ENCUADERNACIONES
FERNANDEZ
ESTUCHES
CAJAS DE CARTON
ADUANA VIEJA 29
SORIA

P
148

B.P. de Soria
61112730
D-2 694
D-2
694

# CÁLCULO DIFERENCIAL

Signt.ª Top.ª
7
2158
Núm. 11

R n.º 17.

NUEVA ENCICLOPEDIA MATEMÁTICA.--T. IV

Nº 1806

# Tratado de Análisis Matemático

TOMO PRIMERO

# CÁLCULO DIFERENCIAL

POR EL

## Dr. Zoel G. de Galdeano

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa y miembro de otras asociaciones matemáticas.

BIBLIOTECA DEL INSTITUTO PROVINCIAL SORIA

ZARAGOZA

Tipografía de Emilio Casañal, Coso, 100

1904

# ÍNDICE

PÁGINA

PRÓLOGO ..... IX

LIBRO PRIMERO

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CÁLCULO DIFERENCIAL

CAPÍTULO I.—*Nociones sobre los conjuntos* ..... 1

CAPÍTULO II.—*Cantidades infinitesimales.*
§ 1.º Principios fundamentales ..... 13
§ 2.º Triángulos infinitamente pequeños ..... 15

CAPÍTULO III.—*Nociones sobre las series.*
§ 1.º Series numéricas ..... 20
§ 2.º Obtención de algunas series ..... 26
§ 3.º Ejercicios y aplicaciones ..... 31

CAPÍTULO IV.—*Derivadas y diferenciales.*
§ 1.º Definiciones ..... 39
§ 2.º Diferenciación de funciones elementales ..... 47
§ 3.º Funciones implícitas ..... 53
§ 4.º Determinantes funcionales ..... 59
§ 5.º Derivadas y diferenciales de diversos órdenes. 62
§ 6.º Cálculo directo de las derivadas de un orden cualquiera ..... 71
§ 7.º Ejercicios ..... 74

CAPÍTULO V.—*Cambio de variables.*
§ 1.º Teoría ..... 79
§ 2.º Aplicaciones ..... 88

PÁGINA

CAPÍTULO VI.—*Eliminación de constantes y funciones arbitrarias.*
§ 1.º Principios generales..... 92
§ 2.º Ecuaciones de derivadas parciales de algunas curvas y superficies..... 101
§ 3.º Aplicaciones..... 106

CAPÍTULO VII.—*Cálculo de las diferencias finitas.*
§ 1.º Cálculo directo..... 111
§ 2.º Cálculo inverso..... 115
§ 3.º Fórmulas de interpolación..... 120

CAPÍTULO VIII.—*Nociones de cálculo integral.*
§ 1.º Integrales simples..... 123
§ 2.º Métodos generales..... 125

## LIBRO SEGUNDO

### APLICACIONES ANALÍTICAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

CAPÍTULO I.—*Desarrollo en serie de las funciones reales.*
§ 1.º Fórmulas de Taylor y de Mac Laurin..... 129
§ 2.º Series de funciones de una variable..... 138
§ 3.º Desarrollo en series según las potencias de la variable independiente..... 144
§ 4.º Aplicaciones..... 164

CAPÍTULO II.—*Desarrollo en serie de las funciones de variables imaginarias.*
§ 1.º Fórmula de Moivre y sus consecuencias..... 168
§ 2.º Expresiones imaginarias..... 173
§ 3.º Funciones hiperbólicas..... 177

CAPÍTULO III.—*Teoremas de Laplace y de Lagrange.*

CAPÍTULO IV.—*Descomposición de las fracciones algebráicas.*
§ 1.º Principios generales..... 200
§ 2.º Aplicaciones..... 209

CAPÍTULO V.—*Productos infinitos.*
§ 1.º Principios fundamentales..... 211
§ 2.º Aplicaciones..... 213

PÁGINA

CAPÍTULO VI. – *Extensión de las fórmulas de Taylor y de Mac Laurin.*

§ 1.º Extensión de la fórmula de Taylor..... 221
§ 2.º Extensión de la fórmula de Mac Laurin..... 222
§ 3.º Funciones homogéneas..... 223

CAPÍTULO VII. – *Expresiones indeterminadas.*

§ 1.º Principios generales..... 226
§ 2.º Comparación de las cantidades infinitamente pequeñas de diversos órdenes..... 235
§ 3.º Aplicaciones..... 241

CAPÍTULO VIII. – *Máximos y mínimos*

§ 1.º Máximos y mínimos de funciones de una variable..... 245
§ 2.º Máximos y mínimos de una función explícita de *m* variables etc..... 250
§ 3.º Máximos y mínimos de las funciones explícitas de dos ó más variables independientes.. 253
§ 4.º Máximos y mínimos de las funciones implícitas..... 256
§ 5.º Aplicaciones..... 259

# PRÓLOGO

Es difícil publicar una obra adaptada á los planes vigentes en las universidades españolas y al mismo tiempo conforme con el actual grado de desenvolvimiento científico.

La razón de esta dificultad es obvia. Nuestro atraso científico. Las teorías que se han desarrollado con gran impulso en las naciones cultas, arraigando en sus planes de estudios universitarios, nos son por completo desconocidas.

Si se exceptúan las conferencias dadas por D. José Echegaray en el Ateneo de Madrid, acerca de los grupos de *sustituciones y ecuaciones de Galois,* á que siguieron las de *funciones elípticas y abelianas,* ante un reducido auditorio, podemos afirmar que estamos divorciados de los descubrimientos matemáticos debidos á los talentos del siglo XIX, tales como los trabajos de Abel, Galois, Jacobi, Riemann, etc.

En primer término hallamos las teorías de los grupos de sustituciones que se han ramificado en el Algebra y en el Análisis infinitesimal, constituyendo un núcleo importantísimo en la teoría de las ecuaciones diferenciales y transcendiendo á la Geometría, de modo que hoy la *transformación* es el concepto dominante de la Matemática, cuyo estudio se facilita empleándolo en las más varias acepciones.

Así por ejemplo, las transformaciones proyectivas, las transformaciones isogonales, las por radios vectores recíprocos, la representación conforme, etc., no son mas que casos especialísimos de numerosas clases de correspondencias que se establecen entre los varios algoritmos del análisis entre sí y con los elementos geométricos de todo género.

También, de gran importancia y distribuidos por las más diferentes ramas de la Matemática, vemos los conceptos de invariación y de polaridad, que desde el Álgebra de las formas irradian en todas direcciones constituyendo cuerpos extensos de doctrina.

La teoría de los números, cuyo último gran propagandista ha sido Kronecker, enlazándose con la combinatoria, llega á dominar las altas regiones del Análisis.

La alteración profunda, así como el amplio desarrollo que ha obtenido el concepto de función, importado por Weierstrass; el incesante progreso que han hecho especialmente las funciones elípticas, hiperelípticas, abelianas, de las cuales diariamente aparecen obras magistrales, dilata indefinidamente los horizontes del pensamiento matemático, los innumerables métodos modernos, son poderosos medios de investigación y, por último, las facilidades que dan á las ciencias físicas y químicas las ramas de aplicación de la Matemática, todo esto constituye un conjunto abrumador, que solo puede llevarse á las inteligencias de una nación, distribuído en perfectos organismos docentes, con arreglo á planes que abarquen la totalidad de estas teorías, y expuestas en obras de matemáticos insignes, lo que aparece á la vista en los notables catálogos de Teubner, Hoepli, Mac Millan, Gauthier-Villars y otros muchos, vivo reflejo de la inmensa riqueza de la literatura matemática contemporánea, sin que nos sea permitido citar un solo catálogo español que sea expresión de actividad en esta brillante región de los conocimientos humanos, porque entre nosotros no existe.

El Sr. García Alix aumentó algunos cursos de estudios matemáticos, entre ellos la Geometría métrica, la de posición, y en el doctorado un curso de Análisis con otro de Geometría superior, habiendo establecido la importante reforma de exigir *elementos de cálculo infinitesimal* á los licenciados en Ciencias físicas y químicas; pero *perjudicando á los matemáticos, que además de dicho curso elemental debieran estudiar, por lo menos, otro superior de la asignatura que es el núcleo más considerable y fundamental de los estudios matemáticos;* y en cuanto á la creación de este gé-

nero de estudios, ya que se lucha con dificultades económicas para presentar un plan completo de estudios científicos, *hubiera sido preferible, á crear asignaturas de carácter elemental, no decisivas en la educación de la inteligencia, el haber reforzado algunos estudios superiores,* tales como los citados al principio de este prólogo, y que serán objeto de esta obra, si bien las deficiencias en los planes oficiales conduce á que una obra como la que nos proponemos publicar, no sea en su totalidad útil á los alumnos, á menos de mutilar la ciencia y hacer de ella una adecuada transformación modelándola para ponerla á la par de la pobreza característica de nuestros cursos, que recuerdan con preferencia la época de los Lagrange, Lacroix, Sturm y otros matemáticos insignes cuya labor fundamental en la enseñanza se debe completar necesariamente con los trabajos de los talentos ya citados, que llenan el siglo XIX desde el comienzo de sus dos segundos tercios.

El tratado de Análisis matemático, expresión de los cursos que explica en la Sorbonne de París el ilustre profesor M. Picard, lo mismo que las extensas obras de Análisis y de ecuaciones diferenciales de M. Goursat, análogas en elevación así como en profundidad de conceptos á las que Mr. Russell Forsyth adopta en sus lecciones dadas en el colegio de la SS. Trinidad de Cambridge. Las magistrales obras de los señores Koenigs y Darboux sobre las curvas y las superficies. Los tratados del Sr. Bianchi, de la universidad de Pisa, acerca de la teoría de las funciones de variables complejas y especialmente de las elípticas, de Geometría infinitesimal y de grupos de transformaciones. Las publicaciones del célebre Klein sobre las geometrías, el cálculo infinitesimal y teoría de los números y otras varias de muy distinguidos profesores, tales como Borel, Burnside, Dyck, Dickson, Pascal, Vivanti y otros que en algunas ocasiones citaremos, expresan los programas de la enseñanza matemática en las naciones más adelantadas.

Es indispensable, mientras esperamos un plan completo de enseñanza superior, que ya tarda bastante, el diseñar siquiera sea de paso, algunas de las modernas teorías para

evitar un desconocimiento imperdonable de la ciencia, ya en su parte histórica, ya en la doctrinal, y por tanto de sus más célebres maestros, cuyos nombres apenas son conocidos entre un reducido número de aficionados á tal orden de ideas. Esto nos libraría de no pocos ilusos, que desconocedores de su propia ignorancia y fiados en sus impulsos naturales, se lanzan á descubrimientos nuevos en pugna con lo sólidamente constituído, haciendo revivir las generaciones de cuadradores, trisectores y otros linajes análogos de desequilibrados, que alguna vez aparecen con sus pretensiones destructoras, síntoma revelador de nuestra decadente cultura. Antes de ensayarnos en nuestras propias investigaciones, debemos conocer las agenas, aquéllas en que han colaborado los verdaderos inventores y maestros.

La exposición somera de las teorías recientes evitará también el trabajo de zapa que algunos individuos, refractarios á salir de su tranquilo ritmo, realizan sin pretender en lo más mínimo el asimilarse lo que el trabajo mancomunado de tan ilustres talentos ha producido en los últimos tiempos, alterando el aspecto y el contenido de la ciencia, y estableciendo una barrera infranqueable entre las dos categorías de naciones que hoy mas que nunca se hallan separadas en el mundo social por el distinto y aun opuesto empleo que hacen de su inteligencia.

Zaragoza 15 de Junio de 1904.

*Zoel G. de Galdeano.*

# LIBRO PRIMERO

# PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CÁLCULO DIFERENCIAL

## CAPÍTULO I

### Nociones sobre los conjuntos

**1.** La noción de *límite* aparece por vez primera al considerar los números irracionales.

Podemos descomponer la totalidad de los números racionales en dos clases

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n,\ \ldots\ldots \qquad b,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ldots,\ b_n,\ \ldots\ldots$$

los primeros no decrecientes y los segundos no crecientes tales, que los de la primera sean todos menores que los de la segunda, y que su diferencia $b_k - a_k$ se haga cada vez más pequeña, cuando $k$ aumenta.

Dos casos pueden ocurrir: ó existe un número racional comprendido entre $a_k$ y $b_k$, y no puede existir más que uno; porque si hubiese dos, se tendría

$$b_k - a_k > \mathrm{B} - \mathrm{A},$$

de modo que la diferencia $b_k - a_k$ no sería arbitrariamente pequeña, ó no existe ningún número racional comprendido entre $a_k$ y $b_k$, y entonces se dice que existe una *laguna* ó *cortadura*. Cuando esto sucede, se conviene en considerar que las dos

series definen un nuevo número llamado *inconmensurable* ó *irracional.*

Los números irracionales se encuentran, pues, intercalados en el conjunto de los números racionales, para llenar las cortaduras.

El conjunto de los números racionales é irracionales constituye los números algebraicos, caracterizados por ser *raíces de ecuaciones algebraicas con coeficientes enteros.*

Además de los números algebraicos existen los transcendentes, caracterizados por no satisfacer á ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros.

Las demostraciones dadas para los números $e$ y $\pi$ se deben respectivamente á Hermite y Lindemann.

Notaremos de paso, como lo hace ver el Sr. Klein (*), que la ecuación notable $1 + e^{i\pi} = 0$ que relaciona dichos dos números, demuestra la transcendencia de $\pi$ deducida de la transcendencia de $e$, pues el exponente $i\pi$, según resulta de su razonamiento, no puede ser algebraico.

**2.** Función es toda cantidad que de algún modo depende de otras cantidades variables.

Existe una función desde que se imagina entre dos variables ó bien entre una variable y un sistema de valores de otras variables *una correspondencia tal, que al hallarse la una determinada, el valor de la otra queda fijado.*

Si se considera una colección finita ó infinita de magnitudes, y á cada sistema de valores de éstas se hace corresponder un número, el conjunto de estos números constituye una función definida en el conjunto considerado.

La Geometría, la Mecánica y la Física han sido origen de muchos descubrimientos del Análisis.

Una función es *entera* cuando depende de las variables independientes mediante las tres operaciones directas de la Aritmética, *fracionaria* cuando depende de la división. Funciones *al-*

---

* Klein. Leçons sur certaines questions de Géométrie élémentaire.

*gebraicas*, que comprenden las racionales é irracionales, son las engendradas por la resolución de una ecuación ó de un sistema de ecuaciones con coeficientes enteros.

Las funciones que no son ni racionales ni irracionales ó algebraicas, se llaman transcendentes; éstas dependen de otras operaciones como son la logarítmica, las trigonométricas, etc.

Las funciones son *explícitas* cuando están expresadas por ecuaciones resueltas respecto á las mismas, por ej. $z = f(x, y)$.

Las funciones *implícitas* están expresadas por ecuaciones no resueltas respecto á las mismas, por ejemplo $f(x, y, z) = 0$.

Si la función $y$ está expresada por medio de $x$, la expresión correspondiente de $x$ por medio de $y$, será la función *inversa* de ésta. Si $y = f(x)$, $x = \varphi(y)$ deducida de la primera, será su función inversa.

Se dice que una función $f(x)$ es continua, para $x = a$, cuando, dada una cantidad positiva $\varepsilon$, tan pequeña como se quiera, existe una cantidad positiva H tal, que siendo $h < H$ en valor absoluto, $f(a + h)$ tenga un valor único y bien determinado y satisfaga á la relación

$$\text{val. abs. } [f(a + h) - f(a)] < \varepsilon.$$

Una función imaginaria continua está definida por la relación

$$\text{mod } [f(x + h, \; y + k\sqrt{-1}) - f(x + y\sqrt{-1})] < \varepsilon.$$

Una imaginaria $x + y\sqrt{-1}$ ó $x + yi$ se representa geométricamente por el punto cuyas coordenadas son $x$ é $y$.

Cauchy llama á la imaginaria $a + y\sqrt{-1}$ la *afija* del punto $(x, y)$.

El concepto de función depende del concepto de conjunto.

**3.** Los elementos de los conjuntos que consideramos son números, que pueden representarse por puntos.

Un conjunto está dado, cuando por un medio cualquiera se sabe determinar consecutivamente todos sus elementos, sin exceptuar uno sólo, y sin repetir ninguno varias veces.

Dos conjuntos son equivalentes, cuando se les puede referir mutuamente, de manera que á cada objeto de uno corresponda, con reciprocidad, un objeto del otro. En este caso se dice que tienen *igual potencia* ó *número cardinal.*

Las series infinitas de elementos reales

$$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, \ldots\ldots$$

afectados cada uno de un índice, los números racionales, algebraicos, transcendentes, comprendidos entre 0 y 1, los valores de una función $f(x)$, bien determinada para todos los valores racionales algebraicos ó transcendentes de $x$. Todos estos conjuntos son de *una dimensión.*

Si se establece una correspondencia unívoca y recíproca ó *biunívoca* entre cada par de elementos de dos conjuntos, se obtiene un conjunto de *dos dimensiones.*

Las series infinitas, cuyos elementos tienen, cada uno $p$ índices, constituyen conjuntos de $p$ dimensiones.

Cada sistema de elementos representará ó constituirá un punto de un espacio de igual número de dimensiones que el conjunto.

**4.** El primero de los conjuntos que se considera es el conjunto E de los números enteros positivos, cuya potencia es la más simple posible. Un conjunto se dice que es de *primera potencia* ó *enumerable,* cuando equivale á este conjunto E.

Ejemplos: El conjunto de los números primos, el de los números pares y, en general, todo conjunto infinito separado ó desprendido de un conjunto enumerable, el conjunto formado, sea por adición de un conjunto finito á un conjunto enumerable, sea por la reunión de una infinidad enumerable de conjuntos finitos, sea por la reunión de un número limitado de conjuntos enumerables.

En las series de elementos de $p$ índices $m_1 + \ldots\ldots + mp = l$, siendo $l$ un número positivo determinado, si hacemos $l = 0, 1, 2, \ldots\ldots$, obtendremos grupos de términos, y podremos agrupar los términos de esta serie múltiple, de modo que se correspondan

biunívocamente con la serie de los números enteros positivos.

También es un conjunto enumerable el formado por un conjunto enumerable de conjuntos enumerables.

Por ejemplo el conjunto de los números racionales

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots\ldots, \frac{1}{m}, \ldots\ldots\right), \left(\frac{2}{1}, \frac{2}{3} \ldots\ldots, \frac{2}{m}, \ldots\ldots\right),$$

$$\left(\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \ldots\ldots, \frac{3}{m}, \ldots\ldots\right)$$

Según esta ley, cada número racional se escribe una sola vez.

**5.** *El conjunto de los números comprendidos entre* 0 y 1 NO ES ENUMERABLE, tiene una potencia superior á la de los conjuntos enumerables, la *potencia del continuo*. Se le puede presentar como tipo de conjuntos que tienen una potencia diferente de los conjuntos enumerables.

Se pueden construir otros conjuntos de igual potencia que la del continuo:

1.° Suprimiendo un conjunto enumerable en un conjunto que tiene la potencia del continuo.

Podemos, por ejemplo, suprimir del conjunto $0 \leqq x \leqq 1$ los números racionales y los números algebraicos; el conjunto restante, es decir, el de los números transcendentes, tiene la potencia del continuo.

2.° Reuniendo una *infinidad enumerable* de elementos que tengan la *potencia del continuo*, ó una infinidad, *con la potencia del continuo*, de conjuntos que tengan *la potencia del continuo*. Así, el conjunto de los puntos interiores á un cuadrado tiene la misma potencia que el conjunto de puntos que forman el lado de un cuadrado, ó que el conjunto de los puntos comprendidos entre 0 y 1.

**6.** Dado un conjunto finito ó infinito, se pueden disponer sus elementos en cierto orden, de diversas maneras.

EJEMPLO: El conjunto de los números enteros positivos

puede escribirse (1, 2, 3, .....), ó bien:

(1, 4, 7, .....; 2, 5, 8, .....; 3, 6, 9, .....) ó (1, 5, .....; 2, 6, .....)

Un conjunto se dice *ordenado,* cuando se ha fijado una ley especificando, cuál es el anterior y cuál es el posterior de entre dos elementos cualesquiera.

En un conjunto ordenado no hay forzosamente un primero ó un último término, como manifiesta la consideración de todos los números enteros.

Si entre los elementos de dos conjuntos E, $E_1$ *equivalentes* y *ordenados* se establece una correspondencia *biunívoca* ($a$, $b$, .....; $a_1$ $b_1$, .....) se dirá que estos conjuntos se *hallan semejantemente ordenados* ó que son *semejantes,* cuando la hipótesis $a$ anterior á $b$, lleve consigo que $a_1$ sea anterior á $b_1$.

Se dice que un conjunto está *bien ordenado,* cuando está ordenado de tal manera, que tanto el conjunto como sus partes contengan siempre un elemento anterior á todos los demás.

En el orden natural, el conjunto de los números enteros positivos está bien ordenado. El continuo no lo está; porque el conjunto parcial formado por los números comprendidos entre dos números $a$ y $b$ ($a$ excluído) no tiene un primer elemento.

La colocación, en cierto orden, de los términos de un conjunto finito, da el concepto del orden habitual.

A las leyes de ordenación de los elementos de un conjunto infinito las designa el Sr. Cantor con el nombre: *tipo ordinal.*

*El tipo ordinal de un conjunto ordenado es la noción general que resulta de la consideración de los elementos de este conjunto, abstracción hecha de su naturaleza, pero no de su orden de sucesión.*

Si se hace abstracción del *orden* de sucesión, se tiene el número *cardinal* del conjunto.

Dos conjuntos semejantes tienen el mismo tipo ordinal, y recíprocamente.

A cada tipo ordinal de un conjunto infinito bien ordenado, corresponde lo que se llama un *número ordinal transfinito.*

El tipo ordinal más sencillo es el que corresponde á los números enteros positivos colocados en el orden natural.

El tipo ordinal de un conjunto infinito ordenado no cambia, cuando se hace preceder á sus elementos de un conjunto finito, ó cuando se le asocia otro conjunto infinito ordenado, del mismo tipo ordinal, de modo que haya alternativamente un elemento del primer conjunto y un elemento del segundo, y así sucesivamente.

**7.** Una serie infinita de elementos reales $x_0, x_1, \ldots\ldots x_n \ldots\ldots$ *tiende hacia un límite* $\xi$, cuando á cada número positivo dado $\varepsilon$ se puede hacer corresponder un número entero N tal, que se tenga $|x_n - \xi| < \varepsilon$ para todo valor $n$ superior á N.

Sean $m$ y $n$ superiores á N. De

$$|x_m - \xi| < \varepsilon, \quad |x_n - \xi| < \varepsilon \quad \text{se deduce} \quad |x_m - x_n| < 2\varepsilon;$$

luego, á partir de cierto lugar, la diferencia de dos términos cualesquiera de la serie tiende hacia cero, y recíprocamente.

Una serie es *convergente* cuando tiende hacia un límite finito, *propiamente divergente*, cuando conservando sus términos igual signo, sus valores absolutos crecen indefinidamente, *impropiamente divergente* cuando no es convergente ni propiamente divergente.

Supongamos que los elementos de un conjunto están colocados en cierto orden en línea recta.

Se dirá que sus elementos $x$ tienen un *punto-límite*, cuando se puede satisfacer á la desigualdad $|x - \xi| < \varepsilon$, siendo $\varepsilon$ tan pequeño como se quiera, para una infinidad de elementos del conjunto. Así el conjunto

$$\frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2}, \quad 2, \quad \frac{1}{3}, \quad 1 + \frac{1}{3}, \quad 2, \quad \frac{1}{4}, \quad \ldots\ldots$$

tiene dos puntos límites 0 y 1.

El punto $(\xi, \eta)$ es un punto-límite en un conjunto de dos dimensiones, si se puede satisfacer á la desigualdad

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < \varepsilon^2,$$

cualquiera que sea la cantidad $\varepsilon$, para sistemas de valores $(x, y)$ correspondientes á una infinidad de puntos del conjunto.

En resumen, cualquiera que sea el número de dimensiones, un punto es punto-límite, si en toda proximidad de este punto, hay puntos del conjunto.

Todo punto de un conjunto que no es punto-límite es un *punto aislado.*

EJEMPLO: Todos los puntos del conjunto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}\right)$ son puntos aislados.

La existencia de los puntos-límites resulta del siguiente teorema, demostrado por Weierstrass:

*Un conjunto infinito, contenido en una porción finita del plano admite por lo menos un punto-límite.*

En efecto. Designemos por A y B (A $<$ B) números fijos entre los que se hallan comprendidos las coordenadas de los puntos del conjunto. Estos puntos son interiores á un cuadrado $Q_0$ cuyos lados son paralelos á los ejes y cuya longitud es B — A.

Dividiendo este cuadrado en cuatro cuadrados, en uno de ellos $Q_1$ (ó en uno de sus lados) habrá una infinidad de puntos del conjunto. Si se divide este cuadrado en cuatro cuadrados, en el interior de uno de ellos habrá una infinidad de puntos del conjunto, y así sucesivamente llegaremos hasta $Q_n$, cuyos lados tienen por longitud $\frac{B - A}{2^n}$.

Siendo $p_0, p_1, \ldots\ldots p_n$ puntos arbitrarios del conjunto, situados respectivamente en los cuadrados $Q_0, Q_1, \ldots\ldots, Q_n$, sus coordenadas tienden hacia límites determinados.

En efecto, sean $a_n$ y $b_n$ las abscisas de los vértices del cuadrado $Q_n$. Las dos series $(a, b)$ tales que

$$a_0 \leqq a_1 \leqq \ldots\ldots \leqq a_n \leqq \ldots\ldots, \quad \ldots\ldots b_n \leqq b_{n-1} \leqq \ldots\ldots \leqq b_0$$

(con la condición $b_n - a_n = \frac{B - A}{2^n}$) definen un número.

Considerándolo como abscisa, cuya ordenada quede determinada por dos series análogas, tendremos un punto-límite, pues según el modo de determinar sus coordenadas, contiene en su proximidad una infinidad de puntos del conjunto.

**8.** *Conjunto derivado de un conjunto dado es el conjunto de puntos tales, que en la proximidad de cada uno* (llamado *punto-límite) existe una infinidad de puntos del conjunto dado.*

Conjunto de *primera especie* es el que solo tiene un número limitado de conjuntos derivados. El número de éstos indica su *orden.*

El conjunto derivado de los puntos

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \ldots\ldots$$

es el conjunto de puntos aislados o y $\frac{1}{2}$.

Dicho conjunto es de *primer orden.*

El conjunto

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \ldots\ldots$$

tiene por conjunto derivado el siguiente:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$$

cuyo derivado es el punto aislado cero. Dicho conjunto es pues de *segundo orden.*

Conjunto *aislado* es el que no tiene ningún punto común con su derivado ó cuyos puntos son todos aislados, por ejemplo, el

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}.$$

Un conjunto *relativamente perfecto (completo, cerrado)* es aquel cuyos puntos-límites pertenecen al conjunto y solo difiere de su derivado por una infinidad *enumerable* de puntos. Contiene á éste.

*Conjunto denso en sí* es aquél cuyos puntos son todos puntos-límites. Está contenido en su derivado. Tal es el formado por los números racionales comprendidos en un intervalo.

*Conjunto perfecto es el que coincide ó es idéntico con su derivado.*

El continuo presenta el ejemplo más sencillo de conjunto perfecto.

Consideremos el conjunto A formado con los puntos comprendidos entre 0 y 1, *excluidos* estos dos. Entonces el conjunto derivado A′ no es perfecto, pues contiene además de los puntos de A los puntos 0 y 1. Será perfecto, si se le adjuntan los puntos 0 y 1. Igualmente el conjunto de los puntos interiores á un círculo no es perfecto, si no se consideran todos los puntos de la circunferencia.

De los conjuntos

$$a \leqq x \leqq b, \quad a < x < b$$

el primero es perfecto, el segundo no lo es.

*Conjunto por todo denso* en un dominio D, es el que tiene puntos suyos en todo dominio, por pequeño que sea, contenido en D. En este caso el conjunto derivado contiene todos los puntos de D. Un conjunto por todo denso es denso en sí; pero no se verifica la recíproca.

Los puntos de un intervalo cuya abscisa es un número racional, forman un conjunto por todo denso que no es perfecto.

Consideremos un conjunto lineal; será *discreto*, de *longitud nula* ó *inextenso*, cuando sea posible contener sus puntos en intervalos parciales de suma inferior á toda cantidad dada. El conjunto de los puntos

$$1, \ \frac{1}{2}, \ \left(\frac{1}{2}\right)^2, \ \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ \ldots\ldots, \ \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

es inextenso, pues se le puede repartir en dos agrupaciones: la una que contenga los puntos próximos al origen en un intrevalo

tan pequeño como se quiera, la otra que solo contenga un número finito de puntos.

Los conjuntos de primera especie son todos discretos. Así el conjunto

$$1,\ \frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$
$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \left(\frac{1}{2}\right)^4,\ \ldots\ldots$$

es discreto, porque su derivado es

$$0,\ \frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,\ \left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \ldots\ldots$$

y el derivado de éste se reduce al punto cero.

Un conjunto cuyo derivado es enumerable tiene una extensión nula.

Un conjunto de una dimensión es *limitado,* cuando sus elementos permanecen comprendidos entre dos números fijos. En el caso contrario es *ilimitado. Un conjunto limitado de una dimensión admite un límite superior y un límite inferior.*

El límite superior L es un número igual ó superior á uno de los elementos del conjunto; y todo número menor que L es inferior á uno por lo menos de los elementos del conjunto.

Un conjunto cualquiera es limitado, cuando lo es según cada una de sus dimensiones, es decir, cuando las coordenadas de sus puntos quedan comprendidas entre números fijos.

Los puntos de un plano, interiores á todo contorno cerrado, constituyen un conjunto limitado, y los exteriores un conjunto ilimitado.

Designemos por E un conjunto que no contiene todos los puntos posibles. Los puntos que no pertenecen á este conjunto forman otro conjunto $E_1$.

Se llama *frontera común* de estos dos conjuntos, al conjunto formado por los puntos que pertenecen á la vez á uno de los conjuntos y al derivado del otro.

Así, un *punto-frontera* de E, si pertenece á E (ó á $E_1$), tiene en cualquier proximidad por lo menos un punto de $E_1$ (ó de E).

Cuando ningún punto de un conjunto es punto frontera, se puede definir el interior del conjunto. Lo constituyen los puntos cuya proximidad pertenece al conjunto.

Cada punto interior al conjunto E es exterior al $E_1$.

El punto *límite* difiere del *punto-frontera*. El punto límite solo es al mismo tiempo punto-frontera, cuando no es interior al conjunto. Inversamente, un punto aislado es un punto frontera, sin ser un punto-límite.

Todo punto del conjunto $x^2 + y^2 \leqq 1$ es punto límite. Los puntos de la circunferencia de radio 1 son puntos-fronteras. En el conjunto

$$\left(1, \frac{1}{2}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots\ldots\right)$$

el origen es punto-límite y punto-frontera.

En el conjunto formado por la serie de los números enteros, cada punto es punto-frontera, sin ser punto-límite. En el conjunto formado por los puntos cuyas coordenadas son racionales, todos los puntos son puntos-fronteras. No hay ni puntos interiores, ni puntos exteriores al conjunto.

Un conjunto limitado es de un solo sosten *(un seul tenant)*, cuando es relativamente perfecto, y se puede escalonar entre dos puntos arbitrarios del conjunto una serie finita de puntos pertenecientes al conjunto tales, que la distancia de dos puntos consecutivos sea inferior á cualquier número dado.

Esta noción fija la idea del dominio continuo.

Un campo de dos dimensiones constituye un *continuo* compuesto de una sola pieza, cuando, dados dos puntos del campo, el uno fijo y el otro variable, se puede escalonar entre estos dos puntos un número finito de puntos tales, que el *entorno (entourage, intorno)* de uno cualquiera de entre ellos pertenezca completamente al campo y contenga el punto siguiente.

# CAPÍTULO II

## Cantidades infinitesimales

### § 1.° Principios fundamentales

**9.** Se llama *cantidad infinitamente pequeña*, una cantidad *variable que tiende hacia cero.*

Para comparar las cantidades infinitamente pequeñas, se toma como base una de ellas, que será un infinitamente pequeño de primer orden; entonces, si $k$ es un valor finito y $\omega$ infinitamente pequeño, todos los infinitamente pequeños de primer orden estarán definidos por la relación

$$\frac{\beta_1}{\alpha} = k + \omega \quad \text{ó} \quad \beta_1 = \alpha\,(k + \omega)$$

y toda cantidad infinitesimal de orden $n$ estará definida por la relación

$$\frac{\beta_n}{\alpha^n} = k + \omega \quad \text{ó} \quad \beta_n = \alpha^n\,(k + \omega).$$

Toda cantidad infinitamente grande se podrá representar mediante el infinitamente pequeño principal con un exponente negativo. Así

$$\beta_1 = \alpha^{-1}\,(k + \omega) \ldots\ldots \beta_n = \alpha^{-n}\,(k + \omega).$$

La expresión de las cantidades finitas será $b = \alpha^0\,(k + \omega)$. Hay cantidades que, siendo infinitamente pequeñas respecto á las de orden $n$, por ejemplo, son infinitamente grandes, respecto á las de orden $(n + 1)$, y por consiguiente, que no tienen razón finita, diferente de cero, con ninguno de los órdenes considerados. Por ejemplo: $\alpha^{\frac{1}{3}}$ es infinitamente pequeña respecto á

toda cantidad finita, é infinitamente grande respecto á $\alpha$ ó á cualquiera de primer orden, $\alpha^{\sqrt{2}}$ es infinitamente pequeña respecto á $\alpha$, pero infinitamente grande respecto de $\alpha^2$. La expresión general de estas cantidades es

$$6_{\frac{m}{n}} = \alpha^{\frac{m}{n}} (k + \omega).$$

Siendo la variable $\omega$ un infinitamente pequeño de orden $n$ y de la forma $k\,\alpha^n$, se tendrá, siendo $\alpha$ tan pequeña como se quiera,

$$\lim \frac{\omega}{\alpha^{n-\varepsilon}} = \lim (k\,\alpha^{\varepsilon}) = 0, \quad \lim \frac{\omega}{\alpha^{n+\varepsilon}} = \lim \left(k \cdot \frac{1}{\alpha^{\varepsilon}}\right) = \infty .$$

**10** Cuando el límite de la relación de dos cantidades variables finitas, infinitamente pequeñas ó infinitamente grandes, es la unidad, la diferencia de estas dos cantidades será *infinitamente pequeña con relación á cada una de ellas.*

En efecto

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1 \quad \text{ó} \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1 + \varepsilon, \quad \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \varepsilon.$$

También $$\frac{\beta - \alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}\,\varepsilon$$

*Recíprocamente* de $\beta - \alpha = \varepsilon$, resulta

$$\frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1.$$

Primer principio fundamental. *El límite de la relación de dos variables* no cambia, cuando se sustituye cada una de ellas por otra que difiere de las mismas en un infinitamente pequeño.

Sea $\lim \frac{\beta'}{\beta} = 1$, $\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1$ de $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'}\,\frac{\beta}{\beta'}\,\frac{\alpha'}{\alpha}$,

resulta $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \lim \frac{\beta}{\beta'} \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

SEGUNDO PRINCIPIO FUNDAMENTAL. *El límite de una suma de infinitamente pequeños, todos del mismo signo, no cambia cuando se les sustituye por otros cuyas relaciones con los primeros tienen por límite la unidad ó que difieren de los primeros en cantidades infinitamente pequeñas respecto de ellos.*

Sean $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, ..... infinitamente pequeños de igual signo, S su suma, $\beta$, $\beta'$, $\beta''$, ..... $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, ..... otros infinitamente pequeños tales que se tenga

$$\beta = \alpha + \alpha\varepsilon, \quad \beta' = \alpha' + \alpha'\varepsilon', \quad \beta'' = \alpha'' + \alpha''\varepsilon'', \quad .....$$

se tendrá

$$\beta + \beta' + \beta'' + ..... = S + \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + .....$$

Si $\eta$ es la mayor de las cantidades $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $\varepsilon''$, ....., se tendrá

$$\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + ..... < S\eta, \quad \lim (\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + .....) = 0$$

y por consiguiente $\lim (\beta + \beta' + .....) = S$.

La igualdad $\lim (\alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + .....) = 0$ permite enunciar el siguiente teorema: *Si una suma de infinitamente pequeños, cuyo número aumenta indefinidamente, tiene un límite finito, la suma de los productos obtenidos multiplicándolos respectivamente por otros infinitamente pequeños tendrá por límite cero.*

## § 2.° TRIÁNGULOS INFINITAMENTE PEQUEÑOS

**II.** *a)* Si en un triángulo ABC los tres ángulos tienden hacia los límites $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ y los tres lados $a$, $b$, $c$ hacia cero, las relaciones de los lados tendrán por límites las relaciones de los senos de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Así,

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}, \quad \lim \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta}.$$

Pero puede escribirse

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} \quad \text{ó} \quad a = b \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta},$$

porque

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} + \omega \quad \text{ó} \quad a = \frac{b \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} + b\,\omega .$$

*b)* En un triángulo ABC cuyo ángulo A tiende hacia un recto y los lados hacia cero, se puede calcular el lado $c$ por la fórmula

$$a^2 = b^2 + c^2$$

en vez de la fórmula exacta

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

porque $2bc \cos A$ es infinitamente pequeño respecto á $2bc$, y por consiguiente respecto á $b^2 + c^2$ que es $> 2bc$.

*c)* Bajando la perpendicular AI á la hipotenusa desde el vértice A del ángulo recto de un triángulo rectángulo, en el que AB ó $c$ es infinitamente pequeño de primer orden, se tiene

$$AC = c \operatorname{tg} B, \quad AI = c \operatorname{sen} B, \quad CI = c \operatorname{sen} B \operatorname{tg} B;$$

pero la relación de sen B y tg B á B tiene por límite la unidad; luego AC y AI son infinitamente pequeños de segundo orden é IC de tercero. Además,

$$BC - BA = \frac{c}{\cos B} - c = \frac{2c \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2}}{\cos B}$$

por consiguiente, BC — BA es de tercer orden.

Además

$$\frac{CI}{BC - BA} = c \operatorname{sen} B \operatorname{tg} B : \frac{2c \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2}}{\cos B} = \frac{\operatorname{sen}^2 B}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2}}$$

luego $$\lim \frac{CI}{BC - BA} = \frac{(\operatorname{arc} B)^2}{2\left(\operatorname{arc} \frac{B}{2}\right)^2} = 2.$$

*d)* Llamando H á la intersección con BC del arco de circunferencia descrito desde B como centro, resulta que dicha intersección tiene por límite el punto medio del segmento CI, cuando el ángulo B tiende hacia cero.

*e)* Sea el triángulo ABC en el que BC es infinitamente pequeño respecto á BA.

Bajando la perpendicular BI sobre AC, se tiene que

$$\frac{BI}{BA} \quad \text{ó} \quad \text{sen } A < \frac{BC}{BA}$$

que por hipótesis es infinitamente pequeño; luego sen A, y por consiguiente A, será infinitamente pequeño.

*f)* Sean A y B dos ángulos infinitamente pequeños del triángulo ABC.

Bajemos la perpendicular CI sobre AB. Tendremos

$$\frac{AI}{IB} = \frac{\text{tg } B}{\text{tg } A}; \quad \text{luego} \quad \lim \frac{AI}{IB} = \lim \frac{\text{tg } B}{\text{tg } A} = \lim \frac{B}{A};$$

luego el límite del vértice C se obtendrá, dividiendo AB en razón inversa de los ángulos A y B.

*g)* Supongamos que, además de los ángulos A y B, sea infinitamente pequeño el lado AB. Se tendrá

$$AC - AI = \frac{2\,AI\,\text{sen}^2\frac{A}{2}}{\cos A}, \quad BC - BI = \frac{2\,BI\,\text{sen}^2\frac{B}{2}}{\cos B}.$$

Pero $AC - AI + BC - BI = AC + BC - AB$; luego la diferencia entre la suma de los dos lados AB y BC y el tercero es de tercer orden, por lo menos.

*h)* Sea el ángulo A infinitamente pequeño de primer orden, comprendido entre dos lados AB y AC también infinitamente pequeños de primer orden.

Si el límite finito de su relación es diferente de la unidad, uno de los ángulos B y C tenderá hacia dos rectos y el otro hacia cero; porque de lo contrario, la relación límite de sus senos

sería la unidad, contra lo supuesto. Supongamos pues, que el límite de su relación sea la unidad.

1) Si la diferencia entre AB y AC es de segundo orden, tomemos en AC, $AB' = AB$; entonces B'C será de segundo orden; pero BB' es de segundo orden, pues en el triángulo isósceles ABB', $BB' = 2AB \operatorname{sen} \frac{A}{2}$. El tercer lado BC del triángulo BB'C será también de segundo orden; porque si fuera de primer orden, sería mayor que la suma de los otros dos lados, y si fuera de orden superior al segundo, sería menor que la diferencia. El límite de la relación $\frac{B'C}{BC}$ es una cantidad finita; pero el ángulo BB'C tiende hacia un ángulo recto; luego la tangente de B'BC ó el ángulo B'BC y por consiguiente el C tiende hacia un límite finito.

2) Si la diferencia entre AB y AC es de un orden comprendido entre 1 y 2, siendo BB' de segundo orden, B'C de un orden menor que el segundo y BC el mayor lado, por oponerse al ángulo obtuso B'; BC es de igual orden que B'C, y el límite de su relación será la unidad, pues su diferencia es menor que BB', y por consiguiente infinitamente pequeña respecto á dichos dos lados.

Siendo cero el límite de $\frac{BB'}{B'C}$, el ángulo opuesto C tenderá hacia cero y el ángulo ABC hacia dos rectos.

3) Sea la diferencia entre AB y AC mayor que 2. En este caso, $\frac{B'C}{BB'}$ tendrá por límite cero; luego el ángulo BB'C tiene cero por límite, y el límite del ángulo ABC es el mismo que el de ABB' ó un recto; lo mismo se puede decir del ángulo C.

OBSERVACIÓN. *Cuando la relación de dos lados de un triángulo tiene por límite la unidad, el tercer lado es infinitamente pequeño con relación á los otros dos, cualquiera que sea el orden infinitesimal del ángulo comprendido.*

## § 3.° Aplicaciones

Cuestión 1.ª *El área* A C B *de un segmento parabólico comprendido entre el eje de abscisas y la ordenada en su extremo es los dos tercios del paralelógramo que determina con estas rectas y la tangente en el vértice, la paralela al eje de abscisas trazada por el extremo de dicha ordenada.*

Trazándose por los puntos M y M' las ordenadas M P, M' P' y las paralelas M Q, M' Q al eje de las $x$ hasta encontrar á la tangente en el origen A, se tendrá, llamando $h$ y $k$ los incrementos de $x$ é $y$,

$$\frac{\text{PMHP}'}{\text{QMKQ}'} = \frac{yh}{xk}, \quad y^2 = 2px, \quad (y+k)^2 = 2p\,(x+h)$$

de donde

$$2yk + k^2 = 2ph, \qquad h = \frac{2yk + k^2}{2p}$$

$$\frac{yh}{xk} = \frac{y\,(2y+k)}{2px} = 2 + \frac{ky}{2px}$$

cuyo límite es 2 cuando $k$ tiende hacia cero.

Así A C B es los dos tercios del paralelógramo trazado. El área total formada por la ordenada prolongada en sentido negativo, es los $\frac{4}{3}$ de dicho paralelógramo.

Cuestión 2.ª *Hallar la relación de los segmentos considerados en la cuestión anterior, cuando se trata de las parábolas* $y^n = px^m$ (siendo $m$ y $n$ enteros positivos.)

Cuestión 3.ª *Hallar dicha relación de segmentos en el caso de ser contrarios los signos de* m *y* n, *es decir, en el caso de las hipérbolas* $y^n x^m = p$.

# CAPÍTULO III

## Nociones sobre las series

### § 1.° Series numéricas

**12.** La condición necesaria para la convergencia de una serie $S_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$

es que sus términos disminuyan indefinidamente hacia cero; pero no es suficiente, como se ve considerando la serie armónica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots\ldots,$$

que es divergente pues, agrupados sus términos en la forma

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots\ldots,$$

cada grupo encerrado en un paréntesis es mayor que $\frac{1}{2}$.

La condición necesaria y suficiente para la convergencia consiste en que la *suma de un número cualquiera de términos, á partir del* $n^{simo}$ $u_n$, *sea menor que cualquier valor asignado, tan pequeño como se quiera.*

**13.** Criterio general. Una serie será convergente, cuando sus términos comparados respectivamente con los de otra serie reconocida como convergente, ó en particular, con los de una progresión geométrica cuya razón sea inferior á la unidad, sean menores que los de ésta.

La serie

$$\frac{1}{1^p}, \quad \frac{1}{2^p}, \quad \frac{1}{3^p}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{1}{n^p}, \quad \ldots\ldots$$

es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

En efecto, suponiendo $p > 1$, hagamos

$$u_1 = \frac{1}{1^p}, \quad u_2 = \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p},$$

$$u_3 = \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}, \quad u_4 = \frac{1}{8^p} + \ldots\ldots + \frac{1}{15^p}.$$

La serie propuesta se reducirá á

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots\ldots$$

Pero se tiene que

$$u_1 = 1, \quad u_2 < 2 \cdot \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$u_3 < 4 \frac{1}{4^p} = \frac{1}{4^{p-1}} \qquad u_4 < 8 \frac{1}{8^p} = \frac{1}{8^{p-1}} \ldots\ldots$$

Los términos de la última serie son pues, menores que los de una progresión cuya razón $\frac{1}{2^{p-1}}$ es menor que 1.

Cuando $p = 1$, la serie propuesta se reduce á la armónica.

Si $p < 1$, se tendrá entonces $\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n}$, y los términos serán superiores á los de la serie armónica.

Criterio de D'Alembert. *Una serie* compuesta de términos positivos, á partir de cierto lugar, es *convergente, cuando la relación de cada término al que le precede es menor que un número determinado, inferior á la unidad,* pues de

$$u_{m+1} < k\, u_m, \quad u_{m+2} < k\, u_{m+1}, \quad \ldots\ldots \quad \text{resulta}$$

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots\ldots + u_{m+i} <$$

$$< u_m (k + k^2 + \ldots\ldots + k^i) = u_m \frac{k - k^{i+1}}{1 - k};$$

pero $\frac{k - k^{i+1}}{1 - k}$ es una cantidad finita, por grande que sea $i$. Además $u_m < k^{m-n} u_n$ puede hacerse menor que cualquier cantidad dada, para $n$ suficientemente grande; luego el resto $u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots\ldots + u_{m+i}$ puede hacerse menor que el valor que se quiera.

Al contrario, la serie es divergente, si $k$ es mayor que 1, pues entonces los términos se hacen cada vez mayores.

Criterio de Cauchy. *Una serie de términos positivos es convergente, si á partir de cierto término, se tiene*

$$\sqrt[n]{u_n} < k < 1 \quad \text{ó} \quad u_n < k^{\frac{1}{n}} < 1.$$

**14.** Series alternadas. *Una serie alternada es convergente, si á partir de cierto lugar, cada término es inferior en valor absoluto al que le precede, y si el término general* $u_n$ *tiende hacia cero cuando* n *crece indefinidamente.*

En efecto, siendo

$$S_p = S_n + (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots\ldots$$

ó $$S_p = S_n + u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) + \ldots\ldots,$$

y positivas las diferencias contenidas en cada paréntesis, se tendrá

$$S_p > S_n \quad \text{ó} \quad S_p < S_n + u_{n+1}$$

es decir, $$S_n < S_p < S_n + u_{n+1};$$

luego $S_p$ está comprendido entre dos valores que difieren en tan poco como se quiera; luego la serie es convergente.

La serie armónica alternada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots\ldots$$

es convergente.

La serie alternada

$$\frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \ldots\ldots + (-1)^{n+1}\frac{n+1}{n} + \ldots\ldots$$

es divergente, pues aunque sus términos decrecen, el término general no tiene cero por límite.

**15.** Una serie convergente es *absolutamente convergente*, cuando lo es la serie de los módulos de sus términos. Una serie convergente, que no es absolutamente convergente, ó en la que la serie de los módulos es divergente se llama *semiconvergente.*

*Para que una serie sea convergente, es suficiente que la serie de los módulos sea convergente.*

Sea $P_n$ la suma de los términos positivos y $-Q_n$ la suma de los términos negativos que se encuentran en $S_n$; la suma $T_n$ de los valores absolutos de todos estos términos será $P_n + Q_n$.

Por hipótesis, $T_n$ tiene un límite T y las sumas $P_n$, $Q_n$, que crecen con $n$, son inferiores á $T_n$ y por consiguiente á T; luego cada una tiene un límite P y Q. El límite de $P_n - Q_n$ será pues, P — Q; luego la serie considerada tiene un límite S igual á P — Q, es por tanto convergente.

Dicha condición es suficiente, pero no es necesaria. Así, la serie armónica alternada es convergente; pero la serie de los valores absolutos de sus términos es divergente.

Si una serie es semi-convergente, puede alterar su suma, alterándose el orden de sus términos. Así

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots\ldots$$

es convergente; pero

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \ldots\ldots,$$

deducida de la anterior, es también convergente, y su suma es la mitad de la de la anterior.

En efecto, reduciendo á uno cada dos primeros términos contenidos en los paréntesis, tendremos

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots\cdots$$

$$\text{ó}\quad \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\cdots\cdots\right)$$

Como ejemplo de una serie que pierde su convergencia por la alteración del orden de sus términos, sea la serie semi-convergente de términos

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots\cdots,$$

que se puede escribir en la siguiente forma

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{11}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)+\cdots\cdots,$$

cuyo término general, de la forma

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{4n-3}}+\frac{1}{\sqrt{4n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}},$$

es mayor que la cantidad positiva

$$\frac{1}{\sqrt{4n}}+\frac{1}{\sqrt{4n}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\quad\text{ó}\quad\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{n}},$$

y por consiguiente, mayor que el término general $\frac{1}{n}$ de la serie armónica. La nueva serie es pues divergente.

**16.** ADICIÓN DE SERIES. *Si las series*

$$u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots,\ u_n,\ \ldots\ldots \qquad v_1,\ v_2,\ \ldots\ldots,\ v_n,\ \ldots\ldots$$

*son convergentes, la serie*

$$u_1 + v_1,\quad u_2 + v_2,\quad \ldots\ldots,\quad u_n + v_n,\quad \ldots\ldots$$

*también será convergente, y su suma será* u + v.

En efecto, llamando $U_n$, $V_n$ y $S_n$ á las sumas de los $n$ primeros términos de cada serie, se tiene

$$S_n = U_n + V_n, \quad \text{y por consiguiente,} \quad \lim S_n = u + v$$

**17.** PRODUCTO DE SERIES. *Si las series*

$$u_0,\ u_1,\ \ldots\ldots,\ u_n,\ \ldots\ldots \ (1) \qquad v_0,\ v_1,\ \ldots\ldots,\ v_n,\ \ldots\ldots \ (2)$$

*son convergentes, siendo sus sumas* u, *y* v; *si además una de ellas por lo menos* (la primera, por ejemplo) *es absolutamente convergente, la serie*

$$w_0,\quad w_1,\quad \ldots\ldots,\quad w_n,\quad \ldots\ldots \qquad (3)$$

*será convergente y su suma será el producto* u v.

En efecto, expresando por $U_n$, $V_n$, $W_n$ la suma de los $n + 1$ primeros términos de cada una, la diferencia

$$\delta = W_{2n} - U_n V_n,$$

desarrollada y ordenada, será

$$\left.\begin{aligned} \delta = {} & u_0 (v_{n+1} + \ldots\ldots + v_{2n}) + u_{n+1} (v_0 + \ldots\ldots + v_{n-1}) \\ & + u_1 (v_{n+1} + \ldots\ldots + v_{2n-1}) + u_{n+2} (v_0 + \ldots\ldots + v_{n-2}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u_{n-1} v_{n+1} + u_{2n} v_0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Pero, por ser la serie (1) absolutamente convergente, y la serie (2) convergente, podemos designar dos números fijos A y B tales que

$$| u_0 | + | u_1 | + \ldots\ldots + | u_n | < A \qquad (5)$$

$$| v_0 + v_1 + \ldots\ldots + v_n | < B \qquad (6)$$

y, en virtud del principio general de la convergencia de las series, tomar $n$ bastante grande para que se tenga

$$| u_{n+1} | + | u_{n+2} | + \ldots\ldots + | u_{n+p} | < \varepsilon \qquad (7)$$

$$| v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots\ldots + v_{n+p} | < \varepsilon \qquad (8)$$

siendo $\varepsilon$ tan pequeña como se quiera. Luego, en virtud de (6) y (8),

$$| \delta | < A\varepsilon + B\varepsilon \quad \text{ó} \quad (A + B)\varepsilon;$$

luego $| \delta |$ puede hacerse menor que cualquier cantidad dada, es decir, las expresiones

$$W_{2n} - U_n V_n \quad \text{y} \quad W_{2n+1} - U_{n+1} V_{n+1}$$

tienden hacia cero, cuando $n$ crece indefinidamente; luego $W_{2n}$ y $W_{2n+1}$ tienden hacia el límite $uv$, cuando $n$ crece indefinidamente.

## § 2.º Obtención de algunas series

**18.** Límite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ cuando m crece indefinidamente.

*a)* Supongamos $m$ entero. Se tiene

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = 1 + m\frac{x}{m} + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{x^2}{m^2} + \ldots\ldots$$

$$= 1 + \frac{x}{1} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1 - \frac{n-1}{m}\right)\frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots$$

Pero siendo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..... números positivos tales que $\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots < 1$,

se tiene $(1 - \alpha)(1 - \beta)\ldots\ldots < 1 - (\alpha + \beta + \ldots\ldots)$

ó $(1-\alpha)(1-\beta)\ldots\ldots = 1 - \theta(\alpha+\beta+\ldots\ldots)$

estando comprendida $\theta$ entre 0 y 1.

Hagamos

$$\alpha = \frac{1}{m}, \quad \beta = \frac{2}{m}, \quad \gamma = \frac{3}{m}, \quad \ldots\ldots$$

Tendremos

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{n-1}{m}\right) = 1 - \theta_{n-1}\frac{n(n-1)}{2m},$$

estando $\theta_{n-1}$ comprendida entre 0 y 1. Resulta pues

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^2}{2m}\left[1 + \frac{x}{1}\theta_2 + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}\theta_{n-1} + \ldots\ldots\right]$$

La primera parte parte de este desarrollo

$$s = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots$$

es convergente cuando $m$ aumenta indefinidamente.

El módulo de la parte comprendida entre paréntesis es menor que el valor de la serie convergente

$$1 + \frac{r}{1} + \frac{r^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{r^n}{n!} + \ldots\ldots,$$

siendo $r$ el módulo de $x$. Además $\frac{x^2}{2m}$ tiende hacia cero. Luego

$$\lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = s \quad \text{y en particular} \quad \lim\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e$$

designando $e$ el valor de la serie convergente

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!} + \ldots\ldots,$$

expresión de la base del sistema de logaritmos neperianos, cuyo valor es 2,7182818284590 45.....

*b)* Sea $m$ un número fraccionario. Se tiene

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n}.$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}$$

$$> \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$$

Los términos extremos tienen por límite $e$, cuando $n = \infty$; luego también el término medio.

*c)* Sea $m$ negativo. Se tiene, haciendo $m = -1$,

$$\lim\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

$$= \lim\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \lim\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n}$$

$$\lim\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = e.$$

*d)* Suponiendo $x$ real, se tiene

$$s = \lim\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m} = \lim\left[\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^{x}.$$

Haciendo $\frac{x}{m} = \frac{1}{\alpha}$, resulta

$$s = \lim\left[\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{x} = e^{x}.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots\ldots$$

*c)* Supongamos que $x$ sea imaginaria, y sustituyámosla por $x + y\sqrt{-1}$. En este caso resultará que

$$\lim\left(1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{m}\right)^m = 1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{1} + \frac{(x + y\sqrt{-1})^2}{2!} + \ldots\ldots$$

Calculemos el módulo del primer miembro. Se tiene

$$\text{mód}\left(1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{m}\right)^m = \left[\left(1 + \frac{x}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{m^2}\right]^{\frac{m}{2}} =$$

$$= \left(1 + \frac{2mx + x^2 + y^2}{m^2}\right)^{\frac{m}{2}} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{2mx + x^2 + y^2}{m^2}\right)^{\frac{m^2}{2mx + x^2 + y^2}}\right]^{\frac{2mx + x^2 + y^2}{2m}}$$

y haciendo $\dfrac{2mx + x^2 + y^2}{m^2} = \alpha$, tendremos

$$\lim\left[\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}\right]^{\frac{2mx + x^2 + y^2}{2m}} = e^x.$$

El argumento de

$$1 + \frac{x + y\sqrt{-1}}{m}$$

se halla comprendido entre su seno y su tangente

$$\frac{\frac{y}{m}}{\sqrt{\left(1 + \frac{x}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{m^2}}} \quad \text{é} \quad \frac{\frac{y}{m}}{1 + \frac{x}{m}}$$

El argumento de

$$\left(1+\frac{x+y\sqrt{-1}}{m}\right)^m,$$

$m$ veces mayor, estará comprendido entre

$$\frac{y}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{m}\right)^2+\frac{y^2}{m^2}}} \quad \text{é} \quad \frac{y}{1+\frac{x}{m}},$$

cantidades que tienden hacia $y$ cuando $m$ tiende hacia $\infty$; luego

$$\lim\left(1+\frac{x+y\sqrt{-1}}{m}\right)^m = e^x(\cos y+\sqrt{-1}\,\operatorname{sen} y),$$

es decir,

$$e^x(\cos y+\sqrt{-1}\,\operatorname{sen} y) = 1+\frac{x+y\sqrt{-1}}{1}+\frac{(x+y\sqrt{-1})^2}{2!}+\ldots\ldots$$

**19.** Desarrollo de sen $x$ y cos $x$.

Si se hace en la última fórmula $x = 0$, se tiene

$$\cos y+\sqrt{-1}\,\operatorname{sen} y = 1+\frac{y\sqrt{-1}}{1}-\frac{y^2}{2!}-\frac{y^3\sqrt{-1}}{3!}-\ldots\ldots,$$

$$\cos y = 1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\ldots\ldots$$

$$\operatorname{sen} y = y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\ldots\ldots$$

## § 3.° Ejercicios y aplicaciones

1. Hallar las sumas de las series

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n\,(n+1)}+\cdots\cdots$$

*solución:* $\lim S_n = 1$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n\,(n+2)}+\cdots\cdots$$

*solución:* $\lim S_n = \frac{3}{4}$

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2\,(m+2)}+\cdots\cdots+\frac{1}{n\,(m+n)}$$

*solución:* $\lim S_n = \frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{m}\right)$

Uno de los procedimientos elementales más empleados para hallar la *suma* de una serie

$$a_0,\quad a_1,\quad \cdots\cdots,\quad a_n,\quad \cdots\cdots$$

consiste en expresarla por medio de una diferencia

$$(a_0-a_1)+(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots\cdots+(a_{n-1}-a_n)+\cdots\cdots$$

Así por ejemplo, para la serie

$$\frac{1}{x\,(x+1)}+\cdots\cdots+\frac{1}{(x+n)\,(x+n+1)}+\cdots\cdots,$$

se tiene

$$\frac{1}{(x+n)\,(x+n+1)}=\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}$$

y la serie podrá escribirse:

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \ldots\ldots$$

Para hallar la suma de la primera serie propuesta, escribiremos

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots\ldots$$

$$+ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1};$$

2. Hallar la suma de la serie

$$1^k,\ 2^k,\ 3^k,\ \ldots\ldots,\ n^k.$$

Sabemos que cuando $k$ es entero y positivo, la serie es divergente; si $k$ es negativo será convergente; y en el caso de ser $k = -1$, se tiene la serie armónica, que es divergente.

Sea $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2$

Hagamos

$$1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \ldots\ldots$$

poniendo $n + 1$ en vez de $n$, resultará

$$1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 + (n+1)^2 = a_0 + a_1 (n+1) + \ldots\ldots$$

Restando las dos ecuaciones, se obtiene

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = a_1 + a_2 (2n+1) + a_3 (3n^2 + 3n + 1) + \ldots\ldots$$

Identificando, se anularán los coeficientes $a_4$, $a_5$, ..... por no existir las potencias 3.ª, 4.ª ..... de $n$ en el primer miembro, y se tendrá

$$3a_3 = 1,\quad 2a_2 + 3a_3 = 2,\quad a_1 + a_2 + a_3 = 1,$$

$$a_3 = \frac{1}{3},\quad a_2 = \frac{1}{2},\quad a_1 = \frac{1}{6}.$$

Para $n = 1$, tendremos $1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, resultando $a_0 = 0$.; luego

$$S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + n^2 = 0 + \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$$

$$S_n = \frac{1}{6} n\,(n + 1)\,(2n + 1).$$

3. Hallar la suma

$$S = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x + a) + \ldots\ldots + \operatorname{sen}(x + n\,a) \quad (1)$$

Multiplicando por $-2 \operatorname{sen} \frac{a}{2}$, se obtiene

$$-2S \operatorname{sen} \frac{a}{2} = -2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{a}{2}$$

$$-2 \operatorname{sen}(x + a) \operatorname{sen} \frac{a}{2} - \ldots\ldots \quad (2)$$

Tenemos además que

$$-2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos(x + y) - \cos(x - y)$$

$$-2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \cos\left(x + \frac{a}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

$$-2 \operatorname{sen}(x + a) \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \cos\left(x + \frac{3}{2}a\right) - \cos\left(x + \frac{a}{2}\right)$$

. . . . . .

Sustituyendo en (2) tendremos

$$-2S \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \cos\left(x + \frac{a}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{3}{2}a\right) + \cos\left(x + \frac{5}{2}a\right) + \ldots\ldots + \cos\left(x + \frac{2n + 1}{2}a\right)$$

$$- \cos\left(x + \frac{a}{2}\right) - \ldots\ldots \cos\left(x + \frac{2n - 1}{2}a\right);$$

$$-2S \operatorname{sen} \frac{a}{2} = \cos\left(x + \frac{2n + 1}{2}a\right) - \cos\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Pero por ser

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2},$$

se tendrá que

$$-2S \operatorname{sen} \frac{a}{2} = -2 \operatorname{sen} \left(x + \frac{n}{2} a\right) \operatorname{sen} \left(\frac{n+1}{2} a\right)$$

y en fin $$S = \frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a}{2}} \operatorname{sen} \left(x + \frac{n}{2} a\right).$$

4. Hallar la suma

$$S = \cos x + \cos (x + a) + \ldots\ldots + \cos (x + na).$$

*Solución:* $$S = \frac{\operatorname{sen} \frac{n+1}{2}}{\operatorname{sen} \frac{a}{2}} \cos \left(x + \frac{n}{2} a\right).$$

5. Hallar la suma de la serie

$$1, \frac{x}{a+h_1}, \frac{x(x+h_1)}{(a+h_1)(a+h_2)}, \ldots\ldots \frac{x(x+h_1)\ldots\ldots(x+h_n)}{(a+h_1)\ldots\ldots(a+h_{n+1})}$$

con la condicion de que dicha suma sea independiente de las cantidades no decrecientes $h_1$, $h_2$, ....., $h_n$.

En virtud de la hipótesis, la suma es $\frac{a}{a-x}$, pues debe permanecer invariable cuando se sustituye $h_1$, $h_2$, ..... $h_n$ por cero. Así

$$\frac{a}{a-x} = 1 + \frac{x}{a+h_1} + \ldots\ldots \frac{x(x+h_1)}{(a+h_1)(a+h_2)} + \frac{x(x+h_1)\ldots\ldots(x+h_n)}{(a+h_1)\ldots\ldots(a+h_{n+1})}$$

$$1 = \frac{a-x}{a} + \frac{x}{a}\frac{a-x}{a+h_1} + \frac{x}{a}\frac{x+h_1}{a+h_1}\frac{a-x}{a+h_2} + \cdots\cdots$$

Pero

$$\frac{a-x}{a+h_1} = 1 - \frac{x+h_1}{a+h_1}, \quad \frac{a-x}{a+h_2} = 1 - \frac{x+h_2}{a+h_2}, \quad \cdots\cdots$$

y escribiendo $\frac{x+h_p}{a+h_p} = \alpha_p$ se tendrá

$$1 = \frac{a-x}{a} + \frac{x}{a}[1 - \alpha_1 + \alpha_1(1-\alpha_2) + \alpha_1\alpha_2(1-\alpha_3) + \cdots\cdots]$$

6. La serie

$$\frac{1}{2\,l\,2} + \frac{1}{3\,l\,3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n\,l\,n} + \cdots\cdots$$

es divergente.

7. Obtener las sumas

$$\sum_{p=0}^{p=n} \operatorname{sen}(a+p\alpha), \qquad \sum_{p=0}^{p=n} \cos(a+p\alpha).$$

Para hallar la primera, hagamos $y = \sum_{p=0}^{p=n} \operatorname{sen}(a+p\alpha)$.

Multiplicando por $2\cos\alpha$ los dos miembros, y por ser

$$2\operatorname{sen}(a+p\alpha)\cos\alpha = \operatorname{sen}[a+(p+1)\alpha] + \operatorname{sen}[a+(p-1)\alpha],$$

resultará que

$$2y\cos\alpha = \sum_{p=0}^{p=n} \operatorname{sen}(a+p+\alpha) + \sum_{p=0}^{p=n} \operatorname{sen}(a+p-\alpha);$$

pero la primera es $y + \operatorname{sen}(a+n+\alpha) - \operatorname{sen} a$ y la se-

gunda es $y - \operatorname{sen}(a + n\alpha) + \operatorname{sen}(a - \alpha)$; luego

$$2y \cos\alpha = 2y + \operatorname{sen}[a + (n+1)\alpha] - \operatorname{sen}[a + n\alpha] + \operatorname{sen}(a - \alpha) - \operatorname{sen} a.$$

Transformando en productos y reduciendo, se obtiene para ambas expresiones

$$\frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\alpha}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \operatorname{sen}\left(a + \frac{n\alpha}{2}\right), \qquad \frac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\alpha}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \cos\left(a + \frac{n\alpha}{2}\right).$$

8. Condiciones de convergencia ó divergencia de

$$\operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{x}{a+1}\right), \quad \ldots\ldots, \quad \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{x}{a+n}\right) \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}^{\alpha}\left(\frac{x}{a}\right), \quad \operatorname{tg}^{\alpha}\left(\frac{x}{a+1}\right), \quad \ldots\ldots, \quad \operatorname{tg}^{\alpha}\left(\frac{x}{a+n}\right) \qquad (2)$$

Se supone $\alpha > 0$, $x > 0$, $\frac{\pi}{2} > \frac{x}{a} > 0$.

1.° Sea $\alpha > 1$. Se tiene

$$S_{n+1} < x^{\alpha}\left[\frac{1}{a^{\alpha}} + \frac{1}{(a+1)^{\alpha}} + \ldots\ldots + \frac{1}{(a+n)^{\alpha}}\right].$$

Siendo convergente el segundo miembro, lo será la serie (1).

Si $\alpha < 1$, como la relación de un arco á su seno tiende hacia la unidad, cuando aquél tiende hacia cero, se puede hacer que para todos los valores de $n$, á partir de un valor $p$, se tenga

$$\operatorname{sen}\frac{x}{a+n} > k\frac{x}{a+n},$$

siendo $k$ un número determinado menor que 1; luego

$$\operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{x}{a+p}\right) + \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{x}{a+p+1}\right) + \ldots\ldots + \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{x}{a+n}\right)$$

$$> k^{\alpha}\, x^{\alpha}\left[\frac{1}{(a+p)^{\alpha}} + \frac{1}{(a+p+1)^{\alpha}} + \ldots\ldots + \frac{1}{(a+n)^{\alpha}}\right];$$

luego la serie es divergente.

2.° Sea $\alpha > 1$. Para todos los valores de $n$ distintos de cero, se tiene que

$$\operatorname{tg}\frac{x}{a+n} < \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{a+n}\right)}{\cos\left(\frac{x}{a}\right)}; \quad \text{luego}$$

$$S_{n+1} < \frac{1}{\cos^{\alpha}\left(\frac{x}{a}\right)}\left[\operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{x}{a}\right) + \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{x}{a+1}\right) + \ldots\ldots + \operatorname{sen}^{\alpha}\left(\frac{x}{a+n}\right)\right].$$

La serie es pues convergente. Si $\alpha < 1$, se tiene

$$S_{n+1} > x^{\alpha}\left[\frac{1}{a^{\alpha}} + \frac{1}{(a+1)^{\alpha}} + \ldots\ldots + \frac{1}{(a+n)^{\alpha}}\right];$$

la serie es pues divergente, y también cuando $\alpha = 1$.

9. Demostrar que la serie

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \ldots\ldots + (-1)^{p}\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-p+1)}{p!}$$

tiene por límite cero cuando $m$ es positivo, y que crece indefinidamente cuando $m$ es negativo.

*Solución:* Se tiene que

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{2!} = \frac{(m-1)(m-2)}{2!},$$

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2!} - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}$$

$$= -\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{3!}$$

. . . . . .

$$(-1)^{p-1}\frac{(m-1)\ldots\ldots(m-p+1)}{(p-1)!}$$

$$+(-1)^{p}\frac{(m-1)\ldots\ldots(m-p+1)}{p!}$$

$$=(-1)^{p}\frac{(m-1)\ldots\ldots(m-p)}{p!}.$$

El valor absoluto del segundo miembro de la última igualdad es el del producto

$$\left(1-\frac{m}{1}\right)\left(1-\frac{m}{2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{m}{p}\right)$$

y tiende hacia cero, cuando $p$ crece indefinidamente, cualquiera que sea el número positivo $m$.

Cuando $m$ es negativo, hay que cambiar el signo de $m$, y la serie es divergente.

10. Desarrollar en serie la expresión $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$.

*Solución:*

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{x}{1} + \frac{1\cdot 3}{2^2}\frac{x^2}{2!}$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4}\frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots$$

# CAPÍTULO IV

## Derivadas y diferenciales

### § 1.° Definiciones

**20.** *El cálculo diferencial tiene por objeto determinar, para cada función, el límite de la relación del incremento de la función al de la variable, cuando ésta tiende hacia cero.*

Sea $y = f(x)$.

Dando un incremento $h$ á $x$, la función adquirirá un incremento correspondiente $k$, y se tendrá

$$y + k = f(x + h).$$

Llamando $y'$ al límite de $\frac{k}{h}$, se tendrá, cuando $h$ no sea nulo,

$$\frac{k}{h} = y' + \alpha, \quad k = y'h + \alpha h \quad \text{ó} \quad \Delta y = \Delta x f'(x) + \alpha \Delta x \quad (1)$$

siendo $\alpha$ una cantidad que tiende hacia cero al mismo tiempo que $h$ ó $\Delta x$.

La primera parte del incremento de la función, $y'h$, que es *el producto de la derivada de la función por el incremento de la variable independiente*, se llama *la diferencial* de la función $y$.

La diferencial de la variable independiente es el incremento $h$, pues

$$y = x, \quad y + k = x + h; \quad \text{luego } k = h, \quad \frac{k}{h} = 1.$$

Así $$dy \quad \text{ó} \quad dx = 1 \,.\, h = h.$$

Por consiguiente, la fórmula $dy = y'h$ puede escribirse

$$dy = y'dx, \quad \text{de la que resulta} \quad y' = \frac{dy}{dx};$$

luego: *La derivada de una función de una variable es el cociente de la diferencial de la función por la diferencial de la variable.*

La derivada de una función $y = f(x)$ está representada geométricamente por el coeficiente angular de la tangente, en cada uno de los puntos de la curva representada por aquélla.

*Casos de excepción.* La relación que expresa la derivada puede hacerse infinita ó no tender hacia ningún límite ó tender hacia límites distintos, según que $h$ tienda á cero por valores positivos ó negativos.

Así la relación $\lim \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

en el caso de $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$, se reduce para $x = 2$,

$$\text{á} \quad \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}},$$

que crece indefinidamente, cuando $h$ tiende hacia cero.

En el caso de $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, para $x = 0$, dicha relación se reduce á $\operatorname{sen} \dfrac{1}{h}$, que oscila entre $-1$ y $+1$, sin tender hacia ningún límite.

En el caso de

$$f(x) = \frac{x-2}{1 + e^{\frac{1}{x-2}}}, \quad \text{para } x = 2 \text{ se reduce á } \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{h}}},$$

que tiene por límite cero ó 1, según que $h$ tienda hacia cero positiva ó negativamente.

Dicha función no tiene, pues, derivada determinada para $x = 2$.

Existen, en fin, funciones continuas que no tienen derivada determinada para ninguno de los valores de la variable comprendidos en un intervalo, por ejemplo

$$f(x) = \cos \pi x + b \cos a \pi x + \ldots\ldots + b^n \cos a^n \pi x + \ldots\ldots$$

presentada por Weierstrass.

**21.** *La derivada de una suma es igual á la suma de las derivadas de los sumandos,* pues siendo

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots\ldots + f_n(x) = \Sigma f_i(x),$$

tenemos que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum \frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h},$$

y en el límite

$$f'(x) = \Sigma f'_i(x) = f'_1(x) + \ldots\ldots + f'_n(x).$$

Corolario 1.° *La derivada de una constante es nula,* puesto que el numerador de la relación que representa es cero.

Corolario 2.° *Si dos funciones son iguales para todos los valores de la variable independiente, ó solo difieren por una constante, sus derivadas son iguales y recíprocamente.*

Una función *crece* ó *decrece,* á partir de un valor de $x$, según que su derivada sea *positiva* ó *negativa.*

Si la derivada de una función es *nula,* para todos los valores de $x$ comprendidos entre $a$ y $b$, esta función es *constante* en dicho intervalo, y recíprocamente.

Resulta pues, que *si una función es creciente en cierto intervalo, su derivada no puede ser negativa en el mismo;* pero *puede pasar por cero;* y si es decreciente, su derivada no puede ser positiva; pero puede anularse para valores particulares de la variable independiente.

**22.** FUNCIÓN DE FUNCIÓN. Si $u = \varphi(y)$, siendo $y = f(x)$, se tendrá que $u = \varphi[f(x)]$.

En este caso $u$ es una *función de función* de $x$, y resulta que

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \lim \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}, \quad \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta y} = \varphi'(y); \quad \text{luego} \quad \frac{du}{dx} = \varphi'(y) f'(x),$$

$$du = \varphi'(y)\, dy.$$

**23.** FUNCIONES INVERSAS. Dada una función $y = F(x)$, si se resuelve la ecuación que la expresa respecto á $x$, tendremos la nueva función $x = f(y)$.

Las dos funciones F y $f$ son inversas la una de la otra.

Siendo las dos ecuaciones la misma bajo distinta forma, darán los mismos incrementos $\Delta x$ y $\Delta y$ de $x$ é $y$. Tendremos pues,

$$F'(x) = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'[F(x)]}.$$

Resulta, por tanto, que para obtener la derivada de una función $F(x)$, inversa de la función $f(x)$, cuya derivada se sabe obtener, basta hallar la recíproca de la función derivada $f'$ y colocar bajo este signo la función propuesta $F(x)$.

**24.** DERIVADA Y DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA. Sea la función compuesta, por ejemplo, de dos funciones $u$ y $v$ de la variable $x$,

$$y = f(u, v).$$

Siendo $\Delta u$ y $\Delta v$ los incrementos de $u$ y $v$ correspondientes al incremento $\Delta x$ de $x$, si sustituimos $u$ por $u + \Delta u$, dejando á $v$ constante, resultará para $y$ el incremento

$$f(u + \Delta u, v) - f(u, v).$$

Dividamos por $\Delta u$ y pasemos al límite, considerando á $v$

como constante. Tendremos

$$\lim \frac{f(u+\Delta u, v)-f(u, v)}{\Delta u}=\frac{\partial f(u, v)}{\partial u}=\varphi(u, v).$$

De igual manera, sustituyendo $v$ por $v+\Delta v$ y considerando á $u$ como constante, tendremos que

$$\lim \frac{f(u, v+\Delta v)-f(u, v)}{\Delta v}=\frac{\partial f(u, v)}{\partial v}=\psi(u, v);$$

y si $\alpha$ es una función que se anula con $\Delta u$, $\beta$ otra función que se anula con $\Delta v$, será

$$f(u+\Delta u, v)-f(u, v)=[\varphi(u, v)+\alpha]\,\Delta u, \qquad (1)$$

$$f(u, v+\Delta v)-f(u, v)=[\psi(u, v)+\beta]\,\Delta v. \qquad (2)$$

Cambiando $u$ por $u+\Delta u$ en la última, tendremos

$$f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u+\Delta u, v)$$
$$=[\psi(u+\Delta u, v)+\beta']\,\Delta v, \qquad (3)$$

representando $\beta'$ la función á que se reduce $\beta$, cuando se sustituye en ella $u$ por $u+\Delta u$, y que se anula con $\Delta v$.

Sumando (1) y (3), y dividiendo por $\Delta x$, resulta

$$\frac{f(u+\Delta u, v+\Delta v)-f(u, v)}{\Delta x}$$
$$=[\varphi(u, v)+\alpha]\frac{\Delta u}{\Delta x}+[\psi(u+\Delta u, v)+\beta']\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

y en el límite

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(u, v)\frac{\partial u}{\partial x}+\psi(u, v)\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

ó

$$dy=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv,$$

que también suele escribirse $dy = d_u y + d_v y$, $dy$ es la *diferencial total*; $\frac{\partial y}{\partial u} du$ y $\frac{\partial y}{\partial v} dv$ ó $d_u y$ y $d_v y$ son las *diferenciales parciales.*

Por consiguiente: *La diferencial de una función compuesta, ó su derivada, es igual á la suma de sus diferenciales ó de sus derivadas parciales.*

**25.** Teorema de Rolle. *Si* f (x) *se anula para* x = a *y para* x = b, *y la derivada* f' (x) *está determinada para todo valor de* x *comprendido entre* a *y* b; *existe en este intervalo, por lo menos, un valor de* x *para el cual la derivada* f' (x) *es igual á cero.*

En efecto, en el caso de ser constantemente nula la función, su derivada también lo será.

En el caso de no ser constantemente nula la función, supongamos que tenga valores positivos, y consideremos el mayor valor $f(c)$ de éstos. Si $h$ expresa un número positivo tal, que $c - h$ y $c + h$ se hallen en el intervalo $(a, b)$, las diferencias $f(c - h) - f(c)$ y $F(c + h) - f(c)$ serán negativas, y las relaciones

$$\frac{f(c-h)-f(c)}{-h}, \quad \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

serán positiva y negativa, respectivamente.

Pero, puesto que la función admite, para $x = c$, una derivada determinada, las dos relaciones deben tender á un límite común, cuando $h$ tiende hacia cero. Como la primera solo puede tender á un límite positivo ó nulo y la segunda á un límite negativo ó nulo, el límite común es nulo, y se tiene $f'(c) = 0$.

**26.** Teorema de los incrementos finitos. *Si* f (x) *y* $\varphi$ (x) *tienen derivadas determinadas en el intervalo* (a, b), *y si* $\varphi'$ (x) *no se anula en este intervalo, se tendrá*

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \qquad (1)$$

*siendo* c *un número convenientemente elegido entre* a *y* b.

En efecto, la función

$$\psi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} [\varphi(x) - \varphi(a)]$$

se anula para $x = a$ y para $x = b$. Pero en el intervalo $(a, b)$ dicha función tiene una derivada determinada, porque se tiene

$$\psi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(x).$$

Luego, según el teorema de Rolle, esta derivada se anula para cierto valor $c$ de $x$ comprendido entre $a$ y $b$, es decir, que se verifica la relación

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi'(c) = 0,$$

de la que se deduce la (1), que se escribe también

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{\varphi(x+h) - \varphi(x)} = \frac{f'(x+\theta h)}{\varphi'(x+\theta h)},$$

representando $\theta$ un valor comprendido entre 0 y 1.

Cuando $\varphi(x) = x$, se tiene que

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x+\theta h),$$

relación que se llama *fórmula de los incrementos finitos.*

COROLARIO 1.º *Si se tiene* f (a) = 0, f (b) = 0, f (c) = 0, a < b < c, *si la función* f *y su derivada son continuas, cuando* x *varía desde* a *hasta* c, *y si* f'' (x) *existe y se halla bien determinada en este intervalo, se tendrá*

$$f''(d) = 0,$$

*designando* d *un número comprendido entre* a *y* c. *Del mismo modo, si se tiene*

f (a) = 0, f (b) = 0, f (c) = 0, f (d) = 0, a < b, < c < d,

*si* f $(x)$, f' $(x)$, f'' $(x)$ *son finitas y continuas entre* a *y* d, *se tendrá*

$$f'''(e) = 0,$$

hallándose *e comprendido entre* a *y* c, *y así sucesivamente.*

En efecto, siendo $f(a) = 0$, $f(b) = 0$, $f(c) = 0$, y llamando $a'$ y $b'$ cantidades convenientemente elegidas entre $a$ y $b$ y entre $b$ y $c$, se tendrá, por el teorema de Rolle,

$$f'(a') = 0, \quad f'(b') = 0,$$

y por consiguiente, en virtud del mismo teorema, $f''(c') = 0$, siendo $c'$ un número comprendido entre $a'$ y $b'$, ó lo que es lo mismo, entre $a$ y $c$, etc.

COROLARIO 2.° *Supongamos que permaneciendo* f(x) *continua, así como sus* n *primeras derivadas, cuando* x *varía entre* $x_0$ *y* X, *la* $(n+1)^{sima}$ *derivada exista y permanezca finita y bien determinada. Sean* $a_1$, $a_2$, ....., $a_{n+1}$, x *números comprendidos entre estos límites y* $\xi$ *una media entre éstos. Se tendrá, si* f(x) *se anula para* $x = a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n+1}$,

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots\ldots (x - a_{n+1}) \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}.$$

En efecto, hagamos

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots\ldots (x - a_{n+1})\, \Theta(x). \qquad (1)$$

La función de $z$

$$f(z) - (z - a_1)(z - a_2) \ldots\ldots (z - a_{n+1})\, \Theta(x)$$

se anulará para $z = a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n+1}$ y $z = x$; luego su derivada $(n+1)^{sima}$ se anulará para un valor $\xi$ de $z$ comprendido entre la mayor de las cantidades $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_{n+1}$ y $x$. Pero esta derivada es

$$f^{n+1}(z) - (n+1)!\, \Theta(x);$$

luego se tiene

$$f^{n+1}(\xi) - (n+1)!\, \Theta(x) = 0,$$

de donde $$\Theta(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!},$$

y sustituyendo en (1), resulta la fórmula del enunciado.

## § 2.° Diferenciación de funciones elementales

**27.** Sea $y = u + v - z$, representando $u$, $v$, $z$ funciones de $x$. Tendremos

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - z - \Delta z$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta z, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

y pasando á los límites,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dz}{dx}, \quad dy = du + dv - dz.$$

**28.** $$y = au$$

$$y + \Delta y = a(u + \Delta u), \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a\frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad dy = a\,du.$$

**29.** $y = uv$ ($u$ y $v$ funciones de $x$)

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \Delta v$$

$$\Delta y = v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

En el límite $\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v$ se anula; luego

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}, \quad dy = v\,du + u\,dv.$$

**30.** $$y = \frac{u}{v} \quad \text{ó} \quad yv = u$$

$$v\,dy + y\,dv = du, \quad d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

**31.** $$y = u^m$$

$$d(uvz \ldots . t) = vz \ldots . du + \ldots ., + uvz \ldots . dt.$$

Suponiendo iguales los factores, resulta

$$du^m = m\,u^{m-1}\,du.$$

**32.** Sea $y = u^{\frac{p}{q}}$ ó $y^q = u^p$

$$qy^{q-1}\,dy = pu^{p-1}\,du, \quad qy^q\,dy = pu^{p-1}\,ydu$$

$$dy = \frac{p}{q}\,\frac{u^{\frac{p}{q}}}{u}\,du, \quad du^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q}\,u^{\frac{p}{q}-1}\,du.$$

**33.** Sea $y = u^{-n}$, $y = \frac{1}{u^n}$

$$dy = -\frac{d.u^n}{u^{2n}} = -n\,u^{-n-1}\,du,$$

y sustituyendo $-n$ por $m$,

$$du^m = m\,u^{m-1}\,du.$$

**34.** Sea $d\sqrt[n]{u} = du^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\,u^{\frac{1}{n}-1}\,du$

$$= \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}.$$

**35.** Sea $y = \log x$, tomado en cualquier sistema. Se tiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Haciendo $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{\alpha}$, y pasando al límite, resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e, \qquad dy = \frac{dx}{x} \log e.$$

Si el logaritmo se toma en el sistema neperiano, será

$$dlx = \frac{dx}{x}.$$

Observación.—Dado un producto $y = uvw.....$, se tiene

$$\log y = \log u + \log v + \log w .....$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + .....$$

Se obtiene inmediatamente que

$$y = \frac{u}{v}, \quad \log y = \log u - \log v, \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}.$$

Se ve pues, que el cálculo de la diferencial de un producto ó de un cociente se puede simplificar diferenciando su logaritmo. Este procedimiento se llama *diferenciación logarítmica.*

**36.** Sea $y = a^x$.

Tomando los logaritmos neperianos de los dos miembros, resulta $ly = x\,la$, y diferenciando

$$\frac{dy}{y} = la\,dx, \qquad da^x = a^x la\,dx.$$

Si $a = e$, resulta $de^x = e^x dx$.

**37.** Suponiendo $u$, $v$ funciones de $x$, sea el determinante

$$F(x) = \begin{vmatrix} u & v \\ w & z \end{vmatrix}.$$

Se tiene $F(x+\Delta x) = \begin{vmatrix} u+\Delta u & v+\Delta v \\ w+\Delta w & z+\Delta z \end{vmatrix}$

$$F(x+\Delta x) =$$

$$= \begin{vmatrix} u & v \\ w & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta u & v \\ \Delta w & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & \Delta v \\ w & \Delta z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ \Delta w & \Delta z \end{vmatrix}.$$

Por consiguiente

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\Delta u}{\Delta x} & v \\ \frac{\Delta w}{\Delta x} & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & \frac{\Delta v}{\Delta x} \\ w & \frac{\Delta z}{\Delta x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\Delta u}{\Delta x} & \frac{\Delta v}{\Delta x} \\ \frac{\Delta w}{\Delta x} & \frac{\Delta z}{\Delta x} \end{vmatrix} \Delta x.$$

En el límite será

$$F'(x) = \begin{vmatrix} u' & v \\ w' & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u & v' \\ w & z' \end{vmatrix}.$$

**38.** Sea $y = \operatorname{sen} x.$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{sen}(x+\Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} =$$

$$= 2\,\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}\cos\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right)$$

$$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx} = \cos x, \qquad d \operatorname{sen} x = \cos x\, dx.$$

Igualmente resulta que

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\operatorname{sen} x, \quad d\cos x = -\operatorname{sen} x\, dx.$$

**39.** Sea $y = \operatorname{tg} x$. Diferenciando la expresión $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, resulta

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Igualmente $$\frac{d \cot x}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \qquad d \cot x = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}.$$

**40.** Sea $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$. Se tendrá $d \sec x = \dfrac{\operatorname{sen} x\, dx}{\cos^2 x}$.

$$dl \operatorname{sen} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cos x\, dx = \cot x\, dx$$

$$d \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\cos x\,(x - \operatorname{tg} x)}{x^2}\, dx.$$

**41.** Sea la función circular inversa $y = \operatorname{arc\,sen} x$; invirtiendo, tenemos $x = \operatorname{sen} y$

$$dx = \cos y\, dy, \qquad dy = \frac{dx}{\cos y} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ó $$d \operatorname{arc\,sen} x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Análogamente se obtiene $d \operatorname{arc\,cos} x = -\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

**42.** Sea $y = \operatorname{arc\,tg} x$, de donde $x = \operatorname{tg} y$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = dx, \qquad d \operatorname{arc\,tg} x = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Análogamente

$$d \operatorname{arc\,cot} x = -\frac{dx}{1 + x^2}.$$

**43.** Función de varias variables independientes. Vamos á extender la fórmula (1) del número 20, demostrada para el caso de una función de una variable independiente al caso en que éstas sean dos ó más, es decir que:

*Dada una función* $u = f(x, y, z)$ *de varias variables independientes, se tiene la relación*

$$\Delta u = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + f'_z \Delta z + \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z,$$

*siendo* $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ *los incrementos de* $x$, $y$, $z$, *y* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *cantidades que se anulan simultáneamente con dichos incrementos.*

En efecto, se tiene

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

$$\Delta u = [f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z)]$$
$$+ [f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z)]$$
$$+ [f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)].$$

Y aplicando el teorema de los incrementos finitos (26)

$$\Delta u = \Delta x f'_x (x + \theta \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$
$$+ \Delta y f'_y (x, y + \lambda \Delta y, z + \Delta z)$$
$$+ \Delta z f'_z (x, y, z + \mu \Delta z).$$

Escribamos ahora

$$f'_x (x + \theta \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f'_x (x, y, z) = \alpha,$$

$$f'_y (x, y + \lambda \Delta y, z + \Delta z) - f'_y (x, y, z) = \beta,$$

$$f'_z (x, y, z + \mu \Delta x) - f'_z (x, y, z) = \gamma,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ tenderán hacia cero al mismo tiempo que $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$. Y sumando estas igualdades, después de haberlas multiplicado respectivamente por $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, se obtiene la fórmula del enunciado.

Por este razonamiento, resulta extendida la definición de la diferencial al caso de varias variables independientes.

Ejemplo: Hallar la diferencial de

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{a - x}}; \quad \text{se tiene} \quad dy = \frac{(3a - 2x)\sqrt{x}\, dx}{2\sqrt{(a - x)^3}}.$$

## § 3.° Funciones implícitas

**44.** Supongamos que la ecuación

$$f(u, v, \ldots) = 0$$

quede satisfecha idénticamente por varias funciones $u$, $v$, $w$, ..... de las variables independientes $x$, $y$, $z$, .....

Siendo el primer miembro una función compuesta de $x$, $y$, ....., cuyo valor es constante é igual á cero, sus derivadas con relación á cada una de estas variables son nulas. Se tendrá pues (empleando la característica $\partial$ para expresar derivadas parciales), que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots\ldots = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \ldots\ldots = 0$$

. . . . . .

Así, *toda identidad* $f(u, v, \ldots\ldots) = 0$ *dará nuevas identidades, igualando á cero las derivadas de su primer miembro con relación á cada una de las variables independientes.*

Una función $f(x, y, \ldots\ldots)$ *queda definida* ó tiene una propiedad dada, *en el entorno de un punto* $(x_0, y_0, \ldots\ldots)$, si se puede determinar un número positivo $h$ tal, que la función quede definida ó goce de la propiedad pedida, para todos los puntos $(x, y, \ldots\ldots)$ en los que $|x - x_0|$, $|y - y_0|$, ..... son $\leqq h$.

Teorema. *Sea* $F(x, y, \ldots\ldots, u)$ *una función de las variables* $x, y, \ldots\ldots, u$ *que se anula en el punto* $(x_0, y_0, \ldots\ldots, u_0)$.

Supongamos: 1.° *que esté definida y admita derivadas parciales continuas* $F'_x, F'_y, \ldots\ldots, F'_u$, *en el entorno de dicho punto;* 2.° *que* $F'_u$ *no se anule en este punto.*

*Se podrá determinar una función de las variables* $x, y, \ldots\ldots$ *definida en el entorno del punto* $(x_0, y_0, \ldots\ldots)$ *que adquiera en*

*este punto el valor* $u_0$, *y que sustituída en vez de* u *en* $F = 0$, *la satisfaga idénticamente. Esta función será única y admitirá las derivadas parciales*

$$-\frac{F'_x}{f'_u}, \quad -\frac{F'_y}{F'_u}, \quad \ldots\ldots$$

En virtud de las hipótesis de la existencia y continuidad de las derivadas parciales $F'_x$, $F'_y$ ....., $F'_u$, se podrá determinar una cantidad positiva $h$ tal, que para todos los puntos $(x, y, \ldots\ldots, u)$ en los que $|x - x_0|$, $|y - y_0|$, ....., $|u - u_0|$ son $\leqq h$, estas derivadas parciales existan y difieran de sus valores iniciales $(F'_x)_0$, $(F'_y)_0$, ....., $(F'_u)_0$ en menos de $\varepsilon$, designando por $\varepsilon$ una cantidad arbitraria, pero que supondremos menor en valor absoluto que $(F'_u)_0$.

