots.$ de dichas incógnitas y los cálculos se simplifican, limitándose á determinar las correcciones x, y, z..... de dichos valores. Entre este caso y el más general, solo existe una diferencia, y es, que cuando las funciones F_1, F_2..., sean de primer grado, los desarrollos

$$F_1(x_0+x, y_0+y.....),\ F_2(x_0+x, y_0+y, z_0+z.....).....$$

son exactamente iguales á los primeros miembros de las ecuaciones que nos han servido para deducir las (3); miéntras que, cuando sean funciones cualesquiera, se desprecian los términos de órden superior al primero, con respecto á las mencionadas correcciones x, y, z.....

56. *Correcciones que deben hacerse en las cantidades obtenidas por la observacion, cuando hayan de satisfacer á ecuaciones condicionales.*

Supongamos que por medio de la observacion se han determinado para n cantidades $u_1, u_2, \ldots. u_n$, los valores $q_1, q_2, \ldots. q_n$ y que deban satisfacer á las m ecuaciones condicionales

$$(1)\quad \begin{cases} F_1(u_1, u_2 \ldots\ldots u_n) = 0 \\ F_2(u_1, u_2 \ldots\ldots u_n) = 0 \\ \vdots \\ F_m(u_1, u_2 \ldots\ldots u_n) = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo en vez de $u_1, u_2 \ldots\ldots u_n$, sus valores $q_1, q_2 \ldots\ldots q_n$, deducidos de la observacion, las funciones $F_1, F_2 \ldots$, tomarán en general valores distintos de cero, que podremos designar por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$ y se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} F_1(q_1, q_2 \ldots\ldots q_n) = \alpha_1 \\ F_2(q_1, q_2 \ldots\ldots q_n) = \alpha_2 \\ \vdots \\ F_m(q_1, q_2 \ldots\ldots q_n) = \alpha_m \end{array}\right\} \quad (2)$$

Representando por 2 S la suma de los cuadrados de los errores ó correcciones

$$x_1 = u_1 - q_1 \,;\; x_2 = u_2 - q_2 \ldots\ldots x_n = u_n - q_n \,,$$

tendremos:

$$2\,S = x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2$$

y los valores más probables de dichas correcciones, serán aquellos que den un mínimo para 2 S. La diferencial de esta cantidad deberá ser igual á cero y se verificará:

$$x_1\, d\,x_1 + x_2\, d\,x_2 + \ldots\ldots + x_n\, d\,x_n = 0 \qquad (3).$$

Es evidente que si las cantidades $u_1, u_2 \ldots u_n$, no estuvieran ligadas por ninguna ecuacion condicional y por consiguiente si $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$, fuesen independientes entre sí, de la ecuacion (3), se deduciría:

$$x_1 = 0\,;\; x_2 = 0;\ldots\ldots x_n = 0\,;$$

y los valores observados serían los más probables de las cantidades en cuestion; pero debiendo verificarse las ecuaciones (1), las correcciones $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ no son independientes, sino que estarán ligadas por las ecuaciones que se obtengan de reemplazar $u_1, u_2 \ldots u_n$ en las ecuaciones (1) por

$$q_1 + x_1\,;\; q_2 + x_2 \ldots\ldots q_n + x_n.$$

Efectúando dicha sustitucion, desarrollando los primeros miembros por la fórmula de Taylor y despreciando los términos de órden superior al primero, respecto de x, y, z....., se tiene:

$$F_1(q_1, q_2 \ldots q_n) + \frac{d\,F_1}{d\,q_1} x_1 + \frac{d\,F_1}{d\,q_2} x_2 + \frac{d\,F_1}{d\,q_3} x_3 + \ldots\ldots + \frac{d\,F_1}{d\,q_n} x_n = 0$$

$$F_2(q_1, q_2 \ldots q_n) + \frac{d\,F_2}{d\,q_1} x_1 + \frac{d\,F_2}{d\,q_2} x_2 + \frac{d\,F_2}{d\,q_3} x_3 + \ldots\ldots + \frac{d\,F_2}{d\,q_n} x_n = 0$$

....

....

$$F_m(q_1, q_2 \ldots q_n) + \frac{d\,F_m}{d\,q_1} x_1 + \frac{d\,F_m}{d\,q_2} x_2 + \frac{d\,F_m}{d\,q_3} x_3 + \ldots + \frac{d\,F_m}{d\,q_n} x_n = 0$$

Los primeros términos de estas ecuaciones tienen respectivamente por valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$, segun expresan las ecuaciones (2), y si se designan además por $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$ los coeficientes de $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ de la primera de las anteriores ecuaciones, por $b_1, b_2 \ldots\ldots b_n$, los de la segunda y así sucesivamente, tendremos:

$$\left.\begin{cases} \alpha_1 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots\ldots + a_n x_n = 0 \\ \alpha_2 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ldots\ldots + b_n x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}\right\} \quad (4)$$

y diferenciándolas se obtendrá:

$$\left.\begin{array}{l} a_1\, d x_1 + a_2\, d x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_n\, d x_n = 0 \\ b_1\, d x_1 + b_2\, d x_2 + \ldots\ldots\ldots + b_n\, d x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (5)$$

Estas m ecuaciones contienen las n diferenciales

$$d x_1,\ d x_2, \ldots\ldots d x_n$$

(se supone $m < n$), por lo tanto podremos considerar á m de ellas, funciones de las $n-m$ restantes; si despues de hecha la eleccion de las m diferenciales mencionadas, se encuentran sus valores resolviendo las ecuaciones (5) y los sustituimos en la (3), se tendrá una ecuacion que solo contendrá $n-m$ diferenciales independientes entre sí. Igualando á cero los coeficientes de estas $n-m$ diferenciales, se obtendrían $n-m$ ecuaciones que en union de las m (4) determinarían los valores de las correcciones $x_1, x_2, \ldots . x_n$.