Si pues, se designa por A la mayor de las cantidades

$$|(F'_x)_0| + \varepsilon, \quad |(F'_y)| + \varepsilon, \quad \ldots\ldots$$

y por B la cantidad $|(F'_u)| - \varepsilon$, se tendrá, para todos los puntos considerados,

$$|F'_x| < |(F'_x)_0| + \varepsilon < A, \quad |F'_y| < A, \quad \ldots\ldots, \quad |F'_u| > B.$$

Además, $F'_u$ conservará siempre el signo de $(F'_u)_0$.

Esto sentado, supongamos que el número de las variables $x, y, z, \ldots\ldots, u$ sea $n + 1$, y designemos por $k$ el menor de los dos números $h$ y $\frac{B}{m A} h$.

Se tendrá para todos los puntos

$$(x_0 + \Delta x, \quad \ldots\ldots, \quad u_0 + \Delta u) = (x, \quad \ldots\ldots, u)$$

en los que $\Delta x \leqq k$, $\Delta y \leqq k$, ....., $\Delta u \leqq h$,

la relación

$$F(x, y, \ldots\ldots, u) = F(x, y, \ldots\ldots, u) - F(x_0, y_0, \ldots\ldots, u_0)$$

$$= F'_x(x_0 + \theta \Delta x,\ y_0,\ \ldots,\ u_0)\,\Delta x + F'_y(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \theta_1 \Delta y,\ \ldots\ldots,\ u_0)\,\Delta y + \ldots\ldots + F'_u(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ \ldots\ldots,\ u + \theta_m \Delta u)\,\Delta u.$$

Cada uno de los $m$ primeros términos de esta expresión tiene su módulo $< A\,k$. La suma de sus módulos es, pues,

$$< m\,A\,k < B\,h.$$

Pero, por otra parte, este último término tiene su módulo mayor que $B \mid \Delta u \mid$.

Si pues hacemos $\Delta u = \pm h$, este término excederá á la suma de los demás, y dará su signo á la expresión. Por consiguiente el factor

$$F'_u(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ \ldots\ldots,\ u + \theta_m \Delta u)$$

tiene siempre el mismo signo, que es el de $(F'_u)_0$. Luego, si se hace sucesivamente $\Delta u = h$ y $\Delta u = -h$, se obtendrán, para $F(x, y, \ldots\ldots, u)$ dos valores de signo contrario. Pero F es una función continua de $u$ comprendida entre $u_0 - h$ y $u_0 + h$, que no se anulará más que una vez, porque su derivada conserva el mismo signo en todo el intervalo.

Hemos, pues, establecido que á todo sistema de valores de $x, y, \ldots\ldots$ tales, que los módulos de $x - x_0, y - y_0, \ldots\ldots$ no sean superiores á $k$, corresponde un valor único $u$ comprendido entre $u_0 - h$ y $u_0 + h$ y que satisface á la ecuación $F = 0$.

El conjunto de estos valores constituirá una función de $x, y, \ldots\ldots$ completamente definida en este dominio y que se reduce á $u_0$ en el punto $(x_0, y_0, \ldots\ldots)$.

Sean ahora $(x, y, \ldots\ldots,$ y $(x + \Delta x, y + \Delta y, \ldots\ldots)$ dos puntos de este dominio, $u$ y $u + \Delta u$ los valores correspondientes de esta función. Se tendrá

$$0 = F(x + \Delta x, y + \Delta y, \ldots\ldots, u + \Delta u) - F(x, y, \ldots\ldots, u)$$
$$= F'_x(x + \theta \Delta x, y, \ldots\ldots, u)\,\Delta x + F'_y(x + \Delta x, y + \theta_1 \Delta y, \ldots\ldots, u)\,\Delta y + \ldots\ldots + F'_u(x + \Delta x, y + \Delta y, \ldots\ldots, u + \theta_m \Delta u)\,\Delta u.$$

Teniendo el factor multiplicado por $\Delta u$ su módulo mayor que la constante $\beta$, esta ecuación manifiesta que $\Delta u$ tiende hacia cero con $\Delta x$, $\Delta y$, .....

Hagamos $\Delta y = \ldots\ldots = 0$. La ecuación se reduce á

$$0 = F'_x(x + \theta \Delta x, y, \ldots\ldots, u)\,\Delta x + F'_u(x + \Delta x, y, \ldots\ldots, u + \theta_m \Delta u)\,\Delta u;$$

de la que se deduce

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x + \theta \Delta x, y, \ldots\ldots, u)}{F'_u(x + \Delta x, y, \ldots\ldots u + \theta_m \Delta u)},$$

y en el límite,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, \ldots\ldots, u)}{F'_u(x, y, \ldots\ldots, u)}.$$

Las demás derivadas parciales se determinan del mismo modo.

**45.** TEOREMA. *Sean* $F_1, \ldots\ldots, F_n$ *funciones de las* $m + n$ *variables* $x, y, \ldots\ldots; u, v, w, \ldots\ldots$ *que se anulan en el punto* $(x_0, y_0, \ldots\ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots\ldots)$. *Si se supone:* 1.º *que en el entorno de este punto estas funciones admiten derivadas parciales continuas;* 2.º *que el determinante*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u} & \frac{\partial F_n}{\partial v} & \frac{\partial F_n}{\partial w} \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

*no se anula en este punto, se podrá determinar un sistema de funciones de las variables* $x, y, \ldots\ldots$ *definidas en el entorno del punto* $(x_0, y_0, \ldots\ldots)$ *que adquieran respectivamente en este punto los valores* $u_0, v_0, w_0, \ldots\ldots$ *y que sustituídas en lugar de* $u, v, w, \ldots\ldots$ *en las ecuaciones* $F_1 = 0, \ldots\ldots, F_n = 0$ *las satisfagan idénticamente. Este sistema de funciones es único, y estas funciones admiten derivadas parciales.*

Ya que está demostrado este teorema para una ecuación, supongamos que está demostrado para $n$ — 1 ecuaciones.

Para que J sea $\lessgtr o$ en el punto $x_0, y_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots$ es preciso que una al menos de las derivadas

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_0}, \frac{\partial F_1}{\partial v_0}, \frac{\partial F_1}{\partial w_0}, \ldots$$

sea distinta de cero. Sea por ejemplo, $\frac{\partial F_1}{\partial u_0} \lessgtr 0$.

Se podrá, según el teorema anterior, determinar una función $u$ de $x, y, \ldots; v, w, \ldots$ que satisfaga idénticamente á la ecuación $F_1 = 0$ y que admita derivadas parciales en el entorno del punto $x_0, y_0, \ldots; v_0, w_0, \ldots$

Sustituyendo este valor de $u$ en las ecuaciones

$$F_2 = 0, \ldots, F_n = 0,$$

tomarán éstas la forma siguiente

$$\Phi_2 (x, y, \ldots; v, w, \ldots) = 0, \ldots, \quad \Phi_n = 0.$$

Siendo las funciones $\Phi_2, \ldots, \Phi_n$ respectivamente iguales á $F_2, \ldots, F_n$, admitirán en el entorno del punto

$$x_0, y_0, \ldots; v_0, w_0, \ldots,$$

derivadas parciales

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots,$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial v} = \frac{\partial F_2}{\partial v} + \frac{\partial F_2}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}, \ldots$$

El determinante

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} \ldots \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

de las derivadas parciales relativas á $v, w, \ldots$ será, despreciando los términos que se destruyen,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \cdots \\ \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial w} \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \frac{\partial u}{\partial v} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \cdots \\ \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial w} \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial w} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \cdots \\ \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial u} \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \ldots$$

Sustituyendo por $\frac{\partial u}{\partial v}, \frac{\partial u}{\partial w}, \ldots$ sus valores

$$-\frac{\partial F_1}{\partial v} : \frac{\partial F_1}{\partial u}, \quad -\frac{\partial F_1}{\partial w} : \frac{\partial F_1}{\partial u}, \ldots$$

esta expresión se reduce á $J : \frac{\partial F_1}{\partial u}$, y por tener $\frac{\partial F_1}{\partial u}$ en el punto $(x_0, y_0, \ldots; u_0, v_0, w_0, \ldots)$ un valor finito y diferente de cero, J, será también finito y diferente de cero.

Se podrá pues por hipótesis, determinar funciones $v, w, \ldots$ de las variables independientes $x, y, \ldots$ que satisfagan idénticamente á las ecuaciones $\Phi_2 = 0, \Phi_3 = 0, \ldots$, que se reducen á $v_0, w_0, \ldots$ para $x = x_0, y = y_0, \ldots$ y que admiten derivadas parciales en el entorno de este punto.

Sustituyendo estos valores de $v, w, \ldots$ en la expresión de $u$, se obtendrán para $u, v, w, \ldots$ funciones de $x, y, \ldots$ que satisfagan á las condiciones pedidas.

Se dá el nombre de *funciones implícitas* á las así definidas por un sistema de ecuaciones no resueltas

$$\begin{cases} F_1 (x, y, \ldots; u, v, \ldots) = 0 \\ \cdots \\ F_n (x, y, \ldots; u, v, \ldots) = 0. \end{cases}$$

## § 4.° Determinantes funcionales

**46.** Se llama *determinante funcional* de un sistema de funciones

$$u_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots; \quad u_n = f_n(x_1, \ldots, x_n)$$

de $n$ variables independientes, al determinante

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Teorema. *Para que las funciones* $u_1, \ldots, u_n$ *no sean independientes, es necesario y suficiente que su determinante funcional* J *sea idénticamente nulo.*

Sean las funciones

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad u_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad u_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)$$

y su determinante funcional

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Si $u_1$, $u_2$, $u_3$, no son independientes, existirá entre estas funciones una relación

$$u_1 = \varphi(u_2, u_3),$$

y derivando respecto á $x_1$, $x_2$, $x_3$, se tendrá:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_3}\frac{d u_3}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

Eliminando $\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial u_3}$, resulta J = o.

La condición enunciada es pues necesaria. Para demostrar que es suficiente, sea J = o. Si todos los determinantes primeros menores no son nulos, tendremos, por ejemplo:

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \gtrless o.$$

Las dos últimas ecuaciones propuestas

$$u_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad u_3 = f_3(x_1, x_2, x_3) \tag{2}$$

determinarán $x_2$ y $x_3$ como funciones implícitas de $x_1$, $u_2$ y $u_3$; y derivándolas con respecto á $x_1$, se tendrá:

$$\left.\begin{aligned} o &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} \\ o &= \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

que, por no ser nulo $J_1$, determinarán las derivadas parciales

$$\frac{\partial x_2}{d x_1}, \quad \frac{\partial x_3}{d x_1}.$$

Pero si en la ecuación

$$u_1 = f_1(x_1, x_2, x_3)$$

se sustituyen las funciones $x_2$ y $x_3$ por sus valores en $x_1$, $u_2$, $u_3$, se tendrá

$$u_1 = \psi(x_1, u_2, u_3) \tag{4}$$

y por consiguiente

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial x_1} \tag{5}$$

Si ahora se eliminan $\frac{\partial x_2}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial x_3}{\partial x_2}$ entre las ecuaciones (3) y (5), resultará

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0,$$

es decir,

$$J - J_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0.$$

Siendo nulo J, sin serlo $J_1$, es necesario que $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$ sea nulo, es decir, que no figure $x$ en el segundo miembro de la ecuación (4), que se reduce á

$$u_1 = \psi(u_2, u_3).$$

Análogamente se razonará en el caso de ser nulos todos los determinantes primeros, sin serlo todos los segundos, ó sea todos los elementos del determinante propuesto, por ejemplo, $\frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ (*),

(*) Véase *Rouchè et Levi.* Analyse infinitesimal t. I pág. 103.

y llegaremos á una relación

$$u_2 = \psi\,(u_3),$$

que indica que las funciones $u_1$, $u_2$, $u_3$, no son independientes.

Ejemplo: Sean las funciones

$$u_1 = x_1 + 2\,x_2 + x_3$$

$$u_2 = x_1 - 2\,x_2 + 3\,x_3$$

$$u_3 = 2\,x_1\,x_2 - x_1\,x_3 + 4\,x_2\,x_3 - 2\,(x_2)^2.$$

Su determinante funcional es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2\,x_2 - x_3 & x_1 + 2\,x_3 & -x_1 + 4\,x_2 - 4\,x_3 \end{vmatrix},$$

cuyo desarrollo es la expresión idénticamente nula:

$$4\,(2\,x_2 - x_3) - 2\,(x_1 + 2\,x_3) + 2\,(-x_1 + 4\,x_2 - 4\,x_3);$$

luego las funciones propuestas no son independientes, y por ser nulo el determinante que resulta de suprimir la última línea y la última columna, solo existe una relación.

El determinante (1) se llama *Jacobiano* del sistema de funciones $u_1$, $u_2$, $u_3$.

## § 4.° Derivadas y diferenciales de diversos órdenes

**47.** Funciones de una variable. Siendo la diferencial $dy$ de una función $y$ de $x$ también función de $x$, su diferencial será una cantidad cuya relación con respecto á $dx$ sea igual al límite de la relación del incremento infinitamente pequeño de $dy$ al incremento correspondiente de $x$.

Para mayor sencillez, se conserva el mismo valor al incremento de $x$, es decir, se supone $dx$ constante, y se representa la diferencial de $dy$ por $ddy$ ó $d^2y$, que se llama *diferencial segunda* de $y$ con relación á $x$. Análogamente se designa á la diferencial de $d^2y$ por $d^3y$ y así sucesivamente.

Antes de pasar adelante, debemos considerar las funciones como *pares* ó *impares*.

*Función par* de $x$ es la que no cambia al sustituirse $x$ por $-x$, de modo que se tiene

$$\varphi(-x) = \varphi(x),$$

por ejemplo la función *cos* $x$ es par.

*Función impar* es la que cambia de signo, cuando se cambia $x$ en $-x$. Así

$$\psi(-x) = -\psi(x);$$

*sen* $x$ es una función impar.

La derivada de orden par ó impar de una función par es una función también par ó impar, y la derivada de orden par ó impar de una función impar es una función impar ó par.

Ya sabemos que

$$dy = F'(x)\,dx;$$

pero la diferencial de $F'(x)\,dx$ será el producto de $dx$ por su derivada respecto á $x$, que es $F''(x)\,dx$, pues $dx$ es constante. Luego

$$d^2y = F''(x)\,dx^2.$$

Tendremos de igual modo que

$$d^3y = F'''(x)\,dx^3, \quad \ldots\ldots, \quad d^ny = F^{(n)}x\;dx^n,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F''(x), \quad \frac{d^3y}{dx^3} = F'''(x), \quad \ldots\ldots$$

Así, una diferencial de un orden $n$ cualquiera es, en general, un infinitamente pequeño de orden $n$, cuando se toma $dx$ como infinitamente pequeño principal; y la determinación de las derivadas sucesivas de una función no difiere de la determinación de las diferenciales.

De manera que siendo la diferencia $\Delta y$ de la función $y$, también una función de $x$, tiene una diferencia $\Delta\Delta y$ ó $\Delta^2 y$, y así sucesivamente; y vamos á demostrar que

$$\lim \frac{\Delta^{(n)}y}{\Delta x^n} = \frac{d^{(n)}y}{dx^n}.$$

En efecto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = F'(x) + \varepsilon,$$

anulándose $\varepsilon$ cuando $\Delta x = 0$.

Si ahora $x$ adquiere un incremento $\Delta x$, y se divide por $\Delta x$, el primer miembro se reducirá á $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$; y en cuanto al segundo, vemos que es preciso tomar su derivada con relación á $x$ y agregarle una cantidad que se anule con $\Delta x$.

Pero anulándose $\varepsilon$ con $\Delta x$, cualquiera que sea $x$, su derivada se anulará al mismo tiempo, y por consiguiente el segundo miembro diferirá de $F''(x)$ en una cantidad que se anula con $\Delta x$; designándola por $\varepsilon_1$ tendremos:

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = F''(x) + \varepsilon_1.$$

De igual manera tendremos

$$\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = F'''(x) + \varepsilon, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = F^{(n)}(x) + \varepsilon_{n-1},$$

y en el límite

$$\lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{d^n y}{d x^2}.$$

En particular, tendremos:

1.° $$y = x^m$$

$$\frac{d y}{d x} = m x^{m-1}, \quad \frac{d^2 y}{d x^2} = m (m - 1) x^{m-2}$$

$$\frac{d^m y}{d x^m} = m (m - 1) \ldots\ldots (m - n + 1) x^{m-n}.$$

2.° Sea $$y = l x$$

se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -1 \cdot x^{-1},$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1}\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1)\, x^{-n}.$$

3.° Sea $y = a^x$; se tiene

$$\frac{dy}{dx} = a^x\, la, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = a^x\,(la)^2, \ \ldots\ldots, \quad \frac{d^n y}{dx^n} = a^n\,(la)^n.$$

En particular $$\frac{d^n e^x}{dx^n} = e^x.$$

4.° Sea $y = \operatorname{sen}(x + \alpha)$

siendo $\alpha$ una constante:

Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x+\alpha) = \operatorname{sen}\left(x + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \operatorname{sen}\left(x + \alpha + 2\,\frac{\pi}{2}\right)$$

. . . . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \operatorname{sen}\left(x + \alpha + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

En particular, para $\alpha = 0$ y $\alpha = \frac{\pi}{2}$ tendremos

$$\frac{d^n \operatorname{sen} x}{dx^n} = \operatorname{sen}\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right), \quad \frac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

5.ª Sea $y = \operatorname{arc\,tg} x$; se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \cos y \,.\, \cos y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\,2\cos y \operatorname{sen} y \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} 2y \cos^2 y,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\,(2\cos^2 y \cos 2y - 2\cos y \operatorname{sen} y \operatorname{sen} 2y)\cos^2 y$$

$$= -\,2\cos 3y \cos^3 y,$$

y en general

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\cos^n y \operatorname{sen} n\left(\frac{\pi}{2} - y\right).$$

**48.** FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES INDEPENDIENTES. En el caso de ser $u$ una función de varias variables $x$, $y$, $z$ independientes, $\frac{\partial u}{\partial x}$ ó $\frac{\partial u}{\partial y}$ ó $\frac{\partial u}{\partial z}$ serán nuevas funciones de $x$, $y$, $z$, pudiéndose proceder con ellas como se procedió con $u$, y se obtendrán las nuevas funciones

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x}, \quad \text{etc.}$$

que se escriben también del modo siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \ldots\ldots$$

TEOREMA. *El resultado final de varias derivaciones ó diferenciaciones no altera, cualquiera que sea el orden en que se verifican respecto á las variables,* es decir, que

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

En efecto, haciendo variar $x$ sola, se tiene

$$f(x+h, y) - f(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\right) h.$$

Cambiando $y$ en $y + k$, y conservando las notaciones empleadas, se tiene

$$f(x + h, y + k) - f(x, y + k) = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y} k + \theta k \right) + (\alpha + \alpha' h) k.$$

Restando las dos ecuaciones, y dividiendo por $h k$, resulta

$$\frac{f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y)}{hk} = \frac{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial y} + \theta + \alpha'.$$

Si se hiciera variar á la inversa, esto es, primero $y$ en $k$ y luego $x$ en $h$, se obtendría la misma ecuación, salvo estar permutadas la $x$ con la $y$. El primer miembro será el mismo y el segundo será

$$\frac{\partial \frac{\partial u}{\partial y}}{\partial x} = \theta_1 + \alpha'_1,$$

que tendrá el mismo límite que el anterior;

luego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

**49.** Diferenciales totales. La diferencial primera total de $u$ es

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Diferenciando nuevamente, se tendrá

$$d^2 u = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dy \right) dx + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right) dy = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

y en general

$$\partial^m u = \frac{\partial^m u}{\partial x^m}\, dx^m + m\, \frac{\partial x^{m-1}\, \partial y}{\partial^m u} + \ldots\ldots + \frac{\partial^m u}{\partial y^m}\, dy^m$$

ó, en forma simbólica,

$$d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^m u.$$

Para demostrar la generalidad de esta ley, hay que probar que, si es cierta para un número $m$ de variables independientes, lo será para $m + 1$.

Si diferenciamos la última fórmula, obtendremos un resultado de la forma

$$d^{m+1} f = \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}\, dx^{m+1} + A_1\, \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^m\, \partial y}\, dx^m\, dy + \ldots\ldots$$

$$+ A_n\, \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-n}\, \partial y^n}\, dx^{m+1-n}\, dy^n + \ldots\ldots + \frac{\partial^{m+1} f}{\partial y^{m+1}}\, dy^{m+1}.$$

Pero el término general

$$A_n\, \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1-n}\, \partial y^n}\, dx^{m+1-n} dy^n$$

proviene de la diferenciación del término $dx^{m-n} dy^n$, respecto á $x$ y de la diferenciación con respecto á $y$ del término precedente.

Los coeficientes de estos términos son

$$\frac{m\,(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{n!} \text{ y } \frac{m\,(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)}{(n-1)!};$$

luego $A_n$ será igual á la suma de estas dos expresiones, es decir, á

$$\frac{m\,(m-1)\ldots\ldots(m-n+2)}{(n-1)!}\left(1 + \frac{m-n+1}{n}\right)$$

$$= \frac{(m+1)\, m\ldots\ldots(m-n+2)}{n!},$$

lo que demuestra lo que nos proponíamos.

**50.** FUNCIONES COMPUESTAS. Sea

$$u = f(x, y, z)$$

una función en la que $x, y, z$ son funciones de una ó varias variables independientes.

Tenemos que

$$d^2u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz\right)^{(2)} + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial u}{\partial y}\,d^2y + \frac{\partial u}{\partial z}\,d^2z\right]$$

. . . . . .

OBSERVACIÓN. Cuando las funciones $x, y, z$ ..... son lineales, las diferenciales totales de cualquier orden se expresan como si dichas funciones fuesen variables independientes.

**51.** FÓRMULA DE LEIBNITZ. Tenemos

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$d^2(uv) = d(vdu) + d(udv) = vd^2u + 2dudv + d^2v\,u$$

. . . . . .

$$d^n(uv) = vd^nu + C_n^1\,dvd^{n-1}u + \ldots\ldots + d^nv\,u.$$

Para demostrar esta ley, basta probar que si es cierta para el orden $n$ lo es para el orden $n + 1$.

Diferenciando una vez más el último desarrollo, tenemos

$$d^{n+1}(uv) = vd^{n+1}u + \ldots\ldots + (C_n^{k-1} + C_n^k)\,vd^{n+1-k} + \ldots\ldots + d^{n+1}v\,u$$

y por verificarse que

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$$

resulta que

$$d^{n+1}(uv) = vd^{n+1}u + \ldots\ldots + C_{n+1}^{k}\,d^mvd^{n+1-k}u + \ldots\ldots + d^{n+1}v\,u,$$

expresión que es la anterior en la que se ha sustituido $n$ por $n + 1$.

Se da á esta expresión la forma simbólica

$$d^n (uv) = (du + dv)^n .$$

EJEMPLO 1.° Sea la función

$$y = e^{ax} u.$$

La fórmula de Leibnitz da

$$y^{(n)} = (e^{ax} + u)^n = a^n e^{ax} u + C_n^1 a^{n-1} e^{ax} u'_x + \ldots\ldots + e^{ax} u_x^{(n)}$$

ó en forma simbólica

$$y^{(n)} = e^{ax} (a + f'_x) u.$$

EJEMPLO 2.° Sea

$$y = e^{ax} \cos bx.$$

Recordando que

$$\frac{d^n \operatorname{sen} x}{dx^n} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad \frac{d^n \cos x}{dx^n} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

y aplicando la fórmula de Leibnitz, tenemos que

$$y^{(n)} = e^{ax}\left[a^n \cos bx + C_n^1 a^{n-1} b \cos\left(bx + \frac{\pi}{2}\right) + \ldots\ldots + b^n \cos\left(bx + n\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Haciendo $a = k \cos l$, $b = k \operatorname{sen} l$, resulta

$$y' = e^{ax} (a \cos bx - b \operatorname{sen} bx) = k e^{ax} \cos (bx + l),$$

y en general,

$$y^{(n)} = k^n e^{ax} \cos (bx + nl).$$

EJEMPLO 3.° Sea

$$y = \operatorname{tg} x \quad \text{ó} \quad y \cos x = \operatorname{sen} x.$$

Tenemos, aplicando la fórmula de Leibnitz,

$$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=y\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+y'\cos x$$

$$\operatorname{sen}\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)=y\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right)+2y'\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+y''\cos x,$$

y estas fórmulas darán sucesivamente los valores de $y'$, $y''$, $y'''$, ....

Si se quiere obtener los valores para $x=0$, se tiene para $y=\operatorname{tg} x$, por ejemplo,

$$y'_0=1,\quad y'''_0-3y'_0=-1,\quad y_0^{v}-10y'''_0+5y'_0=1$$

de donde $\qquad y'''_0=2,\quad y_0^{v}=16,\ \ldots\ldots$

## § 5.° Cálculo directo de las derivadas de un orden cualquiera.

**52.** I Sea $y=(ax+b)^m$. Se tiene

$$y^{(n)}=m\,(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)\,a^n\,(ax+b)^{m-n}.$$

En particular tenemos, empleando la notación de Cauchy,

$$D_x^n\frac{1}{ax+b}=(-1)^n\,n!\,\frac{a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$D_x^n\frac{1}{\sqrt{ax+b}}=\frac{(-1)^n}{2^n}\,1\cdot3\cdot5\,(2n-1)\,\frac{a^n}{(ax+b)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

II Sea $\quad y=\dfrac{1}{1-x^2}$, que puede escribirse

$$y=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x}.$$

Tendremos, aplicando los resultados del problema anterior,

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}D_x^n\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}D_x^n\frac{1}{1+x}$$

$$=\frac{n!}{2}\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}\right].$$

III Sea $y = \text{arc sen } x$.

La $n^{\text{sima}}$ derivada $y^{(n)}$ es igual á la $(n-1)^{\text{sima}}$ derivada de

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Se tendrá, pues,

$$y^{(n)} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot D_x^{n-1}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$+ C_{n-1}^1 D_x(1+x)^{-\frac{1}{2}} D_x^{n-2}(1-x)^{-\frac{1}{2}} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-3)}{2^{n-1}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left[ \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1} + \left(\frac{-1}{1+x}\right)^{n-1} \right]$$

$$+ (-1) C_{n-1}^2 \frac{1^2 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-5)}{2^{n-1}} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\times \left[ \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-3} + \left(\frac{-1}{1+x}\right)^{n-3} \right] + \ldots\ldots$$

VI Sea la función

$$y = \frac{x}{e^x - 1},$$

cuyas derivadas de los diversos órdenes se trata de calcular para $x = 0$. Podemos escribir

$$x = (e^x - 1)y, \qquad (1)$$

lo que da, diferenciando $n$ veces,

$$\left.\begin{aligned}
1 &= e^x y + (e^x - 1)y', \\
0 &= e^x y + 2e^x y' + (e^x - 1)y'', \\
0 &= e^x y + 3e^x y' + 3e^x y'' + (e^x - 1)y''' \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= e^x y + C_n^1 e^x y' + C_n^2 e^x y'' + \ldots\ldots + (e^x - 1)y^{(n)}.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

La resolución de estas ecuaciones dará el valor de la derivada de cualquier orden de $y$, para un valor dado de $x$.

Si se hace ahora $x = 0$, el coeficiente $e^x - 1$ de la derivada de orden superior, en cada ecuación, se anula. Así, haciéndose idéntica la ecuación (1), la primera ecuación (2) dará el valor de $y_0$, la segunda el de $y'_0$, y así sucesivamente.

Observaremos que, á partir de la segunda, las derivadas de la función $\frac{x}{e^x - 1}$ son las mismas que las de la función $\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2}$, que es una función par, y cuyas derivadas de orden impar se anulan con $x$; luego los valores de $y'''_0, y^{v}_0, \ldots$ serán nulos, lo que hará desaparecer á la mitad de los términos de las ecuaciones (2).

En fin, hechas las reducciones, dos ecuaciones consecutivas, contienen las mismas incógnitas y deben ser, por consiguiente, idénticas entre sí; luego las ecuaciones se dividen en dos sistemas equivalentes que determinan las mismos valores de los incógnitas. Observando que las dos primeras ecuaciones (2), para $x = 0$, dan $y_0 = 1$, $y'_0 = -\frac{1}{2}$, las ecuaciones equivalentes se dividirán en los dos sistemas siguientes, comprendiendo, el uno, las ecuaciones de lugar par y el otro las de lugar impar, y empleando la notación $(n)_m$ de las combinaciones

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2} = (3)_2 y''_0 \\
&\frac{3}{2} = (5)_2 y''_0 + (5)_4 y^{IV}_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{2n-3}{2} = (2n-1)_2 y''_0 + (2n-1)_4 y^{IV}_0 + \ldots\ldots \\
&\qquad\qquad + (2n-1)_{2n-2} y_0^{(2n-2)}.
\end{aligned}\right\} (3)$$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= (4)_2 y''_0, \\ 2 &= (6)_2 y''_2 + (6)_4 y_0^{IV}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ n-1 &= (2n)_2 y''_0 + (2n)_4 y_0^{IV} + \ldots,. + (2n)_{2n-2} y_0^{(2n-2)}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Los valores de los determinantes respectivos son

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots\ldots (2n-1) \quad \text{y} \quad \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots\ldots 2n}{2^{n-1}}.$$

Si se hace $y_0^{(2n)} = (-1)^{n-1} B_{2n-1}$,

los números obtenidos, serán los *números de Bernoulli*

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{1}{42}, \quad B_7 = \frac{1}{30}, \ldots\ldots$$

## § 5.º Ejercicios

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $y = \frac{a}{x^4}$ | $\frac{dy}{dx} = -\frac{4a}{x^5}$ |
| 2 | $y = \frac{\sqrt{a^3}}{a-x}$ | $\text{»} = \frac{(3a-2x)\sqrt{x}}{2\sqrt{(a-x)^5}}$ |
| 3 | $y = \left(a - \frac{1}{x}\right)^3$ | $\text{»} = \frac{3(ax-1)^2}{x^4}$ |
| 4 | $y = \frac{1}{(b-x^p)^n}$ | $\text{»} = \frac{pnx^{p-1}}{(b-x^p)^{n+1}}$ |
| 5 | $y = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{(1-x)^3}$ | $\text{»} = -\frac{4}{x^3} + \frac{9}{(1-x)^4}$ |
| 6 | $y = (5+3x)\sqrt{6x-5}$ | $\text{»} = \frac{27x}{\sqrt{6x-5}}$ |
| 7 | $y = (a+bx)(c+ex)$ | $\text{»} = ae + bc + 2bex$ |

8 $y = \dfrac{1}{a^2 - ax + x^2}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a - 2x}{(a^2 - ax + x^2)^2}$

9 $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$ $\qquad » = \dfrac{2}{(1 - x)^2}$

10 $y = \dfrac{a + \sqrt{x}}{a - \sqrt{x}}$ $\qquad » = \dfrac{a}{\sqrt{x}\,(a - \sqrt{x})^2}$

11 $y = e^p e^{qx}$ $\qquad » = x^{p-1} e^{qx} (p + qx)$

12 $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ $\qquad » = -\dfrac{2x}{(e^x - 1)^2}$

13 $y = l \dfrac{a + x}{a - x}$ $\qquad » = \dfrac{a}{a^2 - x^2}$

14 $y = (1 - x)\, l(1 - x)$ $\qquad » = -1 - l(1 - x)$

15 $y = e^{\cos x}$ $\qquad » = -\operatorname{sen} x e^{\cos x}$

16 $y = a^{\operatorname{sen} x}$ $\qquad » = \cos x\, la\, a^{\operatorname{sen} x}$

17 $y = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} (x - a)$ $\qquad » = \operatorname{sen} (2x - a)$

18 $y = l \operatorname{sen} (px + q)$ $\qquad » = p \cot (px + q)$

19 $y = l \operatorname{tg} x$ $\qquad » = \dfrac{2}{\operatorname{sen} 2x}$

20 $y = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$ $\qquad » = -\dfrac{1}{(1 + x)\sqrt{2x - 2x^2}}$

21 $y = \operatorname{arc} (\cos = a \operatorname{tg} x)$ $\qquad » = -\dfrac{a}{\cos^2 x \sqrt{1 - a^2 \operatorname{tg}^2 x}}$

22 $y = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{1}{x}$ $\qquad » = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

23 $y = \operatorname{arc} (\operatorname{sen} = m \cos x)$ $\qquad » = -\dfrac{m \operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - m^2 \cos^2 x}}$

24 $y = a^{b^x}$ $(y = a^v\ ,\ v = b^x)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = la\ .\ lba^{b^x}\ b^x$

25 $y = \dfrac{x}{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$ $\qquad » = \dfrac{a^2}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$

26 $y = llx = l_2 x$ $\qquad » = \dfrac{1}{xlx}$

27 $y = l_n x$ $\qquad » = \dfrac{1}{xlxl_2 x \ldots\ldots l_{n-1} x}$

28 $y = e^{\text{arc sen } x}$ $\qquad » = \dfrac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}\, e^{\text{arc sen } x}$

29 $y = x^{\text{sen } x}$ $\qquad » = x^{\text{sen } x}\left(\cos x lx + \dfrac{\text{sen } x}{x}\right)$

30 $y = \dfrac{1}{2ai}\, l\, \dfrac{x - ai}{x + ai},\ i = \sqrt{-1}$ $\qquad » = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$

31 $y = \dfrac{1}{a}\ \text{arc tg}\ \dfrac{x}{a}$ $\qquad » = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$

32 $y = u^v$ $(u, v$ func. de $x)$ $\qquad dy = u^v\left(\dfrac{v}{u}\, du + ludv\right)$

33 $u = l\ \text{tg}\ \dfrac{x}{y}$ $\qquad du = \dfrac{2\,(ydx - xdy)}{y^2\ \text{sen}\ \dfrac{2x}{y}}$

34 $1 + xy = l\,(e^{xy} + e^{-xy})$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y}{x}$

35 $y = 1 + xe^y$ $\qquad » = \dfrac{e^y}{2 - y}$

36 $x\ \text{sen}\, y - \cos y + \cos 2y = 0$

$$» = \frac{\text{sen}^2 y}{\text{sen}\, y\ \text{sen}\, 2y + \cos y - 1}$$

37 $\begin{cases} x^3+y^3+z^3-2xyz=0 \\ x+y+z=a \end{cases}$ $\quad \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z-x}{y-z}, \quad \dfrac{dz}{dy}=\dfrac{x-y}{y-z}$

38 $(x+y)^3-axy=0$ $\quad \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{x}\dfrac{2x-y}{2y-x}$

39 $y=x\,(x-a)\sqrt{x-b}$ $\quad » = \dfrac{5x^2-3ax-4bx+2ab}{2\sqrt{x-b}}$

40 $y=\operatorname{sen} x^x$ $\quad » = \operatorname{sen} x^x \left\{ l \operatorname{sen} x + x \cot x \right\}$

41 $y=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1-x}{1+x}}$ $\quad » = \dfrac{2}{(1+x)^2}\left\{1 - l\dfrac{1+x}{1-x}\right\}$

42 $y=(x^{x-1})^{x-2}$ $\quad » = (x^{x-1})^{x-2}\left\{(2x-3)\,lx + \dfrac{(x-1)\,(x-2)}{x}\right\}$

43 $u=x^{y^z}$ $\quad » = y^x x^{y^z}\left(lylzdz + \dfrac{x}{y}lzdy + \dfrac{dz}{z}\right)$

44 $u=e^{xyz}$ $\quad \left(\text{hallar } \dfrac{d^3u}{dxdydz}\right) = (1+3xyz+x^2y^2z^2)\,e^{xyz}$

45 $y=\cos^2 x$ $\quad \dfrac{d^ny}{dx^n}=2^{n-1}\cos\left(2x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$

46 $y=\dfrac{1+x}{1-x}$ $\quad » = 2\dfrac{n\,(n-1)\,\ldots\ldots\,3\,.\,2\,.\,1}{(1-x)^{n+1}}$

47 $y=(\text{arc sen } x)^2$ $\quad$ (para $x=0$)

$$\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0 = 0 \qquad \text{para } n \text{ par}$$

$$\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0 = 2\,.\,2^2\,.\,4^2\,\ldots\ldots\,(n-1)^2 \qquad (n \text{ impar})$$

48 $y = (a - bx)^p$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-b)^n p\,(p-1)\,\ldots\,(p-n+1)\,(a-bx)^{p-n}$$

49 $y = \dfrac{1}{a^2 + b^2x^2}$ (para $n$ impar)

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \,\ldots\, n b^n}{a\,(a^2 + b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \operatorname{sen}\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{bx}\right]$$

50 $u = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$ hallar $\dfrac{d^2u}{dx\,dy}$ y $\dfrac{d^4u}{dx^2dy^2}$

soluc: $\dfrac{d^2u}{dxdy} = \dfrac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\dfrac{d^4u}{dx^2dy^2} = \dfrac{15xy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{7}{2}}}$.

51 $y = e^{x \operatorname{sen} a} \operatorname{sen}(x \cos a)$.

*Solución:* $\dfrac{d^n y}{dx^n} = e^{x \operatorname{sen} a} \operatorname{sen}\left(x \cos a - na + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

52 $y = (a - bx)^m \operatorname{sen}(a + bx)$.

*Solución:* El teorema de Leibnitz da

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^m m\,(m-1)\,\ldots\,(m-n+1)\,b^n\,(a-bx)^{m-n}$$

$$\left[\operatorname{sen}(a+bx) - C_n^1 \frac{a-bx}{m-n+1} \operatorname{sen}\left(a+bx+\frac{\pi}{2}\right) + C_n^2 \frac{(a-bx)^2}{(m-n+1)(m-n+2)} \operatorname{sen}\left(a+bx+2\frac{\pi}{2}\right) - \ldots\ldots\right]$$

53 $u = l \operatorname{sen} \dfrac{x}{y}$, $du = \dfrac{1}{y^2}(y\,dx - x\,dy) \cot \dfrac{x}{y}$.

54 $u = x^3 + y^3 + z^3$, $d^3u = 6\,(dx^3 + dy^3 + dz^3)$.

# CAPÍTULO V

## Cambio de variables

### § 1.° Teoría

**58** El problema llamado *cambio de variables* tiene por objeto, dada una expresión que contiene una ó varias funciones, sus variables y sus derivadas, calcular la misma expresión en función de nuevas funciones, de nuevas variables y de las derivadas de estas nuevas funciones, hallándose ligadas las nuevas variables á las antiguas por un número suficiente de ecuaciones.

A este problema corresponde en Geometría el cambio de coordenadas.

Problema 1.° *Sea* $y = F(x)$ *una función de* x *cuyas derivadas sucesivas* son $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..... *Supongamos que* x, *en vez de ser una variable independiente, sea función de una nueva variable* t, *y sean* $x', x'', \ldots\ldots y', y'', \ldots\ldots$ *las derivadas sucesivas de* x *y de* y *con relación á* t.

*Se trata de hallar las relaciones que existen entre*

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{d^2x}, \ldots\ldots, x', x'', \ldots\ldots, y', y'', \ldots\ldots$$

Tendremos sucesivamente

$$y' = \frac{dy}{dx}\,x', \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}\,x'^2 + \frac{dy}{dx}\,x'',$$

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}\,x'^3 + 3\,\frac{d^2y}{dx^2}\,x'\,x'' + \frac{dy}{dx}\,x'''$$

. . . . . .

Resolviendo estas ecuaciones respecto á $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'\,y''-y'\,x''}{x'^3}\\ &\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{x'\,(x'\,y'''-y'\,x''')-3x''\,(x'\,y''-y'\,x'')}{x'^5}\end{aligned}\right\}(1)$$

Representando por $d_1x, d_1^2x, \ldots\ldots, d_1y, d_1^2y$ las diferenciales sucesivas de $x$ é $y$ respecto á $t$, se tendrá

$$x'=\frac{d_1x}{dt},\quad y'=\frac{d_1y}{dt},\quad x''=\frac{d_1^2x}{dt^2},\quad \ldots\ldots$$

ó bien

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'}{x'}=\frac{d_1y}{d_1x}.$$

De modo que la derivada primera no altera de forma. La derivada segunda se escribirá así:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d_1x\,d_1^2y-d_1y\,d_1^2x}{d_1x^3}.$$

PROBLEMA 2.° *Sea* $y=F(x)$ *y hagamos*

$$x=f(t,u),\quad y=\varphi(t,u). \qquad (2)$$

*Las tres ecuaciones permiten considerar á* t *como la sola variable independiente.*

*Expresar* $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\ldots$ *en función de* t, u, $\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \ldots\ldots$

Tendremos sucesivamente

$$x'=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt},\quad y'=\frac{\partial \varphi}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{du}{dt}$$

$$x''=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt^2}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dt^2},$$

$$y''=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}+2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt^2}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{d^2u}{dt^2},$$

. . . . . .

**54.** Aplicación. Transformar la expresión

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y''},$$

siendo $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$, se tendrá

$$x' = \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \operatorname{sen} \theta \qquad y' = \frac{d\rho}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + \rho \cos \theta$$

$$x'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \cos \theta - 2 \frac{d\rho}{d\theta} \operatorname{sen} \theta - \rho \cos \theta$$

$$y'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2} \operatorname{sen} \theta + 2 \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \operatorname{sen} \theta .$$

En virtud de (1) será

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}.$$

Por las transformaciones será

$$x'^2 + y'^2 = \frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \rho^2$$

$$x'y'' - y'x'' = \left(\frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \operatorname{sen} \theta\right) \left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2} \operatorname{sen} \theta + 2 \frac{d\rho}{d\theta} \cos \theta - \rho \operatorname{sen} \theta\right) - \left(\frac{d\rho}{d\theta} \operatorname{sen} \theta + \rho \cos \theta\right)$$

$$\left(\frac{d^2\rho}{d\theta^2} \cos \theta - 2 \frac{d\rho}{d\theta} \operatorname{sen} \theta - \rho \cos \theta\right) = 2 \frac{d\rho^2}{d\theta^2} - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho^2$$

$$R = \frac{\left(\frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{2 \frac{d\rho^2}{d\theta^2} - \rho \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \rho^2}.$$

PROBLEMA 3.º *Sea* z *una función de dos variables* x, y. *Supongamos además que* $x = f(t, u)$, $y = \varphi(t, u)$, *siendo* u *y* t *dos nuevas variables. Se trata de expresar las derivadas* x', x'', ..... *de* x *con respecto á* y *en función de las derivadas* y', y'', ..... *con respecto á* $x$.

Se tiene inmediatamente que

$$x' = \frac{1}{y'}.$$

Derivando enseguida con respecto á la nueva variable independiente, y observando que $y', y''$, son funciones de $x$, que es función de $y$, resultará

$$x'' = -\frac{y''}{y'^2}\,x' = -\frac{y''}{y'^3}$$

$$x''' = \left(-\frac{y'''}{y'^3} + \frac{3y''^2}{y'^4}\right)x' = \frac{3y''^2 - y'y'''}{y'^5}.$$

PROBLEMA 4.º *Sea* z *una función de dos variables* x, y. *Supongamos* $x = f(t, u)$, $y = \varphi(t, u)$, *siendo* t *y* u *dos nuevas variables. Se trata de expresar las derivadas parciales*

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \ldots\ldots$$

*en función de* t, u, $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, ,....

Siendo $z$ función de $x$ é $y$, que son funciones de $t$ y $u$, obtendremos las derivadas parciales sucesivas:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},\quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (3)$$

Y observando que $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ son funciones de $x$ é $y$, que son funciones de $u$ y $t$.

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\\ &\quad+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\\ &\quad+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\end{aligned}\right.$$

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial u} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t}\right)\\ &\quad+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial u}+\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial^2 y}{\partial t\partial u}\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\\ &\quad+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}.\end{aligned}\right.$$

Las ecuaciones (3) se podrán resolver respecto á $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$. Enseguida, sustituyendo estos valores en las (4), (5) y (6), podremos hallar los valores de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, y así sucesivamente.

Ejemplo: Sea el sistema de ecuaciones

$$x = at + bu + cv,\quad y = a't + b'u + c'v,\quad z = a''t + b''u + c''v,$$

suponiendo que las constantes $a, b, c$ se eligen de modo que constituyan un *sistema ortogonal*, es decir tal, que

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + u^2 + v^2.$$

Esta ecuación conduce al sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, & ab + a'b' + a''b'' &= 0, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, & bc + b'c' + b''c'' &= 0, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, & ca + c'a' + c''a'' &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ó su equivalente que corresponde al sistema inverso del propuesto

$$\begin{aligned} t &= ax + a'y + a''z, \\ u &= bx + b'y + b''z, \\ v &= cx + c'y + c''z, \end{aligned}$$

esto es,

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1, & aa' + bb' + cc' &= 0, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1, & a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1, & a''a + b''b' + c''c &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Sea V una función cualquiera de $x$, $y$, $z$. Las dos expresiones

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{dz^2}$$

que se presentan en muchos problemas, son los *parámetros diferenciales*, según Lamé, los cuales pueden expresarse por medio de las derivadas parciales de V respecto á $t$, $u$, $v$; y se tiene

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a\frac{\partial V}{\partial x} + a'\frac{\partial V}{\partial y} + a''\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = b\frac{\partial V}{\partial x} + b'\frac{\partial V}{\partial y} + b''\frac{\partial V}{dz}$$

$$\frac{\partial V}{dv} = c\frac{\partial V}{\partial x} + c'\frac{\partial V}{\partial y} + c''\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a\left(a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a'\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + a''\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\right)$$
$$+ a'\left(a\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + a'\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a''\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\right)$$
$$+ a''\left(a\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} + a'\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + a''\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$$
$$= a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a'^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + a''^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$
$$+ 2aa'\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + 2a'a''\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + 2a''a\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x},$$
$$\frac{\partial^2 V}{du^2} = b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \ldots\ldots + 2bb'\frac{\partial^2 V \partial}{\partial x \partial y'} + \ldots\ldots$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = c^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \ldots\ldots + 2\,cc'\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \ldots\ldots$$

Sumando los cuadrados de las tres primeras ecuaciones, y en virtud de las ecuaciones (2), resultará

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{du}\right)^2 + \left(\frac{dV}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$

Sumando las tres últimas, se tiene que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

Por consiguiente: *La forma de los parámetros diferenciales no altera, cuando se efectúa una sustitución ortogonal en sus variables.*

**55.** Vamos á expresar los parámetros diferenciales de V por medio de las nuevas variables $\rho$, $\theta$, $\psi$, relacionadas con $x$, $y$, $z$ por la transformación

$$x = \rho \operatorname{sen}\theta \cos\psi, \quad y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi, \quad z = \rho\cos\theta.$$

Este cambio de variables equivale á los dos sucesivos:

$$x = r\cos\psi, \quad y = r\operatorname{sen}\psi, \quad z = z$$
$$r = \rho\operatorname{sen}\theta, \quad \psi = \psi, \quad z = \rho\cos\theta.$$

Efectuando el primero, resulta

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\psi + \frac{\partial V}{\partial y}\operatorname{sen}\psi,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = -\frac{\partial V}{\partial x} r \operatorname{sen}\psi + \frac{\partial V}{\partial y} r\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\cos^2\psi + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial}\cos\psi\operatorname{sen}\psi + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\operatorname{sen}^2\psi,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} r^2\operatorname{sen}^2\psi - 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} r^2\operatorname{sen}\psi\cos\psi + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} r^2\cos^2\psi$$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} r\cos\psi - \frac{\partial V}{\partial y} r\operatorname{sen}\psi.$$

De estas últimas se deduce inmediatamente:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Por otra parte, $\frac{\partial V}{\partial z}$ y $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ no han cambiado.

Los parámetros diferenciales se transformarán pues, en

$$\left(\frac{\partial V}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

El segundo cambio de variables no altera $\frac{\partial V}{\partial \psi}$ ni $\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2}$, y transforma

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho}.$$

Se tiene además que

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial z}\cos\theta + \frac{\partial V}{\partial r}\operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{\partial V}{\partial z}\rho\operatorname{sen}\theta + \frac{\partial V}{\partial r}\rho\cos\theta.$$

y eliminando $\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial r} = \operatorname{sen}\theta\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}$.

La sustitución de estos valores en las expresiones obtenidas de los parámetros diferenciales reduce á éstos á las expresiones siguientes:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2\operatorname{sen}^2\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dV}{\partial \rho} + \frac{\cot\theta}{\rho^2}\frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

**56.** Problema 5.° *Sea* z *función de* x *é* y *con*

$$x = f(t, u, v), \quad y = \varphi(t, u, v). \quad z = \psi(t, u, v). \qquad (3)$$

*Expresar las derivadas parciales* $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots\ldots$ *en función de* t, u, v *y de las derivadas parciales* $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial u}, \ldots\ldots$

Siendo $z$ función de $x$ é $y$; en virtud de las ecuaciones (3) serán $x$, $y$, $v$ funciones de $t$ y $u$, resultando que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial v}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

. . . . . .

## § 2.° APLICACIONES

1. Transformar

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

tomando $y$ por variable independiente.

Se tiene que

$$\frac{1}{dx}\, d\,\frac{dy}{dx} = -\,\frac{dy d^2x}{dx^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy\,(dxdy - d^2x)}{dx^3} = \frac{x' - x''}{x'^3},$$

designando por $x'$ $y''$ las derivadas $\dfrac{dx}{dy}$, $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

2. Transformar $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, cuando se toma por variable independiente $t = x + x^2$.

Se tiene que $dt = (1 + 2x)\, dx$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = (1 + 2x)\,\frac{dy}{dt}$$

$$d\,\frac{dy}{dx} = 2dx\,\frac{dy}{dt} + (1 + 2x)\, d\,\frac{dy}{dt}.$$

Dividiendo por $dx$, se tendrá:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\,\frac{dy}{dt} + (1 + 2x)\, d\,\frac{dy}{dt} : \frac{dt}{1 + 2x}$$

$$= 2\,\frac{dy}{dt} + (1 + 2x)^2\,\frac{d^2y}{dt^2} = 2\,\frac{dy}{dt} + (1 + 4t)\,\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Transformar la expresión

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \quad \text{ó} \quad R = \frac{ds^3}{y'' dx^3},$$

siendo $s$ la variable independiente y $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Se tendrá $ds = \text{const.}$, $d^2s = 0$ ó $dx dx^2 + dy dy^2 = 0$.

$$y'' = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3} = \frac{dx^2 d^2y + dy^2 d^2y}{dx^4} = \frac{ds^2 d^2y}{(ds^2 - dy^2)^2}$$

$$R = \frac{ds\sqrt{ds^2 - dy^2}}{d^2y} = \frac{\sqrt{1 - \frac{dy^2}{ds^2}}}{\frac{d^2y}{ds^2}}.$$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} = x^m y$; sustitución: $t = x^{m+2}$ ó $x = t^{\frac{1}{2+m}}$.

Tenemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2+m} t^{-\frac{1+m}{2+m}}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{1}{2+m} t^{-\frac{1+m}{2+m}}}$$

$$= (2+m)\, t^{-\frac{1+m}{2+m}} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(2+m)\, t^{\frac{1+m}{2+m}} \frac{dy^2}{dt^2} + (1+m)\, t^{-\frac{1}{2+m}} \frac{dy}{dt}}{\frac{1}{2+m} t^{-\frac{1+m}{2+m}}}.$$

Sustituyendo en la propuesta, resulta

$$t \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{m+1}{m+2} \frac{dy}{dt} - \frac{1}{(m+2)^2} y = 0,$$

ecuación lineal de 2.° orden.

5. $(1 - x^2)\, y'' - xy' + n^2 y = 0$. Nueva variable $t$, siendo $x = \cos t$.

*Solución:* $$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

6. $$y'' - xy'^3 + e^y y'^3 = 0.$$ Nueva variable $y$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \qquad \frac{d^2y}{d^2x} = -\frac{dyd^2x}{dx^3} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

*Solución:* $$\frac{d^2x}{dy^2} + x - e^y = 0.$$

7. $$y' + \frac{y}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}} = a.$$ Nueva variable $t$.

$$t = l\left[x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Se tiene que,

$$e^t = x + (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{dx}{dt} = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

*Solución:* $$\frac{dy}{dt} + y = a\,(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{2}\,(e^t + e^{-t}).$$

8. $$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0, \qquad x^2 = 4t.$$

*Solución:* $$t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

9 $$\frac{d^2y}{dx^2} \pm a^2 x^2 y = 0, \qquad t = x^{\frac{n+2}{2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{n+2}\, t^{\frac{n}{n+2}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{n+2}{2}\, t^{\frac{n}{n+2}}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{n+2}{2}\left[t^{\frac{n}{n+2}}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{n}{n+2}t^{-\frac{2}{n+2}}\frac{dy}{dt}\right]}{\frac{2}{n+2}t^{-\frac{n}{n+2}}}.$$

Sustituyendo en la propuesta, se obtiene, después de reducir,

$$t\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{n}{n+2}\frac{dy}{dt} \pm \frac{4a^2}{(n+2)^2}ty = 0.$$

10. Transformar $\dfrac{xy' - y}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}}$,

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Tenemos

$$dx = \cos\theta\, dr - r\operatorname{sen}\theta d\theta \qquad dy = \operatorname{sen}\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta$$

$$xdy - ydx = r^2 d\theta, \quad dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2.$$

*Solución:* $$\frac{xy' - y}{(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{r^2}{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

11. $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = 0, \qquad x = e^t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right].$$

*Solución;* $$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = 0.$$

12 $$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

*Solución:* $$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} = 0.$$

# CAPÍTULO VI

## Eliminación de constantes y de funciones arbitrarias

### § 1.º Principios generales

**53.** La diferenciación es un procedimiento empleado para eliminar constantes ó funciones arbitrarias, que aparecen combinadas con las variables en las ecuaciones. Así entre

$$F(x, y\ c) = 0 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

podremos eliminar $c$, y resultará una ecuación, consecuencia de la propuesta, que expresará una propiedad común de las curvas por ella representadas, independiente del valor del parámetro $c$.

Sea por ejemplo $y^2 + ay + bx = 0$, (1)

que representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje de las $x$ y que pasa por el origen de coordenadas.

Haciendo variar $a$ sola, se cambiará á la vez la posición del eje y del parámetro; haciendo variar $b$ sola no cambiará más que el parámetro.

La ecuación diferencial de primer orden será

$$2yy' + ay' + b = 0. \quad (2)$$

Eliminando sucesivamente $a$ y $b$ entre esta ecuación y la primitiva, se obtienen las dos ecuaciones de primer orden

$$y^2 y' + b(y - xy') = 0 \quad (3)$$

$$y^2 - 2xyy' + a(y - xy') = 0 \quad (4)$$

que pertenecen respectivamente á los dos sistemas de parábolas citados.

Diferenciando la ecuación (3), se tiene

$$2yy'^2 + y^2y'' - bxy'' = 0;$$

y eliminando $b$ entre esta ecuación y la (3), se obtendrá la ecuación de segundo orden

$$y^2y'' + 2yy'^2 - 2xy'^3 = 0. \qquad (5)$$

Diferenciando la (4), tendremos

$$2y'^2 + 2yy'' + ay'' = 0, \qquad (6)$$

y eliminando $a$ entre ésta y la (4), se vuelve á obtener la misma ecuación de segundo orden (5).

También podemos proceder, eliminando simultáneamente $a$ y $b$ entre las ecuaciones (1),, (2) y (6), obteniendo siempre la ecuación (5), que expresa una relación entre las parábolas representadas por la ecuación (1) que permanece para todos los valores posibles de las constantes.

En general, si se tiene una ecuación entre $x$, $y$ y $n$ constantes arbitrarias, y se la diferencia un número $m$ de veces, se obtendrán $m + 1$ ecuaciones, entre las cuales se podrá eliminar $m$ constantes, lo que dará una ecuación diferencial de orden $m$, y sólo quedará un número $n - m$ de constantes. Y como se pueden elegir arbitrariamente las $m$ constantes que se eliminan, se podrán formar tantas ecuaciones de orden $m$ conteniendo $n - m$ constantes, como combinaciones se pueden formar $m$ á $m$ con $n$ cantidades, es decir,

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\ldots\,(n-m+1)}{m!}.$$

Cuando se diferencia $n$ veces, se tiene $n + 1$ ecuaciones, entre las que se pueden eliminar las $n$ constantes arbitrarias.

**54.** Consideremos ahora la ecuación $\alpha = \varphi(\beta)$ que contiene una función $\varphi$ arbitraria, siendo $\alpha$ y $\beta$ funciones dadas de $x$, $y$, $z$.

Dando á esta función diferentes formas, se obtendrán diversas ecuaciones que ofrecerán todas un carácter común.

Derivando con relación á $x$ é $y$ la ecuación propuesta, tendremos

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + p\frac{\partial\alpha}{\partial z} = \varphi'(\beta)\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} + p\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} + q\frac{\partial\alpha}{\partial z} = \varphi'(\beta)\left(\frac{\partial\beta}{\partial y} + q\frac{\partial\beta}{\partial z}\right).$$

Dividiendo estas dos ecuaciones, y haciendo

$$P = \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial z} - \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial y}, \quad Q = \text{etc.}, \quad R = \text{etc.}$$

se obtendrá la ecuación de derivadas parciales

$$Pp + Qq = R.$$

Supongamos que se tengan las dos ecuaciones

$$f[x, y, z, c, \varphi(c), \chi(c), \ldots\ldots] = 0,$$
$$F[x, y, z, c, \varphi(c), \chi(c) \ldots\ldots] = 0,$$

en las $c$ es una función de $x$, $y$, $z$ y $\varphi(c)$, $\chi(c)$, ..... funciones arbitrarias de $c$.

Para eliminar $c$ y las funciones arbitrarias, consideraremos á $z$ y $c$ como funciones de $x$ é $y$, y eliminaremos

$$c, \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial y}, \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y}, \ldots\ldots$$

$$\varphi(c), \varphi'(c), \varphi''(c), \ldots\ldots \chi(c), \chi'(c) \ldots\ldots$$

entre las ecuaciones dadas y las que se deducen de ellas por diferenciación respecto á $x$ y respecto á $y$.

Designando por $m$ el número de funciones arbitrarias $\varphi(c)$, $\chi(c)$, $\psi(c)$, ..... y por $n$ un número cualquiera; si entre las diferenciales de $c$ y las derivadas de las funciones arbitrarias $\varphi(c)$, $\chi(c)$, ..... se prescinde de las de orden superior á $n$, el

número de los términos de la serie

$$c, \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial y}, \ldots\ldots, \frac{\partial^n c}{\partial x^n}, \frac{\partial^n c}{\partial x \partial y^{n-1}}, \ldots\ldots, \frac{\partial^n c}{\partial y^n}$$

será igual á $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, y el número de cantidades

$$\varphi(c), \varphi'(c), \ldots\ldots, \varphi^{(n)}(c), \chi(c), \chi'(c), \ldots\ldots, \chi^{(n)}(c), \ldots\ldots$$

será igual á $(n+1)m$. Además, si se agregan á las ecuaciones dadas sus derivadas de orden inferior ó igual á $n$, se obtendrán $(n+1)(n+2)$ ecuaciones; y se podrá eliminar entre éstas la cantidad $c$, así como las funciones arbitrarias y sus derivadas, hasta el orden $n$, siempre que se tenga

$$(n+1)(n+2) > \frac{(n+1)+(n+2)}{2} + (n+1)m, \text{ ó } \frac{n}{2} + 1 > m.$$

Esta condición quedará satisfecha, si se hace $n = 2m - 1$, y entonces la eliminación producirá $m$ ecuaciones de derivadas parciales á las que satisfarán todas las ecuaciones que se pueden deducir de las propuestas.

Ejemplo 1.° Eliminar $\varphi$ y $\psi$ de la ecuación

$$z = x\varphi(z) + y\psi(z).$$

Derivando sucesivamente con respecto á $x$ é $y$, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(z) + x\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\psi'(z)\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \psi(z) + x\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial y} + y\psi'(z)\frac{\partial z}{\partial y},$$

ó sea

$$\frac{\partial z}{\partial x}[1 - x\varphi'(z) - y\psi'(z)] = \varphi(z),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}[1 - x\varphi'(z) - y\psi'(z)] = \psi(c),$$

luego:

$$\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = f(z).$$

Derivando nuevamente, tenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f'(z)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3$$

de las que resulta

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

2.° Sea la ecuación

$$z = \varphi(x + my) + \psi(x - my).$$

Diferenciando dos veces, tenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi''(x + my) + \varphi''(x - my).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = m^2\varphi''(x + my) + m^2\psi''(x - my).$$

La eliminación conduce á la ecuación lineal de derivadas parciales

$$m^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3.° Sea el sistema de las dos ecuaciones

$$ax + y\varphi(a) + \psi(a) - z = 0$$

$$x + y\varphi'(a) + \psi'(a) = 0.$$

Diferenciando la primera respecto á $x$ é $y$, se tiene considerando además la segunda,

$$a - p = 0, \quad \varphi(a) - q = 0,$$

habiéndose eliminado $\psi$. Para eliminar $a$, tendremos

$$q = \varphi(p) \quad \text{ó} \quad \frac{dz}{dy} = \varphi\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

diferenciando sucesivamente respecto á $x$ é $y$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \varphi'(p)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi'(p)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

La eliminación de $\varphi'(p)$ conduce finalmente á la ecuación no lineal

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

**55.** Sean $z$ una función desconocida de las variables independientes $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ y $\alpha, \beta, \ldots\ldots \lambda$ $n$ funciones conocidas de $z, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$. Dada la ecuación

$$\psi(\alpha, \beta, \ldots\ldots, \lambda) = 0, \qquad (1)$$

en la que $\psi$ representa una función arbitraria de $\alpha, \beta, \ldots\ldots, \lambda$, se pide obtener una ecuación independiente de $\psi$. Para ello, diferenciemos sucesivamente la ecuación (3) respecto á las variables independientes, y haciendo

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2, \ldots\ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n,$$

tendremos

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial \alpha}\left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial \alpha}{\partial z}\right) + \ldots\ldots + \dfrac{\partial \psi}{\partial \lambda}\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial x_1} + p_1\dfrac{\partial \lambda}{\partial z}\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial \alpha}\left(\dfrac{\partial \alpha}{\partial x_n} + p_n\dfrac{\partial \alpha}{\partial z}\right) + \ldots\ldots + \dfrac{\partial \psi}{\partial \lambda}\left(\dfrac{\partial \lambda}{\partial x_n} + p_n\dfrac{\partial \lambda}{\partial z}\right) = 0. \end{cases}$$

La condición necesaria y suficiente para que este sistema de ecuaciones admita valores distintos de cero de las derivadas

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \ldots\ldots, \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \quad \text{es}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial z}+\ldots\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z}-h=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x_1}+\ldots\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}+p_1h=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x_n}+\frac{\partial\psi}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x_n}+\ldots\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x_n}+p_nh=0$$

sistema de $n+1$ ecuaciones homogéneas de primer grado respecto á $\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial\psi}{\partial\beta}$, ....., $\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$ y $h$. Como estas cantidades no han de ser todas nulas, tendremos que establecer la condición necesaria y suficiente para que esto suceda, igualando á cero el denominador común de las expresiones de dichas derivadas; y por ser cada término de este denominador el producto de $n+1$ coeficientes que pertenecen á incógnitas distintas, $p_1$, $p_2$, ..... figurarán linealmente, y el resultado buscado será de la forma

$$P_1p_1+P_2p_2+\ldots\ldots+P_np_n+Q=0,$$

representando $P_1$, $P_2$, ....., $Q$, funciones de $x_1$, $x_2$, ..... $x_n$ y $z$.

Se obtiene, pues, una ecuación lineal de primer orden de derivadas parciales.

**56.** Se ha visto que las derivadas de *lx*, *arc sen x* etc. son algebráicas, por lo que al derivarse una ecuación, podrán desaparecer las funciones transcendentes que contenía la propuesta. Así, de

$$y=\text{arc sen } x$$

se deduce

$$y'=\pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\qquad (1-x^2)y'^2=1.$$

Derivando esta ecuación, y suprimiendo el factor común $2y'$, se tendrá

$$(1-x^2)y''-xy'=0.$$

Se puede deducir de esta ecuación una fórmula recurrente, cómoda para el cálculo de las derivadas sucesivas de $y$. Para ello hallaremos la derivada de orden $n$ de la última ecuación, y tendremos

$$(1 - x^2)\,y^{(m+2)} - 2mxy^{(m+1)} - m\,(m-1)\,y^{(m)} - xy^{(m+1)} - my^{(m)} = 0$$

y reduciendo

$$(1 - x^2)\,y^{(m+2)} - (2m+1)\,xy^{(m+1)} - m^2y^{(m)} = 0.$$

Para $x = 0$, designando por $y_0$, $y'_0$, ..... los valores correspondientes de $y$ y sus derivadas, resultará:

$$y''_0 = 0, \quad y_0^{(4)} = 2^2y''_0 = 0, \quad \ldots\ldots, \quad y^{(2n)} = 0$$

$$y'''_0 = 1^2 \cdot y'_0 = \pm\, 1^2$$

$$y_0^{(5)} = 3^2 \cdot y'''_0 = \pm\, 1^2 \cdot 3^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \ldots\ldots\ldots$$

$$y_0^{(2n+1)} = \pm\, 1^2 \cdot 3^2 \ldots\ldots (2n-1)^2$$

**57.** Sea $$y = \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n$$

Tomemos la *derivada* logarítmica de los dos miembros, y resultará

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{\sqrt{x^2 - 1}};$$

quitando denominadores y elevando al cuadrado:

$$(x^2 - 1)\,y'^2 = n^2y^2. \qquad (1)$$

Derivando y suprimiendo el factor $2y'$, resulta:

$$(x^2 - 1)\,y'' + xy' - n^2y = 0. \qquad (2)$$

La derivada $m$ sima de esta ecuación es

$$(x^2 - 1)\,y^{(m+2)} + 2mxy^{(m+1)} + m\,(m-1)\,y^{(m)} + xy^{(m+1)} + my^{(m)} - n^2y^{(m)} = 0,$$

y simplificando,

$$(x^2 - 1)\, y^{(m+2)} + (2m + 1)\, xy^{(m+1)} + (m^2 - n^2)\, y^{(m)} = 0.$$

Para $x = 0$ se reduce á

$$y_0^{(m+2)} = (m^2 - n^2)\, y_0^{(m)} \qquad (3)$$

La ecuación (2) se verifica si se hace

$$y = C\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + C'\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n,$$

siendo C y C′ dos constantes, que para $C = C' = \frac{1}{2}$ y $n$ entero y positivo, se reduce á

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n.$$

Desarrollándola por la fórmula del binomio será

$$y = A_n x^n + A_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots + A_{n-2p} x^{n-2p} + \ldots\ldots$$

Se calcula el coeficiente $A_n$ dividiendo por $x^n$ y haciendo tender $x$ hacia $\infty$,

$$A_n = \lim \frac{y}{x^n} = \lim \left[\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n\right] = 2^{n-1}.$$

Para calcular los demás coeficientes, se observa que

$$y_0^{n-2p} = 1 \cdot 2 \ldots\ldots (n - 2p)\, A_{n-2p},$$

$$y^{n-2p-2} = 1 \cdot 2 \ldots\ldots (n - 2p - 2)\, A_{n-2p-2}$$

de donde

$$A_{n-2p-2} = A_{n-2p}\,(n - 2p)\,(n - 2p - 1)\,\frac{y_0^{n-2p-2}}{y_0^{n-2p}}$$

ó según la fórmula (3),

$$A_{n-2p-2} = A_{n-2p} \frac{(n-2p)(n-2p-1)}{(n-2p-2)^2 - n^2}.$$

Haciendo $x = \cos \varphi$ resulta

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\varphi,$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\varphi\right)^n + \frac{1}{2}\left(\cos\varphi - \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\varphi\right)^n,$$

y, según la fórmula de Moivre,

$$y = \frac{1}{2}(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) + \frac{1}{2}(\cos n\varphi - i \operatorname{sen} n\varphi)$$

$$= \cos n\varphi = \cos n\,(\text{arc cos } x).$$

De $y = \dfrac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}$, empleando la derivación logarítmica y derivando sucesivamente, se obtiene

$$(x^2-1)\,y'' + 2xy' + n(n+1)\,y = 0.$$

## § 2.° Ecuaciones de derivadas parciales de algunas curvas y superficies

**58.** *Cónicas.* Sea la ecuación explícita de las cónicas

$$y = ax + b \pm (px^2 + 2qx + r)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

Se tiene sucesivamente:

$$y' = a \pm (px+q)(px^2+2qx+r)^{-\frac{1}{2}},$$

$$y'' = \pm \frac{pr - q^2}{(px^2+2qx+r)^{\frac{3}{2}}}$$

de donde

$$y''^{-\frac{2}{3}} = \frac{px^2+2qx+r}{(pr-q^2)^{\frac{2}{3}}}. \qquad (2)$$

Derivando tres veces, resulta

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0. \tag{3}$$

Si la cónica es una parábola, $p$ es nulo.

No conteniendo el segundo miembro de la ecuación (2) términos en $x^2$, dos derivaciones sucesivas harán desaparecer las otras dos constantes, y la ecuación diferencial de las parábolas será

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = 0. \tag{4}$$

Se tiene además,

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)' = -\frac{2}{3}\, y''^{-\frac{5}{2}}\, y'''$$

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)'' = \frac{10}{9}\, y''^{-\frac{8}{3}}\, y'''^2 - \frac{2}{3}\, y''^{-\frac{5}{3}}\, y^{IV},$$

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = -\frac{80}{27}\, y''^{-\frac{11}{3}}\, y'''^3 + \frac{20}{9}\, y''^{-\frac{8}{3}}\, y'''\, y^{IV} + \text{etc.}$$

Sustituyendo estas expresiones en (3) y (4), se obtiene

$$-40\, y'''^3 + 45\, y''y'''y^{IV} - 9\, y''^2 y^V = 0$$

$$5\, y'''^2 - 3\, y''y^{IV} = 0,$$

que son la ecuación general de las cónicas y la particular de las parábolas obtenidas por Halphen.

**59.** SUPERFICIES CILÍNDRICAS. Sean

$$x = az + \alpha, \qquad y = bz + \beta \tag{1}$$

las ecuaciones de la generatriz, y

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

las de la directriz.

Expresaremos que se encuentran estas dos líneas, eliminando $x, y, z$, y obtendremos como resultado de esta eliminación la ecuación

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

Esta ecuación con las (1) determinan la superficie cilíndrica, que eliminando $\alpha$ y $\beta$, es la siguiente

$$\varphi(x - az, y - bz) = 0$$

ó en forma explícita

$$y - bz = \Phi(x - az). \qquad (3)$$

La ecuación de derivadas parciales se obtendrá diferenciando. Así tendremos

$$-bp = \Phi'(x - az)\,(1 - ap)$$
$$1 - bq = -\Phi'(x - az)\,.\,aq$$

y en fin,

$$ap + bq = 1. \qquad (4)$$

**60.** *Superficies cónicas.* Análogamente tendremos las ecuaciones de la generatriz

$$x - a = \alpha(z - c), \quad y - b = \beta(z - c) \qquad (1)$$

y las de la directriz

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y\,z) = 0, \qquad (2)$$

de las que se deduce la de condición

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0. \qquad (3)$$

Eliminando $\alpha$ y $\beta$ entre (1) y (3), resulta

$$\varphi\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{y-b}{z-c} = \Phi\left(\frac{x-a}{z-c}\right). \qquad (4)$$

Derivando la (4), resulta

$$-\frac{(y-b)\,p}{(z-c)^2} = \Phi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\left[\frac{(z-c)-(x-a)\,p}{(z-c)^2}\right],$$

$$\frac{(z-c)-(y-b)q}{(z-c)^2} = \Phi'\left(\frac{x-a}{z-c}\right)\left[-\frac{(x-a)q}{(z-c)^2}\right].$$

Eliminando $\Phi'$, se obtiene

$$\frac{(y-b)p}{z-c-(y-b)q} = \frac{z-c-(x-a)p}{(x-a)q},$$

que se reduce á

$$z-c=(x-a)p+(y-b)q. \qquad (5)$$

**61.** SUPERFICIES CONOIDES. *Superficie conoide* es toda superficie engendrada por una recta paralela á un plano dado, llamado *plano director* y sujeta á encontrar á una recta y á una curva dadas.

Tomemos como plano de las $xy$ un plano paralelo al director y por eje de las $z$ la directriz rectilínea.

Las ecuaciones de la generatriz son

$$z=\alpha, \qquad y=\beta x \qquad (1)$$

y

$$F(x,y,z)=0, \qquad F_1(x,y,z)=0 \qquad (2)$$

las de la directriz.

Eliminando $x, y, z$, resulta la ecuación de condición

$$\varphi(\alpha,\beta)=0. \qquad (3)$$

Eliminando $\alpha$ y $\beta$ entre (1) y (3), se obtiene la ecuación finita de las superficies conoides

$$z=\Phi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (4)$$

Diferenciando, tenemos

$$p=-\Phi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y}{x^2}, \qquad q=\Phi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x},$$

y en fin,

$$px+qy=0$$

será la ecuación de *derivadas parciales* de las superficies conoides.

**62.** SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN. Sean

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \tag{1}$$

las ecuaciones de la recta que sirve de eje y que suponemos que pase por el origen.

Sean además

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \alpha \\ ax + by + cz &= 6 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

las ecuaciones del círculo móvil cuyo centro está en el eje y cuyo plano es perpendicular á éste, y

$$F(x, y, z) = 0, \qquad F_1(x, y, z) = 0, \tag{3}$$

las ecuaciones de la directriz. La ecuación de condición será

$$\varphi(\alpha, 6) = 0, \tag{4}$$

y eliminando $\alpha, \beta$ entre (2) y (4), resultará

$$\varphi(x^2 + y^2 + z^2,\ ax + by + cz) = 0$$

ó

$$ax + by + cz = \Phi(x^2 + y^2 + z^2), \tag{5}$$

ecuación general *finita* de las superficies de revolución.

Diferenciando la ecuación (5), se tiene

$$a + cp = 2\,\Phi'(x^2 + y^2 + z^2)(x + zp)$$
$$b + cq = 2\,\Phi'(x^2 + y^2 + z^2)(y + zq)$$

y por eliminación de $\Phi'$,

$$\frac{a + cp}{b + cq} = \frac{x + zp}{y + zq}$$

ó

$$(cy - bz)\,p + (az - cx)\,q = bx - ay, \tag{6}$$

ecuación de derivadas parciales de las superficies de revolución.

## § 3.º Aplicaciones

1. $y^2 - 2cx = 0$, ecuación de las parábolas tangentes en el origen al eje de las $y$. Eliminar $c$.

*Solución:* $2xy' - y = 0$.

2. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Eliminar $a$, $b$ y $r$.

*Solución:* $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$.

3. $x^2 - ax - by = 0$. Eliminar $a$ y $b$.

*Solución:* $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$.

4. $(a + mb)(x^2 - my^2) = mc^2$. Eliminar $m$.

*Solución:* $axyy'^2 + (bx^2 - ay^2 - c^2) y' - bxy = 0$.

5. Eliminar $a, b, c, d$ de la ecuación

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (y \text{ es funcion de } x).$$

De las ecuaciones

$$\begin{aligned} a\,dx + b\,dy + c\,dz &= 0 \\ a\,d^2x + b\,d^2y + c\,d^2z &= 0 \\ a\,d^3x + b\,d^3y + c\,d^3z &= 0 \end{aligned}$$

resulta la

*Solución:* $(dyd^2z - dzd^2y)\,d^3x$

$$+ (dzd^2x - dxd^2z)\,d^3y + (dxd^2y - dyd^2x)\,d^3z = 0.$$

6. Eliminar $\varphi$ y $\psi$ de la ecuación

$$z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^n \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Por diferenciación obtenemos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = nx^{n-1} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) - yx^{n-2} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y^{n+1}}{x^2} \psi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

y análoga expresión para $\frac{\partial z}{\partial y}$, de las que se deduce la

*solución:* $$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

7. Eliminar $\varphi$ de la ecuación

$$u = x^n \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{y}\right).$$

Siendo el segundo miembro homogéneo de grado $n$, se tiene la

*solución:* $$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu.$$

8. Eliminar $\varphi$ y $\psi$ de la ecuación

$$z = x\,\varphi(z) + y\,\psi(z).$$

Se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x}[1 - x\varphi', (z) - y\psi'(z)] = \varphi(z),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}[1 - x\varphi'(z) - y\psi'(z)] = \psi(z)$$

luego: $$\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} = f(z)$$

y haciendo, según costumbre,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p,\ \frac{\partial z}{\partial y} = q,\ \frac{\partial p}{\partial x} = r,\ \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = s,\ \frac{\partial q}{\partial y} = t,$$

se tendrá, eliminando $f$ en la última ecuación:

*Solución:* $$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0.$$

9. Eliminar $\varphi$ y $\psi$ de la ecuación

$$z = \varphi(ay + bx)\,\psi(ay - bx).$$

La ecuación propuesta se puede escribir

$$lz = l\varphi\,(ay + bx) + l\psi\,(ay - bx),$$

ó

$$lz = \mathrm{F}\,(ay + bx) + f\,(ay - bx),$$

designando $f$ y F dos funciones arbitrarias.

Se deduce de la última ecuación

$$\frac{p}{z} = b\mathrm{F}'\,(ay + bx) - bf'\,(ay - bx),$$

$$\frac{q}{z} = a\mathrm{F}'\,(ay + bx) + af'\,(ay - bx),$$

$$\frac{zr - p^2}{z^2} = b^2\mathrm{F}''\,(ay + bx) + b^2 f''\,(ay - bx)$$

$$\frac{zt - q^2}{z^2} = a^2\mathrm{F}''\,(ay + bx) + a''f''\,(ay - bx).$$

Las dos últimas ecuaciones conducen á la

*solución:* $a^2\,(zr - p^2) - b^2\,(zt - q^2) = 0.$

10. Eliminar $\varphi\,(x)$ y $\psi\,(x)$ de la ecuación

$$u = \frac{\varphi'\,(x)\,\psi'\,(y)}{[\varphi\,(x) + \psi\,(x)]^2}.$$

Diferenciando sucesivamente, respecto á $x$ é $y$, se tiene

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varphi''\,(x)}{\varphi'\,(x)} - \frac{2\,\varphi'\,(x)}{\varphi\,(x) + \psi\,(y)},$$

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\psi''\,(x)}{\psi'\,(x)} - \frac{2\,\psi'\,(y)}{\varphi\,(x) + \psi\,(y)},$$

de las que se deduce

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \left[\frac{\varphi''\,(x)\,\psi''\,(y)}{\varphi'\,(x)\,\psi'\,(y)} - \frac{2}{\varphi\,(x) + \psi(y)}\left(\frac{\varphi'\,(x)\,\psi''\,(y)}{\psi'\,(x)} - \frac{\varphi''\,(x)\,\psi'\,(y)}{\varphi'\,(x)}\right) - 6u\right] u.$$

Formando el producto $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$, se llega á la relación

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 2u^3.$$

El primer miembro de esta ecuación puede escribirse

$$u^2 \frac{\partial\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) : u\right]}{\partial y} = u^2 \frac{\partial^2 lu}{\partial x \partial y},$$

de lo que resulta la

*solución:*
$$\frac{\partial^2 lu}{\partial x \partial y} = 2u.$$

11. Eliminar $f$, $\varphi$ y $\psi$ de la ecuación

$$xf(\alpha) + y\varphi(\alpha) + z\psi(\alpha) = 1, \qquad (1)$$

siendo $\alpha$ función de $x$ é $y$, y hallándose expresado el valor de $z$ por la ecuación

$$xf'(\alpha) + y\varphi'(\alpha) + z\psi'(\alpha). \qquad (2)$$

Derivando sucesivamente con relación á $x$ é $y$, se tiene

$$[xf'(\alpha) + y\varphi'(\alpha) + z\psi'(\alpha)]\frac{\partial\alpha}{\partial x} + f(\alpha) + \psi(\alpha)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$[xf'(\alpha) + y\varphi'(\alpha) + z\psi'(\alpha)]\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \varphi(\alpha) + \psi(\alpha)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

En virtud de la condición (2), estas ecuaciones se reducen á

$$f(\alpha) + \psi(\alpha)\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \varphi(\alpha) + \psi(\alpha)\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Y como $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ son funciones de una misma variable, las dos pueden considerarse la una función de la otra, es decir,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = F\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Derivando enseguida, se obtiene

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F'\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

ó sea $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} : \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} : \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

y escribiendo $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$, etc., resulta la

*solución:* $$rt - s^2 = 0,$$

ecuación de las derivadas parciales de las superficies desarrollables.

12. De la ecuación $u = F(z, r)$ eliminar F y $r$, sabiendo que se tiene $r = \varphi(ax + cz) = \psi(ax - by)$ siendo $\varphi$ y $\psi$ funciones arbitrarias.

Diferenciando, resultan las ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \left(a + c\frac{\partial z}{\partial y}\right)\varphi'(ax + cz) = a\psi'(ax - by),$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = -b\psi'(ax - by) \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = c\varphi'(ax + cz)$$

de las que resulta la *solución:* $$\frac{1}{a}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{b}\frac{\partial r}{\partial y} = 0.$$

13. Eliminar la función $\Phi$, dada la ecuación

$$u = x\,\Phi(x - y\,lx).$$

Se tiene que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Phi(x - y\,lx) + x\,\Phi'(x - y\,lx)\left(1 - \frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\,\Phi'(x - y\,lx)\,(-lx);$$

*Solución:* $$\frac{\partial u}{\partial y}\left(1 - \frac{y}{x}\right) - \frac{\partial u}{\partial x}\,lx = -u\,\frac{lx}{x}.$$

# CAPÍTULO VII

## Cálculo de las diferencias finitas

### § 1.º Cálculo directo

**63.** Nociones preliminares. El objeto del cálculo diferencial es hallar el límite de las relaciones de los incrementos simultáneos de diversas variedades, sin considerar su valor numérico. En el *cálculo de las diferencias finitas* se trata de estos valores numéricos, cuya ley se busca.

Sea $u_0, u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n \ldots\ldots,$

una serie de valores sucesivos que adquiere una cantidad. Si se resta cada uno del que la sigue, se obtienen las *diferencias primeras*

$$\Delta u_0, \quad \Delta u_1, \quad \Delta u_2, \ldots\ldots, \Delta u_n, \ldots\ldots,$$

de modo que se tiene

$$u_1 - u_0 = \Delta u_0, \quad u_2 - u_1 = \Delta u_1, \ldots\ldots, \quad u_{n+1} - u_n = \Delta u_n;$$

Procediendo de igual modo con las diferencias primeras, se obtiene la serie de las diferencias segundas

$$\Delta^2 u_0, \quad \Delta^2 u_1, \quad \Delta^2 u_2, \ldots\ldots, \quad \Delta^2 u_n, \ldots\ldots$$

$$\Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0, \quad \Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1, \ldots\ldots$$

y así sucesivamente.

Ejemplo: Las diferencias primeras y segundas de la serie de cuadrados de los números enteros

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \ldots\ldots$$

son respectivamente

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots\ldots \quad \text{y} \quad 2,\ 2,\ 2,\ \ldots\ldots$$

**64.** Expresión de $\Delta^n u$. Tenemos que

$$\Delta u = u_1 - u_0, \quad \Delta u_1 = u_2 - u_1;$$

pero $\Delta^2 u = \Delta u_1 - \Delta u_0$; luego $\Delta^2 u = u_2 - 2u_1 + u_0$.

De igual modo resulta que

$$\Delta^3 u = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0$$

y general, podremos escribir

$$\Delta^n u_0 = u_n - n u_{n-1} + \frac{n\,(n-1)}{2!}\, u_{n-2} \ldots\ldots \qquad (1)$$

pues siendo, por ejemplo,

$$\Delta^n u_0 = u_n - A u_{n-1} + B u_{n-2} \ldots\ldots$$

se tendrá igualmente

$$\Delta^n u_1 = u_{n+1} - A u_n + B u_{n-1} \ldots\ldots$$

y restando, se obtiene

$$\Delta^{n+1} u_0 = u_{n+1} - A \mid u_n + B \mid u_{n-1} \ldots\ldots$$
$$\qquad\qquad - 1 \mid\quad + A \mid\quad \ldots\ldots$$

Pero si 1, A, B, C, ..... son los coeficientes de $(x+1)^n$, los coeficientes de $(x+1)^{n+1}$ son 1, 1 + A, A + B; luego la ley queda demostrada.

**65.** Expresión de $u_n$. Tenemos que

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0, \quad u_2 = u_1 + \Delta u_1, \quad \Delta u_1 = \Delta u_0 + \Delta^2 u_0.$$

Sumando, resulta

$$u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0, \quad \text{y} \quad \Delta u_2 = \Delta u_0 + 2\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0,$$

y sumando, resulta

$$u_3 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0.$$

En general,

$$u_n = u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 u_0 + \ldots\ldots + \Delta^n u_0 \qquad (2)$$

cuya generalidad se demuestra como en el párrafo anterior.

**66.** DIFERENCIAS DE LAS FUNCIONES ENTERAS. Sea

$$u = Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots + Kx + L.$$

Se tendrá que

$$\Delta u = A\left[(x+h)^m - x^m\right] + B\left[(x+h)^{m-1} - x^{m-1}\right] + C\left[(x+h)^{m-2} - x^{m-2}\right] + \ldots\ldots + Kh.$$

Desarrollando y ordenando, resulta una expresión de la forma

$$\Delta u = mAhx^{m-1} + B'x^{m-2} + \ldots\ldots + K'$$

cuyo primer término es de grado $m - 1$, siendo su coeficiente el producto del coeficiente del primer término de $u$ por el exponente de este término y por $h$.

Si derivamos sucesivamente, se tendrá

$$\Delta^2 u = m(m-1)Ah^2x^{m-2} + \ldots\ldots$$
$$\Delta^3 u = m(m-1)(m-2)Ah^3x^{m-3} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^m u = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots mAh^m.$$

Así: *la diferencia* m sima *de una función entera de grado* m *es constante.*

EJEMPLO. Sea $u = x^m$, se tiene que $\Delta^m u = 1 \cdot 2 \ldots\ldots mh^m$

$$u_1 = (x+h)^m, \quad u_2 = (x+2h)^m, \ldots\ldots$$

y sustituyendo en

$$\Delta^n u_0 = u_n - nu_{n-1} + \ldots\ldots,$$

se tendrá, si $n = m$, que

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots mh^m = (x+mh)^m - m\left[x+(m-1)h\right]^m + \ldots\ldots \pm x^m.$$

Haciendo $x = 0$, $h = 1$,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots m = m^m - m\,(m-1)^m + \ldots\ldots$$

Si $m > n$, se tiene $\Delta^n u = 0$, y la fórmula general da

$$0 = n^m - n\,(n-1)^m + \ldots\ldots$$

Sea $u = x\,(x+h) \ldots\ldots [(x+(n-1)\,h]$.

Se tendrá

$$\Delta u = (x+h)\,(x+2h) \ldots\ldots [x+(n-1)\,h]\,nh$$
$$\Delta^2 u = (x+2h) \ldots\ldots [x+(n-1)\,h]\,n\,(n-1)\,h^2$$

y así sucesivamente.

**67.** DIFERENCIAS DE ALGUNAS FUNCIONES. Sea

1.° $$u = \frac{1}{x\,(x+h) \ldots\ldots [x+(n-1)\,h]};$$

tendremos que $$\Delta u = \frac{-nh}{x\,(x+h) \ldots\ldots (x+nh)}$$

$$\Delta^2 u = \frac{n\,(n+1)\,h^2}{x\,(x+h) \ldots\ldots [x+(n+1)\,h]}$$

y así sucesivamente.

2.° $$u = a^x, \quad \Delta u = ax\,(a^h - 1) \ldots\ldots$$

en general $$\Delta^n u = a^x\,(a^h - 1)^n.$$

3.° $$u = \operatorname{sen}\,(ax+b)$$

$$\Delta u = \operatorname{sen}\,(ax+ah+b) - \operatorname{sen}\,(ax+b)$$

$$\Delta \operatorname{sen}\,(ax+b) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\,ah \cos\left(ax+b+a\,\frac{h}{2}\right).$$

Se tiene igualmente

$$\Delta \cos\,(ax+b) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\,ah \operatorname{sen}\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right)$$

$$\Delta^2 \operatorname{sen}\,(ax+b) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}\,ah\,\Delta \cos\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right)$$

$$= -4 \operatorname{sen}^2 \frac{ah}{2} \operatorname{sen}\,(ax+b+ah)$$

y así sucesivamente.

## § 2.° Cálculo inverso de las diferencias

**68** Definiciones y propiedades. El cálculo inverso de las diferencias tiene por objeto determinar una función cuando se conoce su diferencia finita ó una relación entre esta función, algunas de sus diferencias y la variable independiente.

Sea $x$ la variable independiente y $\Delta x$ su incremento constante igual á $h$.

Sean $F(x)$ la función desconocida y $f(x)$ la diferencia dada. Se tendrá

$$\Delta F(x) = f(x) \quad \text{ó} \quad F(x+h) - F(x) = f(x).$$

La función $F(x)$, cuya diferencia es $f(x)$, se representa por $\Sigma f(x)$ ó también por $\Delta^{-1} f(x)$, y se llama *integral de diferencias finitas* de $f(x)$.

Las características $\Sigma$ y $\Delta$ aplicadas á la misma función se destruyen. Así

$$\Delta\Sigma f(x) = \Sigma\Delta f(x) = f(x).$$

En el cálculo de las diferencias finitas, siendo $\varphi(x)$ una función cuya diferencia es $f(x)$, para obtener la integral general, es necesario que se tenga

$$F(x) = \varphi(x) + \omega(x),$$

siendo $\omega(x)$ una función que debe satisfacer á la ecuación

$$\Delta\omega(x) = \omega(x+h) - \omega(x) = 0.$$

El valor de la función $\omega(x)$ es completamente arbitrario cuando $x$ varía desde un valor cualquiera $a$ hasta el valor $a+h$; y para valores de $x$, no comprendidos en dicho intervalo, la función $\omega(x)$ se determinará por la condición de volver á adquirir el mismo valor, cuando $x$ aumenta en $h$. Se dice por esto que es una *función periódica.*

**69.** Sea $F(x)$ una función cuya diferencia finita es $f(x)$. Se

tendrá, para cualquier valor de $x$,

$$F(x_1) - F(x_0) = f(x_0)$$
$$F(x_2) - F(x_1) = f(x_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(x_n) - f(x_{n-1}) = f(x_{n-1})$$

y sumando, miembro á miembro,

$$F(x_n) - F(x_0) = f(x_0) + f(x_1) + \ldots\ldots + f(x_{n-1}). \quad (1)$$

**70.** INTEGRACIÓN DE ALGUNAS FUNCIONES, 1.º De

$$\Delta a^x = a^x(a^h - 1) \quad \text{resulta} \quad \Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + C.$$

Si se da á $x$ sucesivamente los valores 0, 1, 2 ...., $n - 1$, será $h = 1$ y, aplicando la fórmula (1),

$$1 + a + \ldots\ldots + a^{n-1} = \frac{a^n}{a-1} - \frac{1}{a-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}. \quad (1)$$

2.º Integrando la fórmula

$$\Delta u = (x + h)(x + 2h) + \ldots\ldots [x + (n - 1)h]\, nh$$

y sustituyendo $x$ por $x - h$ y $n$ por $n + 1$, resulta

$$\sum x(x + h) \ldots\ldots [x + (n - 1)h]$$
$$= \frac{(x - h)\, x\, (x + h) \ldots\ldots [x + (n - 1)h]}{(n + 1)h} + C. \quad (2)$$

3.º Integrando la expresión $\Delta u$ del número 67, y cambiando $n - 1$ por $n$, resulta

$$\sum \frac{1}{x(x + h) \ldots\ldots [x + (n - 1)h]}$$
$$= -\frac{1}{(n - 1)hx(x + h) \ldots\ldots [x + (n - 2)h]} + C. \quad (3)$$

4.º Sustituyendo $x$ por $x - \frac{h}{2}$ en la expresión de

$\Delta \operatorname{sen}(ax + b)$ del núm. 67, tendremos

$$\Delta \operatorname{sen}\left(ax - \frac{ah}{2} + b\right) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} ah \cos(ax + b)$$

é integrando,

$$\sum \cos(ax + b) = \frac{\operatorname{sen}\left(ax - \frac{ah}{2} + b\right)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} ah} + C, \qquad (4)$$

y haciendo $x = 0, 1, 2, \ldots\ldots, n - 1$, se obtiene

$$\cos b + \cos(a + b) + \cos(2a + b) + \ldots\ldots$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) a + b\right] - \operatorname{sen}\left(b - \frac{a}{2}\right)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} a}; \qquad (5)$$

es decir,

$$\cos b + \cos(a + b) + \cos(2a + b) + \ldots\ldots$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{na}{2} \cos\left(\frac{n-1}{2} a + b\right)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a} \qquad (6)$$

se obtendrá igualmente

$$\operatorname{sen} b + \operatorname{sen}(a + b) + \operatorname{sen}(2a + b) + \ldots\ldots$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{na}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{n-1}{2} a + b\right)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a}.$$

5.° Sustituyendo $x$ por $m + h$ en la fórmula (2), y haciendo $h = 1$, se tendrá

$$1.2.3 \ldots\ldots n + 2.3.4 \ldots\ldots (n + 1) + 3.4 \ldots\ldots (n + 2) + \ldots\ldots$$

$$+ m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n-1) = \frac{m(m+1)\ldots\ldots(m+n)}{n+1}.$$

Aquí la constante es nula, porque el primer miembro es cero para $m = 0$.

Por ejemplo, para $n = 3$ se tiene

$$1.2.3 + 2.3.4 + \ldots\ldots + m(m+1)(m+2) = \frac{1}{4} m(m+1)(m+2)(m+3).$$

De la fórmula (3), resulta

$$\frac{1}{1.2\ldots.n} + \frac{1}{2.3.n(n+1)} + \ldots\ldots + \frac{1}{m(m+1)\ldots.(m+n-1)} = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{1.2\ldots.(n-1)} - \frac{1}{(m+1)\ldots.(m+n-1)}\right].$$

Por ejemplo, para $n = 3$,

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots\ldots + \frac{1}{m(m+1)(m+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{(m+1)(m+2)};$$

para $n = 2$,

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots\ldots + \frac{1}{m(m+1)} = 1 - \frac{1}{m+1}.$$

**71.** INTEGRACIÓN DE LAS FUNCIONES ENTERAS. La fórmula de Taylor, ya conocida de los lectores, y que se estudia en el libro II para aplicarla al desarrollo de las funciones en series, permite obtener $\Sigma x^m$ y, más generalmente $\Sigma f(x)$, siendo $f(x)$ una función entera de $x$. Se tiene

$$f(x+h) - f(x) \quad \text{ó} \quad \Delta f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots\ldots$$

Integrando los dos miembros, resulta

$$f(x) = h \sum f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \sum f''(x) + \ldots\ldots,$$

y si se hace $f(x) = x^{m+1}$,

$$x^{m+1} = (m+1)\, h \sum x^m + (m+1)\, m \frac{h^2}{2!} \sum x^{m-1} + \frac{(m+1)\, m\, (m-1)}{3!} h^3 \sum x^{m-2} + \ldots\ldots$$

Para deducir $\Sigma x^m$, bastará hacer sucesivamente $m = 0, 1, 2, \ldots$ y se tendrá, designando C una función periódica

$$\sum x^0 = \frac{x}{h} + C$$

$$\sum x = \frac{x^2}{2h} - \frac{h}{2} + C$$

$$\sum x^2 = \frac{x^3}{3h} - \frac{1}{2} x^2 + \frac{h}{6} x + C$$

y así sucesivamente.

La fórmula general (1) del núm. 69, permite deducir de la integral $\Sigma x^m$ la suma $S_m$ de las potencias de grado $m$ de los números 1, 2, 3, ..... $m$. En efecto, si se hace $h = 1$ y se da á $x$ los valores 0, 1, 2, ..... $n$, la expresión $\Sigma x^m$ aumentará en el término $x^m$, y se tendrá

$$S_1 = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n = \frac{n\,(n+1)}{2},$$

$$S_2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{3!}$$

$$S_3 = \frac{1}{4} n^4 + \frac{1}{2} n^3 + \frac{1}{4} n^2 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4},$$

$$S_4 = \frac{1}{5} n^5 + \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{3} n^2 - \frac{1}{30} n,$$

. . . . . .

## § 3.º Fórmulas de interpolación

**72.** Definición. La interpolación tiene por objeto hallar una función de una variable cuando se conocen los valores de esta función que corresponden á cierto número de valores dados de la variable. Este problema es indeterminado, cuando no se fija la forma de la función que se trata de obtener, y será determinado, cuando se dé la forma de la función que contenga tantos parámetros distintos cuantos valores se den de ésta. Por ejemplo, si se dan $n + 1$ valores de una función entera, correspondientes á $n + 1$ valores de la variable, se tendrá $n + 1$ ecuaciones para determinar $n + 1$ coeficientes desconocidos.

**73.** Fórmula de Newton. Sean

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots\ldots, \quad x_n \qquad \text{y} \qquad u_0, \quad u_1, \quad \ldots\ldots, \quad u_n$$

los $n + 1$ valores correspondientes de la variable y de la función, habiéndose elegido el origen de las $x$ de modo que

$$x_0 = 0, \quad x_1 = h, \quad x_2 = 2h, \quad \ldots\ldots, \quad x_n = nh.$$

Por medio de los valores dados de $u$ se podrá formar las diferencias sucesivas. Pero se tiene que

$$u_m = u_0 + m\Delta u_0 + \frac{m\,(m-1)}{2!}\,\Delta^2 u_0 + \ldots\ldots,$$

desarrollo que termina en el término que contiene $\Delta^m u_0$, porque los coeficientes de los términos que siguen son nulos.

Suponiendo $m$ igual ó menor que $n$, tendremos

$$u_m = u_0 + m\Delta u_0 + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,\Delta^2 u_0 + \ldots\ldots + \frac{m\,(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{n!}\,\Delta^n u_0.$$

Sustituyendo $m$ por $\frac{x}{h}$, será

$$u = u_0 + \frac{x}{h}\Delta u_0 + \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u_0}{2!} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\ldots\ldots\left(\frac{x}{h} - n + 1\right)\frac{\Delta^n u_0}{n!}.$$

Este polinomio se reduce á $u_m$ para $x = mh$, y por consiguiente toma los valores

$$u_0,\ u_1,\ \ldots\ldots,\ u_n \quad \text{para} \quad x_0 = 0,\ h,\ 2h,\ \ldots\ldots,\ nh.$$

**74.** Fórmula de Lagrange. Sea

$$u_x = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots\ldots + \mu x^n$$

la función que adquiere los $n + 1$ valores correspondientes á los valores arbitrarios

$$x = x_0,\quad x = x_1,\quad \ldots\ldots x = x_n.$$

Consideraremos una función entera y racional de $x$, de grado $n$, que tendrá $n + 1$ coeficientes indeterminados, de los cuales podrá disponerse para satisfacer á $n + 1$ condiciones dadas.

Se tendrá

$$u_0 = \alpha + \beta x_0 + \ldots\ldots + \mu x_0^n$$
$$u_1 = \alpha + \beta x_1 + \ldots\ldots + \mu x_1^n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_n = \alpha + \beta x_n + \ldots\ldots + \mu x_n^n.$$

Los valores de los coeficientes indeterminados contendrán como factores á $u_0,\ u_1,\ \ldots\ldots,\ u_n$ en sus diversos términos, de manera que $u_x$ podrá escribirse bajo la forma

$$u_x = \mathrm{X}u_0 + \mathrm{X}_1 u_1 + \ldots\ldots + \mathrm{X}_n u_n.$$

Pero $u_x$ se reduce á $u_0$ para $x = x_0$; luego se satisfará á esta condición siendo $\mathrm{X} = 1$ y $\mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2,\ \ldots\ldots$ iguales á cero,

es decir, divisibles por $x - x_0$. Lo mismo sucederá para los demás valores de $x$.

Tomaremos pues, para X el producto de una constante por todos los factores $x - x_0$, $x - x_1$, ..... $x - x_n$, excepto el $x - x_0$; para $X_1$ el producto de otra constante por los mismos factores, excepto el $x - x_1$, y así sucesivamente.

De esta manera, sustituyendo cada uno de los valores de $x$, solo quedará el término en que entre el valor correspondiente de $u_x$. Además se hará el coeficiente igual á la unidad.

Sea $x_p$ uno cualquiera de los valores dados de $x$ y $u_p$ el valor correspondiente de $u_x$. Conteniendo $X_p$ los factores $x - x_0$ ,..... $x - x_n$, excepto el $x - x_p$, es evidente, que si se le hace igual á este producto dividido por el valor que toma el mismo cuando se hace en él $x = x_p$, $X_p$ se reducirá á 1 para $x = x_p$.

Las cantídades X, $X_1$, ....., $X_n$ quedarán, pues, determinadas de modo que la ecuación de grado $n$ en $x$, que da el valor de $u_n$ quede satisfecha por los $n + 1$ pares de valores dados; y ninguna otra expresión de igual grado podrá igualarse á los valores $u_0$, $u_1$, ....., $u_n$ por los mismos valores, sin confundirse con ella. La fórmula hallada, será pues,

$$u_x = u_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots\ldots (x_0 - x_n)} + u_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \ldots\ldots (x_1 - x_n)} + \ldots\ldots + u_n \frac{(x - x_0) \ldots\ldots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \ldots\ldots (x_n - x_{n-1})}.$$

# CAPÍTULO VIII

## Nociones de cálculo integral

### § 1.° Integrales simples

**75.** Definiciones. Inversamente á como hemos procedido hasta ahora, una función cualquiera puede considerarse como la derivada de otra función. El problema que tiene por objeto determinar ú obtener esta función se denomina *integración* de la función dada y dicha nueva función se llama la *integral* de la primera.

El problema de la *integración* es el inverso del de la *diferenciación.*

Debe advertirse que una función tiene siempre la misma derivada; pero que inversamente una función tiene infinidad de integrales que difieren entre sí por una constante arbitraria.

En efecto, siendo la derivada de una constante nula, y siendo, por ejemplo, la diferencial de sen $x$ la función $\cos x\, dx$, la integral de ésta no es simplemente sen $x$, sino sen $x$ + *constante.*

El signo de la integración es el siguiente $\int$, símbolo de suma, porque la integral es el límite de una suma, como se verá más adelante, destruyéndose el efecto de los dos signos $d$ y $\int$, de manera que

$$d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx.$$

Si $\varphi(x)$ es una función cuya diferencial es $f(x)\, dx$, la integral general, es decir, la función que comprende todas aquéllas cuya diferencial es $f(x)\, dx$ se expresa por $\varphi(x) + C$.

**76.** INTEGRALES DE LAS FUNCIONES SIMPLES. El cuadro siguiente contiene las intregrales de las funciones elementales:

$$dx^{n+1} = (n+1)\,x^n dx \qquad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$de^x = e^x dx \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

$$da^x = a^x l a dx \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{l a} + C$$

$$dlx = \frac{dx}{x} \qquad \int \frac{dx}{x} = lx + C$$

$$d \operatorname{sen} x = \cos x dx \qquad \int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$d \cos x = -\operatorname{sen} x dx, \qquad \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$d \operatorname{cot} x = -\frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cot} x + C$$

$$d \operatorname{arc\,sen} x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

$$d \operatorname{arc\,cos} x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{arc\,cos} x + C.$$

Se obtienen para la misma integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ dos valores que parecen diferentes; pero como

$$\operatorname{arc\,cos} x + \operatorname{arc\,sen} x = \frac{\pi}{2}$$

se ve que las dos integrales solo difieren por una constante.

OBSERVACIÓN. En todas estas fórmulas $x$ puede ser la va-

riable independiente ó una función cualquiera de ésta. Si por ejemplo, sustituimos en

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$x$ por $\varphi(x)$, tendremos

$$\int [\varphi(x)]^n d\varphi(x) = \frac{[\varphi(x)]^{n+1}}{n+1} + G.$$

## § 2.° Métodos generales

**77.** Nos limitaremas en estas nociones de cálculo integral á exponer los dos métodos de integración llamados *integración por partes* é *integración por sustitución.*

1.° Integración por partes. Si $u$ y $v$ son dos funciones cualesquiera de $x$, se tiene

$$duv = udv + vdu,$$

é integrando, resulta,

$$uv = \int udv + \int vdu$$

ó bien $$\int vdu = uv - \int udv.$$

Este método permite sustituir una integral por otra más fácil de obtener, si se ha hecho convenientemente la descomposición en factores

Ejemplo 1.° Sea $\int x^2 \cos x dx$. Haremos

$$\int x^2 \cos x dx = \int x^2 d \operatorname{sen} x = x^2 \operatorname{sen} x - 2 \int x \operatorname{sen} x dx,$$

$$\int x \operatorname{sen} x dx = - \int x d \cos x = - x \cos x + \int \cos x dx$$

$$= - x \cos x + \operatorname{sen} x + G.$$

Haciendo las sustituciones, resulta,

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + C.$$

2.° $$\int x^m e^x dx.$$

Se tiene

$$\int x^m e^x dx = \int x^m de^x = x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x dx.$$

Como se ve, podremos ir rebajando sucesivamente el exponente de $x$ por una serie de integraciones por partes, hasta llegar á la última integral, que será $\int e^x dx$, cuyo valor es $e^x + C$.

Para $m = 2$, se tiene

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

3.° $\int lx dx.$

Se obtiene

$$\int lx dx = xlx - \int x \frac{dx}{x} = x(lx - 1) + C.$$

2.° INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN. A veces una diferencial que no es inmediatamente integrable, llega á serlo por un cambio de variable.

Sea $x = \varphi(t)$; tendremos

$$dx = \varphi'(t)\, dt, \quad \int f(x)\, dx = \int f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt.$$

EJEMPLOS. 1.° $\int (ax + b)^m dx.$

Haremos $ax + b = t$ de donde $dx = \frac{dt}{a}$; luego

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{1}{a} \int t^m dt = \frac{1}{a} \frac{t^{m+1}}{m+1} + C$$

ó

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{m+1}}{m + 1} + C.$$

2.° Más generalmente, si se tratase de

$$\int f(ax + b)\, dx$$

haríamos

$$ax + b = t \quad \text{de donde} \quad dx = \frac{dt}{a}$$

y la integral se reduciría á

$$\frac{1}{a} \int f(t)\, dt.$$

3.° Sea la integral

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q}.$$

Se tiene idénticamente

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Si se hace

$$x + \frac{p}{2} = t\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \quad \text{de donde} \quad dx = dt\sqrt{q - \frac{p^2}{4}},$$

la integral que se busca será

$$\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arc\,tg} t - C$$

ó, sustituyendo por $t$ su valor en función de $x$,

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

Este resultado puede ponerse bajo otra forma, cuando las raíces del trinomio son imaginarias de la forma

$$\alpha + \beta\sqrt{-1} \quad \text{y} \quad \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

de la ecuación

$$x^2 + px + q = 0.$$

Tendremos en este caso,

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}};$$

y la integral se podrá escribir bajo la forma

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} \frac{x-\alpha}{6} + C.$$

4.° $$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}};$$

se tiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{bx^2}{a}}}.$$

Hagamos

$$\frac{bx^2}{a} = t^2, \text{ de donde } x = t\sqrt{\frac{a}{b}}, \quad dx = \sqrt{\frac{b}{a}}\, dt,$$

por consiguiente,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\, dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arc\,sen}\, t + C$$

ó en fin

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{arc\,sen}\left[x\sqrt{\frac{b}{a}}\right] + C.$$

# LIBRO SEGUNDO

# APLICACIONES ANALÍTICAS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

## CAPÍTULO I

### Desarrollo en serie de las funciones reales

§ 1.º Fórmulas de Taylor y de Mac Laurin

**78.** Teorema. *Sea* $f(x)$ *una función de* $x$ *que permanece finita y continua así como sus* $n+1$ *primeras derivadas, cuando* $x$ *varía desde* $x_0$ *hasta* $x_0+h$, *tendremos que*

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'x_0\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{2!}+\ldots\ldots$$

$$+f^{(n)}(x_0)\frac{h^n}{n!}+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h),$$

*siendo* $\theta$ *un valor comprendido entre* 0 y 1.

Desde luego para un polimonio entero de grado $n$, con solo aplicarle el desarrollo de Newton, se verifica que

$$f(x_0+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x_0)+\ldots\ldots+\frac{h^n}{n!}f^n(x_0),$$

Con objeto de extender este desarrollo al caso en que $f(x)$ sea una función cualquiera, que satisfaga á las condiciones del

teorema, escribamos

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)})x_0)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}R$$

debiéndose determinar R de modo que satisfaga á esta ecuación.

Haciendo $x_1=x_0+h$ ó $x_1-x_0=h$, podemos considerar la $\varphi(x)$ tal, que

$$\varphi(x)=f(x_1)-f(x)-\frac{x_1-x}{1}f'(x)-\frac{(x_1-x)^2}{2!}f''(x)-\ldots$$
$$-\frac{(x_1-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)-\frac{(x_1-x)^{n+1}}{(n+1)!}R,$$

función que se anula para $x=x_0$ y $x=x_1$, permaneciendo además finita y continua, así como su derivada $\varphi'(x)$ mientras $x$ varía entre $x_0$ y $x_1$.

Esta derivada se anula, en virtud del teorema de Rolle, para un valor $x_0+\theta h$ de $x$, designando $\theta$ un valor comprendido entre o y 1. Luego por ser

$$\varphi'(x)=\frac{(x_1-x)^n}{n!}[R-f^{(n+1)}(x)],$$

tendremos que

$$R-f^{(n+1)}(x_0+\theta h)=0 \quad \text{ó} \quad R=f^{(n+1)}(x_0+\theta h);$$

y el desarrollo que nos proponíamos establecer en el teorema, queda justificado.

El término complementario de la serie de Taylor que se representa por $R_n$, es pues,

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h).$$

Esta expresión del término complementario, ó resto de la serie de Taylor se debe á Lagrange.

**79.** OTRAS FORMAS DEL RESTO. Terminando el desarrollo

de Taylor en el término $n^{\text{simo}}$, tendremos

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots\ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h),$$

hallándose $\theta$ comprendido entre 0 y 1.

Sumemos y restemos en el segundo miembro $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$, entonces tendremos los $n+1$ primeros términos del desarrollo de Taylor, y el término complementario será

$$R_n = \frac{h^n}{n!} [f^{(n)}(x+\theta h) - f^n(x)], \qquad (1)$$

suponiéndose solamente que $f^n(z)$ sea finita y determinada cuando $z$ varía desde $x$ hasta $x+h$.

Escribamos $R_n$ bajo la forma $\frac{Bh_p}{n!}$, siendo B una cantidad por determinar y $p$ un número de la serie 1, 2, ....., $n+1$, elegido arbitrariamente.

Tendremos

$$f(x_1) - f(x) - (x_1 - x) f'(x) - \ldots\ldots - \frac{(x_1 - x)^n}{n!} f^{(n)}(x) - \frac{B(x_1 - x)^p}{n!} = 0.$$

La función

$$\psi(z) = f(x_1) - f(z) - \ldots\ldots - \frac{(x_1 - z)^n}{n!} f^{(n)}(z) - \frac{B(x_1 - z)^p}{n!}$$

se anula para $z = x$ y para $z = x_1$. Su derivada, que se reduce á

$$\frac{(x_1 - z)^{p-1}}{n!} [pB - (x_1 - z)^{n-p+1} f^{(n+1)}(z)] = \psi'(z),$$

se anula para un valor $x_0 + \theta h$ de $z$, hallándose comprendido $\theta$ entre o y 1. Se tendrá, pues,

$$p\,B = [x_0 + h - (x_0 + \theta h)]^{n-p+1} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$$
$$= (1 - \theta)^{n-p+1} h^{n-p+1} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)$$

ó en fin

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{n!\,p}(1 - \theta)^{n-p+1} f^{(n+1)}(x_0 + \theta h).$$

Si se hace $p = n + 1$, se vuelve á obtener el resto de Lagrange; si se hace $p = 1$, se obtiene el resto de Cauchy

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{n!}(1 - \theta)^n f^{(n+1)}(x_0 + \theta h). \qquad (2)$$

*Observación.* La fórmula de Taylor (78) puede escribirse

$$\Delta f(x) = f'(x)\,\Delta x + f''(x)\,\frac{\Delta x^2}{1.2} + \ldots + f^n(x)\frac{\Delta x^n}{n!} + E^{n+1}$$

pero, por definición,

$f'(x)\,\Delta x = f'(x)\,dx = df$, $f''(x)\,\Delta x^2 = f''(x)\,dx^2 = d^2f$, ...;

luego la fórmula de Taylor puede escribirse así:

$$\Delta f = df + \frac{1}{2!}\,d^2f + \frac{1}{3!}\,d^3f + \ldots + \frac{1}{n!}\,d^nf + E_{n+1}$$

siendo $E_{n+1}$ un infinitamente pequeño de orden superior al $n^{\text{simo}}$, cuando $\Delta x - dx$ es de primero.

**80.** Serie de Mac Laurin. Si se hace $x = 0$ y se sustituye $h$ por $x$ en la fórmula de Taylor, tendremos

$$f(x) = f(0) + x\,f(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),$$

$$f(x) = f(0) + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}[f^{(n)}(\theta x) - f^{(n)}(0)],$$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x),$$

que constituyen la fórmula de Mac Laurin.

**81.** Observaciones. La función $f(x)$ no puede desarrollarse, según las potencias de $x$ por la fórmula de Mac Laurin, cuando dicha función ó una de sus derivadas se anula ó es indeterminada ó discontinua, para $x = 0$. Pero se la puede desarrollar entonces según las potencias de $x - a$, cambiando en la fórmula de Taylor $x$ por $a$ y $h$ por $x - a$, lo que da

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \ldots\ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

$$+ \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)].$$

La sola condición á que $a$ queda sujeta es que $f^{(n+1)}(z)$ quede finita y determinada para todos los valores de $z$ desde $a$ hasta $x$. La serie será tanto más convergente cuanto más pequeña sea $x - a$.

La función $f(x)$ no puede desarrollarse según las potencias ascendentes de $x$, mas que por la fórmula de Mac Laurin; porque supongamos el desarrollo en serie convergente.

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

Tendremos que

$$[A - f(0)] + [B - f'(0)]\, x + \ldots\ldots = 0.$$

Haciendo $x = 0$, esta ecuación se reducirá á $A = f(0)$. Dividiendo por $x$ y haciendo de nuevo $x = 0$, se tendrá $B = f'(0)$, y así sucesivamente.

No siempre la serie de Mac Laurin, cuando es convergente, tiene por suma $f(x)$. La suma de sus términos puede converger hacia un límite distinto de $f(x)$. Por ejemplo, la función $e^{-\frac{1}{x^2}}$ se anula, así como todas sus derivadas, para $x = 0$. To-

dos los términos de la serie de Mac Laurin, aplicada á esta función, se anula, sin ser dicha función nula.

La igualdad de una función $f(x)$ á la serie de Mac Laurin prolongada al infinito, solo tendrá lugar en el caso de hacerse el resto menor que toda cantidad dada, cuando el número de términos crece al infinito.

Estas observacianes son aplicables á la serie de Taylor

## § 2.° Series de una variable

**82.** Sea $f(x) = e^x$.

Tendremos que

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad \ldots, \quad f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x};$$

luego

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x}.$$

El resto tiende hacia cero á medida que $n$ aumenta, cualquiera que sea $x$, porque se tiene

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x}{1}\frac{x}{2}\ldots\frac{x}{i}\left(\frac{x}{i+1}\frac{x}{i+2}\ldots\frac{x}{n+1}\right).$$

Si se toma un número determinado $k < 1$, se llegará necesariamente á un factor $\frac{x}{i+1} < k$; y por ser los factores decrecientes, el producto $\frac{x}{i+1}\frac{x}{i+2}\ldots\frac{x}{n+1}$ será menor que una potencia de $k$ indicada por el número de los factores, es decir, menor que $k^{n+1-i}$, y por consiguiente tan pequeño como se quiera, tomando $n$ bastante grande. Luego el producto $\frac{x}{1}\frac{x}{2}\ldots\frac{x}{n+1}$, y por consiguiente el resto, puesto que $e^{\theta x}$ permane-

ce finito, puede llegar á ser menor que cualquier cantidad dada; luego la serie en cuestión es convergente y su suma es $e^x$.

De esta serie se deduce el desarrollo de $a^x$.

En efecto: $a = e^{la}$; luego $a^x = e^{xla}$; y sustituyendo en el anterior desarrollo $x$ por $x\,la$ y $e^{\theta x\,la}$ por $a^{\theta x}$, se obtiene

$$a^x = 1 + \frac{xla}{1} + \frac{x^2\,(la)^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{x^n\,(la)^n}{n!} + \frac{x^{n+1}\,(la)^{n+1}}{(n+1)!}\,a^{\theta x}.$$

**83.** Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Se tiene, representando $n$ un número par

$$f'(x) = \cos x \qquad f''(x) = -\operatorname{sen} x, \quad f'''(x) = -\cos x$$
$$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x \qquad f^{(n)}(x) = \mp \operatorname{sen} x \quad f^{(n+1)}(x) = \mp \cos x$$
$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1 \qquad f''(0) = 0, \qquad f'''(0) = -1$$
$$f^{(n)}(0) = 0, \qquad f^{(n+1)}(\theta x) = \mp \cos(\theta x).$$

Será preciso tomar $+\cos(\theta x)$ ó $-\cos(\theta x)$, según que $n+1$ sea de la forma $4p+1$ ó $4p+3$; y se tendrá

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots \pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \mp \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\theta x).$$

Por ser $\cos(\theta x)$ menor que la unidad y poderse tomar $n$ bastante grande para que $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ sea menor que cualquier cantidad dada, la serie obtenida será convergente.

Para desarrollar arc sen $x$ por los coeficientes indeterminados, escribiremos

$$\text{arc sen } x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

Derivando resultará

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = B + 2C + 3Dx^2 + \ldots\ldots$$

Desarrollando el primer miembro,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots\ldots$$

Identificando,

$$B = 1, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2\cdot 3}, \quad E = 0, \ldots\ldots$$

y finalmente

$$\text{arc sen } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots.$$

**84.** Sea $f(x) = \cos x$.

Se tendrá, representando $n$ un número impar

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \operatorname{sen} x \qquad f''''x = \cos x$$
$$f^{(n)}x = \mp \operatorname{sen} x \qquad f^{(n+1)}(\theta x) = \mp \cos(\theta x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \mp \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(\theta x).$$

**85.** Sea $(a+b)^m$, representando $m$ un número cualquiera positivo, negativo ó incomensurable.

Se tiene haciendo $\frac{b}{a} = x$

$$(a+b)^m = [a(1+x)]^m = a^m(1+x)^m$$
$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \ldots$$
$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots.(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$
$$f^{(n+1)}(\theta x) = m(m-1)\ldots.(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}$$
$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots.$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}{n!}x^n$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots.(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n+1}.$$

Suponiendo $x > 1$, la serie será divergente, pues

$$\frac{u_{p+1}}{u^p} = \left(\frac{m+1}{p} - 1\right) x.$$

A medida que $p$ aumenta, esta expresión tiende á $-x$, y $x$ es mayor que 1.

Si $x$ es menor que 1, en valor absoluto, la serie es convergente, pues suponiendo $x$ positivo, se tendrá

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)x^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1-m}.$$

El primer factor puede escribirse bajo la forma

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)x^i}{i!} \times \left(\frac{m-i}{i+1}x\,\frac{m-i-1}{i+2}x\ldots\ldots\frac{m-n}{n+1}x\right).$$

Los factores del paréntesis convergen hacia $-x$, tomando $i$ bastante grande, y si $k$ es un número positivo menor que 1, pero mayor que $x$, se puede suponer á $i$ bastante grande para que cada uno de estos factores sea menor que $k$, abstracción hecha del signo. Su producto, será pues, menor que $k^{n+1-i}$, y por consiguiente tan pequeño como se quiera, si $n$ crece. Luego el producto total

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

será tan pequeño como se quiera, aumentando $n$.

En cuanto al factor $\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1-m}$, como su exponente acaba por ser positivo, tiende hacia cero, al menos mientras $\theta$, que depende de $n$, no se aproxime también á o. Pero, en todos los casos, este factor permanece menor que la unidad. Por consiguiente, el resto R tiende hacia cero, cuando $n$ aumenta. Lue-

go la serie representa á $(1 + x)^m$, para todo valor positivo de $x$ menor que 1, y puesto que el recto cambia de signo cuando $n$ aumenta en una unidad; las sumas sucesivas de la serie serán alternativamente menores y mayores que $(1 + x)^m$.

Si el valor de $x$ es negativo, nada prueba que el factor $\left(\frac{1}{1+\theta x}\right)^{n+1-m}$ no crezca indefinidamente, y aun deberá crecer á menos que $\theta$ tienda hacia cero.

Entonces preciso es recurrir á la segunda forma del resto (2), núm. 79.

Se tiene, pues, en valor absoluto, si se hace $x = -z$,

$$R = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n)}{n!} z^{n+1}(1-\theta)^n \frac{(1-\theta z)^{m-1}}{(1-\theta z)^n},$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n)}{n!} z^{n+1}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^n (1-\theta z)^{m-1}.$$

El primer factor tiende todavía hacia o, cuando $n$ aumenta. Por otra parte, ya que $\frac{1-\theta}{1-\theta z} < 1$, $\left(\frac{1-\theta}{1-\theta z}\right)^n$ puede hacerse menor que cualquier cantidad determinada, á menos que $\theta$ no tienda hacia cero, y aun en este caso este factor es siempre menor que 1.

Por otra parte $(1-\theta z)^{m-1}$ es $< 1$, si $m - 1$ es positivo y $< \frac{1}{(1-z)^{1-m}}$, si $m - 1$ es negativo. Es, pues, en todos los casos una cantidad finita. Luego R puede hacerse menor que cualquier cantidad dada, si $n$ es suficientemente grande.

En resumen, si $x$ se halla entre $-1$ y $+1$, se tiene, cualquiera que sea $m$,

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots\ldots$$

**86.** Sea $f(x) = l(1 + x)$.

(No se trata de desarrollar $lx$, porque $x = 0$ hace infinitas á esta función y á sus derivadas).

Se tendrá

$$f'(x) = (1 + x)^{-1}, \quad f''(x) = -1(1 + x)^{-2},$$
$$f'''(x) = 1 \cdot 2 (1 + x)^{-3}, \ldots\ldots,$$
$$f^{(n)} = \pm (n - 1)! (1 + x)^{-n},$$
$$f^{(n+1)}(\theta x) = \mp n! (1 + \theta x)^{-n-1};$$

luego

$$l(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$
$$\pm \frac{x^n}{n} \mp \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{(1 + \theta x)^{n+1}}.$$

La relación de un término al anterior es, en valor absoluto, $\frac{p}{p+1} x$, y converge hacia $x$ cuando $p$ aumenta. Luego la serie es divergente, cuando el valor absoluto de $x$ es mayor que 1 (13, pág. 21).

Supongamos ahora que $x$ sea menor en valor absoluto que 1. En este caso la serie es siempre convergente, y su suma es $l(1 + x)$. En efecto

1.° Sea $x$ positivo; se tiene

$$R = \frac{1}{n+1} \left( \frac{x}{1 + \theta x} \right)^{n+1}.$$

$\frac{x}{1 + \theta x}$ es una fracción menor que la unidad, y su potencia $(n + 1)^{\text{sima}}$ podrá hacerse menor que cualquier cantidad dada; lo mismo sucederá con R.

2.° Sea $x$ negativo. Hagamos $x = -z$, se tendrá, abstracción hecha del signo,

$$R = \frac{1}{n+1} \frac{z^{n+1}}{(1 - \theta z)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \left( \frac{z}{1 - \theta z} \right)^{n+1}.$$

Pero, bajo esta forma no se ve que el resto tienda hacia o; tomemos, pues, la otra forma del resto de Cauchy,

$$R = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\theta x) = x^{n+1}(1-\theta)^n \frac{1}{(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Se tendrá $R = \left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right) \frac{z}{1-\theta z}$;

pero $\frac{z-\theta z}{1-\theta z} < z < 1$; luego $\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^n$,

y por consiguiente $\left(\frac{z-\theta z}{1-\theta z}\right)^n \frac{z}{1-\theta z}$

puede hacerse menor que cualquier cantidad dada.

Así, cuando $x$ está comprendido entre $+1$ y $-1$, se tiene

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots \qquad (1)$$

**87.** Fórmulas para el cálculo de los logaritmos.

De la fórmula (1) resulta, haciendo $x = \frac{h}{y}$,

$$l(1+x) = l\left(1+\frac{h}{y}\right) = l(y+h) - ly;$$

$$l(y+h) - ly = \frac{h}{y} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{y}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{y}\right)^3 - \ldots\ldots \qquad (2)$$

Para $h = 1$ se tendrá

$$l(y+1) - ly = \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \ldots\ldots$$

fórmula muy convergente cuando $y$ es muy grande.

Para obtener otra fórmula más cómoda cambiaremos $x$ en $-x$ en la fórmula (1), y tendremos

$$l(1-x) = -x - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots; \qquad (3)$$

luego

$$l(1+x)-l(1-x)=l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)$$

Haciendo $\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{h}{y}$, de donde $x=\frac{h}{2y+h}$,

y por ser además

$$l\left(1+\frac{h}{y}\right)=l(y+h)-ly;$$

tendremos que

$$l(y+h)-ly=2\left[\frac{h}{2y+h}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{(2y+h)^3}+\ldots\ldots\right]$$

Haciendo $y=1$, $h=1$ se tiene

$$l2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\ldots\ldots\right)$$

Y enseguida

$$l4=2l2,\quad l5=1.4+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^2}+\ldots\ldots\right),$$

$$l10=l2+l5=2,\ 3025818\ldots\ldots$$

y el módulo del sistema de base 10 ó de Briggs, será

$$\frac{1}{l10}=0,\ 434294482=\text{log. tab. } e.$$

Para un sistema cualquiera, la fórmula (2) será

$$\log(y+h)-\log y=\log e\left(\frac{h}{y}-\frac{h^2}{2y^2}+\ldots.\pm\frac{h^i}{i(y+\theta h)^i}\right).$$

**88.** Desarrollo de arc tg $x$. Sea

$$y=\text{arc tg } x$$

suponiendo el arco comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ cuya tangente es igual á $x$.

Si hacemos $$\frac{\pi}{2} - y = u$$

tendremos, en virtud de (47, 5°)

$$f^{(n)}\, x = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,\operatorname{sen}^n u \operatorname{sen} nu.$$

Pero, por hipótesis, cuando $x$ es cero también lo es $y$; luego $u = \frac{\pi}{2}$; y por consiguiente

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,\operatorname{sen} n\,\frac{\pi}{2}$$

es decir, $$f^n(0) = 0, \quad \text{si } n \text{ es par y}$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{3(n-1)}{2}}\,(n-1)!$$

si $n$ es impar.

La fórmula de Mac Laurin se reduce, pues, á

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots + \frac{x^{n-1}}{n-1} + R$$

siendo $$R = (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n}\,\operatorname{sen}^n u_1 \operatorname{sen} nu_1,$$

siendo $u_1$ un arco comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, que satisface á la relación $$\cot u_1 = \theta x,$$

hallándose $\theta$ comprendida entre 0 y 1.

Luego si $x$ es inferior á 1 en valor absoluto, R tiende hacia cero cuando $n$ crece indefinidamente.

Si queremos desarrollar arc tg $x$ por el método de los coeficientes indeterminados, escribiremos

$$\operatorname{arc\,tg} x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1+x^2} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \ldots\ldots;$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots\ldots$$

y obtendremos

$$A = 0,\quad B = 1,\quad C = 0,\quad D = -\frac{1}{3},\quad E = 0,\ \ldots\ldots$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots\ldots$$

**89.** Cálculo de $\pi$.

Designando por $p$ el arco cuya tangente es igual á $\frac{1}{5}$, se tendrá sucesivamente

$$\operatorname{tg} 2p = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \qquad \operatorname{tg} 4p = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

El arco es pues, un poco mayor que $\frac{\pi}{4}$, y si se llama $q$ á la diferencia de estos dos números, se tiene

$$\operatorname{tg} q = \operatorname{tg}\left(4p - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{\frac{120}{119} + 1} = \frac{1}{239}.$$

De esta resulta la relación siguiente

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239},$$

es decir, aplicando la fórmula que da el desarrollo de arc tg $x$

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \ldots\ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \ldots\ldots\right)$$

Basta, por ejemplo, calcular 11 términos de la primera serie y 3 de la segunda, para obtener el valor siguiente de $\pi$

$$3,\ 14159\ 26535\ 89793. \quad (*)$$

## § 3.° Desarrollo en series según las potencias de la variable independiente

**90.** Desarrollo de las raíces de una ecuación. Newton empleó su paralelógramo y De Gua el triángulo analítico, de que nos acuparemos más adelante, para desarrollar las funciones en series ordenadas según las potencias ascendentes ó descendentes de la variable independiente.

Ahora vamos á resolver algunos problemas que conducen á la *reversibilidad* de las series, comenzando por el caso de darse una función implícitamente mediante una ecuación.

1.° Sea: $y^3 - 2y - 5 = 0$. (**)

El número 2 difiere en menos de una décima de la raíz buscada. Haremos, pues, $2 + p = y$; sustituyendo en la ecuación resulta $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$. Despreciando $p^3 + 6p^2$ por ser valores pequeños respecto á los demás términos, tendremos $10p - 1 = 0$, y el valor $p = 0,1$ se aproxima al que se busca. Hagamos $0,1 + q = p$, y tendremos

$$q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0,$$

y aproximadamente, de $11,23\,q + 0,061 = 0$ obtendremos $q = -0,0054$.

Supongamos $-0,0054 + r = q$, y continuando el procedimiento resulta finalmente $y = 2,09455148.....$

2.° Sea la ecuación

$$y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0. \quad (***)$$

---

* Rouché et Levy, *Analyse infinitesimal*, t. I, p. 178,

** *Isaaci Newtoni Opera*, t. I, p. 395.

*** Id., p. 398.

De la ecuación ficticia $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$ se deduce $y = a$. Haremos, pues, $a + p = y$, y sustituyendo resulta $p^3 + 3ap^2 + axp + \ldots\ldots = 0$. Tomaremos $4a^2p + a^2x = 0$ por ecuación aproximada, que da $p = -\frac{x}{4}$.

Para obtener otro término de $y$, haremos $-\frac{x}{4} + q = p$; y sustituyendo, resultará $q^3 - \frac{3}{4}xq^2 + 3aq^2 + \ldots\ldots = 0$. Obtendremos enseguida la ecuación aproximada $4a^2q - \frac{1}{16}ax^2 = 0$ y resulta $q = \frac{x^2}{16a}$; y continuando resultará finalmente

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64\,a} + \frac{131\,x^3}{512\,a^2} + \frac{509\,x^4}{1658\,a^3} \ldots\ldots$$

3.° Sea la ecuación

$$\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + y - z = 0.$$

Tenemos sucesivamente que $z + p = y$, $\frac{z^2}{2} + q = p$, etc. y el desarrollo de $y$ es

$$y = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \ldots\ldots$$

4.° Desarrollar en serie (*)

$$y = \sqrt{a + bx + cx^2} = D.$$

Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}b + cx}{D}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{ac - \frac{1}{4}b^2}{D^3},$$

(*) *Instituciones de cálculo diferencial é integral*, por D. Josef Chaix, p. 47.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{3}{4}b^2 - 3ac\right)\left(\frac{1}{2}b + cx\right)}{D^3}, \ldots\ldots$$

Haciendo $x = 0$, tendremos para determinar la expresión

$$y = A + A'x + \frac{A''}{2}x^2 + \ldots\ldots$$

$$A = \sqrt{a}, \quad A' = \frac{b}{2\sqrt{a}}, \quad A'' = \frac{ac - \frac{1}{4}b^2}{(\sqrt{a})^3}$$

$$y = \sqrt{a} + \frac{bx}{2\sqrt{a}} + \frac{(4ac - b^2)x^2}{2 \cdot 4(\sqrt{a})^3} + \ldots\ldots$$

5.° *Desarrollar en serie la expresión* $y = \text{arc sen } x$.

Tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{R}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{R^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1 + 2x^2}{R^5}, \ldots\ldots$$

Para $x = 0$, $A = 0$, $A' = 1$, $A'' = 0$, ....

$$y = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{3 \cdot 3\, x^5}{5!} + \ldots\ldots$$

*Caso particular.* Sea $y = 30°$, el seno, $x$, será $= \frac{1}{2}$, y tendremos

$$\text{arc } 30° = \frac{1}{2} + \frac{1}{3!\,(2)^3} + \frac{3 \cdot 3}{5!\,2^5} + \ldots\ldots$$

3. *Determinar las raíces de la ecuación*

$$ay^3 - x^3y - ax^3 = 0 \qquad (1)$$

*por medio de series convergentes.*

*Solución:* Sea una de las raíces

$$y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \ldots\ldots \qquad (2)$$

Sustituyendo en (1), resulta

$$\left.\begin{array}{l} aA^3x^{3m} + 3aA^2Bx^{3m+n} + 3aA^2C \\ \qquad\qquad + 3aAB^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} x^{3m+2n} \\ + \ldots\ldots \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} = 0 \quad (3)$$
$$- Ax^{m+3} - Bx^{m+n+3} - Cx^{m+2n+3} - \ldots\ldots - ax^3$$

Para determinar $m$ y $n$ tenemos

$3m = 3$, $3m + n = m + 3$; luego $m = 1$, $n = 1$.

Para determinar A, B, C, ..... tendremos

$$aA^3 - a = 0, \quad 3aA^2B - A = 0,$$
$$3aA^2C + 3aAB^2 - B = 0,$$

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{3a}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{81a^3}, \quad E = \frac{1}{243a^4}, \ldots.$$

Sustituyendo en (2) resulta

$$y = x + \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{81a^3} + \frac{x^5}{243a^5} + \ldots\ldots \qquad (a)$$

que es una de las raíces de la ecuación (1).

Suponiendo ahora $x$ muy grande, la serie

$$Ax^m + Bx^{m+n} + \ldots\ldots$$

será descendente y por consiguiente $n$ negativa. Ordenando la ecuación (3), tendremos

$$\left.\begin{array}{l} Ax^{m+3} + Bx^{m+n+3} + Cx^{m+2n+3} + \ldots\ldots \\ + ax^3 - aA^3x^{3m} - 3aA^2Bx^{3m+n} - 3aA^2C \\ \qquad\qquad - 3aAB^2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ x^{3m+3n} \\ - \ldots\ldots \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} = 0.$$

Identificando, resulta

$m + 3 = 3$, $m + n + 3 = 3m$; luego $m = 0$, $n = -3$

$A = -a$, $B = -a^4$, $C = -3a^7$, $D = -12a^{10}$, ....;

luego

$$y = -a - \frac{a^4}{x^3} - \frac{3a^7}{x^6} - \frac{12a^{10}}{x^9} - \ldots\ldots \qquad (b)$$

que será otra raíz de la ecuación propuesta.

La condición de que $n$ sea negativa también se verifica ordenando la ecuación (3) del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} aA^3x^{3m} + 3aA^2Bx^{3m+n} + 3aA^2C \mid x^{3m+2n+\ldots} \\ \qquad\qquad + 3aAB^2 \mid \qquad + \ldots. \\ - Ax^{m+3} - Bx^{m+n+3} - Cx^{m+2n+3} - Dx^{m+3n+8} \\ \ldots\ldots - ax^3 \end{array}\right\} = 0.$$

Identificando exponentes y coeficientes, resulta:

$$3m = m + 3, \quad m = \frac{3}{2}, \quad n + \frac{9}{2} = 3 \text{ ó } n = -\frac{3}{2}$$

$$aA^2 - 1 = 0, \quad A = \pm \frac{1}{a^{1:2}}, \quad 3B - B - a = 0, \quad B = \frac{a}{2},$$

$$C = \mp \frac{3}{8} a^{5:2}, \quad D = \frac{a^4}{2}, \ldots\ldots$$

$$y = \frac{x^{3:2}}{a^{1:2}} + \frac{a}{2} - \frac{3a^{5:2}}{8x^{3:2}} + \frac{a^4}{2x^3} - \ldots\ldots \qquad (c)$$

$$y = -\frac{x^{3:2}}{a^{1:2}} + \frac{a}{2} + \frac{3a^{5:2}}{8x^{3:2}} + \frac{a^4}{2x^3} + \ldots\ldots \qquad (d)$$

Se han obtenido, pues, las cuatro raíces $(a)$, $(b)$, $(c)$ y $(d)$ desarrolladas en series.

4. *Desarrollar en serie las tres raíces de la ecuación*

$$y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0. \qquad (1)$$

Sea $y = A^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \ldots\ldots$

Sustituyendo en (1), resulta

$$\left.\begin{array}{l} A^3x^{3m} + 3A^2Bx^{3m+n} + 3A^2Cx^{3m+2n} + \ldots\ldots \\ \qquad + 3AB^2x^{3m+2n} + \ldots\ldots \\ + a^2Ax^m - A^2Bx^{m+n} - a^2Cx^{m+2n} - \ldots\ldots \\ \qquad + aA^2x^{m+1} + aBx^{m+n+1} + \ldots\ldots - x^3 \end{array}\right\} = 0 \qquad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} a^2Ax^m + a^2Bx^{m+n} + a^2Cx^{m+2n} + \ldots\ldots \\ + x^3 - aAx^{m+1} - aBx^{m+n+1} - \end{array}\right\} = 0$$

$$m = 3, \quad n = 1, \quad a^2A + 1 = 0, \quad a^2B - aA = 0, \quad A^2C - aB = 0, \ldots$$

$$A = -\frac{1}{a^2}, \quad B = -\frac{1}{a^3}, \quad C = -\frac{1}{a^4}, \ \ldots\ldots$$

$$y = -\frac{x^3}{a^2} - \frac{x^4}{a^3} - \frac{x^5}{a^4} - \ldots\ldots - \frac{2x^9}{a^8} - \frac{5x^{10}}{a^9} \ldots \qquad (a)$$

Disponiendo los términos de la ecuación (2) de este modo

$$\left.\begin{array}{l} Ax^{3m} + 3a^2Bx^{3m+n} + 3A^2C \,\big|\, x^{3m+2n} + \ldots\ldots \\ \qquad\qquad + 3AB^2 \,\big|\, \\ -a^2Ax^m - a^2Bx^{m+n} - a^2Cx^{m+2n} \ldots\ldots \\ \qquad + aAx^{m+1} - aBx^{m+n+1} \ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

tendremos $m = 0$, $n = 1$, $A^3 - a^2A = 0$,

$$A = \pm a, \quad B = \mp\frac{1}{2}, \quad C = \mp\frac{1}{8a}, \quad D = \frac{8 \mp 1}{16a^2}, \ \ldots\ldots$$

$$y = a - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8a} + \frac{7x^3}{16a^2} + \frac{59x^4}{128a^3} + \ldots\ldots \qquad (b)$$

$$y = -a + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8a} + \frac{9x^3}{16a^2} + \frac{69x^4}{128a^3} + \ldots\ldots \qquad (c)$$

Estas tres series $(a)$, $(b)$ $(c)$ son las raices de (1) en el supuesto de ser $x$ muy pequeña.

Para hallar las que corresponden al caso en que $x$ sea muy grande, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} A^3x^{3m} + 3A^2Bx^{3m+n} + 3A^2C \,\big|\, x^{3m+2n} + 3A^2D \,\big|\, x^{3m+3n} + \ldots \\ \qquad\qquad + 3AB^2 \,\big|\, \qquad\quad + 6ABC \,\big|\, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + B^3 \,\big|\, \\ -x^3 + aAx^{m+1} + aBx^{m+n+1} + aCx^{m+2n+1} + \ldots\ldots \\ \qquad - a^2Ax^m \qquad - a^2Bx^{m+n} + \ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Identificando, resulta $m = 1$, $n = -1$, y como en virtud de estos valores se tiene

$$3m + 2n = m + n + 1 = m,$$
$$3m + 3n = m + 2n + 1 = m + n,$$

la ordenación supuesta puede verificarse, y tendremos

$$A^3 - 1 = 0, \quad 3A^2B + aA = 0, \quad A = 1,$$

$$B = -\frac{a}{3}, \quad C = \frac{a^2}{3}, \quad D = \frac{a^3}{81}, \ \ldots\ldots$$

$$y = x - \frac{a}{3} + \frac{a^2}{3x} + \frac{a^3}{81x^2} - \ldots\ldots$$

5. Sea $y = \sqrt{ax - x^2}$ ó $y^2 - ax \mp x^2 = 0$.

*Desarrollar* y *en serie según las potencias ascendentes de* x.

Suponiendo $y = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + \ldots\ldots$ y sustituyendo, resulta

$$A^2x^{2m} + 2ABx^{2m+n} + 2ACx^{2m+2n} + 2ADx^{2m+3n} + \ldots$$
$$+ B^2x^{2m+2n} + 2BCx^{2m+3n} + - ax \mp x^2 = 0 \quad (1)$$

que puede ordenarse así:

$$\left.\begin{array}{l|l} A^2x^{2m} + 2ABx^{2m+n} + 2AC & x^{2m+2n} + \ldots\ldots \\ - ax \mp x^2 \qquad + B^2 & + \ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

$$m = \frac{1}{2}, \quad n = 1, \quad A^2 - a = 0, \quad A = a^{1:2}, \quad B = \pm\frac{1}{2a^{1:2}},$$

$$C = -\frac{1}{8a^{3:2}}, \quad D = \pm\frac{1}{16a^{5:2}} \ldots; \qquad \text{luego}$$

$$y = a^{1:2}x^{1:2} \pm \frac{x^{3:2}}{2a^{1:2}} - \frac{x^{5:2}}{8a^{3:2}} \pm \frac{x^{7:2}}{16a^{3:2}} - \ldots$$

Hemos obtenido la serie en el supuesto de ser $x$ una cantidad muy pequeña ó al menos menor que $a$. Para obtenerla en la hipótesis de $x > a$, ordenaremos la ecuación (1) como sigue:

$$\left.\begin{array}{l|l} A^2x^{2m} + 2ABx^{2m+n} + 2AC & x^{2m+2n} + \ldots\ldots \\ \mp x^2 \quad - ax \qquad + B^2 & + \ldots\ldots \end{array}\right\} = 0.$$

Tendremos

$$m = 1, \quad n = -1, \quad A^2 = \pm 1, \quad 2AB - a = 0,$$
$$2AC + B^2 = 0, \quad 2AD + 2BC = 0, \ \ldots\ldots$$

$$A = 1, \quad B = \frac{a}{2}, \quad C = -\frac{a^2}{8}, \quad D = \frac{a^3}{16}, \ldots\ldots$$

$$y = \sqrt{ax + x^2} = x + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8x} - \frac{a^3}{16x^2} - \ldots\ldots$$

6. *Desarrollar la función dada por la ecuación*

$$y^4 - 2x^2y^2 + a^3x = 0,$$

*que no se puede desarrollar por la fórmula de Taylor.*

Diferenciando, resultará

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y^2x - a^3}{4y^3 - 4x^2y}.$$

Pero si $x = a$, resulta $y = \pm a$, siendo en este caso $\frac{dy}{dx} = \infty$; luego la fórmula de Taylor no es aplicable á este caso.

Sustituyamos $a + k$ por $x$, y la ecuación propuesta se transformará en

$$y^4 - 2(a^2 + 2ak + k^2)y^2 + a^4 + a^3k = 0.$$

Pero cuando $k = 0$, $y = \pm a$; luego escribiremos

$$y = a + Ak^m + Bk^{m+n} + Ck^{m+2n} + \ldots\ldots$$

Sustituyendo tendremos

$$a^4 + 4a^3Ak^m + 4a^3Bk^{m+n} + \ldots\ldots = 0,$$

que se reduce á

$$\left.\begin{array}{l} 4a^2A^2k^{2m} + 4aA^3k^{3m} + \ldots\ldots \\ -3a^3k \quad -4a^2ABk^{2m+n} - \ldots\ldots \\ \qquad\quad -8a^2Ak^{m+1} - \ldots\ldots \end{array}\right\} = 0$$

é identificando, resulta

$$m = \frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{2}, \quad A = \pm\frac{\sqrt{3a}}{2}, \quad B = -\frac{5}{4}\ldots\ldots$$

y restableciendo el doble signo, se obtienen las dos series

$$y = \pm a \pm \frac{\sqrt{3ak}}{2} - \frac{5k}{4} \pm \ldots\ldots$$

7. *Dada* $y = z + xY$, *en la que* Y *representa una función de* y, *determinar el valor de* y *en función de* z *y* x *por medio de una serie de potencias ascendentes de* x.

*Solución:* $$y = z + xZ + \frac{x^2}{2}\frac{dZ^2}{dz} + \frac{x^3}{2.3}\frac{d^2Z^3}{dz^2} + \ldots\ldots \quad (1)$$

En efecto, supongamos desarrollada una función $u$ de las variables $x, y, z, \ldots\ldots$ con relación á las potencias de $x$, considerada como única variable, y sea

$$u = A + A'x + A''\frac{x^2}{2} + \ldots\ldots \quad (2)$$

Cuando $x = o$ se tiene $y = z$; luego en el desarrollo (2) la función $u$ da $A = z$. Derivando la ecuación propuesta respecto á $x$, tenemos

$$\frac{dy}{dx} = Y + x\frac{dY}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Pero haciendo $x = o$, se tiene $\frac{dy}{dx} = Y$, con $y = z$; luego $\frac{dy}{dx} = Z = A'$, representando Z la misma función de $z$ que Y lo es de $y$.

Derivando la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = Y + x\frac{dY}{dy}\frac{dy}{dx}$$

tendremos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dY}{dy}\frac{dy}{dx} + x\left(\frac{d^2Y}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dY}{dy}\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Haciendo $x = o$ y sustituyendo por $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dY}{dy}$ sus valores respectivos Z y $\frac{dZ}{dz}$, resultará

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2Z\frac{dZ}{dz} = \frac{dZ^2}{dz} \quad \text{y} \quad A'' = \frac{dZ^2}{dz}.$$

Tendremos enseguida

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 3\frac{d^2Y}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2} + 3\frac{dY}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} + x,$$

y haciendo $x = 0$, resultará

$$A''' = 3Z^2\frac{d^2Z}{dz^2} + 6Z\frac{dZ^2}{dz^2} = \frac{d^2Z^3}{dz^2}, \quad A''' = \frac{d^2Z^3}{dz^2}, \text{ etc.}$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula general, resultará

$$y = z + xZ + \frac{x^2}{2!}\frac{dZ^2}{dz} + \frac{x^3}{3!}\frac{d^2Z^3}{dz^2} + \ldots\ldots$$

*Ejemplo.* Sea $Y = -\operatorname{sen} y$, la ecuación $y = z + xY$ se reduce á $y = z - x \operatorname{sen} y$; y tendremos

$$Z = -\operatorname{sen} z, \quad Z^2 = \operatorname{sen} z^2 = \frac{1 - \cos 2z}{2},$$

$$Z^3 = -\operatorname{sen} z^3 = \frac{-3\operatorname{sen} z + \operatorname{sen} 3z}{4}, \ldots\ldots$$

$$\frac{dZ^2}{dz} = \operatorname{sen} 2z, \quad \frac{d^2Z^3}{dz^2} = \frac{3}{4}(\operatorname{sen} z - 3\operatorname{sen} 3z), \ldots\ldots;$$

luego

$$y = z - x\operatorname{sen} z + \frac{x^2}{2}\operatorname{sen} 2z + \frac{x^3}{2\cdot 3}(\operatorname{sen} z - 3\operatorname{sen} 3z) - \ldots.$$

8. *Siendo* $y = z + xY$, *se pide el valor de una función cualquiera de* y *que llamaremos* u, *por medio de una serie ordenada según las potencias ascendentes de* x.

*Solución:* Haciendo $x = 0$, se tiene $y = z$. Representando por $6$ la misma función de $z$ que $u$ es de $y$, se tendrá $u = 6 = A$. Por ser $u$ la función de $y$, se tendrá $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}$. Pero cuando $x = 0$ es $y = z$, $u = 6$ y $\frac{dy}{dx} = Z$; luego $\frac{du}{dx} = Z\frac{d6}{dz} = A'$.

Además

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{du}{dy}\frac{d^2y}{dx^2},$$

y puesto que $x = 0$, es $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dZ^2}{dz}$, tendremos al sustituir este valor y los demás correspondientes á la misma hipótesis,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = Z^2\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{d\theta}{dz}\frac{dZ^2}{dz} = \frac{dZ^2\frac{d\theta}{dz}}{dz} = A'',$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = \frac{d^3u}{dy^3}\frac{dy^3}{dx^3} + 3\frac{d^2u}{dy^2}\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{du}{dy}\frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots$$

Para $x = 0$ es $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dZ^2}{dz}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2Z^3}{dz^2}$;

y sustituyendo

$$\frac{d^3u}{dx^3} = Z^3\frac{d^3\theta}{dz^2} + 3Z\frac{d^2\theta}{dz^2}\frac{dZ^2}{dz} + \frac{d\theta}{dz}\frac{d^2Z^3}{dz^2} = \frac{d^2Z^3\frac{d\theta}{dz}}{dz^2} = A'''.$$

Sustituyendo estos valores de A, A', ..... resulta

$$u = \theta + xZ\frac{d\theta}{dz} + \frac{x^2}{2!}\frac{dZ^2\frac{d\theta}{dz}}{dz} + \frac{x^3}{3!}\frac{d^2Z^3\frac{d\theta}{dz}}{dz^2} + \ldots\ldots$$

Esta puede obtenerse como ejercicio por el método de coeficientes indeterminados.

9. Supongamos que siendo $Y = -\operatorname{sen} y$, se pida el valor de $u = \cos y$. Tendremos

$$y = z - x\operatorname{sen} y,\quad Z = -\operatorname{sen} z,\quad \theta = \cos z,\quad \frac{d\theta}{dz} = -\operatorname{sen} z,$$

$$Z^2 = \operatorname{sen} z^2,\ \ldots\ldots,\ Z\frac{d\theta}{dz} = \operatorname{sen} z^2 = \frac{1 - \cos 2z}{2},$$

$$Z^2 \frac{d6}{dz} = -\operatorname{sen} z^3 = \frac{-3 \operatorname{sen} z + \operatorname{sen} 3z}{4},$$

$$Z^3 \frac{d6}{dz} = \operatorname{sen} z^4 = \frac{3 - 4 \cos 2z + \cos 4z}{8}, \ldots$$

Haciendo las derivaciones indicadas y sustituyendo, resultará

$$\cos y = \cos z + \frac{x}{2}(1 - \cos 2z) - \frac{3x^2}{2 \cdot 4}(\cos z - \cos 3z) + \frac{x^3}{3}(\cos 2z - \cos 4z) - \ldots\ldots$$

4.° Sea $y = z + xy^m$; se trata de obtener el valor de $y^n$. Tendremos $Y = y^m$, $u = y^n$, y por consiguiente

$$Z = z^m, \quad 6 = z^n, \quad \frac{d6}{dz} = nz^{n-1}, \quad Z\frac{d6}{dz} = nz^{m+n-1},$$

$$Z^2 \frac{d6}{dz} = nz^{2m+n-1}, \quad Z^3 \frac{d6}{dz} = nz^{3m+n-1}, \ldots\ldots$$

Sustituyendo en la fórmula general, y efectuando las derivaciones indicadas, tendremos

$$u \text{ ó } y^n = z^n + xnz^{m+n-1} + \frac{x^2}{2} n(2m+n-1) z^{2m+n-2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} n(3m+n-1)(3m+n-2) z^{3m+n-3} + \ldots\ldots$$

10. *Dado el desarrollo de* y *por medio de las potencias ascendentes de* x, *hallar* x *por medio de las potencias ascendentes de* y.

Newton, el primero que resolvió este problema, ó sea el *método inverso de las series*, empleó las consideraciones siguientes: (*)

Supongamos la serie

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots$$

que expresa el seno en función del arco.

---

* *Isaaci Newtoni Opera*, t. IV. *Commercium Epistolicum*, p. 506.

* *Opera omnia*, t. I, *Excerpta ex epistolis* p. 290.

Elevando al cubo, resulta

$$y^3 = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13x^7}{120} - \ldots \text{ ó } \frac{y^3}{6} = \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{13x^7}{720} - \ldots$$

Sumando esta ecuación con la propuesta, resulta

$$y + \frac{y^3}{6} = x - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{120}\right)x^5 + \left(\frac{13}{720} - \frac{1}{5040}\right)x^7 - \ldots$$

$$\text{ó} \quad y + \frac{y^3}{6} = x - \frac{3x^5}{40} + \frac{x^7}{56} - \ldots$$

Para hacer que desaparezca $x^5$, elevaremos á la quinta potencia, y resultará

$$y^5 = x^5 - \frac{5x^7}{6} + \ldots, \quad \frac{3y^5}{40} = \frac{3x^5}{40} - \frac{x^7}{16} + \ldots$$

Sumando con la anterior, se obtiene

$$y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} = x - \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{56}\right)x^7 + \ldots = x - \frac{5x^7}{112} + \ldots$$

y continuando el procedimiento,

$$\frac{5y^7}{112} = \frac{5x^7}{112} - \ldots, \quad y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} + \frac{5y^7}{112} + \ldots = x - \ldots$$

y por consiguiente

$$x = y + \frac{y^3}{6} + \frac{3y^5}{40} + \frac{5y^7}{112} + \ldots$$

$$= y + \frac{y^3}{2 \cdot 3} + \frac{3y^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}y^7 + \ldots$$

Si la ecuación fuese $y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \ldots$, tendríamos que elevarla á la potencia $\frac{3}{2}$ para eliminar el término $bx^3$, á la segunda para eliminar el término $cx^4$, etc.

Para exponer el uso de las fórmulas generales

$$y = z + xZ + \frac{x^2}{2}\frac{dZ^2}{dz} + \frac{x^3}{2.3} + \ldots\ldots \quad (1)$$

$$u = 6 + xZ\frac{d6}{dz} + \frac{x^2}{2}\frac{dZ^2\dfrac{d6}{dz}}{dz} + \ldots\ldots \quad (2)$$

en el método inverso de las raíces, supondremos que, siendo

$$z = ax + bx^2 + cx^3 + \ldots\ldots,$$

se quiera determinar el valor de $x$ en $z$.

Para comparar esta ecuación con $y = z + x\mathrm{Y}$, la escribiremos bajo esta forma

$$x = \frac{z}{a} - \frac{1}{a}(bx^2 + cx^3 + ex^4 + \ldots\ldots)$$

y será $y = x$, $x = -\dfrac{1}{a}$, $\mathrm{Y} = bx^2 + cx^3 + ex^4 + \ldots\ldots$

$$\mathrm{Z} = bz^2 + cz^3 + ez^4 + \ldots, \quad \mathrm{Z}^2 = b^2z^4 + 2bcz^5 + \ldots, \quad \mathrm{Z}^3 = b^3z^6 + \ldots$$

$$\frac{dZ^2}{dz} = 4b^2z^3 + 10bcz^4 + \ldots\ldots \quad \frac{d^2Z^3}{dz^3} = 30b^3z^4 + \ldots\ldots$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula (1), escribiendo $\dfrac{z}{a}$ en vez de $z$, se obtendrá

$$x = \frac{z}{a} - \frac{1}{a}\left(\frac{b}{a^2}z^2 + \frac{c}{a^3}z^3 + \frac{e}{a^4}z^4 + \ldots\ldots\right)$$
$$+ \frac{1}{a^2}\left(\frac{2b^2}{a^3}z^3 + \frac{5bc}{a^4}z^4 + \ldots\ldots\right) - \frac{1}{a^3}\frac{5b^3}{a^4}z^4 + \ldots\ldots$$

$$x = \frac{z}{a} - \frac{b}{a^3}z^2 + \left(\frac{2b^2 - ac}{a^5}\right)z^3$$
$$- \left(\frac{5b^3 - 5abc + a^2e}{a^7}\right)z^4 + \ldots\ldots$$

11. *Dada* $y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \ldots\ldots$ *desarrollar* x *en serie según las potencias ascendentes de* y.

Para hallar el valor de $x$, la compararemos con la ecuación $y = z + xY$, haciendo $x^2 = \xi$; y se transformará en

$$y = a\xi + b\xi^{3:2} + c\xi^2 + c\xi^{5:2} + \ldots.$$

ó $$\xi = \frac{y}{a} - \frac{1}{a}(b\xi^{3:2} + c\xi^2 + e\xi^{5:2} + \ldots)$$

y por consiguiente

$$y = \xi, \quad z = \frac{y}{a}, \quad x = -\frac{1}{a}, \quad u = \xi^{1:2}, \quad 6 = z^{1:2},$$

$$Z = bz^{3:2}\ cz^2 + ez^{5:2} + \ldots\ldots,$$

$$Z^2 = b^2z^3 + 2bcz^{7:2} + \ldots., \quad Z^3 = b^3z^{9:2} + \ldots., \quad \frac{d6}{dz} = \frac{z^{-1:2}}{2}$$

$$Z\frac{d6}{dz} = \frac{1}{2}(bz + cz^{3:2} + ez^2 + \ldots.),$$

$$\frac{dZ^2}{dz}\frac{d6}{dz} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}b^2z^{3:2} + 6bcz^2 + \ldots.\right), \quad \frac{d^2Z^3}{dz^2}\frac{d6}{dz} = 6b^3z^2 + \ldots$$

y sustituyendo estos valores en la fórmula general,

$$u = 6 + xZ\frac{d6}{dz} + \ldots.,$$

resultará

$$\xi^{1:2} = x = \frac{y^{1:2}}{a^{1:2}} - \frac{1}{2a}\left(b\frac{y}{a} + c\frac{y^{3:2}}{a^{3:2}} + \ldots.\right) + \frac{1}{4a^2}\left(\frac{5}{2}b^2\frac{y^{3:2}}{a^{3:2}} + bc\frac{y^2}{a^2} + \ldots.\right)$$

ó $$x = \frac{y^{1:2}}{a^{1:2}} - \frac{b}{2a^2}y + \left(\frac{5b^2 - 4ac}{8a^{7:2}}\right)y^{3:2} - \ldots.$$

12. *Determinar* y *en función de* z, *siendo*

$$z = y - \lambda(a \operatorname{sen} my + b \operatorname{sen} ny + \ldots.)$$

Comparando la fórmula escrita bajo la forma

$$y = z + \lambda\,(a \operatorname{sen} my + b \operatorname{sen} ny + \ldots\ldots)$$

con $y = z + x\mathrm{Y}$, resultará

$$x = \lambda, \quad \mathrm{Y} = a \operatorname{sen} my + b \operatorname{sen} ny + \ldots\ldots,$$

$$\mathrm{Z} = a \operatorname{sen} mz + b \operatorname{sen} nz + \ldots\ldots,$$

$$\mathrm{Z}^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 mz + 2ab \operatorname{sen} mz \operatorname{sen} nz + b^2 \operatorname{sen}^2 nz + \ldots\ldots$$

$$\frac{d^2\mathrm{Z}}{dz} = 2\,(ma^2 \operatorname{sen} mz \cos mz$$

$$+ abm \operatorname{sen} nz \cos mz + abn \operatorname{sen} mz \cos nz$$

$$+ nb^2 \operatorname{sen} nz \cos nz + \ldots\ldots);$$

pero $2 \operatorname{sen} mz \cos mz = \operatorname{sen} 2mz$, $2 \operatorname{sen} nz \cos nz = \operatorname{sen} 2nz$,

$$2 \cos mz \operatorname{sen} nz = \operatorname{sen} (m+n)\,z - \operatorname{sen} (m-n)\,z,$$

$$2 \operatorname{sen} mz \cos nz = \operatorname{sen} (m+n)\,z + \operatorname{sen} (m-n)\,z;$$

luego $$\frac{d\mathrm{Z}^2}{dz} = ma^2 \operatorname{sen} 2mz + (m+n)\,ab \operatorname{sen} (m+n)\,z$$

$$- (m-n)\,ab \operatorname{sen} (m-n)\,z + nb^2 \operatorname{sen} 2nz;$$

$$y = z + \lambda\,(a \operatorname{sen} mz + b \operatorname{sen} nz + \ldots\ldots)$$

$$+ \frac{\lambda^2}{2}(ma^2 \operatorname{sen} 2mz + (m+n)\,ab \operatorname{sen} (m+n)\,z$$

$$- (m-n)\,ab \operatorname{sen} (m-n)\,z + nb^2 \operatorname{sen} 2nz + \ldots\ldots) + \ldots\ldots$$

13. *Dada la función*

$$u = \mathrm{x} + 2\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x}^3 + \ldots\ldots$$

*hallar* x *en función de* u.

*Solución:* En general, si

$$u = ax + bx^2 + cx^3 + ex^4 + \ldots\ldots,$$

se tiene

$$u' = a + 2bx + \ldots, \quad u'' = 2b + 2 \cdot 3cx + 3 \cdot 4ex_2 + \ldots$$

$$u''' = 2 \cdot 3c + 2 \cdot 3 \cdot 4ex + \ldots\ldots, \quad u'''' = 2 \cdot 3 \cdot 4e + \ldots\ldots$$

$$(x') = \frac{1}{(u')}, \quad (x'') = -\frac{(u'')}{(u')^3}, \quad (x''') = -\frac{(u')\,(u''') - 3\,(u)^2}{(u')^5}$$

$$(x') = \frac{1}{a}, \quad (x'') = -\frac{2b}{a^3}, \quad (x''') = -\frac{6ac - 12b^2}{a^5}, \quad \ldots.$$

y sustituyendo en la fórmula de Mac-Laurin:

$$x = \frac{1}{a}u - \frac{b}{a^3}u^2 + \frac{2b^2 - ac}{a^5}u^3 - \frac{a^2e - 5abc + 5b^3}{a^7}u^4 + \ldots.$$

Haciendo $a = 1,\ b = 2,\ c = 3,\ \ldots.,$

resulta $x = u - 2u^2 + 5u^3 - 14u^4 + \ldots..$

14. *Desarrollar* tg. x *en potencias de* x.

*Solución:* Se tiene

$$u = \text{tg } x, \quad \frac{du}{dx} = 1 + u^2, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = 2u + 2u^3$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} = 2\frac{du}{dx} + 6u^2\frac{du}{dx} = 2 + 8u^2 + 6u^4$$

$$\frac{d^4u}{dx^4} = 16u + 40u^3 + 24u^5$$

$$\frac{d^5u}{dx^5} = 16 + 136u^2 + 240u^4 + 120u^6$$

. . . . . .

$$\text{tg } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \ldots..$$

PROBLEMA. *Determinar un valor aproximado de*

$$Ax^m + Bx^n + \ldots.. + Mx^l$$

*que difiera del verdadero valor en un infinitamente pequeño, por lo menos, de orden* n.

Si $f^{(n)}(x)$ es contínua en la proximidad de $x = 0$, la fórmula de Mac Laurin da

$$y = f(0) + xf'(0) + \ldots.. + \frac{x^{n-1}f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + R_n,$$

siendo $R_n$ de orden $\overline{\overline{>}} n$, y por consiguiente, despreciable. Pero este método exige el cálculo penoso de las derivadas sucesivas de $f(x)$, y es ventajoso emplear otros métodos.

Si tenemos $y = u + v + \ldots$, un valor aproximado de $y$ será la suma de los valores aproximados de $u$, $v$, $\ldots$.

En el caso en que la suma de los valores principales fuese nula, para aproximar suficientemente, se volvería á comenzar el cálculo de los valores aproximados, tomándose un término más en el desarrollo de cada una de las cantidades $u$, $v$, $\ldots$.

Sea por ejemplo: $y = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x + x^3$.

Las cantidades $2 \operatorname{sen} x$ y $-\operatorname{sen} 2x$ son de primer orden; pero la suma de sus valores principales es nula. Llevando más adelante la aproximación, tendremos

$$2 \operatorname{sen} x = 2x - \frac{2x^3}{3!} + \ldots, \quad \operatorname{sen} 2x = 2x - \frac{8x^3}{3!} + \ldots$$

de donde

$$y = x^3 \left( -\frac{2}{6} + \frac{8}{6} + 1 \right) + \ldots = 2x^3 + \ldots$$

Sea $y = uv$, siendo $u$ y $v$ de orden $\alpha$ y $\beta$ respectivamente. Se obtendrá el valor aproximado, multiplicando los valores aproximados de $u$ y de $v$, y despreciando en el producto los términos de orden $\overline{\overline{>}} n$, para lo que bastará llevar la aproximación de $u$ hasta los términos de orden $n - \beta$ y los de $v$ hasta el orden $n - \alpha$.

Si $y = \frac{u}{v}$, sean

$$u_1 = Ax^{\alpha} + A'x^{\alpha'} + \ldots \quad v_1 = Bx^{\beta} + B'x^{\beta'} + \ldots$$

los valores aproximados de $u$ y de $v$, y sean

$$u = u_1 + R_1, \quad v = v_1 + S. \qquad \text{Se tendrá}$$

$$\frac{u}{v} - \frac{u_1}{v_1} = \frac{uv_1 - vu_1}{vv_1} = \frac{Rv_1 - Su_1}{vv_1};$$

siendo $v$ y $v_1$ de orden $\beta$ y $u_1$ de orden $\alpha$, esta expresión será de orden $\leqq n$, si el orden de R es $\geqq n + \beta$ y el de S es $\geqq n - \alpha + 2\beta$.

Se tendrá entonces, en los límites de la aproximación exigida,

$$y = \frac{u}{v} = \frac{u_1}{v_1}.$$

Esto sentado, se efectuará la división de $u_1$ por $v_1$ hasta que aparezcan en el cociente términos del grado $\geqq n$.

Sea $q = Cx^{\gamma} + C'x^{\gamma'} + \ldots\ldots$ el cociente y T el resto. Se tendrá

$$y = \frac{u_1}{v_1} = Cx^{\gamma} + C'x^{\gamma'} + \ldots\ldots + \frac{T}{v_1}.$$

Siendo el primer término del cociente $\frac{T}{v_1}$ de orden $\geqq n$, por hipótesis, este cociente podrá despreciarse. Se tendrá, pues,

$$y = Cx^{\gamma} + C'x^{\gamma'} + \ldots\ldots$$

con la aproximación pedida.

El primer término de este desarrollo, que es el valor principal de $y$, será evidentemente el cociente de los términos $Ax^{\alpha}$, $Bx^{\beta}$, valores principales de $u$ y de $v$.

Si $\beta > \alpha$, los primeros términos de la serie $\gamma$, $\gamma'$ ..... serán negativos. En este caso, la fórmula de Mac Laurin no sería aplicable, pues la función sería discontinua para $x = 0$.

En vez de efectuar la división de $u_1$ por $v_1$, se habría podido escribir

$$y = Cx^{\gamma} + C'x^{\gamma'},$$

siendo C, C', $\gamma$, $\gamma'$ indeterminadas, y se podría escribir $y = \frac{u_1}{v_1}$ ó

$$(Cx^{\gamma} + Cx^{\gamma'} + \ldots.)\ (Bx^{\beta} + B'x^{\beta'} + \ldots.) = Ax^{\alpha} + A'x^{\alpha'} + \ldots\ldots$$

y desarrollando,

$$BCx^{\beta+\gamma}+\ldots = Ax^{\alpha} + A'x^{\alpha'} + \ldots$$

Expresando la identidad de los términos correspondientes, se obtendrá un sistema de ecuaciones de condición.

Así por ejemplo se tendrá, en virtud de $BCx^{\beta+\gamma} = Ax^{\alpha}$

$$\beta+\gamma=\alpha, \quad BC = A, \quad \gamma=\alpha-\beta, \quad C=\frac{A}{B}.$$

*Ejemplo:* Sea la expresión $\dfrac{x}{e^x-1}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{2}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

cuyo desarrollo se busca.

No cambiando dicha expresión de signo cuando $x$ cambia de signo, solo contendrá potencias pares. Haremos pues,

$$\frac{x}{2}\frac{e^x+1}{e^x-1} = A + B_1\frac{x^2}{2!} - B_2\frac{x^4}{4!} + B_3\frac{x^6}{6!} - \ldots.$$

Quitando denominadores y sustituyendo $e^x$ por su desarrollo, se obtendrá

$$\frac{x}{2}\left(2+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots..+\frac{x^n}{n!}+\ldots..\right)$$

$$=\left(\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)\left(A+B_1\frac{x_2}{2!}-B_2\frac{x_4}{4!}+\ldots\right)$$

Identificando, resultará $1 = A, \ldots.$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n!} = \frac{A}{(n+1)!}+\frac{B_1}{1.2\ldots(n-1)!}-\frac{B_2}{1.2\ldots(n-3)!}+\ldots$$

y se obtendrán dos ecuaciones para calcular cada una de las cantidades B

$$B_1=\frac{1}{6}, \quad B_2=\frac{1}{30}, \quad B_3=\frac{1}{42},$$

$$B_4=\frac{1}{30}, \quad B_5=\frac{5}{66}, \quad B_6=\frac{691}{2730}, \quad \ldots.$$

que son los *números de Bernoulli.*

## § 4.° Aplicaciones

1. Dada la función

$$f(x+1) = 3x^2 - 4x$$

hallar la función $f(x-2)$.

Hagamos $x+1 = y$ ó $x-2 = y-3$, y tendremos

$$f(y) = 3(y-1)^2 - 4(y-1) = 3y^2 - 10y + 7$$
$$f'(y) = 6y - 10, \quad f''(y) = 6.$$

Por consiguiente

$$f(y-3) = 3y^2 - 10y + 7 - 3(6y - 10) + \frac{9}{2}6$$
$$= 3y^2 - 28y + 64$$
$$f(x-2) = 3(x+1)^2 - 28(x+1) + 64.$$

2. Desarrollar la expresión $e^x + e^{-x}$ en serie.

*Solución:*

$$e^x + e^{-x} = 2 + 2\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n!}(e^{\theta x} + e^{-\theta x}).$$

3. Desarrollar en serie sen $(x+a)$.

*Solución:*

$$\operatorname{sen}(x+a) = \operatorname{sen} a + \frac{x}{1}\cos a - \frac{x^2}{2!}\operatorname{sen} a - \frac{x^3}{3!}\cos a + \ldots.$$

4. Desarrollar $\cos(x+a)$.

*Solución:*

$$\cos(x+a) = \cos a - \frac{x}{1}\operatorname{sen} a - \frac{x^2}{2!}\cos a + \ldots.$$

5. Desarrollar $\operatorname{sen}^2 x$.

*Solución:* $$\operatorname{sen}^2 x = 2\frac{x^2}{2!} - 2^3\frac{x^4}{4!} + 2^5\frac{x^6}{6!} - \ldots.$$

6. Desarrollar $f(x) = \operatorname{sen}(x-a)\cos(x+a)$,

*Solución:*

$$f(x) = \frac{x}{1}\cos 2a - 2\frac{x^2}{2!}\operatorname{sen} 2a - 2^2\frac{x^3}{3!}\cos 2a + \ldots\ldots$$

7. Desarrollar $l(a+x)$.

*Solución:*

$$l(a+x) = l(a) + \left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{a}\right)^3 - \ldots\ldots$$

8. Desarrollar la expresión

$$y = l[x + (1 + x^2)^{1:2}].$$

Tenemos que

$$y = l[(1+x^2)]^{1:2}\left(1 + \frac{x}{(1+x^2)^{1:2}}\right)$$

$$= l(1+x^2)^{1:2} + l\left[1 + \frac{x}{(1+x^2)^{1:2}}\right]..$$

Para $x < 1$, $l(1+x^2)^{1:2}$ se desarrolla según la serie de Mac Laurin, y $l\left[\frac{x}{(1+x^2)^{1:2}}\right]$ en serie ordenada según las potencias enteras positivas y crecientes de $\frac{x}{(1+x^2)^{1:2}}$.

Estos dos desarrollos permanecen convergentes, cuando se toman todos los términos con igual signo, y lo mismo sucede para el desarrollo con relación á $x$ de una potencia entera y positiva de $\frac{x}{(1+x^2)^{1:2}}$; luego

$$y = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \ldots\ldots + A_n x^n + \ldots\ldots$$

Las cantidades $A_n$ se determinan por el método de los coeficientes indeterminados. En efecto, siendo

$$\frac{d\left[1 + \frac{x}{(1+x^2)^{1:2}}\right]}{dx} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

tendremos

$$\frac{dy}{dx} = A_1 + 2A_2x + \ldots + nA^n x^{n-1} = (1+x^2)^{-1:2}.$$

Pero $$(1 + x^2)^{-1:2} = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots$$

$$+ (-1)^p \frac{1 \cdot 2 \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2p} x^{2p} + \ldots,$$

Las cantidades $A_n$ son nulas cuando $n$ es par, y para $n = 2p + 1$ se tiene

$$A_{2p+1} = (-1)^p \frac{1 \cdot 3 \ldots (2p-1)}{1 \cdot 2 \ldots 2p} \frac{1}{2p+1}; \text{ luego}$$

$$l\,[x + (1 + x^2)^{1:2}] = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^5}{5} - \ldots.$$

Este resultado reproduce el desarrollo de arc sen $z$ cuando se sustituye $x$ por $iz$.

9. Desarrollar $y = (\text{arc sen } x)^2$

se tiene $$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \text{ arc sen } x}{(1 - x^2)^{1:2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{1 - x^2} + 2x \frac{\text{arc sen } x}{(1 - x^2)^{3:2}};$$

luego $$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0.$$

Diferenciando esta ecuación $(n - 1)$ veces resulta:

$$(1 - x^2)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - (2n - 1)\,x\frac{d^n y}{dx^n} - (n - 1)^2 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0.$$

Se deduce de esto, que para $x = 0$,

$$\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0 - (n - 1)^2 \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)_0 = 0,$$

es decir, $$\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0 = 0,$$ cuando $n$ es par, y

$$\left(\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\right)_0 = 2 \cdot 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \ldots\ldots (n-1)^2, \quad \text{cuando } n \text{ es impar.}$$

Calculadas las derivadas de $y = (\text{sen } x)^2$, tendremos que

$$(\text{arc sen } x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2}{3}\frac{4}{5}\frac{x^6}{3} + \ldots\ldots + \frac{2 \cdot 4 \ldots (2n-2)}{3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}\frac{x^{2n}}{n} + \ldots\ldots$$

10. Desarrollar *arc tgz.*

Derivando el resultado del problema anterior, tendremos

$$\frac{\text{arc sen } x}{(1-x^2)^{1:2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \ldots\ldots + \frac{2 \cdot 4 \ldots\ldots (2n-2)}{3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}x^{2n-1} + \ldots\ldots \quad (1)$$

(hallándose comprendida $x$ entre $-1$ y $+1$). Hagamos

$$x = \frac{z}{(1+z^2)^{1:2}}, \quad \text{de donde} \quad \text{arc sen } x = \text{arc tg } z. \quad (2)$$

Pero de la fórmula (2) resulta que

$$(1-x^2)^{1:2} = \frac{1}{(1+z^2)^{1:2}} \qquad \text{y}$$

$$\text{arc tg } z = \frac{z}{1+z^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \ldots\ldots\right]$$

De la fórmula anterior se deduce el valor de $\pi$ por la siguiente:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{2}{10} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \ldots\ldots\right] + \frac{3}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{1}{10} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \ldots\ldots\right]$$

# CAPÍTULO II

## Desarrollo en serie de las funciones de variables imaginarias

### § 1.º Fórmula de Moivre y sus consecuencias

**91** Relación fundamental. Se tiene que

$$(\cos x + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} x)(\cos y + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} y) = \cos(x+y) + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}(x+y),$$

y análogamente para un número cualquiera de factores. En este caso haciendo

$x = y = z = \ldots\ldots$ se tendrá

$$(\cos x + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} x)^m = \cos mx + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} mx,$$

que es la *fórmula de Moivre.*

**92.** Desarrollo de senos y cosenos de un múltiplo de un arco. Desarrollando la fórmula de Moivre, se tiene

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{2!}\cos^{m-2} x \operatorname{sen}^2 x + \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\operatorname{sen} mx = m\cos^{m-1} x \operatorname{sen} x - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3} x \operatorname{sen}^3 x + \ldots\ldots$$

**93.** Desarrollo de potencias de senos y cosenos. Hagamos

$$u = \cos x + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} x, \quad v = \cos x - \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} x,$$

y tendremos

$$2\cos x = u + v, \quad 2\sqrt{-1}\,\operatorname{sen} x = u - v$$

$$2^m \cos^m x = (u+v)^m = u^m + mu^{m-1}v + \frac{m(m-1)}{2!}u^{m-2}v^2 + \ldots\ldots$$

Distinguiremos dos casos:

1.° $m$ par é igual á $2n$. Entonces el desarrollo tiene el término medio

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)}{n!}u^n v^n ;$$

luego $2^m \cos^m x = u^m + v^m + mvu\,(u^{m-2} + v^{m-2}) + \ldots\ldots$

$$+ \frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)}{n!}u^n v^n ; \qquad (3)$$

pero $u^p + v^p = 2\cos px$ y $u^p v^p = 1$, porque $uv = 1$; luego

$$2^m \cos^m x = 2\cos mx + 2m\cos(m-2)x + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)}{n!},$$

$$2^{m-1}\cos^m x = \cos mx + m\cos(m-2)x \ldots\ldots + \frac{1}{2}\frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)}{n!}.$$

2.° Si $m$ es impar é igual á $2n+1$, $(u+v)^n$ tendrá un número par de términos y será

$$2^{m-1}\cos mx = \cos mx + m\cos(m-2)x + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+2)}{n!}\cos x.$$

**94.** Para obtener $\operatorname{sen}^m x$, se hará

$$u - v = 2\sqrt{-1}\,\operatorname{sen} x,$$

y elevando á la $m^{\text{sima}}$ potencia, se tendrá

$$(\sqrt{-1})^m 2^m \operatorname{sen}^m x = u^m - mu^{m-1}v \ldots\ldots$$
$$\pm \frac{m(m-1)}{2!} u^2 v^{m-2} \mp muv^{m-1} \pm v^m.$$

1.º Supongamos $m$ par é igual á $2n$, tendremos

$$(\sqrt{-1})^m = (-1)^n.$$

En este caso habrá término medio, que será

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)}{n!} u^n v^n.$$

Tendremos pues, agrupando los términos dos á dos,

$$(-1)^n 2^m \operatorname{sen}^m x = (u^m + v^m) - muv(u^{m-2} + v^{m-2})$$
$$+ \frac{m(m-1)}{2!} u^2 v^2 (u^{m-4} + v^{m-4}) - \ldots\ldots$$
$$\pm \frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)}{n!} u^n v^n,$$

y sustituyendo $u^k + v^k$ por $2\cos kx$, $u^k v^k$ por 1, y dividiendo por 2,

$$(-1)^n 2^{m-1} \operatorname{sen}^m x = \cos mx - m\cos(m-2)x + \ldots\ldots$$
$$\pm \frac{1}{2} \frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+1)}{n!} \qquad (4)$$

2.º Supongamos $m$ impar é igual á $2n+1$, entonces

$$(\sqrt{-1})^m = (-1)^m \sqrt{-1}$$

y agrupando los términos dos á dos,

$$(-1)^n \sqrt{-1}\, 2^m \operatorname{sen}^m x = (u^m - v^m) - muv(u^{m-2} - v^{m-2})$$
$$\ldots\ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+2)}{n!} u^n v^n (u - v).$$

En general,

$$u^k - v^k = 2\sqrt{-1}\,\operatorname{sen} kx, \quad u^k v^k = 1;$$

luego, dividiendo por $2\sqrt{-1}$, resulta

$$(-1)^n 2^{m-1} \operatorname{sen}^m x = \operatorname{sen} mx - m \operatorname{sen}(m-2)x + \ldots\ldots$$
$$\pm \frac{m(m-1)\ldots\ldots(n+2)}{n!} \operatorname{sen} x \qquad (5)$$

**95.** Ecuaciones binomias. La fórmula de Moivre da la expresión de las raices de las ecuaciones

$$x^n - 1 = 0, \quad x^n + 1 = 0.$$

1.° Suponiendo, en efecto que

$$x = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\theta)$$

tendremos $x^n = \rho^n(\cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} n\varphi)$

y sustituyendo en $x^n - 1 = 0$, se tendrá

$$\rho^n(\cos n\theta + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} n\theta) - 1 = 0$$

y $$\rho^n \cos n\theta - 1 = 0, \quad \operatorname{sen} n\theta = 0$$

de donde $$\theta = \frac{2i\pi}{n}, \quad \rho = 1;$$

luego $$x = \cos\frac{2i\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\frac{2i\pi}{n}$$

2.° Haciendo la misma sustitución en $x^n + 1 = 0$, resulta

$$x = \cos\frac{(2i+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\frac{(2i+1)\pi}{n}.$$

Estas expresiones dan las raices de grado $n$ de la unidad.

Problema. *Dada la ecuación* $\operatorname{tg}\varphi = k \operatorname{tg}\theta$, *desarrollar* $\varphi$ *en función de términos que contengan* $\theta$.

Tenemos

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2\varphi i} - 1}{e^{2\varphi i} + 1}.$$

Obtendremos análoga fórmula para $\theta$, y en virtud de la ecuación dada, resultarán las relaciones

$$\frac{F-1}{F+1} = k\,\frac{T-1}{T+1} \qquad (e^{2\varphi i} = F, \quad e^{2\varphi i} = T)$$

$$F = \frac{1-k+(1+k)\,T}{1+k+(1-k)\,T} = T\,\frac{\frac{\lambda}{T}+1}{1+\lambda T} \qquad \left(\lambda = \frac{1-k}{1+k}\right)$$

$$lF = lT + l\left(1 + \frac{\lambda}{T}\right) - l\,(1+\lambda T),$$

$$lF = lT - \lambda\left(T - \frac{1}{T}\right) + \frac{\lambda^2}{2}\left(T^2 - \frac{1}{T^2}\right) + \ldots\ldots$$

Pero $lF = 2\varphi i$ y $lT = 2\theta i$;

luego $$T^n + \frac{1}{T^n} = e^{2n\theta i} - e^{-n\theta i} = 2i \operatorname{sen} 2n\theta.$$

Por consiguiente

$$2\varphi i = 2\theta i - 2\lambda i \operatorname{sen} 2\theta + \frac{2\lambda^2 i}{2} \operatorname{sen} 4\theta - 2\lambda^3 i \operatorname{sen} 6\theta + \ldots\ldots$$

$$\varphi = \theta - \lambda \operatorname{sen} 2\theta + \frac{\lambda^2}{2} \operatorname{sen} 4\theta - \ldots\ldots$$

fórmula muy usada en Astronomía. Además

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 1 - 2\lambda\cos 2\theta + 2\lambda^2 \cos 4\theta - \ldots\ldots$$

y por ser $\operatorname{tg}\varphi = k \operatorname{tg}\theta$, $(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)\,\frac{d\varphi}{d\theta} = k\,(1 + \operatorname{tg}^2\theta)$

se tendrá $$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{k\,(1+\operatorname{tg}^2\theta)}{1 + k^2 \operatorname{tg}^2\theta};$$

pero $$\operatorname{tg}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta} \text{ y } \quad k = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$$

luego $$\frac{k(1+\operatorname{tg}^2\theta)}{1+k^2\operatorname{tg}^2\theta} = \frac{1-\lambda^2}{1+2\lambda\cos 2\theta+\lambda^2} =$$

$$= 1 - 2(\lambda\cos 2\theta - \lambda^2\cos 4\theta + \lambda^3\cos 6\theta - \ldots\ldots)$$

## § 2.° Expresiones imaginarias

**96.** Definiciones. Las funciones racionales de variables imaginarias se definen, por extensión de las reglas de cálculo de las cantidades reales.

Las funciones trascendentes ó irracionales se definen directamente

**97** Funciones exponencial y circulares. 1.° Sea

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots \qquad (1)$$

Suponiendo

$$z = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\theta)$$

se reduce á

$$1 + \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\theta) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{\rho^n}{n!}(\cos n\theta + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} n\theta) + \ldots\ldots$$

La parte real y el coeficiente de $\sqrt{-1}$ forman dos series convergentes; *diremos* pues que esta función es la función exponencial $e^z$ definida por la igualdad (1) para cualquier valor real ó imaginario de $z$.

2.° Sean las series convergentes

$$\operatorname{sen} z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3!} + \ldots\ldots, \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots\ldots$$

que representarán dos funciones bien determinadas de $z$, y

convendremos en designar estas funciones por sen $z$ y cos $z$, para valores reales ó imaginarios de $z$.

3.° Las funciones $e^z$, sen $z$ y cos $z$ tienen las propiedades características demostradas para el caso de la variable real. Así

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

se reduce á

$$\left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots\right)\left(1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \ldots\ldots\right)$$
$$= 1 + \frac{x+y}{1} + \frac{(x+y)}{2!} + \ldots\ldots$$

que es una identidad, y continuará satisfecha para valores imaginarios de $x$ é $y$.