En la práctica conviene modificar este procedimiento. Las ecuaciones (5) podremos multiplicarlas respectivamente por las indeterminadas $k_1, k_2, \ldots . k_m$, sumarlas é identificar el resultado con la ecuacion (3) y así se obtendrá:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_1 k_1 + b_1 k_2 + \ldots\ldots \\ x_2 = a_2 k_1 + b_2 k_2 + \ldots\ldots \\ \vdots \\ x_n = a_n k_1 + b_n k_2 + \ldots\ldots \end{array}\right\} (6)$$

Para determinar los coeficientes $k_1, k_2, \ldots k_n$ sustituiremos los valores anteriores en las ecuaciones (4) y empleando la notacion de Gauss se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + (a\,a)k_1 + (a\,b)k_2 + \ldots\ldots = 0 \\ \alpha_2 + (a\,b)k_1 + (b\,b)k_2 + \ldots\ldots = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (7)$$

Por medio de estas m ecuaciones normales, pueden obtenerse los valores de $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots k_n$ y sustituyéndolos en las (6), que se llaman correlativas, quedarán determinadas las correcciones $x_1, x_2, \ldots . x_n$ que deben hacerse en las cantidades $q_1, q_2 \ldots\ldots$ ántes de someterlas al cálculo.

57. *Investigacion del peso de una cantidad, que sea funcion de otras anteriormente determinadas por el método de los mínimos cuadrados, así como tambien sus pesos.*

Sea la funcion

$$u = \mathrm{F}(x, y, z \ldots\ldots) \qquad (1)$$

en la que suponemos que $x, y, z \ldots\ldots$ han sido anteriormente determinadas por el método de los mínimos cuadrados, y que sus pesos respectivos sean $g_1, g_2, g_3 \ldots$

Designemos por $\delta_1, \delta_2, \delta_3 \ldots\ldots$, los errores cometidos en las determinaciones de x, y, z..... y por Δ el correspondiente de u. Los valores exactos de estas cantidades serán:

$$x+\delta_1, y+\delta_2, z+\delta_3 \ldots\ldots \quad \text{y} \quad n+\Delta.$$

La ecuacion (1), que podremos considerar como la expresion de una ley á que deben satisfacer las cantidades que contiene, se verificará si en vez de los valores aproximados de estas cantidades se sustituyen los exactos y tendremos:

$$u+\Delta = \mathrm{F}(x+\delta_1, y+\delta_2, z+\delta_3 \ldots\ldots) \qquad (2)$$

Restando las ecuaciones (1) y (2) y despreciando los términos de órden superior al primero con respecto á δ_1, δ_2...., despues de desarrollar por la fórmula de Táylor la funcion

$$\mathrm{F}(x+\delta_1, y+\delta_2, \ldots\ldots),$$

se tendrá:

$$\Delta = \frac{d\,\mathrm{F}}{d\,x}\delta_1 + \frac{d\,\mathrm{F}}{d\,y}\delta_2 + \frac{d\,\mathrm{F}}{d\,z}\delta_3 + \ldots\ldots$$

Siendo el error Δ una funcion lineal de los δ_1, δ_2..... podremos aplicar la regla demostrada (§ 50) y designando por G el peso de la determinacion de u tendremos:

$$\mathrm{G} = \frac{1}{\dfrac{\left(\dfrac{d\,\mathrm{F}}{d\,x}\right)^2}{g_1} + \dfrac{\left(\dfrac{d\,\mathrm{F}}{d\,y}\right)^2}{g_2} + \dfrac{\left(\dfrac{d\,\mathrm{F}}{d\,z}\right)^2}{g_3}} \qquad (3)$$

ecuacion que resuelve el problema.

En el caso de darse la ecuacion (1) en forma implícita, la fórmula (3) seguirá siendo aplicable y solo variará la manera de obtener las derivadas

$$\frac{d\,\mathrm{F}}{d\,x}=\frac{d\,u}{d\,x}\,;\ \frac{d\,\mathrm{F}}{d\,y}=\frac{d\,u}{d\,y}\ldots\ldots$$

debiendo emplear en este último caso la regla de derivacion correspondiente á esta clase de funciones.

De este modo, si la ecuacion tiene la forma:

$$\mathrm{F}\,(x,\,y,\,u\ldots\ldots,)=0$$

el peso de la determinacion de u estará expresado en la fórmula:

$$\mathrm{G}=\frac{\left(\frac{d\,\mathrm{F}}{d\,u}\right)^2}{\frac{\left(\frac{d\,\mathrm{F}}{d\,x}\right)^2}{g_1}+\frac{\left(\frac{d\,\mathrm{F}}{d\,y}\right)^2}{g_2}+\frac{\left(\frac{d\,\mathrm{F}}{d\,z}\right)^2}{g_3}}\qquad(3)$$

Aplicaciones.