También tenemos

$$\text{sen}\,(-z) = -\,\text{sen}\,z, \quad \cos(-z) = \cos z.$$

Si en la identidad (1) se cambia $z$ en $z\sqrt{-1}$, resulta

$$e^{z\sqrt{-1}} = 1 + \frac{z\sqrt{-1}}{1} - \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3\sqrt{-1}}{3!} + \ldots\ldots$$

ó bien

$$e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,z = \cos z + i\,\text{sen}\,z$$

y cambiando $z$ en $-z$,

$$e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1}\,\text{sen}\,z = \cos z - i\,\text{sen}\,z$$

sumando y restando, tenemos

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \text{sen}\,z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i},$$

que son las fórmulas de Euler.

Sustituyendo $x$ por $x\sqrt{-1}$ en las fórmulas de Euler resulta

$$\cos(ix) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{sen}\,(ix) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,i.$$

Las funciones $\frac{1}{2}(e^x \pm e^{x-})$

se llaman *coseno y seno hiperbólicos de* x.

**98.** Observación. Las fórmulas de la Trigonometría se extienden al caso de la variable imaginaria, pues tenemos que

$$e^{(x+y)\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1}}\, e^{y\sqrt{-1}},$$

$$\cos(x+y) + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \sqrt{-1}\,(\operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x).$$

Si $x$ é $y$ son reales, basta igualar las partes reales y los coeficientes de $\sqrt{-1}$ para obtener las fórmulas de la adición de arcos. Si sustituímos en la ecuación anterior $x$ é $y$ por $-x$ y $-y$, tendremos:

$$\cos(x+y) - \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - \sqrt{-1}\,(\operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y)$$

combinando con la ecuación anterior, se deduce

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$
$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x.$$

**99.** Logaritmo. Siendo

$$z = a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\theta),$$

convendremos en designar por $lz$ una expresión $u + v\sqrt{-1}$ tal, que se tenga

$$e^{u+v\sqrt{-1}} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}\theta).$$

Para determinar $u$ y $v$, escribiremos

$$e^{u+v\sqrt{-1}} = e^u e^{v\sqrt{-1}} = e^u(\cos v + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} v)$$
$$e^u \cos v = \rho\cos\theta, \quad e^u \operatorname{sen} v = \rho\operatorname{sen}\theta, \qquad (1)$$

elevando al cuadrado, se obtiene

$$e^{2u} = \rho^2;$$

$u$ es el logaritmo neperiano aritmético de $\rho$ ó de $\sqrt{a^2 + b^2}$ y las expresiones (1) dan

$$\cos v = \cos \theta, \quad \operatorname{sen} v = \operatorname{sen} \theta, \quad v = \theta + 2k\pi,$$

siendo $k$ un entero, y resulta que

$$lz = l\,[\rho\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\theta] = l\rho + (\theta + 2k\pi\sqrt{-1}),$$

siendo $\rho$ un valor aritmético.

Así $lz$, tiene una infinidad de determinaciones.

Cuando $z$ es real y positivo, su argumento $\theta$ es nulo; $lz$ tiene una determinación real, que es el logaritmo aritmético, y una infinidad de valores imaginarios.

Tenemos también

$$e^{2iz} = \frac{\cos x + i \operatorname{sen} x}{\cos x - i \operatorname{sen} x} = \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x};$$

y tomando los logaritmos, se obtiene

$$x = \frac{1}{2i} l \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}$$

y haciendo $\operatorname{tg} x = z$, $x = \operatorname{arc\,tg} z$, resulta

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i} l \frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i}{2} l \frac{1 - iz}{1 + iz}.$$

A cada valor de $z$ corresponde una infinidad, según se indicó, de valores del logaritmo, y por consiguiente, una infinidad de determinaciones de la función inversa arc tg $z$.

**100.** Sea $z^m$, que definiremos por la fórmula

$$z^m = e^{mlz};$$

sabemos determinar el valor ó valores del segundo miembro, cualesquiera que sean $m$ y $z$. Haciendo

$$z = \rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta),$$

tenemos $z^m = e^{m\,[l\rho + (\theta + 2k\pi)\,i]}$

$$= \rho^m\,[\cos m\,(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen} m\,(\theta + 2k\pi)], \qquad (1)$$

siendo el módulo $\rho$ un número determinado.

Si $m$ es un número entero, el segundo miembro tiene siempre el mismo valor, cualquiera que sea $k$. Si $m$ es igual á la fracción irreducible $\frac{p}{q}$, se tendrán las $q$ determinaciones que se obtienen para $k = 0, 1, 2, \ldots\ldots, q - 1$, pues para dos valores $k'$ y $k''$ comprendidos en esta serie, la diferencia

$$\frac{2p\,(k' - k'')\,\pi}{q}$$

de los argumentos de $z^m$ no puede ser múltiplo de $2\pi$; porque $q$ es primo con $p$ y superior á $k' - k''$. Además, un valor cualquiera de $k$, no comprendido en la serie, $0, 1, \ldots\ldots q - 1$ es igual á un número $k'$ de esta serie aumentado en un múltiplo $nq$, positivo ó negativo, de $q$; el argumento correspondiente de $z^m$ es

$$\frac{p\,(\theta + 2k' + 2nq)\,\pi}{q} = 2pn\pi + \frac{p\,(\theta + 2k')\,\pi}{q},$$

y el valor de $z^m$ coincide con uno de los que habíamos obtenido anteriormente.

En particular, deducimos las raíces $q^{\text{simas}}$ de la unidad haciendo $m = \frac{1}{q}$, $\rho = 1$, $\theta = 0$, en la ecuación (1):

$$\sqrt[q]{1} = \cos\frac{2k\pi}{q} + i\,\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{q}.$$

## § 3.° Funciones hiperbólicas.

**101.** Generación por las fórmulas de Euler. Hemos visto que sustituyendo en las fórmulas de Euler $z$ por $x\sqrt{-1}$, resulta

$$\operatorname{sen}(x\sqrt{-1}) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\sqrt{-1}.$$

$$\cos(x\sqrt{-1}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

y que las funciones $\frac{1}{2}(e^x \pm e^{-x})$

se llaman *coseno y seno hiperbólicos* de $x$, las cuales se designan con las características Ch $x$ y Sh $x$.

Por consiguiente las fórmulas (1) pueden escribirse:

$$\text{sen } xi = i \text{ Sh } x, \qquad \cos xi = \text{Ch } x$$

Para las funciones circulares se tiene

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Obtendremos la fórmula correspondiente al seno y coseno hiperbólicos, sumando y restando las expresiones

$$\text{Ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{Sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

lo que da

$$\text{Ch } x + \text{Sh } x = e^x, \qquad \text{Ch } x - \text{Sh } x = e^{-x}; \qquad (1)$$

y multiplicando estas ecuaciones, se obtiene la relación

$$\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1 \qquad (2)$$

entre el seno y coseno hiperbólicos.

Por analogía con las funciones circulares, la razón del seno al coseno hiperbólicos, se llama *tangente hiperbólica* y la recíproca *cotangente hiperbólica* y las recíprocas del seno y del coseno se llaman *cosecante* y *secante hiperbólicas;* de manera que las líneas hiperbólicas se representan por los símbolos

$$\text{Sh } x, \quad \text{Ch } x, \quad \text{Th } x, \quad \text{Cth } x, \quad \text{Sech } x, \quad \text{Cosech } x.$$

De la ecuación (2) resulta la siguiente:

$$1 - \frac{\text{Sh}^2 x}{\text{Ch}^2 x} = \frac{1}{\text{Ch}^2 x} \quad \text{ó} \quad \text{Th}^2 x + \text{Sch}^2 x = 1 \qquad (3)$$

De la ecuación (3) resulta que

$$\text{Ch}^2 x = \frac{1}{1 - \text{Th}^2 x} \qquad (4)$$

y de (4) y $\dfrac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x} = \operatorname{Th} x, \qquad \operatorname{Sh} x = \dfrac{\operatorname{Th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{Th}^2 x}}, \qquad (5)$

que dan el seno y coseno hiperbólicos en función de la tangente.

Además se tiene

$$\operatorname{Ch}(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = \operatorname{Ch} x$$

$$\operatorname{Sh}(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -\operatorname{Sh} x$$

$$\operatorname{Th}(-x) = -\operatorname{Th} x, \qquad \operatorname{Cot h}(-x) = \operatorname{Cot h} x$$

$$\operatorname{Sech}(-x) = \operatorname{Sech} x, \qquad \operatorname{Cosech}(-x) = -\operatorname{cosech} x.$$

Luego: Ch $x$, Cot h y Sech son funciones pares, Sh $x$, Th $x$, y cosech $x$ son funciones impares.

El modo de crecimiento de las funciones hiperbólicas está expresado por las relaciones:

$$\operatorname{Sh} 0 = 0, \qquad \operatorname{Ch} 0 = 1, \qquad \operatorname{Th} 0 = 0$$

$$\operatorname{Sh} \infty = \infty, \qquad \operatorname{Ch} \infty = \infty, \qquad \operatorname{Th} \infty = 1.$$

Esto resulta inmediatamente discutiendo las fórmulas

$$\operatorname{Sh} x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - \frac{1}{e^{x}}\right), \qquad \operatorname{Ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{Sh}^2 x}$$

$$\operatorname{Th} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = \frac{1 - \dfrac{1}{e^{2x}}}{1 + \dfrac{1}{e^{2x}}}.$$

**102.** FÓRMULAS CORRESPONDIENTES Á SUMAS Y DIFERENCIAS Para obtener Sh $(t \pm u)$, Ch $(t \pm u)$, Th $(t \pm u)$, escribiremos

$$\operatorname{Sh} t \operatorname{Ch} u = \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) \times \frac{1}{2}(e^{u} + e^{-u})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{t+u} + e^{t-u} - e^{-t+u} - e^{-\,-u})$$

$$\operatorname{Sh} u \operatorname{Ch} t = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) \times \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{t+u} - e^{t-u} + e^{-t+u} - e^{-t-u})$$

y sumando,

$$\operatorname{Sh} t \operatorname{Ch} u + \operatorname{Sh} u \operatorname{Ch} t = \frac{1}{2}(e^{t+u} - e^{-t-u}) = \operatorname{Sh}(t+u)$$

igualmente obtendremos

$$\operatorname{Ch}(t+u) = \operatorname{Ch} t \operatorname{Ch} u + \operatorname{Sh} t \operatorname{Sh} u$$

y de estas dos resulta

$$\operatorname{Th}(t+u) = \frac{\operatorname{Sh} t \operatorname{Ch} u + \operatorname{Sh} u \operatorname{Ch} t}{\operatorname{Ch} t \operatorname{Ch} u + \operatorname{Sh} u \operatorname{Sh} t}$$

ó bien $$\operatorname{Th}(t+u) = \frac{\operatorname{Th} t + \operatorname{Th} u}{1 + \operatorname{Th} t \operatorname{Th} u}$$

y cambiando los signos,

$$\operatorname{Sh}(t-u) = \operatorname{Sh} t \operatorname{Ch} u - \operatorname{Sh} u \operatorname{Ch} t$$

$$\operatorname{Ch}(t-u) = \operatorname{Ch} t \operatorname{Ch} u - \operatorname{Sh} t \operatorname{Sh} u$$

$$\operatorname{Th}(t-u) = \frac{\operatorname{Th} t - \operatorname{Th} u}{1 - \operatorname{Th} t \operatorname{Th} u}.$$

**103.** Duplicación. Haciendo $u = t$ en las fórmulas relativas á la suma, se obtiene

$$\operatorname{Ch} 2t = \operatorname{Ch}^2 t + \operatorname{Sh}^2 t, \qquad \operatorname{Sh} 2t = 2 \operatorname{Sh} t \operatorname{Ch} t$$

$$\operatorname{Th} 2t = \frac{2 \operatorname{Th} t}{1 + \operatorname{Th}^2 t}.$$

Combinando la primera de estas relaciones con la

$$1 = \operatorname{Ch}^2 t - \operatorname{Sh}^2 t,$$

resulta

$$\operatorname{Ch}^2 t = \frac{\operatorname{Ch} 2t + 1}{2}, \qquad \operatorname{Ch} t = +\sqrt{\frac{\operatorname{Ch} 2t + 1}{2}},$$

$$\mathrm{Sh}^2 t = \frac{\mathrm{Ch}\ 2t - 1}{2}, \quad \mathrm{Sh}\ t = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{Ch}\ 2t - 1}{2}},$$

$$\mathrm{Th}\ t = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{Ch}\ 2t - 1}{\mathrm{Ch}\ 2t + 1}},$$

ó bien

$$\mathrm{Ch}\frac{1}{2}t = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{Ch}\ t + 1)}, \quad \mathrm{Sh}\frac{1}{2}t = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\mathrm{Ch}\ t - 1)},$$

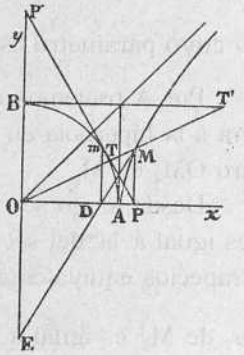
$$\mathrm{Th}\frac{1}{2}t = \pm\sqrt{\frac{\mathrm{Ch}\ t - 1}{\mathrm{Ch}\ t + 1}}.$$

Por último, fácilmente se deducirían las fórmulas que transforman sumas y diferencias de líneas hiperbólicas en productos.

**104.** Teoría geométrica. Aunque derivadas de las funciones circulares las funciones hiperbólicas, constituyen un algoritmo especial que debe estudiarse por definiciones propias basadas en la consideración de la hipérbola equilátera, constituyendo una rama geométrica correlativa con la teoría geométrica de las funciones circulares.

Sea la hipérbola equilátera de semi-eje transverso igual á la unidad

$$x^2 - y^2 = 1$$




Hagamos

$y = \mathrm{MP} = \mathrm{Sh}\ u, \qquad x = \mathrm{OP} = \mathrm{Ch}\ u,$

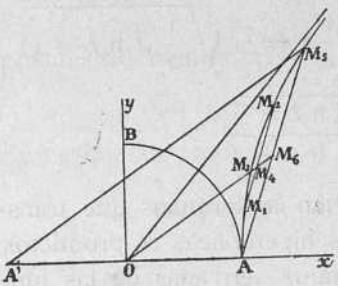
La ecuación de la tangente en el punto M, cuyas coordenadas son Ch $u$ y Sh $u$ (ó en el punto cuyo parámetro es $u$) tiene por ecuación

$$Xx - Yy = 1.$$

Las coordenadas en el origen, de esta tangente son

$$X = \mathrm{OD} = \frac{1}{x} = \mathrm{Sch}\ u, \quad Y = \mathrm{OE} = -\frac{1}{y} = -\ \mathrm{cosech}\ u.$$

Las intersecciones del radio vector OM con la tangente á la hipérbola en el origen y con la paralela al eje de las $x$ á la distancia OB = 1 (es decir con las tangentes á la circunferencia de radio 1 trazadas por sus intersecciones con los ejes positivos), determinan la Th $u$ = AT y la Coth $u$ = BT'.




**105.** DETERMINACIÓN DEL PARÁMETRO $u$. Sean $u_1$ y $u_2$ los parámetros de dos puntos $M_1$ y $M_2$; las coordenadas del punto medio de la cuerda $M_1M_2$ serán

$$\frac{\text{Ch}\,u_1 + \text{Ch}\,u_2}{2}, \quad \frac{\text{Sh}\,u_1 + \text{Sh}\,u_2}{2}.$$

La ecuación de la recta que une este punto con el origen, ó de su radio vector, es

$$y = \frac{\text{Sh}\,u_1 + \text{Sh}\,u_2}{\text{Ch}\,u_1 + \text{Ch}\,u_2}\,x \qquad \text{ó} \qquad y = x\,\text{Th}\,\frac{1}{2}(u_1 + u_2).$$

Dicho radio vector corta á la hipérbola en el punto $M_3$ cuyas coordenadas son $x = \text{Ch}\,\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, $y = \frac{1}{2}\,\text{Sh}(u_1 + u_2)$ ó cuyo parámetro es $u_3 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$.

Por A tracemos una paralela á la cuerda $M_1M_2$, que encuentra á la hipérbola en un punto $M_5$ de parámetro $u_5$ y al diámetro $OM_4$ en $M_6$.

Desde luego se ve que el área del sector hiperbólico $OM_1M_3$ es igual á la del sector $OM_2M_3$, pues son límites de sumas de trapecios equivalentes en número infinito; además el parámetro $u_3$ de $M_3$ es igual á la semi-suma $\frac{1}{2}u_5$ de los parámetros de A y $M_5$; luego

$$u_3 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{1}{2}u_5, \qquad \text{ó} \qquad u_5 = u_1 + u_2,$$

y en virtud de la propiedad de las cuerdas suplementarias con respecto á los diámetros conjugados, el punto $M_3$ está en la paralela á $OM_4$ trazada por el extremo A′ del eje principal de la hipérbola. Es, pues, fácil la determinación geométrica del punto $M_3$ correspondiente á $u_1 + u_2$.

Considerando ahora un sector hiperbólico OAM, cuyo extremo M tenga por parámetro $u$, podremos construir sucesivamente puntos que tengan por parámetros,

$$\frac{1}{2}u,\ \frac{1}{4}u,\ \frac{3}{4}u,\ \frac{1}{8}u,\ \frac{3}{8}u,\ \frac{5}{8}u,\ \ldots\ldots,$$

pues si hacemos $n = 2^k$, $n\beta = u$, y siendo

$$1, 2, 3, \ldots\ldots (n-1),\quad \beta, 2\beta, \ldots\ldots, (n-1)\beta$$

puntos tomados en la hipérbola conforme á las construcciones indicadas y sus parámetros correspondientes, los triángulos OA1, O12, ..... son equivalentes. Además el área del triángulo cuyos vértices tienen por coordenadas

$$(0, 0),\quad [\mathrm{Ch}\,(p-1)\beta,\ \mathrm{Sh}\,(p-1)\beta],\quad [\mathrm{Ch}\,p\beta,\ \mathrm{Sh}\,p\beta]$$

es $\frac{1}{2}[\mathrm{Sh}\,p\beta\ \mathrm{Ch}\,(p-1)\beta - \mathrm{Sh}\,(p-1)\beta\ \mathrm{Ch}\,p\beta] = \frac{1}{2}\mathrm{Sh}\,\beta.$

Luego

$$\text{polígono OA123 ..... M} = \frac{n}{2}\mathrm{Sh}\,\beta = \frac{n\beta}{2}\frac{\mathrm{Sh}\,\beta}{\beta} = \frac{1}{2}u\,\frac{\mathrm{Sh}\,\beta}{\beta}$$

y pasando al límite,

$$\text{Sect hip OAM} = \frac{1}{2}u\lim\frac{\mathrm{Sh}\,\beta}{\beta};$$

pero además se tiene

$$\lim\frac{\mathrm{Sh}\,\beta}{\beta} = \lim\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2\beta} = \lim\frac{e^{2\beta} - 1}{2\beta}\cdot\frac{1}{e^{\beta}}$$

$$= \lim\frac{e^{\alpha} - 1}{\alpha}\lim\frac{1}{e^{\beta}} = 1 \times 1 = 1;$$

luego $$\text{Sector hip OAM} = \frac{1}{2}u,$$

es decir que *u es el doble del sector hiperbólico* OAM.

**106.** RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS Y CIRCULARES. La comparación de las fórmulas

$$\cos^2 u + \operatorname{sen}^2 u = 1 \quad (1) \qquad \sec^2 u - \operatorname{tg}^2 u = 1 \quad (3)$$

$$\operatorname{Ch}^2 u - \operatorname{Sh}^2 u = 1 \quad (2) \qquad \operatorname{Sech}^2 u + \operatorname{Th}^2 u = 1 \quad (4)$$

nos permitirá asimilar las líneas hiperbólicas á las circulares ó inversamente. Así, designando por $\tau$ los *dobles sectores circulares*, la identificación de (1) con (4) y de (2) con (3) dará las relaciones

$$\cos \tau = \operatorname{Sech} u, \quad (5) \qquad \operatorname{sen} \tau = \operatorname{Th} u \quad (7)$$

$$\sec \tau = \operatorname{Ch} u, \quad (6) \qquad \operatorname{tg} \tau = \operatorname{Sh} u \quad (8)$$

La variable $\tau$ se designa, según Hoüel, con el nombre de *amplitud hiperbólica* y se representa por la notación (*)

$$\tau = \operatorname{Amh} u.$$

También pueden deducirse, como lo hace el Sr. Mansión en su *Teoría sucinta de las funciones hiperbólicas* (**), de la ecuación

$$\operatorname{Ch} u \cos \tau = 1$$

y además

$$\operatorname{cosec} \tau = \operatorname{Coth} u \quad (9) \qquad \operatorname{Cot} \tau = \operatorname{cosech} u, \quad (10)$$

y la fórmula de Gudermann $\operatorname{Th}\frac{1}{2}u = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\tau$

que se deduce de

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}, \qquad \operatorname{Th}\frac{u}{2} = \frac{\operatorname{Sh} u}{1 + \operatorname{Ch} u},$$

$$\frac{\operatorname{sen} \tau}{1 + \cos \tau} = \frac{\operatorname{Th} u}{1 + \operatorname{Sech} u} = \frac{\operatorname{Sh} u}{1 + \operatorname{Ch} u},$$

(*) *Laisant* Essai sur les fonctions hyperboliques.

(**) Traducida por D. Luis Gascó.

ó bien haciendo

$$\operatorname{Th}\frac{1}{2}u = \frac{2\operatorname{Sh}\frac{1}{2}u\operatorname{Ch}\frac{1}{2}u}{2\operatorname{Ch}^2\frac{1}{2}u} = \frac{\operatorname{Sh}u}{1+\operatorname{Ch}u}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\tau}{1+\frac{1}{\cos\tau}} = \frac{\operatorname{sen}\tau}{1+\cos\tau} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\tau.$$

Para obtener la expresión de $u$ en función de $\tau$, tenemos que

$$e^u = \operatorname{Ch}u + \operatorname{Sh}u = \frac{1+\operatorname{sen}\tau}{\cos\tau} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)$$

$$u = l\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right).$$

**107.** Funciones hiperbólicas inversas. De

$$x = \operatorname{Ch}u, \quad y = \operatorname{Sh}u, \quad z = \operatorname{Th}u$$

resulta inmediatamente

$$x + y = e^u \qquad x^2 - y^2 = 1 \tag{1}$$

y eliminando $y$,

$$e^u = x \pm \sqrt{x^2-1} =$$

$$= \frac{(x \pm \sqrt{x^2-1})(x \mp \sqrt{x^2-1})}{x \mp \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x \mp \sqrt{x^2-1}},$$

ó sea,

$$e^u = x + \sqrt{x^2-1} \quad \text{ó} \quad e^u = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}; \quad (x \gtrless 1),$$

luego $u = l(x \pm \sqrt{x^2-1} = \pm l(x+\sqrt{x^2-1})$

Eliminando $x$ entre las ecuaciones (1), se obtiene

$$e^u = y + \sqrt{1+y^2}, \quad u = l(y+\sqrt{1+y^2}).$$

Para $z$ se tiene

$$z = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1}, \qquad z(e^{2u} + 1) = e^{2u} - 1,$$

$$e^{2u} = \frac{1+z}{1-z}, \qquad u = \frac{1}{2} l \frac{1+z}{1-z} = l \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \quad (z^2 \leqq 1).$$

Los valores de $u$ en $x$, $y$ ó $z$ se representan por los símbolos

$$\text{Arg Ch } x, \qquad \text{Arg Sh } y, \qquad \text{Arg Th } z,$$

que se leen *argumento cuyo coseno hiperbólico es* $x$, etc. Así

$$\text{Arg Ch } x = \pm\, l\,(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \text{Arg Sh } y = l\,(y + \sqrt{1 + y^2}),$$

$$\text{Arg Th } z = l \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}.$$

Para las funciones inversas de

$$X = \text{Sech } u, \qquad Y = \text{Cosech } u, \qquad Z = \text{Coth } u,$$

se tiene

$$\text{Arg Sech X} = \pm\, l \left( \frac{1 + \sqrt{1 - X^2}}{X} \right)$$

$$\text{Arg Cosech Y} = l \left( \frac{1 + \sqrt{1 + Y^2}}{Y} \right)$$

$$\text{Arg Coth Z} = l \sqrt{\frac{Z+1}{Z-1}}.$$

**108.** DIFERENCIALES É INTEGRALES. Tenemos, por ejemplo,

$$d \text{ Sh } u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}\, du = \text{Ch } u\, du,$$

é igualmente podremos proceder con las demás líneas hiperbólicas. Tendremos pues

$$d \text{ Sh } u = \text{Ch } u\, du, \qquad \int \text{Ch } u\, du = \text{Sh } u,$$

$$d \text{ Ch } u = \text{Sh } u\, du, \qquad \int \text{Sh } u\, du = \text{Ch } u,$$

$$d\,\mathrm{Th}\,u = \frac{du}{\mathrm{Ch}^2 u}, \qquad \int \frac{du}{\mathrm{Ch}^2 u}\,du = \mathrm{Th}\,u,$$

$$d\,\mathrm{Coth}\,u = -\frac{du}{\mathrm{Sh}^2 u}, \qquad \int \frac{du}{\mathrm{Sh}^2 u} = -\,\mathrm{Coth}\,u,$$

$$dl\,\mathrm{Sh}\,u = \mathrm{Coth}\,u\,du, \qquad \int \mathrm{Coth}\,u\,du = l\,\mathrm{Sh}\,u,$$

$$dl\,\mathrm{Ch}\,u = \mathrm{Th}\,u, \qquad \int \mathrm{Th}\,u\,du = l\,\mathrm{Sh}\,u.$$

Para las funciones hiperbólicas inversas, resulta

$$d\,\mathrm{Arg\,Sh}\,u = d[l(u + \sqrt{u^2+1}] = \frac{du}{\sqrt{u^2+1}},$$

$$d\,\mathrm{Arg\,Ch}\,u = d[\pm l(u + \sqrt{u^2-1})] = \pm\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}, \qquad (u > 1)$$

$$d\,\mathrm{Arg\,Th}\,u = d\,\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = \frac{du}{1-u^2}, \qquad (u^2 < 1)$$

$$d\,\mathrm{Arg\,Coth}\,u = d\,\frac{1}{2}\,l\left(\frac{u+1}{u-1}\right) = \frac{du}{1-u^2}, \qquad (u^2 > 1)$$

$$d\,\mathrm{Arg\,Sech}\,u = d\left[\pm\, l\left(\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}\right)\right]$$

$$= \frac{\mp\, du}{u\sqrt{1-u^2}}, \qquad (u < 1)$$

$$d\,\mathrm{Arg\,Cosech}\,u = d\,l\left(\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}\right) = \frac{-\,du}{u\sqrt{1+u^2}}.$$

Las integrales correspondientes son:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = l(u + \sqrt{u^2-1} = \pm\,\mathrm{Arg\,Ch}\,u, \qquad (u > 1)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = l(u + \sqrt{u^2+1}) = \mathrm{Arg\,Sh}\,u,$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = l\sqrt{\frac{1+u}{1-u}} = \text{Arg Th } u, \qquad (u^2 < 1)$$

$$\int \frac{du}{1-u^2} = l\sqrt{\frac{u+1}{u-1}} = \text{Arg Coth } u, \qquad (u^2 > 1)$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} = -l\left(\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{u}\right)$$
$$= \mp \text{ Arg Sech } u, \qquad (u < 1)$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -l\left(\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}\right) = -\text{ Arg Cosech } u.$$

**109.** DESARROLLO EN SERIE. Las fórmulas de la trigonometría de la hipérbola pueden deducirse de las de la trigonometría ordinaria, como se ha visto, sustituyendo sen $u$, cos $u$, ..... por sus valores en Sh $(ui)$, Ch $(ui)$, dados por las fórmulas

$$\cos u = \text{Ch } (ui), \qquad \text{sen } u = \frac{\text{Sh } (ui)}{i}$$

$$\sec u = \text{Sech } (ui), \qquad \text{tg } u = \frac{\text{Th } (ui)}{i}$$

$$\cot u = i \text{ Coth } (ui), \qquad \text{cosec } u = i \text{ Cosech } (ui)$$

y sustituyendo enseguida $u$ por $ui$, se obtendrá una relación entre $u$, Sh $u$, Ch $u$ ....., que será la fórmula correspondiente á aquella de que se partió. De

$$\text{sen } u = \frac{u}{1} - \frac{u^3}{3!} + \ldots\ldots, \qquad \cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} \ldots\ldots$$

resultan

$$\text{Sh } u = \frac{u}{1} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \ldots\ldots, \qquad \text{Ch } u = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots\ldots$$

que pueden obtenerse inmediatamente sustituyendo en

$$\text{Sh } u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \qquad \text{Ch } u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

las exponenciales por sus desarrollos en series. De

$$u = \operatorname{sen} u + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^3 u}{3} + \frac{(1\cdot 3)^2}{4!}\frac{\operatorname{sen}^5 u}{5} + \cdots\cdots,$$

resulta

$$u = \operatorname{Sh} u - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{Sh}^3 u}{3} + \frac{(1\cdot 3)^2}{4!}\frac{\operatorname{Sh}^5 u}{5} - \cdots\cdots$$

De $$u = \operatorname{tg} u - \frac{\operatorname{tg}^3 u}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 u}{5} - \cdots\cdots$$ se deduce

$$u = \operatorname{Th} u + \frac{\operatorname{Th}^3 u}{3} + \frac{\operatorname{Th}^5 u}{5} + \cdots\cdots$$

Tomando la semi-diferencia de los desarrollos de $l(1+u)$ y $l(1-u)$, se tendrá

$$\frac{1}{2} l\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = \operatorname{Arg}\operatorname{Th} u = \frac{u}{1} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \cdots\cdots$$

Adoptando la variable $x$, lo cual es ahora indiferente para obtener el desarrollo de Th $x$, observaremos que haciendo $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$, se obtiene para $x = 0$,

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -\frac{1}{2}, \quad \cdots\cdots f^{(2n-1)}(0) = 0,$$

$$f^{2n}(0) = (-1)^{n-1} B_{2n-1},$$

siendo $n > 1$ y expresando $B_{2n-1}$ los números de Bernoulli. Se tendrá pues, por la fórmula de Mac-Laurin y haciendo, para abreviar,

$$A_{2n\ 1} = \frac{(-1)^{n-1} B^{2n-1}}{1\cdot 2\cdots\cdots 2n},$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + A_1 x^2 + A_3 x^4 + \cdots\cdots$$
$$+ A_{2n-1} x^{2n} + \cdots\cdots, \qquad (1)$$

serie convergente para todos los valores de $x$ menores que $2\pi$.

Tendremos pues para $2x < 2\pi$,

$$\frac{x}{e^x + 1} = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{2x}{e^{2x} - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + A_1 x^2 + \ldots\ldots$$

$$- (1 - \frac{1}{2} \cdot 2x + A_1 \cdot 2^2 x^2 + \ldots\ldots + A_{2n-1} \cdot 2^{2n} x^{2n} + \ldots\ldots)$$

Reduciendo y dividiendo por $x$, resulta

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - (2^2 - 1) A_1 x - \ldots\ldots$$

$$- (2^{2n} - 1) A_{2n-1} x^{2n-1} - \ldots\ldots$$

y

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \frac{2}{e^x + 1} \qquad (2)$$

$$= 2 [(2^2 - 1) A_1 x + \ldots\ldots + (2^{2n} - 1) A_{2n-1} x^{2n-1} + \ldots\ldots].$$

Sustituyendo $x$ por $2x$, se tiene para $x < \frac{\pi}{2}$,

$$\text{Th}\, x = 2^2 (2^2 - 1) A_1 x + \ldots + 2^{2n} (2^{2n} - 1) A_{2n-1} x^{2n-1} + \ldots \qquad (3)$$

Si en $\frac{x}{e^x - 1}$ se cambia $x$ por $-x$, resulta

$$\frac{x}{1 - e^{-x}} = \frac{x e^x}{e^x - 1}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + A_1 x^2 + \ldots\ldots + A_{2n-1} x^{2n} + \ldots\ldots$$

Sumando este desarrollo con el (1) y dividiendo por $x$, se obtiene

$$\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = 2 \left( \frac{1}{x} + A_1 x + \ldots\ldots + A_{n-1} x^{2n-1} + \ldots\ldots \right),$$

y cambiando $x$ en $2x$, resulta, para $x < \pi$

$$\text{Coth}\, x = \frac{1}{x} + 2^2 A_1 x + \ldots\ldots + 2^{2n} A_{2n-1} x^{2n-1} + \ldots\ldots \qquad (4)$$

De la fórmula (2) que da la expresión de $\text{Th}\, \frac{x}{2}$, resulta

$$\text{Cosech } x = \frac{\text{Ch } x}{\text{Sh } x} - \frac{\text{Ch } x - 1}{\text{Sh } x} = \text{Coth } x - \text{Th } \frac{x}{2} =$$

$$\frac{1}{x} - 2\left[(2^1 - 1)\,A_1\,x + \ldots + 2^{2n-1} - 1\right] A_{2n-1}\,x^{2n-1} + \ldots,$$

para $x < \pi$ y haciendo $a_{2n-1} = \dfrac{B_{2n-1}}{1 \cdot 2 \ldots 2n}$, se deduce de (3), (4) y (5)

$$\text{tg } x = 2^2(2^2 - 1)\,a_1 x + \ldots + 2^{2n}(2^{2n} - 1)\,a_{2n-1}\,x^{2n-1} + \ldots$$

$$\text{cot} = \frac{1}{x} - 2^2 a_1 x - \ldots - 2^{2n} a_{2n-1}\,x^{2n-1} - \ldots$$

$$\text{cosec} = \frac{1}{x} + 2\left[(2^1 - 1)\,a_1 x + \ldots + (2^{2n-1} - 1)\right] a_{2n-1}\,x^{2n-1} + \ldots$$

**110.** MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE ARCOS Y SECTORES HIPERBÓLICOS. Tenemos

$$\text{sen } 2u = 2 \text{ sen } u \cos u, \qquad \text{Sh } 2u = 2 \text{ Sh } u \text{ Ch } u,$$

$$\cos 2u = \cos^2 u - \text{sen}^2 u, \qquad \text{Ch } 2u = \text{Ch}^2 u + \text{Sh}^2 u,$$

$$\text{tg } 2u = \frac{2 \text{ tg } u}{1 - \text{tg}^2 u}, \qquad \text{Th } 2u = \frac{2 \text{ Th } u}{1 + \text{Th}^2 u},$$

$$\text{sen } mu = m \cos^{m-1} u \,.\, \text{sen } u + \ldots$$

$$\text{Sh } mu = m \text{ Ch}^{m-1} u \text{ Sh } u + \frac{m!}{3!\,(m-3)!} \text{Ch}^{m-3} u \text{ Sh}^3 u + \ldots$$

$$\cos mu = \cos^m u - \frac{m!}{2\,!\,(m-2)!} \cos^{m-2} u \text{ sen}^2 u + \ldots$$

$$\text{Ch } mu = \text{Ch}^m u + \frac{m!}{2!\,(m-2)!} \text{Ch}^{m-2} u \text{ Sh}^2 u + \ldots$$

# CAPÍTULO III

## Teoremas de Laplace y de Lagrange

**III.** TEOREMA DE LAPLACE. Sea $u = \mathrm{F}(z + x\Phi u)$; tendremos

$$\Psi(u) = \Psi\mathrm{F}z + \Phi\mathrm{F}z\,\frac{d\Psi\mathrm{F}z}{dz}\,\frac{x}{1} + \\ + \frac{d}{dz}\left[(\Phi\mathrm{F}z)^2\,\frac{d\Psi\mathrm{F}z}{dz}\right]\frac{x^2}{2} + \frac{d^2}{dz^2}\left[(\Phi\mathrm{F}z)^3\,\frac{d\Psi\mathrm{F}z}{dz}\right]\frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots \quad (1)$$

DEMOSTRACIÓN. Siendo $x$ y $z$ independientes, hagamos $z + x\Phi u = v$; entonces $u = \mathrm{F}v$.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{F}v}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{F}v}{\partial v}\,\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 1 + x\,\frac{\partial \Phi u}{\partial z} = 1 + x\,\frac{\partial \Phi u}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \Phi u + x\,\frac{\partial \Phi u}{\partial x} = \Phi u + x\,\frac{\partial \Phi u}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x},$$

pero $$\frac{\partial u}{\partial z} = \mathrm{F}'v\left(1 + x\Phi' u\,\frac{\partial u}{\partial z}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mathrm{F}'v}{1 - x\Phi' u\mathrm{F}'v},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{F}'v\left(\Phi u + x\Phi' u\,\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Phi u\mathrm{F}'v}{1 - x\Phi u\mathrm{F}'v};$$

luego $$\frac{\partial u}{\partial x} = \Phi u\,\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Si $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \Phi u\,\dfrac{\partial u}{\partial z}$, entonces

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x} = \Phi u\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{ó} \quad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} = \Phi u\,\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}.$$

$\varphi u \dfrac{\partial U}{\partial u}$ es una función de $u$, y por consiguiente la derivada de cierta función de U, sea de V; entonces

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \Phi u \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi u \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\Phi u \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left[(\Phi u)^2 \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left[(\Phi u)^2 \frac{\partial U}{\partial z}\right];$$

porque la ecuación $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \Phi u \dfrac{\partial U}{\partial z}$, como se demostrará más adelante es cierta para todas las funciones de $u$.

Sea $$(\Phi u)^2 \frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial u}$$

entonces $$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}; \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\Phi u \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\Phi u \frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[(\Phi u)^3 \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\right] \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[(\Phi u)^3 \frac{\partial U}{\partial z}\right].$$

Para obtener la ley general, sea $$\frac{\partial^n U}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left[(\Phi u)^n \frac{\partial U}{\partial z}\right].$$

Supongamos que $$(\Phi u)^n \frac{dU}{du} = \frac{dV}{du},$$

entonces $$\frac{d^n U}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial^n V}{\partial z^n}$$

$$\frac{\partial^{n+1} U}{dx^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^n V}{\partial z^n} = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[\Phi u \frac{\partial V}{\partial z}\right] = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left((\Phi u)^{n+1}\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[(\Phi u)^{n+1}\frac{\partial U}{\partial z}\right], \quad \text{y si} \quad \frac{\partial^n U}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left[(\Phi u)^n \frac{\partial U}{\partial z}\right]$$

entonces $$\frac{\partial^{n+1}U}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left[(\Phi u)^{n+1}\frac{\partial U}{\partial z}\right].$$

Haciendo $x = 0$, y considerando á $\Psi u$ como una función representada por U, tendremos

$$\left(\frac{\partial^n \Psi u}{\partial x^n}\right) = \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left\{(\Phi u)^n \frac{\partial \Psi u}{\partial z}\right\}\right).$$

Pero si hacemos $x = 0$ *antes* de la diferenciación, $z + x\Phi u$ se reduce á $z$ y $u$ ó $F(z + x\Phi u)$ á $Fz$; luego

$$\Psi u \text{ es } \Psi Fz \text{ y } \left(\frac{\partial \Psi u}{dx}\right) \text{ ó } \left(\Phi u \frac{\partial \Psi u}{\partial z}\right) \text{ es } \Phi Fz \frac{\partial \Psi Fz}{\partial z},$$

y en general

$$\left(\frac{\partial^n \Psi u}{\partial x^n}\right) \text{ ó } \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left\{(\Phi u)^n \frac{\partial \Psi u}{\partial z}\right\}\right) \text{ es } \frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\left\{(\Phi Fz)^n \frac{\partial \Psi Fz}{\partial z}\right\}.$$

Sustituyendo en la fórmula de Mac-Laurin

$$\Psi u = (\Psi u)_0 + \left(\frac{\partial \Psi u}{\partial x}\right)_0 x + \ldots\ldots$$

resulta la fórmula ó el teorema de Laplace.

**112.** Teorema de Lagrange. Haciendo

$$Fx = x, \quad \text{ó} \quad u = z + x\Phi u, \qquad \text{tenemos}$$

$$\Psi u = \Psi z + \Phi z \,.\, \Psi' z \,.\, x + \frac{\partial}{\partial z}[(\Phi z)^2 \Psi' z]\frac{x^2}{2} + \ldots. \qquad (2)$$

que constituye el teorema ó la fórmula de Lagrange.

En el caso más sencillo $\Psi u = u$, $\Psi' u = 1$; entonces $u = z + x\Phi u$ da

$$u = z + \Phi z \,.\, x + \frac{\partial}{\partial z}(\Phi z)^2 \frac{x^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\Phi z)^3 \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

*Observación.* El teorema de Taylor es un caso particular del teorema de Lagrange, cuando $\Phi u = a$ y $\Psi u = u$.

*Ejemplo.* 1.° Sea

$$u = \text{sen}\,(z + xe^u), \qquad \text{hallar } lu.$$

Haciendo en (2)

$$F(x) = \operatorname{sen} x, \quad \Phi x = e^x, \quad \Psi x = lx, \quad \Phi F z = e^{\operatorname{sen} z},$$

$$\frac{\partial \Psi F z}{\partial z} = \frac{\partial (l \operatorname{sen} z)}{\partial z} = \cot z,$$

resulta

$$lu = l \operatorname{sen} z + e^{\operatorname{sen} z} \cdot \cot z \cdot x + \frac{\partial}{\partial z}(e^{2 \operatorname{sen} z} \cot z)\frac{x^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(e^{3 \operatorname{sen} z} \cot z)\frac{x^3}{2 \cdot 3} + \ldots\ldots$$

*Ejemplo.* 2.° Sea

$$u = z + x \operatorname{sen} u, \quad \text{hallar } 2 \text{ arc. tg } (a \operatorname{tg} u).$$

Tenemos $Fu = u$, $\Phi u = \operatorname{sen} u$,

$$\Psi z = 2 \operatorname{arc\,tg}(a \operatorname{tg} z), \quad \Psi' z = \frac{2}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 z}\frac{a}{\cos^2 z} = \frac{2a}{1 + (a^2 - 1)\operatorname{sen}^2 z}$$

$$2 \operatorname{arc\,tg}(a \operatorname{tg} u) = 2 \operatorname{ar\,tg}(a \operatorname{tg} z) + \frac{2a \operatorname{sen} z}{1 + (a^2 - 1)\operatorname{sen}^2 z} x + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2a \operatorname{sen}^2 z}{1 + (a^2 - 1)\operatorname{sen}^2 z}\right)\frac{x^2}{2} + \ldots\ldots$$

*Ejemplo.* 3.° Sea $u = z + x \operatorname{sen} u$, hallar $u$.

Sustituyendo en (2) resulta

$$u = z + \operatorname{sen} z \cdot x + \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{sen}^2 z)\frac{x^2}{2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(\operatorname{sen} z)^3 \cdot \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

*Ejemplo.* 4.° Dada la ecuación $z = x + yz^m$, siendo $x$ é $y$ cantidades dadas, hallar el valor de $z^n$ en serie, según las potencias de $y$.

Tendremos $fz = x^m$, $\varphi x = x^n$, $\varphi' x = nx^{n-1}$

$$P = x^n, \quad Q = nx^{m+n-1}, \quad R = \frac{n(2m + n - 1)}{2} x^{2m+n-2},$$

$$S = \frac{n(3m + n - 1)(3m + n - 2)}{2 \cdot 3} x^{3m+n-3}.$$

Por consiguiente

$$z^n = x^n + nx^{m+n-1}y + \frac{n(2m+n-1)}{2}x^{2m+n-2}y^2 + \frac{n(3m+n-1)(3m+n-2)}{2\cdot 3}x^{3m+n-2}y^3 + \ldots\ldots$$

**114.** Método directo. Para obtener la fórmula de Lagrange directamente, este ilustre matemático, parte de la ecuación

$$z = x + y \cdot fz \qquad (1)$$

y llega al desarrollo siguiente:

$$z = x + yfx + \frac{y^2}{2}(fx^2)' + \frac{y^3}{2\cdot 3}(fx^3)'' + \frac{y^4}{2\cdot 3\cdot 4}(fx^4)''' + \ldots\ldots \qquad (2)$$

y, en general, á

$$\varphi z = \varphi x + y\varphi' xfx + \frac{y^2}{2}(\varphi' xfx^2)' + \frac{y^3}{2\cdot 3}(\varphi' xfx^3)'' + \ldots\ldots \qquad (3)$$

La fórmula (2) se deduce derivando la ecuación (1) con respecto á $x$ é $y$, así

$$z'_x = 1 + yf'z \cdot z'_x, \qquad z'_y = fz + yf'z\, z'_y.$$

Eliminando $f'z$, se obtiene

$$z'_y - z'_x fz = 0. \qquad (4)$$

Eliminando $f'z$ entre las ecuaciones (1) y (4), resulta

$$z'_x(z - x) - y'z_y = 0. \qquad (5)$$

Como el primer término de la expresión de $z$ que buscamos según las potencias de $y$ es $x$, podremos escribir

$$z = x + Ay + By^2 + Cy^3 + \ldots\ldots, \qquad (6)$$

siendo A, B, C, ..... funciones de $x$ por determinar.

Derivando con respecto á $x$ é $y$, tendremos

$$z'_x = 1 + A'y + B'y^2 + \ldots\ldots, \qquad z'_y = A + 2By + 3Cy^2 + \ldots\ldots$$

Sustituyendo estos valores en (5) y suprimiendo $y$, resulta

$$(1 + A'y + B'y^2 + C'y^3 + \ldots\ldots)(A + By + Cy^2 + \ldots\ldots) - A - 2By - 3Cy^2 - \ldots\ldots = 0;$$

y ordenando según las potencias de $y$,

$$(AA' - B)y + (BA' + AB' - 2C)y^2 + (CA' + BB' + AC' - 3D)y^3 + \ldots\ldots = 0,$$

que conduce á las condiciones

$$B = AA', \qquad C = \frac{1}{2}(AB' + BA'),$$

$$D = \frac{1}{3}(AC' + BB' + CA'), \ldots\ldots$$

Pero los dos primeros términos del desarrollo son $x + yfx$; luego $Afx, y$

$$A' = f'x, \qquad B = fxf'x, \qquad B' = fxf''x + (f'x)^2;$$

luego $$C = \frac{1}{2}(2fxf'(x^2) + f(x^2)f''(x)), \ldots\ldots$$

Además, se ve inmediatamente que

$$B = \left(\frac{A^2}{2}\right)', \qquad C = \frac{1}{2}(AB)',$$

$$D = \frac{1}{3}(AC + \frac{1}{2}B^2)', \qquad E = \frac{1}{4}(AD + BC)', \ldots\ldots$$

De estas expresiones resultan las siguientes:

$$B = \frac{1}{2}(A^2)', \qquad C = \frac{1}{2 \cdot 3}(A')'', \qquad D = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}(A^4)''', \ldots\ldots$$

cuya obtención es fácil, pues

$$C = \frac{1}{2}[A \cdot \frac{1}{2}(A^2)']' = \frac{1}{2}(A^2A')' = \frac{1}{2 \cdot 3}(A^3)''$$

$$D = \frac{1}{3}\left[A\,\frac{1}{2\,.\,3}\,(A^3)'' + \frac{1}{2}\,(AA')^2\right]';$$

pero $A\,(3A^2A')' = A\,(2\,.\,3\,A\,.\,A'^2 + 3A^2A'') = 2\,.\,3\,A^2A'^2 + 3A^3A''$

y $$\left[\left(\frac{1}{2}\,A^2\right)'\right]^2 = (AA')^2;$$ luego

$$D = \frac{1}{3}\left[A^2A'^2 + \frac{1}{2}\,A^3A'' + \frac{1}{2}\,A^2A'^2\right]' = \frac{1}{2\,.\,3}\left(\frac{3}{2}\,A^2A'^2 + \frac{1}{2}\,A^3A''\right)$$

$$= \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4}\,(A^4)''', \quad \text{pues} \quad 3\,A^2A'^2 + A^3A'' = (A^3A')' = \frac{A^4}{4}\,.$$

Sustituyendo los valores obtenidos de B, C, ..... en la ecuación (6), resultará

$$z = x + yfx + \frac{y^2}{2}\,(fx^2)' + \frac{y^3}{2\,.\,3}\,(fx^3)'' + \ldots\ldots \qquad (7)$$

Si ahora se trata de obtener el desarrollo de una función cualquiera $\varphi z$ de $z$, según las potencias ascendentes de $y$, se hará $u = \varphi z$, y derivando, resultará

$$u'_x = \varphi' z\,.\,z'_x \qquad \text{y} \quad u'_y = \varphi' z\,.\,z'_y\,;$$

de las que se deduce $$\frac{u'_x}{u'_y} = \frac{z'_x}{z'_y}\,,$$

Sustituyendo en esta ecuación el valor de $\frac{z'_x}{z'_y}$ deducido de la (5), resulta

$$u'_x\,(z - x) - yu'_y = 0. \qquad (8)$$

Supongamos

$$u = P + Qy + Ry^2 + Sy^3 + (*)\ldots\ldots, \qquad (9)$$

siendo P, Q, R, ..... funciones de $x$.

---

(*) En la teoría de las ecuaciones diferenciales se demuestra que toda ecuación diferencial tiene una integral. Aquí $u$ es la función cuya derivada está dada por la ecuación (8).

Si sustituimos este valor de $u$ y el de $z - x$ de la ecuación (7) en la (8), resulta, suprimiendo el factor $y$

$$(P' + Q'y + R'y^2 + \ldots\ldots)\left(fx + \frac{y}{2}(fx^2)' + \ldots\ldots\right)$$
$$- Q - 2Ry - 3Sy^2 - \ldots\ldots = 0,$$

de la que se obtiene $Q = P'fx$, $2R = Q'fx + \frac{P'}{2}(Px^2)'$,

$$3S = R'fx + \frac{Q'}{2}(fx^2)' + \frac{P'}{2 \cdot 3}(fx^3)'', \ldots\ldots$$

Mediante varias sustituciones, tendremos

$$Q = P'fx, \quad R = \frac{1}{2}(P'fx^2)', \quad S = \frac{1}{2 \cdot 3}(P'fx^3)'', \quad \ldots\ldots$$

Por ser $u = \varphi z = \varphi\,(x + yfx + \ldots\ldots)$, será $P = \varphi x$ y $P' = \varphi' x$; luego

$$\varphi z = \varphi x + y\varphi' xfx + \frac{y^2}{2}(\varphi' xfx^2)' + \ldots\ldots$$

*Ejemplo.* La ecuación de Kepler

$$u = a + e \operatorname{sen} u$$

admite la raiz $u = a$ para $e = 0$, la fórmula de Lagrange da para el desarrollo de la raiz que tiende hacia $a$,

$$u = a + e \operatorname{sen} a + \frac{e^2}{1 \cdot 2}\frac{\partial}{\partial a}(\operatorname{sen}^2 a) + \ldots\ldots$$

# CAPÍTULO IV

## Descomposición de las fracciones algebráicas

### § 1.° Principios generales

**115.** Sea la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ en la que $F(x)$ y $f(x)$ representan funciones algebráicas enteras de $x$. Para descomponerla en suma de fracciones simples, distinguiremos 4 casos, según que las raices de la ecuación $f(x) = 0$ sean reales y desiguales, imaginarias desiguales, reales iguales é imaginarias iguales.

*Caso 1.°* sean $a, c, b, \ldots\ldots k$ las raices de $f(x) = 0$.

Podemos escribir

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots\ldots + \frac{k}{x-k},$$

y vamos á determinar las constantes desconocidas de modo que se verifique esta identidad.

Multiplicando por $f(x)$, resulta

$$\varphi(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + \ldots\ldots + k\frac{f(x)}{x-k}.$$

Sustituyendo $x$ por $a$, todas las fracciones se anulan, excepto la primera que se reduce á la forma $\frac{0}{0}$, y hallando su verdadero valor (*), resulta

(*) Haciendo $\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$ se obtiene el verdadero valor de la fracción considerada para $x = a$, expresado por la fórmula $\lim \frac{\varphi(x)}{f(a)} = \frac{\varphi'(a)}{f'(x)}$.

$$\varphi(a) = Af'(a) \qquad \text{de donde } A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}.$$

Repitiendo este razonamiento para las demás raíces, tendremos que

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \quad C = \frac{\varphi(c)}{f'(c)}, \quad \ldots\ldots, \quad k = \frac{\varphi(k)}{f'k};$$

luego

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(a)}{f'(a)(x-a)} + \frac{\varphi(b)}{f'(b)(x-b)} + \ldots + \frac{\varphi(k)}{f'(k)(x-k)}$$

*Ejemplo 1.°* Sea

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Para determinar A, y tenemos que

$f'(x)=2x$, $f'(1)=2$, $f'(-1)=-2$, $\varphi(1)=1$, $\varphi(-1)=-1$.

Por consiguiente

$$\frac{x}{x^2-x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right).$$

*Observación.* También puede escribirse

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1}.$$

é identificando los numeradores, resultan los valores obtenidos anteriormente.

*Ejemplo 2.°* Sea

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{5x^2-7x+13}{x^3-6x^2+11x-6}.$$

se tiene: $a=1, \quad b=2, \quad c=3$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}; \quad f'(x)=3x^2-12x+11$$

$$A = \frac{\varphi(1)}{f'(1)} = \frac{11}{2}, \quad B = \frac{\varphi(2)}{f'(2)} = -19, \quad C = \frac{\varphi(3)}{f'(3)} = \frac{37}{2}$$

luego $$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{11}{2(x-1)} - \frac{19}{x-2} + \frac{37}{2(x-3)}.$$

*Ejemplo 3.º* Sea

$$\frac{x+7}{(x-5)(x+1)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+1}$$

se tiene $\frac{x+7}{x+1} = A + \frac{B(x-5)}{x+1}$; para $x = 5$, $A = \frac{12}{6} = 2$

$$\frac{x+7}{x-5} = \frac{A(x+1)}{x-5} + B; \text{ para } x = -1, \quad B = -\frac{6}{6} = -1;$$

luego $$\frac{x+7}{(x-5)(x+1)} = \frac{2}{x-5} - \frac{1}{x+1}$$

*2.º caso.* Consideremos dos raices imaginarias. La fracción

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})}.$$

Haciendo $$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a} = \frac{\varphi(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{f'(\alpha+\beta\sqrt{-1})}$$

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{\varphi(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{\varphi'(\alpha-\beta\sqrt{-1})}$$

tendremos que

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{B}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}.$$

*Ejemplo.* Sea la fracción

$$\frac{x(x)}{f(x)} = \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{2x}{(x-i)(x+i)(x-ri)(x+ri)},$$

siendo $r = \sqrt{3}$ y haciendo $\sqrt{-1} = i$.

Tendremos

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-i} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-ri} + \frac{D}{x+ri}$$

$$A = \frac{\varphi(i)}{f'(i)} = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{\varphi(-i)}{f'(-i)} = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad D = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{2(x-i)} + \frac{1}{2(x+i)} - \frac{1}{2(x-ri)} - \frac{1}{2(x+ri)}.$$

*3.er caso.* Supongamos que la fracción tenga raices reales é iguales. Sea primero

$$f(x) = (x-a)^n$$

se tendrá

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)\varphi'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}\varphi''(a) + \ldots\ldots$$

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n} = \frac{\varphi(a)}{(x-a)^n} + \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{1}{2!}\frac{\varphi''(a)}{(x-a)^{n-2}} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{x-a}.$$

Sea en fin

$$f(x) = M(x-a)^n(x-b)^p \ldots\ldots (x-k) = (x-a)^n f_1(x).$$

Para determinar los coeficientes $A$, $A_1$, ....., $A_{n-1}$ escribamos la identidad

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\psi(x)}{f_1(x)},$$

siendo $\psi(x)$ un polinomio racional respecto á $x$.

Tendremos que

$$\varphi(x) - A\frac{f(x)}{(x-a)^n} - \frac{A_1 f(x)}{(x-a)^{n-1}} - \ldots\ldots$$

$$- A_{n-1}\frac{f(x)}{x-a} = (x-a)^n \psi(x), \qquad (1)$$

y desarrollando $\varphi(x)$ según las potencias de $x - a$,

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots\ldots$$

Por ser $a$ una raíz múltiple de $f(x) = 0$ de orden $n$, se tendrá además

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + \ldots\ldots$$

Sustituyendo las expresiones de $\varphi(x)$ y de $f(x)$ en (1), resulta:

$$\varphi(a) - \frac{A f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$+\left[\varphi'(a) - A\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} - A_1\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right](x-a)$$

$$+\left[\frac{\varphi''(a)}{2!} - \frac{A f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!} - \ldots\ldots - A_2\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right](x-a)^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\left[\frac{\varphi^{(n)}(a)}{n!} - A\frac{f^{(2n)}(a)}{(2n)!} - A_1\frac{f^{(2n-1)}(a)}{(2n+1)!} - \ldots\ldots\right](x-a)^n.$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Por ser el segundo miembro divisible por $(x-a)^n$, lo será el primero; luego serán nulos los coeficientes de todas las potencias de $(x-a)$ hasta la del grado $n-1$.

Dichas ecuaciones determinan los coeficientes $A_1, A_1, \ldots, A_n$.

El desarrollo buscado será pues

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A^{n-1}}{x-a} + \frac{\psi(x)}{f_1(x)}.$$

Se escribirá enseguida $\frac{\psi(x)}{f_1(x)}$ bajo la forma

$$\frac{B}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots\ldots + \frac{B\,p-1}{x-b} + \frac{\chi(x)}{f_2(x)}$$

y así sucesivamente. Resultará pues

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \cdots\cdots + \frac{A_{n-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \cdots\cdots + \frac{B_{p-1}}{x-b}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{k}{x-k}$$

*Ejemplo.* Hagamos

$$\frac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x-1)^4} = \frac{A_4}{(x-1)^4} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1}.$$

Quitando denominadores, tendremos

$$5x^3 - 11x^2 + 5x + 4 = A_4 + A_3(x-1) + A_2(x-1)^2 + A_1(x-1)^3 = f(x),$$
$$f'(x) = 15x^2 - 22x + 5 = A_3 + 2A_2(x-1) + 3A_1(x-1)^2,$$
$$f''(x) = 30x - 22 = 2A_2 + 6A_1(x-1),$$
$$f'''(x) = 30 = 6A_1,$$
$$f(1) = 3 = A_4; \quad f'(1) = -2 = A_3;$$
$$f''(1) = 8 = 2A_2; \quad f'''(1) = 30 = 6A_1;$$

luego

$$\frac{5x^3 - 11x^2 + 5x + 4}{(x-1)^4} = \frac{3}{(x-1)^4} - \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{5}{x-1}.$$

*Observación.* Es más práctica que la regla general la siguiente:

En la fórmula

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^n} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{x-a} + \frac{\psi(x)}{f_1(x)}$$

hacer $x - a = y$ escribiendo

$$\frac{\varphi(y+a)}{f_1(y+a)} = A_1 + A_2 y + \ldots\ldots + A_n y^{n-1} + \frac{\psi(y+a)}{f_1(y+a)} y^n$$

y dividir $\varphi(y+a)$ por $f_1(y+a)$, determinando las cantidades A por el método de los coeficientes indeterminados. Así, por ejemplo

$$\frac{x^2+x+1}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A_1}{(x-2)^2} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{\psi(x)}{x+1},$$

y haciendo $x - 2 = y$, tenemos

$$\frac{y^2+5y+7}{y+3} = A_1 + A_2 y + \frac{\psi(y+2)}{y+3} y^2.$$

Por la división indicada en el primer miembro, tenemos

$$\frac{y^2+5y+y^2}{y+3} = \frac{7}{3} + \frac{8}{9}y + \frac{1}{27}y^2 + \ldots\ldots,$$

é identificando, resulta

$$\frac{x^2+x+1}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{7}{3(x-2)^2} + \frac{8}{9(x-2)} + \frac{1}{9(x+1)}$$

en efecto, por el método general se deduce $\psi(x) = \frac{1}{9}$.

En el problema anterior, haciendo $x - 1 = y$ resulta $3 - 2y + 4y^2 + 5y^3 = A_1 + A_2 y + A_3 y^2 + A_4 y^3$, obteniéndose $A_1 = 3$, $A_2 = -2$, $A_3 = 4$, $A_4 = 5$, como se ha visto.

*4.° caso.* Supongamos que el denominador tenga factores imaginarios, es decir que $f(x)$ sea de la forma

$$f(x) = (x-a)^n (x-b)^p \ldots\ldots f_r(x)$$

conteniendo la ecuación $f_r(x) = 0$ factores imaginarios.

A la serie de fracciones correspondientes á todas las raices reales se tendrá que agregar otra fracción $\frac{\varphi_r(x)}{f_r(x)}$; y escribiremos

$$f_{(r)} = (x^2 + px + q)^{\mu} f_{r+1}(x)$$

siendo primos entre sí los polinomios $f_r(x)$ y $\varphi_r(x)$ y el grado del segundo inferior al del primero. Se podrán pues obtener dos polinomios $\omega(x)$ y $\varphi_{r+1}(x)$ que verifiquen la identidad

$$\frac{\varphi_r(x)}{f_r(x)} = \frac{\omega(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu}} + \frac{\varphi_{r+1}(x)}{f_{r+1}(x)},$$

siendo el segundo miembro la suma de dos fracciones irreducibles.

El grado de $\omega(x)$ es á lo más $2\mu - 1$. Si dividimos $\omega(x)$ por $x^2 + px + q$, obtendremos la identidad

$$\omega(x) = (x^2 + px + q)\,\omega_1(x) + Px + Q$$

siendo $\omega_1$ un polinomio entero, á lo más de grado $2\mu - 3$, y P y Q constantes que no se pueden anular simultáneamente, porque $\omega(x)$ es primo con $x^2 + px + q$.

Se obtendrá análogamente

$$\omega_1(x) = (x^2 + px + q)\,\omega_2(x) + P_1 x + Q_1$$

. . . . . .

$$\omega_{\mu-2}(x) = (x^2 + px + q)(P_{\mu-1}x + Q_{\mu-1}) + P_{\mu-2}x + Q_{\mu-2}$$

de modo que

$$\frac{\omega(x)}{(x^2 + px + q)^{\mu}} = \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^{\mu}} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + px + q)^{\mu-1}} + \ldots\ldots + \frac{P_{\mu-1}x + Q_{\mu-1}}{x^2 + px + q},$$

siendo P, Q, $P_1$, $Q_1$, ....., $P_{\mu-1}$, $Q_{\mu-1}$ constantes. Se pro-

cederá análogamente con la fracción $\frac{\varphi_{r+1}(x)}{f_{r+1}(x)}$, y se llegará finalmente á la fórmula

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = E(x) + \Sigma\left[\frac{A}{(x-a)^n} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a}\right]$$
$$+ \Sigma\left[\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^\mu} + \ldots\ldots \frac{P_{\mu-1}x + Q_{\mu-1}}{x^2+px+q}\right].$$

Una fracción algebráica sólo admite una descomposición en fracciones simples, según se demuestra en los tratados de Algebra.

**80.** MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS.—Consiste en suponer efectuada la descomposición en fracciones simples, reducir á un común denominador é identificar los coeficientes de las mismas potencias de $x$ en los dos miembros, para determinar así los coeficientes indeterminados. Aunque ya hemos empleado este método en ejemplos anteriores sean:

*Ejemplo 1.°*

$$\frac{x^2+1}{x(x^2-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1};$$ tendremos

$$x^2 + 1 = A(x^2-1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$$A = -1, \quad 2 = 2B, \quad 2 = 2C;$$

luego $$\frac{x^2+1}{x(x^2-1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

*Ejemplo 2.°*

$$\frac{x^2-2x+2}{x(x^2-x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1},$$

$$x^2 - 2x + 2 = A(x^2 - x + 1) + x(Mx + N)$$

$$A + M = 1, \quad -A + N = -2, \quad A = 2$$

$$\frac{x^2-2x+2}{x(x^2-x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2-x+1}.$$

## § 2.° Aplicaciones.

1. $\dfrac{3x-3}{x^2-6x+8}$ solución $\dfrac{9}{2}\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x-2}$.

2. $\dfrac{5x-7}{x^2-4x+3}$ » $\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{x-1}$.

3. $\dfrac{31x-96}{6(x^2-3x-18)}$ » $\dfrac{5}{3(x-6)}+\dfrac{7}{2(x+3)}$.

4. $\dfrac{3x-5}{x^2-6x+8}$ » $\dfrac{7}{2(x-4)}-\dfrac{1}{2(x-2)}$.

5. $\dfrac{x^2-2}{(x^2-2x+1)^2}$ » $-\dfrac{1}{(x-1)^4}+\dfrac{2}{(x-1)^3}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

6. $\dfrac{x^2-1}{x^3-x}$ » $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}$.

7. $\dfrac{x^3+1}{(x-1)^4}=\dfrac{2}{(x-1)^4}+\dfrac{3}{(x-1)^3}+\dfrac{3}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{x-1}$.

8. $\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}=-\dfrac{1}{4(x-1)^3}-\dfrac{1}{4(x-1)^2}$
$-\dfrac{21}{48(x-1)}+\dfrac{1}{8(x+1)^2}+\dfrac{5}{48(x+1)}+\dfrac{1}{3(x-2)}$.

9. $\dfrac{x^3}{(x^2+1)^2(x-1)}=\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{4}\dfrac{3-x}{x^2+1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{x-1}{(x^2+1)^2}$.

10. $\dfrac{1}{(x-1)^2(x+1)}=\dfrac{1}{2(x-1)^2}-\dfrac{1}{4(x-1)}+\dfrac{1}{4(x+1)}$.

11. $\dfrac{x^2}{(x-a)^2(x+a)}=\dfrac{a}{2(x-a)^2}+\dfrac{3}{4(x-a)}+\dfrac{1}{4(x+a)}$.

12. $\dfrac{1}{(x^2+1)^2x^3}=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{x}{(x^2+1)^2}+\dfrac{2x}{x^2+1}$.

13. $$\frac{x^3+1}{(x-1)^4(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^4} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1} + \frac{f(x)}{x^2+1}.$$

$$2 = 2A, \quad 3 = 2A + 1B, \quad 6 = 2A + 4B + 4C$$

$$6 = 6A + 12B + 12C, \quad A = 1, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{4}.$$

Solución $$\frac{x^3+1}{(x-1)^4(x^2+1)} = \frac{1}{(x-1)^4} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-3)^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{4}\frac{x-1}{x^2+1}.$$

14. $$\frac{6x^4}{1+x^6} = \frac{2}{x^2+1} + \frac{\sqrt{3}\,x-1}{x^2-\sqrt{3}\,x+1} - \frac{\sqrt{3}\,x+1}{x^2+\sqrt{3}+1}.$$

15. $$\frac{1}{x^4+1} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{-\frac{x\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{3}}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

16. $$\frac{x^3-2x^2+7x+4}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{5:2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} - \frac{3:2}{(x+1)^2} + \frac{2}{x+1}.$$

17. $$\frac{x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{i}{8(x+i^3} - \frac{1}{16}\frac{1}{(x+i)^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{(x+i)} - \frac{i}{8}\frac{1}{(x-i)^3}.$$

# CAPÍTULO V

## Productos infinitos

### § 1.° Principios fundamentales.

**117.** Convergencia. Se dice que un producto

$$u_1 u_2 u_3 \ldots\ldots u^n, \ldots\ldots$$

es convergente, cuando el producto

$$P_n = u_1 u_2 \ldots\ldots u_n$$

tiende hacia un límite determinado P distinto de cero, al mismo tiempo que $n$ aumenta indefinidamente.

**118.** Teorema 1.° *Para que el producto* $u_1 u_2 \ldots\ldots u_n \ldots\ldots$ *sea convergente, es necesario que sus factores tiendan hacia la unidad cuando el número de éstos aumenta indefinidamente.*

En efecto, se tiene que

$$u_n = \frac{P_n}{P_{n-1}};$$

pero los dos términos de la fracción tienen por límite P; luego $lim\ u_n = 1$.

Podemos por tanto escribir el producto dado bajo la forma

$$(1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2) \ldots\ldots\ (1 + \alpha_n) \ldots\ldots \qquad (1)$$

**119.** Teorema 2.° *El producto* (1) *converge hacia un límite distinto de cero, si las dos series*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n + \ldots\ldots \qquad (2)$$

$$\alpha^2_1 + \alpha^2_2 + \ldots\ldots + \alpha^2_n + \ldots\ldots \qquad (3)$$

*son convergentes, y tiene cero por límite si la serie* (2) *es convergente y la* (3) *divergente.* En efecto, si se hace

$$P_n = (1 + \alpha_1)\ (1 + \alpha_2) \ldots\ldots\ (1 + \alpha_n),$$

se tiene

$$lP_n = l(1 + \alpha_1) + l(1 + \alpha_2) + \ldots\ldots + l(1 + \alpha_n).$$

Pero en virtud de la fórmula

$$l(1 + x) = x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{(1 + \theta x)^2}$$

en la que $-1 < \theta < +1$, se tiene que

$$lP_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n) - \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha^2_1}{(1 + \theta_1 \alpha_1)^2} + \ldots\ldots + \frac{\alpha^2_n}{(1 + \theta_n \alpha_n)^2}\right];$$

y como las cantidades $1 + \theta_1\alpha_1, \ldots\ldots 1 + \theta_n\alpha_n$ son positivas y tienen á la unidad por límite, la serie cuyos $n$ primeros términos están comprendidos en el segundo paréntesis es convergente ó divergente, según que lo sea la serie (3); luego en el caso de ser esta convergente, $lP$ constará de dos partes cuyos límites son finitos, y $P_n$ tendrá un límite finito distinto de cero; y si la serie (2) es convergente, siendo la (3) divergente, las dos partes de $lP_n$ son, la primera convergente y la segunda tiende hacia $-\infty$; luego $lP_n$ tenderá hacia $-\infty$, y $P_n$ tendrá por límite cero.

*Ejemplos:* 1.º El producto

$$(1 + \alpha)(1 + \alpha^2)(1 + \alpha^3) \ldots\ldots$$

en el que $-1 < \alpha < +1$, converge hacia un límite distinto de de cero, porque las dos series

$$\alpha + \alpha^2 + \ldots\ldots, \qquad \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots\ldots$$

son convergentes.

2.º El límite del producto

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \ldots\ldots$$

es cero, porque los segundos términos de los binomios forman la serie convergente

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots\ldots;$$

pero sus cuadrados forman la serie armónica que es divergente.

*Observación.* Las proposiciones anteriores sirven para reducir la convergencia de un producto á la convergencia de una serie. Pero también, se puede reducir la convergencia de una serie á la de un producto. Así, siendo

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \ldots\ldots \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n},$$

que tiene cero por límite, la serie formada por los segundos términos de los factores que forman el producto

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots\ldots$$

será divergente.

## § 2.° Aplicaciones.

1. Hallar el límite hacia el que tiende el producto

$$P_n = \cos\frac{a}{2} \cos\frac{a}{2^2} \ldots\ldots \cos\frac{a}{2^n}$$

cuando $n$ crece indefinidamente.

Se tiene

$$\cos a = \frac{\operatorname{sen} 2a}{2 \operatorname{sen} a}, \quad \cos\frac{a}{2} = \frac{\operatorname{sen} a}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2}}, \quad \cos\frac{a}{2^n} = \frac{\operatorname{sen} \frac{a}{2^{n-1}}}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2^n}},$$

$$P^n = \frac{\operatorname{sen} 2a}{2^{n+1} \operatorname{sen} \frac{a}{2^n}} = \frac{(a : 2^n)}{\operatorname{sen}(a : 2^n)} \frac{\operatorname{sen} 2a}{2a}, \quad \lim P_n = \frac{\operatorname{sen} 2a}{2a}.$$

2. Si las fracciones positivas decrecientes

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots\ldots, \quad u_n, \ldots\ldots \tag{1}$$

forman una serie convergente, los productos

$$A_p = (1 - u_{m+1})(1 - u_{m+2}) \ldots\ldots (1 - u_{m+p})$$
$$B_p = (1 + u_{m+1})(1 + u_{m+2}) \ldots\ldots (1 + u_{m+p})$$

difieren de la unidad en tan poco como se quiera, tomando $p$ suficientemente grande.

1.º Se tiene que

$$(1 - u_{m+1})(1 - u_{m+2}) > 1 - u_{m+1} - u_{m+2},$$
$$(1 - u_{m+1})(1 - u_{m+2})(1 - u_{m+3}) > 1 - u_{m+1} - u_{m+2} - u_{m+3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_p > 1 - (u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots\ldots + u_{m+p});$$

pero siendo la serie (1) convergente, se puede tomar $m$ bastante grande para que se tenga

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+p} + \ldots\ldots < \alpha,$$

siendo $\alpha$ tan pequeña como se quiera;

luego $$A_p > 1 - \alpha.$$

2.º Se puede escribir

$$1 + u_h = \frac{1}{1 - v_h}$$

de donde $$v_h = \frac{u_h}{1 + u_h} < u_h;$$

luego

$$\frac{1}{B_p} = (1 - v_{m+1})(1 - v_{m+2}) \ldots\ldots (1 - v_{m+p})$$
$$> (1 - u_{m+1})(1 - u_{m+2}) \ldots\ldots (1 - u_{m+p});$$

luego $$B_p < \frac{1}{1 + \alpha}.$$

3. Si las fracciones positivas decrecientes

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots\ldots, \quad u_n, \ldots\ldots$$

forman una serie convergente, los productos

$$A_n = (1 - u_0)(1 - u_1) \ldots\ldots (1 - u_n)$$
$$B_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \ldots\ldots (1 + u_n)$$

tienden hacia límites finitos, cuando $n$ crece indefinidamente.

1.° Creciendo $A_n$ á medida que $n$ aumenta, se tiene

$$A_n = (1 - u_0) \ldots\ldots (1 - u_m)(1 - u_{m+1}) \ldots\ldots (1 - u_n)$$
$$= A_m (1 - u_{m+1})(1 - u_{m+2}) \ldots\ldots (1 - u_n);$$

luego, según el problema anterior:

$$A_n > A_m (1 - \alpha),$$

siendo $\alpha$ tan pequeña como se quiera, para $m$ suficientemente grande.

2.° Además

$$B_n = B_m (1 + u_{m+1}) \ldots\ldots (1 + u_n)$$

y, como por ser $m$ suficientemente grande, el multiplicador de $B_m$ es $< \frac{1}{1 - \alpha}$, se tiene

$$B_n < \frac{B_m}{1 - \alpha},$$

es decir, que $B_n$, creciendo sin cesar con $n$, no crece sin límite.

4. Si las fracciones positivas indefinidamente decrecientes

$$u_0, \quad u_1, \quad \ldots\ldots, \quad u_n, \ldots\ldots$$

forman una serie divergente, el producto

$$A_n = (1 - u_0)(1 - u_1) \ldots\ldots (1 - u_n)$$

tiende hacia cero, cuando $n$ aumenta indefinidamente, y el producto

$$B_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \ldots\ldots (1 + u_n)$$

crece sin límite.

$B_n$ crece sin límite, porque se tiene

$$B_n > 1 + u_0 + \ldots\ldots + u_n$$

y, por hipótesis $u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$ crece indefinidamente con $n$.

Si ahora se escribe

$$\frac{1}{1 - u_h} = 1 + v_h \quad \text{de donde} \quad v_h = \frac{u_h}{1 - u_h} > u_h,$$

resulta que

$$\frac{1}{A_h} = (1 + v_0) \ldots\ldots (1 + v_n) > (1 + u_0) \ldots\ldots (1 + u_n);$$

luego $\dfrac{1}{A_n}$ crece indefinidamente con $n$, es decir que $A_n$ tiende hacia cero.

5. Demostrar las identidades

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} mx = \operatorname{sen} x \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 2\frac{\pi}{m}}\right) \ldots\ldots \\ \times \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 \frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m}}\right) \end{aligned} \right.$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sen} mx = m \cos^m x \operatorname{tg} x \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 2\frac{\pi}{m}}\right) \\ \times \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 \frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m}}\right) \end{aligned} \right.$$

siendo $m$ un número positivo impar.

De la fórmula de Moivre resulta que

$$\operatorname{sen} mx = m \cos^{m-1} x \operatorname{sen} x - \binom{m}{3} \cos^{m-3} x \operatorname{sen}^3 x + \ldots\ldots$$

Suponiendo $m$ impar, toma la forma (3)

$$\operatorname{sen} mx = m \operatorname{sen} x \,(1 + a_2 \operatorname{sen}^2 x + \ldots\ldots + a_{m-1} \operatorname{sen}^{m-1} x)$$

ó bien

$$\operatorname{sen} mx = m \cos^m x \operatorname{tg} x \,(1 + b_2 \operatorname{tg}^2 x + \ldots + b_{m-1} \operatorname{tg}^{m-1} x). \quad (4)$$

Pero si se hace

$$\operatorname{sen} x = y \qquad \operatorname{sen} mx = \varphi(y),$$

la ecuación

$$\varphi(y) = 0 = y\,(1 + a_2 y^2 + \ldots\ldots + a_{m-1} y^{m-1})$$

admite $m$ raices, que son los senos de

$$0, \quad \pm \frac{\pi}{m}, \quad \pm \frac{2\pi}{m}, \ldots\ldots \pm \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m};$$

luego la relación (3) puede escribirse

$$\operatorname{sen} mx = H \operatorname{sen} x \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{m}}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 \frac{m-1}{2} \frac{\pi}{m}}\right).$$

Para determinar H, basta notar que si se hace $x = 0$, se tiene

$$H = \lim \frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x} = \lim \frac{\operatorname{sen} mx}{mx} \frac{x}{\operatorname{sen} x} m = m$$

resultando la relación (1).

Se obtiene de igual modo la relación (2).

6. De las relaciones anteriores deducir

$$(-1)^n \operatorname{sen} z < (-1)^n z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \ldots\ldots$$

$$\times \left[1 - \frac{z^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \pi^2}\right]$$

$$(-1)^n \operatorname{sen} z > (-1)^n \cos^m \frac{z}{m}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\cdots\cdots$$

$$\times\left[1-\frac{z^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right],$$

en las que $n\pi < x < n+1)\,\pi$, y el número entero $n$ es menor que el número impar $m$.

Siendo $\dfrac{\operatorname{sen}(a+h)}{a+h} < \dfrac{\operatorname{sen} a}{a}$, $\dfrac{\operatorname{tg}(a+h)}{a+h} > \dfrac{\operatorname{tg} a}{a}$

que suponen $a$ y $a+h$ menores que $\dfrac{\pi}{2}$ y $h$ esencialmente positivo, se tiene que estas desigualdades pueden escribirse:

$$\frac{\operatorname{sen}(a+h)-\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} a} < \frac{h}{a}, \quad \frac{\operatorname{tg}(a+h)-\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a} > \frac{h}{a},$$

ó bien $$a \operatorname{sen}\frac{h}{2}\cos\left(a+\frac{h}{a}\right) < \frac{h}{2}\operatorname{sen} a$$

$$a \operatorname{tg} h\,[1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg}(a+h)] > h \operatorname{tg} a,$$

pues $$\operatorname{tg} h = \frac{\operatorname{tg}(a+h)-\operatorname{tg} a}{1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg}(a+h)}.$$

Resultan evidentes estas relaciones notando que

$$\operatorname{sen}\frac{h}{2} < \frac{h}{2}, \quad a\cos a < \operatorname{sen} a, \quad \operatorname{tg} h > h, \quad a(1+\operatorname{tg}^2 a) > \operatorname{tg} a.$$

Esto sentado, de la identidad

$$\operatorname{sen} mx = m \operatorname{sen} x\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{m}}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2\frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m}}\right)$$

haciendo

$$mx = z, \quad \frac{\operatorname{sen}^2 z/m}{\operatorname{sen}^2 \pi/m} = u_n, \quad \text{y} \quad n\pi < z < n+1)\,\pi, \quad n < m,$$

(4) resulta $\operatorname{sen} z = m \operatorname{sen} \frac{z}{m} (1 - u_1) \ldots\ldots \left(1 - \frac{u_{m-1}}{2}\right)$,

Se puede tomar $m$ bastante grande para que $\frac{z}{m}$ sea menor que $\frac{\pi}{2}$. Por consiguiente, se tiene

$$u_1 < \frac{z^2}{\pi^2}, \quad u_2 < \frac{z^2}{4\pi^2}, \quad \ldots\ldots, \quad u_n < \frac{z^2}{n^2\pi^2}$$

$$u_{n+1} > \frac{z^2}{(n+1)^2\pi^2}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{u_{m-1}}{2} > \frac{z^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \pi^2},$$

$$(u_1 - 1)(u_2 - 1) \ldots\ldots (u_n - 1)(1 - u_{n+1}) \ldots\ldots \left(1 - \frac{u_{m-1}}{2}\right)$$

$$< \left(\frac{z^2}{\pi^2} - 1\right)\left(\frac{z^2}{4\pi^2} - 1\right) \ldots\ldots \left(\frac{z^2}{n^2\pi^2} - 1\right)\left[1 - \frac{z^2}{(n+1)^2 z^2}\right]$$

$$\times \left[1 - \frac{z^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \pi^2}\right].$$

En fin

$$(-1)^n \operatorname{sen} z < (-1)^n z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \ldots\ldots$$

$$\times \left[\frac{z^2}{1 - \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \pi^2}\right].$$

Análogamente se deducirá la segunda desigualdad.

7. Demostrar las dos relaciones

$$\operatorname{sen} z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \ldots\ldots$$

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{25\pi^2}\right) \ldots\ldots \quad \text{(Euler).}$$

El problema anterior da las dos desigualdades

$$(-1)^n \operatorname{sen} z < P, \quad (-1)^n \operatorname{sen} z > P \cos^m \frac{z}{m}$$

de las que resulta

$$P = (-1)^n z \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right) \cdots \left[\frac{z^2}{1 - \left(\frac{m-1}{2}\right)^2 \pi^2}\right].$$

representando $m$ un número impar, tan grande como se quiera.

Si se hace ahora crecer á $m$ indefinidamente, P tiene un límite, según la cuestión 3. La cantidad variable $\cos^m \frac{z}{m}$, menor que la unidad, se aproxima pues indefinidamente á

$$\cos^{2m} \frac{z}{m} = \left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{z}{m}\right)^m > 1 - \frac{z^2}{m} \frac{\operatorname{sen}^2 z/m}{(z/m)^2},$$

y el segundo miembro converge hacia 1 para $m$ suficientemente grande; luego

$$\lim P \quad \text{ó} \quad \operatorname{sen} z = z \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right) \cdots$$

También $\operatorname{sen} z = z \left(1 - \frac{4z^2}{2^2\pi^2}\right) \cdots$ y $\operatorname{sen} 2z = 2z \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right) \cdots$

y dividiendo estas igualdades miembro á miembro, resulta

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right) \cdots \left[1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right] \cdots$$

# CAPÍTULO VI

## Extensión de las fórmulas de Taylor y de Mac Laurin

### § 1.° Extensión de la fórmula de Taylor

**120.** Sea $u = f(x, y)$ una función de dos variables.

Para desarrollar $f(x + h, y + k)$ según las potencias de $k$ y de $h$, cambiemos primero $x$ en $x + ht$, $y$ en $y + kt$, y en el desarrollo, según las potencias ascendentes de $t$, por la fórmula de Mac Laurin, hagamos $t = 1$.

Sea $$f(x + ht, y + kt) = \varphi(t) = U;$$

y haciendo, para simplificar la notación,

$x + ht = p$, $y + kt = q$, tendremos $U = \varphi(t) = f(p, q)$.

Además, según la serie de Mac Laurin

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \ldots + \frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \frac{t^n}{n!}[\varphi^{(n)}(\theta t) - \varphi^n(0)].$$

Pero, por ser $\varphi(t) = U$, se tiene que

$$\varphi'(t)\,dt = \frac{\partial U}{\partial p}dp + \frac{\partial U}{\partial q}dq = \left(\frac{\partial U}{\partial p}h + \frac{\partial U}{\partial q}k\right)dt;$$

luego $$\varphi'(t) = \frac{\partial U}{\partial p}h + \frac{\partial U}{\partial q}k.$$

Y si se expresa $\varphi'(t)$ por $U'$, siendo ésta todavía función de $p$ y $q$, se tendrá:

$$\varphi''(t) = \frac{\partial U'}{\partial p}h + \frac{\partial U'}{\partial q}k = \frac{\partial^2 U}{\partial p^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial q}hk + \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}k^2.$$

Pero el segundo miembro es el desarrollo de $\left(\frac{\partial U}{\partial p}h + \frac{\partial U}{\partial q}k\right)^2$

en el que se hubiese sustituido $dU^2$ por $d^2U$; se puede, pues, escribir la fórmula simbólica

$$\varphi''(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial p}h + \frac{\partial U}{\partial q}k\right)^{(2)} \quad \text{y} \quad \varphi^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial u}{\partial p}h + \frac{\partial U}{\partial q}k\right)^{(n)};$$

Así, desarrollando, será:

$$\varphi^{(n)}\, t = \frac{\partial^n U}{\partial p^n}h^n + n\,\frac{\partial^n U}{\partial p^{n-1}\,\partial q}h^{n-1}k + \ldots\ldots$$

Pero siendo

$$u = f(x, y), \quad U = f(p, q), \quad p = x + ht, \quad q = y + kt,$$

si hacemos $t = 0$, será $p = x$, $q = y$, $U = u$ y

$$\varphi(0) = f(x, y) = u, \quad \varphi'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k, \ldots\ldots$$

y para $t = 1$ $\quad R = \frac{1}{n!}[\varphi^{(n)}(\theta) - \varphi^{(n)}(0)]$; luego

$$f(x+h, y+k) = u + \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(2)} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(n)}$$

siendo

$$R = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial p}h + \frac{\partial U}{\partial q}k\right)^{(n)} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}k\right)^{(n)}\right],$$

expresión en que debe sustituirse $p$ por $x + \theta h$ y $q$ por $y + \theta k$.

## § 2.° Extensión de la fórmula de Mac Laurin

**121.** Supongamos que en el desarrollo anterior se hace $x = 0$, $y = 0$, y designemos por $u_0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ las ex-

presiones $u$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, para $x = 0$ é $y = 0$. Se tendrá sucesivamente

$$f(h, k) = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 h + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 k + \ldots\ldots + R,$$

después de sustituir $h$ por $x$ y $k$ por $y$,

$$f(x, y) = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y\right]^{(2)} + \ldots\ldots + R, \qquad (1)$$

siendo

$$R = \frac{1}{n!}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial p} h + \frac{\partial U}{\partial q} k\right)_0^n - \left(\frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k\right)_0^n\right],$$

en la que se debe hacer $x = 0$, $y = 0$ y sustituir $h$ por $x$, $k$ por $y$, $p$ por $\theta x$ y $q$ por $\theta y$.

Cuando R tiende hacia 0, á medida que $n$ aumenta, el segundo miembro de la fórmula (1) es una serie convergente cuya suma es $f(x, y)$. Es la serie de Mac Laurin extendida á dos variables.

## § 3.º Funciones homogéneas.

**122.** Una función se dice *homogénea*, si multiplicando las variables que contiene por un mismo factor, el resultado es igual al valor primitivo de la función multiplicado por cierta potencia de este factor. Así $f(x, y, z)$ será una función homogénea, de grado $m$, si se tiene

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z).$$

**123.** *Si se divide una función homogénea del grado* m *por una de las variables elevada á la potencia* m^sima, *la función no dependerá más que de las relaciones de las demás variables á ésta.*

En efecto, para $tx = 1$, se tendrá $t = \frac{1}{x}$, y resulta sucesivamente

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z), \quad f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = \frac{f(x, y, z)}{x^m}.$$

Recíprocamente, si esta relación se verifica, la función es homogénea, pues resulta

$$f(tx, ty, tz) = t^m x^m \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

y eliminando la función $\varphi$, se tiene que

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z).$$

**124.** *Las derivadas parciales de primer orden de toda función homogénea son funciones homogéneas de grado* $m - 1$.

En efecto, si $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \varphi(x, y, z)$

se tiene $f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z)$

y derivando respecto á $x$,

$$\varphi(tx, ty, tz)t = t^m \varphi(x, y, z),$$
$$\varphi(tx, ty, tz) = t^{m-1} \varphi(x, y, z);$$

Haciendo $t = 1 + \alpha$ en (1), de los desarrollos

$$f(x + \alpha x, y + \alpha y, z + \alpha z) = u + \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x} x + \dots\right)$$
$$+ \frac{\alpha^2}{2!}\left(\frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} z\right)^{(2)} + \dots,$$

y $(1 + \alpha)^m u = u + mu\alpha + \frac{m(m-1)}{2} u\alpha^2 + \dots$

resulta, por identificación,

$$\frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} z = mu,$$

. . . . . .

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} x + \frac{\partial u}{\partial y} y + \frac{\partial u}{\partial z} z\right)^n = m(m-1) \dots (m - n + 1)u,$$

luego en virtud del recíproco anterior, la derivada propuesta es homogénea de grado $m - 1$.

**125**. Teorema de Euler. *El producto de una función homogénea por su grado* m *es igual á la suma de los productos que se obtienen multiplicando cada derivada parcial de primer orden por la variable correspondiente.* Este es el enunciado de la primera de las fórmulas anteriores ó sea

$$xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = mf(x, y, z), \quad (1)$$

que se obtiene también directamente derivando la identidad

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z)$$

respecto á $t$, y haciendo $t = 1$.

*Ejemplo.* Sea

$$u = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyx + 2Exz + 2Fxy;$$

se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2Ax + 2Ez + 2Fy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2By + 2Dz + 2Fx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2Cz + 2Dy + 2Ex, \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$= 2(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + \ldots\ldots) = 2u.$$

# CAPÍTULO VII

## Expresiones indeterminadas

### § 1.° Principios generales

**126.** Una expresión analítica que, para cierto valor $a$ de la variable $x$ se presenta bajo una de las formas indeterminadas

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty - \infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$$

puede tender hacia un límite ó hacerse infinita, cuando $x$ tiende hacia $a$. Este valor límite se llama *verdadero valor para* $x = a$ de la expresión considerada.

Por ejemplo el verdadero valor de la expresión $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$, para $x = 0$ es 1.

**127.** Forma $\frac{0}{0}$.

Sean $f(x)$ y $\varphi(x)$ dos funciones que en cierto intervalo tienen derivadas determinadas, y que se anulan para un valor $a$ perteneciente á este intervalo. La relación

$$\frac{f(x)}{\varphi x} \qquad (1)$$

se presenta bajo la forma $\frac{0}{0}$ para $x = a$.

Aplicando el teorema de Taylor, en la hipótesis de que $f^{(n+1)}x$ y $\varphi^{(n+1)}x$ sean las dos primeras derivadas que no se

anulan simultáneamente, para $x = a$, tendremos que

$$\frac{f(a+h)}{\varphi(a+h)} = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{\varphi^{(n+1)}(a+\theta' h)},$$

es decir que $$\lim \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f^{(n+1)}(a)}{\varphi^{(n+1)}(a)}.$$

En esta fórmula consiste la regla de L' Hospital.

*Ejemplo 1.°* La expresión $\frac{x^m - a^m}{x - a}$ se hace $\frac{0}{0}$ para $x = a$, y su verdadero valor es $ma^{m-1}$, valor de la derivada del numerador, para $x = a$, dividido por 1, valor de la derivada de su denominador.

2.° Hallar el límite de $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$ para $x = 0$.

Se obtiene sucesivamente

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \qquad \text{para } x = 0,$$

$$\frac{f''(x)}{x''(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \qquad \text{para } x = 0,$$

$$\frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2 \qquad \text{para } x = 0.$$

La regla de L' Hospital se aplica aun en el caso de ser $a = \infty$. Para ello hagamos $x = \frac{1}{u}$. La relación (1) se reduce á

$$f\left(\frac{1}{u}\right) : \varphi\left(\frac{1}{u}\right)$$

que se presenta bajo la forma $\frac{0}{0}$ para $u = 0$.

Aplicando dicha regla se tiene

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{u=0} \frac{-\frac{1}{u^2} f'\left(\frac{1}{u}\right)}{-\frac{1}{u^2} \varphi'\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{u=0} \frac{f'\left(\frac{1}{u}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{u}\right)} = \lim_{x=\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

De manera que, en este caso también, el límite de la relación de las dos funciones es igual al límite de la relación de sus derivadas.

3.º Sea $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, que para $x = a$ se hace $\dfrac{0}{0}$.