58. Consideremos el caso particular de que las ecuaciones primitivas solo contengan una incógnita x.

Sean estas ecuaciones:

$$\begin{aligned}a_1\,x&=q_1\\a_2\,x&=q_2\qquad(1)\\&\vdots\\a_n\,x&=q_n\end{aligned}$$

en las que, q_1, $q_2\ldots.q_n$ son las cantidades obtenidas por medio de la observacion que supondremos del mismo peso. Si en los primeros miembros hubiera términos constantes podrían suponerse pasados á los segundos y comprendidos en las cantidades q_1, q_2.....

Esto supuesto, las ecuaciones normales se reducirán en este caso á una, que, en virtud de la regla demostrada (§ 48) será:

$$[a\,a]\,x = [a\,q] \quad (2)$$

de donde

$$x = \frac{[a\,q]}{[a\,a]}$$

El peso de esta determinacion, tomando por unidad el de las observaciones consideradas, lo obtendremos (§ 51) por medio de la ecuacion

$$[a\,a]\,x = 1$$

siendo recíproco del valor de x deducido de esta ecuacion; por lo tanto dicho peso será $[a\,a]$, y designándolo por G se tendrá:

$$\mathrm{G} = [a\,a] \quad (3)$$

El error medio cuadrático correspondiente á la unidad de peso, ó lo que es lo mismo, á las observaciones que han dado las cantidades q_1, q_2....., se determinará por medio de la fórmula encontrada (§ 52), que se convertirá para el caso presente en

$$\mathrm{E}^2 = \frac{[q\,q]_1}{n-1}$$

ó bien, teniendo en cuenta la relacion

$$[qq]_1 = [qq] - \frac{[aq]^2}{[aa]},$$

en

$$E^2 = \frac{[qq] - \frac{[aq]^2}{[aa]}}{n-1},$$

de donde

$$E = \sqrt{\frac{[qq] - \frac{[aq]^2}{[aa]}}{n-1}} \qquad (4)$$

De este valor puede deducirse el del módulo de convergencia correspondiente, por medio de la fórmula

$$h = \frac{1}{E\sqrt{2}},$$

y por lo tanto el módulo de convergencia de la determinacion de x, que representaremos por H, tendrá por expresion:

$$H = h\sqrt{G} = \frac{\sqrt{[aa]}}{E\sqrt{2}}$$

En el caso de ser de distinto peso las observaciones que han dado los valores q_1, $q_2 \ldots$, designándolos respectivamente por g_1, $g_2 \ldots g_n$, la ecuacion normal, con arreglo á lo expuesto (§ 48) sería:

$$[aag]\,x = [aqg]$$

de donde $$x=\frac{[a\,q\,g]}{[a\,a\,g]}, \quad (5)$$

y el peso de esta determinacion

$$G=[a\,a\,g] \quad (6)$$

así como el error medio cuadrático correspondiente á la unidad de peso

$$E=\sqrt{\frac{[q\,q\,g]-\frac{[a\,q\,g]^2}{[a\,a\,g]}}{n-1}}, \quad (7)$$

y los módulos de convergencia correspondientes á la unidad de peso y al valor de x

$$h=\frac{1}{E\sqrt{2}} \quad (8)$$

y $$H=\frac{\sqrt{[a\,a]\,g}}{E\sqrt{2}} \quad (9)$$

Si ahora suponemos

$$a_1=1,\ a_2=1 \ldots\ldots a_n=1$$

lo que equivale á decir que q_1, $q_2 \ldots q_n$ son los distintos valores dados por la observacion para la cantidad x, las fórmulas 5, 6, 7, 8 y 9 se convertirán en

$$x-\frac{[q\,q]}{[\,g\,]} \quad (5')$$

$$G=[g] \quad (6')$$

$$E=\sqrt{\frac{[q\,q\,g]-\frac{[q\,q]^2}{[q]}}{n-1}} \quad (7')$$

$$h = \frac{1}{E\sqrt{2}} \quad (8')$$

$$H = \frac{\sqrt{[g]}}{E\sqrt{2}} \quad (9')$$

y sustituyendo en vez de los símbolos que entran en estas fórmulas las cantidades que expresan se obtiene:

$$x = \frac{q_1 g_1 + q_2 g_2 + q_3 g_3 + \ldots\ldots + q_n g_n}{g_1 + g_2 + g_3 + \ldots\ldots + g_n} \quad (10)$$

$$G = g_1 + g_2 + g_3 + \ldots + g_n \quad (11)$$

$$E = \sqrt{\frac{\Sigma g q^2 - \frac{(\Sigma q g)^2}{\Sigma g}}{n-1}} \quad (12)$$

$$H = \frac{\sqrt{\Sigma g}}{E\sqrt{2}} \quad (13)$$

Podemos observar que las fórmulas (10) y (11) son las mismas encontradas (§ 47) al determinar la medida de una cantidad de la que se conocen varios valores obtenidos por la observacion. Solo difieren en la notacion, siendo equivalentes $q_1, q_2 \ldots$ á las $D_1, D_2 \ldots$ entonces empleada.