Haciendo $x = a + h$, y desarrollando el numerador según las potencias de $h$, se tiene

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{1 + \frac{h}{a}} - \sqrt{a} + \sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{2a}\sqrt{1 + \frac{h}{2a}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{a} \ldots\ldots\right) - \sqrt{a} + \sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{2a}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{2a} \ldots\ldots\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}} \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{h}}{a} \ldots\ldots}{\sqrt{2a}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{2a} \ldots\ldots\right)} = \frac{1 + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{h}}{a}}{\sqrt{2a}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{h}{2a} \ldots\ldots\right)}$$

Para $h = 0$ se reduce pues á $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

*Observación.* También se puede suprimir el factor común $\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$ que anula simultáneamente al numerador y denominador, que es fácil obtener considerando á $x - a$ como

diferencia de los cuadrados de las dos raíces y $x^2 - a^2$ como producto de $x + a$ también por $x - a$, que es el producto de la suma por la diferencia de las raíces.

TEOREMA. *Sean* f(x) *y* $\varphi$(x) *dos funciones que se hacen simultáneamente infinitas, cuando la variable* x *tiende hacia cierto valor* a. *Si la relación de sus derivadas tiende hacia un límite determinado ó se hace infinita, cuando* x *tiende hacia* a, *la relación de las funciones tiende hacia el mismo límite, ó se hace infinita.*

Para demostrar este teorema, distinguiremos dos casos.

1.° *a es infinito.* Designemos por $\alpha$ un número fijo bastante grande para que, permaneciendo $x$ mayor que $\alpha$, la relación de las derivadas de las funciones propuestas, difiera tan poco como se quiera de su límite $l$.

Según el teorema de los incrementos finitos tendremos, hallándose $c$ comprendido entre $\alpha$ y $x$, que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{f(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad \text{de donde} \qquad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \cdot \frac{1 - \dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1 - \dfrac{f(\alpha)}{f(x)}}.$$

Pero cuando $x$ crece indefinidamente, el límite del segundo miembro es 1, puesto que $f(\infty)$ y $\varphi(\infty)$ son infinitos; luego se puede tomar $x$ bastante grande para que el segundo miembro difiera de $l$ en tan poco como se quiera; luego el primer miembro, es decir, la relación de las funciones dadas, tiene también 1 por límite.

Se ve al mismo tiempo que, si la relación de las derivadas en vez de tender hacia un límite $l$ se hiciera infinita, lo mismo sucedería á la relación de las funciones.

2.° *a es finito.* Haciendo $x = a + \dfrac{1}{u}$, se tiene

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{u=\infty} \frac{f\left(a + \dfrac{1}{u}\right)}{\varphi\left(a + \dfrac{1}{u}\right)}$$

y nos hallamos en el caso anterior. Podemos, pues tomar la relación de las derivadas, es decir, buscar para $u = \infty$, el límite de la relación

$$\frac{-\frac{1}{u^2} f'\left(a+\frac{1}{u}\right)}{-\frac{1}{u^2} \varphi'\left(a+\frac{1}{u}\right)} = \frac{f'\left(a+\frac{1}{u}\right)}{\varphi'\left(a+\frac{1}{u}\right)},$$

es decir, el límite de $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ para $x = a$.

*Ejemplo.* 1.° Sea $\frac{alx}{l \operatorname{sen} x}$. Se tiene que

$$a \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = a \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x=0} \frac{a \cos x}{\cos x - x \operatorname{sen} x} = a.$$

2.° Sea $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m}$ que se hace $\frac{0}{0}$ para $x = 0$, cuando $m$ es positivo.

Si se aplica la regla de L' Hospital, tendremos una dificultad consistente en que los dos factores del numerador tienden hacia 0 é $\infty$, la que se salva haciendo $x = \frac{1}{y}$, transformándose la fracción dada en la siguiente: $\frac{y^m}{e^{y^2}}$, cuyos dos términos son infinitos para $y = \infty$, es decir, para $x = 0$. El verdadero valor es pues el mismo que el de

$$\frac{m y^{m-1}}{e^{y^2} 2y} = \frac{m}{2} \frac{y^{m-2}}{e^{y^2}}$$

Pero éste se hace $\frac{\infty}{\infty}$ para $y = \infty$; luego su valor estará dado por

$$\frac{m}{2} \frac{(m-2) y^{m-3}}{e^{y^2} 2y} = \frac{m}{2} \left(\frac{m}{2} - 1\right) \frac{y^{m-4}}{e^{y^2}},$$

y así sucesivamente. En fin, si $m$ es un entero par, después de un número $\frac{m}{2}$ de derivaciones sucesivas, se obtendrá por verdadero valor de la función, la fracción

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \frac{m}{2}}{e^{y^2}}$$

cuyo denominador tan sólo se hace infinito para $y = \infty$; el valor buscado es pues o.

Si al contrario, $m$ es impar ó fraccionario, después de un número $n$ de derivaciones inmediatamente superior á $\frac{m}{2}$, el exponente de $y$ se hará negativo; y se podrá invirtiendo, hacer de modo que el numerador sea un número constante y finito, mientras que el denominador adquiera la forma $y^{n-m} e^{y^2}$, siendo por consiguiente todavía infinito; así se ve que en todos los casos la fracción $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^m}$ es nula para $x = 0$. (*).

3.° Se tiene para $x = \infty$ $\quad \frac{a^x}{x} = \frac{a^x la}{1} = \infty$.

La exponencial crece más rápidamente que la variable.

4.° Para $x = \infty$, designando $n$ el número entero inmediatamente superior á $a$, se tiene

$$\frac{x^a}{e^x} = \frac{a\,(a-1) \ldots\ldots (a-n+1)}{x^{n-a}\, e^x} = 0;$$

la exponencial crece pues más rápidamente que la función potencial.

5.° Para $x = 0$ $\quad xlx = \frac{lx}{x^{-1}} = \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = -x = 0.$

(*) **Timmermans** *Traité de calcul différentiel et de Calcul integral*, pág. 50.

Las reglas anteriores no pueden aplicarse, cuando $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ sea indeterminada sin serlo $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$. Por ejemplo: el límite de $\frac{x - \cos x}{x + \operatorname{sen} x}$ tiende hacia 1, á medida que $x$ crece indefinidamente, mientras que la relación de las derivadas $\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$ es un valor indeterminado para $x = \infty$.

**128.** FORMA $0 \cdot \infty$.

Sea el producto $f(x) \cdot \varphi(x)$ de dos funciones, de las que la primera se anula y la segunda se hace infinita para cierto valor de $x$.

Se escribirá dicho producto bajo una de las formas $\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, $\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}$ y nos hallaremos en uno de los casos anteriores.

*Ejemplo.* 1.° Tenemos que para $x = 1$,

$$\lim\left[(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right] = \lim\frac{1-x}{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}} = -\frac{1}{\frac{\pi}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{2}}\cot^2\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

2.° Sea $y = 2^x \operatorname{tg}\frac{a}{2^x}$ para $x = \infty$. Tenemos

$$\lim\frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2^x}}{\frac{1}{2^x}} = \lim\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{a}{2^x}} \cdot -\frac{a \cdot 2^x l2}{2^{2x}}}{-\frac{2^x \cdot l2}{2^{2x}}} = a.$$

**129.** FORMA $\infty - \infty$. Para hallar el verdadero valor de la

diferencia $y = f(x) - \varphi(x)$ para un valor particular $a$ de la variable, se escribe esta diferencia bajo la forma $\varphi(x)\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)} - 1\right]$.

Si la relación $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, que se presenta bajo la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, no tiende hacia 1 cuando $x$ tiende hacia $a$, la expresión $y$ se hará infinita.

Si la relación $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tiende hacia 1, tomará para $x = 0$, la forma $\infty \cdot 0$.

También podemos escribir

$$y = f(x)\varphi(x)\left(\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}\right) = \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\varphi(x)}}$$

que se presenta bajo la forma $\frac{0}{0}$.

*Ejemplo.* Sea $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}$ para $x = 0$.

Se tendrá que

$$y = \lim_{x=0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} = \lim_{x=0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x - x \operatorname{sen} x} = 0.$$

**130.** Formas $0^0$, $1^\infty$, $\infty^0$.

Según que se tenga

$f(a) = 0$ y $\varphi(a) = 0$, $f(a) = 1$ y $\varphi(a) = \infty$, $f(a) = \infty$ y $\varphi(a) = 0$,

la expresión $f(x)^{\varphi(x)}$, en la que se supone $f(x)$ positiva, se presenta bajo la forma $0^0$, $1^\infty$, ó $\infty^0$.

Para obtener su valor, se busca el valor de su logaritmo, y luego se pasa al número correspondiente.

Siendo $lf(x)^{\varphi(x)} = \varphi(x)\, lf(x)$, en cada uno de los tres casos se presenta el producto bajo la forma $0 \cdot \infty$.

Llamando $y$ á la expresión propuesta, se tiene que

$$y = e^{\varphi(x) lf(x)} = e^{\frac{lf(x)}{[\varphi(x)]^{-1}}}$$

y para obtener su verdadero valor, bastará calcular el verdadero valor

$$-\frac{f'(x)\varphi(x)^2}{f(x)f'(x)} \quad \text{del exponente} \quad \frac{lf(x)}{[\varphi(x)]^{-1}}.$$

*Ejemplos.* 1.° Para $x = 0$,

$$0^0 = x^x = e^{\lim \frac{lx}{x^{-1}}} = e^{-\frac{x^2}{x}} = e^{-x} = 1.$$

Para $x = \infty$, $\quad x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim \frac{lx}{x}} = e^{\frac{1}{x}} = 1.$

Para $x = 1$, $\quad x^{\frac{1}{1-x}} = e^{\lim \frac{lx}{1-x}} = e^{-\frac{1}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$

2.° Sea $y = (1 + ax)^{\frac{1}{x}}$, que para $x = 0$ se presenta bajo la forma $1^\infty$. Se tendrá

$$ly = \frac{l(1 + ax)}{x}; \quad \lim_{x=0} \frac{l(1 + ax)}{x} = a.$$

3.° Sean $\quad y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ que para $x = 0$ es $\infty^0$.

Se tiene $\quad ly = xl\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{l\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim ly = \lim \frac{x}{x + 1} = 0; \quad \text{luego} \quad \lim y = 1.$$

**131.** Si para $x = a$ la expresión $y = f(x)^{\varphi x}$ se presenta

bajo la forma $1^{\infty}$, mientras que la expresión $z = \varphi(x)\,(fx) - 1)$ tiende hacia un límite $k$, el verdadero valor de $y$ será $e^k$.

En efecto, tenemos que

$$y = \left(1 + \frac{z}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)} \quad \text{y para } x = a, \quad \lim y = e^{\lim z} = e^k.$$

*Ejemplo.* Sea

$$y = \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 2}\right)^x \text{ que para } x = \infty \text{ es } 1^{\infty}.$$

Por ser $$z = \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 2} - 1\right) x = \frac{2x^2 + 6x}{x^2 + 3x - 2},$$

cuyo límite para $x = \infty$ es 2. El verdadero valor de $y$ es $e^2$.

**132.** El desarrollo en series constituye un procedimiento muy ventajoso para resolver los casos de indeterminación.

*Ejemplos.* 1.° Sea la expresión $y = n^2\left[l\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right]$

que para $n = \infty$, se presenta bajo la forma $\infty \,.\, 0$.

Suponiendo $n > 1$, se tiene

$$l\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \ldots\ldots$$

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{4n^4} + \ldots\ldots$$

El verdadero valor es $-\frac{1}{2}$.

## § 2.° Comparación de las cantidades infinitamente pequeñas de diversos órdenes.

**133.** Definición. Sea $a$ un número constante, racional ó irracional, $i$ una cantidad infinitamente pequeña y $\alpha$ un número variable.

En el sistema de cantidades infinitamente pequeñas cuya base es $i$, una función de $i$ representada por $f(i)$, será un infinitamente pequeño de orden $a$, si el límite de la relación $\frac{f(i)}{i^{\alpha}}$ es nulo para todos los valores de $\alpha$ menores que $a$ é infinita para todos los valores mayores que $a$.

*Corolario.* Toda cantidad finita que no se anula ó no se hace infinita para $i = 0$, puede considerarse como un infinitamente pequeño de orden 0.

Si ahora designamos por $n$ el número entero inmediatamente superior al orden $a$ de la cantidad infinitamente pequeña $f(i)$, la relación $\frac{f(i)}{i^n}$ será el primer término de la progresión geométrica

$$f(i),\ \frac{f(i)}{i},\ \frac{f(i)}{i^2},\ \ldots\ldots,\ \frac{f(i)}{i^{n-1}},\ \frac{f(i)}{i^n},\ \ldots\ldots$$

que cese de anularse con $i$.

Además tendremos sucesivamente

$$\lim f(i) = 0,\quad f(0) = 0,\quad \lim \frac{f(i)}{i} = \lim f'(x),\quad f'(0) = 0,$$

$$\lim \frac{f(i)}{i^2} = \lim \frac{f'(i)}{2i} = \lim \frac{f''(i)}{2!},\quad f''(0) = 0,\ \ldots\ldots$$

$$\lim \frac{f(i)}{i^n} = \lim \frac{f^{(n)} i}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\quad f^{(n)}(0) = n! \lim \frac{f(i)}{i^n}.$$

De estas ecuaciones se deduce que las derivadas $f'(i)$, ..... $f^{(n-1)}(i)$ se anulan con $i$, y por consiguiente, en el caso en que $f(i)$ es un infinitamente pequeño de orden $a$, $f^{(n)}(i)$ es la primera derivada que no se anula con $i$ y que cesa de ser una cantidad infinitamente pequeña. En cuanto á la relación $\frac{f(i)}{i^a}$, puede tener un límite finito, nulo ó infinito.

Así, por ejemplo, $i^a e^i$, $\frac{i^a e^i}{li}$, $i^a e^i l^i$ son tres cantidades infinitamente pequeñas de orden $a$, y los cocientes que se obtienen dividiéndolas por $i^a$, es decir, $e^i$, $\frac{e^i}{li}$, $e^i li$ tienen por límite superior 1, 0, $\frac{1}{0}$.

**134.** Teorema 1.° *Si en un sistema cualquiera se consideran dos cantidades infinitamente pequeñas de órdenes diferentes, mientras que estas dos cantidades se aproximen á cero, la de orden más elevado terminará por obtener constantemente el menor valor numérico.*

En efecto, consideremos en el sistema de base $i$ dos cantidades infinitamente pequeñas $A = f(i)$, $B = F(i)$, la primera del orden $a$ y la segunda del orden $b$, siendo $a < b$.

Si se da á $\alpha$ un valor comprendido entre $a$ y $b$, las dos relaciones $\frac{A}{i^\alpha}$, $\frac{B}{i^\alpha}$ tendrán por límites respectivos, la primera $\frac{1}{0}$ ó $\infty$, la segunda o, y por tanto, el cociente de estas relaciones, ó la fracción $\frac{B}{A}$ tendra un límite nulo. El valor numérico del numerador decrecerá mucho más rápidamente que el del denominador, y este último acabará por ser constantemente superior al primero.

**135.** Teorema 2.° *Sean* a, b, c, ..... *números que indiquen en un sistema determinado los órdenes de varias cantidades infinitamente pequeñas y* a *el menor de estos números, la suma ó diferencia de las cantidades de que se trata será un infinitamente pequeño de orden* a.

En efecto, siendo $i$ la base del sistema adoptado, sean A, B, C, ..... cantidades dadas, la primera de orden $a$, la segunda de orden $b$, ...; la relación de la suma $A \pm B \pm C \pm \ldots$ á la cantidad A, es decir, $1 \pm \frac{B}{A} \pm \frac{C}{A} \pm \ldots$ tendrá por

límite la unidad, porque los términos $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, en los que los numeradores son infinitamente pequeños de orden superior á los denominadores, tienen o por límite; por consiguiente, el producto

$$\left(1 \pm \frac{B}{A} \pm \frac{C}{A} \pm \ldots\ldots\right) \frac{A}{i^{\alpha}} = \frac{A \pm B \pm C \pm \ldots\ldots}{i^{\alpha}}$$

tendrá el mismo límite que la relación $\frac{A}{i^{\alpha}}$. Y puesto que esta última relación tiene un límite nulo ó infinito, según que se suponga $\alpha < a$ ó $\alpha > a$, se podrá decir lo mismo de la relación

$$\frac{A \pm B \pm C \pm \ldots\ldots}{i^{\alpha}};$$ luego $A \pm B \pm C \pm \ldots\ldots$

será una cantidad infinitamente pequeña de orden $a$.

**136.** Teorema 3.° *En un sistema cualquiera cuya base es* i, *el producto de dos cantidades infinitamente pequeñas* A *y* B *cuyos órdenes se designan por* a *y* b *es del orden* $a + b$.

En efecto, las relaciones $\frac{A}{i^{\alpha}}$, $\frac{B}{i^{\beta}}$ tendrán límites nulos siempre que se suponga $\alpha < a$, $\beta < b$; límites infinitos cuando sea $\alpha > a$, $\beta > b$; y lo mismo podrá decirse del producto $\frac{A}{i^{\alpha}} \frac{A}{i^{\beta}} = \frac{AB}{i^{\alpha+\beta}}$; luego esta relación tendrá un límite nulo para $\alpha + \beta < a + b$ y un límite infinito para $\alpha + \beta > a + b$; luego el producto AB será un infinitamente pequeño de orden $a + b$.

**137.** Teorema 4.° *Si tres cantidades infinitamente pequeñas* i, A, B *son tales que, tomada la primera por base, la segunda es de orden* a *y la tercera de orden* b, *ésta en el sistema cuya base es* i *será de un orden equivalente al producto* ab.

En efecto, las dos relaciones $\frac{A}{i^{\alpha}}$, $\frac{B}{i^{\beta}}$ tienen, por hipótesis,

límites nulos, cuando se supone $\alpha < a$, $\beta < b$, y límites infinitos cuando se supone $\alpha > a$, $\beta > b$; luego el producto

$$\left(\frac{A}{i^{\alpha}}\right)^{\beta} \cdot \frac{B}{A^{\beta}} = \frac{B}{i^{\alpha\beta}}$$

tendrá un límite nulo para $\alpha\beta < ab$ y un límite infinito para $\alpha\beta > ab$. Por consiguiente, si se toma $i$ por base, B será un infinitamente pequeño de orden $ab$.

*Corolario* 1.° La relación de los órdenes de dos cantidades infinitamente pequeñas queda la misma, cualquiera que sea la base adoptada.

*Corolario* 2.° Si en el teorema 4.° se hace $B = i$, se tendrá $ab = 1$, $b = \frac{1}{a}$. Luego si en el sistema de base $i$, la cantidad A es infinitamente pequeña de orden $a$, $i$ será de orden $\frac{1}{a}$ en el sistema de base A.

**138** Teorema 5.° *Si se designan por* i *y por* f(i) *dos cantidades infinitamente pequeñas, cero será el valor único ó uno de los valores que adquiere el producto* $\frac{f(i)}{f'(i)}$ *cuando se anula* i.

Basta demostrar este teorema para el caso en que la función derivada $f'(i)$ se anula al mismo tiempo que $f(i)$ para $i = 0$. Se conseguirá esto, cuando las dos funciones sean continuas con relación á $i$ en la proximidad de $i = 0$. En efecto, se tendrá en esta hipótesis

$$f(i) = if'(\theta i), \qquad \frac{f(i)}{f'(i)} = i\,\frac{f'(\theta i)}{f'(i)};$$

pero, puesto que $f'(0)$ es nula y $\theta$ está comprendida entre 0 é $i$, $f'(\theta i)$ convergerá más rápidamente que $f'(i)$ hacia el límite 0, de donde resulta que la función $\frac{f'(\theta i)}{f'(i)}$ es menor que la unidad, y el producto $i\,\frac{f'(\theta i)}{f'(i)}$ será sensiblemente nulo; luego el límite

hacia el que convergerá este producto y por consiguiente la relación $\frac{f(i)}{f'(i)}$, será igual á cero.

Además, si $f(i)$ es un infinitamente pequeño de orden $a$, siendo $i$ la base, tendremos $f(i) = i^a \varphi(i)$

$$f'(i) = a i^{a-i} \varphi(i) + i^a \varphi'(i) \qquad \frac{i f'(i)}{f(i)} = a + \frac{i\varphi'(i)}{\varphi(i)};$$

y anulándose el último término con $i$ será $a = \lim \frac{i f'(i)}{f(i)}$.

**139**. Teorema 6.° *Dos sumas de cantidades infinitamente pequeñas de diversos órdenes no pueden ser iguales sin que, en estas dos sumas las cantidades infinitamente pequeñas de igual orden sean iguales separadamente,* es decir que si

$$A_a, A_{a'}, A_{a''}, \ldots = B_a, B_{a'}, B_{a''}, \ldots$$

son cantidades infinitamente pequeñas de órdenes $a$, $a'$, $a''$, ....., la ecuación $A_a + A_{a'} + A_{a''} + \ldots = B_a + B_{a'} + B_{a''} + \ldots$ implicará las ecuaciones

$$A_a = B_a, \quad A_{a'} = B_{b'} \ldots, \quad A_{a''} = B_{a''}, \ldots,$$

pues en la ecuación

$$(A_a - B_a) + (A_{a'} - B_{a'}) + (A_{a''} - B_{a''}) + \ldots = 0$$

el término $A_a - B_a$ aún será de orden $a$ y será superior á los demás; luego si no es nulo ó no se tiene $A_a = B_a$, la ecuación será imposible; y esto se extiende á los demás términos.

De estas consideraciones se deduce:

1.° *Dos cantidades finitas ó infinitamente pequeñas, de orden cero, que sólo difieren de una cantidad infinitamente pequeñas, son rigurosamente iguales.*

2.° *Dos cantidades infinitamente pequeñas de primer orden cuya diferencia es de segundo orden ó superior, son rigorosamente iguales, etc.* (*).

(*) *Leçons de Calcul différentiel et de Calcul intégral,* par l' abbé Moignó.

## § 3.° Aplicaciones

1 $F(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{0}{0}$, para $x = 0$, $F(0) = \dfrac{1}{2}$.

2 $F(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^5 - 1} = \dfrac{0}{0}$ » $x = 1$, $F(1) = \dfrac{4}{5}$.

3 » $= \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = \dfrac{0}{0}$ » $x = 0$, $F(0 = 0$.

4 » $= \dfrac{x^2 \cos x}{\cos x - 1} = \dfrac{0}{0}$ » $x = 0$, $F(0) = 2$.

5 » $= \dfrac{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} 2x - \cos x} = \dfrac{0}{0}$ » $x = \dfrac{\pi}{2}$, $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

6 » $= \dfrac{l \cos x}{x} = \dfrac{0}{0}$ » $x = 0$, $F(0) = 0$.

7 » $= \dfrac{(x-2)^2 - x \operatorname{arc\,sen}(x-2)}{l(x-1)}$ » $x = 2$, $F(2) = -1$.

8 » $= \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$ » $x = \dfrac{\pi}{4}$, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

9 » $= \dfrac{l(1+x) - x}{x^2}$ » $x = 0$, $F(0) = -\dfrac{1}{2(1+x)}$.

10 » $= \dfrac{e^x + e^{-x}}{2 \cos x - x \operatorname{sen} x}$ » $x = 0$, $F(0) = -\dfrac{1}{2}$.

11 » $= \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ » $x = 0$, $F(0) = \dfrac{1}{6}$.

12 $F(x) = \dfrac{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}{\sqrt{(x-a)^3}}$ » $x = a$, $F(a) = 2a\sqrt{2a}$.

En vez de obtener las derivadas del numerador y del deno-

minador se pueden desarrollar éstos por la fórmula del binomio de Newton.

13 $F(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$, para $x = 0$, $F(0) = \infty$.

14 » $= \dfrac{lx}{x^n}$ » $x = \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty} = F(\infty) = 0$,

15 » $= \dfrac{e^x}{x^n}$, » $x = \infty$, » $= F(\infty) = \infty$.

16 » $= \dfrac{l(a+bx)^m}{l(c+dx)^n}$ » $x = \infty$, » $= F(\infty) = \dfrac{m}{n}$.

17 » $= \dfrac{l(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a)}{l(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} a)}$, » $x = a$, » $= F(a) = 1$.

18 » $= \dfrac{l(x-1)}{\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2}}$ » $x = 1$, » $= F(1) = 0$,

19 » $= \dfrac{lx}{-\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$ » $x = 0$, » $= F(0) = 0$.

20 » $= \dfrac{l(e^x - e^a)}{l(x-a)}$ » $x = a$, » $= F(a) = 1$.

21 » $= x \log \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ » $x = \infty$, $\infty \cdot 0 = F(a) = \log e$.

22 » $= (1-x)\, l(1-x)$ » $x = 1$, $0 \cdot \infty = F(1) = 0$.

23 » $= (x-3) \cot \pi x$ » $x = 3$, $0 \cdot \infty = F(3) = \dfrac{1}{\pi}$.

24 » $= x^p e^{-qx}$ » $x = \infty$, $\infty \cdot 0 = F(\infty) = 0$.

25 » $= \dfrac{1}{1-\cos x} - \dfrac{1}{l(x+1)}$ » $x=0$, $\infty - \infty = F(0) = \infty$.

26 » $= \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}$ » $x=0$, $\infty - \infty = F(0) = \dfrac{1}{2}$.

27 » $= \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{l(x-1)}$ » $x=2$, » $= F(2) = -\dfrac{1}{2}$.

28 » $= \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{lx}$ » $x=1$, » $= F(1) = \dfrac{1}{2}$.

29 » $= \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}$ » $x=0$, » $= F(0) = 0$.

30 » $= \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ » $x=0$, » $= F(0) = \dfrac{1}{3}$.

31 » $= \dfrac{1}{\operatorname{sen}^3 x} - \dfrac{1}{x^3}$ » $x=0$. » $= F(0) = \infty$.

31 » $= \dfrac{1}{l(1+x)} - \dfrac{1}{x}$ » $x=0$, » $= F(0) = \dfrac{1}{2}$.

32 » $= \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$ » $x=0$, $\infty^0 = F(0) = 1$.

33 » $= \left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$ » $x=a$, $1^\infty = F(0) = e^{\frac{2}{\pi}}$.

34 » $= (\cos ax)^{(\operatorname{cosec} bx)^2}$ » $x=0$, » $= F(0) = e^{-\frac{a^2}{2b^2}}$

35 » $= \operatorname{sen} x^{\operatorname{tg} x}$ » $x=0$, $0^0 = F(0) = 1$.

36 » $= \operatorname{sen} x^{\frac{1}{\cos x}}$ » $x=\dfrac{\pi}{2}$, $1^\infty = F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

37 » $= x^n lx$ » $x = 0$, » $= F(0) = 0$ para $x$ positivo $-\infty$ para $x$ neg.°

38 $x^{x^n}$ » $x = 0$, » $= F(0) = 1$ ó 0 según que $n$ sea positivo ó negativo

Por desarrollo en series

39 $\dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x - \operatorname{sen} x}$ para $x = 0$, *solución* $= 1$.

40 $\sqrt{x^2 - 5x + 6} - \sqrt{x^2 - x}$ » $x = \infty$, » $= -2$.

41 $x^{\frac{1}{x}}$ » $x = \infty$, $\infty^0 = 1$.

42 $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$ » $x = 0$, » $= 1$.

43 $(1 + mx)^{\frac{1}{x}}$ » $x = 0$, $1^\infty = e^m$.

44 $x^{l(1+x)}$ » $x = 0$, $0^0 = e^{\frac{a}{n}}$.

# CAPÍTULO VIII

## Máximos y mínimos

### § 1.º Máximos y mínimos de funciones de una variable

**140.** Se dice que una función $f(x)$ es un *máximo* para un valor $a$ de la variable $x$, cuando se puede hallar un número positivo $\varepsilon$ tal, que la diferencia $f(a+h)-f(a)$ (1) sea negativa para todos los valores de $h$ comprendidos entre $-\varepsilon$ y $\varepsilon$. Cuando en las mismas condiciones la diferencia (1) es positiva, se dice que la función es un *mínimo* para $x=a$.

Si pues $f(a)$ es máximo, $f(x)$ crece en el intervalo $(a-\varepsilon, a)$ y decrece en el intervalo $(a, a+\varepsilon)$, y lo inverso ocurre en el caso del valor mínimo.

*La derivada pues, pasa de positiva á negativa en el máximo y de negativa á positiva en el mínimo*, y recíprocamente, *si la derivada pasa de positiva á negativa, la función pasará por un máximo, y lo inverso ocurrirá, si pasa de negativa á positiva.* Estas son las condiciones necesarias y suficientes para que exista un máximo ó un mínimo.

**141.** Pero una función puede cambiar de signo, sea permaneciendo continua, sea ofreciendo una discontinuidad.

En el caso de la discontinuidad de $f'(x)$, la regla que da la teoría general consiste en examinar si dicha derivada cambia de signo á uno y otro lado del valor $a$, y en qué sentido se hace el cambio.

Así por ejemplo, en el caso de la función $f(x)=b+(x-a)^{\frac{2}{3}}$, la derivada $f'(x)=\frac{2}{3}\,\frac{1}{(x-a)^{\frac{1}{3}}}$ es infinita para $x=a$, sien-

do negativa para $x < a$ y positiva para $x > a$; luego $x = a$ corresponde á un mínimo de $f(x)$.

Al contrario, la derivada

$$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{1}{(x-a)^{\frac{2}{3}}} \quad \text{de} \quad f(x) = b + (x-a)^{\frac{1}{3}}$$

es discontinua para $x = a$; pero tiene el mismo signo para $x < a$ y para $x > a$. Dicha función no tiene, por consiguiente, ni máximo ni mínimo para $x = a$.

**142** Considerando ahora el caso de ser la derivada continua en la proximidad de $x = a$, no podrá cambiar de signo sin anularse en el intervalo infinitamente pequeño que se considera; luego, para la existencia del máximo ó del mínimo la condición *necesaria* es que $f'(a) = 0$.

Si además $f'(x)$ pasa de positiva á cero y luego á negativa, esta función $f'(x)$ será decreciente á ambos lados del valor $x = a$; luego su derivada $f''(x)$ será negativa, tanto para $x = a - h$ como $x = a + h$, es decir, que en el caso del máximo será $f''(a - h) < 0$, $f''(a + h) < 0$, y lo contrario ocurrirá en el caso del mínimo; luego el carácter común del máximo ó del mínimo es que los valores de la derivada segunda $f''(x)$ sean del mismo signo á ambos lados del valor $x = a$, siendo este signo negativo para el máximo y positivo para el mínimo.

**143** Estas conclusiones se obtienen inmediatamente empleando el desarrollo de Taylor, pues si tenemos

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a) + R,$$

para que la diferencia expresada en el primer miembro no cambie de signo, es necesario que $f'(a)$ sea nula, pues el signo del segundo miembro depende de su primer término para valores infinitamente pequeños de $h$, y cambia de signo con $h$, mientras no se anule $f(a)$. Enseguida, de la expresión

$$f(a + h) - f(a) = \frac{h^2}{2!} f''(a) + R$$

resulta que esta diferencia no cambia de signo con $h$, y expresa un máximo ó un mínimo según que $f''(a)$ sea negativa ó positiva.

Si $f''(a)$ se anula, se tendrá

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \mathrm{R};$$

en este caso no habrá máximo ni mínimo; pero habrá uno de éstos, si se anula $f'''(a)$ sin anularse la cuarta derivada, y así sucesivamente. Así pues:

En general, *cuando un valor de* x *anula á algunas de las derivadas sucesivas* f'(x), f''(x), ...., *si la primera derivada que no se anula es de orden par, la funciónu es un mínimo ó un máximo, según que dicha derivada sea positiva ó negativa. Pero no habrá ni máximo ni mínimo, si la primera derivada que no se anula es de orden impar.*

*Ejemplo.* 1.° Sea la función

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots\ldots (x - a_n)$$

en la que $a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_n$.

En virtud del teorema de Rolle, cada uno de los intervalos $(a_1\ a_2) \ldots\ldots (a_{n-1}\ a_n)$ contiene por lo menos una raiz de la ecuación $f'(x) = 0$, y no contiene más que una, porque el número de intervalos es igual al grado de esta ecuación.

Representando por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{n-1}$ las raices de esta ecuación supuestas colocadas en orden creciente, si hacemos crecer $x$ de una manera continua, desde $-\infty$ hasta $+\infty$, en el caso de ser $n$ impar, $f'(x)$ principiará por ser positiva y cambiará de signo cuando pase de cada una de las cantidades $\alpha_1, \ldots\ldots \alpha_{n-1}$. Será pues la función $f(x)$ máximo para $\alpha_1$, mínimo para $\alpha_2$, ..... en fin, mínimo para $x = \alpha_{n-1}$; y cuando $n$ sea par, $f'(x)$ será al principio negativa, y $f(x)$ será máximo para $x = \alpha_1$, mínimo para $x = \alpha_2$, máximo para $x = \alpha_3 \ldots$. máximo para $x = \alpha_{n-1}$.

*Ejemplo.* 2.° Hallar el *mínimo* de $x^x$, siendo $x$ positivo.

Hagamos $f(x) = lx^x = x\,lx.$

Se tendrá que $f'(x) = 1 + lx$ y $f''(x) = \frac{1}{x}$.

Hagamos

$1 + lx = 0$, y se tendrá $lx = -1$, $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Por ser $f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$ $x^x$ es un mínimo, para $x = \frac{1}{e}$.

*Ejemplo.* 3.° Sea $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$.

Tendremos $f'(x) = e^x - 2\operatorname{sen} x - e^{-x}$

$$f''(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x}.$$

Si hacemos $e^x - 2\operatorname{sen} x - e^{-x} = 0$,

se hallará para $x$ el valor cero, que sustituído en $f(x)$ da $f(0) = 4$.

Para saber si este valor es máximo ó mínimo, se sustituirá 0 por $x$ en $f''(x)$, pero se obtiene $f''(0) = 0$.

Derivando nuevamente, tendremos

$$f'''(x) = e^x + 2\operatorname{sen} x - e^{-x}, \qquad f^{IV}(x) = e^x + 2\cos x - e^{-x},$$

$$f'''(0) = 0, \qquad f^{IV}(0) = 4;$$

luego $f(0) = 4$ es un mínimo de $f(x)$.

*Ejemplo 4.°* Sea $y = \cos\frac{1}{x}$. La condición para máximo ó mínimo es $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$

que da, considerando sólo los valores positivos de $x$, los valores de $x = \frac{1}{k\pi}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots\ldots, \infty)$.

La derivada segunda $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \frac{1}{x^4}\cos\frac{1}{x}$,

da $\frac{d^2y}{dx^2} = -k^4\pi^4 \cos k\pi$; luego á $x = \frac{1}{\pi}$, $x = \frac{1}{2\pi}$, ....

corresponden alternativamente el mínimo $-1$ y el máximo $+1$.

Este es un ejemplo de una función que, cuando $x$ se aproxima á cero, oscila entre $-1$ y $+1$, de modo que entre o y otro valor cualquiera de $x$, tiene un número infinito de máximos y de mínimos.

En el punto $x = 0$ la función es indeterminada.

**144.** *Observación.* A veces la variable $x$ sólo puede variar permaneciendo superior ó inferior á ciertos límites. En este caso, si $\alpha$ representa uno de estos dos valores extremos, $f(\alpha)$ puede ser un máximo ó un mínimo, sin que $\alpha$ satisfaga á la ecuación $f'(\alpha) = 0$.

Por ejemplo, si suponemos la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ y un punto $P(a, 0)$ diferente del origen, la distancia PM del punto P á un punto cualquiera M de la circunferencia se hace mínimo para $x = R$ y máximo para $x = -R$, sin que ninguno de estos valores extremos anule á la derivada de la expresión

$$PM^2 = R^2 - a^2 - 2ax$$

que se reduce á $-2a$.

Si consideramos la parábola $y^2 - 2px = 0$, tenemos

$$PM^2 = (x - a)^2 + y^2 = (x - a)^2 + 2px,$$

y la ecuación derivada se reduce á $x - a + p = 0$ cuya raiz única $a - p$ no puede admitirse cuando $a < p$, porque la variable $x$ está sujeta á la condición de ser positiva.

Si $a > p$, la raiz $a - p$ es la abscisa común á dos puntos $M_1$ y $M_2$ de la parábola, simétricos respecto al eje de la $x$. Y por ser positiva la derivada segunda, $PM_1$ y $PM_2$ son mínimos de la distancia PM; pero esta distancia PM tiene todavía un máximo ó un mínimo, que es la distancia PO del punto P al vértice O. Será máximo cuando el punto sea interior á la parábola y mínimo, cuando sea exterior.

La regla enunciada tiene pues esta excepción, porque la derivada no se anula para $x = 0$ (*).

## § 2.° Máximos ó mínimos de una función explícita de $m$ variables ligadas por $m$ — 1 ecuaciones

**145.** Propongamos hallar los máximos ó mínimos de la función $V = f(x, y, z)$ (1)
con las condiciones $f_1(x, y, z) = 0$ (2) $f_2(x, y, z) = 0$ (3)

V será pues función de una sóla variable independiente, por ejemplo, $x$.

Para que sea máxima ó mínima se igualará su derivada á cero, así

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \tag{4}$$

á la que se agregarán las derivadas de las ecuaciones de condición

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dz} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx} = 0. \tag{6}$$

La eliminación de $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{dz}{dz}$ conducirá á la ecuación de condición

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

(*) *Rouché et Levy.* Analyse infinitesimal t I p. 224.

que juntamente con (2) y (3) determinarán los valores de $x, y, z$ que hacen un máximo ó un mínimo á la función V.

Para resolver estas ecuaciones basta observar que si se añaden á los elementos de la primera línea los productos por una indeterminada $\lambda_1$ de los elementos correspondientes de la segunda línea y los productos por $\lambda_2$ de los elementos correspondientes de la tercera, del determinante (7), que no cambia la condición de que dos de los nuevos elementos así formados sean nulos, llevará como consecuencia que el tercero también lo sea, en virtud de ser el determinante nulo; luego esta condición equivale á las tres

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

que juntamente con las ecuaciones (2) y (3) determinarán las cinco incógnitas $x, y, z, \lambda_1$ y $\lambda_2$.

Los primeros miembros de las ecuaciones (7) *son las derivadas parciales con respecto á* x, y, z *de la expresión*

$$f(x, y, z) + \lambda_1 f_1(x, y, z) + \lambda_2 f_2(x, y, z) = 0,$$

en la que $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son constantes arbitrarias.

En esta regla consiste el método llamado *de los multiplicadores*, en la obtención de máximos y mínimos.

*Ejemplo 1.°* Hallar los semi-ejes de una elipse ó hipérbola

$$u = Ax^2 + Bxy + Cy^2 - k = 0$$

la ecuación de condición es que el radio vector

$$r = v = \sqrt{x^2 + y^2}$$

debe ser máximo ó mínimo. Esto sentado, tenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2Ax + By, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2Cy + Bx,$$

$$\frac{x}{2Ax + By} = \frac{y}{2Cy + Bx} = \frac{x^2 + y^2}{x(2Ax + By) + y(2Cy + Bx)} = \frac{r^2}{2k}$$

$$\frac{2k}{r^2} - 2A = B\frac{y}{x}, \qquad \frac{2k}{r^2} - 2C = B\frac{x}{y},$$

$$\left(\frac{2k}{r} - 2A\right)\left(\frac{2k}{r} - 2C\right) = B^2.$$

Las dos raíces de esta ecuación son los cuadrados de los dos semi-ejes, que serán reales si $Ak > 0$, $B^2 - 4AC < 0$; pero uno de ellos será imaginario, si $B^2 - 4AC > 0$.

*Ejemplo 1.°* Determinar los ejes de la sección del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{1}$$

con el plano

$$lx + my + nz = 0 \tag{2}$$

Las longitudes de los ejes buscados son el máximo y el mínimo de la distancia del centro á un punto cualquiera de la superficie.

El problema se reduce á obtener el máximo de la función

$$v = x^2 + y^2 + z^2 \tag{3}$$

con las condiciones del enunciado.

Para hallar las condiciones equivalentes al determinante de condición, basta igualar á cero las derivadas parciales de

$$x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) + 2\lambda_2(lx + my + nz),$$

ó sea

$$x + \lambda_1\frac{x}{a^2} + \lambda_2 l = 0 \tag{4}$$

$$y + \lambda_1\frac{y}{b^2} + \lambda_2 m = 0 \tag{5}$$

$$z + \lambda_1\frac{z}{c^2} + \lambda_2 n = 0 \tag{6}$$

que juntamente con las condiciones (1) y (2) determinan las cinco cantidades $\lambda_1$, $\lambda_2$, $x$, $y$, $z$.

Sumando las tres últimas ecuaciones respectivamente multiplicadas por $x$, $y$, $z$ y simplificando, valiéndonos de las ecuaciones (1), (2) y (3), resulta $\lambda_1 = -v$.

Sustituyendo en (4), (5) y (6) y despejando $x$, $y$, $z$, se obtiene

$$x = -\frac{\lambda_2 a^2 l}{a^2 - v}, \quad y = -\frac{\lambda_2 b^2 m}{b^2 - v}, \quad z = -\frac{\lambda_2 c^2 n}{c^2 - v}$$

y sustituyendo en (2) se halla la ecuación en $v$

$$\frac{a^2 l}{a^2 - v} + \frac{b^2 m}{b^2 - v} + \frac{c^2 n}{c^2 - v} = 0$$

que determina los cuadrados de las longitudes de los dos ejes de la sección.

## § 3.° Máximos y mínimos de las funciones explícitas de dos ó más variables independientes

**146.** Sea la función $z = f(x, y)$.

Tenemos que

$$f(x+h,\ y+k) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \mathrm{R}. \qquad (1)$$

La función $z$ tiene un máximo para los valores $x = x_1$, $y = y_1$ (ó en el punto $x$, $y_1$), si existe un valor positivo $\varepsilon$ tal que se verifique la desigualdad

$$f(x_1 + h, y_1 + k) < f(x_1, y_1)$$

para todos los valores de $h$ y $k$ comprendidos entre $-\varepsilon$ y $+\varepsilon_1$ y tendrá un mínimo cuando entre estos límites se verifique la desigualdad inversa.

Para que una de estas desigualdades se verifique, es necesario que se anule la parte escrita del desarrollo de Taylor en la

ecuación (1) independientemente de los valores de $h$ y $k$, es decir, que se tenga $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$

Verificadas estas condiciones, tendremos

$$f(x+h, y+k) - f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{k^2}{1.2} + R.$$

Si estas segundas derivadas no se anulan, el signo del desarrollo será el de la parte escrita. Habrá pues un máximo, si esta suma es constantemente negativa y mínimo si es constantemente positiva.

Dividiendo dicho trinomio por $\frac{h^2}{2}$ se reducirá á

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{k}{h}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{k}{h} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

ó, sustituyendo $\frac{k}{h}$ por $u$. $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} u^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} u + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$

Para que esta expresión conserve el mismo signo, es necesario que la ecuación que se forme igualándola á cero, tenga sus raíces iguales ó imaginarias, es decir que

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \leqslant \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Esta condición exige que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ tengan el mismo signo. De manera que para el máximo tendrán que ser dichas dos derivadas negativas y positivas para el mínimo.

Si las tres derivadas segundas fuesen cero, tendrían que serlo las terceras, y continuaríamos el razonamiento como se hizo para el caso de una sola variable independiente.

**147** En el caso de una función de $n$ variables, dados los valores $x_1, y_1, z_1 \ldots\ldots$ de éstas, debe poderse hallar un número

$\varepsilon$ suficientemente pequeño para que la diferencia

$$f(x, y, z, \ldots\ldots) - f(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots)$$

sea siempre positiva ó siempre negativa para valores de $x - x_1$, $y - y_1, \ldots\ldots$ comprendidos entre $-\varepsilon$ y $+\varepsilon$, según que se trate de un *mínimo* ó de un *máximo*.

Podemos simplificar el razonamiento haciendo

$$x = x_1 + \alpha t, \quad y = y_1 + \beta t, \ldots\ldots$$

de modo que

$$f(x, y, \ldots\ldots) = f(x_1 + \alpha t, y_1 + \beta t, \ldots\ldots) = F(t)$$
$$f'(t) = \alpha f'_x (x, y, \ldots\ldots) + \beta f'_y (x, y, \ldots\ldots) + \ldots\ldots$$
$$f''(t) = \alpha^2 f''_{xx} (x, y, \ldots\ldots) + \beta^2 f''_{yy} (x, y, \ldots\ldots) + \ldots\ldots$$

A un máximo ó mínimo para $x = x_1$, $y = y_1, \ldots\ldots$ corresderá un máximo ó mínimo de $F(t)$ para $t = 0$. Esta condición será

$$F'(0) = \alpha f'_x (x_1, y_1, \ldots\ldots) + \beta f'_y (x_1, y_1, \ldots\ldots) + \ldots\ldots = 0$$

es decir $\quad f'_x$ ó $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad f'_y$ ó $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \ldots\ldots,$

siendo la misma que para el caso de una variable.

En cuanto á la condición de conservar un mismo signo la expresión.

$$\alpha^2 f''_{xx} (x_1, y_1, \ldots\ldots) + \beta^2 f''_{yy} (x_1, y_1, \ldots\ldots) + \ldots\ldots$$

constituye un problema general que se reduce al mismo problema para una variable menos, y así sucesivamente.

Así por ejemplo una función V homogénea de $n$ variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ se ordenará respecto á una de las variables $\alpha$, obteniéndose $V = A\alpha^2 + 2P\alpha + Q$ que se reduce á $A\alpha^2$ cuando las demás variables son nulas. Y para que dicha función conserve el signo + por ejemplo, se deberá tener en primer lugar $A > 0$.

Si ahora hacemos $V_1 = AQ - P^2$, se obtendrá

$$AV = (A\alpha + P)^2 + V_1;$$

el primer término del 2.° miembro se anulará haciendo $\alpha = -\frac{P}{A}$, para valores cualesquiera de $\beta, \gamma, \ldots\ldots$ Será pues necesario que $V_1$ sea constantemente positiva.

Pero $V_1$ es una función entera, homogénea de 2.° grado con $n - 1$ variables, lo que permite continuar el razonamiento, que conducirá á las $n$ condiciones $A > 0$, $A_1 > 0, \ldots\ldots$, $A_{n-1} > 0$, para que V sea constantemente positiva.

## § 4.° Máximos y mínimos de las funciones implícitas

**148** Sea la ecuación $f(x, y) = 0.$ (1)

Para hallar los máximos y los mínimos de $y$, se diferenciará esta ecuación, lo que da

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0, \tag{2}$$

que se reduce á

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

para los valores de $x$ á los que corresponden valores máximos ó mínimos de $y$.

Se obtendrán estos valores correspondientes, resolviendo las ecuaciones (1) y (3).

Para decidir si estos valores corresponden á un máximo ó mínimo de la función, diferenciaremos la ecuación (2) obteniendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0,$$

que por ser $y' = 0$, se reduce á

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0 \quad \text{ó} \quad y'' = \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}. \tag{4}$$

Habrá máximo ó mínimo según que la solución considerada haga negativo ó positivo al segundo miembro de la ecuación (4).

Si $\frac{d^2y}{dx^2}$ es nulo, se considerarán las derivadas de orden superior y así sucesivamente.

**149.** Sea ahora un sistema de $m$ ecuaciones con $m + 1$ variables, que concretaremos á ser de tres ecuaciones con cuatro variables

$$f_1(x, y, z, u) = 0, \quad f_2(x, y, z, u) = 0, \quad f_3(x, y, z. u) = 0. \quad (1)$$

Consideremos, por ejemplo, la función $z$ que debe ser un máximo ó un mínimo. Para obtener los valores de las variables corespondientes á este caso, derivaremos las ecuaciones propuestas, suponiendo $\frac{dz}{dx} = 0$, y obtendremos

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{du}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{du}{dx} = 0,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_3}{\partial u}\frac{du}{dx} = 0.$$

Eliminando $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{du}{dx}$, se obtendrá una ecuación que unida á las propuestas determinará los valores de $x, y, z, u$.

Diferenciando nuevamente, obtendremos $\frac{d^2z}{dx^2}$, y sustituyéndose en su expresión los valores obtenidos para $x, y, z, u$, resultará que $z$ es un máximo ó un mínimo, según que el valor obtenido sea negativo ó positivo.

**150.** Sea el caso de una función implícita de diversas variables independientes.

Por ejemplo, el sistema

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, z, u, v) &= 0 \\ f_2(x, y, z, u, v) &= 0 \\ f_3(x, y, z, u, v) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

en el que dos variables $x$ é $y$ son independientes y las otras tres funciones de éstas.

Se trata de hallar los máximos ó mínimos de $u$, por ejemplo.

Tendremos $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

Por consiguiente la diferencial total

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

debe ser nula.

Diferenciemos las ecuaciones propuestas, teniendo presente que $du = 0$, y resultará:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f_1}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f_1}{\partial v}\,dv &= 0, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_2}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f_2}{\partial v}\,dv &= 0, \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f_3}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f_3}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f_3}{\partial v}\,dv &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

en las que $dx$ y $dy$ son constantes, mientras que $dz$ y $dv$ son las diferenciales totales de $z$ y $v$ consideradas como funciones de $x$ é $y$.

Eliminando $dz$ y $dv$, llegaremos á una relación de la forma

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

que, por ser $dx$ y $dy$ independientes, se descompone en las dos

$$P = 0, \quad Q = 0 \qquad (3)$$

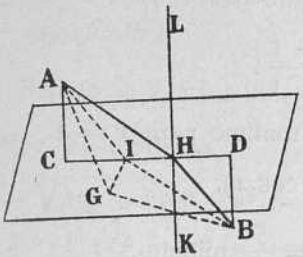
Las ecuaciones (1) y (3) dan los valores de $x, y, z, u, v$.

Para averiguar si hay máximo ó mínimo, es preciso conocer el signo de la diferencial total de segundo orden $d^2u$.

## § 5.° Aplicaciones

1. *Dados dos puntos A y B situados en medios diferentes separados por un plano, un móvil recorre el primer medio con una velocidad uniforme* v *y el segundo con una velocidad* u. *Se pide averiguar el camino que este móvil debe seguir para pasar de A á B en el tiempo más breve.*

Desde luego el movimiento se ha de verificar en el plano perpendicular trazado por A y B, porque si la línea quebrada AGB encontrase al plano en un punto distinto de su traza con el plano perpendicular, bajando una perpendicular desde esta intersección á la traza, las rectas que determinasen el camino en el plano vertical darían un camino más corto que el otro.




Bajando las perpendiculares AC y BD al plano, llamando H la intersección de la trayectoria del móvil con el plano, haciendo

$$AC = a, \quad BD = b, \quad CD = c, \quad CH = x,$$

y teniendo presente que el tiempo es igual al espacio dividido por la velocidad, se halla que

$$\frac{AH}{u} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u}, \qquad \frac{BH}{v} = \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v}.$$

La función que debe hacerse mínima es

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v};$$

luego $f'(x)$ ó $\dfrac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}} - \dfrac{c-x}{v\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = 0$,

ó bien $\dfrac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}} = \dfrac{c-x}{v\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$

ó $\qquad \operatorname{sen} CAH = \operatorname{sen} HBD$

que expresa la igualdad de los senos de los ángulos incidencia y de refracción.

2. $\qquad y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

*Solución.* $x = 1$ correspondiente al máximo $x = -1$ al mínimo.

3. $\qquad y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x - 1}$.

*Solución.* Máximo para $x = 0$, mínimo para $x = 2$.

4. $\qquad y = \operatorname{sen} x\,(1 + \cos x)$.

*Solución.* $x = \dfrac{\pi}{3}$ máximo, $x = \dfrac{5\pi}{3}$ mínimo.

5. $y = a\cos^2 x - b\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, siendo $a$ y $b$ positivos.

*Solución.* $\dfrac{1}{2}\left[a - b + \sqrt{a^2+b^2}\right]$, máximo,

$\dfrac{1}{2}\left[a - b - \sqrt{a^2+b^2}\right]$, mínimo.

6. $\qquad y = \dfrac{e^x}{\operatorname{sen}\,(x-a)}$.

*Solución.* Para $x = a + \left(n + \dfrac{1}{4}\right)\pi$, mínimo, si $n$ es par, máximo, si $n$ es impar.

7. $$y = \frac{x^3 + x}{x^4 - x^2 + 1}.$$

*Solución.* Para $x = 1$ máximo, para $x = -1$ mínimo.

8. $$y = \frac{lx}{x^n}.$$

*Solución.* Para $x = e^{\frac{1}{n}}$, máximo.

9. $$y = \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*Solución.* Para $x = a2^{-\frac{1}{2}}$, $y^2 = \frac{4}{27a^4}$, máximo.

10. *De todos los triángulos isoperímetros ¿cuál es el de mayor superficie?*

Siendo $x, y, z$ los lados, será $p = \frac{x + y + z}{2}$ el semi-perímetro. El área será

$$u = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

$$p(p-y)(2p-2x-y) = 0, \quad p(p-x)(2p-2y-x) = 0.$$

No puede suponerse $p - y = 0$ ni $p - x = 0$, porque entonces sería $y = x + z$ ó $x = y + z$. Haremos pues

$$2p - 2x - y = 0, \quad 2p - 2y - x = 0,$$

y será $$x = y = \frac{2}{3}p, \quad z = 2p - x - y = \frac{2}{3}p.$$

Para estos valores

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sqrt{3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sqrt{3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}$ es negativo y además

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4} < 0.$$

Los valores de $x$ é $y$ dan un máximo de la función $u$, y el mayor de los triángulos isoperímetros es el equilátero.

11. $$x^4 + y^4 - 4xy = 0.$$

*Solución.* Para $x = +\sqrt{3}$ máximo, para $x = -\sqrt{3}$, mínimo.

12. $$y^3 + x^3 - 3axy = 0.$$

*Solución.* Para $x = 2^{\frac{1}{3}}\, a$, $y = 4^{\frac{1}{3}}\, a$ máximo; para $x = 0$, $y = 0$ mínimo.

13. $$u = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

*Solución.* Para $x = \pm\, 2^{\frac{1}{2}}$ mín. $y = \mp\, 2^{\frac{1}{2}}$, $u = -8$,

14. $u = rx^2 + 2sxy + ty^2$, con la condición

$$(1 + p^2)\, x^2 + 2pqxy + (1 + q^2)\, y^2 = 1.$$

Aplicando el método de los multiplicadores, y designando por $\lambda$ el de la ecuación dada, se tiene

$$\lambda\,[(1 + p^2)\, x + pqy] + rx + sy = 0,$$
$$\lambda\,[pqx + (1 + q^2)\, y] + sx + ty = 0.$$

Multiplicando estas ecuaciones respectivamente por $x$ é $y$, y sumando, resulta

$$\lambda + u = 0,$$

lo que da
$$[u\,(1 + p^2) - r]\, x = -\,(upq - s)\, y,$$
$$[u\,(1 + q^2) - t]\, y = -\,(upq - s)\, x;$$

luego

$$\begin{vmatrix} u\,(1 + p^2) - r & upq - s \\ upq - s & u\,(1 + q^2) - t \end{vmatrix} = 0$$

$$u^2\,(1 + p^2 + q^2) - u\,[(1 + q^2)\, r - 2\,pqs + (1 + p^2)\, t] + rt - s^2 = 0$$

ecuación que resuelve el problema.

15. *Hallar el máximo y el mínimo de la sección hecha por un plano que pasa por el origen en la superficie*

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2.$$

La ecuación del plano es

$$lx + my + uz = 0.$$

Designando por $r$ la distancia del centro á un punto de la sección, se tiene

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$r^4 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$$
$$0 = lx + my + nz.$$

Siendo $\lambda_1$ y $\lambda_2$ los multiplicadores, el método expuesto en el número 112 conduce á las relaciones

$$x + \lambda_1 l = \lambda_2 a^2 x, \quad y + \lambda_1 m = \lambda_2 b^2 y, \quad z + \lambda_1 n = \lambda_2 c^2 z,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{r^2} \text{ y, por consiguiente}$$

$$x = \frac{\lambda_1 l r^2}{r^2 - a^2}, \quad y = \frac{\lambda_1 m r^2}{r^2 - b^2}, \quad z = \frac{\lambda_1 n r^2}{r^2 - c^2}.$$

Y para obtener el máximo y el mínimo de $r$ se deduce la siguiente ecuación

$$\frac{l^2}{r^2 - a^2} + \frac{m^2}{r^2 - b^2} + \frac{n^2}{r^2 - c^2} = 0$$

que sirve para determinar las velocidades de la onda propagada en un medio cristalizado.

La superficie considerada en este problema es la *superficie de elasticidad.*

15. *De todos los paralelepípedos inscritos en una esfera ¿cuál es el mayor?*

Todos los paralelepípedos inscritos son rectángulos y su centro coincide con el centro de la esfera. Llamando D á su diámetro, tenemos

$$z = \sqrt{D^2 - x^2 - y^2};$$

y representando por $u$ el volumen,

$$u = xyz = xy\sqrt{D^2 - x^2 - y^2},$$

$$\frac{du}{dx} = y\sqrt{D^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 y}{\sqrt{D^2 - x^2 - y^2}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{D^2 - x^2 - y^2}}(D^2 - 2x^2 - y^2),$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{x}{\sqrt{D^2 - x^2 - y^2}}(D^2 - 2y^2 - x^2);$$

luego

$$D^2 - 2x^2 - y^2 = 0, \quad D^2 - 2y^2 - x^2 = 0, \quad x = y = z = \frac{D}{\sqrt{3}}.$$

Se obtendrá enseguida

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2D}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{4D}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{4D}{\sqrt{3}};$$

luego

1.° $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0;$

2.° $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{4D^2}{3} - \dfrac{16D^2}{3} = -\dfrac{12D^2}{3} < 0.$

El paralelepípedo máximo será el cubo cuyo lado es $\dfrac{D}{\sqrt{3}}$.

16. Hallar el máximo de

$$u = x^p\, y^q\, z^r$$

con la condición

$$v = ax + by + cz - k = 0.$$

Se tendrá

$$\frac{\partial u}{\partial x} = px^{p-1} y^q z^r = \frac{p}{x} u, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{q}{y} u, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{r}{z} u$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = b, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = c;$$

luego $$\frac{p}{ax} = \frac{q}{by} = \frac{r}{cz} = \frac{p+q+r}{k}, \quad x = \frac{p}{a}\frac{k}{p+y+r}$$

$$y = \frac{q}{b}\frac{k}{p+q+r}, \quad z = \frac{r}{c}\frac{p+q+r}{k}$$

Además, se tiene

$$\frac{du}{u} = p\frac{dx}{x} + q\frac{dy}{y} + r\frac{dz}{z}$$

$$\frac{d^2u}{u} - \left(\frac{du}{u}\right)^2 = -p\left(\frac{dx}{x}\right)^2 - q\left(\frac{dy}{y}\right)^2 - r\left(\frac{dz}{z}\right)^2;$$

y puesto que los valores de $x$, $y$, $z$, hacen á $u$ constantemente nula, y negativa á $d^2u$, darán un máximo de la función.

18. $y^4 - 4c^2xy + x^4 = 0.$

Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -4c^2y + 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4c^2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12\,x^2.$$

La solución del sistema

$$\left.\begin{aligned} y^4 - 4c^2xy + x^4 &= 0 \\ -c^2y + x^3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ es } \begin{aligned} x &= c\sqrt[8]{3} \\ y &= \frac{x^3}{c^2}. \end{aligned}$$

Pero la derivada segunda

$$y'' = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \frac{\partial f}{\partial y} \text{ es negativa para } x = c\sqrt[8]{c}$$

y positiva para $x = -c\sqrt[8]{c}$; luego en el primer caso hay máximo y en el segundo mínimo.

19. *Volumen del elipsoide.*

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = C.$$

El volumen pedido es igual al producto de los tres semi-ejes principales por $\frac{4\pi}{3}$, y como estos semi-ejes son los valores máximo y mínimo del radio vector trazado por el centro, bastará hallar los máximos y mínimos de

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

siendo $x$, $y$, $z$, un punto cualquiera del elipsoide.

Llamando $\lambda$ á una indeterminada tendremos, según el método de los multiplicadores

$$\left.\begin{aligned} \lambda x + ax + b'z + b''y &= 0, \\ \lambda y + a'y + bz + b''x &= 0, \\ \lambda z + a''z + by + b''x &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Multiplicando respectivamente por $x$, $y$, $z$ y sumando, se obtiene

$$\lambda = -\frac{c}{r^2},$$

por consiguiente:

$$\left(\frac{c}{r^2} - a\right) x - b''y - b'z = 0,$$

$$b''x - \left(\frac{c}{r^2} - a''\right) y + bz = 0,$$

$$b'x + by - \left(\frac{c}{r^2} - a''\right) = 0.$$

Eliminando $x$, $y$, $z$, resulta

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{c}{r^2} - a\right) & -b'' & -b'' \\ b'' & -\left(\frac{r}{c^2} - a'\right) & b \\ b' & b & -\left(\frac{c}{c^2} - a''\right) \end{vmatrix} = 0,$$

ó bien,

$$\left(\frac{c}{r^2} - a\right)\left(\frac{c}{r^2} - a'\right)\left(\frac{c}{r^2} - a''\right) - b^2\left(\frac{c}{r^2} - a\right)$$

$$- b'^2\left(\frac{c}{r^2} - a'\right) - b''^2\left(\frac{c}{r^2} - a''\right) - 2bb'b'' = 0,$$

que es la ecuación de los cuadrados de los semi-ejes principales.

El producto de estos cuadrados es el último término, con el signo cambiado, del polinomio ordenado según las potencias de $\frac{c}{r^2}$, es decir el cociente de $c^3$ por el determinante del sistema de ecuaciones (1) en el que se supone $\lambda = 0$. Luego la expresión del volumen pedido es

$$\frac{4\pi}{3} \frac{c^{\frac{3}{2}}}{(aa'a'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2 + 2bb'b'')^{\frac{1}{2}}}.$$

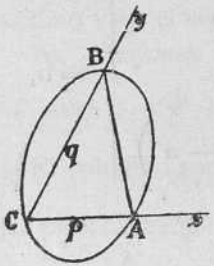
29. *Circunscribir á un triángulo la elipse mínima.*

Designando por $\alpha$ y $\beta$ las coordenadas del centro de la elipse buscada, podremos escribir su ecuación

$$A(x-\alpha)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + C(y-\beta)^2 + 1 = 0.$$

Hagamos $CA = p$, $CB = q$, y expresemos que la curva pasa por A, B y C. Tendremos

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 + 1 = 0, \qquad (1)$$
$$A(p-\alpha)^2 - 2B(p-\alpha)\beta + C\beta^2 + 1 = 0, \qquad (2)$$
$$C(q-\beta)^2 - 2B(q-\beta)\alpha + A\alpha^2 + 1 = 0. \qquad (3)$$




Restando la ecuación (1) de las (2) y (3), resulta

$$A(2\alpha - p) + 2B\beta = 0, \qquad (4)$$
$$C(2\beta - q) + 2B\alpha = 0. \qquad (5)$$

Las relaciones (1), (4) y (5) permiten determinar los coeficientes A, B, C, cuyas expresiones son

$$A = \frac{(2\beta - q)}{\alpha(p\beta + q\alpha - pq)}, \qquad B = \frac{(2\alpha - p)(2\beta - q)}{2\alpha\beta(p\beta + q\alpha - pq)},$$

$$C = \frac{-(2\alpha - p)}{\beta(p\beta + q\alpha - pq)}.$$

Para obtener el área S de la elipse, en función de estas cantidades, hallemos, conforme se ha procedido en el problema anteríor, la ecuación cuyas raíces son los ejes de la elipse, á saber:

$$(AC - B^2)z^4 + (A + C - 2B\cos\theta)z^2 + \operatorname{sen}^2\theta = 0.$$

El cuadrado del producto de los semi-ejes es pues

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{AC - B^2} \text{ y por consiguiente } S = \frac{\pi \operatorname{sen}\theta}{(AC - B^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

El mínimo de S corresponde al máximo de $AC - B^2$; luego basta hallar el máximo de esta función de $\alpha$ y $6$, lo que nos conduce á obtener las ecuaciones

$$2q\alpha + p6 - pq = 0, \quad 2p6 + q\alpha - pq = 0,$$

de donde $$\alpha = \frac{p}{3}, \quad 6 = \frac{q}{3}.$$

El centro de la elipse es el centro de gravedad del triángulo, y la expresión de su área es

$$\frac{2\pi pq \operatorname{sen} \theta}{3^{\frac{3}{2}}}.$$

21. *Hallar un punto tal, que la suma de sus distancias á tres puntos* A, B, C *sea la menor posible.*

Tomemos por eje de las $x$ la recta que une A al punto P y por eje de las $y$ la perpendicular á esta recta trazada por A, siendo $\alpha$ la abscisa de B; $a, b$ las coordenadas de C; $x, y$ las del punto buscado.

La ecuación que se ha de reducir á un mínimo es

$$\varphi(x,y) = [(x-a)^2 + (y-b)^2]^{\frac{1}{2}} + [(x-a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} + (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Hagamos $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Tendremos por consiguiente

$$\frac{a-x}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{x-\alpha}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{b-y}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{y}{[(x-a)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Elevando al cuadrado y sumando, se obtiene

$$1 = 2 + \frac{2[(x-\alpha)x + y^2]}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,[(x-\alpha)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

De esta expresión resulta

$$(x^2+y^2-\alpha x)^2 = \frac{1}{4}(x^2+y^2)\,[(x-\alpha)^2+y^2],$$

cuyo segundo miembro se transforma en

$$\frac{1}{4}[(x^2+y^2-\alpha x)^2 + \alpha^2 y^2]$$

resultando por fin

$$x^2+y^2-\alpha x = \pm \alpha y : 3^{\frac{1}{2}},$$

ecuación que representa los círculos que corresponden á segmento capaces de ángulos de 120° que pueden trazarse sobre la recta AB.

Luego el punto buscado es la intersección de tres de estos segmentos descritos sobre los lados AB, AC y BC, que tiene la propiedad de que las rectas que le unen á los puntos A, B y C, forman entre sí tres ángulos, cada uno de 120°.

FIN

Nº 1806

NUEVA ENCICLOPEDIA MATEMÁTICA—T. VI

# Tratado de Análisis Matemático

TOMO TERCERO

# APLICACIÓN DEL CÁLCULO INFINITESIMAL

## AL ESTUDIO DE LAS FIGURAS PLANAS

POR EL

**Dr. Zoel G. de Galdeano**

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa y miembro de otras asociaciones matemáticas.

BIBLIOTECA PROVINCIAL SORIA

ZARAGOZA
TIPOGRAFÍA DE E. CASAÑAL, COSO, 100
1904

# INTRODUCCIÓN

## LO IMAGINARIO Y LO INFINITO EN GEOMETRÍA

### CAPÍTULO PRIMERO

**Geometría ordinaria ó euclídea**

§ 1.º DISGRESIÓN HISTÓRICA ACERCA DEL INFINITO Y LO IMAGINARIO EN GEOMETRÍA

1. DESARGUES—La tendencia á hacer entrar en las reglas generales los conceptos singulares de lo imaginario y lo infinito es esencialmente moderna, y se halla justificada en la necesidad de simplificar la ciencia unificándola, y de generalizar sus proposiciones haciendo entrar en la misma ley hechos, al parecer, distintos. El formar un lenguaje cómodo y breve.

Desargues consideró como variedades de una misma curva las diversas secciones del cono, círculo, elipse, parábola, hipérbola y sistema de dos rectas. Dos rectas paralelas eran una variedad de dos rectas concurrentes en un punto.

Desargues aplicaba á los sistemas de rectas las propiedades de las curvas, porque un sistema de rectas se puede representar por una ecuación única, del mismo modo que una curva.

Considerando las dos diagonales de un cuadrilátero como una línea de segundo orden, el teorema de Desargues acerca de la involución en una cónica es una generalización del teorema de Pappus acerca de la involución.

2. MONGE.—Este geómetra empleó el método de generaliza-

ción, considerando la figura sobre la cual se trata de demostrar alguna propiedad general, en circunstancias de construcción general, en las que la presencia de ciertos puntos, líneas ó planos que en otras circunstancias serían imaginarios, facilita la demostración. En seguida se aplica el teorema que se ha demostrado así al caso en que estos puntos, rectas ó planos serían imaginarios, es decir, que se le considera como verdadero en todas las circunstancias de construcciones generales que puede ofrecer la figura á que se refiere (*).

Este método parece fundado, según dice Chasles, en la observación de que una figura puede presentar, en su construcción más general, dos casos diferentes: en el primero, ciertas partes (puntos, líneas, planos ó superficies) de que no depende necesariamente la construcción general de la figura, pero de la que son consecuencias contingentes ó accidentales, son reales y palpables. En el segundo caso, estas mismas partes no aparecen. Se han hecho imaginarias, y sin embargo, las condiciones generales de construcción de la figura han permanecido las mismas.

Por ejemplo: al trazarse en el espacio una superficie de segundo grado y una recta, existirán dos casos, según que se encuentren ó no; pero los dos de igual generalidad, con la diferencia de que los dos puntos de intersección de la recta y de la superficie son reales en el primer caso é imaginarios en el segundo. Dichos dos puntos son una de las relaciones *contingentes* ó accidentales del sistema de la superficie y de la recta.

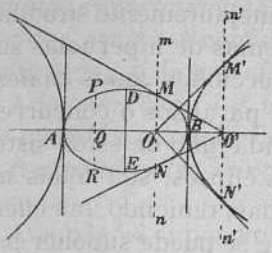
**3.** Carnot.—Este geómetra trabajó por explicar las correspondencias existentes entre el Algebra y la Geometría por medio de las correlaciones directa, inversa y compleja que corresponden á los casos del signo positivo, negativo ó imaginario.

**4.** Poncelet.—Este geómetra extendió la idea de Carnot, dedicando gran parte de sus escritos á establecer el *principio de continuidad*.

Hallándose los puntos O y O' ligados por la relación armónica $\frac{O'A}{O'B} = \frac{OA}{OB}$, por medio de ésta pueden obtenerse, independientemente de la intersección M y N de la cónica y la secante

(*) Chasles. *Aperçu historique*, p. 197.

*mn*; de manera que al estar determinada cualquiera de las entidades *mn*, *m'n'*, O, O', quedan determinadas las otras tres, pues dado, por ejemplo, el punto O', quedan determinadas las dos tangentes O'M, O'N, que á su vez determinan la secante *mn* y el punto O de intersección con el diámetro AB, siendo O' el polo de MN.




Pero permaneciendo la misma relación entre los puntos O, O' y las rectas *mn*, *m'n'*, independiente de la existencia de los puntos M y N (que desaparecen cuando *mn* se trasforma en *m'n'*), no hay ninguna razón para prescindir de ellos; y así como en Geometría hay palabras tales como la de los *infinitamente pequeños*, *infinitamente grandes* para expresar diversos modos de existencia, debe haberlas para expresar los de la no existencia, con objeto de conservar la analogía entre las ideas y el lenguaje; y al persistir en considerar á *m'n'* como secante, Poncelet adopta la denominación de *secante ideal* de la curva, distinguiéndola de la que es absolutamente inconstructible, que se denomina á su vez *recta imaginaria*. Además, O' será el *centro ideal* de la cuerda imaginaria que determina *m'n'*, O el *encuentro ideal* de las tangentes imaginarias que corresponden á los extremos de esta cuerda ó *cuerda de contacto* relativa á O. En fin, la recta *m'n'* será la *secante ideal de contacto* con relación á este punto.

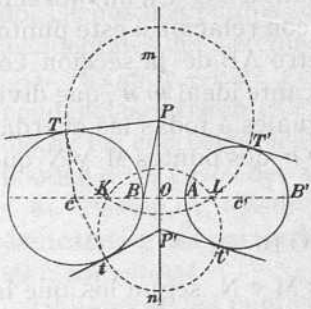
Si habiéndose determinado el diámetro AB de la sección cónica, conjugado á la dirección de la secante ideal *m'n'*, que divide, por consiguiente, en dos partes iguales á todas las cuerdas que le son paralelas, se toman sobre *m'n'* dos puntos M' y N' que satisfagan á la relación

$$\overline{O'M'}^2 = p \cdot O'A \cdot O'B,$$

idéntica con la que define los puntos M y N, según los que la secante *mn*, paralela á la primera, encuentra realmente á la sección cónica, se obtendrá una longitud M'N' dividida en dos partes iguales por el punto O'; y continuando así la construcción, llega Poncelet á construir la *cónica suplementaria* de la primera, que es una hipérbola, si ésta es una elipse y viceversa,

hallando también que cada cónica tiene infinidad de cónicas suplementarias, correspondientes á la infinidad de sistemas de diámetros conjugados.

Si dos elipses son semejantes y estan semejantemente situadas en un plano, existe una infinidad de sistemas de hipérbolas suplementarias á ellas, relativamente á direcciones dadas cualesquiera, cuyos diámetros de contacto son paralelos ó concurren en el infinito, de manera que, para cada uno de estos sistemas, las hipérbolas suplementarias á las elipses, son todas semejantes y estan semejantemente colocadas, teniendo una cuerda ó secante real común en el infinito, que se puede suponer paralela á la dirección dada, y por consiguiente, las elipses propuestas tienen una *secante ideal* común en el infinito, ó en otros términos, *dos puntos imaginarios* comunes en el infinito. Por último, si además de ser semejantes las hipérbolas y de estar semejantemente colocadas son concéntricas, serán tangentes en los dos puntos comunes del infinito, y por consiguiente, las elipses tendrán *una secante ideal de contacto en el infinito*, ó un *doble contacto imaginario en el infinito*. Y como dos círculos situados arbitrariamente en un plano son siempre homotéticos, tienen una secante ideal en el infinito; y en el caso de ser concéntricos, esta recta será la sola *secante ideal de contacto* común á dichos círculos; y como dos círculos cualesquiera situados en un plano, tienen otra secante común real ó ideal, á distancia dada ó finita, salvo el caso de ser concéntricos, en el que esta secante se confunde en el infinito con la primera, se pueden considerar como dos secciones cónicas que tienen *cuatro puntos comunes*, de los que dos son necesariamente *imaginarios* en el infinito (*los puntos circulares ó cíclicos*), mientras que los otros dos, á la vez *reales ó imaginarios* estan, en general, situados á distancia dada y finita.



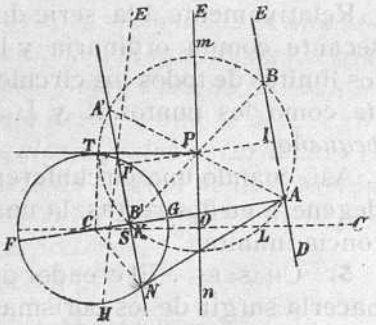

Como consecuencia de estas proposiciones, citaremos la siguiente: *Dados arbitrariamente tres círculos en un plano, las secantes reales ó ideales que les son comunes, dos á dos, se*

*cortan necesariamente en un mismo punto, para el que las seis tangentes correspondientes son iguales*, que da un medio muy sencillo de construir la secante ideal de dos círculos en un plano; porque si se cortan por una tercera circunferencia, las dos secantes comunes reales que resultan, se encontrarán en la secante de que se trata.

Además, *todos los puntos de la secante común á una serie de círculos trazados en un plano son tales, que las polares correspondientes concurren en puntos pertenecientes á esta secante.*

Además, si suponemos una serie de círculos en un plano con una secante real ó ideal común *mn*, podremos decir que, *todo círculo que corta ortogonalmente á dos* C y C′ *de la serie propuesta, tiene evidentemente su centro en la secante* m n *común, y por consiguiente, corta según ángulos rectos á los demás círculos de la serie, de manera que forma parte de la serie ortogonal recíproca de la propuesta.*

Cuando la secante *mn*, común á la serie de círculos, es ideal, entre la infinidad de éstos hay dos de dimensiones infinitamente pequeñas, que se reducen á dos puntos K y L simétricamente colocados en la línea de los centros respecto á la secante común.




Por estos puntos pasan todos los de la serie ortogonal recíproca de la propuesta, que son los *puntos ó círculos límites* de esta serie. Los de la serie recíproca son evidentemente imaginarios, cuando los primeros son reales y *viceversa*.

Si A es un punto arbitrario del plano donde se halla una serie de círculos C, C′,... con una secante real ó ideal común *mn*, concibamos la circunferencia ABKL que corta ortogonalmente á todos los círculos de la serie, que tiene, por consiguiente, su centro P en *mn*; unamos A con el centro C de uno cualquiera de los círculos de la serie por una recta indefinida AC que encontrará al nuevo círculo P en B′, y determi-

nará por sus intersecciones con C, el diámetro FG. Esto sentado, si T es uno de los puntos de intersección de P y C, el radio CT ó su igual CG será medio proporcional entre los segmentos CB' y CA; pero el diámetro FG queda dividido en dos partes iguales en C, luego divide armónicamente á los puntos A y B', y por consiguiente, el punto B' es el conjugado armónico de A respecto al diámetro de que se trata.

Diremos, pues, que: *Todos los puntos medios de las cuerdas de contacto que corresponden á un mismo punto del plano de una serie de círculos que tienen una secante común, se hallan distribuidos en una circunferencia ortogonal á los primeros.*

Cuando la directriz DE pasa por uno de los puntos límites, la circunferencia degenera en dos rectas; y cuando, sin pasar DE por ninguno de los puntos límites, es paralela á la secante común *mn*, la sección cónica de los recíprocos degenera en dos rectas, de las que la una, polar del punto del infinito de DE, se confunde con la línea de los centros C C' y la otra, paralela á la directriz, se halla simétricamente colocada al otro lado de la secante común *mn*.

La degeneración de la circunferencia en dos rectas es un concepto muy útil en la Geometría.

Relativamente á la serie de círculos arriba considerada, la secante común ordinaria y la secante ideal en el infinito, son los límites de todos los círculos respecto al *infinitamente grande*, como los puntos K y L lo son respecto al *infinitamente pequeño*.

Así, cuando una circunferencia se hace infinitamente grande, degenera en dos rectas; la una á distancia dada, y la otra á distoncia infinita (*).

**5.** Chasles.—El creador de la *Geometría Superior*, que supo hacerla surgir de los porismas de Euclides, reconstituídos sobre la base que le ofrecieron los escritos conservados de Pappus, halla en el concepto de las series homográficas un medio de interpretación de lo imaginario, introduciéndolo en Geometría como elemento de la misma importancia que lo real.

Dados dos puntos $a$ y $a'$, su punto medio $\alpha$ y el producto $\nu$ de sus distancias á un punto fijo M, situado en la recta determinada

(*) *Traité des propriétés projectives des figures*, pp. 34-48.

por $a$ y $a'$, se tiene

$$\nu = Ma \cdot Ma' = \overline{M\alpha}^2 - \overline{\alpha a}^2$$

de donde

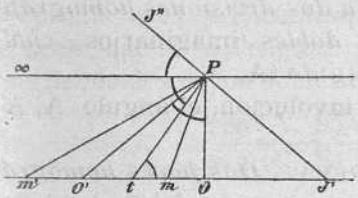
$$\overline{\alpha a}^2 = \overline{M\alpha}^2 - \nu \,, \quad \alpha a = \pm \sqrt{\overline{M\alpha}^2 - \nu}$$

La determinación de los dos puntos depende de la construcción de la expresión $\sqrt{\overline{M\alpha}^2 - \nu}$; y las distancias de los dos puntos al origen M son:

$$Ma = M\alpha + \sqrt{\overline{M\alpha}^2 - \nu} \quad \text{y} \quad Ma' = M\alpha - \sqrt{\overline{M\alpha}^2 - \nu}$$

Puede decirse que dos puntos estan representados por un punto, que será su *medio*, y un *rectángulo*, que será el producto de sus distancias á un orígen común. Cuando $\overline{M\alpha}^2 < \nu$, los puntos son imaginarios.

Por *dos puntos imaginarios* se entenderá que los *datos ó elementos* que sirven para determinarlos, á saber, su punto medio y sus distancias á un orígen común, dan lugar á una expresión imaginaria de las distancias de este punto al orígen (*).




**6.** Divisiones homográficas. Teoremas. *Si dos divisiones homográficas formadas en una recta, no tienen puntos dobles, existe á uno y otro lado de la recta un punto desde el que se ven, según ángulos iguales y formados en el mismo sentido de la rotación, todos los segmentos comprendidos entre los puntos de la primera división y sus homólogos respectivos.*

En efecto; la homografía se expresa por la ecuación

$$Om \cdot Om' - OI \cdot mm' + OI \cdot OO' = 0$$

ó

$$Om \cdot Om' + OI \cdot Om - OI \cdot Om' + OI \cdot OO' = 0$$

Pero siendo imaginarios los puntos dobles, los dos puntos O' y J' se hallan á distinto lado con relación al punto O (**); luego O' é I estan al mismo lado, y el producto OI . OO' es positivo.

---

(*) Chasles. *Traité de Géométrie supérieure*, p. 54.

(**) Chasles. *Traité de Géométrie supérieure*, p. 111.

Tomemos sobre la perpendicular trazada por el punto O el segmento $OP = \sqrt{OI \cdot OO'}$. La ecuación se escribe

$$\frac{Om}{OP} \cdot \frac{Om'}{OP} + \frac{OI}{OP}\left(\frac{Om}{OP} - \frac{Om'}{OP}\right) + 1 = 0$$

que da

$$\text{tg OP}m \cdot \text{tg OP}m' + \frac{OI}{OP}\left(\text{tg OP}m - \text{tg OP}m'\right) + 1 = 0,$$

$$\frac{\text{tg OP}m' - \text{tg OP}m}{1 + \text{tg OP}m \cdot \text{tg OP}m'} = \frac{OP}{OI}$$

y finalmente $\angle mPm' = \angle OIP = \text{const.}$

Los *puntos dobles* de las dos divisiones homográficas que consideramos, tienen por punto medio el O y por cuadrado de su distancia á este punto el producto $OO' \cdot OJ'$ ó $-OO' \cdot OI = -\overline{OP}^2$, de manera que estos puntos (imaginarios) no dependen de la magnitud del ángulo, según el que se ven desde P los segmentos $aa'$, $bb'$, ..., sino solamente de la posición de este punto, de lo que se concluye el siguiente

Teorema. *Si alrededor de un punto* P *como vértice se hace girar el ángulo* (A, A') *de magnitud constante, sus dos lados señalan sobre una transversal fija dos divisiones homográficas que tienen los mismos puntos dobles* (imaginarios), *cualquiera que sea la magnitud del ángulo* (A, A').

Observación. En el caso de la involución, el ángulo (A, A') es recto.

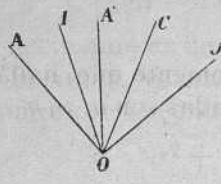
**7.** Haces homográficos. Teorema. *Dos haces homográficos que tienen el mismo centro, cuyos rayos dobles son imaginarios, pueden considerarse como la perspectiva de dos haces, en los cuales los rayos homólogos forman entre sí ángulos iguales dirigidos en el mismo sentido de la rotación.*

Cortando los dos haces por una transversal cualquiera. se tendrán dos sistemas, $a, b, c, \ldots$; $a', b', c', \ldots$, que forman dos divisiones homográficas sin puntos dobles, á las que es aplicable el teorema anterior. Los rayos dobles se determinan por la ecuación

$$\left[\frac{\text{sen (A, M)}}{\text{sen (C, M)}}\right]^2 - \left[\frac{\text{sen (A, I)}}{\text{sen (C, I)}} + \frac{\text{sen (A . J')}}{\text{sen (C . J')}}\right]\frac{\text{sen (A, M)}}{\text{sen (C, M)}}$$

$$+ \frac{\text{sen (A, I)}}{\text{sen (C, I)}}\,\frac{\text{sen (A, A')}}{\text{sen (C, A')}} = 0$$

en la que I, J′ son los rayos que corresponden en la primera y segunda división respectivamente, al mismo rayo C, considerado como perteneciente sucesivamente á la segunda y á la primera división.




Tendremos $\angle(C,I) = -\angle(AA')$, $\angle(A,I) = -\angle(C,A')$, $\angle(C,J') = \angle(AA')$, y la ecuación se reduce á

$$\left[\frac{\text{sen}\,(A,M)}{\text{sen}\,(C,M)}\right]^2 - \frac{\text{sen}\,(A,J') - \text{sen}\,(A,I)}{\text{sen}\,(A,A')}\,\frac{\text{sen}\,(A,M)}{\text{sen}\,(C,M)} + 1 = 0$$

Pero

$$\text{sen}\,(A,J,) - \text{sen}\,(A'I) = \text{sen}\,(AC + CJ') - \text{sen}\,(AC - CI)$$
$$= \text{sen}\,(AC + AA') - \text{sen}\,(AC - AA') - 2\cos AC \,.\, \text{sen}\,AA',$$

y

$$\left[\frac{\text{sen}\,(A,M)}{\text{sen}\,(C,M)}\right]^2 - 2\cos AC\,\frac{\text{sen}\,(A,M)}{\text{sen}\,(C,M)} + 1 = 0.$$

Las raíces, son

$$\frac{\text{sen}\,(A,M)}{\text{sen}\,(C,M)} = \cos(A,C) \pm \text{sen}\,(A,C)\sqrt{-1},$$

su producto es + 1, cualesquiera que sean los ejes fijos A y C, es decir, que si se designan por E y F las direcciones imaginarias de los dos rayos dobles de los dos haces, se tiene

$$\frac{\text{sen}\,(A,E)}{\text{sen}\,(C,E)}\,\frac{\text{sen}\,(A,F)}{\text{sen}\,(C,F)} = +1$$

Si el eje C es perpendicular á A, resulta

$$\text{tg}\,AM = \pm\sqrt{-1} \quad \text{y} \quad \text{tg}\,(A,E)\,\text{tg}\,(A,F) = +1.$$

Estas expresiones son independientes del ángulo (A, A′).

**8.** Laguerre. En su *Note sur la théorie des foyers* (*), Laguerre deduce una relación muy importante entre los ángulos correspondientes de dos figuras homográficas.

Siendo (A, B) un ángulo de la primera figura y *a′*, la relación anarmónica de los dos lados del ángulo (A′, B′) de la segunda figura y de las dos rectas trazadas desde el vértice de este ángulo, á los dos puntos que en esta figura corresponden á los dos puntos imaginarios en el infinito (puntos circulares), considera-

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t XII, 1853, p 57-55.

dos como pertenecientes á la primera figura, se tiene

$$(A, B) = \frac{\log a'}{2\sqrt{-1}}.$$

También es oportuno recordar en este momento que, hallándose un ángulo de dos rectas cuyas coordenadas son $u, v, u', v'$, expresado por la fórmula

$$\alpha = \text{arc . cos} \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2 + v^2}\sqrt{u'^2 + v'^2}},$$

Laguerre halló la importante expresión equivalente

$$\frac{i}{2} \log \frac{uu' + vv' + \sqrt{(uu' + vv')^2 - (u^2 + v^2)(u'^2 + v'^2)}}{uu' + vv' - \sqrt{(uu' + vv')^2 - (u^2 + v^2)(u'^2 + v'^2)}}$$

Tenemos, pues, el logaritmo del cociente de las raíces de

$$u^2 + v^2 + 2\lambda(uu' + vv') + \lambda^2(u'^2 + v'^2) = 0.$$

**9.** Clebsch. Pero la última ecuación es, según $u^2 + v^2 = 0$, la ecuación de los puntos circulares, si se sustituyen á $u$ y $v$, las coordenadas $u + \lambda u'$, $v + \lambda v'$; y tendremos conforme se expresa Clebsch (*), el teorema siguiente: *El ángulo de dos rectas es igual al logaritmo, multiplicado por* $\frac{i}{2}$, *de la relación anarmónica que dichas rectas forman con las que unen el punto de intersección de las primeras con los puntos circulares.*

Clebsch en su Geometría, transforma las ecuaciones de los dos círculos

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0,$$

mediante la sustitución

$$x = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3} \frac{A}{C},$$

$$y = \frac{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3} = \frac{B}{C},$$

en

$$A^2 + B^2 + 2a \cdot AC + 2b \cdot BC + cC^2 = 0.$$
$$A^2 + B^2 + 2a' AC + 2b' \cdot BC + c'C^2 = 0,$$

(*) *Vorlesungen über Geometrie*, t. I, pág. 148.

que por sustracción se reducen á

$$C\,[2\,(a-a')\,A+2\,(b-b')\,B+(c-c')\,C]=0\,,$$

es decir, un par de rectas.

Las intersecciones dadas por $C=0$, son las de la recta del infinito con la cónica imaginaria desvanecente

$$A^2+B^2=0 \qquad \text{ó} \qquad x^2+y^2=0,$$

independiente de los coeficientes $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$ de las ecuaciones de los dos círculos. Tenemos, pues, que:

*Todos los círculos pasan por los dos mismos puntos imaginarios que pertenecen á la recta del infinito.*

Si eliminamos A, B y C entre las ecuaciones

$$A\pm iB=0\,,\quad C=0\,,\quad Au+Bv+C=0\,,$$

tendremos

$$\begin{vmatrix} 1 & \pm i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = \pm iu-v=0$$

*El producto de los puntos circulares se representa por*

$$u^2+v^2=0\,.$$

Las direcciones correspondientes á estos puntos estan dadas por

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=0 \qquad (\operatorname{tg}\alpha=\pm\sqrt{-1}\,.)$$

Luego: *Las asíntotas de todos los círculos son paralelas.*

Además: 1.° *Las direcciones asintóticas del círculo forman con las otras direcciones el mismo ángulo (infinitamente grande).* En efecto, por ser $\operatorname{tg}\alpha=i$, se tiene

$$\operatorname{tg}(\varphi-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\varphi-i}{1+i\operatorname{tg}\varphi}=-i\,,$$

resultado independiente de $\varphi$, y lo mismo para $\operatorname{tg}\alpha=-i$. Esto se explica, por ser el ángulo $\alpha$ infinitamente grande, pues

$$\operatorname{arc\,tg}\alpha=\int_0^{\alpha}\frac{dx}{1+x^2}\,,$$

se hace infinita, cuando $\alpha=\pm i$.

Luego, mientras que los puntos cuya distancia á un punto cualquiera es infinitamente grande, se hallan situados en una recta (la recta del infinito), *las rectas que forman con otra recta cualquiera un ángulo infinitamente grande*, y que podrían llamarse rectas infinitamente alejadas, *envuelven un par de puntos, los puntos circulares imaginarios.*

2.° *Dos rectas perpendiculares forman un sistema armónico con las rectas trazadas desde su punto de intersección á los puntos circulares*, pues estas dos últimas rectas son las asíntotas de todo círculo cuyo centro es su punto de intersección; y las dos rectas dadas son diámetros conjugados de dicho círculo.

**10.** CAYLEY. En *A sixth Memoir upon Quantics*, Cayley desarrolla la idea de construir una Métrica proyectiva con referencia á una figura fundamental, á la que llama *lo absoluto*, que en la Geometría de una dimensión es un *par de puntos* situados en la recta que une los dos puntos dados y que en las geometrías de dos y de tres dimensiones son, respectivamente, una cónica y una cuádrica, que determinan análogamente en cada recta dos puntos, que son lo absoluto respecto á dicha recta.

Si P, P′ y P″ son tres puntos, se tiene que

$$\text{dist. (P, P')} + \text{dist. (P', P'')} = \text{dist (P, P'')}$$

lo mismo que para los ángulos, tomando el cuadrante como unidad de distancia.

Las expresiones de las distancias de dos puntos $(x, y)$ y $(x', y')$, de dos rectas $(\xi, \eta, \zeta)$ y $(\xi', \eta', \zeta')$ y de un punto y una recta $(x, y)$, $(\xi, \eta, \zeta)$, son respectivamente

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}, \qquad \frac{\xi' x+\eta' y+\zeta'}{\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{\xi}{\eta} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\xi'}{\eta'}, \qquad \operatorname{arc\,cos}\frac{\xi\xi'+\eta\eta'}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}$$

Tomando como ecuaciones de lo absoluto en coordenadas, puntos ó líneas respectivamente, las siguientes:

$$x^2+y^2+z^2=0, \qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=0,$$

las expresiones respectivas de la distancia de dos puntos

$(x, y, z)$ y $(x', y', z')$ ó $(\xi, \eta, \zeta)$ y $(\xi', \eta', \zeta')$ se expresan por

$$\text{arc cos } \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

$$\text{ó arc cos } \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}}$$

y la del punto $(x, y, z)$ y la recta $(\xi', \eta', \zeta')$ se expresa por

$$\text{arc sen } \frac{\xi' x + \eta' y + \zeta' z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}}$$

Si en el plano, la cónica fundamental ó lo *absoluto* degenera en un par de puntos imaginarios, se tiene la determinación métrica usual ó Geometría euclidiana.