De las anteriores fórmulas pueden deducirse las análogas para el caso de ser todas las observaciones del mismo peso que tomaremos por unidad, y se verificará:

$$g_1 = g_2 = \ldots\ldots g_n = 1$$

con lo que las citadas fórmulas se trasformarán en

$$x = \frac{q_1+q_2+q_3+\ldots\ldots+q_n}{n} \qquad (10')$$

$$G = n$$

$$E = \sqrt{\frac{\Sigma q^2 - \frac{(\Sigma q)^2}{n}}{n-1}} \qquad (11')$$

$$H = \frac{\sqrt{n}}{E\sqrt{2}} \qquad (12')$$

Las fórmulas (10′) y (11′) son iguales á las encontradas (§ 46) comprobándose una vez mas, que el valor más probable de una cantidad de la que se conocen otros varios deducidos de observaciones de igual precision, es la media diferencial de estos valores.

59. La astronomía enseña, conforme con la experiencia, que la longitud l del péndulo de segundos en funcion de la latitud λ del lugar, tiene por expresion:

$$l = a + b \operatorname{sen.}^2 \lambda$$

siendo a y b coeficientes que se determinan por medio de los datos que suministra la observacion.

Para $\lambda = 0$ y $\lambda = 90°$ se deduce respectivamente

$$l = a \quad \text{y} \quad l = a + b \quad \text{ó} \quad b = l - a;$$

luego a expresa la longitud del péndulo de segundos en el ecuador y b la diferencia entre las longitudes del péndulo de segundos en el polo y el ecuador.

Esto supuesto, concibamos que se han hecho n observaciones en otros tantos lugares, y que se han determinado los valores de l correspondientes á otros determinados de λ, obteniéndose las ecuaciones

$$l_1 = a + b \text{ sen.}^2 \lambda_1$$
$$l_2 = a + b \text{ sen.}^2 \lambda_2$$
$$\vdots$$
$$l_n = a + b \text{ sen.}^2 \lambda_n$$

Los primeros miembros son las cantidades encontradas en las observaciones y suponiendo estas de igual precision podremos deducir los valores de a y b que son las incógnitas de la cuestion, formando las ecuaciones normales, que para este caso serán:

$$n a + b [\text{sen.}^2 \lambda] = [l], \quad a [\text{sen.}^2 \lambda] + b [\text{sen.}^4 \lambda] = [l \text{ sen.}^2 \lambda]$$

Resolviendo este sistema de dos ecuaciones de primer grado se obtienen los valores de a y b.

60. Una de las fórmulas adoptadas por la Junta superior facultativa de Artillería, para el cálculo de las alzas que deben emplearse en la puntería de los cañones rayados, es:

$$y = a x^2 + b x + c \quad (1) \quad (*)$$

en la que x representa el alcance, y el alza correspondiente y a, b y c tres coeficientes que varían de una á otra pieza y que se determinan por el método de los mínimos cuadrados. La experiencia ha compro-

(*) Se cita esta fórmula en el libro de memorias del Oficial de Artillería, redactado por el ilustrado T. C. Comandante D. César Español.

bado que la ley expresada en la ecuacion (11) conduce á resultados de suficiente exactitud.

Con el fin de establecer la compensacion de los errores debidos á la observacion, supongamos que se han determinado experimentalmente n valores de y correspondientes á otros tantos del alcance x (siendo $n>3$) y admitamos que sean de igual precision todas las observaciones. De este modo se obtendrán las ecuaciones primitivas.

$$
\begin{aligned}
a x_1^2 + b x_1 + c &= y_1 \\
a x_2^2 + b x_2 + c &= y_2 \\
&\vdots \\
a x^2_n + b x_n + c &= y_n
\end{aligned}
$$

Siendo a, b y c las incógnitas de la cuestion, se hallará la primera ecuacion normal multiplicando las anteriores respectivamente por $x_1^2, x_2^2, \ldots x^2_n$, y sumándolas; obtendremos la segunda, multiplicando cada una de las mismas ecuaciones primitivas por $x_1, x_2, \ldots . x_n$, y sumando los resultados; finalmente, la tercera será la suma de las referidas ecuaciones primitivas, por ser en todas ellas la unidad el coeficiente de la incógnita c. De este modo, siguiendo siempre la notacion de Gauss, resulta:

$$
\begin{aligned}
a\,[x^4] + b\,[x^3] + c\,[x^2] &= [y\,x^2] \\
a\,[x^3] + b\,[x^2] + c\,[x] &= [y\,x] \\
a\,[x^2] + b\,[x] + n\,c &= [y]
\end{aligned}
$$

y si se emplean las notaciones ordinarias se convertirán en

$$a\,\Sigma\,x^4 + b\,\Sigma\,x^3 + c\,\Sigma\,x^2 = \Sigma\,(y\,x^2)$$
$$a\,\Sigma\,x^3 + b\,\Sigma\,x^2 + c\,\Sigma\,x = \Sigma\,(y\,x)$$
$$a\,\Sigma\,x^2 + b\,\Sigma\,x + n\,c = \Sigma\,y$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones de primer grado con tres incógnitas, se determinarán los valores más probables de a, b y c.

61. Con el fin de facilitar los cálculos á que dá lugar la aplicacion del método de los mínimos cuadrados, conviene hacer uso del Aritmómetro ó máquina para efectuar operaciones, y tambien es de mucha utilidad una tabla de los cuadrados de los números enteros, que permite trasformar productos en diferencia de cuadrados.

Así por ejemplo, el producto $a\,b$ podrá trasformarse en

$$a\,b = \frac{4\,a\,b}{4} = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

La tabla 2.ª contiene los cuadrados de los 1000 primeros números.

Tabla 1.ª

Valores de la funcion $\theta(\lambda)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda} e^{-t^2}\,dt.$

Calculada segun los valores dados por Kramp, y la tabla de M. Cournot (Didion.)

λ	θ (λ)	Dif.	λ	θ(λ)	Dif.	λ	θ (λ)	Dif.
0,00	0,00000	1128	0,30	0,32863	1029	0,60	0,60386	782
0,01	0,01128	1129	0,31	0,33892	1021	0,61	0,61168	773
0,02	0,02257	1127	0,32	0,34915	1015	0,62	0,61941	764
0,03	0,03384	1127	0,33	0,35928	1008	0,63	0,62705	754
0,04	0,04511	1126	0,34	0,36936	1002	0,64	0,63459	744
0,05	0,05637	1125	0,35	0,37938	995	0,65	0,64203	735
0,06	0,06762	1124	0,36	0,38933	988	0,66	0,64938	725
0,07	0,07886	1122	0,37	0,39921	980	0,67	0,65663	715
0,08	0,09008	1120	0,38	0,40901	973	0,68	0,66378	706
0,09	0,10128	1118	0,39	0,41874	965	0,69	0,67084	696
0,10	0,11246	1116	0,40	0,42839	958	0,70	0,67780	687
0,11	0,12362	1114	0,41	0,43797	950	0,71	0,68467	676
0,12	0,13476	1111	0,42	0,44747	942	0,72	0,69143	667
0,13	0,14587	1108	0,43	0,45689	934	0,73	0,69810	658
0,14	0,15695	1105	0,44	0,46623	925	0,74	0,70468	648
0,15	0,16800	1102	0,45	0,47548	918	0,75	0,71116	638
0,16	0,17901	1098	0,46	0,48466	908	0,76	0,71754	628
0,17	0,18909	1095	0,47	0,49374	901	0,77	0,72382	619
0,18	0,20094	1090	0,48	0,50275	892	0,78	0,73001	609
0,19	0,21184	1086	0,49	0,51167	883	0,79	0,73610	600
0,20	0,22270	1081	0,50	0,52050	874	0,80	0,74210	590
0,21	0,23351	1079	0,51	0,52924	866	0,81	0,74800	581
0,22	0,24430	1072	0,52	0,53790	856	0,82	0,75381	571
0,23	0,25502	1068	0,53	0,54646	848	0,83	0,75952	562
0,24	0,26570	1062	0,54	0,55494	838	0,84	0,76514	553
0,25	0,27632	1058	0,55	0,56332	830	0,85	0,77067	543
0,26	0,28690	1052	0,56	0,57162	820	0,86	0,77610	534
0,27	0,29742	1046	0,57	0,57982	810	0,87	0,78144	525
0,28	0,30788	1040	0,58	0,58792	802	0,88	0,78669	515
0,29	0,31828	1035	0,59	0,59594	792	0,89	0,79184	507
0,30	0,32863		0,60	0,60386		0,90	0,79691	

λ	θ (λ)	Dif.	λ	θ (λ)	Dif.	λ	θ (λ)	Dif.
0,90	0,79691	497	1,20	0,91031	264	1,50	0,96611	117
0,91	0,80188	489	1,21	0,91296	257	1,51	0,96728	113
0,92	0,80677	479	1,22	0,91553	252	1,52	0,96841	111
0,93	0,81156	471	1,23	0,91805	245	1,53	0,96952	107
0,94	0,81627	462	1,24	0,92050	240	1,54	0,97059	103
0,95	0,82089	453	1,25	0,92290	234	1,55	0,97162	101
0,96	0,82542	445	1,26	0,92524	227	1,56	0,97263	97
0,97	0,82987	436	1,27	0,92751	222	1,57	0,97360	95
0,98	0,83423	428	1,28	0,92973	217	1,58	0,97455	91
0,99	0,83851	419	1,29	0,93190	211	1,59	0,97546	89
1,00	0,84270	411	1,30	0,93401	205	1,60	0,97635	86
1,01	0,84681	403	1,31	0,93606	200	1,61	0,97721	83
1,02	0,85084	394	1,32	0,93806	195	1,62	0,97804	80
1,03	0,85478	387	1,33	0,94001	190	1,63	0,97884	78
1,04	0,85865	379	1,34	0,94191	185	1,64	0,97962	75
1,05	0,86244	370	1,35	0,94376	180	1,65	0,98037	73
1,06	0,86614	363	1,36	0,94556	175	1,66	0,98110	71
1,07	0,86977	356	1,37	0,94731	171	1,67	0,98181	68
1,08	0,87333	347	1,38	0,94902	165	1,68	0,98249	66
1,09	0,87680	340	1,39	0,95067	161	1,69	0,98315	63
1,10	0,88020	333	1,40	0,95228	157	1,70	0,98379	62
1,11	0,88353	326	1,41	0,95385	153	1,71	0,98441	59
1,12	0,88679	318	1,42	0,95538	148	1,72	0,98500	58
1,13	0,88997	311	1,43	0,95686	144	1,73	0,98558	55
1,14	0,89308	304	1,44	0,95830	140	1,74	0,98613	54
1,15	0,89612	298	1,45	0,95969	136	1,75	0,98667	52
1,16	0,89910	290	1,46	0,96105	132	1,76	0,98719	50
1,17	0,90200	284	1,47	0,96237	128	1,77	0,98769	48
1,18	0,90484	277	1,48	0,96365	125	1,78	0,98817	47
1,19	0,90761	270	1,49	0,96490	121	1,79	0,98864	45
1,20	0,91031		1,50	0,96611		1,80	0,98909	