En el espacio lo absoluto es la cónica esférica, la intersección de la esfera con el cono concéntrico ó esfera desvanecente

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Por medio de la cónica fundamental ó absoluto, por construcciones sucesivas se divide una línea y un haz de rectas en una serie infinita de elementos infinitesimales, iguales. El número de elementos comprendidos entre los puntos de la serie ó dos rectas del haz, mide la distancia entre dos puntos ó dos líneas; y por medio del cuadrante, como distancia existente, lo mismo entre puntos que entre rectas, podemos comparar la distancia de dos puntos con la de dos rectas, y la de un punto y una recta puede representarse indistintamente como la de dos puntos ó la de dos rectas.

Como se ha dicho, en Geometría plana, lo absoluto degenera en los dos puntos circulares del infinito.

En resumen, las propiedades métricas de la figura, en la Geometría de Cayley, no son propiedades de las figuras consideradas en sí *(per se)*, sino propiedades consideradas en conexión con otra figura, ó sea lo absoluto. Y las nuevas definiciones de distancia y de ángulo, dependientes de la relación anarmónica, permiten considerar á la Geometría métrica, según expresa Cayley, como una parte de la Geometría descriptiva.

## § 2.º PUNTOS CIRCULARES Y RECTAS ISÓTROPAS

**11.** DEFINICIÓN. *Recta isótropa* es una recta cuyo coeficiente angular es $\pm \sqrt{-1}$. Por todo punto $(\alpha, \beta)$ pasan dos rectas isótropas, cuyas ecuaciones son

$$y - \beta + \sqrt{-1}\,(x - \alpha) = 0\,, \quad y - \beta - \sqrt{-1}\,(x - \alpha) = 0\,,$$

cuyo conjunto se representa por

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = 0$$

Las dos rectas isótropas que pasan por el punto $(\alpha, \beta)$ forman un círculo de *radio nulo*, cuyo centro es $(\alpha, \beta)$. Se pueden considerar como asíntotas de todos los círculos cuyos centros se hallan en $(\alpha, \beta)$. Todas las rectas isótropas encuentran á la recta del infinito en dos puntos fijos, los *umbílicos* del plano.

**12.** COORDENADAS DE LOS PUNTOS CIRCULARES. En coordenadas trilineales, la ecuación del círculo circunscrito al triángulo de referencia es

$$yz \operatorname{sen} A + zx \operatorname{sen} B + xy \operatorname{sen} C = 0 \quad \text{ó} \quad ayz + bxz + cxy = 0$$

expresando A, B, C los ángulos del triángulo de referencia y $a$, $b$, $c$ sus lados.

La ecuación de un círculo cualquiera se obtendrá agregando al primer miembro de esta ecuación términos de primer grado con relación á las coordenadas ordinarias, por ejemplo,

$$(ax + by + cz)\,(lx + my + nz)\,,$$

porque el primer factor es una constante y el segundo el doble del área del triángulo de referencia. Así la ecuación de un círculo cualquiera es

$$ayz + bxz + cxy + (ax + by + cz)\,(lx + my + nz) = 0 \quad (1)$$

La ecuación general de las rectas isótropas, se obtendrá escribiendo que el primer miembro de esta ecuación es el producto de dos factores de primer grado, ó anulando su discriminante.

Si se corta la circunferencia (1) por la recta del infinito

$$ax + by + cz = 0 \qquad (2)$$

se obtiene el mismo resultado que cortando la circunferencia

$$ayz + bxz + cxy = 0 \qquad (3)$$

por la misma recta, luego: *Todos los pares de rectas isótropas encuentran á la recta en el infinito en los mismos dos puntos, cuyas coordenadas* x, y, z *son soluciones de* (3) *y* (2).

Eliminando $z$ entre (2) y (3) se obtiene

$$(x^2 + y^2)\, ab + xy\,(a^2 + b^2 - c^2) = 0,$$

ó dividiendo por $ab$,

$$x^2 + y^2 + 2\,xy \cos C = 0,$$

de donde

$$\frac{y}{x} = -\cos C \pm i \operatorname{sen} C = -e^{\pm Ci}$$

ó

$$\frac{y}{x} = e^{(\pi \pm C)i}, \qquad \frac{z}{x} = e^{(\pi \pm B)i}. \qquad (4)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (2) ó

$$x \operatorname{sen} A + y \operatorname{sen} B + z \operatorname{sen} C = 0,$$

tendremos

$$\operatorname{sen} A + e^{(\pi \pm C)i} \operatorname{sen} B + e^{(\pi \pm B)i} \operatorname{sen} C = 0.$$

Para que esta ecuación se verifique, es preciso tomar signos contrarios delante de C y B en las exponenciales. Las fórmulas (4) darán entonces

$$\frac{y}{x} = e^{-(A+B)i}, \quad \frac{z}{x} = e^{(A+C)i} \quad \text{ó} \quad \frac{y}{x} = e^{(A+B)i}, \quad \frac{z}{x} = e^{-(A+C)i}$$

El conjunto de los umbílicos puede representarse por las dos ecuaciones

$$ax + by + cz = 0, \qquad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0.$$

## § 3.º FOCOS DE LAS CURVAS

**12.** DEFINICIÓN. Se llama *foco* de una curva plana un punto desde el que se pueden trazar á la curva dos tangentes isótropas ó los puntos de intersección de las dos tangentes imaginarias á la curva, trazadas por los umbílicos ó puntos circulares del plano (*).

Plücker por primera vez consideró el foco como centro de un haz en involución de rayos dobles imaginarios que pueden considerarse como tangentes á la curva (*), siendo recto el ángulo que forman cada dos rayos conjugados de la involución.

Siendo $x^2 + y^2 = e^2\gamma^2$ la ecuación de una cónica referida al triángulo autopolar $\alpha\beta\gamma$, es decir, el triángulo que se confunde con su polar recíproco, cuando las líneas de referencia son una directriz $\gamma$ y dos rectas rectangulares $x = 0$, $y = 0$ cualesquiera, cortándose en el foco correspondiente á $\gamma$. El foco $(x, y)$ es el polo de la directriz $\gamma$, y la polar de un punto cualquiera de esta directriz es perpendicular á la recta que une este punto con el foco. Además, las dos rectas imaginarias $x^2 + y^2 = 0$ son tangentes trazadas por el foco, y puesto que estas rectas son las mismas, cualquiera que sea $\gamma$, resulta la siguiente conclusión: *Todas las cónicas que tienen comun un foco, tienen dos tangentes imaginarias comunes que pasan por este foco;* luego: *Todas las cónicas confocales tienen cuatro tangentes imaginarias comunes, y pueden ser consideradas como inscritas en el mismo cuadrilátero.*

Las tangentes imaginarias $x^2 + y^2 = 0$ trazadas por el foco se confunden con las rectas que unen este foco á los puntos cíclicos, comunes á todos los círculos de un mismo plano, por consiguiente: *Las tangentes trazadas á una cónica por cada uno de los puntos cíclicos, forman un cuadrilátero que tiene dos vértices reales, á saber, los focos de la cónica y dos vértices imaginarios que pueden considerarse como focos imaginarios de esta cónica* (**).

PROBLEMA. *Determinar los focos de la cónica representada por la ecuación general.*

(*) Plücker. *Jour. Crelle*, vol. x, p. 84.—System d. analytis. Geom p. 102.

(**) Laurent. *Traité d' Analyse*, t. II, p. 76.—Salmon, *Traité de Geom. analyt* p. 428.

Expresemos que la recta $x - \alpha + (y - \beta)\sqrt{-1} = 0$ es tangente á la curva. Sustituyendo en la ecuación tangencial

$$Av^2 + Bu^2 + Cw^2 + 2Fuw + 2Gvw + 2Huv = 0$$

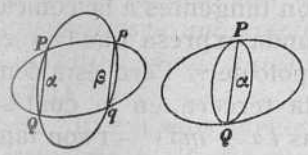
$u$, $v$, $w$ respectivamente por 1, $\sqrt{-1}$ $-\alpha-\beta\sqrt{-1}$, é igualando separadamente el conjunto de los términos reales é imaginarios, se determinan los focos que se ve se encuentran en la intersección de dos hipérbolas equiláteras, partiendo de la ecuación del haz de tangentes trazadas por el punto $(\alpha, \beta)$, las cuales son paralelas á las direcciones isótropas.

Por cada punto circular se pueden trazar $n$ tangentes á la curva. Estas $2n$ tangentes se encuentran en $n^2$ puntos, que son los focos.

Existe una excepción á esta regla, cuando la curva pasa $i$ veces por los puntos circulares. Por cada punto circular se podrán trazar $n - 2i$ tangentes á la curva, distintas de las $i$ tangentes que se pueden trazar por dicho punto circular y de las $i$ tangentes confundidas con la recta del infinito; luego habrá $(n-2i)^2$ focos, intersecciones de estas rectas, distintas de las *tangentes singulares* que acabamos de citar.

Solamente $n - 2i$ de dichos focos son reales.

**13.** Tangentes y focos. Siendo $S=0$, $\alpha=0$, $\beta=0$, las ecuaciones de una cónica y de dos rectas, la ecuación $S - k\alpha\beta = 0$ representa una cónica que pasa por los cuatro puntos $p, q, p', q'$, intersecciones de $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ con $S = 0$. Si $p'$ y $q'$ se aproximan respectivamente á $p$ y $q$ en el límite, una de las dos cónicas que suponemos pasan por los cuatro puntos, es tangente á la otra en $P$ y $Q$, es decir, que: *La ecuación* $S - k\alpha^2 = 0$ *representa una cónica que tiene con la cónica* $S = 0$ *un doble contacto, según la recta* $\alpha$.




Análogamente: *La ecuación* $\alpha\gamma = k\beta^2$ *representa una cónica tangente á las rectas* $\alpha = 0$ *y* $\gamma = 0$ *en los puntos de intersección de éstas con la recta* $\beta = 0$.

Si la recta $\alpha = 0$ es paralela á una asíntota de $S = 0$, es también paralela á la asíntota $S - K\alpha\beta = 0$, y esta ecuación re-

presenta un sistema de cónicas que pasa por cuatro puntos de los que uno está en el infinito. Si $\beta = 0$ es además paralela á la otra asíntota de $S = 0$, la ecuación $S = k\alpha\beta$ representa un sistema de cónicas que pasa por dos puntos en el infinito de la cónica $S = 0$.

La ecuación

$$S = k\beta \qquad \acute{o} \qquad S - (0 \,.\, x + 0 \,.\, y + k)\beta = 0,$$

expresa que *dos cónicas homotéticas se cortan siempre en dos puntos en el infinito, y por consiguiente, solo pueden encontrarse en dos puntos á distancia finita.*

La ecuación $S = k$ ó $S = k\,(0 \,.\, x + 0 \,.\, y + 1)^2$, representa una cónica que tiene con $S = 0$ un doble contacto, según la recta en el infinito. Las cónicas $S = 0$ y $S - k = 0$, además de ser homotéticas son concéntricas, luego: *Dos cónicas homotéticas y concéntricas, pueden considerarse como tangentes en dos puntos en el infinito.*

Siendo todas las circunferencias curvas semejantes cuyas ecuaciones solo difieren por sus términos de primer grado, resulta que: *Todas las circunferencias pasan por los mismos puntos imaginarios situados en el infinito, ó por los dos puntos cíclicos*, y además: *Todas las circunferencias concéntricas son tangentes en los puntos cíclicos.*

Considerando la ecuación $l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 = n^2\gamma^2$, que representa una cónica cuyo triángulo autopolar es $\alpha\beta\gamma$, puede escribirse bajo una de estas formas.

$$n\gamma^2 - m^2\beta^2 = l^2\alpha^2, \quad n^2\gamma^2 - l^2\alpha^2 = m^2\beta^2, \quad l^2\alpha^2 + m^2\beta^2 = n^2\gamma^2.$$

La primera expresa que las rectas $n\gamma + m\beta = 0$ y $n\gamma - m\beta = 0$, cuya intersección es $(\beta,\gamma)$, son tangentes á la cónica, siendo $\alpha$ su cuerda de contacto; la segunda expresa que $(\gamma,\alpha)$ es el polo de $\beta$ y por consiguiente $(\alpha,\beta)$ el polo de $\gamma$. Pero esta conclusión puede tambien deducirse de la tercera, en la cual se expresa que las dos rectas imaginarias $l\alpha \pm m\beta\sqrt{-1}$ son tangentes á la cónica, siendo $\gamma = 0$ su cuerda de contacto. Estas rectas, en efecto, se encuentran en un punto real $(\alpha,\beta)$ polo de $\gamma$, interior á la cónica, puesto que las tangentes que pasan por este punto son imaginarias.

Observaciones. 1.ª La ecuación $\alpha\gamma = k\beta\delta^2$ expresa que: *El*

*producto de las distancias de un punto cualquiera de una cónica á los dos lados opuestos de un cuadrilátero inscrito, está en una razón constante con el producto de las distancias de este mismo punto á los otros dos lados.*

2.° Cuando S = 0 es la ecuación de un círculo, S representa el cuadrado de la tangente trazada al círculo por el punto $(x, y)$, y la ecuación $S - k\alpha\beta = 0$, que es la de una cónica cuyas cuerdas de intersección con el círculo son $\alpha$ y $\beta$, expresa el siguiente enunciado: *Si el cuadrado de la tangente trazada por un punto á un círculo fijo, está en una razón constante con el producto de las distancias del mismo punto á dos rectas fijas, este punto describe una cónica que pasa por los cuatro puntos de intersección de las rectas con el círculo.*

3.° Cuando el círculo es infinitamente pequeño, el enunciado anterior se transforma en el siguiente: *El lugar descrito por un punto tal, que el cuadrado de su distancia á un punto fijo se halle en una razón constante con el producto de sus distancias á dos rectas fijas, es una cónica.*

4.° Expresando S un círculo, de la ecuación $S = k\alpha^2$ resulta el siguiente enunciado: *El lugar de los puntos cuyas distancias á una recta fija están en una razón constante con las tangentes trazadas por estos puntos á un mismo círculo fijo, es una cónica tangente al círculo en los dos puntos de su intersección con la recta*, y recíprocamente: *Cuando un círculo tiene un doble contacto con una cónica, la tangente trazada al círculo por un punto de la cónica, está en una razón constante con la distancia de este punto á la cuerda de contacto.*

5.° Cuando el círculo es infinitamente pequeño, se llega á la propiedad fundamental del foco: *El foco de una cónica puede considerarse como un círculo infinitamente pequeño tangente á la cónica en dos puntos imaginarios situados sobre la directriz* (*).

**14.** Elementos impropios.—Bastará indicar que Staudt en su *Geometrie der Lage* estudia el punto, la recta y el plano en el infinito como *elementos impropios*.

(*) Salmon *Traité de Géom. analytique*, pp. 396-401.

# CAPÍTULO SEGUNDO

## Pangeometría

### § 1.º Exposición basada en la geometría de Cayley (*)

**15.** Modificacón de la Geometría de Cayley.—El Sr. Klein no solo introdujo uno ventajosa alteración en la métrica de Cayley, sino que aplicó estas consideraciones al exámen comparativo de las tres especies de Geometrías. Indicaremos esta nueva doctrina.

Para determinar la distancia de dos puntos, se suponen unidos por una recta, la cual corta á la superficie fundamental en otros dos puntos que con los dos puntos dados forman cierta relación anarmónica, y entonces: *la distancia de los dos puntos dados es el producto del logaritmo de dicha relación anarmónica por una constante arbitraria* c.

Para determinar el ángulo de dos planos, se trazan por su intersección dos planos tangentes á la superficie fundamental, que forman cierta relación anarmónica con los dos primeros, y se dirá que *el ángulo de los dos planos dados es el producto del logaritmo de dicha relación anarmónica por una constante* c'.

Sea; en coordenadas—puntos ó en coordenadas—líneas la figura fundamental

$$f_{zz} = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \quad \text{ó} \quad \varphi_{ww} = \sum \alpha_{ik} w_i \; w_k = 0 , \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

y dos puntos $z_i = x_i$ , $z_i = y_i$ , las coordenadas de los puntos de la recta que los une estarán expresadas por $z_i = \lambda x_i + \mu y_i$ , Para obtener el valor del parámetro $\frac{\lambda}{\mu}$ tendremos, sustituyendo

(*) *Sur la Géométrie dite non euclidienne. Automorf. Functionen.*

en la primera ecuación,

$$\lambda^2 f_{xx} + 2\lambda\,\mu\, f_{xy} + \mu^2 f_{yy} = 0\,. \qquad (1)$$

Llamando $D_{xy}$ la relación anarmónica de los puntos de intersección de la recta con la superficie fundamental y los dos puntos $x_i$ , $y_i$ y análogamente $D_{u,v}$ para el ángulo, serán

$$\Delta\,(x, y) = k \log D_{x,\,y}\,, \qquad A\,(u, v) = x \log D_{u,\,v}$$

las expresiones de la distancia y del ángulo, respectivamente.

Resolviendo la ecuación (1), tendremos:

$$\Delta\,(x, y) = k \log \frac{f_{xy} + \sqrt{f^{\,2}_{xy} - f_{xx} f_{yy}}}{f_{xy} - \sqrt{f^{\,2}_{xy} - f_{xx} f_{yy}}}$$

$$A\,(u, v) = \varkappa \log \frac{\varphi_{uv} + \sqrt{\varphi^{\,2}_{uv} - \varphi_{uu}\,\varphi_{ov}}}{\varphi_{uv} - \sqrt{\varphi^{\,2}_{uv} - \varphi_{uu}\,\varphi_{vv}}}$$

Pero siendo las tres relaciones anarmónicas de $x$, $x'$, ó $x'$ $x''$, ó $xx''$ con $\xi$ y $\xi'$

$$R_1\,(xx') = \frac{(x\,\xi)\,(x'\,\xi')}{(x\,\xi')\,(x'\,\xi)}\,, \quad R_2\,(x'\,x'') = \frac{(x'\,\xi)\,(x''\,\xi')}{(x'\,\xi')\,(x''\,\xi)}\,,$$

$$R_3\,(x,\,x'') = \frac{(x''\,\xi')\,(x\,\xi)}{(x\,\xi')\,(x''\,\xi)}$$

sabemos que en vez de $R_1 + R_2 = R_3$ , tenemos $R_1 . R_2 = R_3$ ; y la función de las R que satisface á la condición de la suma, es el logaritmo. Podremos pues, expresando por M $(x, x')$ la expresión de medida, que

$$M\,(x\,x') = k \log \frac{\Sigma_{xx'} + \sqrt{\Sigma^{\,2}_{xx'} - \Sigma_{xx}\,\Sigma_{x'\,x'}}}{\Sigma_{xx'} - \sqrt{\Sigma^{\,2}_{xx'} = \Sigma_{xx}\,\Sigma_{x'x'}}}$$

Y puesto que el valor de la relación anarmónica para un dominio ternario, subsiste para el dominio binario, cuando se hace $x_3 = x'_3 = 0$, podremos emplear tambien el coseno y el seno

en vez del logaritmo, y hacer

$$\cos\frac{i\,M}{2\,k}=\frac{\Sigma\,xx'}{\sqrt{\Sigma_{xx}}\ \sqrt{\Sigma_{x'x'}}},\quad \operatorname{sen}\frac{i\,M}{2\,k}=\frac{(xx')\ \sqrt{\Delta}}{\Sigma_{xx}\ \ \Sigma_{x'x'}},$$

expresando $\Delta$ el discriminante de $\Sigma_{xx}=0$. (*)

La expresión de Laguerre se obtiene (**), considerando la relación anarmónica de lós cuatro rayos

$$u_x=0,\quad u'_x=0,\quad u_x+\lambda_1 u'_x=0,\quad u_x+\lambda_2 u'_x=0,$$

es decir

$$\mathrm{R}\,(u_x\,,\,u'_x,\,u_x+\lambda\,,\,u'_x\,,\quad u_x+\lambda_2\,u'_x)=\frac{u_{\xi'}\,.\,u'_\xi}{u_{\xi'}\,.\,u'_\xi}$$

Pero sustituyendo $1, i, 0$ y $1, -i, 0$ respectivamente por $\xi$ y $\xi'$ en las fórmulas

$$\cos\omega=k\,\frac{u_\xi\,u'_{\xi'}+u'_\xi u_\xi}{\sqrt{u_\xi\,u_{\xi'}\,.\,u'_\xi u'_{\xi'}}}\ \text{y}\ \operatorname{sen}\omega=l\,\frac{u_\xi u'_{\xi'}-u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'}\,.\,u'_\xi u'_{\xi'}}},$$

obtenemos

$$\cos\omega=k\,\frac{(u_1+iu_2)\,(u'_1-iu'_2)+(u_1-iu_2)\,(u'_1+iu'_2)}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2)\,(u'^2_1+u'^2_2)}}$$

$$=\frac{2\,(u_1\,u'_2+u_2u'_2)}{\sqrt{(u_1^2+u_2^2)\,(u'_1+u'_2)^2}}$$

$$\operatorname{sen}\omega=l\,\frac{(u_1+iu_2)\,(u'_1-iu_2)-(u_1-iu_2)\,(u'_1-iu'_2)}{\sqrt{(u_1^2+u^2_2)\,(u'^2_1+u'^2_2)}}$$

$$=-\frac{2i\,(u_1\,u'_2-u_2u'_2)}{\sqrt{(u_1^2+u^2_2)\,(u'_1+u'_2)}}$$

Comparando con las anteriores fórmulas, $l=-\dfrac{1}{2i}=\dfrac{i}{2}$, y

---

(*) *Vorlesungen über Automorfen Functionen*, p. 3.

(**) Klein. *Nicht-Euklidische Geometrie*, p. 44.

$$\cos\omega = \frac{1}{2}\,\frac{u_\xi u'_{\xi'} + u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} \cdot u'_\xi \cdot u'_{\xi'}}}\,,\ \operatorname{sen}\omega = \frac{i}{2}\,\frac{u_\xi u'_{\xi'} - u'_\xi u_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} \cdot u'_\xi u'_{\xi'}}}$$

$$\cos\omega - i\operatorname{sen}\omega = \frac{u_\xi \cdot u'_{\xi'}}{\sqrt{u_\xi u_{\xi'} \cdot u'_\xi u'_{\xi'}}} = \sqrt{\frac{u_\xi \cdot u'_{\xi'}}{u_{\xi'} \cdot u'_\xi}}\sqrt{rel.\ anar.}$$

Pero $\cos\omega - i\operatorname{sen}\omega = e^{-i\omega} = \sqrt{R_a}$ ; luego

$$\omega = \frac{i}{2}\ rel.\ anarm.$$

**16.** Generalidades sobre la métrica.—El problema de la *medida* se reduce á la métrica relativa á la serie puntual rectilínea y á la métrica relativa al haz de rayos en el plano; pero sus propiedades métricas difieren esencialmente, pues la longitud de una puntual rectilínea ilimitada es infinitamente grande, por el contrario, la suma de los ángulos de un haz de rayos es finita. Un segmento de recta, salvo el signo, se determina de un modo uniforme; un ángulo solo se determina salvo un múltiplo de su periodo. A pesar de esas diferencias, las dos clases de determinaciones métricas tienen algo de común.

1.º Las dos métricas tienen de comun, que las diferencias de medidas *(Maassunterschied)* se suman entre sí, lo que se expresa así: $\overline{12} + \overline{23} = \overline{13}$. *Esta posibilidad de adicionar las diferencias de medidas* es una ley general dada *a priori* para todas las determinaciones métricas en las variedades de una dimensión. A esta posibilidad podemos agregar las propiedades que se expresan por $\overline{11} = 0$, $\overline{12} = -\overline{21}$.

2.º Las determinaciones métricas *no se alteran por un cambio en el espacio*. El ángulo de dos rectas no cambia cuando gira en un plano alrededor de su centro, ni la distancia de dos puntos de una recta, cuando resbala sobre sí misma.

Para la medida de los ángulos y de los segmentos de recta, se emplea una escala de elementos equidistantes que se aplican de un modo cualquiera al objeto que se ha de medir. El número de divisiones de la escala, comprendido entre dos elementos, da la diferencia de medida.

Por la inalterabilidad de la puntual ó el haz cuando se mueve

*(se déplace)*, se puede construir la escala, por una sucesión de movimientos *(deplácements)*, lo mismo para la puntual que para el haz de rayos. Estos movimientos, desde el punto de vista de la Geometría proyectiva, entran en el concepto de *una transformación lineal, que transforma en sí á la figura elemental de que se trata.*

Consideremos dos elementos invariables, que se llamarán *elementos fundamentales*, y serán la base de un sistema de coordenadas, determinándose cada elemento por la relación $x_1 : x_2$, que llamaremos $z$, de modo que $z = 0$ y $z = \infty$ serán los elementos fundamentales.

La transformación que sirve de punto de partida para la construcción de la escala se expresará por la ecuación $z' = \lambda z$. Aplicando muchas veces sucesivas esta transformación á un elemento tomado arbitrariamente $z = z_1$, tendremos una serie de elementos

$$z_1, \quad \lambda z_1, \quad \lambda^2 z_1, \quad \lambda^3 z_1, \ldots\ldots$$

*y esta serie de elementos será nuestra escala.*

Designemos ahora *la división de la escala bajo el nombre de unidad de distancia*, y entonces las distancias de los elementos $z_1, \lambda z_1, \lambda^2 z_1 \ldots\ldots$ al elemento $z_1$ serán respectivamente iguales á $0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$

Enseguida, para poder medir la distancia de otros elementos al elemento $z$, subdividiremos las divisiones de la escala, desde luego en $n$ pártes iguales. Se conseguirá esto, aplicando $(n-1)$ veces, áun elemento límite de una división de la escala la transformación lineal que, repetida $n$ veces, reproduce la transformación $z' = \lambda z$ es decir, la transformación $z' = \lambda^{\frac{1}{n}} z'$ y llegaremos, en general, á

$$z = \lambda^{\alpha + \frac{\beta}{n}} z_1 ,$$

siendo $\alpha$ y $\beta$ enteros. La distancia es igual á $\alpha + \frac{\beta}{n}$.

Si se concibe prolongada indefinidamente la subdivisión, se deberá considerar como distancia de un elemento $z$ al elemento $z_1$, al exponente $\alpha$ que se debe atribuir á $\lambda$ para que se tenga

$\lambda^{\alpha} z_1 = z$; y puesto que $\alpha = \log \frac{z}{z_1} : \log \lambda$, se dirá que:

*La distancia de un elemento* z *al elemento* $z_1$ *es igual al logaritmo del cociente* $\frac{z}{z_1}$ *dividido por la constante* log $\lambda$. En vez de esta constante podrá escribirse $c$, transformándose la expresión de la distancia de dos elementos $z$ y $z'$ en $c \log \frac{z}{z'}$. (*)

**17.** Las tres especies de Geometría.—Se sabe que; se hallan caracterizadas; 1.º La Geometría de *Lobatschewsky ó hiperbólica* por ser la recta indefinida ó abierta, la suma de los ángulos de un triángulo menor que dos rectos y existir dos paralelas trazadas á una recta por un punto.

2.º La *Geometría euclídea ó parabólica*, por ser la suma de los ángulos de un triángulo igual á dos rectos y no admitir más que una paralela á una recta por un punto, siendo tambien la recta indefinida.

3.º La *Geometría de Riemann ó elíptica*. En ella la suma de los ángulos de un triángulo es superior á dos rectos y la recta es limitada. Las tres Geometrías son igualmente ciertas, solo puede preferirse la una á la otra por ser más cómoda, como dice el Sr. Poincaré.

Cuando los elementos fundamentales son imaginarios, resulta que: *La diferencia de medida de dos elementos no es una función uniforme, sino multiforme con una infinidad de determinaciones y un módulo de periodicidad*, que por tratarse de la función logarítmica, es $2c\pi i$. Y como el logaritmo se hace infinitamente grande cuando el valor de su argumento es 0 ó $\infty$, los elementos para los que, en la expresión $c \log \frac{z}{z'}$, se tiene $\frac{z}{z'} = 0$ ó $\frac{z}{z'} = \infty$, se hallan alejados infinitamente el uno del otro. Para esto es necesario y suficiente que uno de los dos elementos coincida con uno de los elementos fundamentales $z = 0$, $z = \infty$.

Supongamos dos puntos fundamentales reales O y O'. Si $x$ é $y$

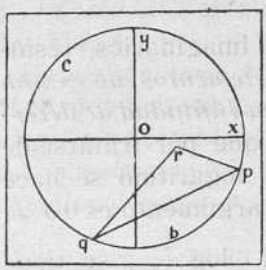
(*) Véase, F. Klein, *Sur le Géométrie dite non Euclidienne*, págs. 13-15.

son puntos reales de la recta en que se hallan O *y* O', formarán una relación anarmónica negativa ó positiva, segun que los segmentos *xy* y OO' se solapen ó no *(recouvrent en partie)*, de modo que: *La distancia de dos puntos* x, y *es una magnitud imaginaria ó real, segun que los segmentos* xy *y* OO' *se solapen ó no.*

El Sr. Klein en su memoria *Sur la Géométrie dite non Euclidienne* (*), se funda en la determinación métrica proyectiva de Cayley para dar una representación ó imagen de las tres Geometrías.

Desde luego observa que para la Geometría parabólica no es necesaria tal representación, porque coincide con la Geometría euclídea.

Respecto á las Geometrías elíptica é hiperbólica, se han dado, en el sentido de la determinación métrica euclídea representaciones; pero solo en lo concerniente á la parte planimétrica. Así, por ejemplo, Beltrami en su *Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea*, hizo notar que la planimetría no Euclídea tiene su representación en las superficies de curvatura constante negativa. Con este objeto, considera dos sistemas coordenados de líneas geodésicas $u = const$ , $v = const$ , de modo que las geodésicas pertenecientes á cada uno de los dos sistemas sean respectivamente perpendiculares á las geodésicas $u = 0$, $v = 0$, y hace una representación de la superficie en el plano, comprendida en un círculo de radio $a$ , por haber deducido que los valores admisibles de las variables $u$ y $v$ satisfacen á la relación $u^2 + v^2 \leq a$ .




A dos cuerdas que se cortan dentro del círculo-límite corresponden dos geodésicas que se cortan en un punto á distancia finita según un ángulo comprendido entre 0° y 180°. A dos cuerdas que se cortan en la circunferencia del círculo-límite, corresponden dos geodésicas concurrentes hacia un punto situado á distancia infinita. Si *pq* es una cuerda del círculo y *r* un punto

(*) Traducida al francés por M. Laugel.

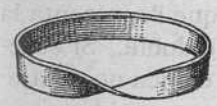
interior, á ella corresponde en la superficie pseudo-esférica una geodésica $p'\ q'$ dirigida hacia los puntos del infinito $p'$ y $q'$, correspondientes á las $p$ y $q$.

Establecida esta correspondencia, Beltrami demostró que no puede existir nada análogo á esta representación en el espacio.

La imagen la parte planimética de la Geometría elíptica, es la Geometría en la esfera, ó en las superficies de curvatura constante positiva, obteniendo el Sr. Klein (*) el siguiente resultado: *Si tomamos para la determinación métrica elíptica en el plano* $k' = \frac{i}{2}$, *ésta es semejante á la determinación métrica en la semiesfera.*

Pero sobre estas representaciones parciales el Sr. Klein, en diversos trabajos, establece para las tres Geometrías, tanto en el plano como en el espacio, representaciones que revelan sus caracteres propios y expresan su naturaleza íntima.

En la determinación métrica elíptica, la figura elemental es una cónica imaginaria *(nullteiliger)*, como fundamento de una determinación métrica proyectiva, esto es, la intersección del plano con el cono que pasa por el círculo imaginario del infinito, (**) siendo entonces la distancia entre dos puntos ó el ángulo de dos rectas del plano, iguales al ángulo segun el que se ve desde el punto elegido como vértice del cono, los dos puntos ó las dos rectas.



Considerando la *hoja de Moebius*, ó doble superficie formada por un rectángulo cuyos vértices opuestos A y D, B y C se unen constituyendo una superficie doble, el *plano elíptico* no queda dividido en dos partes por una línea cerrada trazada en él.

En la Geometría elíptica las espresiones de la diferencia de medida son

$$2\,c_1 \operatorname{arc\,cos} \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}$$

(*) *F. Klein.* Nicht-Euklidische Geometrie I pág. 96.

(**) Y se igualarán $c$ y $c'$ á $\sqrt{-1} : 2$

$$2\,c_1 \arccos \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\ \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}$$

La longitud de la recta es igual á $2c_1\pi$.

*La trigonometría plana fundada en esta determinación métrica, es análoga á la trigonometría esférica.*

En la determinación métrica hiperbólica la cónica fundamental es real *(einteiliger)* (*).

Toda recta tiene dos puntos reales á distancia infinita.

La determinación métrica relativa á la Geometría parabólica (ordinaria) no emplea ninguna cónica como figura fundamental, constituye un caso límite, en que la cónica degenera en un par de puntos, *los puntos circulares en el infinito.*

Un par de puntos imaginarios, puede considerarse como una transición entre una cónica real y una cónica imaginaria, por lo cual, la Geometría parabólica, se ofrece como una transición entre la hiperbólica y la elíptica.

Una hipérbola cuyo eje imaginario permanece fijo, mientras que el eje real disminuye, tendiendo hacia cero, en este límite se reduce á una recta doble, el eje no transverso. Esta cónica sustituye á la sección cónica, mientras que se halle engendrada por puntos; pero si se considera como envolvente de rectas, degenera en dos puntos imaginarios conjugados, situados sobre la recta doble y cuya distancia es igual á la longitud del eje no transverso, que ha permanecido constante. Todas las tangentes se hacen imaginarias, excepto la recta doble, que representa la cónica, y debe considerarse como una tangente doble. Si enseguida el eje transverso se hace imaginario, la cónica no contiene ningun elemento real. Otras conexiones muy notables completan esta interesante exposición en la obra citada del señor Klein. Pero baste con lo expuesto, para formarse una idea general de la Pangeometría.

## § 2.º EXTENCIÓN DE LA DETERMINACIÓN MÉTRICA AL ESPACIO

**18.** NOCIONES SOBRE LOS GRUPOS.—Se sabe que las fórmulas

$$x_1 = x + a\,, \qquad y_1 = y + b\,,$$

(*) La expresión *n-teilig* indica una curva plana cerrada, que tiene *n* ramas *(Züge). Vorlesung. über d Theor d Automorf Funct.* (p. 5.)

expresan el grupo de dos paramétros de las translaciones en el plano, que comprende ($\infty^2$ translaciones), así como las siguientes

$$x_1 = x\cos\alpha - y\,\text{sen}\,\alpha\,, \qquad y_1 = x\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha$$

el de las rotaciones en número $\infty^1$ alrededor de un punto.

*Todos los movimientos (euclídeos) del espacio forman un grupo.*

Las fórmulas de transformación en coordenadas rectangulares son

$$x_1 = a_1x + a_2y + a_3z + a_0\,, \quad y_1 = b_1x + b_2y + b_3z + b_0\,,$$
$$z_1 = c_1x + c_2y + c_3z + c_0\,,$$

con las condiciones

$$a_2^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = a_3a_1 + b_3\,b_1 + c_3\,c_1 = 0,$$

siendo el determinante

$$\Sigma \pm a_1b_2c_3 = +1\,.$$

Y puesto que contienen 12 parámetros que satisfacen á seis condiciones, constituyen un grupo de seis parámetros: el de los $\infty^6$ movimientos del espacio.

**19.** El grupo proyectivo general. — En la transformación proyectiva

$$x_1 = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3}\,, \qquad y_1 = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \qquad (1)$$

entran nueve constantes, que se reducen á 8 dividiendo por $c_3$. Dichas fórmulas dan $\infty^8$ transformaciones proyectivas distintas.

*Las $\infty^8$ transformaciones proyectivas del plano, forman un grupo contínuo.* Podemos demostrar el siguiente:

Teorema. — *Toda transformación proyectiva del plano deja por lo menos un punto invariable,* pues suprimiendo los subíndices á $x_1$ é $y_1$, podemos escribir:

$$\rho x = a_1x + b_1y + c_1\,, \qquad \rho y = a_2x + b_2y + c_2\,,$$
$$\rho = a_3x + b_3y + c_3\,, \qquad (2)$$

$$(a_1 - \rho)\,x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + (b_2 - \rho)\,y + c_2 = 0$$
$$a_3 x + b_3 y + (c_3 - \rho) = 0$$

Llamando $\Lambda(\rho)$ al resultante correspondiente. Sea $\Delta(\rho) = 0$, que tiene por lo menos una raíz real. Sustituyéndola en (2), se reducen á dos ecuaciones:

$$\lambda x + \mu y + \nu = 0\,, \qquad \lambda' x + \mu' y + \nu' = 0\,.$$

Si el determinante $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ no es nulo, las últimas ecuaciones representan dos rectas que se cortan; y si es nulo, dos rectas paralelas, lo que dá un punto fijo ó invariante á distancia finita ó infinita.

**20.** CÓNICA TRANSFORMABLE EN SÍ MISMA.—Existen $\infty^8$ transformaciones lineales en un plano; pero como solo existen $\infty^5$ cónicas, de modo que cada una de estas puede transformarse en sí misma por $\infty^3$ transformaciones.

Puesto que para cada transformación lineal del plano, los puntos de una cónica se combinan entre sí, resulta que para cada transformación de este género dos de los puntos de la cónica permanecen invariables, pues siendo $o$, $p_1$, $p_2$, $p_3$, ..... puntos de la cónica y $p'_1$, $p'_2$, $p'_3$ ..... puntos que resultan de $p_1$, $p_2$, $p_3$, ..... por una transformación lineal, los dos haces $o\,(p_1, p_2, p_3, .....)$ y $o\,(p'_1, p'_2, p'_3, .....)$ son proyectivos; y por consiguiente tienen dos rayos comunes $o\pi_1$, $o\pi_2$; luego los puntos $\pi_1$ y $\pi_2$ permanecen invariables en la transformación.

Pero si dos puntos de la cónica fundamental permacen invariables, lo mismo sucede con la recta que los une, las tangentes en estos puntos y su intersección, y por consiguiente con el triángulo formado. Tomando éste como triángulo de referencia, la ecuacion de la cónica es:

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0\,.$$

La transformación lineal por la que la cónica se transforma en sí, debe ser de la forma

$$x_1 = \alpha_1 y_1\,, \qquad x_1 = \alpha_2 y_2\,, \qquad x_3 = \alpha_3 y_3$$

La condición para que la cónica permanezca invariable, será:

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 = 0\,,$$

y como es una sola condición entre tres variables homogéneas, queda una infinidad simple de transformaciones que dejan invariables al triángulo y á la cónica.

Por estas transformaciones permanece invariable el cociente $\frac{x_1 x_2}{x_3^2}$, cualquiera que sea su valor; luego todas las cónicas de la forma

$$x_1 x_2 - k x_3^2 = 0,$$

se transforman en sí por dichas transformaciones.

Podemos decir, pués que: *En un movimiento (déplacement) del plano, no solo se transforma en sí la cónica fundamental, sino que esto sucede á cada cónica (cada círculo) que le es tangente en los dos puntos fijos.* Entre estas cónicas se halla el punto $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, centro común de estos círculos. Diremos pues que el movimiento es *una rotación alrededor de este* centro (*).

**21.** Los movimientos en el espacio. — Los movimientos *(déplacement)* en número séxtuplamente infinito del espacio, corresponden á otras tantas transformaciones lineales, los cuales dejan invariable la superficie de los puntos del infinito. Pero como solamente las superficies de segundo grado pueden transformarse en sí por una infinidad séxtupla de transformaciones lineales, los puntos en el infinito forman una superficie de segundo grado, y los movimientos del espacio, se hallan comprendidos en el ciclo de las transformaciones lineales séxtuplemente infinito que dejan invariable una superficie de segundo grado.

**22.** Extensión al espacio de la interpretación geométrica.—El Sr. Klein ha extendido al espacio las interpretaciones de las tres geometrías. Entendiendo por esfera una superficie de segundo grado tangente á la superficie, segun una curva plana, siendo el centro de aquélla el polo del plano, en vez de los movimientos séxtuplemente infinitos que dejan invariable la determinación métrica ordinaria, considera un ciclo de otras tantas transformaciones lineales, pues la superficie fundamental, como toda superficie de segundo grado, en general, se transforma en sí misma después de un número séxtuplemente

(*) Klein. *Sur la Géométrie, dite non Euclidienne.* (pág 36).

infinito de transformaciones lineales, que se dividen en dos clases, séxtuplamente infinitas, segun que se cambian ó no entre sí los dos sistemas de generatrices rectilíneas.

Cuando la superficie fundamental se cambia en una *cónica imaginaria*, se obtiene una Geometría de la misma naturaleza que la Geometría *parabólica* ordinaria. Si, particularmente esta cónica es el círculo imaginario del infinito, se obtiene precisamente la Geometría métrica ordinaria.

Pero la determinación métrica proyectiva general da tambien, para una superficie convenientemente elegida, una Geometría métrica que representa los conceptos de la Geometría elíptica y otra que representa los de la hiperbólica

Se obtiene una Geometría métrica correspondiente á la Geometría *elíptica* tomando una superficie fundamental *imaginaria*. Entonces ninguna recta tiene puntos en el infinito, de manera que la recta es como una curva cerrada de longitud finita. Le corresponden las fórmulas de la Trigonometría ordinaria, en la que el radio de la esfera está representado por la constante $\frac{c}{\sqrt{-1}}$.

Se obtiene una Geometría correspondiente á la Geometría *hiperbólica*, tomando una superficie fundamental real, no reglada.(*)

**23.** Teoría de Lie.—Después de tratar, ya del espacio ordinario, ya del de $n$ dimensiones en su relación con los grupos de transformaciones, especialmente del de seis parámetros de todos los movimientos euclídeos, de todas las transformaciones las transformaciones proyectivas que dejan invariante la cónica del infinito y de obtener los grupos proyectivos que dejan invariantes en el espacio ordinario, ya una superficie, ya una curva ó un punto, da Lie dos soluciones al problema de Rieman-Helmholtz relativo al espacio, que formula en los siguientes términos: *Pueden obtenerse propiedades tales, que pertenezcan tanto á los movimientos euclídeos como á los no-Euclídeos, y por las que se distinguen estas tres series de todas las demás series de movimientos posibles en una variedad numérica.*

---

(*) *Sur la Géom , dite non Euclidienne.* (Bulletin des sciences-math.), p. 347.48.

Basándose en el estudio de los espacios de curvatura constante, en los que puede moverse una figura sin alterar sus longitudes; y considerando estos movimientos, que para el espacio de tres dimensiones dependen de seis parámetros, llegó Lie á resolver dicho problema, introduciendo el nuevo concepto de libre movilidad infinitesimal *(im infinitesimalen, Der freien Beweglickeit), que se refiere á puntos infinitamente próximos;* de modo que *un grupo real finito del espacio de tres dimensiones tiene libre movilidad infinitesimal en un punto real* P, *cuando permaneciendo fijo dicho punto y un elemento lineal cualquiera trazado por él, aun es posible un movimiento continuo; y si por el contrario, se fija además de* P *y de aquel elemento lineal un elemento superficial cualquiera que pase por ellos, no es posible ningun movimiento continuo.*

*Y cuando un grupo real continuo de tres dimensiones tiene en un punto real libre movilidad infinitesimal, es de seis parámetros y transitivo, siendo por una transformación puntual y real semejante, ya al grupo de movimientos euclídeos de este espacio, ya con ambos grupos de movimientos no-Euclídeos (de Riemann y de Lobatschewsky) de este espacio, ya con el grupo real continuo de seis parámetros, que deja invariable la superficie imaginaria* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$, *ó con el grupo continuo real proyectivo de la superficie no reglada* $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$.

Si un punto real $y_1^0, y_2^0, y_3^0$, en posición general, se halla fijo, entonces todos los puntos $x_1, x_2, x_3$, con los que puede coincidir un punto $x_1^0, x_2^0, x_3^0$, satisfacen á una ecuación de la forma

$$W(y_1^0, y_2^0, y_3^0 ; x_1^0, x_2^0, x_3^0 ; x_1, x_2, x_3) = 0,$$

que no queda satisfecha por $x_1 = y_1^0, x_2 = y_2^0, x_3 = y_3^0$ y que representa una superficie real que pasa por el punto $x_1^0, x_2^0, x_3^0$.

Además, alrededor del punto $y_1^0, y_2^0, y_3^0$ puede obtenerse una región de tres dimensiones tal, que al fijarse el punto $y_1^0\ y_2^0\ y_3^0$, otro punto cualquiera $x_1^0, x_2^0, x_3^0$ de dicha región puede, por mutación continua, coincidir con cualquier otro punto de la misma que satisfaga á dicha ecuación $W = 0$, y que se halle unido al primero por una serie continua de puntos; y á estas condiciones satisfacen el espacio ordinario ó Euclídeo y los dos

espacios no-Euclídeos, ó sea los espacios en los que el grupo de los movimientos posibles es el grupo que transforma en sí misma una de las dos superficies: $x^2 + y^2 + z^2 \pm 1 = 0$.

Lie, pues, desarrolla el pensamiento de Helmholtz, determinando una función invariante que corresponde á ese *algo* que se llama la distancia de dos puntos, que subsiste durante su mutación en el espacio, y establece las propiedades exclusivas á los movimientos Euclídeos y no-Euclídeos, que los distingue de los demás movimientos. (*)

**24.** Definición de la distancia. — Helmholtz definió la distancia diciendo que: *Entre las coordenadas de los puntos que pertenecen á un cuerpo, tomados dos á dos, debe existir una ecuación correspondiente á la relación invariable que subsiste entre los dos puntos durante el movimiento del cuerpo, y que es la misma para todos los pares de puntos congruentes.* (**)

*Los pares de puntos congruentes son los que pueden coincidir con el mismo par de puntos fijos del espacio.*

Además, cinco puntos, A, B, C, D, E, dan diez pares distintos AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE.

Supongamos diez ecuaciones que, en el espacio de tres dimensiones, contengan quince coordenadas variables, de las que seis deban permanecer arbitrarias, si el sistema de los cinco puntos se ha de mover alrededor de un eje ó paralelamente á este eje. No se pueden determinar mediante estas diez ecuaciones mas que nueve coordenadas para las seis variables.

## § 3.º Geometría de $n$ dimensiones

**25.** Geometría de $n$ dimensiones. — El límite de una parte del espacio de $n$ dimensiones (un cuerpo de $n$ dimensiones) es una figura de $n - 1$ dimensiones. Esta es divisible y su límite es una figura de $n - 2$ dimensiones. La $n^{\text{sima}}$ figura es indivisible.

*Postulado.* — Por todo punto pasan figuras de $n - 1$ dimensiones (*Planos*), que tienen las siguientes propiedades:

1. Por todo punto del plano de $n - 1$ dimensiones, pasan fi-

---

(*) *Theorie der Taansformationsgruppen.* Dritt. Absch., pags. 472, 479, 481, 507.

(**) *Populare Wissenschafliche.* Drittes Heft., p. 40.

guras de $(n-2)$ dimensiones, planos de $(n-2)$ dimensiones por cuya reposo aún es posible el movimiento del espacio.

2. Por este movimiento se puede alcanzar una posición por la que llegue el plano $(n-1)$ dimensional á coincidir en conjunto con su posición primitiva; pero invirtiéndose la posición de sus puntos.

3. En cada plano de $(n-2)$ dimensiones existe una figura de $(n-3)$ dimensiones tal, que permaneciendo fija, sea aún posible el movimiento del plano de $(n-1)$ dimensiones, describiendo cada punto una línea cerrada.

4. Las mismas hipótesis podemos hacer respecto á figuras de un número menor de dimensiones. En cada plano de $\nu$ dimensiones hay planos de $(n-1)$ y de $(n-2)$ dimensiones tales, que permaneciendo fijo el plano de $(n-2)$ dimensiones, aún sea posible el movimiento del de $\nu$ dimensiones, y cada plano de $(n-1)$ dimensiones de la figura móvil *(ruhende)* coincide con su posición primitiva, de manera que la posición de los puntos queda invertida.

*a)* Si una recta tiene dos puntos comunes con un plano, coincide con él.

*b)* Si un plano de $\nu$ dimensiones tiene comun con un plano de $\mu$ dimensiones $(\mu > \nu)$ un plano de $(\nu-1)$ dimensiones, y además un punto, se halla contenido en él. (Si un $P_\nu$ tiene un $P_{\nu-1}$ y un punto comun con un $P_\mu$ se hallará contenido en $P_\mu$).

*c)* Por un plano de $\nu$ dimensiones y un punto exterior al mismo, se puede trazar un plano de $(\nu+1)$ dimensiones.

*d)* Dadas $\varkappa$ rectas que se encuentran en un punto, puede trazarse por dos de ellas un plano de dos dimensiones. Si no se hallan tres de las rectas dadas en este plano, se puede trazar por las tres un plano de tres dimensiones; y si las $\varkappa$ rectas no se hallan en un plano de $(\varkappa-1)$ dimensiones, por ellas pasa un solo plano de $\varkappa$ dimensiones.

*e)* Si en un plano de $(\nu+1)$ dimensiones, uno de $\nu$ y otro de 2 dimensiones tienen un punto comun, se cortan segun un recta.

*f)* Si se hallan dos planos $P_\lambda$ y $P_\mu$ en un $P_\nu$, siendo $\lambda+\mu > \nu$, y tienen los dos primeros un punto comun, se cortan en un $P_{\lambda+\mu-\nu}$.

*g)* Si una recta es perpendicular á $\varkappa$ rectas por las que no

pasa ningun plano de $(\varkappa - 1)$ dimensiones, será perpendicular á todas las rectas que pasen por el pie de ésta y se hallen contenidas en el plano $P_\varkappa$ determinado por los $\varkappa$ primeras rectas.

El teorema es cierto para $\varkappa = 2$. Supongamos que sea tambien cierto para $\lambda$ rectas y el plano $P_\lambda$.

Tracemos por $P_\lambda$ y otra de las rectas dadas un plano $P_{\lambda+1}$; y sea $h$ una recta cualquiera trazada en el mismo por el pie de la perpendicular. Tracemos por $h$ y $R_{\lambda+1}$ un plano de dos dimensiones que cortará á $P_\lambda$ en una recta R'. Puesto que la recta dada es perpendicular á $R_{\lambda+1}$ y á R', será perpendicular á las que se hallan con las mismas en un plano $P_2$, como es la $h$.

*h)* Si $\varkappa$ rectas $R_1, \ldots, R_\varkappa$ son perpendiculares en un punto A á $\lambda$ rectas $H_1, \ldots, H_\lambda$, determinando las primeras un plano $P_\varkappa$ de $\varkappa$ dimensiones y las segundas un plano $P_\lambda$ de $\lambda$ dimensiones, cada una de las rectas R del primer plano será perpendicular á cada una de las rectas H.

*i)* En un plano de $\nu$ dimensiones $P_\nu$ solo existe una recta perpendicular en uno de sus puntos á un plano $P_{\nu-1}$ de $\nu - 1$ dimensiones contenido y que sea perpendicular á éste. (*)

Basta con los enunciados expuestos para tener una idea de las proposiciones fundamentales de la Geometría de $n$ dimensiones.

**25.** Geometría de cuatro dimensiones. — Axioma I. — *Un espacio corta á una variedad ó multiplicidad de cuatro dimensiones en dos partes separadas.*

Axioma II.—*Por cuatro puntos de un* $E_4$ (espacio de 4 dimensiones) *que no se hallan en un mismo plano, solo puede pasar un espacio.*

Axioma III.—*Un plano que tiene con un espacio 3 puntos comunes, que no se hallan en línea recta, se halla contenido en éste.*

Axioma IV.—*Una recta que solo tiene un punto comun con espacio, queda dividida por éste en dos partes separadas.* Si tiene 2 puntos comunes, se halla totalmente en él. Tenemos como consecuencia: Un plano $\pi$ que solo tiene una recta $r$ común con un $E_3$, quedará dividido por éste en dos partes se-

(*) *W. Killing.* Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung.

paradas. Pues una segunda recta $r'$ trazada en $\pi$, encuentra á $r$ en un punto P. (Dos rectas de un plano tienen siempre un punto común); $r'$ quedará dividida por P en dos partes separadas. (Axioma IV). Dos puntos cualesquiera de ambas partes se hallan pues, á distinto lado de $E_3$, que son puntos de $\pi$; luego $\pi$ se halla dividido por $E_3$ en dos partes separadas.

Teorema I.—*Dos espacios tienen siempre un plano comun* (*) (se cortan siempre en un plano). En efecto, sean $E_3$ y $E'_3$ los dos espacios. Supongamos que tienen solo el punto A comun, esto es, que A se halle en $E_3$ y $E'_3$. Tracemos por A, en $E_3$, dos rectas $r$ y $r'$, que se hallan divididas por $E'_3$ en dos partes separadas (segun el axioma IV), $r$ en $r_1$ y $r_2$, $r'$ en $r'_1$ y $r'_2$. Sean $r_1$ y $r'_1$ las que se hallan al mismo lado de $E'_3$. Uniendo un punto de $r_1$ con un punto de $r'_2$ por una recta, ésta se hallará contenida totalmente en $E_3$ puesto que $r$ y $r'$ se hallan en $E_3$; luego tambien se hallará en $E_3$, el plano determinado por $r_1$ y $r'_2$ que contiene la recta. Esta recta pasa por $E'_3$, puesto que une dos puntos á distintos lados del mismo, tendrá pues, un segundo punto B comun con $E_3$ y $E'_3$. La recta AB se halla en los dos espacios (axioma IV). Falta demostrar que si dos espacios tienen comun una recta, tendrán tambien un plano comun. Para ello, tracemos por la recta AB dos planos en $E_3$, que se hallan totalmente contenidos en él, y que segun el corolario del axioma IV, quedan divididos en dos partes por $E'_3$.

Unamos un punto de uno de los planos con otro de la parte del segundo plano separada por $E'_3$ mediante una recta, que se hallará totalmente contenida en $E_3$ y pasa por $E'_3$. Esta dará un tercer punto comun con $E_3$ y $E'_3$.

Teorema II.—*Un espacio y un plano tienen siempre una recta comun*. En efecto, supongamos que el plano $\pi$ se halle en $E_3$. Puesto que $E_3$ y $E'_3$ tienen comun un plano $\pi'$, la intersección $r$ de dichos planos se hallará en $\pi$ y en $E'_3$.

Teorema III.—*Un espacio y una recta* (que no se halla totalmente contenida en él) *tienen siempre un punto comun*, pues si $r$ se halla en $E_3$, y los espacios $E_3$ y $E'_3$ tienen comun el plano $\pi$, el punto de intersección de $r$ y $\pi$ será comun á los dos espacios; y será el único punto comun á $r$ y $E'_3$.

---

(*) Dos planos se cortan siempre en una recta (propia ó impropia).

Teorema IV.—*Dos planos de espacios distintos tienen siempre un punto comun,* pues si el plano $\pi$ se halla en $E_3$ y el plano $\pi'$ en $E'_3$, como ambos espacios tienen un plano $\pi''$ comun, las rectas intersecciones de $\pi$ con $\pi''$ y de $\pi'$ con $\pi''$ se cortan en un punto comun, que es el punto comun de los dos espacios.

Teorema V.—*Un plano y una recta, que no se hallan en un mismo espacio, no tienen nada comun,* pues si el plano $\pi$ se halla en $E_3$ y la recta $r$ en $E'_3$, $r$ corta al plano comun $\pi'$ de los espacios $E_3$ y $E'_3$ en un punto. A su vez $\pi$ corta $\pi'$ en una recta $r'$, puesto que las dos se hallan en $E_3$. Y puesto que $r$ se halla dividida por $\pi'$ en dos partes, no encuentra á $r'$, porque solo tiene con $\pi'$ un punto comun exterior á $r'$.

Teorema VI.—*Dos rectas de* $E_4$ *un espacio de cuatro dimensiones no tienen, en general, nada comun.*

Sean P y P' dos planos en dos espacios distintos, que segun el teorema IV sólo tienen un punto comun A. Tracemos en cada plano una recta que no pase por A. ($r$ en $\pi$ y $r'$ en $\pi'$) Estas rectas no tienen nada comun. Diremos que estas rectas *se cruzan.*

Teorema VII.—*Por dos rectas de espacios distintos que se cruzan puede pasar siempre un espacio.*

En efecto, las dos rectas $r$ y $r'$ que se cruzan, pueden hallarse respectivamente en $E_3$ y $E'_3$. Hay que determinar un espacio $E''_3$ por medio de $r$ y de $r'$.

El plano $\pi$ comun á $E_3$ y $E'_3$ quedará cortado por $r$ y $r'$ respectivamente en los puntos $p$ y $p'$, puesto que el plano y cada una de las rectas se hallan en un mismo espacio. Tracemos ahora por $r'$ y $p$ un plano $\pi'$ en el espacio $E'_3$, que tendrá con $r$ tan solo el punto $p$ comun. Pero, un espacio $E''_3$ queda determinado por un plano una recta que lo corta. En este espacio $E''_3$ se hallan, por consiguiente, $r$ y el plano $\pi'$ y con éstos la recta $r'$, es decir, que el espacio $E''_3$ es el que se trataba de hallar.

Tracemos ahora en $E_3$ por $r$ y $p'$ un plano $\pi''$ que tendrá con $r'$ tan solo el punto $p'$ comun; luego queda determinado por $\pi''$ y $r'$ un espacio $E'''_3$ en el que se hallan las rectas $r$ y $r'$. Este espacio es idéntico con $E''_3$, porque tienen cuatro puntos comunes, es decir, que por dos rectas que se cruzan solo queda determinado un espacio.

Corolarios.—Un espacio queda pues determinado por 4 puntos que no se hallan en un plano, por un plano y un punto exterior al mismo, por un plano y una recta que lo corta, por dos planos que se cortan, por una recta y dos puntos exteriores (los dos puntos no se hallan en el plano de la recta y de uno de los puntos).

Teorema VIII.—*Tres espacios se cortan, cada dos, en un plano y cada tres de estos planos pasan por una recta.*

En efecto, un plano $\pi$ y una recta $r$ de dos espacios distintos no tienen en general nada comun (teorema v), $\pi$ y $r$ determinan un tercer espacio $E''_3$ que corta á $E_3$ en $\pi$ y á $E'_3$ en un plano $\pi''$, que contiene á la recta $r$; $\pi$ y $\pi''$ se hallan en el mismo espacio $E''_3$ y tienen por consiguiente una intersección $r''$. Esta intersección $r''$ se halla pues en los tres espacios; se halla en el plano de intersección de los espacios $E_3$ y $E'_3$ y contiene el punto $p$.

Teorema IX. — *Cuatro espacios tienen siempre un punto comun.*

Sean los espacios E, E', E'', E'''. Los espacios E y E' tienen un plano $\pi$ comun (teorema i). $\pi$ y E'' tienen una recta $r$ comun (teor. ii). $r$ y E''' tienen un punto $p$ comun.

*Observaciones.* — Dos rectas que se hallan en un plano sin cortarse, se llaman paralelas. Se dice que las rectas tienen una *dirección* comun.

Se dice que dos planos son paralelos, cuando tienen dos direcciones comunes. Tienen todas las direcciones comunes. Se dice en este caso que tienen una *orientación (Stellung)* comun. Una orientación se halla determinada por dos direcciones.

Dos planos paralelos tienen un elemento impropio en el infinito, una recta.

Dos espacios $E_3$ y $E'_3$ coinciden en una orientación, que es un plano comun. Si dos planos de dos espacios son paralelos á la intersección de éstos, se dice que los espacios son paralelos.

Teorema X.—*Si dos espacios coinciden en tres direcciones que no pertenecen á la misma orientación, coinciden en todas direcciones.*

Teorema XI.—*Una recta perpendicular á tres rectas de un espacio en un punto* (que no pertenecen á una misma orientación) *es perpendicular á todas las rectas que pasan por el mismo punto en dicho espacio.*

Sean $r_1$, $r_2$, $r_3$ tres rectas que pasan por el punto A del espacio $E_3$, á las que es perpendicular la recta $r$, y $r_4$ otra cualquiera recta que pasa por A en $E_3$.

Puesto que $r$, $r_2$ y $r_3$ determinan un espacio $E'_3$ (cuyo plano de intersección con $E_3$ es $[r_2\ r_3]$). En este espacio $r$ es perpendicular al plano $[r_2\ r_3]$, porque es perpendicular á $r_2$ y $r_3$. El plano $[r_2\ r_3]$ corta al plano $[r_1\ r_4]$ en una recta $r_5$. Y puesto que $r$ es perpendicular al plano $[r_2\ r_3]$, será perpendicular á las rectas $r_5$ y $r_1$ del plano $[r_1\ r_4]$; luego será perpendicular á todas las rectas de este plano y por consiguiente á $r_4$.

Corolario.—*Todo plano exterior á un espacio que es perpendicular á dos planos de este espacio que se cortan, es perpendicular á todos los planos del espacio.*

Teorema XII.—*Dos espacios que son perpendiculares á la misma recta son paralelos.* (*)

Poliedros regulares. (Die regularen Polytope).—Pueden considerarse, en el espacio de cuatro dimensiones, en correspondencia con los cinco poliedros regulares del de tres, seis figuras regulares limitadas por tetraedros, exaedros, octaedros y dodecaedros, de tal manera, que en cada vértice concurren igual número de aristas, caras y cuerpos. Estas figuras son:

1.ª La de cinco células *(Fünfzell)* limitada por 5 tetraedros. —2.ª La de 8 *(Achtzell)*, limitada por 8 exaedros.—3.ª La de 16 *(Sechzehnzell)*, limitada por 16 tetraedros.—4.ª La de 24, limitada por 24 octaedros. — 5.ª La de 120 *(Einhundertwanzigzell)*, limitada por 120 dodecaedros.—6.ª La de 600 *(Sechshundertzell)* limitada por 600 tetraedros. Estos cuerpos que han de considerarse como *en proyección* en el espacio de tres dimensiones, dan la solución del problema de Estereometría: *Descomponer un tetraedro, exaedro, octaedro* ó dodecaedro en cuerpos de igual clase, de manera que en cada vértice concurran igual número de aristas, caras y cuerpos, y en cada arista igual número de caras y cuerpos. (**)

---

(*) Véase, Max Brückner *Die Elemente der vierdimensionale Geometrie*, donde además se hacen indicaciones de la Geometría analítica y de los poliedros *(Politope)*.

(**) *Schlegel.* Theorie der homogenen zusammengesetzten Raumgebilde.

# LIBRO PRIMERO

# GEOMETRÍA DIFERENCIAL PLANA

## CAPÍTULO I

### Cuestiones que dependen de infinitamente pequeños de primer orden

#### § 1.º TANGENTES Y NORMALES

**1.** COEFICIENTE ANGULAR. — Dados dos puntos M y M′ cuyas coordenadas son $x$, $y$, $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, se sabe que

$$\lim \operatorname{tang} M'Mx = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx},$$

puesto que el límite de la posición de la secante es la tangente. La ecuación de la tangente á la curva $y = f(x)$ es pues

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x). \qquad (1)$$

En el caso de darse la ecuación de la curva bajo la forma implícita $F(x, y) = 0$, se tiene que

$$Y - y = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}(X - x) \text{ ó } (Y - y)\frac{df}{dy} + (X - x)\frac{df}{dx} = 0 \qquad (2)$$

Si se hace homogénea la ecuación $f(x, y) = 0$ introduciendo

la variable $z$, que se hara igual á 1, después de las diferenciaciones, se tendrá, según el teorema de Euler,

$$mf = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} \tag{3}$$

La ecuación (2) puede escribirse

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{4}$$

y por ser $f(x,y) = 0$ pasa un punto de la curva, la ecuación (3) se reduce á

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

luego la ecuación (4) se reduce observando que $Z = z = 1$, á

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

**2.** CONDICION DE CONTACTO.—Sean

$$f(x,y) = 0 \qquad (1) \qquad ax + by + cz = 0 \tag{2}$$

las ecuaciones de una curva y de una recta, ésta escrita en forma homogénea.

Para expresar que son tangentes, se identificará la ecuación (2) con la de una tangente

$$X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

Identificando esta ecuación con la (2) resulta

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{a} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{b} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{c} \qquad \text{ó} \qquad \frac{f_1}{a} = \frac{f_2}{b} = \frac{f_3}{c} \tag{3}$$

para abreviar la escritura.

Siendo tangentes la recta y la curva, $x, y, z$ han de satisfacer simultáneamente á la ecuación (3) y á la (1) y (2). Para eliminar $x$, $y$, $z$ se puede sustituir el sistema (3) por el siguiente:

$$f_1 + a\varrho = 0, \qquad f_2 + b\varrho = 0, \qquad f_3 + c\varrho = 0 \tag{4}$$

Es preciso eliminar ahora $x$, $y$, $z$, $\rho$ entre (4) y (2), lo que se reduce á eliminar estas cantidades entre las ecuaciones obtenidas igualando á cero las ecuaciones que resultan igualando á cero las derivadas de

$$f(x, y, z) + \rho(ax + by + cz) = 0$$

respecto á $x$, $y$, $z$ y $\rho$.

EJEMPLO.—Hallar la condición de contacto de la recta

$$ax + by + c = 0$$

con la cónica

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0\,.$$

Sumando al primer miembro $\rho(ax + by + cz)$, é igualando á cero las derivadas, el resultante del sistema obtenido será

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & a \\ B'' & A' & B & b \\ B' & B & A'' & c \\ a & b & c & o \end{vmatrix} = 0$$

**3.** GRADO DE LA ECUACIÓN DE LA TANGENTE.— Escribiendo la ecuación de la tangente bajo la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x}X + \frac{\partial f}{\partial y}Y = \frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y$$

Parece que el segundo miembro es del grado $m$; pero vamos á ver que se rebaja dicho grado en una unidad. En efecto, sea

$$f(x, y) = u + u_1 + u_2 + \ldots\ldots,$$

siendo $u$ el conjunto de términos de grado $m$, $u_1$ el de los términos de grado $m - 1$, etc. Tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \ldots\ldots \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \ldots\ldots$$

Por consiguiente

$$\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \left(x\frac{\partial u_1}{\partial x} + y\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \ldots\ldots,$$

y aplicando el teorema de las funciones homogéneas,

$$\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y=mu+(m-1)u_1+(m-2)u_2+\ldots\ldots$$

$$=m(u+u_1+u_2+\ldots\ldots)-u_1-2u_2-3u_3-\ldots\ldots$$

Hallándose el punto $(x, y)$ en la curva, se tiene

$$m(u+u_1+u_2+\ldots\ldots)=0\,;$$

luego la ecuación de la tangente se reduce á

$$\frac{\partial f}{\partial x}X+\frac{\partial f}{\partial y}Y+u_1+2u_2+3u_3+\ldots\ldots=0\,,$$

ecuación que no contiene términos del grado $m$.

PROBLEMA *trazar á una curva* f(x, y) = 0 *una tangente por un punto exterior* $(a, b)$.

La ecuación de la tangente en la que se sustituye X é Y por $a$ y $b$, es

$$a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y\,.$$

Los valores de $x$ é $y$ obtenidos de las ecuaciones de la curva y de la tangente, determinan las coordenadas de los puntos de contacto, siendo los grados de dichas ecuaciones $m$ y $m-1$ respectivamente, habrá $m$ (m − 1) soluciones.

PROBLEMA. — *Trazar una tangente paralela á una recta* Y = a X.

Será $\dfrac{dy}{dx}=a\,,$ ó $\dfrac{\partial f}{\partial x}+a\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$

Esta ecuación con la de la curva dará los puntos de contacto.

NORMAL.—Siendo la ecuación de la tangente

$$(X-x)\,dy-(Y-y)\,dx=0\,,$$

ó $$(X-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(Y-y)\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

la de la normal será en coordenadas rectangulares,

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy=0 \quad \text{ó} \quad \frac{X-x}{f_1}=\frac{Y-y}{f_2}\,.$$

Para trazar por un punto $(x_0, y_0)$ una normal á una curva $f(x, y) = 0$, se resolverá el sistema de ecuaciones

$$\frac{x_0 - x}{f_1} = \frac{y_0 - y}{f_2} \qquad f(x, y) = 0$$

que da en general $m^2$ soluciones.

**5.** SUB-TANGENTE, SUB-NORMAL, etc. Sea la sub-tangente PT ó $S_t$. Tenemos

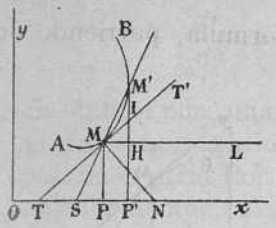



Figura 1.ª

$$PA = MP.\, tg\ TMP = y\frac{dx}{dy}; \quad S_t = y\frac{dx}{dy}$$

Sea la sub-normal PN ó $S_t$. Tenemos que

$$PN = PM.\, tg\ PMN, \quad \text{ó} \quad S_n = y\frac{dy}{dx}.$$

La tangente $$MT = T = \sqrt{y^2 + S_t^2} = y\sqrt{1 + y'^2}$$

La normal $$MN = N = \sqrt{y^2 + S_t^2} = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}$$

**6.** TANGENTES EN COORDENADAS POLARES.—Sea O el polo, OL el eje polar, AMM' una curva representada por la ecuación $f(r, \theta) = 0$.

Para obtener la tangente en el punto M á dicha curva, hay que determinar el ángulo $TMO = \mu$ de ésta con el radio vector en M.

Sean $r$ y $\theta$ las coordenadas del punto M, $r + \Delta r$, y $\theta + \Delta\theta$ las coordenadas del punto M'; y tracemos desde el puntoO como centro, el arco MI. En el triángulo M'MI tendremos:

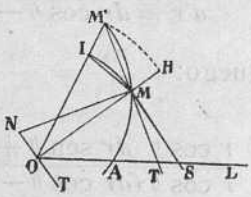



Fig. 2.ª

$$\frac{\text{sen IM'M}}{\text{sen M'MI}} = \frac{MI}{MI'} = \frac{MI}{\text{arc MI}}\,\frac{\text{arc MI}}{M'I} = \frac{MI}{\text{arc MI}}\,\frac{r\Delta\theta}{\Delta r}.$$

Si el punto M' se aproxima indefinidamente al punto M, el

ángulo IM'M se reduce al OMT ó $\mu$ y el ángulo M'MI á $90^0 - \mu$. Por consiguiente

$$\text{tg } \mu = \frac{r d\theta}{dr}$$

Hallando las expresiones del seno y coseno, tenemos

$$\cos \mu = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}, \qquad \text{sen } \mu = \frac{r d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}$$

Tambien podemos llegar á la misma fórmula, partiendo de que

$$\text{tg OMT} = \text{tg (MT}x - \text{MO}x).$$

Pero

$$\text{tg. MT}x = \frac{dy}{dx} \quad \text{y} \quad \text{tg. MO}x = \frac{y}{x};$$

luego

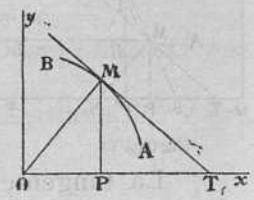


Fig. 3ª

$$\text{tg OMT} = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}} = \frac{xdy - ydx}{xdx + ydy}$$

Ademas, $\qquad x = r \cos \theta, \qquad y = r \text{ sen } \theta$

$$dx = dr \cos \theta - rd\theta \text{ sen } \theta, \qquad dy = dr \text{ sen } \theta + rd\theta \cos \theta,$$

luego:

$$\text{tg OMT} =$$

$$\frac{r \cos \theta (dr \text{ sen } \theta + rd\theta \cos \theta) - r \text{ sen } \theta (dr \cos \theta - rd\theta \text{ sen } \theta)}{r \cos \theta (dr \cos \theta - rd \text{ sen } \theta) + r \text{ sen } \theta (dr \text{ sen } \theta + rd\theta \cos \theta)}$$

y, reduciendo,

$$\text{tg OMT} = \frac{r^2 d\theta}{rdr} = r\frac{d\theta}{dr}$$

Para la sub-tangente y sub-normal, etc., se tiene

$$S_t = OT = r \operatorname{tg} \mu = r^2 \frac{d\theta}{dr}, \qquad S_n = ON = \frac{r}{\operatorname{tg} \mu} = \frac{dr}{d\theta},$$

$$N = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}, \qquad T = \sqrt{r^2 + r^4 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

**7.** APLICACIONES.—1.ª Todas las curvas que tienen la misma sub-normal, para el mismo ángulo polar, tienen igual $\frac{dr}{d\theta}$; de modo que,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr'}{d\theta} \qquad \text{ó} \qquad r = r' + \text{const.}$$

Se obtiene pues una de ellas, prolongando los radios vectores de la otra en una cantidad constante. Una de las curvas es la *concoide* de la otra. Por consiguiente, para trazar la normal á la concoide de una curva, basta trazar la normal á la curva y construir la sub-normal. Se obtendrá así la sub-normal de la concoide y, por consiguiente, su normal.

2.ª Si en una curva es constante la sub-normal, se tendrá

$$\frac{dr}{d\theta} = k, \qquad r = k\theta + \text{const.}$$

La curva es la *espiral de Arquímedes* ó de *Conon*.

Las concoides de estas espirales son también espirales iguales.

3.ª Sean $r$ y $r'$ los radios de dos curvas que, para un mismo ángulo $\theta$ tienen la misma sub-tangente. Se tendrá

$$r^2 \frac{d\theta}{dr} = r'^2 \frac{d\theta}{dr'} \qquad \text{ó} \qquad \frac{dr}{r^2} = \frac{dr'}{r'^2}$$

$$\text{y} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} + \text{const.}$$

4.ª Si se trata de hallar las curvas que tienen la sub-tangente constante, se tendrá

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = k, \qquad \frac{1}{r} = k\theta + \text{const.}$$

Estas curvas se llaman *espirales hiperbólicas*, y se reducen á la $r\theta = \text{const}$, por un cambio de eje polar.

**8.** PODAR DE UNA CURVA.—Si desde un punto O se bajan las perpendiculares á todas las tangentes á una curva, el lugar de los pies de las perpendiculares es la podar de O con respecto á la curva dada. Sea

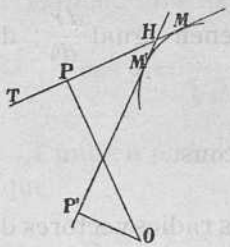


Fig. 4.

$$y - \beta = \frac{d\beta}{d\alpha}(x - \alpha) \qquad (1)$$

la ecuación de una tangente á la curva en el punto $(\alpha, \beta)$.

La ecuación de la perpendicular á la tangente trazada por el origen es

$$y = -\frac{d\alpha}{d\beta}x \qquad (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) determinan el punto P. Eliminando $\frac{d\alpha}{d\beta}$, se obtiene la ecuación de la podar

$$y(y - \beta) = -x(x - \alpha) \qquad \text{ó} \qquad x^2 + y^2 - \beta y - \alpha x = 0,$$

ecuación de la circunferencia que pasa por O, P, M, cuyo centro está en el punto medio de OM.

La ecuación de la tangente es

$$Y - y = -\frac{2x - \alpha}{2y - \beta}(X - x)$$

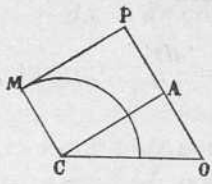


Fig. 5.ª

EJEMPLOS.—1.º *Podar del círculo.* La podar del círculo es una concoide de círculo, pues trazando la paralela CA á la tangente MP, AP es constante é igual al radio del círculo dado, y el lugar del punto P es la podar de este círculo y la concoide del círculo descrito sobre CO como diámetro.

Cuando el punto O está en la circunferencia C, la podar se llama *cardióide*.

Siendo $r = a \cos \theta$, la ecuación polar del círculo descrito sobre $CO = a$ como diámetro, la de la concoide será

$$r = a \cos \theta + \text{const.}$$

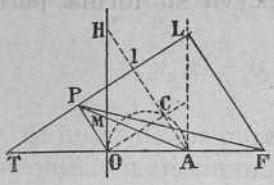


Fig. 6.ª

2.º La podar de una parábola, siendo el pie de la directriz sobre el eje $Ox$ el polo, es una estrofoide.

En efecto, sean F el foco, A el vértice, O el pie de la directriz, PT una tangente, P el pie de la perpendicular trazada desde O á la tangente.

Si desde el foco F se baja la perpendicular FL á la tangente, L se hallará en la tangente AL en el vértice; porque la podar de la parábola con respecto al foco es la tangente en el vértice.

Sean M la intersección de AP con la directriz, I el medio de PL. Los ángulos FLA, LAI. Además IAP, APO son iguales, y MOP=IAL; luego, IAL = MPO y MO = MP.

Esto sentado, podemos engendrar la estrofoide, dados un punto A y una recta fijos OH, trazando el radio vector AMP y tomando MP = MO. El lugar del punto P es la estrofoide.

## § 2.º Transformaciones por radios vectores recíprocos.

**9.** Definición.—Se dice que dos figuras son *transformadas recíprocas, la una de la otra ó por radios vectores recíprocos,* cuando para un mismo valor del ángulo polar, el producto de sus radios vectores permanece constante. Así

$$r = f(\theta), \qquad r' = \frac{k^2}{f(\theta)}$$

son las ecuaciones polares de dos curvas transformadas, la una de la otra, por radios vectores recíprocos; y se tiene $rr' = k^2$, siendo $k^2$ el *módulo de la transformación.*

Teorema.—*La transformada de una recta es un círculo, y la transformada de un círculo es otro círculo, que puede reducirse á una recta, cuando el polo está en la circunferencia.*

En efecto, la ecuación del círculo es

$$r^2 + r(a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta) + c = 0;$$

y cambiando $r$ en $\frac{k^2}{r}$, esta ecuación conserva su forma; pero si $c = 0$, toma la forma

$$r = -\frac{k^2}{a\cos\theta + b\,\text{sen}\,\theta},$$

ecuación de una recta.

TEOREMA.—*Las tangentes en los puntos correspondientes de dos curvas transformadas la una de la otra por radios vectores recíprocos, forman ángulos iguales con el radio vector común.*

En efecto, se tiene para una de las curvas

$$\text{tg}\,V = r\frac{d\theta}{dr},$$

expresando V el ánguló que el radio vector $r$ forma con la tangente y $\theta$ el ángulo polar. Tendremos para la otra

$$\text{tg}\,V' = r'\frac{d\theta}{dr'};$$

pero $$r' = \frac{k^2}{r} \qquad dr' = -\frac{k^2}{r^2}\,dr;$$

luego $\text{tg}\,V' = -r\frac{d\theta}{dr}$; luego V y V' son suplementarios, y las tangentes á las dos curvas son *antiparalelas*.

## § 3.º ENVOLVENTES

**10.** Sea la ecuación $f(x, y, a)=0$ que contiene un parámetro $a$, y que representa una *familia* de curvas.

Consideremos dos curvas de esta familia cuyas ecuaciones son

$$f(x, y, a) = 0, \qquad f(x, y, a + \Delta a) = 0$$

ó el sistema equivalente

$$f(x, y, a) = 0 \qquad \frac{f(x, y, a + \Delta a) - f(x, y, a)}{\Delta a} = 0,$$

que en el límite se reduce á

$$f(x, y, a) = 0 \qquad (1) \qquad \frac{df(x, y, a)}{da} = 0 . \qquad (2)$$

El lugar de los puntos de intersección de las dos curvas, que se obtienen eliminando $a$, es la envolvente de la curva propuesta, que se llama *envuelta ó involuta.*

Esta eliminación equivale á expresar que la ecuación propuesta admite una raíz doble en $a$.

II. Teorema.— *La envolvente de una familia de curvas es tangente á todas las involutas.*

En efecto, hemos obtenido la envolvente de la familia de curvas $f(x, y, a) = 0$ eliminando $a$, entre dicha ecuación y su derivada respecto de $a$.

Pero si suponemos ahora que $a$ sea la función de $x$ é $y$ que se obtendría revolviendo la ecuación respecto de $a$, la ecuación (1) podrá considerarse como la de la envolvente.

Propongámonos hallar el coeficiente angular de la tangente á la envolvente y á la involuta en el punto $(x, y)$.

Para ello, diferenciemos (1), considerando $a$ como constante; y tendremos

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 , \qquad (3)$$

que dará el coeficiente angular $\frac{dy}{dx}$ de la involuta.

Diferenciemos ahora suponiendo que $a$ es la función de $x$ é $y$ deducida de (2). Tendremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0 . \qquad (4)$$

Pero en virtud de (2), esta ecuación se reduce á

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (5)$$

Esta ecuación no difiere de (3); porque $a$ en (3) representa una constante y en (5) representa un función de $x$ é $y$ que tienen el mismo valor en el punto $(x, y)$, común á la envolvente

y á la involuta; luego (3) y (5) dan el mismo valor para $\frac{dy}{dx}$, y por tanto la envolvente y la involuta tienen la misma tangente.

TEOREMA II.—*Si se considera una familia de curvas, toda curva tangente á cada curva de la familia es su envolvente.*

En efecto, sea $f(x, y, a) = 0$ la ecuación de una familia de curvas. Si una curva C cuya ecuación es $F(x, y) = 0$ les es tangente, se podrá siempre determinar $a$ en función de $x$ é $y$, de modo que sea

$$f(x, y, a) = F(x, y),$$

cualesquiera que sean $x$ é $y$. Entonces

$$f(x, y, a) = 0$$

podrá representar la curva C tangente á todas las curvas de la familia.

Suponiendo $a$ variable, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

y suponiéndola constante,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

Si los dos valores de $\frac{dy}{dx}$ obtenidos por estas ecuaciones han de ser iguales para un mismo valor de $x$ y de $y$ es necesario que sea

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0;$$

porque $\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx}$, no puede ser nulo, sin ser $a$ constante; y además todos los puntos, para los que á la vez se tiene $f = 0$ y $\frac{df}{da} = 0$, pertenecen á la envolvente.

**12.** CASO DE DOS Ó MÁS PARÁMETROS.—1.º Sea

$$f(x, y, a, b) = 0, \qquad (1)$$

con la relación

$$\varphi\,(a,\,b) = 0\,. \qquad (2)$$

Considerando á $b$ como función de $a$, se tiene

$$f'_a + f'_b\,b' = 0 \quad \text{y} \quad \varphi'_a + \varphi'^{b}\,b' = 0\,;$$

de donde

$$\frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b} \qquad (3)$$

Luego: *En el caso de contener la ecuación propuesta dos parámetros ligados por una relación; para obtener la envolvente hay que eliminar los dos parámetros entre las dos ecuaciones y la ecuación adjuntada* (3).

2.º Sea

$$\left.\begin{aligned} f\,(x,\,y,\,a,\,b,\,\ldots\ldots,\,l) &= 0 \\ \varphi_1\,(a\,,\,b\,,\,\ldots\ldots,\,l) &= 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\

tendremos $2\,P\alpha + Q = 0 \quad , \alpha = -\dfrac{Q}{2\,P}$

La ecuación de la envolvente será $Q^2 - 4\,PR = 0$.

2.º Hallar la envolvente de las curvas cuya ecuación es

$$P \operatorname{sen} \varphi + Q \cos \varphi + R = 0 .$$

Se eliminará $\varphi$ entre esta ecuación y

$$P \cos \varphi - Q \operatorname{sen} \varphi = 0 ;$$

y resulta $P^2 + Q^2 = R^2$

Se puede emplear la transformación

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{2t}{1+t^2} , \qquad \cos \varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

que se deduce, haciendo $\operatorname{tg} \dfrac{1}{2} \varphi = t$ , y que conducirá á una ecuación de segundo grado; y escribiendo que sus raíces son iguales, resultará la relación precedente.

3.º *Desde los diversos puntos de una parábola se bajan perpendiculares al eje y á la tangente en el vértice. Hallar la envolvente de la recta que une los pies de estas perpendiculares.*

Las ecuaciones de la parábola y de la recta son

$$y^2 = 2px , \qquad \frac{2\,p\,X}{y^2} + \frac{Y}{y} = 1 \quad \text{ó} \quad 2pX + Yy = y^2 ;$$

eliminando $y$ entre esta ecuación y su derivada

$$Y = 2y \text{ , resulta} \qquad Y^2 + 8\,pX = 0 .$$

También podemos obtener este resultado, haciendo homogénea la ecuación propuesta é igualando su discriminante á cero. Así tenemos

$$2p\,X z^2 + Yy\,z - y^2 = 0 .$$

$$\begin{vmatrix} 4\,pX & -Y \\ Y & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ó} \quad 8\,pX + Y^2 = 0 .$$

## § 4.º Coordenadas tangenciales

**13.** Definición.—Si se considera una recta

$$x\xi + y\eta = 1 \qquad (1)$$

cuyas coordenadas en el origen son $\frac{1}{\xi}$, $\frac{1}{\eta}$, esta recta quedará determinada, cuando se den $\xi$ y $\eta$. Estas cantidades se llaman *coordenadas tangenciales* de la recta, llamándose á las $x$ é $y$ de un punto *coordenadas cartesianas.*

Si existe entre $\xi$ y $\eta$ una relación tal que

$$f(\xi, \eta) = 0, \qquad (2)$$

la recta (1) envolverá á esta curva cuya ecuación tangencial será la (2), siendo la (1) la ecuación en coordenadas cartesianas de una de sus tangentes, cuyas coordenadas son $\xi$ y $\eta$.

Teorema.—*Toda ecuación de primer grado representa un punto.*

En efecto, supongamos que la ecuación (2) tiene la forma

$$a\xi + b\eta + c = 0. \qquad (3)$$

En este caso establece una relación de primer grado entre $\xi$ y $\eta$; y la ecuación (1) solo depende de un parámetro que entra en primer grado; luego representa un haz de rectas que pasan por un punto fijo, que es su envolvente. Para eliminar $\xi$, tendremos

$$\xi = -\frac{c + b\eta}{a} \quad , \quad -\frac{c + b\eta}{a}x + \eta y = 1. \qquad (4)$$

La ecuación (4) representa una recta que pasa por la intersección de las dos rectas

$$\frac{c}{a}x + 1 = 0 \quad , \quad \frac{b}{a}x - y = 0$$

ó

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{-1}{c}$$

El punto representado por (3) tiene pues, por coordenadas

$$-\frac{a}{c} \; y \; -\frac{b}{c}$$

*Recíprocamente:* Si se trata de obtener la ecuación tangencial del punto cuyas coordenadas son $x_0$ é $y_0$, será necesario escribir que la recta (1) pasa por este punto, y tendremos la ecuación de condición

$$x_0 \xi + y_0 \eta = 1 .$$

La recta cuyas coordenadas son 0 y $\xi$ es paralela al eje de las $y$ y la recta cuyas coordenadas son 0 y 0 es la recta del infinito.

La ecuación $a\xi = 1$ representa un punto cuya ordenada es nula; se halla pues, el eje de las $x$. La ecuación *constante* $= 0$ representa el origen de coordenadas;

$$a\xi + b\eta = 0$$

representa un punto en el infinito.

## § 5.º Figuras polares recíprocas

**14.** Definición.—Se llama *polar recíproca* de una curva

$$f(x, y, z) = 0 , \qquad (1)$$

que escribimos en coordenadas homogéneas, con relación á una cónica

$$\varphi(x, y, z) = 0 , \qquad (2)$$

á la envolvente de las polares de los diversos puntos de la curva respecto á la cónica.

Para hallar la polar recíproca de (1) con respecto á (2), hallaremos la envolvente de la polar del punto $(x, y, z)$, ó sea

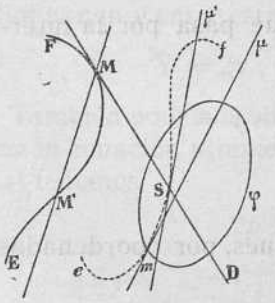


Fig 7.ª

$$\xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 , \qquad (3)$$

que puede escribirse

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + y \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Para ello eliminaremos $x, y, z$ entre (1) y las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = 0.$$

ó sea

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$$

Teorema.—*La polar recíproca de una curva es también el lugar de los polos de sus diversas tangentes.*

En efecto: El polo de una recta

$$Ax + By + Cz = 0$$

respecto á la cónica (2) está dado por

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : A = \frac{\partial \varphi}{\partial y} : B = \frac{\partial \varphi}{\partial z} : C;$$

el polo de la tangente

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

á la curva (1) estará dado por

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial z} : \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta},$$

siendo $\xi$, $\eta$ y $\zeta$ las coordenadas del polo.

Para obtener el polo, será necesario eliminar $x$, $y$; $z$ entre estas ecuaciones y (1).

Este es el procedimiento empleado anteriormente para hallar la polar recíproca de (1).

De esto resulta que la polar recíproca de una curva tiene por polar recíproca la curva misma, lo que justifica la denominación de *polares recíprocas.*

Además, observaremos que la clase de una curva es igual al grado de su polar recíproca y *vice-versa,* porque si se considera una secante á la curva propuesta, la encontrará en $m$ puntos expresando $m$ el grado de la curva. Las polares de estos mis-

mos puntos concurrirán en el polo P de la recta considerada, y serán tangentes á la polar recíproca. Serán además las solas tangentes que se puedan trazar desde P á esta curva. Es pues de la clase $m$.

Así la polar recíproca de una cónica es una cónica.

## § 2.º Aplicaciones

1. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal, la sub-tangente, la sub-normal y las longitudes de la tangente y de la normal de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

*Solución:* La ec. de la $tg.$ es $\dfrac{Xx}{a^2} + \dfrac{Yy}{b^2} - 1 = 0$

La ec. de la norm. es $\dfrac{Xy}{b^2} - \dfrac{Yx}{a^2} + xy\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right) = 0$

$$S_t = \frac{x}{1}(a^2 - x^2), \qquad S_n = \frac{b^2}{a^2}x \qquad (e^2 = a^2 - b^2)$$

$$T = \frac{1}{ax}\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2x^2)}, \qquad N = \frac{b}{a^2}\sqrt{a^4 - e^2x^2}$$

2. Idem para la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

La ec. de la $tg.$ es $\dfrac{Xx}{a^2} - \dfrac{Yy}{b^2} - 1 = 0$

La ec. de la norm. es $\dfrac{Xy}{b^2} + \dfrac{Yx}{a^2} - xy\left(\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}\right) = 0$

$$S_t = \frac{1}{x}(x^2 - a^2), \qquad S_n = x + \frac{b^2x}{a^2}, \qquad (e^2 = a^2 + b^2)$$

$$T = \frac{1}{ax}\sqrt{(x^2 - a^2)(e^2x^2 - a^4)}, \qquad N = \frac{b}{a^2}\sqrt{e^2x^2 - a^4}$$

3. Idem para la parábola $y^2 = 2px$

*ec* tg: $yY = p\,(x + X)$ , *ec* norm. $Y - y = -\frac{y}{p}(X - x)$

$S_t = 2x$ , $S_n = p$ ; $T = \sqrt{2x\,(2x + p)}$ , $N = \sqrt{p\,(2x + p)}$

4. Idem para la logarítmica $y = a \log \frac{x}{m}$ . $\left(\frac{dy}{dx} = \frac{a}{x}\right)$

$$Y = y = \frac{a}{x}(X - x), \quad Y - y = -\frac{x}{a}(X - x)$$

$$S_t = -x l \frac{x}{m}, \qquad S_n = \frac{ya}{x} = \frac{a^2 l \frac{x}{m}}{x}$$

5. Dada la curva $y = 2x^3 - x + 4$ hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal en el punto (2, 5)

*Solución* $Y - 5 = 9\,(X - 2)$ ; $Y - 6 = -\frac{1}{9}(X - 2)$

6. Para qué curva es la sub-normal constante é igual á *a* ?

*Solución* $yy' = a$ , $y\,dy = a\,dx$ ; $\frac{y^2}{2} = ax + c$ ; $y^2 = 2ax + c$

7. Para que curva es la sub-tangente constante é igual á *a* ?

*Solución* : $y = e^{ax}$.

8. Calcular para la elipse $x = a \cos \varphi$ , $y = b \operatorname{sen} \varphi$ la sub-tangente, la sub-normal y las longitudes de la tangente y de la normal.

$$S_t = a \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\cos \varphi}, \qquad S_n = \frac{b^2}{a} \cos \varphi$$

$$T = \operatorname{tg} \varphi \sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi}, \qquad N = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2 \cos^2 \varphi}$$

9. Idem para la espiral logarítmica $r = ae^{m\theta}$

*Solución* : $\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{m}$ , $S_t = \frac{r}{m}$ , $S_n = mr$ ,

$$T = r\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}, \qquad N = r\sqrt{1+m^2}.$$

10. *Hallar la ecuación de la tangente á la curva*

$$y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

*Solución:* La ecuación de la tangente es

$$y - y_0 = \left(\operatorname{sen}\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0}\cos\frac{1}{x_0}\right)(x - x_0)$$

Se obtendría el mismo resultado por coordenadas homogéneas, siendo las derivadas

$$f_1 = -\operatorname{sen}\frac{z_0}{x_0} + \frac{z_0}{x_0}\cos\frac{z_0}{x_0}, \qquad f_2 = 1, \quad f_3 = -\cos\frac{z_0}{x_0}.$$

11. *Hallar la tangente de*

$$(x^2+y^2)\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} + mx\sqrt{x^2+y^2} - ay = 0$$

*Solución:* Haciendo homogénea la ecuación, resulta

$$f_1 = 2x_0 \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0} - y_0 + m\frac{2x_0^2+y_0^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}.$$

$$f_2 = 2y_0 \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0} + x_0 + \frac{m x_0 y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} - a z_0 \quad f_3 = -ay_0$$

12. *Hallar la envolvente de una recta de longitud constante que se apoya sobre dos rectas rectangulares.* Tenemos

$$bx + ay = ab \ (1) \qquad a^2 + b^2 = l^2 \qquad (2)$$

$$\begin{array}{ll} y - b + (x-a)\,b' = 0 & \left|\begin{array}{cc} y-b & x-a \\ a & b \end{array}\right| = 0, \\ a + bb' = 0 & \end{array}$$

$$ax - by = -b^2 + a^2 \qquad (3)$$

De (1) y (3) resulta $(a^2+b^2)\,x=a^3$ ó $l^2x=a^3$,

$(a^2+b^2)\,y=-b^3$ ó $l^2y=-b^3$,

y de la (2) resulta $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=l^{\frac{2}{3}}$.

13. *Hallar la sub-tangente de la curva cuya ecuación es*

$$x=e^{\frac{x-y}{2}}\,; \qquad \textit{Solución}\ S_t=\frac{x^2}{x-y}$$

14. Un ángulo constante A gira alrededor de su vértice fijo A ; sus lados cortan á una recta fija PQ en dos puntos B y C. Hallar la envolvente del círculo circunscrito al triángulo ABC.

*Solución*: Sea $a$ la perpendicular del punto A sobre PQ. Si consideramos esta perpendicular como eje de las $x$, el origen en A y el eje de las $y$ paralelo á PQ, la ecuación de la envolvente es

$$(x^2+y^2)\,(x^2+y^2)-\frac{4\,ax}{\text{sen}^2\text{A}}+\frac{4a^2}{\text{sen}^2\text{A}}=0\,.$$

Está formada por un punto y una circunferencia.

Por cada punto P de una curva se trazan paralelas á los ejes de coordenadas, y se unen por una recta los puntos en que estas paralelas cortan á los ejes. Hallar la envolvente de esta recta.

*Solución:* Sean $(\alpha\,,\ \beta)$ las coordenadas del punto P y $f(\alpha\,,\ \beta)=0$ la ecuación de la curva. La ecuación de la envolvente resulta de la eliminación de $\alpha$ y $\beta$ entre las ecuaciones.

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1\,,\quad \frac{x}{\alpha^2}\,\frac{\partial f}{\partial\beta}-\frac{y}{\beta^2}\,\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0\,,\quad f(\alpha\,,\ \beta)=0$$

Si se toman sucesivamente por $f(\alpha\,,\ \beta)=0$ una recta $\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=1$, una parábola $\beta^2=2p\alpha$ y una hipérbola $\alpha\beta=c^2:4$, se hallará

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}+\frac{y^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}=1\,,\qquad y^2=-8px\,,\qquad xy=\frac{c^2}{16}\,.$$

# CAPÍTULO II

## Cuestiones que dependen de un orden infinitesimal superior al primero

### § 1.º LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA

**15.** DEFINICIÓN—Se llama *longitud* de un arco de curva al límite del perímetro de un polígono inscrito en este arco, cuyos lados decrecen indefinidamente, mientras que su número aumenta indefinidamente.

Para que esta definición, que permite comparar una recta con una curva sea aceptable, es necesario demostrar que la longitud límite del polígono inscrito *existe*, y que no depende de la ley según la que sus lados tienden hacia cero.

Sean $x_0$, $y_0$ y X, Y las coordenadas extremas del arco de curva; y tomemos, entre los extremos, $n-1$ puntos de división $(x_1, y_1)$, ..... $(x_{n-1}, y_{n-1})$. Uniendo dichos puntos, se obtendrá un polígono, y la longitud de sus lados estará expresada por

$$\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2} \quad \text{ó} \quad \sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}.$$

La longitud del perímetro será

$$s=\sum_{i=0}^{i=n-1}\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2} \quad \text{ó} \quad s=\Sigma \Delta x_i \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \quad (1)$$

Supondremos $\frac{dy}{dx}=y'$ creciente de $y'_0$ hasta Y'.

Sea $f(x)$ la ordenada del punto correspondiente á la abscisa $x$. Se tendrá, llamando $\theta$ á un número comprendido entre 0 y 1,

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=f'(x_i+\theta \Delta x_i),$$

y por consiguiente $s = \Sigma \Delta x_i \sqrt{1 + [f'(x_i + \theta \Delta x_i)^2]}$.

Pero si sobre la ordenada correspondiente á la abscisa $x_i$ se toma una longitud igual á $\sqrt{1 + [f'(x_i)]^2}$, el lugar de los extremos de las rectas así obtenidas será cierta curva GH expresada por la ecuación

$$\eta = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}; \qquad (3)$$

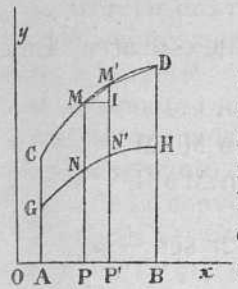


Fig. 8.ª

y la expresión (2) de $s$ será la expresión de cierta área, comprendida entre la suma de las áreas de los rectángulos de base $\Delta x$, inscritos y circunscritos á la curva (3). Pero las sumas de los rectángulos inscritos y circunscritos tienen un mismo límite, que es el área comprendida entre el eje de las $x$, las ordenadas $y_0$, Y y la curva (3), puesto que la diferencia de las mismas es igual á $\Sigma \Delta x \Delta y$, es decir, menor que $\Sigma M \Delta x$, expresando M el máximo de $\Delta y$ que tiende hacia cero, ó que $M(X - x)$, que tiende tambien hacia cero; luego la expresión (2) de $s$ tiene un límite finito. El teorema será tambien cierto cuando $y'$ sea decreciente ó alternativamente creciente ó decreciente, siempre que estas alternativas no sean en número infinito.

Podemos ahora enunciar el siguiente:

TEOREMA.—*La diferencial* ds *de la longitud del arco de una curva cuyas abscisa y ordenada son* x *é* y, *está dada por la fórmula*

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad \text{ó} \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

En efecto, hallándose representada la longitud $s$ de un arco, á partir de un orígen O, por el área de la curva cuya ecuación es

$$\eta = \sqrt{1 + [f'(x)]^2};$$

si se da á la abscisa $x$ el incremento $dx$, el área de la curva

toma un incremento comprendido entre dos rectángulos de la misma base $dx$ y cuyas alturas son $\eta$ y $\eta + \Delta\eta$. Se puede pues tomar por incremento del área $\eta\, dx$, que será tambien su diferencial, y que es también la del arco $s$; luego

$$ds = \eta\, dx \qquad \text{ó} \qquad ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

**16.** DIFERENCIAL DE UN ARCO DE CURVA EN COORDENADAS POLARES.

Sea CM $= s$ y MM′ $= \Delta s$ el incremento de este arco. En el triángulo M′MI, se tiene MM′I

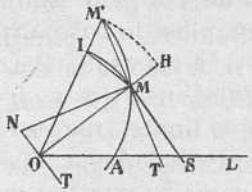


Fig. 9.ª

$$\frac{MM'}{MI} = \frac{\text{sen } MIM'}{\text{sen } MM'I}$$

y, por ser $MI = 2r \text{ sen } \frac{1}{2}\Delta\theta$,

se tendrá

$$\frac{MM'}{\text{arc } MM'} = \frac{2r \text{ sen } \frac{1}{2}\Delta\theta}{\Delta s} \cdot \frac{\text{sen } MIM'}{\text{sen } MM'I};$$

y, pasando al límite

$$1 = r\frac{d\theta}{ds}\frac{1}{\text{sen } \mu}, \qquad \text{de donde} \qquad ds = \frac{r\, d\theta}{\text{sen } \mu};$$

luego

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

deduciéndose también, en virtud de las fórmulas obtenidas (p. 48).

$$\text{sen } \mu = r\frac{d\theta}{ds}, \qquad \cos \mu = \frac{dr}{ds}$$

Se obtiene el mismo resultado por un cambio de coordenadas. Así, haciendo $x = r \cos\theta$ é $y = r \text{ sen } \theta$, será

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$= \sqrt{(dr \cos\theta - rd\theta \text{ sen } \theta)^2 + (dr \text{ sen } \theta + rd\theta \cos\theta)^2}$$

ó finalmente $$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\, d\theta^2}$$

**17.** CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. — Se dice que una curva es *cóncava* con respecto á una recta dada, en uno de sus puntos, cuando á partir de este punto, sus ramas principian á estar comprendidas en el ángulo formado por la recta dada y la tangente á la curva en el punto que se considera. Cuando, por el contrario, las dos ramas comienzan por hallarse fuera de este ángulo, se dice que la curva es *convexa* en este punto con respecto á la recta.

Si se toma la recta por eje de las $x$, en el caso de la concavidad, la ordenada de la curva debe ser menor que la de la tangente en el punto considerado; y lo contrario se verificará en el caso de la convexidad.

TEOREMA. — *Una curva será cóncava ó convexa en un punto, según que la derivada segunda, en dicho punto, sea negativa ó positiva.*

En efecto en el punto, M $(x', y')$, tenemos que

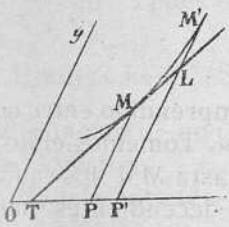


Fig. 10

$$M'P' = y + \frac{dy}{dx}\,h + \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{h^2}{2!} + R$$

y $$P'L = y + h\,\frac{dy}{dx}$$

son las ordenadas de la curva y de la tangente en los puntos correspondientes á la abscisa $x + h$; luego

$$M'L = M'L' - P'L = \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{h^2}{2!} + R\,.$$

El signo de la diferencia de ordenadas depende del signo de $\frac{d^2y}{dx^2}$. De manera que si $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, las ordenadas de la curva serán mayores que las de la tangente; y si $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, serán menores las de aquélla que las de ésta.

*Observación.*—Puede suceder que $\frac{d^2y}{dx^2}$ se anula cambiando de signo; de manera que la curva de cóncava pasará á ser convexa ó inversamente, hallándose la curva á distinto lado de la tangente. Entonces se dice que el punto M es un *punto de inflexión.*

## § 2.º Diferencial de una área de curva plana

**18.** Diferencial de un sector. — Ya se ha visto (tomo II, pág. 37) que designándose por $u$ el área ACMP, se tiene

$$\Delta u > y\,\Delta x\,, \qquad \Delta u < (y + \Delta y)\,\Delta x$$

$$y < \frac{\Delta u}{\Delta x} < y + \Delta y$$

Pasando al límite $\frac{du}{dx} = y\,,$ ó $du = y dx\,.$

Y cuando los ejes de coordenadas forman entre sí un ángulo $\theta$,

$$du = y\,dx \operatorname{sen} \theta$$

Representamos por $u$ un sector POM, comprendido entre dos radios vectores OP y OM. Sea MOM′ $= \Delta u$. Tomemos el arco MM′ bastante pequeño para que, desde M hasta MM′ los radios vectores sean constantemente crecientes ó decendientes, para fijar las ideas, por ejemplo, crecientes (fig. 2.ª)

Describamos desde el punto M como centro, los arcos de círculo MI y M′K terminados en los radios vectores OM $= r$ y OM′ $= r'$. Se tendrá

$$\text{OMI} < \Delta u < \text{OM'K}\,,$$

y por ser $\text{OMI} = \frac{1}{2} r^2\,\Delta\theta$ y $\text{OM'K'} = \frac{1}{2} r'\Delta\theta\,,$

$$\tfrac{1}{2} r^2 \Delta\theta < \Delta u < \tfrac{1}{2} r'^2\,\Delta\theta \quad \text{ó} \quad \tfrac{1}{2} r^2 < \frac{\Delta u}{\Delta\theta} < \tfrac{1}{2} r'^2\,,$$

Pero en el límite $r'$ se hace igual á $r$ ; luego tendremos que

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2 \qquad \text{ó} \qquad du = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta .$$

Este cálculo conduce á una consecuencia útil. Se ha obtenido

$$\text{tg OMT} = \frac{xdy - ydx}{xdy + ydx} \qquad \text{y} \qquad \text{tg OMT} = r \frac{d\theta}{dr} .$$

Se tendrá pues, que $\dfrac{xdy - ydx}{xdx + ydy} = \dfrac{r^2 d\theta}{rdr}$ .

Pero por ser $x^2 + y^2 = r^2$ se tiene $xdx + ydy = rdr$ ;

luego $$xdy - ydx = r^2 d\theta$$

Además $\frac{1}{2} r^2 \, d\theta$ es la diferencial del sector LOM ; luego esta diferencial es también igual á $\frac{1}{2} (xdy - ydx)$ .

También se deduce este resultado de

$$\frac{y}{x} = \text{tg } \theta \text{ , pues } \frac{xdy - ydx}{x^2} = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} , \qquad x^2 = r^2 \cos^2 \theta \quad \text{etc.}$$

EJEMPLOS.—1.° Sea $y^2 = 2px$

la ecuación de una parábola referida á su eje y á la tangente en el vértice.

Representando por $u$ el área OMP , se tiene

$$du = ydx = \sqrt{2px}\, dx = \sqrt{2p}\, x^{\frac{1}{2}} dx.$$

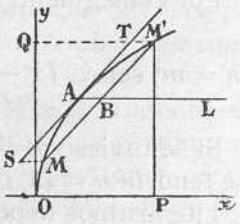


Figura 11

Pero

$$x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} d \, . \, x^{\frac{3}{2}} ;$$

luego

$$du = \frac{2}{3} \sqrt{2p}\, dx^{\frac{3}{2}} = d \left( \frac{2}{3} \sqrt{2p} \, . \, x^{\frac{3}{2}} \right) + C ;$$

Y pasando de las diferenciales á las integrales, será

$$u = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\, x^{\frac{3}{2}} + C ;$$

Pero $u = 0$, cuando $x = 0$; luego $C = 0$

y finalmente $$u = \frac{2}{3}\sqrt{2p.x}.\, x = \frac{2}{3}\, xy$$

2.º Sea $xy = m^2$ la ecuación de una hipérbola referida á sus asíntotas.

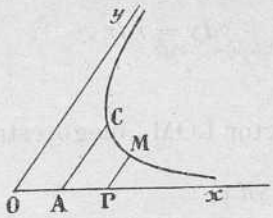


Fig. 12

Llamando $u$ al área del segmento ACMP, se tendrá:

$$du = y \operatorname{sen} \theta\, dx = m^2 \operatorname{sen} \theta \frac{dx}{x}$$

$$= m^2 \operatorname{sen} \theta\, d.\log x ;$$

luego $u$ y $m^2 \operatorname{sen} \theta . \log x$ solo pueden diferir en una constante, y será

$$u = m^2 \operatorname{sen} \theta . \log x + C$$

Además, haciendo $x = OA = m$, se tendrá

$$u = 0 \quad \text{ó} \quad 0 = m^2 \operatorname{sen} \theta . \log m + C ;$$

luego el valor de la constante será $C = -m^2 \operatorname{sen} \theta . \log m$

Por consiguiente

$$u = m^2 \operatorname{sen} \theta . lx - m^2 \operatorname{sen} \theta . lm = m^2 \operatorname{sen} \theta\, l\left(\frac{x}{m}\right)$$

Si se tuviese $m = 1$ y $\theta = 90°$, la hipérbola sería equilátera, y se tendría $u = lx$, es decir, que las áreas consideradas serían los logaritmos neperianos de las abscisas correspondientes.

§ 3.º CONTACTOS DE DIVERSOS ÓRDENES, CURVAS OSCULATRICES.

**19.** ORDENES DE CONTACTO.— Dadas dos curvas que tienen

un punto común M, si una secante común NN′ las encuentra en los puntos N y N′, próximos al punto M′; pero formando con las tangentes en M y M′ ángulos finitos, las distancias MN, MN′ y NN′ serán, en general, de igual orden, porque los ángulos del triángulo MNN′ serán finitos, y sus senos también, de igual modo que sus razones MN : MN′ : NN′.

Pero si el ángulo NMN′ es infinitamente pequeño, ó lo que es igual, si las curvas son tangentes en M, los ángulos N y N′ son todavía finitos y MN′ son de igual orden, siendo NN′ de orden superior, porque se tiene (fig. 13).

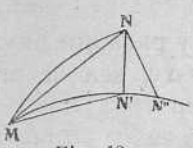


Fig. 13

$$\frac{MN}{\text{sen } N'} = \frac{MN'}{\text{sen } N} = \frac{NN'}{\text{sen } M},$$

y siendo N y N′ finitos y M infinitamente pequeño, es preciso que NN′ sea de orden superior.

El orden de NN′ es independiente de la orientación de la secante; porque si se considera otra secante NN″, en el triángulo NN′N″ la relación de NN′ á NN″ es la de los senos de los ángulos opuestos que, por hipótesis permanecen finitos.

Diremos pués que: *Dos curvas que tienen un punto* M *común, tienen en este punto un contacto de orden* n, *cuando el segmento de la secante, trazada en la proximidad de* M, *interceptado entre las dos curvas, es de orden* $n+1$, *suponiéndose que la posición límite de la secante no es la de una tangente en* M *á una de las curvas,* y recíprocamente: *si se puede hallar en dos curvas que tienen un punto común* M *dos puntos* N y $N_1$ *infinitamente próximos tales, que su distancia* $NN_1$ *sea de orden* $n+1$, *con relación á* MN, *las dos curvas tendrán un contacto de orden* n.

Por ejemplo, la distancia de un punto M′ á la tangente en el punto M infinitamente próximo, es infinitamente pequeño de 2.° orden, si se toma como infinitamente pequeño principal la distancia de los dos puntos de la curva, como se vé por la relación.

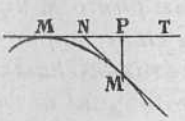


Fig. 14

$$M'P = MM' \text{ sen } M'MP$$

Para obtener las condiciones de contacto de orden $n$, consideremos las ordenadas $y$ é $y_1$ que corresponden á la misma abscisa en las dos curvas. En el punto M se tiene $y = y_1$. Suponiendo que el eje de las $y$ no es paralelo á la tangente en M, podremos considerar una secante paralela á dicho eje, trazada en la proximidad de M, la cual cortará á las curvas en puntos cuyas coordenadas son

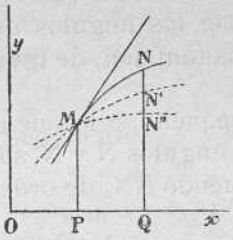


Fig. 15

$$(x + \Delta x, y + \Delta y) \quad \text{y} \quad (x + \Delta x, y_1 + \Delta y_1).$$

La magnitud de esta secante será $\Delta y - \Delta y_1$; y para que haya un contacto de orden $n$, será preciso que $\Delta y - \Delta y_1$ sea de orden $n$. Pero (t I., 79, *observación*).

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2!}d^2y + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}d^ny + \ldots\ldots$$

$$\Delta y_1 = dy_1 + \frac{1}{2!}d^2y_1 + \ldots\ldots + \frac{1}{n!}d^ny_1 + \ldots\ldots;$$

luego

$$\Delta y - \Delta y_1 = dy - dy_1 + \frac{1}{2!}(d^2y - d^2y_1) + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}(d^ny - d^ny_1) + \ldots\ldots;$$

y para que $\Delta y - \Delta y_1$ sea de orden $n + 1$, es necesario que

$$dy = dy_1, \qquad d^2y = d^2y_1, \qquad \ldots\ldots, d^ny = d^ny_1 \quad ; \text{luego}$$

TEOREMA I.—*Para que dos curvas tengan en un punto* M *un contacto de orden* n, *es necesario y suficiente que en dicho punto las diferenciales y derivadas de sus diversos órdenes hasta el* n$^{simo}$, *sean iguales.*

Para expresar que dos curvas cuyas ecuaciones son

$$f(x, y) = 0, \qquad F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

tienen un contacto de orden $n$, bastará escribir que son iguales los valores de $y$, $y'$, $y''$, ..... , $y^n$ sacados de las ecuaciones propuestas y de sus derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} = 0 , \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{d^2 f}{\partial y^2} + y'' \frac{\partial f}{\partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + y'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + y'' \frac{\partial f}{\partial y} = 0 ,$$

.....

es decir: para que las curvas (1) tengan un contacto de orden $n$ en $(x, y)$, es necesario que en este punto las derivadas de $f$ y F sean proporcionales hasta el orden $n$, inclusive.

REGLA.—*Para expresar que dos curvas tienen un contacto de orden* n, *se diferenciará la ecuación de una de estas curvas, y se supondrá que las diferenciales que figuran en el resultado se sacan de la ecuación de la otra curva.*

. EJEMPLO.—Sea expresar que la elipse

$$x = a \cos t , \qquad y = b \operatorname{sen} t$$

tiene un contacto de primer orden con la recta

$$y = mx + n .$$

Se escribirá desde luego $b \operatorname{sen} t = ma \cos t + n$,

expresando que las dos líneas se encuentran. Diferenciando enseguida, se tendrá

$$b \cos t = - ma \operatorname{sen} t.$$

Las dos curvas tendrán pues, la misma $dx$ y $dy$. Por tanto, serán tangentes.

Esto se reduce á diferenciar $y = mx + n$, después de haber sustituído $x$ é $y$ por sus valores sacados de la ecuación de la elipse.

TEOREMA II.—*Si dos curvas variables*

$$y = \varphi(x), \qquad y = \psi(x)$$

*se cortan en* n + 1 *puntos que llegan á confundirse en uno solo* M, *tienen en este punto un contacto de orden* n.

En efecto, llamando $x$, $y$ las coordenadas de M, las abscisas de los puntos de intersección que se confunden en el límite con M, se pueden representar por $x + h_1$, $x + h_2$, ....., $x + h_{n+1}$; y entonces la diferencia $\varphi(x+h) - \psi(x+h)$ de las dos ordenadas de las dos curvas correspondientes á la abscisa $x+h$, se anula para $h = h_1$, $h_2$, ....., $h_{n+1}$; por consiguiente, podemos escribir (t. I, 26, *cor* 2.º):

$$\varphi(x+h) - \psi(x+h) =$$

$$= (h - h_1)(h - h_2) \ldots\ldots (h - h_{n+1})$$

$$\frac{\varphi^{n+1}(x+\mathrm{H}) - \psi^{n+1}(x+\mathrm{H})}{1.\,2.\,3. \ldots\ldots (n-1)}$$

expresando H una media entre $h$, $h_1$, ....., $h_{n+1}$.

Si se hace tender $h_1$, $h_2$, ....., $h_{n+1}$ hacia cero, esta fórmula se reduce á

$$\varphi(x+x) - \psi(x-h)$$

$$= h^{n+1} \frac{\varphi^{n+1}(x+\mathrm{H}) - \psi^{n+1}(x+\mathrm{H})}{1.\,2.\,3. \ldots\ldots (n+1)}$$

que es de orden $n+1$ cuando $h$ es infinitamente pequeño principal. Las curvas $\varphi$ y $\psi$ tienen pues un contacto de orden $n$, cuando los $n+1$ puntos considerados se confunden en uno.

Si $n$ es par, será $n+1$ impar, y entonces $h^{n+1}$, y por consiguiente QN — QN′ cambiará de signo con $h$, la curva que á la izquierda del punto de contacto estaba debajo á la derecha, estará encima; de manera que se atraviesan las dos curvas.

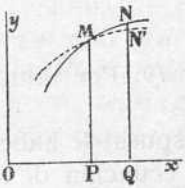


Fig. 16

Si $n$ es impar $n+1$ será par; y haciendo $h$ suficientemente pequeño, QN — QN′ no cambiará de signo; las curvas no se atraviesan:

Luego: *Cuando dos curvas tienen entre sí un contacto de orden* IMPAR, *la una de ellas comprende á la otra; y dos curvas se atraviesan mutuamente en el punto de contacto, cuando tienen un contacto de orden* PAR.

DEFINICIÓN. – Cuando, atendido al número de parámetros variables, dos curvas tienen en un punto el contacto de orden más elevado posible, se dice que son *osculatrices*.

Cuando para ciertos puntos una curva tiene un contacto más elevado que en otros puntos se dice que hay *sobreosculación*.

Por ejemplo, el círculo, que por depender de tres constantes, tiene un contacto superior ú osculación de segundo orden, puede tener un contacto de tercer orden con una elipse en los vértices de ésta, donde es sobreosculador.

**20.** RECTA OSCULATRIZ. — Propongámonos determinar los coeficientes de la ecuación de la recta

$$y = ax + b\,, \qquad (1)$$

para que sea osculatriz de una curva dada.

La ordenada de la recta y de la curva deben ser una sola para un mismo valor de $x$, así como sus derivadas primeras. Pero diferenciando, se obtiene.

$$dy = a\,dx\,, \qquad (2)$$

debiendo verificarse simultáneamente las ecuaciones (1) y (2), cuando á la $y$ de la recta se haya sustituído la de la curva. Suponiendo que se haga esta sustitución, tendremos

$$a = \frac{dy}{dx}\,, \qquad b = y - x\frac{dy}{dx}\,.$$

La ecuación de la recta osculatriz será

$$Y = X\frac{dy}{dx} + y - x\frac{dy}{dx}\,,$$

siendo X é Y las coordenadas generales. Esta ecuación es la de la tangente, como era de esperar.

Busquemos para qué puntos hay *sobreosculación*. Diferenciando nuevamente, resulta

$$d^2y = 0\,. \qquad (3)$$

La eliminación de $a$ y $b$ entre las ecuaciones (1), (2) y (3) conducirá á la relación que debe existir entre $x$ é $y$ para que haya sobreosculación. El resultado de esta eliminación es la misma ecuación (3).

Así, en los puntos en que la tangente pasa á ser sobreosculatriz, se tiene $d^2y$. Estos puntos se llaman *puntos de inflexión*.

De otro modo. Si tomamos la tangente en el punto de inflexión por eje de las $x$ y la normal por eje de las $y$, la ecuación de la curva será de la forma

$$y = \varphi(x),$$

ó por la fórmula de Mac-Laurin

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$$

Para $x = 0$, se tiene $y = 0$, en virtud del sistema de coordenados adoptado; luego $a = 0$ para $x = 0$. Ademas $\frac{dy}{dx}$ es cero por la misma razón; luego $b = 0$; y por ser el contacto de segundo orden, la distancia de un punto á la tangente, en la proximidad del origen, debe ser de tercer orden; luego el término de $x^2$ debe desaparecer, y tendremos

$$y = dx^3 + ex^4 + \ldots.;$$

$y$ cambia de signo con $x$ para valores muy pequeños de $x$; luego el eje de las $x$ corta y es tangente á la curva en el punto de inflexión.

En ciertas curvas existen puntos en que la tangente tiene un contacto de 3.°, de 4.°, este orden. Si hay contacto de tercer orden, la tangente no corta á la curva. El punto de inflexión existe; pero no es aparente. La ecuación de la curva es entonces de la forma

$$y = ex^4 + fe^5 + \ldots.$$

Ejemplo.—La curva $y = a + x^{\frac{5}{3}}$ para $x = 0$, $y = a$ tiene un punto de inflexión para el que $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$.

**21.** HESSIANNA.—Sea la ecuación de la curva bajo la forma homogénea

$$f(x, y, z) = 0 . \qquad (1)$$

Designemos para abreviar, por

$$f_1 , f_2 , f_3 , f_{11} , f_{12} , \ldots\ldots f_{13}, f_{22}, f_{23}, f_{33}$$

las derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x} , \frac{\partial f}{\partial y} , \frac{\partial f}{\partial z} , \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} , \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} , \ldots\ldots \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} , \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} , \frac{\partial z^2}{\partial^2 f} .$$

Los puntos de inflexión se obtienen escribiendo $d^2y = 0$.

Por consiguiente, diferenciando (1) dos veces, escribiremos el término en $d^2y$ que es nulo, y tendremos:

$$f_1 dx + f_2 dy = 0 ,$$

$$f_{11} dx^2 + 2f_{12} dx dx + f_{22} dy^2 = 0 ;$$

y eliminando $x$ é $y$, resulta:

$$f_{11} f_2^2 + 2f_{12} f_1 f_2 + f_{22} f_1^2 = 0 . \qquad (2)$$

Esta ecuación, juntamente con la (1), determinará los puntos de inflexión.

Sin embargo, la ecuación (1) puede verificarse sin que exista punto de inflexión, si $f_1 = 0$ y $f_2 = 0$; pero entonces dicha ecuación determina ciertos puntos singulares de que se tratará más adelante.

La ecuación (2) puede escribirse bajo la forma

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_1 \\ f_{21} & f_{22} & f_2 \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Si $m$ es el grado de $f$, tendremos

$$\left.\begin{aligned} (m-1) f_1 &= f_{11} x + f_{12} y + f_{13} z , \\ (m-1) f_2 &= f_{21} x + f_{22} y + f_{23} z , \\ 0 = mf &= f_1 x + f_2 y + f_3 z , \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Multipliquemos la primera columna de (3) por $-x$, la segunda por $-y$, y la tercera por $(m-1)$. Sumemos enseguida con estos productos las sumas de los anteriores, respectivamente; y resultará

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_1 & f_2 & -xf_1 - yf_2 \end{vmatrix} = 0;$$

y en virtud de la tercera de las ecuaciones (4), se obtiene :

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = 0, \qquad (5)$$

ecuación que juntamente con la (1) determina los puntos de inflexión.

Si $f$ es algebráica de grado $m$, la ecuación (5) representará una curva de grado $3(m-2)$ que se llama la *Hessianna* de $f=0$, de manera que el número $i$ de lospuntos de inflexión es

$$i = 3m(m-2).$$

**22.** Círculo osculador. — Puesto que la ecuación general del círculo contiene tres constantes arbitrarias, el círculo osculador será el que tenga con la curva un contacto de segundo órden. Sean $\xi$ y $\eta$ las coordenadas del centro y $\rho$ el radio; podemos escribir bajo la forma

$$(x-\xi)^2 + (y'-\eta)^2 = \rho^2 \qquad (1)$$

la ecuación del círculo desconocido. Derivando dos veces, se obtienen inmediatamente las ecuaciones

$$x - \xi + (y'-\eta)\frac{dy'}{dx} = 0, \qquad (2)$$

$$1 + \frac{dy'^2}{dx^2} + (y'-\eta)\frac{d^2y'}{dx^2} = 0. \qquad (3)$$

Las tres ecuaciones (1), (2) y (3) determinan el radio y el centro del círculo osculador.

Pero se deben verificar las ecuaciones de condición

$$y' = y, \qquad \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dx^2}$$

Por consiguiente, sustituyendo en las ecuaciones (1), (2) y (3) los valores de la ordenada y sus dos derivadas, deducidos de la ecuación de la curva dada, se tendrá para determinar $\xi$, $\eta$ y $\rho$ el sistema de ecuaciones

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \rho^2, \tag{4}$$

$$(x-\xi) + (y-\eta)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{5}$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{5}$$

siendo $x$ é $y$ las coordenadas del punto de contacto.

De estas ecuaciones resulta sucesivamente que

$$\eta - y = \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad \xi - x = -\frac{\frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$\rho^2 = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^3}{\frac{dy^2}{dx^2}}, \qquad \rho = \pm\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dy^2}{dx^2}}$$

Siendo el numerador de esta expresión positivo, será preciso tomar el signo + ó − según que $\frac{d^2y}{dx^2}$ sea positivo ó negativo, para obtener el valor absoluto de $\rho$.

La ecuación (6) manifiesta $\eta - y$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ son siempre de igual signo; de manera que el centro del círculo osculador se halla siempre al lado de la concavidad de la curva.

Por tener la curva y el círculo osculador la misma tangente, el centro del círculo osculador estará en la normal á la curva en el punto $(x, y)$, lo que también resulta de la ecuación (5) que puede escribirse bajo la forma

$$\frac{y-\eta}{x-\xi}\,\frac{dy}{dx}=-1\,,$$

que indica la perpendicularidad de la recta que une el punto de contacto y el centro del círculo osculador con la tangente, en el punto de contacto.

El círculo osculador tiene con la curva un contacto de segundo orden; luego es de orden par.

Por consiguiente, atraviesa á la curva, excepto en ciertos puntos particulares cuyo orden de contacto es superior. En este caso, si el contacto es de orden impar, la curva y la tangente se hallarán al mismo lado de la tangente común.

EJEMPLO.—Sea la ecuación

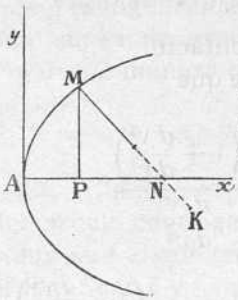


Fig. 17

$$y^2=2px+qx^2 \qquad (1)$$

que representa una cónica referida á uno de sus ejes y á la tangente en el vértice izquierdo. Tenemos

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p+qx}{y}\,,\qquad y\,\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=q$$

y eliminando $\frac{dy}{dx}$,

$$y\,\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{p^2+2pqx+q^2x^2}{y^2}=q;$$

y en virtud de la ecuación (1), se tiene $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{p^2}{y^3}$

Sustituyendo en la fórmula del radio $\rho$, se tiene

$$\rho=\frac{y^3\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

El numerador es el cubo de la normal MN, pues

$$MN^2 = n^2 = y^2 + y^2 \frac{dy^2}{dx^2}, \qquad n = y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}};$$

luego $$y^3\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{y} \quad \rho = \frac{n^3}{p^2}$$

Así: *En todo punto de una cónica, el radio del círculo osculador es igual al cubo de la normal dividido por el cuadrado del semi-parámetro.*

**23.** PARÁBOLAS OSCULATRICES.—Se designan con el nombre de parábolas de orden $n$ las curvas comprendidas en la ecuación

$$y = a + bx_1 + cx_1^2 + \ldots\ldots + px_1^n$$

que contiene $n+1$ parámetros arbitrarios $a, b, \ldots\ldots, p$.

Esta curva puede tener un contacto de orden $n$ con otra curva $y = f(x)$ en un punto dado, pudiéndose determinar los parámetros de un modo muy sencillo.

Desarrollemos $y_1 = \varphi(x+h)$ según la fórmula de Taylor, observando que las derivadas de orden superior á $n$ son nulas, y tendremos

$$f_1(X+h) = f_1(X) + h f_1'(X) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} f_1^n(X);$$

pero las ecuaciones de osculación

$$f(x) = f_1(x), \qquad f'(x) = f'_1(x), \ldots\ldots, \qquad f^n(x) = f_1^n(x)$$

dan los valores de $f_1(x)$, $f'_1(x)$, ..... por medio de los de la curva dada $f(x)$, $f'(x)$; ..... y sustituyendo $h$ por $X - x$, tendremos

$$y_1 = f(x) + (X-x)f'(x) + \ldots\ldots + \frac{(X-x)^n}{n!} f^n(X),$$

que es la ecuación de la parábola osculatriz á la curva $y = f(x)$.

## § 4.º Curvatura de las curvas planas

**24.** Definiciones.—La curvatura de un arco convexo es el ángulo que formán entre sí las direcciones del primero y último elementos del mismo, es decir, el ángulo de las tangentes extremas. Expresa la cantidad en que la curva se ha desviado sucesivamente de la recta en la extensión del arco. Si este ángulo variase proporcionalmente al arco, se tendría la curvatura, por la unidad de longitud, dividiendo la de un arco cualquiera por la longitud del arco.

Pero si en una curva cualquiera, se divide dicho ángulo por la longitud del arco correspondiente, se tendrá tan solo su curvatura media, referida á la unidad de longitud, es decir; la de un arco igual á la unidad, en el caso de la proporcionalidad.

Siendo en la circunferencia de círculo, proporcional el ángulo de las tangentes extremas á la longitud del arco, la curvatura de un arco cualquiera, se obtendrá multiplicando la de un arco igual á la unidad por la longitud de este arco.

Esto sentado, si á partir de un punto cualquiera de una curva, se toma un arco arbitrario, su curvatura media variará á medida que este arco disminuya indefinidamente, y tenderá hacia un límite que se llama la *curvatura de la línea* en el punto que se considera. Este límite es la curvatura de un arco infinitamente pequeño referida á la unidad de longitud.

Si consideramos en una curva cualquiera un arco infinitamente pequeño, el producto de la curvatura, en uno de sus extremos, por la longitud de éste, será la curvatura en menos de una cantidad infinitamente pequeña de orden superior, puesto que la relación de la curvatura del arco á ésta difiere en una cantidad infinitamente pequeña del límite que hemos llamado curvatura en un punto; y al hallar la curvatura de un arco finito de una curva cualquiera, se procederá como si se tratase de una circunferencia, siempre que se divida dicho arco en partes infinitamente pequeñas, y se tome, para cada una de ellas, por curvatura de la unidad de longitud, la curvatura en uno cualquiera de sus puntos.

Teniendo la circunferencia una curvatura constante, es natural tomarla como término de comparación y dar á conocer la

curvatura de una línea en uno de sus puntos, dándose el radio de un círculo cuya curvatura es la misma que la de la línea. Dicho círculo se llama *círculo de curvatura* y su radio, *radio de curvatura*.

La curvatura en una circunferencia es tanto mayor cuanto más pequeño es su radio, y se expresará por $\frac{1}{R}$ la medida de su curvatura.

Sean MT y M'T' las dos tangentes extremas en una circunferencia de radio R y $\omega$ su ángulo.

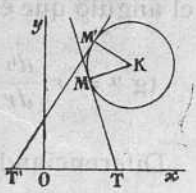


Fig. 18

Se tendrá $\text{arc } MM' = R\omega, \quad \frac{1}{R} = \frac{\omega}{\text{arc } MM'}$

Si ahora consideramos una curva cualquiera EMM'F, y haciendo $CM = s$, $MM' = \Delta s$,

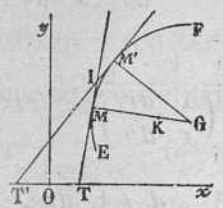


Fig. 19

$$\tau = \angle MTx, \quad \tau' = \angle M'T'x,$$

la curvatura en el punto M estará expresada por la relación

$$\lim \frac{\Delta \tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\tau}{ds} \quad \text{ó} \quad \rho = \frac{ds}{d\tau}$$

designando por $\rho$ el radio de curvatura del círculo que tiene la misma curvatura que la curva considerada en el punto M.

Se llama *ángulo de contingencia* al ángulo $d\tau$ formado por las tangentes en los extremos de un arco infinitamente pequeño siendo $\tau$ el ángulo que forma con el eje de las $x$ la tangente trazada á la curva en el punto $(x, y)$; y podemos decir que: *la curvatura de una curva en un punto es igual al ángulo de contingencia dividido por la diferencial del arco.*

**25.** TEOREMA.—*El radio de curvatura es igual al radio del círculo osculador.*

En efecto

$$ds = dx\left(\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\right), \quad d\tau = d\left(\text{arc tg}\,\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$\frac{ds}{d\tau} = \rho = \frac{\left(\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\right)\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{d\,\frac{dy}{dx} : dx} \quad \text{ó} \quad \rho = \frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{3:2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

**26.** RADIO DE CURVATURA EN COORDENADAS POLARES.—Sea $\mu$ el ángulo que la tangente en M forma con el radio vector y $\theta$ el ángulo que éste forma con el eje de las $x$. Tendremos que

$$\text{tg}\,\mu = r\,\frac{d\theta}{dr}\ ; \text{ pero } \mu = \tau - \theta\ ; \quad \text{luego } \cot(\tau-\theta) = \frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}$$

Diferenciando esta fórmula, resulta

$$\frac{d\theta - d\tau}{\text{sen}^2(\tau-\theta)} = d\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right), \quad \frac{d\tau}{d\theta} = 1 - \text{sen}^2(\tau-\theta)\,\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right)$$

pero la ecuación (1) da $\quad \text{sen}^2(\tau-\theta) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$;

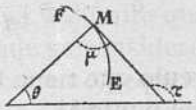



Fig. 20

luego $\quad \dfrac{1+\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right)}{1+\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$

Además, tenemos que $\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = r\sqrt{\frac{dr}{r^2} + d\theta^2}$

ó $\quad \dfrac{ds}{d\theta} = r\left[1+\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$;

y dividiendo por (2): $\quad \rho = \dfrac{ds}{d\tau} = \dfrac{r^2 + \left(\frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\,\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\,\frac{d^2r}{d\theta^2}}$

**27.** TRANSFORMACIONES. — 1.ª Cuando $x$ é $y$ se hallan ex-

presadas en función de otra variable independiente sea cualquiera, no designada, tendremos la expresión

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y\,dx - d^2x\,dy}.$$

2.ª Si tomamos el arco por variable independiente, reduciéndose la última fórmula á la siguiente

$$\frac{1}{R^2} = \frac{(d^2y\,dx - d^2x\,dy)^2}{(dx^2 + dy^2)^3};$$

en virtud de $ds^2 = dx^2 + dy^2$, resulta $\frac{1}{R^2} = \frac{(d^2y\,dx - d^2x\,dy)^2}{ds^3}$

Pero tenemos idénticamente:

$$(d^2y\,dx - d^2x\,dy)^2 = (d^2x^2 + d^2y^2)(dx^2 + dy^2) - (dx\,d^2x + dy\,d^2y)^2$$

que se reduce, teniendo presente que, $d\,x\,d^2x + dy\,d^2y = 0$

á $$(d^2y\,dx - d^2x\,dy)^2 = (d^2x^2 + d^2y^2)ds^2;$$

y de la fórmula (1) resulta

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2$$

Las coordenadas $\xi$ y $\eta$ del centro de curvatura pueden escribirse así:

$$\xi = x - R\frac{dy}{ds}, \qquad \eta = y + R\frac{dx}{ds}$$

Las derivadas $\frac{dx^2}{ds^2}$ y $\frac{d^2y}{ds^2}$ pueden expresarse en función de R. Para ello combinaremos la ecuación (3) con

$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{dy}{ds} = 0$$

que se obtiene diferenciando $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1$.

Se obtiene entonces $\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{R}\frac{dy}{ds}$, $\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{R}\frac{dx}{ds}$;

y siendo $\varphi$ el ángulo que forma la tangente con el eje de las $x$,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{R}\operatorname{sen}\varphi, \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{R}\cos\varphi.$$

**28.** TEOREMAS RESPECTO Á ORDENES INFINITESIMALES.—1.º *La diferencia entre un arco infinitamente pequeño y su cuerda es del mismo orden que el cubo del arco.* En efecto, hallándose comprendido el arco entre la cuerda y la suma de las tangentes extremas, difiere de la una ó la otra menos que éstas difieren entre sí. Pero los ángulos de las tangentes con la cuerda son menores que los de las tangentes entre sí, que son del mismo orden infinitesimal que el arco.

Tenemos pues un triángulo con un lado infinitamente pequeño y los ángulos adyacentes del mismo orden que aquél, por lo menos; luego (t. I, 11. *f*) la diferencia entre dicho lado y la suma de los otros dos, es por lo menos del mismo orden que el cubo del lado, y con más razón la diferencia entre el arco y la cuerda.

**29.** TEOREMA.—*La diferencia entre un arco infinitamente pequeño y la tangente trazada por uno de sus extremos y terminada en la ordenada trazada por el otro extremo, es del orden del cuadrado del arco.*

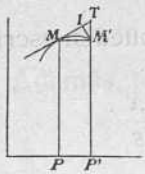


Fig. 21

Sean el arco MM' y MT su tangente terminada en la ordenada P'M'. Desde luego vemos que el segmento M'T es de segundo orden, porque

$$\frac{M'T}{MM'} = \frac{\operatorname{sen} M}{\operatorname{sen} T}, \text{ de donde } M'T = \frac{MM' \operatorname{sen} M}{\operatorname{sen} T}$$

Pero el ángulo M es por lo menos del mismo orden que el arco ó la cuerda MM' y T es finito; luego: *el segmento* M'T *de una secante cualquiera que forma un ángulo finito con la tangente, es del orden del cuadrado de* MM', ó del arco propuesto.

Si ahora bajamos la perpendicular M'I á MT, MI diferirá de la hipotenusa MM' en un infinitamente pequeño del orden del cubo de MM' por lo menos (t. I, 11 *c*). Además IT es del orden del cuadrado de MM' porque IT = M'T cos T.

Y siendo IT la diferencia de MT y MI, es la diferencia entre MT y el arco MM', despreciando un infinitamente pequeño del cubo de MM'; luego esta diferencia es del orden del cuadrado del arco.

**30.** TEOREMA.—*La distancia de un punto de una curva á la tangente en un punto infinitamente próximo es igual, salvo términos de tercer orden, al cuadrado del arco dividido por el doble del radio de curvatura.*

En efecto, siendo la ecuación de la tangente

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),$$

la distancia $p$ del punto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ á esta tangente es

$$p = \pm \frac{dx\,\Delta y - dy\,\Delta x}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \pm \frac{dx\,\Delta y - \Delta x dy}{ds}$$

pero

$$\Delta y = dy + \frac{1}{2}d^2y + \frac{1}{6}d^3y + \ldots, \quad \Delta x = dx + \frac{1}{2}d^2 + \frac{1}{6}d^3x + \ldots$$

luego, despreciando los términos de tercer orden,

$$p = \pm \frac{1:2\,(dxd^2y - d^2ydx)}{ds} = \pm \frac{1}{2}\frac{d^2ydx - d^2xdy}{ds^3}ds^2,$$

y, en fin, $$p = \frac{ds^2}{2R}$$

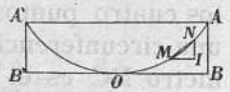


Fig. 21 bis

EJEMPLO.—Sea la parábola $y = \frac{x^2}{2p}$

Tenemos $$y' = \frac{x}{p}, \; y'' = \frac{1}{p}, \quad R = \frac{(p^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

La normal N es $N = y\sqrt{1 + y'^2} = \frac{x^2}{2p^2}\sqrt{p^2 + x^2}$.

Cambiando $y$ en $y + \frac{p}{2}$ la ecuación propuesta será

$$y = \frac{x^2 + p^2}{2p}$$

La expresión de R no cambia, pero la de N se reduce á

$$(x^2 + p^2)^{3:2} \qquad \text{y se tendrá} \qquad R = 2N .$$

Así, en la parábola, el radio de curvatura es doble de la normal, contada entre el punto de contacto y la directriz.

## § 5.º Evolutas y evolventes.

**31.** Definición.—Las coordenadas $\xi$ y $\eta$ del centro de curvatura correspondiente al punto M de la curva CM están determinadas por las ecuaciones

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0 ,$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 ,$$

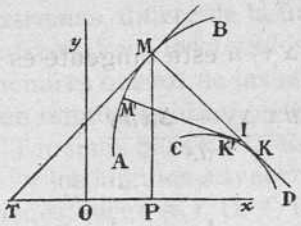


Fig. 22

Los centros de curvatura K , $K_1$ , forman una nueva curva FF′ que se llama la *evoluta* de la curva CM, y esta se llama la *evolvente* de FF′

**32.** Teorema.—*El centro de curvatura es el límite del punto de intersección de dos normales infinitamente próximas.*

En efecto, siendo MT y M′N dos tangentes infinitamente próximas y C la intersección de las dos normales en M y M′ los cuatro puntos M, N, M′, C están en una circunferencia; y el límite de su diámetro NC es el mismo que el de MC ó M′C.

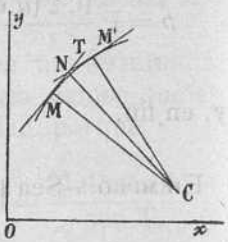


Fig. 23

El arco de círculo comprendido entre M y M′ difiere de su cuerda, y por consiguiente del arco MM′, en una cantidad infinitamente pequeña con respecto al mismo; luego se le podrá sustituir por éste, sin que resulte error en los límites de las relaciones.

Pero el ángulo inscrito MCM′ es igual al arco de circunferencia interceptado, dividido por el diámetro y es igual á TNM′; luego

$$\frac{\text{TNM}'}{\text{arc MNM}'} = \frac{1}{\text{NC}} .$$

Sustituyendo el arco de circunferencia MNM' por el arco MM' de la curva, se tendrá, pasando á los límites:

$$\lim \frac{TNM'}{MM'} = \frac{1}{\lim NC} = \frac{1}{\lim MC};$$

pero siendo $\lim \frac{TNM'}{MM'}$ la curvatura en M, es igual á la unidad dividida por el radio de curvatura.

Vemos por el teorema demostrado que: *la evoluta de una curva, es la envolvente de sus normales*, de lo que resulta inmediatamente la primera propiedad característica de las evolutas, es decir, que:

*Las normales á la evolvente son tangentes á la evoluta.*

Este teorema se deduce inmediatamente de las ecuaciones (1) y (2).

En efecto, tomando $x$ por variable independiente, si diferenciamos (1), en la que $y$, $\frac{dy}{dx}$, $\xi$ y $\eta$ son funciones de $x$, se tendrá

$$dx - d\xi + (dy - d\eta)\frac{dy}{dx} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

$$dx\left[1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2}\right] - d\xi - d\eta\frac{dy}{dx} = 0;$$

y, en virtud de (2),

$$d\xi + d\eta\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{dx}{dy}.$$

**33.** TEOREMA.—*La diferencia entre dos radios de curvatura* MK *y* $M_1K_1$ *es igual al arco* $K_1K$ *de la evoluta, comprendido entre los dos centros de curvatura correspondientes* (fig. 22)

En efecto, diferenciando la ecuación

$$\rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

en la que $y$, $\xi$, $\eta$ y $\rho$ con funciones de $x$, se tiene

$$\rho\, d\rho = (x - \xi)(dx - d\xi) + (y - \eta)(dy - d\eta)$$

$$\rho d\rho = dx\left[x-\xi+(y-\eta)\frac{dy}{dx}\right]-(x-\xi)\,d\xi-(y-n)\,d\eta\,,$$

que se reduce, en virtud de (1), á

$$\rho d\rho = -(x-\xi)\,d\xi-(y-\eta)\,d\eta$$

y dividiendo por $\rho\sigma$, y designando con $\sigma$ el arco FX, se tiene

$$\frac{d\rho}{d\sigma}=\frac{\xi-x}{\rho}\frac{d\xi}{d\sigma}+\frac{n-y}{\rho}\frac{d\eta}{d\sigma}\,,$$

Pero el segundo miembro representa el coseno del ángulo que la recta MK forma con la tangente á la evoluta en el punto X, y como este ángulo es nulo, su coseno es igual á la unidad, y se tiene $d\rho = d\sigma$.

De esta ecuación resulta $\rho = \sigma + C$ é igualmente $\rho = \sigma_1 + C$.

Si imaginamos parte de un hilo arrollado en FK, hallándose la otra parte del mismo tendida en la dirección de la tangente $K_1\ M_1$ terminando en $M_1$; si desarrollamos este hilo, teniéndolo siempre tendido, su extremo describirá la envolvente, y cada uno de sus puntos describirá otra envolvente. De manera que á una evoluta corresponden infinitas evolventes.

**34.** REGLA.—*Para obtener la evoluta de una curva, se eliminará* x *é* y *entre la ecuación de esta curva y las ecuaciones que se obtienen derivando dos veces la ecuación del círculo de curvatura ú osculador.*

*Ejemplos.*—Sea la parábola $y^2 = 2px$.— Hallar el radio del círculo osculador y la ecuación de la evoluta

$$\text{Tenemos}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{p}{y}\,,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{p^2}{y^3}\,,\qquad \rho=\frac{(y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}$$

Para hallar la ecuación de la evoluta, sustituiremos los valores obtenidos de $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$ en

$$x-\xi+(y-\eta)\frac{dy}{dx}=0\,,\qquad 1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2}=0\,,$$

y tendremos

$$x-\xi+(y-\eta)\frac{p}{y}=0\,,\qquad 1+\frac{p^2}{y^2}=(y-\eta)\frac{p^2}{y^3}=0\,.$$

Para eliminar $x$ é $y$, deduciremos de la última ecuación

$$1+\frac{p^2}{y^2}-\frac{p^2}{y^2}+\frac{p^2\eta}{y^3}=0 \qquad \text{de donde} \qquad \eta=-\frac{y^3}{p^2}\,.$$

Sustituyendo en la primera el valor de $\eta$, resultará,

$$x-\xi+p+\frac{y^2}{p}=0\,,\qquad \text{de donde} \qquad \xi-p=3x\,.$$

$$y^3=-p^2\eta\,,\quad x=\frac{1}{3}(\xi-p)\,,\quad y^2=2px\,.$$

$$y^6=p^3\eta\,,\quad y^6=(2px)^3=\left[\frac{2}{3}p(\xi-p)\right]^3.$$

Transportando el eje de ordenadas paralelamente á sí mismo hasta el punto O tal, que sea AO $=p$, la ecuación se simplifica, reduciéndose á la parábola *semi-cúbica*

$$\eta^2=\frac{8}{27p}\xi'^3 \quad \text{ó} \quad \eta=\pm\sqrt{\frac{8}{27\,p}}\,\xi^{\frac{3}{2}}$$

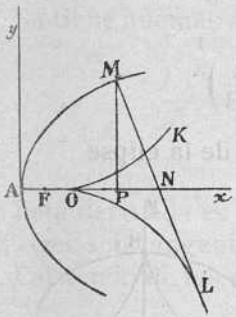


Fig. 24

*Ejemplo.*— 2.° Sea la elipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$

Tenemos

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}\,,\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}\,,$$

$$\rho=\frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2y^3}}=\frac{(b^4x^2+a^4y^3)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}$$

Para obtener la ecuación de la evoluta, haciendo las mismas

operaciones que en el problema anterior con los valores de

$$\frac{dy}{dx} \text{ y } \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \text{tendremos} \qquad \frac{dy}{dx} \text{ y } \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$a^4y^2 + b^4x^2y - a^2b^4(y - \eta) = 0$$

$$y - \eta = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)y}{a^2b^4}$$

$$= \frac{a^4y^2 + b^2(a^2b^2 - a^2y^2)}{a^2b^4} \text{ y} = \frac{(a^2 - b^2)y^2 + b^4}{b^4} y ;$$

haciendo $a^2 - b^2 = c^2$, resulta

$$y - \eta = \frac{(b^4 + c^2y^2)y}{b^4} = y + \frac{c^2y^3}{b^4} ; \qquad \eta = -\frac{c^2y^3}{b^4} .$$

Permutando en esta ecuación $x$ é $y$, $a$ y $b$, lo que cambia $c^2$ en $-c^2$, se tendrá

$$\xi = \frac{c^2x^3}{a^4} ;$$

luego si se escribe, para abreviar, $\frac{c^2}{a} = A$, $\frac{c^2}{b} = B$, se tendrá

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad \frac{y}{b} = -\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{1}{3}} .$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación de la elipse

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 ,$$

resultará $\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1 .$

curva simétrica respecto á los ejes.

Para $\eta = 0$, se tiene $\xi = \pm A = \pm \frac{c^2}{a}$,

lo que dá los puntos F y F'.

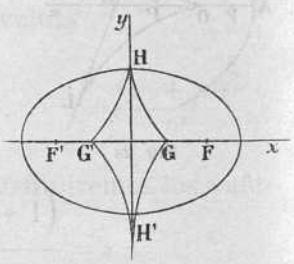


Fig. 25

De igual modo se obtendrán las intersecciones H y H′ con el eje de las $y$.

Diferenciando dos veces la ecuación de la evoluta á la elipse, tendremos

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{d\xi}{A}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{d\eta}{B}=0\,,$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{d\xi^2}{A^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{d\eta^2}{B^2}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{d^2\eta}{B}=0\,,$$

deduciéndose

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=\frac{\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{1}{A^2}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{1}{B^2}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{3\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{B}}$$

Pero $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ es de igual signo que el denominador, porque el numerador es positivo; luego la derivada segunda tiene el mismo signo que $\eta$, y la curva vuelve su convexidad hacia el eje de las $x$.

Se tiene además

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\left(\frac{c}{A}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{A}}{\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{B}}=-\left(\frac{A\eta}{B\xi}\right)^{+\frac{1}{3}}\frac{B}{A}$$

Esta derivada es nula para $\eta=0$ é infinita para $\xi=0$; luego los ejes son tangentes á la evoluta en los puntos G y G′ H y H′,

Partiendo de las ecuaciones de la elipse

$$x=a\cos\varphi\,,\qquad y=b\,\mathrm{sen}\,\varphi\,;$$

la ecuación de la normal será

$$by\cos\varphi-ax\,\mathrm{sen}\,\varphi+c^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi=0\,.$$

Diferenciándola y eliminado $\varphi$ entre esta ecuación y su deri-

vada, multiplicándolas con este objeto, respectivamente por *sen* $\varphi$ y *cos* $\varphi$, hallaremos

$$ax = -c^2 \operatorname{sen}^3\varphi, \qquad by = c^2 \cos^3\varphi,$$

que conducirán á $\quad (ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$

la cual escrita en forma racional será

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x^2y^2 = 0$$

EJEMPLO 3.°—Para la hipérbola, tendremos

$$\rho = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}, \qquad \left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Pero si partimos de las ecuaciones

$$x = a\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}, \qquad y = b\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2},$$

llegaremos á

$$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

La evoluta de la hipérbola equilátera es

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

ó $\qquad (x^2 - y^2 - c^2)^3 - 27\,c^2x^2y^2 = 0$

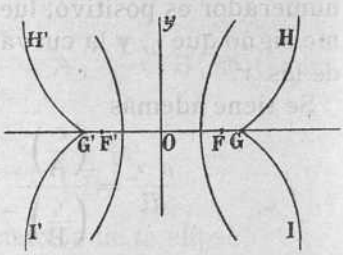


Fig. 26

PROBLEMA.—4.° *Hallar la evolvente del círculo.* — Con este objeto, busquemos el lugar de los puntos obtenidos tomando sobre las tangentes al círculo longitudes iguales al arco correspondiente, á partir de un punto fijo.

Haremos pasar el eje de las $x$ por el punto fijo, siendo el centro del círculo el origen de coordenadas.

Llamando R al radio, $R\omega$ será el arco contado desde el punto

fijo, y las coordenadas del punto correspondiente de la evolvente serán

$$x = \mathrm{R}\cos\omega + \omega\mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega\,, \qquad y = \mathrm{R}\,\mathrm{sen}\,\omega - \omega\,\mathrm{R}\cos\omega. \quad (1)$$

La podar de la evolvente del círculo, con relación al centro, tiene un radio vector igual á $\mathrm{R}\omega$, y es por tanto, una espiral de Arquímedes.

Sumando las ecuaciones (1), después de haberlas elevado al cuadrado, y haciendo $x^2 + y^2 = r^2$, se tendrá

$$\omega = \frac{\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}};$$

y resulta la ecuación siguiente:

$$r\cos\theta = \mathrm{R}\cos\frac{\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}} + \sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2}\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{r^2 - \mathrm{R}^2}}{\mathrm{R}}$$

## § 8.° Problemas

1. Forma de la curva $r\varphi = a$ respecto al polo.

*Solución:* Es cóncava respecto al polo.

2. Hallar los puntos de inflexión y la tangente de inflexión de $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$.

*Solución:* Punto de inflexión $x = 1$, $y = f(1) = 0$.

tangente de inflexión $\eta = -(\xi - 1)$ ó $\xi + \eta - 1 = 0$.

3. $$y = x^3$$

*Solución:* Punto de inflexión $x = 0$, $y = 0$. Tangente de inflexión $\eta = 0$.

4. $$xy^2 - a^2(a - x) = 0$$

*Soluc.* $\mathrm{P}\left(\frac{3a}{4}, \frac{a}{3}\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{P}\left(\frac{3a}{4}, -\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)$, $\mathrm{P}(0, \infty)$

5. $$y = \frac{a^2 x}{a^2 + x^2}$$

*Solución:* Puntos de inflexión

$$P_1(0,0),\ P_2\left(a\sqrt{3},\ \frac{a}{2}\sqrt{3}\right),\ P_3\left(-a\sqrt{3},\ -\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 1,\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\alpha_3 = -\frac{1}{8}$$

6. $$r = \frac{1}{\cos^3\varphi}$$

*Solución:* P. de infl.: $r = 8,\ \varphi = \frac{\pi}{3}$ y $r = 8,\ \varphi = \frac{5\pi}{3}$.

7. $$y = x^4 - 6x^2$$

*Solución:* $P_1(1,-5),\ P_2(-1,-5)$.

Coeficientes angulares: $\operatorname{tg}\alpha_1 = -8,\ \operatorname{tg}\alpha_2 = +8$.

8. $$y = 2x^3 - 6x^2 + 5x$$

*Solución:* P de infl. $(x = 1,\ y = 1)$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$.

9. $$y = x^3\left(x^2 - 5x + \frac{20}{3}\right) - \frac{8}{3}x$$

*Solución:* $x = 0,\ y = 0,\quad 8\xi + 3\eta = 0$

$x = 1,\ y = 0,\quad 7\xi - 3\eta - 7 = 0$

$x = 2,\ y = 0,\quad 8\xi + 3\eta - 16 = 0$

10. $$x^2y - 4x + 3y = 0$$

*Solución:* $x = 0,\ y = 0$; $x = 3,\ y = 1$; $x = -3,\ y = -1$

$$\alpha_1 = \frac{4}{3},\ \alpha_2 = -\frac{1}{6};\ \alpha_3 = = \frac{1}{6}$$

11. $$x^3 - x^2y + a^2y = 0$$

*Solución:* La curva es convexa para todos los puntos comprendidos entre $x = +a$ y $x = +\infty$, y entre $x = -a$ y $x = -\infty$,

y cóncava hácia abajo, entre $x = -a$, $x = -\infty$, $x = 0$, $x = a$. Tiene un punto de inflexión ($x = 0$, $y = 0$) y una tangente de inflexión $y = 0$.

12. $y = \operatorname{sen} x$.

*Solución:* $x = \pm n\pi$, $y = 0$; tg de *infl.* $\eta = \pm \xi$

13. Rad. de cur. de $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ en (2, 0).

*Solución:* $y' = 2$, $y'' = 6$, $\xi = \frac{1}{3}$, $\eta = \frac{5}{6}$, $\rho = \frac{5}{6}\sqrt{5}$

14. Determinar el círculo osculador de la hipérbola

$$xy - a^2 = 0$$

*Solución:* $\xi = \frac{3x^2 + y^2}{2x}$, $\eta = \frac{x^2 + 3y^2}{2y}$, $\rho = \pm \frac{(x^2 + y^2)^{3:2}}{2xy}$

15. Determinar el círculo osculador de la curva

$$x = \varphi(t) = t, \qquad y = \psi(t) = t^3$$

*Solución:* $\xi = \frac{t}{2}(1 - 9t^4)$, $\eta = \frac{1}{6t}(+15t^4)$

$$\rho = \frac{t}{6t}(1 + 9t^4)^{2:3}$$

16. Hallar el radio de curvatura de

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{b^m} = 1$$

*Solución:* $R = \frac{1}{m-1} \frac{x^{m-2} y^{m-2}}{a^m b^m} \left( \frac{x^{2m-2}}{a^{2m}} + \frac{b^{2m-2}}{b^{2m}} \right)^{\frac{3}{2}}$

17. Hallar el radio de curvatura de la podar de la curva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ con relación al origen.

*Solución:* La ecuación de la podar es $r = \frac{a}{r} \operatorname{sen} 2\vartheta$; luego

$$\rho = \frac{(a^2 - 3r^2)^{3:2}}{2a^2 - 3r^2}$$

HALLAR EL CÍRCULO OSCULADOR Y LA EVOLUTA DE LAS CURVAS SIGUIENTES:

18. $3ay^2 = x^3$ (parábola semi-cúbica).

19. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (cisoide)

20. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

21. $y = ae^{\frac{x}{a}}$ (logarítmica)

22. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (catenaria)

23. $y + (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} = 0$ (tractriz)

24. $r = ac^{\theta : m}$ (espiral logarítmica)

25. $r^2 = \cos 2\theta$ (lemniscata)

SOLUCIONES

18. $$\rho = \frac{(2a + 3x)^3}{3a^2}$$

$$\xi = -\left(x + \frac{3x^2}{2a}\right), \qquad \eta = 14\,(a + x)\left(\frac{x}{3a}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$81\,a\eta^2 = 16\left[2a \pm (a^2 - 6a\xi)^{\frac{1}{2}}\right]\left[\pm (a^2 - 6a\xi)^{\frac{1}{2}} - a\right].$$

19. $$y' = \frac{(3a - x)^{\frac{1}{2}}}{(2a - x)^{\frac{3}{2}}}, \qquad y'' = \frac{3a^2 x^{-\frac{1}{2}}}{(2a - x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\rho = \frac{a\,(8a - 3x)^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{3\,(2a - x)^2} \qquad 4096\,a^3\xi + 1152a^2\eta^2 + 27\eta^4 = 0\,.$$

20. $$\xi = x + 3\,(xy^2)^{\frac{1}{3}}, \quad \eta = y + 3\,(x^2y)^{\frac{1}{3}},$$

$$\rho^2 = 9\,(axy)^{\frac{2}{3}}, \quad \xi + \eta = \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3, \quad \xi - \eta = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3,$$

$$(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} + (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$$

21. $$\rho = \frac{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{ay} \qquad \eta = \frac{a(2\,e^{\frac{2x}{a}} + 1)}{e^{\frac{x}{a}}}, \quad \xi = x - a\left(e^{\frac{2x}{\xi}} + 1\right)$$

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{\eta \pm (\eta^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a}, \qquad \frac{x}{a} = \log \frac{\eta \pm (\eta^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a}$$

$$\xi = a \log \frac{\eta \pm (\eta^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a} - \frac{\eta^2 + 4a^2 \pm \eta\,(\eta^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{8a}$$

22. $$\rho = \frac{y^2}{a}, \qquad \eta\,a = \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

$$\xi = x - \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)$$

$$\xi = a \log \frac{\eta \pm (\eta^2 - 4a^2)^{\frac{1}{2}}}{2a} \pm \frac{\eta\,(\eta^2 - 4a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a}$$

23. $$\rho = \frac{a\,(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{y}, \qquad \eta = \frac{a^2}{y^2}$$

$$\xi = -a \log \frac{a + (a^2 - 4^2)}{y}, \qquad \eta_1 = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{a}{\xi}} + e^{-\frac{a}{\xi}}\right)$$

24. Haciendo $$\frac{m}{(1+m)^{1:2}} = n .$$

se tiene $p = nr$, $\rho = \frac{r}{n}$, $p_1 = nr_1$ (siendo $p_1$ y $r_1$ las cantidades correspondientes en la evoluta á las cantidades $p$ y $r$ de la curva)

$$r_1^2 = r^2 + \rho^2 - 2p\rho , \qquad p_1^2 = r^2 - p^2$$

Para que la espiral logarítmica sea su evoluta, basta que el extremo de $\rho$, se halle en la curva.

Se debe pues, tener al mismo tiempo

$$r = ae^{\frac{\theta}{m}}, \quad r_1 = ae^{\frac{\theta}{m} + \frac{2kn + \frac{\pi}{2}}{m}}$$

Como además $r = mr_1$, la condición buscada se reduce á

$$m = e^{-\frac{(4k+1)\pi}{2m}} \qquad \text{ó} \qquad m^m = e^{-\frac{(4k+1)\pi}{2}}$$

Es necesario y suficiente que se pueda determinar un entero $k$ que satisfaga á esta ecuación.

25. Se tiene

$$\rho = \frac{a^2}{3r} = h, \qquad \xi = \frac{2a\cos^3\theta}{3(\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \eta_1 = \frac{2a \operatorname{sen}^3\theta}{3(\cos 2\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\xi^{\frac{2}{3}} + \eta_1^{\frac{2}{3}}\right)\left(\xi^{\frac{2}{3}} - \eta_1^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2a}{3} = h.$$

$$(h^2 - \xi^2 + \eta_1^2)^3 = \xi^2\eta_1^2(4\xi^2 - 4\eta_1^2 - 3h^2)$$

# CAPÍTULO III

## Estudio cinemático de algunas curvas planas.

### § 1.º Nociones cinemáticas

**35.** Definiciones.—La *cinemática* tiene por objeto el estudio del movimiento independiente de las fuerzas. La *Geometría cinemática* tiene por objeto el estudio del movimiento independientemente de las fuerzas y del tiempo.

Emplearemos la palabra *corrimiento* (*) para un movimiento en el que no se considera la velocidad.

En Geometría se emplean las propiedades geométricas relativas á los corrimientos de las figuras, como se emplean las diferenciales en Análisis. (**)

Las líneas descritas por los puntos, se llaman *trayectorias*.

**36.** Corrimiento finito de una figura en su plano.—*Dadas dos figuras iguales en un plano tales, que se las pueda hacer coincidir por resbalamiento sobre el plano, se podrá obtener la coincidencia por una simple rotación.*

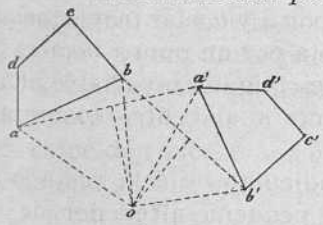


Fig. 27

Siendo iguales los cuadriláteros *abcd* y *a'b'c'd'*, supondremos que cuando coinciden los lados *ab* y *a'b'* también coinciden los cuadriláteros.

Vamos á demostrar que existe en el plano de los dos cuadriláteros un punto alrededor del cual se puede hacer girar el cuadrilátero *abcd* para que coincida con el *a'b'c'd'*.

Unamos el punto *a* con el *a'* por una recta y tracemos la perpendicular en el punto medio de la recta *bb'*. Estas dos perpendiculares se encuentran en un punto *o*.

(*) Traducción aunque no tan satisfactoria como fuera de desear de *déplacement*, que no tiene su correspondiente en castellano.

(**) *Mannheim. Cours de Géométrie Descriptive*, p. 159.

Resulta de la construcción que $ao = a'o$ y $bo = b'o$. Y se podrá hacer girar la figura alrededor de $o$ de manera que $a$ coincida con $a'$ y $b$ con $b'$, y por consiguiente los cuadriláteros.

**37.** CORRIMIENTO INFINITAMENTE PEQUEÑO DE UNA FIGURA, CENTRO INSTANTÁNEO DE ROTACIÓN.—En un corrimiento infinitamente pequeño, el punto $o$ se llama *centro instantáneo de rotación*. Las rectas tales como $aa'$, $bb'$, $cc'$, ..... son tangentes á las líneas descritas por los puntos de la figura móvil, durante su corrimiento infinitamente pequeño. Las perpendiculares levantadas á estas rectas en los puntos de contacto, son normales á las trayectorias, luego:

*Por un corrimiento infinitamente pequeño de una figura en un plano, las normales á las trayectorias de los puntos de dicha figura pasan por el mismo punto, que es el centro instantáneo de rotación;* y podemos por consiguiente decir, que: *Para una posición cualquiera de una figura plana que se mueve de una manera continua en su plana, las normales trazadas por los puntos de la figura á las trayectorias de estos puntos, pasan por el centro instantáneo de rotación.*

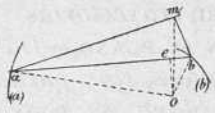


Fig. 28

Si por ejemplo la recta $ab$, de magnitud invariable, se mueve de modo que el punto $a$ permanezca en su trayectoria $(a)$ y el punto $b$ en su trayectoria $(b)$, el centro instantáneo de rotación es el punto de intersección de las normales trazadas por $a$ y $b$ á las trayectorias $(a)$ y $(b)$. La normal á la curva descrita por un punto $m$ arrastrado por el movimiento de $ab$, es decir, ligado invariablemente á $ab$, es la recta $mo$, que une el punto $m$ al centro instantáneo de rotación.

Bajemos desde el punto $o$ la perpendicular $oe$ á la recta $ab$. Después de la rotación infinitamente pequeña alrededor de $o$, el punto $e$ se mueve sobre $ab$ y queda en esta recta después del corrimiento de ésta, es pués la interseccion de $ab$ con este segmento en su posición infinitamente próxima. Pertenece pués á la curva envolvente de $ab$.

*Se determina pués, el punto en que la recta* ab *es tangente á su envolvente, proyectando sobre esta recta el centro instantáneo de rotación.*

Aplicándose este razonamiento á una curva arrastrada al

mismo tiempo que *ab*, se ve que: *El punto en que esta curva es tangente á su envolvente, es el pie de la normal trazada á la misma por el centro instantáneo de rotación.*

**38.** CORRIMIENTO CONTÍNUO DE UNA FIGURA EN SU PLANO. — Hemos visto que el corrimiento infinitamente pequeño de una figura plana en su plano es una rotación infinitamente pequeña alrededor del *centro instantáneo de rotación*. Consideremos ahora el movimiento contínuo de una figura en su plano.

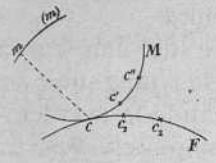


Fig. 29

Para las diversas posiciones de la figura móvil tenemos (fig. 29) en el plano fijo una serie de centros instantáneos de rotación $c, c_1, c_2, \ldots$. En el plano de la figura móvil tenemos los puntos $c', c'', c''', \ldots$ que pasan á ser sucesivamente estos centros de rotación. Los puntos $c_1\ c_1\ c_2, \ldots$ pertenecen á una curva F que se halla en el plano fijo; los puntos $c', c'', c''', \ldots$ se hallan en la curva M trazada en el plano de la figura móvil. Las dos curvas tienen común el punto $c$, que es el centro instantáneo de rotación para la posición de la figura que consideramos. *Las dos curvas* F *y* M *son tangentes entre sí en el punto* c.

En efecto, la distancia $c'c_1$ de los puntos $c$ y $c_1$, que se hallan cada uno á una distancia infinitamente pequeña del punto $c$, es infinitamente con relación á $cc'$, porque es menor que el arco descrito por el punto $c'$ al girar alrededor de $c$ en un ángulo infinitamente pequeño.

Lo que hemos dicho para el punto $c$ es cierto sucesivamente para los diferentes puntos $c', c'', c''', \ldots$ cuando coinciden con los puntos $c_1, c_2, c_3, \ldots$ Tenemos pues una curva M cuyos puntos coinciden sucesivamente con los de la curva F, que es en cada uno de sus puntos tangente á la F. La curva M rueda sobre la curva F; y vemos así que *el corrimiento contínuo de una figura en su plano, puede obtenerse considerando en el plano de la figura móvil cierta curva que rueda sobre una curva trazada en el plano fijo.*

La rodadura de una curva sobre otra, es un *movimiento epicicloidal*. Puede decirse que el *corrimiento contínuo de una figura plana en su plano es un movimiento epicicloidal.*

**39.** EVOLUTA Y EVOLVENTE. — Consideramos como curva fija una curva cualquiera y como línea móvil una recta tangente á dicha curva.

Durante la rodadura de esta tangente, cada uno de sus puntos describe una curva. Estas curvas encuentran según un ángulo recto á la tangente en cada una de sus posiciones. Son trayectorias ortogonales de las tangentes á la curva fija, y como interceptan en estas rectas segmentos iguales, son *curvas paralelas*. Todas estas curvas paralelas son las evolventes de la curva fija, que es su evoluta.

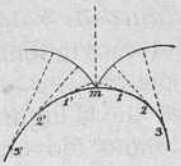


Fig. 30

Tracemos una evolvente de una curva cerrada, y consideremos las tangentes en los puntos 1, 2, 3, ..... Tomando la trayectoria ortogonal de estas tangentes, á partir del punto $m$, se tiene por evolvente una rama que se extiende al infinito. Si tomamos las tangentes que parten de 1', 2', 3', ..... á la curva, en sentido opuesto, al considerado anteriormente, tenemos otra rama á partir de $m$, que se extiende también al infinito. Tenemos pués en $m$ un punto para el cual existen dos ramas de curva, tangentes á la normal en $m$ á la curva fija. El punto $m$ es un punto de *retroceso de primera especie,* de manera que la *evolvente encuentra á la curva fija en un punto de retroceso de primera especie.*

Cuando las dos ramas de una curva son tangentes á una misma recta, y se hallan situadas á un mismo lado de ésta, se tiene un *punto de retroceso de segunda especie,* que se obtiene hallando la envolvente de una curva, que presenta un punto de inflexión.

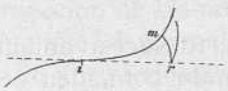


Fig. 31

Si tomamos la evolvente que parte de un punto $m$ (fig 31) de una curva que tiene un punto de inflexión $i$, tenemos á partir $m$, la trayectoria ortogonal de las tangentes cuyos puntos de contacto son todos los puntos del arco $mi$. Enseguida encontramos en $r$ á la tangente en el punto de inflexión; y á partir de este punto tenemos una rama de curva trayectoria ortogonal de las tangentes cuyos puntos de contacto se hallan en la prolongación del arco $mi$. La evolvente tiene en $r$ un punto de retroceso de segunda especie.

## § 2.° Cicloide

**40.** Definición.—La cicloide es el lugar de las posiciones

de un punto dado, M es una circunferencia que *rueda sin resbalar* sobre una recta indefinida A$x$.

Tomemos por eje de abscisas la recta A$x$, por orígen el punto A, donde se halla el punto generador en el orígen del movimiento, y por eje de las $y$ la perpendicular A$y$.

Se ve inmediatamente que la ordenada es máxima en el punto C correspondiente á la abscisa $AD = \frac{1}{2}$ circ. OH; que la curva encuentra de nuevo al eje de las $x$ en un punto A′ cuya abscisa es igual á la longitud de la circunferencia generatriz, y se ve que la parte CA′ de la curva es simétrica de AC con respecto á CD. A la izquierda de A existe otro desarrollo igual é indefinido de la curva compuesta de arcos idénticos á ACA′.

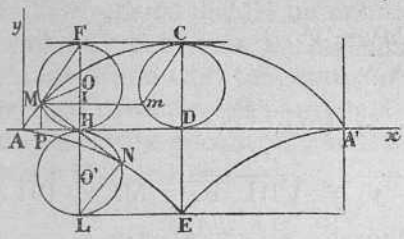


Fig. 32

Para hallar la ecuación de la curva, hagamos MP=$x$, PM=$y$, MO = $a$, MOH = $u$, y tracemos MO y MI perpendicular á GH. Tendremos

$$x = AH - PH = \text{arc MH} - MI = au - \text{sen } u = a(u - \text{sen } u)$$

$$y = OH - IO = a - a \cos u = a(1 - \cos u).$$

Para eliminar $u$, entre las dos ecuaciones obtenidas, deduciremos el valor de cos $u$, que es

$$\cos u = \frac{a - y}{a}; \text{ luego } u = \text{arc cos } \frac{a - y}{a},$$

$$\text{sen } u = \pm \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}$$

sustituyendo este valor en la expresión de $x$, resulta:

$$x = a \text{ arc cos } \frac{a - y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2}.$$

Para explicar el doble signo, observaremos que si el punto M está en AC, se tiene $u < \pi$ y sen $u > 0$.

Pero si el punto M está en CA' se tendrá $u > \pi$ y sen $u < 0$; luego el signo superior corresponde al arco AC y el inferior al CA'.

**41.** TANGENTE Y NORMAL. — Diferenciando las expresiones de $x$ é $y$, tendremos:

$$dx = adu(1 - \cos u) = ydu, \quad dy = adu \operatorname{sen} u = du\sqrt{2ay - y^2};$$

y dividiendo la segunda expresión por la primera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y}.$$

La subnormal en el punto M será $\sqrt{2ay - y^2}$.

Pero $\sqrt{2ay - y^2} = \sqrt{y(2a - y)} = \sqrt{\text{IH} \cdot \text{IG}} = \text{MI}$ ó PH;

luego MH es la normal en el punto M, y por consiguiente, MG, perpendicular á MH, es la tangente en dicho punto.

De este resultado se deduce un procedimiento muy sencillo para construir la tangente en un punto M de la cicloide.

Tracemos la circunferencia CD sobre la ordenada máxima como diámetro. Tracemos una recta $m$M paralela á A$x$. La paralela á C$m$, trazada por M, será la tangente que se pide.

La expresión de la normal en M es

$$\sqrt{y^2 + \frac{y^2 dy^2}{dx^2}} = \sqrt{y^2 + 2ay - y^2} = \sqrt{2ay};$$

pero GH $= 2a$, IH $= y$. Esta longitud es pues, media proporcional entre IH y GH, es pues la recta MH.

**42.** RADIO Y CENTRO DEL CÍRCULO OSCULADOR.—Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1};$$

luego
$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2a}{y} - 1, \quad 2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a}{y^2}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}.$$

Sustituyendo en la expresión de $\rho$, se obtiene

$$\rho^2 = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^3}{\frac{a^2}{y^4}} = \frac{8a^2y}{a^2}\ ;\ \text{luego} \qquad \rho = 2\sqrt{2ay}\ ;$$

pero $$\sqrt{2ay} = \sqrt{GH \cdot IH} = MH\ ;$$

luego el radio de curvatura es doble de MH ; y puesto que MH es la normal en M, se obtendrá el centro de curvatura, tomando en la dirección de MH un punto N tal, que MN = 2MH.

**43.** Evoluta de la cicloide. — Sea HN1 una circunferencia igual á la OM, tangente en H al eje $Ax$, encima de esta recta. Tracemos LE paralela á $Ax$ y prolonguemos el diámetro CD hasta encontrar en E á LE. Siendo iguales los arcos MH y HN, se tiene

$$\text{arc NH} = \text{AH}_1 \qquad \text{además arc HNL} = \text{AD}\ ;$$

luego $$\text{arc NL} = \text{AD} - \text{AH} = \text{DH} = \text{LE}\ .$$

La evoluta de la cicloide se engendra pués por el movimiento de un punto N situado en la circunferencia de un círculo igual al círculo OM , pero que rueda sobre una paralela LE á $Ax$, debajo de esta recta y á una distancia de ésta igual al diámetro del círculo móvil. Esta evoluta, es pues, una cicloide igual á la primera.

**44.** Longitud de un arco de cicloide.— La recta MN , doble de HN, es el radio de curvatura correspondiente al punto M de la cicloide evolvente, ó la tangente trazada por N á la cicloide ANE evoluta de la primera. Además, en el punto A, el radio de curvatura es nulo, porque la normal MH se hace nula en este punto. Luego, como un arco de evoluta es igual á la diferencia de los radios de curvaturas extremas, se tiene

$$\text{arc AN} = \text{MN} = 2\text{NH}\ .$$

Volviendo á la cicloide propuesta, se puede decir que el arco CM es igual á 2MG.

Expresemos este arco en función de las coordenadas de sus extremos.

Se tiene arc CM $= 2MG = 2\sqrt{2aMG}$
y, por ser $MQ = 2a - y$, arc MC $= 2\sqrt{4a^2 - 2ay}$.
Si se hace $y = 0$, se tendrá

$$\text{arc CA} = 4a \text{ ; luego} \qquad \text{arc ACA}' = 8a \text{ ;}$$

luego: *el arco entero de la cicloide es igual á cuatro veces el diámetro del círculo generador.*

**45.** ESPECIES DE CICLOIDES.—Se llama *trocoide* á la cicloide descrita por un punto unido al plano del círculo de radio $a$, situado á una distancia $b$ del centro. Las ecuaciones paramétricas son en este caso

$$x = au - b \operatorname{sen} u, \qquad y = a - b \cos u$$

y la ecuación reducida

$$x = a \operatorname{arc\,cos} \frac{a - y}{b} - \sqrt{b^2 - (a - y)^2}$$

Si $b > a$ el punto generador es exterior al círculo, la cicloide se llama *alargada;* se distingue de la ordinaria por tener en vez de puntos de retroceso, bucles que atraviesan á la base. Su perímetro es $> 8a$.

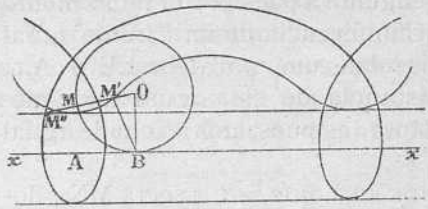
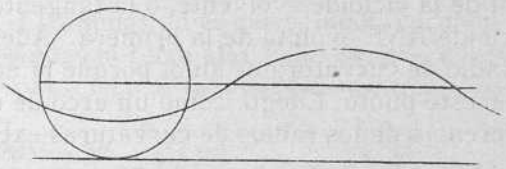


Fig. 33

Si $b < a$, la cicloide se llama *reducida*, su trazado ofrece analogía con el de la sinusoide; no tiene rotrocesos, ni admite tangentes perpendiculares al eje de las $x$. Admite puntos de inflexión. Su perímetro es $< 8a$ y $> 2\pi a$. El límite de esta cicloide es la recta paralela al eje de las $x$ á la distancia $a$ descrita por el centro del círculo móvil *(H. Brocard.* Notes de bibliog. des courbes).


Fig 34

APLICACIÓN.—En la cicloide prolongada se tiene que

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{b\,(a\cos u - b)}{(a - b\cos u)^2}$$

Desde $u = 0$ hasta $u =$ arc cos $\frac{a}{b}$ la concavidad se vuelve hacia las $y$ positivas. Para cos $u = \frac{a}{b}$ hay un punto de inflexión, y más allá se vuelve la concavidad hacia abajo.

## § 4.º Epicicloides.

**46.** Definición.—Epicicloide es la curva engendrada por un punto de una circunferencia que rueda sin resbalar sobre otra circunferencia.

Sean LL′ la curva fija y SS′ la curva móvil, M el punto de contacto para una posición cualquiera de SS′, A, la posición correspondiente del punto de SS′ (ó que está ligado invariablemente á SS′) y que describe la curva *(súplase la figura)*.

Tomemos sobre las dos curvas dos arcos infinitamente pequeños iguales MM′ y $MM_1$. Los puntos M′ y $M_1$ coincidirán cuando el punto de contacto de las dos curvas sea $M_1$, porqué según la definición de la rodadura sin resbalamiento, los arcos que separan puntos de contacto correspondientes, tomados en las dos curvas, deben ser iguales.

Para llevar el sistema móvil á la posición que entonces tendrá, se le puede hacer mover al principio de modo que todos los puntos describan rectas iguales y paralelas á $M' M_1$, lo que conducirá M′ á $M_1$. Enseguida, dejando fijo el punto en M, se hará girar el sistema alrededor de este punto, de manera que la tangente en M′ coincida con la tangente en $M_1$. En este último movimiento todas las rectas se inclinarán, con respecto á su primera dirección, un ángulo igual al de las tangentes en M′ y $M_1$, es decir, en la suma ó la diferencia de las curvaturas de los dos arcos MM′ y $MM_1$, según que estas dos curvaturas sean de sentido contrario ó de igual sentido. Si pues, trazamos AA′ igual y paralela á $M'M_1$, y desde $M_1$ como centro con un radio igual á $A'M_1$ que es el AM′, describimos un arco de círculo $A'A_1$ tal, que el ángulo $A'M_1A$ sea igual al de las tangentes en M′ y $M_1$, $A_1$ será la posición exacta de A, correspondiente

al contacto en $M_1$ ; luego $AA_1$ será la secante cuyo límite será la direccion de la tangente buscada.

Pero siendo la unidad el límite de la relación de los lados $MM'$ y $MM_1$ del triángulo rectilíneo $MM'M_1$, que comprenden un ángulo infinitamente pequeño, el tercer lado $M'M_1$ es infinitamente con respecto á los otros. Además, el ángulo de las tangentes en $M'$ y $M_1$ es generalmente de primer orden, aún cuando las curvaturas son de igual sentido. Su igual será de primer orden, y lo mismo sucederá á la recta $A'A_1$, porque $A'M_1$ tiene una longitud finita ; luego en el triángulo $AA'A_1$, el lado $AA'$ es infinitamente pequeño con relación á $A'A_1$. Por consiguiente, el ángulo $A_1$ tiene por límite cero, y la dirección de la secante $AA_1$ tiene el mismo límite que $A'A_1$. Pero esta última tiende á formar un ángulo recto en $A'$ con la recta $A'M_1$ cuya posición límite es $AM$ ; luego, por fin, el límite de la dirección $AA_1$ ó la tangente buscada, es perpendicular á $AM$.

**47.** ECUACIÓN DE LA EPICICLOIDE.—Sean $Ox$ y $Oy$ las direcciones de dos diámetros perpendiculares del círculo O de radio $a$ y un punto L de la circunferencia de radio $b$, que rodando sin resbalar sobre la primera, describe la epicicloide. Tendremos (suplánse los puntos B, G, L, I, Q), que

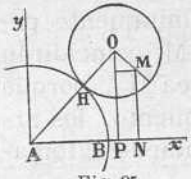


Fig. 35

$$x = OP + PQ = OQ\,, \quad y = OP - OG = LQ\,.$$

Expresando el ángulo PAO por $u$, se tiene

$$x = (a+b)\cos u + b \operatorname{sen}\left(\frac{au}{b} - 90^0 + u\right)$$

$$y = (a+b)\operatorname{sen} u - b\cos\left(\frac{au}{b} - 90 + u\right)$$

$$x = (a+b)\cos u + b\cos\frac{a+b}{b}\,u \qquad (1)$$

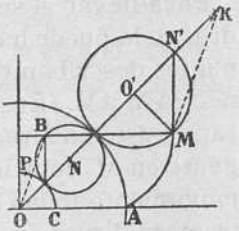


Figura 36

$$y = (a+b)\operatorname{sen} u - b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\,u\,. \qquad (2)$$

Más generalmente, si el punto que describe la curva es un punto M de OL, á una distancia $OM = h$, se tendrá

$$x = AP + IM = AN\,, \qquad y = OP - OI = IP = MN$$

ó $$x = (a+b)\cos u + h\cos\frac{a+b}{b}u\,,$$

$$y = (a+b)\operatorname{sen} u - h\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}u\,.$$

Si el círculo móvil es interior al círculo fijo, la curva engendrada se llama *hipocicloide*, y las ecuaciones correspondientes difieren de las anteriores por escribirse en vez de $a+b$, $a-b$.

**48.** TANGENTE Y NORMAL.—De las ecuaciones (1) y (2) resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b\cos u - h\cos\frac{a+b}{b}u}{b\operatorname{sen} u - h\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}u}$$

Este resultado basta para la determinación analítica de la tangente; pero no da una construcción geométrica. Para conseguir este objeto, escribamos la ecuación de la normal

$$\left[Y-(a+b)\operatorname{sen} u + h\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}u\right]\left(b\cos u - h\cos\frac{a+b}{b}u\right)$$

$$= X-(a+b)\cos u + h\cos\frac{a+b}{b}u\left]\left(b\operatorname{sen} 0 - h\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}u\right)\right.$$

Esta ecuación queda satisfecha para $Y = a\operatorname{sen} u$ y $X = a\cos u$; pero el punto cuyas coordenadas son $a\operatorname{sen} u$ y $a\cos u$ es el punto de contacto del círculo móvil y del círculo fijo, de donde resulta una construcción de la normal análoga á la de la cicloide.

**49.** NOMENCLATURA DE LAS CURVAS CICLOIDALES.

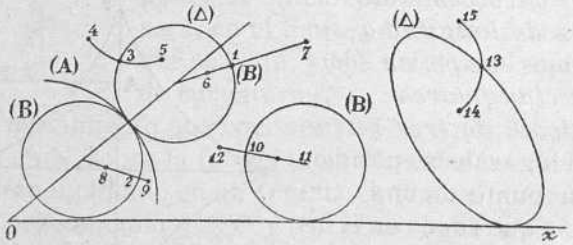



Fig 37

(A) círculo fijo de radio $a$. (B) círculo móvil de radio $b$.

(Δ) curva cualquiera que rueda sobre la circunferencia (A) ó sobre la recta OA$x$.

1, 2, ..... , 15 puntos generadores. (*Brocard*, N. d. b. d. courbes).

1. engendra la epicicloide.
2. „ „ hipocicloide.
3, 4, 5 „ „ epicicloidal, ó curva epicicloidal (los puntos 3, 5, 4 están ligados á Δ).
6, 7 „ epitrocoide (los puntos 6 y 7 unidos al círculo B)
8, 9, „ „ hipotrocoide (unidos al círculo B los puntos 8 y 9).
10. „ „ cicloide.
11. „ „ cicloide acortada (el punto 11 unido á B).
12. „ „ cicloide prolongada (el punto 12 unido á B).
13, 14 y 15 „ „ cicloidad ó curva cicloidal (13, 14, 15 unidos á Δ). (1)

**50.** CASOS PARTICULARES.

Haciendo $h = b = a$, la ecuación de la epicicloide es

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a\,[(x - a)^2 + y^2]$$

Trasladando el origen al punto B, esta ecuación se reduce á

$$r = 4a \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2},$$

y representa la epicicloide que se llama cardioide, por su forma particular (*Brocard*, obra citada).