λ	θ(λ)	Dif.	λ	θ(λ)	Dif.	λ	θ(λ)	Dif.
1,80	0,98909	43	2,00	0,99532	94	0,0443	0,050	
1,81	0,98952	42	2,05	0,99626	76	0,0888	0,100	
1,82	0,98994	41	2,10	0,99702	62	0,1337	0,150	
1,83	0,99035	39	2,15	0,99764	50	0,1791	0,200	
1,84	0,99074	37	2,20	0,99814	40	0,2253	0,250	
1,85	0,99111	36	2,25	0,99854	32	0,2724	0,300	
1,86	0,99147	35	2,30	0,99886	25	0,3208	0,350	
1,87	0,99182	34	2,35	0,99911	20	0,3708	0,400	
1,88	0,99216	32	2,40	0,99931	17	0,4227	0,450	
1,89	0,99248	31	2,45	0,99947	12	0,4769	0,500	
1,90	0,99279	30	2,50	0,99959	10	0,5342	0,550	
1,91	0,99309	29	2,55	0,99969	7	0,5951	0,600	
1,92	0,99338	28	2,60	0,99976	6	0,6608	0,650	
1,93	0,99366	26	2,65	0,99982	5	0,7329	0,700	
1,94	0,99392	26	2,70	0,99987	3	0,8134	0,750	
1,95	0,99418	25	2,75	0,99990	2	0,9062	0,800	
1,96	0,99443	23	2,80	0,99992	2	1,0179	0,850	
1,97	0,99466	23	2,85	0,99994	2	1,1631	0,900	
1,98	0,99489	22	2,90	0,99996	1	1,3859	0,950	
1,99	0,99511	21	2,95	0,99997	1	1,8214	0,990	
2,00	0,99532		3,00	0,99998		2,3268	0,999	

Las dos últimas columnas de esta página contienen los valores de λ correspondientes á los de θ(λ) creciendo estos últimos de 0,05 en 0,05.

Tabla 2.ª

Cuadrados de los números enteros desde 1 hasta 1000.

Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.
1	1	31	961	61	3721
2	4	32	1024	62	3844
3	9	33	1089	63	3969
4	16	34	1156	64	4096
5	25	35	1225	65	4225
6	36	36	1296	66	4356
7	49	37	1369	67	4489
8	64	38	1444	68	4624
9	81	39	1521	69	4761
10	100	40	1600	70	4900
11	121	41	1681	71	5041
12	144	42	1764	72	5184
13	169	43	1849	73	5329
14	196	44	1936	74	5476
15	225	45	2025	75	5625
16	256	46	2116	76	5776
17	289	47	2209	77	5929
18	324	48	2304	78	6084
19	361	49	2401	79	6241
20	400	50	2500	80	6400
21	441	51	2601	81	6561
22	484	52	2704	82	6724
23	529	53	2809	83	6889
24	576	54	2916	84	7056
25	625	55	3025	85	7225
26	676	56	3136	86	7396
27	729	57	3249	87	7569
28	784	58	3364	88	7744
29	841	59	3481	89	7921
30	900	60	3600	90	8100

Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.
91	8281	126	15876	161	25921
92	8464	127	16129	162	26244
93	8649	128	16384	163	26569
94	8836	129	16641	164	26896
95	9025	130	16900	165	27225
96	9216	131	17161	166	27556
97	9409	132	17424	167	27889
98	9604	133	17689	168	28224
99	9801	134	17956	169	28561
100	10000	135	18225	170	28900
101	10201	136	18496	171	29241
102	10404	137	18769	172	29584
103	10609	138	19044	173	29929
104	10816	139	19321	174	30276
105	11025	140	19600	175	30625
106	11236	141	19881	176	30976
107	11449	142	20164	177	31329
108	11664	143	20449	178	31684
109	11881	144	20736	179	32041
110	12100	145	21025	180	32400
111	12321	146	21316	181	32761
112	12544	147	21609	182	33124
113	12769	148	21904	183	33489
114	12996	149	22201	184	33856
115	13225	150	22500	185	34225
116	13456	151	22801	186	34596
117	13689	152	23104	187	34969
118	13924	153	23409	188	35344
119	14161	154	23716	189	35721
120	14400	155	24025	190	36100
121	14641	156	24336	191	36481
122	14884	157	24649	192	36864
123	15129	158	24964	193	37249
124	15376	159	25281	194	37636
125	15625	160	25600	195	38025

Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados,
196	38416	231	53361	266	70756
197	38809	232	53824	267	71289
198	39204	233	54289	268	71824
199	39601	234	54756	269	72361
200	40000	235	55225	270	72900
201	40401	236	55696	271	73441
202	40804	237	56169	272	73984
203	41209	238	56644	273	74529
204	41616	239	57121	274	75076
205	42025	240	57600	275	75625
206	42436	241	58081	276	76176
207	42849	242	58564	277	76729
208	43264	243	59049	278	77284
209	43681	244	59536	279	77841
210	44100	245	60025	280	78400
211	44521	246	60516	281	78961
212	44944	247	61009	282	79524
213	45369	248	61504	283	80089
214	45796	249	62001	284	80656
215	46225	250	62500	285	81225
216	46656	251	63001	286	81796
217	47089	252	63504	287	82369
218	47524	253	64009	288	82944
219	47961	254	64516	289	83521
220	48400	255	65025	290	84100
221	48841	256	65536	291	84681
222	49284	257	66049	292	85264
223	49729	258	66564	293	85849
224	50176	259	67081	294	86436
225	50625	260	67600	295	87025
226	51076	261	68121	296	87616
227	51529	262	68644	297	88209
228	51984	263	69169	298	88804
229	52441	264	69696	299	89401
230	52900	265	70225	300	90000

Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.
301	90601	336	112896	371	137641
302	91204	337	113569	372	138384
303	91809	338	114244	373	139129
304	92416	339	114921	374	139876
305	93025	340	115600	375	140625
306	93636	341	116281	376	141376
307	94249	342	116964	377	142129
308	84864	343	117649	378	142884
309	95481	344	118336	379	143641
310	96100	345	119025	380	144400
311	96721	346	119716	381	145161
312	97344	347	120409	382	145924
313	97969	348	121104	383	146689
314	98596	349	121801	384	147456
315	99225	350	122500	385	148225
316	99856	351	123201	386	148996
317	100489	352	123904	387	149769
318	101124	353	124609	388	150544
319	101761	354	125316	389	151321
320	102400	355	126025	390	152100
321	103041	356	126736	391	152881
322	103684	357	127449	392	153664
323	104329	358	128164	393	154449
324	104976	359	128881	394	155236
325	105625	360	129600	395	156025
326	106276	361	130321	396	156816
327	106929	362	131044	397	157609
328	107584	363	131769	398	158404
329	108241	364	132496	399	159201
330	108900	365	133225	400	160000
331	109561	366	133956	401	160801
332	110224	367	134689	402	161604
333	110889	368	135424	403	162409
334	111556	369	136161	404	163216
335	112225	370	136900	405	164025

Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.
406	164836	441	194481	476	226576
407	165649	442	195364	477	227529
408	166464	443	196249	478	228484
409	167281	444	197136	479	229441
410	168100	445	198025	480	230400
411	168921	446	198916	481	231361
412	169744	447	199809	482	232324
413	170569	448	200704	483	233289
414	171396	449	201601	484	234256
415	172225	450	202500	485	235225
416	173056	451	203401	486	236196
417	173889	452	204304	487	237169
418	174724	453	205209	488	238144
419	175561	454	206116	489	239121
420	176400	455	207025	490	240100
421	177241	456	207936	491	241081
422	178084	457	208849	492	242064
423	178929	458	209764	493	243049
424	179776	459	210681	494	244036
425	180625	460	211600	495	245025
426	181476	461	212521	496	246016
427	182329	462	213444	497	247009
428	183184	463	214369	498	248004
429	184041	464	215296	499	249001
430	184900	465	216225	500	250000
431	185761	466	217156	501	251001
432	186624	467	218089	502	252004
433	187489	468	219024	503	253009
434	188356	469	219961	504	254016
435	189225	470	220900	505	255025
436	190096	471	221841	506	256036
437	190969	472	222784	507	257049
438	191844	473	223729	508	258064
439	192721	474	224676	509	259081
440	193600	475	225625	510	260100

Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados,
511	261121	546	298116	581	337561
512	262144	547	299209	582	338724
513	263169	548	300304	583	339889
514	264196	549	301401	584	341056
515	265225	550	302500	585	342225
516	266256	551	303601	586	343396
517	267289	552	304704	587	344569
518	268324	553	305809	588	345744
519	269361	554	306916	589	346921
520	270400	555	308025	590	348100
521	271441	556	309136	591	349281
522	272484	557	310249	592	350464
523	273529	558	311364	593	351649
524	274576	559	312481	594	352836
525	275625	560	313600	595	354025
526	276676	561	314721	596	355216
527	277729	562	315844	597	356409
528	278784	563	316969	598	357604
529	279841	564	318096	599	358801
530	280900	565	319225	600	360000
531	281961	566	320356	601	361201
532	283024	567	321489	602	362404
533	284089	568	322624	603	363609
534	285156	569	323761	604	364816
535	286295	570	324900	605	366025
536	287296	571	326041	606	367236
537	288369	572	327184	607	368449
538	289444	573	328329	608	369664
539	290521	574	329476	609	370881
540	291600	575	330625	610	372100
541	292681	576	331776	611	373321
542	293764	577	332929	612	374544
543	294849	578	334084	613	375769
544	295936	579	335241	614	376996
545	297025	580	336400	615	378225

Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.
616	379456	651	423801	686	470596
617	380689	652	425104	687	471969
618	381924	653	426409	688	473344
619	383161	654	427716	689	474721
620	384400	655	429025	690	476100
621	385641	656	430336	691	477481
622	386884	657	431649	692	478864
623	388129	658	432964	693	480249
624	389376	659	434281	694	481636
625	390625	660	435600	695	483025
626	391876	661	436921	696	484416
627	393129	662	438244	697	485809
628	394384	663	439569	698	487204
629	395641	664	440896	699	488601
630	396900	665	442225	700	490000
631	398161	666	443556	701	491401
632	399424	667	444889	702	492804
633	400689	668	446224	703	494209
634	401956	669	447561	704	495616
635	403225	670	448900	705	497025
636	404496	671	450241	706	498436
637	405769	672	451584	707	499849
638	407044	673	452929	708	501264
639	408321	674	454276	709	502681
640	409600	675	455625	710	504100
641	410881	676	456976	711	505521
642	412164	677	458329	712	506944
643	413449	678	459684	713	508369
644	414736	679	461041	714	509796
645	416025	680	462400	715	511225
646	417316	681	463761	716	512656
647	418609	682	465124	717	514089
648	419904	683	466489	718	515524
649	421201	684	467856	719	516961
650	422500	685	469225	720	518400

Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.
721	519841	756	571536	791	625681
722	521284	757	573049	792	627264
723	522729	758	574564	793	628849
724	524176	759	576081	794	630436
725	525625	760	577600	795	632025
726	527076	761	579121	796	633616
727	528529	762	580644	797	635209
728	529984	763	582169	798	636804
729	531441	764	583696	799	638401
730	532900	765	585225	800	640000
731	534361	766	586756	801	641601
732	535824	767	588289	802	633204
733	537289	768	589824	803	644809
734	538756	769	591361	804	646416
735	540225	770	592900	805	648025
736	541696	771	594441	806	649636
737	543169	772	595984	807	651249
738	544644	773	597529	808	652864
739	546121	774	599076	809	654481
740	547600	775	600625	810	656100
741	549081	776	602176	811	657721
742	550564	777	603729	812	659344
743	552049	778	605284	813	660969
744	553536	779	606841	814	662596
745	555025	780	608400	815	664225
746	556516	781	609961	816	665856
747	558009	782	611524	817	667489
748	559504	783	613089	818	669124
749	561001	784	614656	819	670761
750	562500	785	616225	820	672400
751	564001	786	617796	821	674041
752	565504	787	619369	822	675684
753	567009	788	620944	823	677329
754	568516	789	622521	824	678976
755	570025	790	624100	825	680625

Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.
826	682276	861	741321	896	802816
827	683929	862	743044	897	804609
828	685584	863	744769	898	806404
829	687241	864	746496	899	808201
830	688900	865	748225	900	810000
831	690561	866	749956	901	811801
832	692224	867	751689	902	813604
833	693889	868	753424	903	815409
834	695556	869	755161	904	817216
835	697225	870	756900	905	819025
836	698896	871	758641	906	820836
837	700569	872	760384	907	822649
838	702244	873	762129	908	824464
839	703921	874	763876	909	826281
840	705600	875	765625	910	828100
841	707281	876	767376	911	829921
842	708964	877	769129	912	831744
843	710649	878	770884	913	833569
844	712336	879	772641	914	835396
845	714025	880	774400	915	837225
846	715716	881	776161	916	839056
847	717409	882	777924	917	840889
848	719104	883	779689	918	842724
849	720801	884	781456	919	844561
850	722500	885	783225	920	846400
851	724201	886	784996	921	848241
852	725904	887	786769	922	850084
853	727609	888	788544	923	851929
854	729316	889	790321	924	853776
855	731025	890	792100	925	855625
856	732736	891	793881	926	857476
857	734449	892	795664	927	859329
858	736164	893	797449	928	861184
859	737881	894	799236	929	863041
860	739600	895	801025	930	864900

Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.	Números.	Cuadrados.
931	866761	956	913936	981	962361
932	868624	957	915849	982	964324
933	870489	958	917764	983	966289
934	872356	959	919681	984	968256
935	874225	960	921600	985	970225
936	876096	961	923521	986	972196
937	877969	962	925444	987	974169
938	879844	963	927369	988	976144
939	881721	964	929296	989	978121
940	883600	965	931225	990	980100
941	885481	966	933156	991	982081
942	887364	967	935089	992	984064
943	889249	968	937024	993	986049
944	891136	969	938961	994	988036
945	893025	970	940900	995	990025
946	894916	971	942841	996	992016
947	896809	972	944784	997	994009
948	898704	973	946729	998	996004
949	900601	974	948676	999	998001
950	902500	975	950625	1000	1000000
951	904401	976	952576		
952	906304	977	954529		
953	908209	978	956484		
954	910116	979	958441		
955	912025	980	960400		

INDICE.

CAPÍTULO I.°

Recapitulacion de las principales fórmulas que sirven de base al Cálculo de Probabilidades.

CAPÍTULO 2.°

Principios fundamentales.

CAPÍTULO 3.°

CAPÍTULO 4.°

Teoría matemática de los errores.

CAPÍTULO 5.°

Determinacion por el método de los mínimos cuadrados, de los valores más probables de las cantidades que dependen de otras deducidas de la observacion.

3

Ollèro

CALCULO

DE

PROBABILIDADE