Si en las ecuaciones precedentes se hace $b = \frac{a}{4}$, suponiendo interior el círculo móvil, se tiene

$$(a^2 - x^2 - y^2)^3 = 27a^2x^2y^2 \quad \text{ó} \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

ecuación de la *astroide* ó *hipocicloide de cuatro retrocesos, que es la envolvente de los segmentos de longitud a, cuyos extremos se apoyan sobre dos ejes rectangulares.*

*Hipocicloide de tres retrocesos* es el lugar de las posiciones de un punto de una circunferencia que rueda en el interior de otra de radio triple.

Se puede sustituir esta definición por las dos siguientes:

Dado un círculo OC de radio

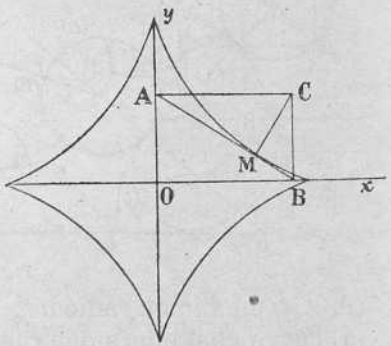


Fig. 38

*a*, la tangente $Oy$ en O y el punto A del círculo, la hipocicloide de tres retrocesos es la envolvente del lado AF del triángulo isósceles OAF, ó la envolvente de la cuerda MS que une los extremos MS de dos arcos OM y OS, de los cuales el primero es la mitad del segundo (fig. 39).

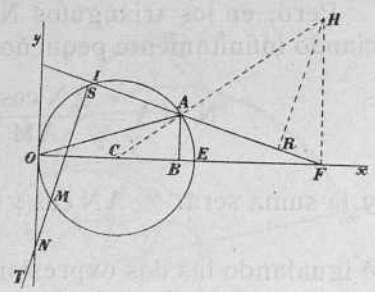


Fig. 39

Estas dos definiciones no son más que una; porque el triángulo OMN es isósceles, y el arco OI es doble del arco AE. *(Brocard* N. de B. des Courbes).

**51.** RADIO DE CURVATURA.—Dadas E'F' y EF, de las que la primera rueda sin resbalar sobre la segunda, sea A el punto de contacto de ambas, correspondiente á una posición M del punto que ligado á la curva móvil, describe la curva cuyo radio de curvatura vamos á determinar.

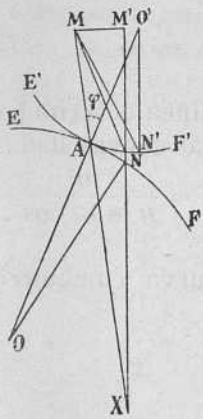


Fig. 40.

AM será la normal á la curva descrita por M. Sean $n$ su longitud AM y $\varphi$ el ángulo que forma con la normal común OO' á las dos curvas dadas.

Tomemos en estas curvas dos arcos infinitamente pequeños iguales AN y AN'. Sea M' la posición que habrá tomado M cuando N' se haya aplicado sobre N; MN' adquirirá la posición M'N y será normal en M'. El punto de intersección X de M'N y de MA será, en el límite, el centro de curvatura de que se trata, y MX será, en el límite, el radio de curvatura $\rho$.

En el movimiento que conduce N' á N, y por consiguiente, la tangente en N' sobre la tangente en N, todas las líneas del sistema se han inclinado en un ángulo igual al de las dos tangentes ó de sus perpendiculares N'O' y NO. Este ángulo es O + O', siendo su medida

$$\frac{AN}{R} + \frac{AN'}{R'} \quad \text{ó} \quad AN\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

por ser $AN = AN'$.

La recta N'M cuando llega á coincidir con M'NX, se ha inclinado un ángulo igual á N'MA + X.

Pero, en los triángulos N'MA y NAX se obtiene, despreciando infinitamente pequeños de orden superior,

$$N'MA = \frac{AN\cos\varphi}{AM}, \qquad X = \frac{AN\cos\varphi}{AX};$$

y la suma será: $$AN\cos\varphi\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho - n}\right);$$

é igualando las dos expresiones de la rotación del sistema,

será $$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{\rho - n}\right)\cos\varphi$$

$$\rho = \frac{n^2(R + R')}{n(R + R') - RR'\cos\varphi}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{n} - \frac{RR'\cos\varphi}{n^2(R + R')}, \tag{2}$$

fórmulas que dan el radio de curvatura de la línea descrita por M, en función de los radios de curvatura de las curvas dadas.

Si la línea EF es recta, se tiene $R = \infty$ y $\rho = \frac{n^2}{n - R'\cos\varphi}$, fórmula aplicable á la cicloide.

Si E'F' es una recta, siendo EF una curva cualquiera, se tiene $R' = \infty$ y la fórmula (1) se reduce á

$$\rho = \frac{n^2}{n - R\cos\varphi}.$$

Si además M está en la recta móvil, será $\varphi = \frac{\pi}{2}$ y $\rho = n$.

El centro de curvatura estaría en el punto de contacto A, y la curva descrita sería la evolvente de la curva fija.

**52.** APLICACIÓN Á LAS EPICICLOIDES.—Si las dos curvas son circunferencias, el triángulo AMB da $\cos\varphi = \frac{n}{2R'}$, y se tiene

$$\rho = \frac{2n(R + R')}{R + 2R'} = n + \frac{nR}{R + 2R'}.$$

Para obtener el centro de curvatura, basta prolongar la normal AM en $AX = \frac{nR}{R + 2R'}$.

Esta observación da un medio de obtener el centro de curvatura. Basta para ello trazar el diámetro MM′ y después la recta M′O, que encuentra á MA en el centro de curvatura X; porque siendo BM′ paralela á MA, se tiene $\frac{AX}{BM'} = \frac{AO}{OB}$ ó $\frac{AX}{n} = \frac{R}{R + 2R'}$.

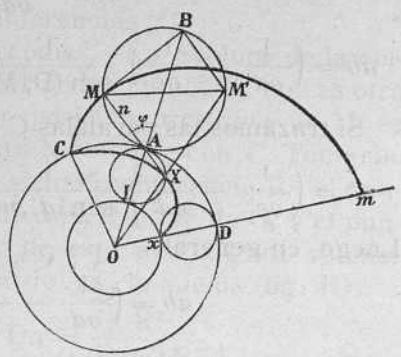


Fig. 41

Si $R = \infty$, la curva se reduce á una cicloide.

**53.** OTRA EXPRESIÓN DEL RADIO CURVATURA. TEOREMA.— *Dados un ángulo* (A, B) (fig. 43) *y un punto* o *cualquiera en su plano, se tiene, cualquiera que sea la dirección de una recta trazada por* o, $\left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc}\right) \frac{1}{\text{sen } dom} = \text{constante}$. (*)

Sean *ab* un segmento de una recta cualquiera M; *m* el polo de esta recta, A, B las polares de los puntos *a*, *b* con relación á una circunferencia *o* (fig. 42).

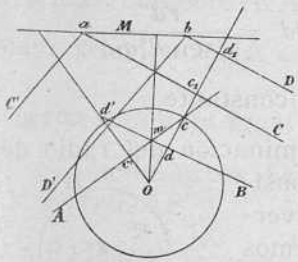


Fig. 42

Tracemos por los puntos *a*, *b* rectas paralelas cualesquiera C, D; y desde el punto *o*, bajemos una perpendicular á estas rectas, que corta á A y B en los puntos *c* y *d*, polos de C y D, y á estas en los puntos $c_1$ y $d_1$. Se tiene

$$c_1 d_1 = ab \text{ sen } (C, M) = ab \text{ sen } (D, M);$$

de donde

$$ab = \frac{c_1 d_1}{\text{sen } (D, M)}.$$

Pero

$$c_1 d_1 = od_1 - oc_1 \quad \text{y} \quad od_1 = \frac{1}{od}, \quad oc_1 = \frac{1}{oc},$$

(*) Mannheim, *Transformation des propriétés métriques des figures* p. 3.

pues el radio de la curva directriz es siempre 1; luego

$$c_1 d_1 = \frac{1}{od} - \frac{1}{oc} \quad ;$$

$$ab = \left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc}\right) \frac{1}{\text{sen (D, M)}} = \left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc}\right) \frac{1}{\text{sen } (d, m)}$$

Si trazamos las paralelas C′, D′, tendremos

$$ab = \left(\frac{1}{oc'} - \frac{1}{od'}\right) \frac{1}{\text{sen } (d', m)} = \left(\frac{1}{od'} - \frac{1}{oc'}\right) \frac{1}{\text{sen } d'om}$$

Luego, en general:

$$ab = \left(\frac{1}{od} - \frac{1}{oc}\right) \frac{1}{\text{sen } dom}$$

De esta expresión se deduce el teorema, como sigue.

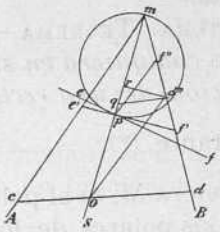


Fig. 43

Tracemos $od''$ paralela á A y $d''q$ paralela á $cd$. Tendremos entonces

$$\frac{co + od}{co} = \frac{md}{md''} = \frac{od}{qd''}$$

ó $$\frac{co + od}{co.\, od} = \frac{1}{od} + \frac{1}{oc} = \frac{od}{qd''} .$$

Siendo $rd''$ perpendicular á $om$, se tiene (fig. 43), $qd'' = \dfrac{rd''}{\text{sen } d''qm}$

y $$\left(\frac{1}{od} + \frac{1}{co}\right) \frac{1}{\text{sen } dom} = \text{constante.}$$

Apliquemos este teorema á la determinación del radio de curvatura de la epicicloide. Para ello consideraremos el ángulo $mdo$ y las dos transversales $mb$ y $co$ que pasan por $a$. Tendremos

$$\frac{1}{am} + \frac{1}{a\mu} = \left(\frac{1}{R_M} - \frac{1}{R_F}\right) \frac{1}{\text{sen } oad}$$

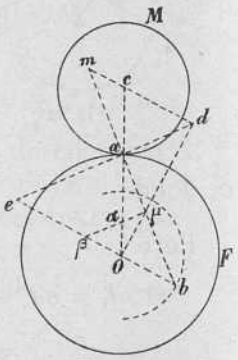


Fig. 44

Llamando $\rho$ al radio de curvatura $m\mu$ y $\varphi$ al ángulo $mac$, la última fórmula puede escribirse así:

$$\frac{1}{am} + \frac{1}{\rho - am} \left(\frac{1}{R_M} + \frac{1}{R_F}\right) \frac{1}{\cos \varphi} .$$

Esta fórmula permite determinar $\rho$, conociendo el ángulo $\varphi$ y la parte de normal *am* comprendida entre el punto generador y el de contacto de las dos circunferencias (*).

**54.** EVOLUTAS DE LAS EPICICLOIDES.—La evoluta de la epicicloide descrita por M es el lugar de los puntos X, que es otra epicicloide. En efecto, sea C la posición primitiva de M; se tiene entonces $AM = o$, y el punto X coincide con C. Tomando enseguida el arco CD igual á la semicircunferencia R', el punto M estará en *m* á su distancia máxima $R + 2R'$ de O, y el punto X á su distancia mínima $Ox$ de este punto. Para obtener ésta, haremos $n = 2R'$ en el valor de AX, lo que da (fig. 41)

$$Dx = \frac{2RR'}{R+2R'}, \qquad Ox = \frac{R^2}{R+2R'},$$

haciendo $Ox = r$, $Dx = 2r'$, resulta

$$r = \frac{R^2}{R+2R'}, \qquad r' = \frac{RR'}{R+2R'}; \quad \text{luego } r : r' : R : R'.$$

Esto sentado, describamos desde el centro *o* una circunferencia con *r* por radio, que cortará á OB en I; y sobre AI como diámetro, describamos una circunferencia cuyo radio será *r'*. Esta pasará por X, porque MA prolongada hasta esta circunferencia, tangente en A á la circunferencia O', dará una cuerda cuya relación á MA será la de los radios $\frac{r'}{R'}$ ó $\frac{R}{R+2R'}$; esta cuerda será pues igual á $\frac{nR}{R+2R'}$ ó á AX.

Siendo los arcos AX y AM semejantes, estarán en la razón de los radios *r'* y R', ó según lo que precede, en la relación de *r* á R; luego $\frac{IX}{AM'} = \frac{r}{R}$; pero $AM' = AD$, porque CD es igual á la semicircunferencia MAM';

luego $$\frac{IX}{AD} = \frac{r}{R} = \frac{Ox}{OD}, \quad IX = Ix;$$

luego el punto X está constantemente en la epicicloide descrita por un punto de la circunferencia de radio *r'* que rueda sobre la circunferencia de radio *r*, partiendo este punto de *x*.

---

(*) Mannheim. *Cours de Géométrie descriptive* (p. 180).

**55.** DOBLE GENERACIÓN DE LAS EPICICLOIDES.—1.º Sea el círculo interior al círculo fijo O, de radio AC y centro C, y M el punto generador, cuya posición primitiva era $m$. Se tendrá $AM = Am$. Por M hagamos pasar una circunferencia de radio OC y tangente á O. Bastará, para ello, trazar el radio OA′ paralelo á CM y tomar $OC' = AC = CM$. Resultará

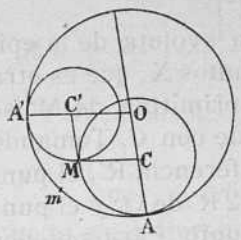


Fig. 45.

$$A'C' = OC = CM.$$

La circunferencia descrita desde el centro C′ con un radio igual á OC, pasará por M y será tangente en A′ al círculo O.

Esto sentado, se ve que los arcos A′M y B′$m$ son iguales, pues OCMC′ es un paralelógramo y $\angle A'C'M = \angle MCA = \angle A'OA$;

luego $$\frac{A'M}{C'M} = \frac{AM}{AC} = \frac{AA'}{OA} = \frac{A'M + AM}{OA};$$

luego $AA' = A'M + AM$ y $A'M = A'm$; luego M pertenece á la epicicloide descrita por el círculo C′ que rueda interiormente sobre el círculo O en sentido contrario al C.

2.º Sea el círculo generador A exterior al círculo fijo, M el punto de A que describe la epicicloide, I su posición primitiva sobre O, arc B′M = arc BI *(constrúyase la figura)*.

Tracemos por O un radio OB′ paralelo á AM.

Tomemos $OA' = AM$ y describamos una circunferencia desde A′ como centro con un radio A′B′ igual á la suma de los radios de los círculos dados. Este círculo será tangente en B′ al O; además pasará por M, porque MAOA′ es un paralelógramo, y por consiguiente $A'M = OA = A'B'$.

Siendo $\angle A = \angle A' = \angle O$, se tendrá

$$\frac{MB}{AB} = \frac{BB'}{OB} = \frac{MB'}{A'B'};$$

luego $$MB' = MB + BB' = IB + BB';$$

luego el punto M pertenece á la epicicloide descrita por un punto de la circunferencia A′ que rueda sobre O, al mismo lado que la circunferencia A.

# LIBRO SEGUNDO

## SINGULARIDADES DE LAS CURVAS PLANAS

## CAPÍTULO I

### Aplicación del Álgebra de las formas

§ 1.º FORMAS HOMOGÉNEAS, INVARIANTES, COVARIANTES, ETC.

**56.** DEFINICIONES.—Se da el nombre de *forma algebráica* á toda función algebráica homógénea, racional y entera de dos ó más variables, que será *binaria, ternaria,* etc., según que tenga dos, tres ó más variables. Se escriben estas formas abreviadamente así:

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k \qquad \Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l , \ldots .$$

*Sustitución ó transformación lineal* es la operación por la que se sustituyen, en una función, sus variables $x$, $y$, $z$,... por otras X, Y, Z,...ligadas á las primeras por las ecuaciones lineales

$$x = \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z + \ldots \quad y = \lambda_2 X + \lambda_2 Y + \ldots, \quad z = \lambda_3 X + \ldots$$

Cuando se tienen dos sistemas de variables

$$x, y, z, \ldots . \ (\alpha) \qquad \xi, \mu, \zeta, \ldots \quad (\beta)$$

y se trata de sustituirlos por los otros dos

$$X, Y, Z, \ldots \ (\alpha') \qquad X_1, Y_1, Z_1 \quad (\beta')$$

debemos distinguir dos casos:

1.º El sistema $(\alpha)$ se sustituye por el $(\alpha')$ mediante la sustitución (1)

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z \qquad y = \lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z \\ z = \lambda_3 X + \mu_3 Y + \nu_3 Z \end{array}\right\} \quad (1)$$

y el sistema ($\beta$) por el ($\beta'$) mediante la sustitución (2)

$$\left.\begin{aligned} \xi = \lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1 , \quad \eta = \lambda_2 X_1 + \mu_2 Y_1 + \nu_2 Z_1 , \\ \zeta = \lambda_3 X_1 + \mu_3 Y_1 + \nu_3 Z_1 , \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

de manera que el módulo de la sustitución sea idéntico en las dos sustituciones (1) y (2); entonces las dos sustituciones son *directas* y los sistemas de variables $x, y, z, \ldots; \xi, \eta, \zeta, \ldots$ se denominan *cogredientes*.

2.º Si permaneciendo la misma la sustitución (1), el sistema ($\beta$) se sustituye por el ($\beta'$) mediante la transformación (3):

$$\left.\begin{aligned} X_1 = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \lambda_3 \zeta \qquad Y_1 = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \mu_3 \zeta \\ Z_1 = \nu_1 \xi + \nu_2 \eta + \nu_3 \zeta \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

en la cual las nuevas variables se determinan en función de las primitivas, siendo el módulo el resultado de cambiar en el de la transformación (1) las líneas por columnas y las columnas por líneas, las dos sustituciones (1) y (3) se llaman *inversas* y los sistemas de variables $x, y, z, \ldots; \xi, \eta, \zeta, \ldots$ *contragredientes*.

El objeto de la teoría de las formas se puede expresar del modo siguiente: *Si una forma de cualquier grado y de* k *variables se transforma en otra por medio de una sustitución lineal, la nueva forma y la primitiva tienen algunas propiedades comunes, y el estudio de dichas propiedades, que no se alteran por la sustitución lineal efectuada, constituye el objeto de la teoría de las formas.*

Se llama *invariante* toda función de los coeficientes de una forma tal, que si se efectúa en ésta una sustitución lineal, la nueva función de los coeficientes de las nuevas variables es igual á la función primitiva multiplicada por una potencia del módulo de la sustitución, que es el determinante de los coeficientes de ésta. Así, por ejemplo

$$aX^2 + 2bXY + cY^2$$

se transforma por la sustitución

$$X = \lambda x + \mu y \quad , \quad Y = \lambda' x + \mu' y$$

en $a(\lambda x + \mu y)^2 + 2b(\lambda x + \mu y)(\lambda' x + \mu' y) + c(\lambda' x + \mu' y)^2$

ó en $$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$$

habiendo hecho, por brevedad,

$$a' = a\lambda^2 + 2b\lambda\lambda' + c\lambda'^2,$$
$$b' = a\lambda\mu + b(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + c\lambda'\mu',$$
$$c' = a\mu^2 + 2b\mu\mu' + c\mu'^2;$$

y se verifica que

$$a'c' - b'^2 = (ac - b^2)(\lambda\mu' - \lambda'\mu)^2.$$

En general se tendrá

$$\varphi(a, b, \ldots) = \Delta^p \varphi(a', b', \ldots),$$

representado $\Delta$ el módulo de la transformación, cuando $p = o$, se tendrá

$$\varphi(a', b', c', \ldots) = \varphi(a, b, c, \ldots).$$

Entonces $\varphi$ será un invariante *absoluto*.

Análogamente para un sistema de formas cuyos coeficientes son respectivamente

$$a, b, c, \ldots; \qquad a', b', c', \ldots; \qquad a'', b'', c'', \ldots$$

y los correspondientes de las transformadas

$$A, B, C, \ldots; \qquad A', B', C', \ldots; \qquad A'', B'', C'', \ldots$$

se tendrá

$$\varphi(A, B, \ldots, A', B', \ldots, A'', B'', \ldots) = \Delta^p \varphi(a, b, \ldots, a', b', \ldots, a'', b'', \ldots).$$

Si las funciones de los coeficientes que hemos considerado, contienen también las variables, entonces tendremos un covariante expresado por la relación análoga

$$\varphi(A, B, \ldots, X, Y, \ldots) = \Delta^p \varphi(a, b, \ldots, x, y, \ldots)$$

Si una forma $ax^n + \ldots$ se reduce á $AX^n + \ldots$ por una transformación, llamaremos *contravariante* á una función que contenga los coeficientes de la forma y las variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, transformadas por la sustitución inversa, si esta función es igual á la función correspondiente de los coeficientes y de las variables de la transformada, multiplicada por una potencia del módulo, es decir si

$$\varphi(A, B, \ldots, X_1, Y_1, \ldots) = \Delta^p \varphi(a, b, \ldots, \xi, \eta, \ldots)$$

Análogamente se definen los *covariantes mixtos* por la fórmula

$$\varphi(A, B, \ldots, X, Y, \ldots, X_1, Y_1, \ldots) = \Delta^p \varphi(a, b, \ldots, x, y, \ldots, \xi, \eta, \ldots)$$

**57.** FORMACIÓN DE VARIANTES Y DE COVARIANTES.—1.° En la imposibilidad de tratar detenidamente esta cuestión, nos bas-

tará indicar, respecto á los invariantes que: *cuando se conoce un invariante de una forma única, se puede deducir una serie de invariantes para un sistema de formas del mismo grado.* Dado el invariante

$$ac - b^2 \quad \text{de} \quad ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

y suponiendo que por una transformación lineal

$ax^2 + 2bxy + cy^2$ se reduce á $AX^2 + 2BXY + CY^2$,

$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2$ » $A'X^2 + 2B'XY + C'Y^2$;

por la misma transformación,

$$(a + ka')x^2 + 2(b + kb')xy + (c + kc')y^2$$

se reducirá á

$$(A + kA')X^2 + 2(B + kB')XY + (C + kC')Y^2.$$

Formando el invariante de esta última, tendremos

$$(A + kA')(C + kC') - (B + kB')^2$$
$$= \Delta^2[(a + ka')(c + kc') - (b + kb')^2].$$

Pero siendo $k$ arbitrario, podremos identificar los coeficientes de las mismas potencias de los dos miembros, y tendremos

$$AC - B^2 = \Delta^2(ac - b^2), \quad A'C' - B'^2 = \Delta^2(a'c' - b'^2)$$
$$AC' + A'C - 2BB' = \Delta^2(ac' + a'c - 2bb').$$

Análogamente; si se tiene un invariante de $ax^n + \ldots\ldots$, y se piden invariantes de un sistema de dos formas

$$ax^n + \ldots\ldots, \qquad a'x^n + \ldots\ldots,$$

sustituiremos en el invariante dado $a$ por $a + ka'$, $b$ por $b + kb'$ é identificaremos. Efectuando el desarrollo por la fórmula de Taylor, podremos decir que: *Si se tiene un invariante de una forma* $ax^n + \ldots\ldots$, y se efectúa sobre este invariante la operación

$$a'\frac{\partial}{\partial a} + b'\frac{\partial}{\partial b} + c'\frac{\partial}{\partial c} + \ldots\ldots,$$

se obtendrá un invariante del sistema de las dos formas

$$ax^n + \ldots\ldots \quad \text{y} \quad a'x^n + \ldots\ldots$$

Se puede repetir la operación . . . . . ; y si se efectúa la operación $a''\frac{\partial}{\partial a}+b''\frac{\partial}{\partial b}+\ldots\ldots$, se tendrá un invariante de un sistema de tres formas, y así sucesivamente.

2.° Si en una forma $u$ sustituímos $x$ por $x+kx'$, $y$ por $y+ky'$, . . . . . , debiéndose transformar $x', y', \ldots\ldots$, por la misma sustitución que $x, y, \ldots\ldots$ los coeficientes de las diversas potencias de $k$, que se pueden expresar todos por la misma fórmula simbólica,

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+\ldots\ldots\right)^p u,$$

serán el primero, segundo, . . . . . *emanante* de la forma. Cada uno es un covariante.

Ejemplo.—Se ha visto (p. 122) que si la forma binaria $ax^2+2bxy+cy^2$ tiene por transformada $AX^2+2BXY+CY^2$, resulta

$$AC-B^2=\Delta^2(ac-b^2);$$

y se concluye, considerando el segundo emanante

$$\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u$$

de una forma de grado cualquiera, que se tiene también

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}-\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X\partial Y}\right)^2=\Delta^2\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial u^2}{\partial x\partial y}\right)^2\right]\right.$$

Se conocen muchos procedimientos para la formación de invariantes y de covariantes tales, como el de las funciones simétricas, el de la diferenciación de covariantes y de contravariantes, el empleo de las ecuaciones diferenciales

$$a_0\frac{\partial I}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial I}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial I}{\partial a_3}+\ldots\ldots=0,$$

$$na_1\frac{\partial I}{\partial a_0}+(n-1)a_2\frac{\partial I}{\partial a_1}+\ldots\ldots=0,$$

siendo I un invariante; lo que no es objeto de la presente obra.

Los ejemplos más sencillos de invariantes y covariantes son el resultante de un sistema de ecuaciones, el discriminante de una forma, el Hessiano y el determinante de Jacobi ó Jacobiano, que han sido empleados en esta obra.

## § 2.° APLICACIONES Á LAS FORMAS PROYECTIVAS Y Á LAS AFINIDADES LINEALES

**58.** DEFINICIONES.—La teoría de las formas homogéneas de dos variables tiene su interpretación geométrica en la geometría de las *series de puntos* ó de *haces de rayos*. La teoría de las formas ternarias tiene su representación en la geometría plana proyectiva y la de las formas cuaternarias en la de la geometría proyectiva de tres dimensiones.

Las geometrías de la recta y del haz se desarrollan, tanto en el plano como en el espacio.

**59.** INTERPRETACIÓN DE LAS FORMAS BINARIAS.—Dados dos puntos fijos A y B, si se designa por $p$ la distancia de un punto móvil C á A y por $q$ su distancia á B, será

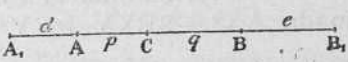


Fig. 46

$$p + q = c. \qquad (1)$$

Un punto cualquiera de la recta estará determinado por la relación $\frac{p}{q}$, y con mayor generalidad por dos números $x_1$ y $x_2$ mediante las dos ecuaciones

$$\rho x_1 = ap\,, \qquad \rho x_2 = bq$$

siendo $a$ y $b$ dos constantes arbitrarias, de modo que á cada valor de $\frac{x_1}{x_2}$ corresponde un valor único de $\frac{p}{q}$, y por consiguiente un solo punto de la recta.

Los puntos de base están determinados por las ecuaciones

$$x_1 = o\,, \qquad x_2 = o.$$

La significación de la relación de distancia $\frac{x_1}{x_2}$, en el caso general que consideramos, es idéntica, para $a = b$, á la de un parámetro $\lambda$, por el que se representan los puntos de la recta que une dos puntos $(x_0, y_0; x_1, y_1)$, mediante las ecuaciones conocidas

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1 + \lambda}\,, \qquad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1 + \lambda}\,,$$

en coordenadas cartesianas.

Análogamente, en coordenadas tangenciales $u$ y $v$, se pueden expresar las rectas de un haz referidas á dos $(u_0, v_0; u_1, v_1)$ por las ecuaciones

$$u = \frac{u_0 + \lambda u_1}{1 + \lambda}, \quad v = \frac{v_0 + \lambda v_1}{1 + \lambda};$$

y si expresamos por $r$ y $s$ las distancias de un punto cualquiera de una recta del haz á las dos rectas de base y también por $a$ y $b$ dos constantes arbitrarias, podremos expresar las coordenadas $x_0$ y $x_1$ mediante las dos ecuaciones

$$\rho x_1 = ar, \qquad \rho x_2 = bs.$$

**60.** SIGNIFICACIÓN GEOMÉTRICA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES.—Si queremos sustituir los puntos de base A y B por otros dos puntos $A_1$ y $B_1$ tomados en la misma recta, representando $A_1A$ y $BB_1$ por $d$ y por $e$, tendremos

$$\sigma y_1 = \alpha(p + d), \quad \sigma y_2 = \beta(q + e)$$

$$c\sigma y_1 = \alpha[cp + d(p + q)], \quad c\sigma y_2 = \beta[cq + e(p + q)]$$

ó $$\sigma y_1 = \alpha[cp + d(p + q)], \quad \sigma y_2 = \beta[cq + e(p + q)],$$

escribiendo $\sigma$ en vez de $\sigma c$.

Si eliminamos $p$ y $q$ entre estas ecuaciones y

$$\rho x_1 = ap, \qquad \rho x_2 = bq,$$

resulta

$$\sigma y_1 = \alpha\rho\left(\frac{c+d}{a}x_1 + \frac{d}{b}x_2\right),$$

$$\sigma y_2 = \beta\rho\left(\frac{c+e}{b}x_2 + \frac{e}{a}x_1\right),$$

$$\sigma y_1 = \alpha[b(c+d)x_1 + adx_2],$$

$$\sigma y_2 = \beta[bex_1 + a(c+e)x_2];$$

pero

$$\begin{vmatrix} b(c+d) & ad \\ be & a(c+e) \end{vmatrix} = abc(c+d+e),$$

expresión que sólo podría ser nula si $c$ ó $c + d + e$ fuesen nulos, es decir, en el caso de coincidir A con B ó $A_1$ con $B_1$, lo que no sucede; luego, *toda sustitución lineal, cuyo determinante no es nulo, es idéntica á un cambio de puntos fundamentales y de factores constantes, cuando un punto de una recta está representado por una razón entre las variables.*

Los coeficientes expresan las coordenadas de los nuevos puntos fundamentales con relación á los primitivos, puesto que, representando una ecuación lineal

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

un punto cuyas coordenadas son $a_2$ y $-a_1$; de las ecuaciones $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ de los nuevos puntos fundamentales $A_1$ y $B_1$, resulta $\frac{x'_1}{x'_2} = -\frac{ad}{b(c+d)}$, $\frac{x''_1}{x''_2} = -\frac{a(c+e)}{be}$,

designando por $x'_1$, $x'_2$ y $x''_1$, $x''_2$ las coordenadas de los nuevos puntos fundamentales.

Y en general, considerando una ecuación homogénea

$$f(x_1, x_2) = 0\,,$$

en la que $\frac{x_1}{x_2}$ es la variable, descompuesta en sus factores simples, podemos decir que: *una forma algebráica de orden* n *igualada á cero, representa un sistema de* n *puntos en línea recta.*

**60.** INVARIANTES Y COVARIANTES.—Dadas dos formas $f = 0$, $\varphi = 0$, efectuando en ellas la sustitución lineal

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2\,, \qquad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2\,,$$

se verá que su determinante funcional es un covariante simultáneo.

El determinante formado por las segundas derivadas de una función $f(x, y)$ ó Hessiano es un covariante, según puede verse efectuando los cálculos.

La condición de que la forma cuadrática

$$a_0x_1^2 + 2\,a_1x_1x_2 + a_2x_2^2$$

igualada á cero tenga dos raíces iguales, es que el invariante $a_0a_2 - a_1^2$ sea nulo.

La condición para que dos formas lineales

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \quad \text{y} \quad b_1x_1 + b_2x_2 = 0\,,$$

tengan un punto común, es la anulación de su determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

La reducción á cero del discriminante de la ecuación que resulta de igualar á cero una forma, expresa la condición necesaria para que esta ecuación tenga raíces iguales, ó para que dos puntos del grupo de puntos que representa, coincidan.

El resultante de dos formas, es la función entera de sus coeficientes, que debe anularse para que un punto del grupo correspondiente á la primera, coincida con un punto del grupo correspondiente á la segunda.

**61.** SERIES PROYECTIVAS DE PUNTOS. — Adoptemos la notación de Clebsch

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2, \qquad \alpha_x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

en cuyo caso las representaciones simbólicas de las formas

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^n, \qquad \varphi = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^n$$

serán $$f = a_x^n, \qquad \varphi = \alpha_x^n.$$

Una sustitución lineal

$$\rho\xi_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2,$$
$$\rho\xi_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2,$$

en la que los puntos de base quedan fijos, es la expresión analítica de una *afinidad lineal* ó *relación proyectiva*, por la que á cada punto de una recta asociamos otro punto de la misma recta.

Esta correlación será recíproca, cuando el determinante de la sustitución

$$r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

sea distinto de cero y *será idéntica á la correlación de dos series proyectivas.*

La correlación proyectiva está caracterizada por la relación anarmónica de cuatro puntos $m_1, m_2, m_3, m_4$

$$\frac{(m_1 - m_3)(m_4 - m_2)}{(m_3 - m_2)(m_1 - m_4)} = \alpha.$$

Para pasar de esta relación anarmónica á la de los cuatro puntos correspondientes dados por los parámetros $u_1, u_2, u_3, u_4$, se sustituirá, á cada factor, un factor correspondiente multipli-

cado por el determinante de la sustitùción, que desaparecerá en el cociente; de manera que se tendrá

$$\frac{(m_1 - m_3)(m_4 - m_2)}{(m_3 - m_2)(m_1 - m_4)} = \frac{(n_1 - n_3)(n_4 - n_2)}{(n_3 - n_2)(n_1 - n_4)},$$

y concluiremos que: *los invariantes y covariantes de las formas binarias igualados á cero, dan ecuaciones que representan relaciones proyectivas entre elementos de series de puntos y haces de rayos.*

Podemos representar dos series proyectivas de puntos por las ecuaciones

$$a_x + \lambda b_x = 0 \quad , \quad \alpha_\xi + \lambda \beta_\xi = 0 ,$$

admitiendo que dos puntos de las dos series, para los que $\lambda$ tiene el mismo, se corresponden; $\lambda$ representa el valor negativo de la relación de las distancias del punto móvil á los puntos fijos $a_x = o$ y $b_x = o$, multiplicado por un número constante; y por simetría, podemos sustituir á los puntos $a_x$, $b_x$, $\alpha_\xi$, $\beta_\xi$ los puntos $a_x + \lambda' b_x$, $a_x + \lambda'' b_x$, $\alpha_\xi + \lambda' \beta_\xi$, $\alpha_\xi + \lambda'' \beta_\xi$; para lo cual será preciso sustituir al parámetro $\lambda$ el parámetro

$$\mu = -\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''} , \qquad (1)$$

en virtud de las identidades

$$a_x + \lambda b_x = \frac{(\lambda - \lambda'')(a_2 + \lambda' b_x) - (\lambda - \lambda')(a_x + \lambda'' b_x)}{\lambda' - \lambda''} ,$$

$$\alpha_\xi + \lambda \beta_\xi = \frac{(\lambda - \lambda'')(\alpha_\xi + \lambda' \beta_\xi) - (\lambda - \lambda'')(\alpha_\xi + \lambda'' \beta_\xi)}{\lambda' - \lambda''} .$$

Para los puntos dobles se hará $x_1 = \xi_1$ y $x_2 = \xi_2$ en las ecuaciones

$$a_x + \lambda b_x = 0 \quad , \quad \alpha_\xi + \lambda \beta_\xi = 0 ;$$

y se obtendrá

$$(a_1 + \lambda \beta_1) x_1 + (a_2 + \lambda b_2) x_2 = 0 ,$$

$$(\alpha_1 + \lambda \beta_1) x_1 + (\alpha_2 + \lambda \beta_2) x_2 = 0 ;$$

y eliminando $x_1$ y $x_2$, resulta

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & a_2 + \lambda b_2 \\ \alpha_1 + \lambda \beta_1 & \alpha_2 + \lambda \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

ó
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ \beta_1 & \alpha_2 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ \alpha_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \lambda^2 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$$

ó abreviadamente

$$(a\alpha) + \lambda\,[(a\beta) + (b\alpha)] + \lambda^2\,(b\beta). \qquad (2)$$

De manera que, excluyendo el caso de ser

$$[(a\beta) + (b\alpha)]^2 = 4\,(a\alpha)\,(b\beta)$$

correspondiente á la coincidencia de los puntos dobles, y representando por $\lambda'$ y $\lambda''$ las raíces de las ecuaciones (2) podremos tomar como puntos fundamentales los puntos dobles $X_1$ y $X_2$, de modo que

$$(3)\quad \begin{aligned} a_x + \lambda' b_x &= X_1 = p_x\,, \\ a_x + \lambda'' b_x &= X_2 = q_x\,, \end{aligned} \qquad (4)\quad \begin{aligned} \alpha_\xi + \lambda' \beta_\xi &= c\,\Xi_1 = c\,p_\xi, \\ \alpha_\xi + \lambda'' \beta_\xi &= c'\,\Xi_2 = c'\,q_\xi; \end{aligned}$$

y al tomar los nuevos puntos fundamentales, habremos de sustituir á $\lambda$ el valor de $\mu$ dado por la ecuación (1); y será

$$X_1 - \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''}\,X_2 = 0\,, \qquad \Xi_1 - \frac{c'}{c}\,\frac{\lambda - \lambda'}{\lambda - \lambda''}\,\Xi_2 = 0,$$

ó abreviadamente, haciendo $\varrho = \lambda - \lambda' : \lambda - \lambda''$,

$$X_1 - \varrho\,X_2 = 0\,, \qquad \Xi_1 - \frac{c'}{c}\,\varrho\,\Xi_2 = 0\,.$$

Sin entrar en detalles ajenos al objeto de esta obra, bastará indicar que, empleando los valores de $\lambda'$ y $\lambda''$, deducidos de la ecuación (2) y la identidad

$$(b\beta)\,a_x = (a\beta)\,b_x - (ab)\,\beta_x.$$

que se deduce del resultante

$$\begin{vmatrix} a_x & a_1 & a_2 \\ b_x & b_1 & b_2 \\ c_x & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

de las tres identidades

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2\,, \quad b_x = b_1 x_1 + b_2 x_2\,, \quad c_x = c_1 x_1 + c_2 x_2.$$

Y sustituyendo en (3), de igual modo que haciendo las mismas

sustituciones de los valores de $\lambda'$ y $\lambda''$, y empleando la identidad

$$(b\beta)\,\alpha_\xi = (\alpha\beta)\,b_\xi - (\alpha b)\,\beta_\xi$$

en las ecuaciones (4) se llega (Clebsch) *Leçons sur la Géométrie* de al teorema siguiente:

*La relación anarmónica formada por los puntos dobles y por dos puntos correspondientes de las dos series proyectivas, es igual á una constante; y esta constante se expresa por medio de los invariantes*

$$k = (a\beta - b\alpha)$$

$$\text{y } l = [(a\beta) - (b\alpha)]^2 - 4\,(ab)\,(\alpha\beta) = k^2 - 4\,(ab)\,(\alpha\beta),$$

bajo la forma

$$\frac{c'}{c} = \frac{k + \sqrt{l}}{k - \sqrt{l}} \quad ;$$

y puesto que al parámetro $\rho$ de la primera serie corresponde en la segunda un parámetro $\rho\,\frac{c'}{c}$, y á este, en una tercera serie proyectiva, un parámetro $\rho\left(\frac{c'}{c}\right)^2$, y así hasta un parámetro $\rho\left(\frac{c'}{c}\right)^n$ en una $(n+1)^{\text{sima}}$ serie proyectiva; se llega á obtener una serie de puntos

$$\rho,\ \rho\,\frac{c'}{c},\ \rho\left(\frac{c'}{c}\right)^2,\ \ldots\ \ \rho\left(\frac{c'}{c}\right)^n,$$

de los que cada uno corresponde al que precede, en virtud de la correlación proyectiva de las dos series; y si para el $(n+1)^{\text{simo}}$ punto se llega al punto inicial, tendremos

$$\left(\frac{c'}{c}\right)^n = \left(\frac{k + \sqrt{l}}{k - \sqrt{l}}\right)^n = 1.$$

A este sistema de puntos llama Clebsch *ciclo proyectivo*, enunciando el siguiente teorema:

*Si la relación anarmónica que caracteriza una correlación proyectiva es igual á una raíz* $n^{\text{sima}}$ *de la unidad, se puede, partiendo de cada uno de los puntos de la serie, obtener un sistema ciclo-proyectivo de* n *puntos.*

Y si, en vez de una serie de puntos, se toma un haz de rayos, eligiendo como rayos dobles de una transformación lineal, las dos rectas que, partiendo del centro del haz pasan por los puntos circulares imaginarios, dicha transformación es idéntica á una rotación del haz alrededor de su centro; y la condición de la proyectividad cíclica se transforma en la siguiente: un rayo vuelve á su posición inicial, después de haber girado $n$ veces alrededor de su centro un ángulo dado por la relación $\frac{c'}{c}$; lo que conduce á las ecuaciones de la división del círculo.

**62.** LAS COLINEACIONES EN LAS FORMAS TERNARIAS. — De igual manera que en las formas binarias, una transformación lineal de las formas ternarias puede considerarse como un cambio de coordenadas, ó como una relación entre puntos de dos planos diferentes ó de un mismo plano. Así, las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \rho\, y_1 &= a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 \\ \rho\, y_2 &= a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 \\ \rho\, y_3 &= a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

establecen entre los dos planos $(x)$, $(y)$ *una afinidad lineal ó colineación,* de modo que á cada punto $x$ de uno de los planos corresponde un punto (imagen) $y$ del otro plano. Esta relación no es inmediatamente recíproca, es decir, al punto $y$ no corresponde de nuevo el mismo punto $x$; pero el punto correspondiente del primer plano se determina por la resolución de las ecuaciones (1) respecto á las $x$ por medio de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \sigma\, x_1 &= A_{11}\, y_1 + A_{21}\, y_2 + A_{31}\, y_3\ , \\ \sigma\, x_2 &= A_{12}\, y_1 + A_{22}\, y_2 + A_{32}\, y_3\ , \\ \sigma\, x_3 &= A_{13}\, y_1 + A_{23}\, y_2 + A_{33}\, y_3\ , \end{aligned}$$

expresando las $A_{ik}$ los determinantes menores formados con los elementos $a_{ik}$, según la regla conocida.

Si uno de los dos puntos considerados recorre una curva $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, el punto imagen recorrerá otra curva $F(y_1, y_2, y_3) = 0$.

Por ser lineales las ecuaciones de transformación: *A una curva algebráica corresponde en una afinidad lineal otra curva de igual orden.*

## § 3.º TEORÍA DE LAS POLARES

**63.** CONJUGADOS ARMÓNICOS DE DIVERSOS ÓRDENES.—Dados en una recta $m$ puntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$, y un punto fijo P; otro punto P' ligado á los anteriores por la relación

$$\frac{m}{PP'} = \frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PA_2} + \ldots + \frac{1}{PA_m}, \qquad (1)$$

se llama *conjugado armónico* de los $A_1, A_2, \ldots, A_m$ con respecto al P.

Dicha relación puede escribirse

$$\sum\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) = 0,$$

llamando $r_1, r_2, \ldots, r_m$ á las distancias $PA_1, PA_2, \ldots, PA_m$.

*Conjugados armónicos de segundo orden*, son los puntos P' determinados por la relación:

$$\sum\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) = 0, \qquad (3)$$

que es de segundo grado; luego hay dos puntos conjugados armónicos de segundo orden.

Los conjugados armónicos de $(m-1)^{\text{simo}}$ orden están determinados por la ecuación

$$\sum\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\ldots\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{m-1}}\right) = 0, \qquad (4)$$

de los cuales hay $m-1$.

Y los conjugados armónicos de $m^{\text{simo}}$ de orden están dados por $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\ldots\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_m}\right) = 0,$

es decir, se confundirán con los puntos dados $A_1, A_2, \ldots, A_m$.

La relación recíproca de los puntos conjugados armónicos se expresa de este modo:

*Si el punto* P' *es conjugado armónico del* $n^{\text{simo}}$ *orden del punto* P *con relación á los puntos* $A_1, A_2, \ldots, A_m$, *el punto* P *es conjugado armónico del punto* P' *del* $(m-n)^{\text{simo}}$ *orden, con relación á los mismos puntos.*

En general, un punto P′ conjugado armónico del punto $p$ de orden $n$ se halla definido por la ecuación

$$\sum\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r_1}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_n}\right)=0\,,$$

$$\sum\frac{1}{\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_1}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_n}\right)}=0.$$

Si se multiplican todos los términos por el producto

$$\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_1}\right)\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_2}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_n}\right),$$

esta ecuación se reduce á

$$\sum\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_{n+1}}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r'_{n+1}}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r'_m}\right)=0\,,$$

la cual expresa que el punto P es conjugado armónico del orden $m-n$ del punto P′.

**64.** Polares de los diversos órdenes.—Supongamos que por un punto fijo P se traza una secante cualquiera á una curva de grado $m$. Es evidente: que el lugar del conjugado P′ de primer orden de P, en cada secante, es una línea de primer grado, ó recta: que el lugar de los dos puntos conjugados P′ de segundo orden del punto P, sobre cada secante, es una curva de segundo grado, y así sucesivamente.

Dichos lugares sucesivos de los conjugados armónicos de los diversos órdenes se llaman *polares* de la curva propuesta, que tiene $m-1$ polares sucesivas.

Para obtener sus ecuaciones, sea en coordenadas homogéneas, la ecuación de la curva $f(x,y,z)=0$.

Tracemos una secante por el punto $p(x_0,y_0,z_0)$, y escribamos

$$x=x_0+ar\,,\qquad y=b_0+br\,,\qquad z=z_0\,;$$

tendremos $\qquad f(x_0+ar,\ y_0+br,\ z_0)=0\,;$

y dividiendo por $r^m$, resulta

$$f\left(\frac{x_0}{r}+a\,,\ \frac{y_0}{r}+b\,,\ \frac{z_0}{r}\right)=0\,,$$

ecuación de la curva, que descompuesta en sus factores binomios, se reduce á

$$R = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{r}{r_2}\right) \cdots\cdots \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\right) = 0 .$$

La ecuación de la polar de grado $m-1$ que se llama *primera polar*, es

$$\sum\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) \cdots\cdots \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{m-1}}\right) = 0 .$$

La ecuación de la segunda polar se podrá escribir de igual manera, conteniendo $m-2$ factores en cada término, y así sucesivamente; de manera que los conjugados armónicos de orden $m-n$ del punto $(x_0, y_0, z_0)$ estarán dados por la fórmula

$$\frac{d^n f}{\left(d\frac{1}{r}\right)^n} = 0 , \qquad \text{ó haciendo}$$

$$x' = \frac{x}{r} = \frac{x_0}{r} + a , \quad y' = \frac{y}{r} = \frac{y_0}{r} + b , \quad z' = \frac{z}{r} = \frac{z_0}{r} ,$$

$$\left[x_0 \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{x_0}{r} + a\right)} + y_0 \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{y_0}{r} + b\right)} + z_0 \frac{\partial f}{\partial\left(\frac{z_0}{r} + c\right)}\right]^{(n)} = 0 .$$

que después de sustituir por $a$, $b$ y $c$ sus valores

$$\frac{x - x_0}{r} , \qquad \frac{y - y_0}{r} , \qquad \frac{z - z_0}{r} ,$$

se puede escribir bajo la forma simbólica

$$\left(x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z}\right)^{(n)} = 0 ,$$

pudiéndose enunciar el siguiente

TEOREMA.—*La polar recta del punto* $(x_0, y_0, z_0)$ *es el lugar de los conjugados armónicos de primer orden de este punto; la polar cónica es el lugar de los conjugados armónicos de segundo orden, y así sucesivamente.*

De la proporción recíproca (83) resulta el siguiente

TEOREMA.—*Cuando el punto* P' *se halla en la polar de orden* n *del punto* P, *el punto* P *se halla en la polar de orden* m — n *del punto* P'.

Por ejemplo, el lugar del punto P' cuya recta polar pasa por el punto fijo, es la polar de grado $m-1$, ó la primera polar del punto P. De esto resulta el siguiente

COROLARIO.—*La polar recta de un punto* P, *con relación á una curva de orden* m, *tiene además del punto* P, *otros* $(m-1)^2-1$ *polos,* es decir, $(m-1)^2$ *polos,* pues al describir el punto M' la polar recta de M, este punto se hallará en las polares de grado $m-1$ del punto M', las cuales forman un haz ó red que pasa por $(m-1)^2$ puntos fijos, esto es, por otros tantos polos análogos al $m$.

De otro modo: *una recta admite* $(m-1)^2$ *polos;* porque si se toman dos puntos de ésta, los polos de la recta serán los puntos de intersección de las primeras polares de dichos dos puntos, que tienen $(m-1)^2$ puntos comunes.

Si se trata de obtener una polar de orden $p$, cuando se dan dos de sus puntos $(x_2, y_2, z_2)$ y $(x_3, y_3, z_3)$, se tendrán para determinar su polo $(x_1, y_1, z_1)$ dos ecuaciones de grado $p$,

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2}+y_1\frac{\partial}{\partial y_2}+z_1\frac{\partial}{\partial z_2}\right)^p f=0\,,$$

$$\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_3}+y_1\frac{\partial}{\partial y_3}+z_1\frac{\partial}{\partial z_3}\right)^p f=0\,,$$

que admiten $p^2$ soluciones. Los $p^2$ puntos que se obtienen, son los de intersección de las polares de orden $m-p$ de los dos puntos dados, de manera que:

TEOREMA.—*Por dos puntos dados pasan* $p^2$ *polares de orden* p, *cuyos polos respectivos son los puntos comunes á las polares de orden* m — p *de los dos puntos dados.*

Si el polo P se halla en la curva, la polar de grado $n$ queda definida por la ecuación

$$\sum\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_n}\right)=0$$

ó $\Sigma r_{n+1}\, r_{n+2}\cdots\cdots r_m(r-r_1)(r-r_2)\cdots\cdots(r-r_n)=0\,,$

y si P es un punto simple, en cada secante hay un factor $r_1$ nulo, anulándose todos los términos que lo contienen; los demás admiten el factor $r - r_1$ ó $r$. La polar pasa pues, por el punto P.

Si la secante se convierte en tangente, haciéndose nulo un segundo factor, la ecuación última admite el factor $r$ elevado al cuadrado; luego la tangente á la curva es también tangente á la polar. Así, *todas las polares de un punto de la curva pasan por el mismo y son tangentes en él á ésta.*

Podemos estudiar de una manera más general la teoría de las polares, lo que permite dar interpretación geométrica de algunos covariantes.

Si hacemos por brevedad $f = a_x^n$ y representamos por $\lambda$ la relación de las distancias de un punto móvil $x$ á dos puntos fijos $y$, $z$, podremos escribir

$$o = a_y^n + \frac{n}{1}\lambda a_y^{n-1} a_z + \frac{n(n-1)}{2!}\lambda^2 a_y^{n-2} a_z^2 + \ldots + \lambda^n a_z^n .$$

Los coeficientes de esta ecuación son, como se ha visto, las sumas de las combinaciones de las raíces. Considerando en general, la ecuación

$$a_y^{n-r} a_z^r = 0 ,$$

cuando se suponga $y$ fijo, los puntos $z$ formarán el *sistema polar de orden* $r^{simo}$ ó el $(n-r)^{simo}$ sistema polar del polo $y$, respecto al sistema dado de los $n$ puntos $x$, y análogamente diremos, si consideramos á $z$ como fijo. Podremos, pues, enunciar el siguiente teorema:

*El* $r^{simo}$ *sistema polar de un polo* z *relativamente á un sistema dado de* n *puntos, se compone de* n — r *puntos* y *que tienen la propiedad de ser para ellos nula la suma de las combinaciones* (n — r) *á* (n — r) *de las relaciones de sus distancias á dos puntos fijos.*

*Si* y *pertenece al* $r^{simo}$ *sistema polar del polo* z, z *pertenece al* $(n - r)^{simo}$ *sistema del polo* y.

*Si se forma el grupo de los puntos del* $n^{simo}$ *sistema polar de un polo* t, *después para este nuevo sistema de puntos, el* $m^{simo}$ *sistema de un polo* z *etc.; y se llega al fin á una ecuación de grado* l, *á la que corresponden* l *puntos* y, *el resultado será*

*el mismo, si se cambian simultáneamente los puntos* y, z, t... *y los órdenes* m, n, l... *de los sistemas polares individuales.*

TEOREMA 1.°—*La polar de grado* m — 1, *ó primera polar, de una curva de grado* m, *relativa á un punto* P, *pasa por los puntos de contacto de las tangentes trazadas por* P $(x_0, y_0, z_0)$, pues siendo

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

la ecuación de dicha polar, esta ecuación expresa también que la tangente en P pasa por $x_0, y_0, z_0$.

TEOREMA 2.°—*La clase de una curva de orden* m *es,* en general, m (m — 1), pues siendo la primera polar de grado $m - 1$, corta á la curva en $m\ (m - 1)$ puntos.

**65.** EMANANTES.—Hemos visto que si opera con la primera polar como con la curva propuesta, se obtiene la primera curva (supuesta algebráica).

$$x_0^2 f''_{xx} + y_0^2 f''_{yy} + z_0^2 f''_{zz} + 2 y_0 z_0 f''_{yz} + \ldots = 0$$

de grado $m - 2$, que contiene en segundo grado las coordenadas del polo; y cada una de las curvas se deduce de la anterior repitiendo la misma operación.

Esta definición es proyectiva. La polar de grado $m - 1$, según hemos visto, pasa por los puntos de contacto de las tangentes á la curva propuesta, trazadas por el polo; y lo mismo sucede con cada polar, respecto á la anterior. De lo que resulta que si efectúa una transformación homográfica, es decir, si se efectúa una sustitución lineal en las variables $x_0, y_0, z_0$ y $x, y, z$, la nueva ecuación de la polar quedará formada con la nueva ecuación de la curva como primitivamente; de manera que, cualquiera que sea el triángulo de referencia elegido, las ecuaciones polares sucesivas se formarán del mismo modo con las coordenadas del punto y con el primer miembro de la curva dada. Analíticamente, esta propiedad resulta de que el primer miembro la ecuación de la polar de orden $m - p$, no cambia cuando se aplica á las variables $x_0, y_0, z_0$ y $x, y, z$ la misma sustitución lineal; de manera que las funciones

$$\left(x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z}\right)^n, \quad \left(x \frac{\partial f}{\partial z_0} + y \frac{\partial f}{\partial y_0} + z \frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^n$$

son covariantes, que se llaman *emanantes*, verificándose la relación

$$\left(x'_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x'_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ldots\right)^h f=\left(x_1\frac{\partial}{\partial x'_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x'_2}+\ldots\right)^{m-h} f.$$

Podemos, en fin, enunciar el siguiente

TEOREMA.—*El Hessiano de una función es el discriminante de su segundo emanante.*

En efecto, el segundo emanante de $f$ es

$$\Sigma\, x'_i x'_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

cuyo discriminante es

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

PROBLEMA.—*Determinar los emanantes primero y segundo de la forma*

$$U=a_0x_1^4+4a_1x_1^3x_2+6a_2x_1^2x_2^2+4a_3x_1x_2^3+a_4x_2^4.$$

Tendremos

$$E_1=y_1(a_0x_1^3+3a_1x_1^2x_2+3a_2x_1x_2^2+a_3x_2^3)$$
$$+y_2(a_1x_1^3+3a_2x_1^2x_2+3a_3x_1x_2^2+a_4x_2^3)$$
$$E_2=y_1^2(a_0x_1^2+2a_1x_1x_2+a_2x_2^2)+2y_1y_2(a_1x_1^2+2a_2x_1x_2+a_3x_2^2)$$
$$+y_2^2(a_2x_1^2+2a_3x_1x_2+a_4x_2^2)$$

# CAPÍTULO II

## Estudio particular de las curvas planas

**66.** DEFINICIÓN.—Se llama *asíntota* de una rama infinita de una curva otra curva ó una recta á la que aquélla se aproxima indefinidamente á medida que uno de sus puntos se aleja al infinito en dicha rama. No trataremos ahora mas que de las asíntotas rectilíneas.

**67.** ASÍNTOTAS PARALELAS AL EJE DE LAS $y$.—TEOREMA.—*Si una recta* AB *paralela al eje de las* y *representada por la ecuación* x—a=0 *es asíntota á una rama de curva* CD, *la abscisa del punto* M *de la curva tiende hacia* a *cuando éste se aleja al infinito en dicha rama, es decir, cuando el valor de* y *se hace mayor que cualquier cantidad, por grande que sea.*

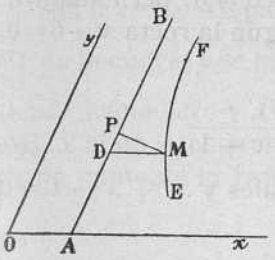


Fig. 47.

En efecto, trácense por M la perpendicular MP á la asíntota y la paralela MD al eje de las $x$, y llamando $\theta$ al ángulo de los ejes de coordenadas, tendremos

$$MP = MD \operatorname{sen} \theta , \qquad (1)$$

y según la posición del punto M respecto á la asíntota

$$MD = \pm (x - a) ;$$

luego

$$MP = \pm (x - a) \operatorname{sen} \theta . \qquad (2)$$

Por ser AB asíntota de la rama EF, MP tiende hacia cero; luego $a - x$ también tenderá hacia cero y $x$ hacia $a$.

Recíprocamente: *Si la abscisa del punto* M *de la curva* EF *tiende hacia* a, *cuando* y *se hace superior á toda magnitud dada, la recta representada por la ecuación* x — a = 0, *es asíntota de dicha rama,* pues siendo

$$MP = \pm (x - a) \operatorname{sen} \theta$$

por tender $x - a$ hacia cero, MP tenderá hacia cero.

EJEMPLOS —1.º Sea la curva

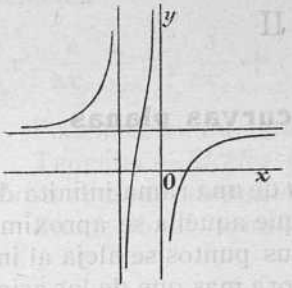


Fig. 48.

$$x^2y - 3x^2 + 2xy + 4 = 0 .$$

Las asíntotas paralelas al eje de las $y$ son

$$x = 0, \qquad x + 2 = 0 .$$

La asíntota paralela al eje de las $x$ es: $y - 3 = 0$.

2.º Sea la curva

$$y = \frac{4x + 7}{(x - 3)(x + 6)^2}$$

$y$ se hace infinita cuando $x - 3 = 0$; luego la recta $x - 3 = 0$ es una asíntota. Lo mismo se dirá de $x + 6 = 0$; pero añadiremos que hay dos asíntotas confundidas según la recta $x + 6 = 0$.

3.º Sea la curva

$$y = \frac{(3x + 4)(2x - 7)}{(x + 2)(x - 4)(x^2 + x + 1)}$$

$x + 2 = 0$ y $x + 4 = 0$ serán asíntotas reales y $x^2 + x + 1 = 0$ representará dos asíntotas imaginarias.

4.º Sea $$y = 3x - 1 \pm \frac{\sqrt{7x - 5}}{2x} .$$

Para $x = 0$, $y$ es infinito; pero $y$ es imaginaria para valores de $x$ muy próximos á cero. En este caso, se dirá para generalizar, que la recta $x = 0$ es asíntota á la curva dada; pero que las ramas que admiten esta recta como asíntota son imaginarias.

5.º Sea $$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x} .$$

Esta curva admite por asíntotas paralelas al eje de las $y$ todas las rectas representadas por la ecuación

$$x = k\pi ,$$

siendo $k$ un número entero cualquiera.

**68.** FORMA IMPLÍCITA.—Cuando la ecuación de la curva es de la forma $f(x, y) = 0$, podremos enunciar la siguiente

REGLA.—*Las asíntotas paralelas al eje de las* y *se obtienen igualando á cero el coeficiente de la mayor potencia de* y *en la ecuación de la curva dada.*

Análogamente: *se obtienen las asíntotas paralelas al eje de las* x *igualando á cero el coeficiente de la mayor potencia de* x.

En efecto, ordenemos la ecuación $f(x, y) = 0$ según las potencias descendentes de $y$, y tendremos

$$y^m f(x) + y^{m-1} f_1(x) + \ldots = 0 . \qquad (1)$$

Dividiendo por $y^m$, obtendremos la ecuación de las inversas de las raíces de la ecuación $f(x, y) = 0$,

$$f(x) + \frac{1}{y} f_1(x) + \frac{1}{y^2} f_2(x) + \ldots = 0. \qquad (2)$$

Sea la recta AB paralela al eje de las $y$, asíntota á una rama EF de la curva; $y$ se hace mayor que cualquier valor, mientras $\frac{1}{y}$ tiende hacia cero y $x$ hacia $a$, si $x - a = 0$ representa la recta AB. Y si en la ecuación (2) $x$ é $y$ representan las coordenadas de un punto de la rama EF, tendremos, para $y = \infty$,

$$f(a) = 0 ,$$

es decir, que $a$ es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

Si en la ecuación (2) $x$ tiende hacia $a$, una raíz por lo menos de esta ecuación en $\frac{1}{y}$ tenderá hacia cero, y una raíz al menos de la ecuación (2) se hará infinita.

Si $k$ es el número de las raíces reales de (2) que tienden hacia cero, cuando $x$ tiende hacia $a$, habrá $k$ ramas reales de curva asíntotas á la recta $x - a = 0$, ya al lado de las abscisas negativas ya al de las positivas; y si $l$ es el número de raíces imaginarias que tienden hacia cero, diremos que hay $l$ ramas imaginarias de la curva asíntotas á la recta $x - a = 0$.

Si $a$ es una raíz múltiple de grado $p$, diremos que la curva admite $p$ asíntotas reales ó imaginarias confundidas con la recta $x - a = o$.

**69.** TEOREMA.—*En general hay dos ramas de curva asíntotas á una recta, dispuestas á ambos lados de ésta en los extremos opuestos*

En efecto, supongamos la recta dada paralela al eje de las $y$, lo que siempre puede verificarse por un cambio de ejes, y escribamos la ecuación de la curva en coordenadas homogéneas

$$y^p f_1(x,z) + y^{p-1} f_2(x,z) + \ldots = 0. \qquad (1)$$

En el caso general, no existiendo relaciones entre los coeficientes de la ecuación dada, el valor $\alpha$ que anula á $f_1$ será raíz simple y $f_2(\alpha, z)$ no será nula. Podemos, pues, escribir

$$f_1(x,z) = (x - \alpha z)\, F_1(x,z), \text{ siendo } F_1(\alpha, z) \gtrless 0;$$

y la ecuación (1) obtendrá la forma

$$-\frac{1}{y}\left(f_2 + \frac{1}{y} f_3 + \ldots\right) = (x - \alpha z)\, F_1 . \qquad (2)$$

Para $x = \alpha$, tenemos $\frac{1}{y} = 0$, y el primer miembro solo admitirá una raíz nula en $\frac{1}{y}$, porque $f_2(\alpha, z) \gtrless 0$.

Para valores de $x$ próximos á $\alpha$, el primer miembro admite pues valores reales de $y$; porque si para $x = \alpha + \varepsilon$ admitiese el primer miembro de la ecuación (2), para $\frac{1}{y}$ una raíz $a + bi$, siendo $a$ y $b$ funciones de $\varepsilon$ tales, que:

$$\lim a = 0 \text{ y } \lim b = 0 \text{ (para } \varepsilon = 0),$$

dicha ecuación admitiría también la raíz $a - bi$, y obtendríamos dos valores nulos de $\frac{1}{y}$ cuando se hace $x = \alpha$, lo que es contrario á la hipótesis.

Este razonamiento subsiste para el caso de darse á $x$ valores un poco superiores ó inferiores á $\alpha$. Hay pues dos ramas reales de la curva en la proximidad de la recta, á uno y otro lado de ésta.

Para demostrar que están situados en los extremos opuestos, consideremos la ecuación (2) bajo la forma:

$$-\frac{1}{y} = \frac{(x - \alpha z)\, F_1}{f_2 + \frac{1}{y} f_3 + \ldots}$$

Antes de llegar $x$ al valor $\alpha$, el signo del segundo miembro es contrario al de $\frac{F_1(\alpha, \beta)}{f_2(\alpha, \beta)}$, cantidad que no es nula ni infinita. Después de pasar por el valor $\alpha$, dicho segundo miembro tiene el signo de $\frac{F_1(\alpha, \beta)}{f_2(\alpha, \beta)}$; luego $\frac{1}{y}$ tiene un valor positivo antes y negativo después de pasar $x$ por el valor $\alpha$, ó inversamente. Esta es la *disposición normal* que corresponde al caso de no haber singularidades en la curva.

Gráficamente puede establecerse esta correspondencia de dos ramas de curva con la asíntota, ya situadas hacia el infinito positivo la una, hacia el infinito negativo la otra, ó bien las dos hacia el infinito positivo ó hacia el infinito negativo; pues proyectando la rama de curva MAM' tangente á la recta A*b* en A, desde un punto S sobre un plano no paralelo al plano de la curva y paralelo al rayo SA, que proyectará al punto S en el infinito; y suponiendo que el plano proyectante pase por la tangente, de modo que la proyección de la tangente, asíntota á la proyección de la curva, sea cierta recta *b c*; si el punto A no es singular; la curva se hallará á un mismo lado de la tangente, siendo *bd* la traza del plano de la curva con el plano P. Entonces la curva MAM' está delante del plano de la figura; luego una recta tal como SM, que atraviesa este plano en S, está delante de dicho plano, á partir de S en la dirección SM, y encuentra á P en un punto *m* delante de *bc*, el cual describe la rama *ma*. Al contrario, una recta tal como S' M', situada detrás del plano de la figura, encontrará á P en *m'* detrás de *bc*, y describirá la rama *m' a'*.

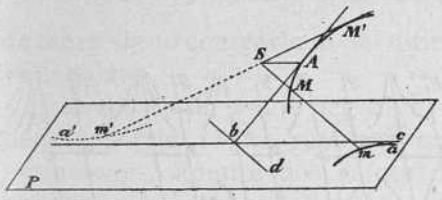


Fig. 49

Esta construcción sirve para ver la disposición de la asíntota en el caso de *un punto de inflexión en el infinito*, pues supondremos que, en vez de efectuar la proyección de un arco de curva exterior á su tangente se efectúa la de un arco de curva que atraviesa á su tangente; entonces se obtiene la fig. 50, y se

ve que la curva está al mismo lado de la asíntota, cuando atraviesa á su tangente, es decir, si el contacto es de orden par, para la curva proyectada.

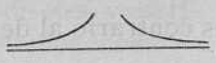


Fig. 50

**70.** TEOREMA.—*El número de ramas de la curva que son asíntotas á una recta es siempre par.*

En efecto, supongamos que $\alpha$ anula á las funciones $f_2, f_3, \ldots, f_{i-1}$, sin anular á $f_i$. Para $x = \alpha$, hay pues $i$ valores de $\frac{1}{y}$ nulos

Para $x = \alpha - \varepsilon$ hay también $i$ valores de $\frac{1}{y}$ en la proximidad de cero, entre ellos $t$ reales y $2\theta$ imaginarios, de manera que $i = t + 2\theta$.

Para $x = \alpha + \varepsilon$ habrá además $i$ valores de $\frac{1}{y}$ próximos á cero, $t$ de ellos reales y $2\theta'$ imaginarios, de modo que $i' = t' + 2\theta'$; luego $t + t' = 2i - 2\theta - 2\theta'$.

EJEMPLOS.—Las figuras

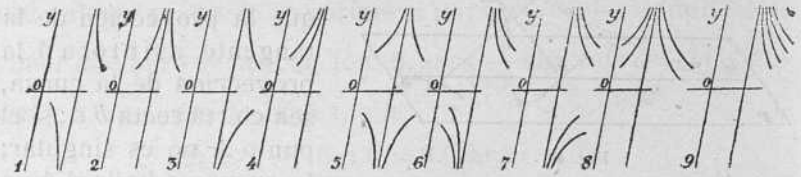



Fig. 51

corresponden á las ecuaciones

$$(1)\quad y = \frac{x^2}{x-1},\quad (2)\quad y = \frac{x}{(x-1)^2},\quad (3)\quad y^2 = \frac{x}{x-1}$$

$$(4)\ y = \frac{1 \pm \sqrt{1-x}}{1-x},\ (5\ y^2 = \frac{x}{(x-1)^2},\ (6) y = \frac{1 \pm (x-1)\sqrt{\alpha^2+1}}{x-1}$$

$$y^2 = \frac{1 \pm \sqrt{\alpha - 1}}{1-x},\ y = \frac{2 \pm \sqrt{(x-1)^2+1}}{(x-1)^2},\ y = \frac{2 \pm \sqrt{\alpha - 1} \pm \sqrt{x}}{x-1}\ (*)$$

(*) Véase *Longchamps*, Géométrie analytique.

EJEMPLO.—Estudiar la curva

$$x^2(1+x)+x(1-x)\frac{1}{y}+(1+x)\frac{1}{y^2}=0$$

en la proximidad del eje de las $y$.

Hagamos $x=\varepsilon$, $\frac{1}{y}=U$. Al valor $\varepsilon$ corresponden tres valores de U dados por la ecuación

$$U^3+U\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon}+\varepsilon^2=0. \qquad (1)$$

La realidad de las raíces depende del signo de

$$V=\frac{4\varepsilon^3(1-\varepsilon)^3}{(1+\varepsilon)^3}+27\varepsilon^4=\varepsilon^3\left[27\varepsilon+\frac{4(1-\varepsilon)^3}{(1+\varepsilon)^3}\right]$$

El límite de la cantidad entre paréntesis es 4 para $\varepsilon=0$; luego V tiene el mismo signo que $\varepsilon$.

Si $\varepsilon>0$, hay un solo valor real para $\frac{1}{y}$; y esta raíz, que ha de tener signo contrario al del último término $+\varepsilon^2$, es negativa.

Si se da á $\varepsilon$ un valor negativo, la ecuación (1) tiene sus tres raíces reales; y como ofrece dos variaciones, admite dos raíces positivas y una negativa. Así, hay á la izquierda del eje de las $y$ dos ramas dirigidas hacia el extremo superior y una tercera rama en el extremo inferior.

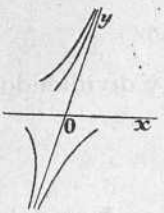


Fig. 52

**71.** ASÍNTOTAS NO PARALELAS AL EJE DE LAS $y$.—Sea $y=f(x)$ la ecuación de la curva de grado $m$.

Toda asíntota no paralela al eje de las $y$ tendrá la forma $y=kx+l$, siendo $k$ y $l$ finitos; y la rama de la curva podrá expresarse por la ecuación

$$y=kx+l+V,$$

tendiendo V hacia cero, cuando $x$ tiende al infinito. De modo que

$$\frac{y}{x}=k+\frac{l+V}{x}, \quad \lim_{x=\infty}\frac{y}{x}=k,$$

$$y-kx=l+V, \quad \lim(y-kx)=l.$$

Estas expresiones determinan el coeficiente angular y la ordenada en el origen de la asíntota.

Recíprocamente, los valores de $k$ y de $l$ así determinados para una rama real de la curva, corresponderán á una asíntota de esta rama, porque $\lim (y - kx) - l = 0$ para los puntos de la rama en los que el valor de $x$ crece indefinidamente. Las asíntotas paralelas al eje de las $x$ corresponderán á los valores de $k$ iguales á cero.

Si la rama considerada se extiende al infinito por el lado de las $x$ negativas, será preciso hallar los límites de $\frac{y}{x}$ y de $y - kx$ para $x = -\infty$.

Para hallar por este método las asíntotas paralelas al eje de las $y$, bastará permutar $x$ é $y$ en la ecuación de la curva.

Esto sentado, dividamos la ecuación $f(x, y) = 0$ en grupos homogéneos de grados $m$, $m - \alpha$, $m - \beta$ decrecientes

$$x^m f\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\ldots = 0,$$

ó

$$x^m f(u) + x^n f_1(u) + \ldots\ldots = 0,$$

y dividiendo por $x^m$, resulta

$$f(u) + \frac{1}{x^{m-n}} f_1(u) + \ldots\ldots = 0. \qquad (1)$$

A medida que $x$ aumenta, $f(u)$ se aproxima á cero; luego los valores límites de $u$, es decir, los valores de $k$ son raíces de la ecuación $f(k) = 0$.

Para hallar el valor $l$ correspondiente á un valor de $k$, hagamos $y - kx = t$, y busquemos el límite de $t$.

La ecuación de la curva, se reduce, por esta sustitución, á

$$x^m f\left(k + \frac{t}{x}\right) + x^{m-\alpha} f_1\left(k + \frac{t}{x}\right) + \ldots\ldots = 0;$$

y por ser $f(k) = 0$, se tiene que

$$f\left(k + \frac{t}{x}\right) = \frac{t}{x} f'\left(k + \theta \frac{t}{x}\right),$$

hallándose $\theta$ comprendida entre 0 y 1. Se tiene pues

$$x^{m-1} t f'\left(k+\theta\frac{t}{x}\right)+x^{m-\alpha-1} f_1\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots\ldots=0,$$

$$t f'\left(k+\theta\frac{t}{x}\right)+\frac{1}{x^{\alpha}} f_1\left(k+\frac{t}{x}\right)+\ldots\ldots=0.$$

Si $f_1(x) \gtrless 0$, tendremos

$$l=-\frac{f_1(k)}{f'(k)}.$$

Si $\alpha>1$ y $f_1(k)=0$, se tendrá

$$l=\lim t=0.$$

La asíntota pasará por el origen; si $f(k) \gtrless 0$, $f_1(k) \gtrless 0 \alpha>1$ si $\alpha<1$, creciendo indefinidamente los términos que contienen $x$, $t$ no tendrá límite, y no habrá asíntota.

Si en el caso de ser $\alpha=1$ se tiene $f'(k)=0$ y $f_1(k)=0$. La ecuación de la asíntota adquiere forma indeterminada. Entonces, desarrollando hasta los términos de segundo orden tendremos

$$f(u)=\frac{t^2}{2x^2} f''\left(k+\theta_1\frac{t}{x}\right) \qquad (0<\theta_1<1)$$

y multiplicando por $x^2$ la ecuación (1) resulta

$$\frac{t^2}{2} f''\left(k+\theta_1\frac{t}{x}\right)+\frac{1}{x^{\alpha-2}} f_1(k)+\frac{t}{x^{\alpha-1}} f'_1\left(k+\theta\frac{t}{x}\right)+\ldots=0$$

Si $f_1(k)$ no es nulo, será necesario que $\alpha$ sea $=$ ó $>2$ para que haya una asíntota. El valor correspondiente de $l$ será cero si $\alpha>2$, y si $\alpha=2$, será

$$l^2=-\frac{2 f_1(k)}{f''(k)};$$

será pues necesario que el segundo miembro sea positivo; entonces $l$ admitirá dos valores reales, iguales y de signo contrario.

Si $f''(k)=0$, se continuará del mismo modo el razonamiento.

**72.** ASÍNTOTAS COMO LÍMITES DE TANGENTES.—Sea

$$x^m f\left(\frac{y}{x}\right)+x^n f_1\left(\frac{y}{x}\right)+\ldots\ldots=0. \qquad (1)$$

Supongamos una dirección arbitraria para el eje de las $y$. Entonces $\frac{y}{x}$ tenderá hacia un límite finito $k$, raíz de la ecuación

$$f(k) = 0;$$

y representando por $\varphi(x, y)$ el primer miembro de la ecuación (1), tendremos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(y)}$$

$$\varphi' x = -\frac{y}{x^2}\left[x^m f'\left(\frac{y}{x}\right) + x^n f'\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots\right]$$

$$+ m\,x^{m-1} f\frac{y}{x} + n\,x^{n-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots,$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{x}\left[x^m f'\left(\frac{y}{x}\right) + f'_1\left(\frac{y}{x}\right) x^n + \ldots\right],$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{mx^{m-1} f\left(\frac{y}{x}\right) + nx^{n-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots.}{x^{m-1} f'\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} f'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots.} \quad (2)$$

Si se hace crecer indefinidamente á $x$, $f\left(\frac{y}{x}\right)$ tenderá hacia cero, y la ecuación (2) dará

$$\text{lin}\ \frac{y}{x} = \text{lin}\ \frac{dy}{dx}$$

Así, *cuando una rama de curva tiene una asíntota, su dirección es el límite de la dirección de las tangentes á esta rama.*

Vamos ahora á obtener el límite del punto de intersección de la tangente con el eje de las $y$, ó la ordenada en el origen de la asíntota, es decir, el punto cuya ordenada es $y - x\frac{dy}{dx}$. De la ecuación (2) resulta

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{mx f\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{n}{x^{m-n-1}} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots.}{f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^{m-n}} f'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots.} \quad (3)$$

Supongamos desde luego $n = m - 1$ ó $n < m - 1$, en cuyo caso la curva tiene una asíntota. Tendremos

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{mx f\left(\frac{y}{x}\right) + (m-1) f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \dots}{f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} f'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \dots}, \quad (4)$$

ecuación que puede simplificarse. En efecto, dividiendo la ecuación (4) por $x^{m-1}$ y suponiendo $n = m - 1$, tendremos

$$\lim\left[x f\left(\frac{y}{x}\right) + f_1\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0.$$

La ecuación (4) da

$$\lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = \lim \frac{-f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \dots}{f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x} f'_1\left(\frac{y}{x}\right) + \dots},$$

y, por consiguiente,

$$\lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{f_1(k)}{f'(k)};$$

luego la tangente corta al eje de las $y$ en un punto cuyo límite coincide con el en que este eje queda cortado por la asíntota.

Si suponemos $n < m - 1$, la función $f_1$ no existirá; y tendremos

$$\lim\left(y - x\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

La asíntota y el límite de las tangentes pasarán en este caso por el origen.

Si $n > m - 1$, entonces la rama de curva no tiene asíntota. Hagamos $n = m - 1 + \delta$; la ecuación (1) dividida por $x^n$ dará

$$\lim\left[x^{1-\delta} f\left(\frac{y}{x}\right) + f_1\left(\frac{y}{x}\right)\right] = 0, \quad (5)$$

é introduciendo esta condición en la ecuación (3), resultará que $y - x\frac{dy}{dx}$ se hará infinita con $x$; luego no habrá límite.

Así pues se obtendrá el mismo resultado hallando la asíntota de una rama infinita que el límite de las tangentes.

**73.** ASÍNTOTAS EN COORDENADAS POLARES.—Si la ecuación se da en coordenadas $\rho$ y $\theta$ y admite una rama infinita MN que tiene una asíntota AN, bajaremos desde el polo O una perpendicular $OA = \delta$ sobre la asíntota, y proyectaremos el punto M en P sobre OA.

Siendo cero el límite de PA, será $\lim OP = OA = \delta$; luego

$$\lim (OM \operatorname{sen} OMP) = OA. \qquad (1)$$

Por tender el radio vector $OM = r$ hacia el infinito, es necesario que sen OMP y por consiguiente, que OMP tienda hacia cero.

Tracemos por el polo la recta $ON_1$ paralela á AN; y sea $\alpha = XON_1$ el ángulo que forma esta paralela con el eje polar.

El ángulo $$OMP = N_1OM = \pm (\theta - \alpha); \qquad (2)$$

luego $$\lim (\theta - \alpha) = 0 \ , \quad \lim \theta = \alpha \ ;$$

*La dirección límite del radio vector, cuando* M *se aleja al infinito en la rama de la curva, da la dirección de la asíntota.*

Además las ecuaciones (1) dan

$$\delta = \pm \lim r \operatorname{sen} (\theta - \alpha) = \pm \lim r (\theta - \alpha),$$

porque $\lim \dfrac{\operatorname{sen} (\theta - \alpha)}{\theta - \alpha} = 1$ .

Observaremos que $\theta - \alpha > \text{ó} < 0$, según que la rotación de $ON_1$ es hacia OA, ó en sentido contrario. Se puede pues, tomar simplemente

$$\delta = \lim r (\theta - \alpha) \ ,$$

entendiendo que el signo + de $\delta$ corresponde al primer caso y el — al segundo.

*Recíprocamente.*—Si $\theta$ y $r(\theta - \alpha)$ tienden hacia límites determinados $\alpha$ y $\delta$, cuando el punto M se aleja al infinito sobre una rama de curva, esta rama tiene una asíntota AN determinada por estos valores de $\alpha$ y de $\delta$; porque la ecuación

$$\delta = \lim r (\theta - \alpha) = \lim r \operatorname{sen} (\theta - \alpha) = \lim OM \operatorname{sen} OMP$$

manifiesta que la distancia del punto M á esta recta tiene por límite cero.

EJEMPLO.—Sea la acuación de una cónica referida al foco como polo

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}$$

Para que $r$ crezca hasta el infinito, es necesario y suficiente que $1 - \varepsilon \cos \theta$ tienda hacia cero; luego

$$\cos \alpha = \frac{1}{\varepsilon} .$$

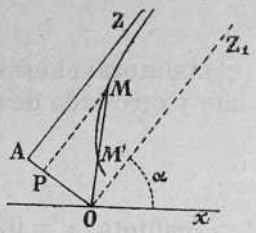


Fig. 52

Este ángulo $\alpha$ no puede ser real mas que cuando $\varepsilon < 1$, excluyéndose la elipse.

Para $\varepsilon > 1$, la ecuación da dos valores para el ángulo $\alpha$, que corresponden á dos direcciones igualmente inclinadas respecto al eje polar. Además, se tiene

$$\lim r(\theta - \alpha) = p \lim \frac{\theta - \alpha}{1 - \varepsilon \cos \theta} = \frac{p}{\varepsilon \operatorname{sen} \alpha}$$

si $\varepsilon = 1$, $\operatorname{sen} \alpha = 0$. No hay asíntota, lo que excluye la parábola. para la hipérbola $\varepsilon > 1$. Se tienen pues dos valores finitos

$$\delta = \pm \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} ,$$

refiriéndose el signo + á $\operatorname{sen} \alpha > 0$ y el signo − á $\operatorname{sen} \alpha < 0$, lo que determina la longitud y el sentido de las perpendiculares OA bajadas sobre las dos asíntotas.

## § 2.º APLICACIONES

1 $$y^3 - 3axy + x^3 = 0 .$$

Asíntota $$y = -x - a .$$

2 $$xy^2 - x + 2y - 1 = 0 .$$

Tres asíntotas $x = 0$, $y = +1$, $y = -1$.

3 $$y^3 + x^3 + \operatorname{sen} \frac{y}{x} = 0 .$$

Una asíntota $$y = -x .$$

4 $$y^2 = \cos \frac{y}{x} .$$

Dos asíntotas $y = +1,\ y = -1$.

5 $$y = a\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,.$$

Asíntota: el eje de las $x$. La curva pasa alternativamente á uno y otro lado de un asíntota hasta el infinito.

6 $$y = a \operatorname{sen}\frac{b}{x}\,.$$

Asíntota: $y = 0$. La curva se aproxima indefinidamente al eje de las $y$ en la parte comprendida entre $y = -a,\ y = +a$.

7 $$yx = \operatorname{sen} x\,.$$

Una asíntota $y = 0$.

8 $$xy^2 + 5x^2y + 4x^3 + xy - 9 = 0\,.$$

Asíntotas $y = -x + \frac{1}{3},\quad y = -4x - \frac{4}{3},\quad x = 0$.

9 $$x^3 + xy - 2y^2 - 4x - 2y = 0\,.$$

Asíntotas $x - y - 2 = 0,\quad x + 2y - 2 = 0$.

10 $$x^2 + 4xy - 6x + 4y = 0\,.$$

Asíntotas $x + 1 = 0,\quad x + 4y - 7 = 0$.

11 $$x^3 - xy^2 - y^2 + y = 0\,.$$

Asíntotas $1 + x = 0,\ x - y - \frac{1}{2} = 0,\ x + y - \frac{1}{2} = 0$.

12 $$x(x^2 - a^2) - 2y(y^2 - a^2) - 3xy^2 - a^3 = 0\,.$$

Asíntotas $y = \frac{1}{2}x,\quad y = -x \pm a$.

13 $$r^2 = a^2\,\frac{\operatorname{sen} 3\varphi}{\cos\varphi}\,.$$

Asíntota $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

14 $r\varphi = a$ (espiral hiperbólica).

Asíntota $r \operatorname{sen}\varphi = a$.

15 $r \cos 2\varphi = a$.

Asíntotas $r(\operatorname{sen} \varphi \pm \cos \varphi) = \pm \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ .

16 $r \cos \varphi = 2a \operatorname{sen}^2 \theta$ (cisoide).

*Solución:* Dos ramas infinitas con una asíntota normal al eje polar, á la distancia $2a$ del polo hacia el lado $x > 0$ .

17 Hallar las asíntotas de $y = xe^{\frac{1}{x}}$ .

Se tiene $y = xe^{\frac{z}{x}}$ , haciendo $z = 0$ , $y = x$ .

La curva tiene un punto en el infinito en la bisectriz del ángulo de los dos ejes. Además

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = -e^{\frac{z}{x}} + \frac{z}{x} e^{\frac{z}{x}}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad f_3 = \frac{\partial f}{\partial z} = -e^{\frac{z}{x}}.$$

Para $y = x$, $z = 0$ se tiene $f_1 = -1$, $f_2 = 1$, $f_3 = -1$ .

Luego, haciendo $z = 1$ para pasar á coordenadas cartesianas, resulta la

*Solución:* $y = x + 1$ .

18 Asíntotas de $y = e^x$ .

Tenemos $y = ze^{\frac{x}{z}}$ , $x = xl \dfrac{y}{z} = zly - zlz$ .

Para $z = 0$ , se tiene la *solución:* $x = 0$ .

## § 3.° Estudio de una curva en la proximidad de uno de sus puntos

**74.** Método de Newton.—Salmon lo emplea de la siguiente manera. (*) Si el origen es un punto ordinario, $y$ puede desarrollarse bajo la forma

$$y = Ax + Bx^2 + \ldots ;$$

cuando el origen es un punto singular, la forma de la ecuación será $y = Ax^m + Bx^n + \ldots$ .

(*) A treatise on the higher plane curves (p. 46).

siendo $m$ positivo y $n$ el exponente que sigue en magnitud á $n$. Cerca del origen, la figura de la curva es próximamente la correspondiente á $y = Ax^m$, debiéndose determinar $m$ con la condición de que los exponentes de dos ó más términos hayan de ser iguales entre sí y menores que los demás. Después se determina el coeficiente A, igualando á cero la cantidad multiplicada por términos con igual exponente. Podemos continuar el desarrollo haciendo $y = Ax^m + Bx^n$, después de haberse obtenido A y $m$, para obtener enseguida B y $n$. Sea por ejemplo la curva *(folium ú hoja de Descartes)*

$$x^3 + y^3 - 3\,axy = 0.$$

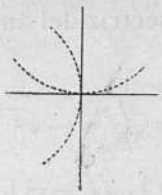


Fig. 53

El origen es un punto doble, tangente á los dos ejes.

Hagamos $y = Ax^m$ y tendremos

$$x^3 + A^3x^{3m} - 3\,aAx^{m+1} = 0.$$

Suponiendo iguales dos exponentes, por ejemplo, $3 = 3m$ ó $m = 1$, tendremos que desechar esta hipótesis, porque con ella los exponentes supuestos iguales resultan mayores que $m + 1$, exponente del otro término.

Si suponemos en seguida $3 = m + 1$, que da $m = 2$, obtendremos dos términos de grados iguales y menores que el grado del tercero; luego la ecuación se reduce á

$$(1 - 3\,m\,A)\,x^3 + A^3x^6 = 0.$$

Si determinamos A de modo que se anule el coeficiente de $x^3$, resulta $A = \frac{1}{3m}$, $y = \frac{1}{3m}x^2 + \ldots$, siendo los exponentes de los demás términos superiores á 2.

La forma de una de las ramas de la curva, en el origen, se parece pues á la parábola $3\,ay = x^2$.

Si por último, igualamos los exponentes $3\,m$ y $m + 1$, obtendremos

$$m = \frac{1}{2},\ x^6 + A^3x^3 - 3\,aA\,x^3 = 0,\ A = \sqrt{3a},\ y = \sqrt{3a}\,x^{\frac{1}{2}} + \ldots$$

Por consiguiente, cerca del origen, la rama considerada se aproxima á la parábola $y^2 = 3\,ax$.

Si hacemos, para continuar el desarrollo,

$$y = \frac{1}{3a} x^2 + Bx^n ,$$

tendremos

$$x^3 + \frac{1}{27a^3} x^6 + \frac{1}{3a^2} Bx^{4+n} + \frac{1}{a} B^2 x^{2+2n} + B^3 x^{3n} - x^3 - 3aBx^{n+1} = 0$$

é igualando á cero los términos de menor grado, tendremos

$$\frac{1}{27a^3} x^6 + \frac{3}{3a^2} x^{4+n} - 3aBx^{n+1} = 0.$$

Si hacemos $n = 5$, podremos igualar el primero y el tercer términos, lo que da $B = \frac{1}{81a^4}$

El mismo procedimiento sirve para obtener las ramas infinitas de la curva, desarrollando $y$ según las potencias descendentes de $x$. Así en el ejemplo último, igualando los exponentes $m$ y $3m$, tendremos $m = 1$, y el coeficiente correspondiente será $A^3 + 1$. Igualándolo á cero, resulta $A = -1$, y el desarrollo de $y$ será $y = -x + Bx^n$. Para determinar B, haremos esta sustitución en la ecuación de la curva y tendremos

$$x^3 - x^3 - 3Bx^{m+2} - 3B^2 x^{1+2m} + B^3 x^{3m} + 3ax^2 - 3aBx^{1+m} = 0$$

Suponiendo $m = 0$, resulta ($A = -1$):

$$-3B(B + a)x^2 = 0, \quad B = -a;$$

luego, tendremos la asíntota

$$a + y + x = 0.$$

**75.** Triángulo de De Gua.—Es interesante el procedimiento de De Gua, empleado por Cramer en su célebre obra *Introduction á l' Analyse des lignes algébriques*, para conocer la forma de las curvas en el origen de coordenadas ó en un punto cualquiera de éstas al que se puede transportar dicho origen.

| | | |
|---|---|---|
| $y^4$ | $xy^2$ | $x^2y^2$ |
| $y$ | $xy$ | $x^2y$ |
| $1$ | $x$ | $x^2$ |

| | | |
|---|---|---|
| | | $x^2$ |
| | $xy$ | $x$ |
| $y^2$ | $y$ | $1$ |

| | | |
|---|---|---|
| $x^2$ | $xy$ | $y^2$ |
| $x$ | $y$ | |
| $1$ | | |

Fig. 54

Este método consiste en el empleo del *triángulo analítico* que es una modificación

ventajosa del paralelógramo de Newton, donde se hallan ordenados los términos de una función algebráica entera del modo indicado en la fig. 53.

Mediante algunos ejemplos puede comprenderse cómo se utiliza este triángulo, ya para el estudio de las curvas representadas por una función algebráica, ya para el de las ramas infinitas.

EJEMPLO 1.°—Sea la ecuación $x^2y + ay^2 - a^3x = 0$.

Hemos de ver cómo podemos agrupar dos de los términos de modo que sean de igual orden infinitesimal para poder despreciar el tercero, que ha de resultar de orden superior.

1.° Supongamos primero $x$ infinito.

Comparando $x^2y$ con $ay^2$ que han de ser los infinitos de orden superior, para poder despreciar los demás términos, tendremos

$$x^2y + ay^2 = 0, \quad x^2y = -ay^2, \quad y = -\frac{x^2}{a};$$

luego $y$ debe ser infinito de segundo orden; luego los términos $x^2y$, $ay^2$ son infinitos de cuarto orden, respecto á los que se anula el infinito de primer orden $a^2x$.

Comparando $x^2y$ con $-a^2x$, resulta

$$x^2y - a^2x = 0, \quad y = \frac{a^2}{x};$$

luego $y$ debe ser infinitamente pequeño de primer orden y $ay^2$ un infinitamente pequeño de segundo que se anula respecto á los otros dos términos.

$$\text{Si} \quad ay^2 - a^2x = 0, \quad \text{será} \quad y = a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}.$$

Si sustituímos en $x^2y$, resulta $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}$. Este término es infinitamente mayor que los otros dos; luego la hipótesis hecha no puede subsistir, pues no puede despreciarse este término con relación á los otros dos.

2.° Supongamos $x$ infinitamente pequeño.

Comparando $ay^2$ con $-a^2x$, suponiéndolos infinitamente mayores que $x^2y$, lo que no conduce á ningún absurdo, tenemos

que haciendo $ay^2 - a^2x = 0$, resulta $y = a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$ que, sustituído en $x^2y$ da $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}}$, cantidad despreciable.

Haciendo $x^2y + ay^2 = 0$, resulta $y = -\frac{x^2}{a}$ que sustituyendo en $x^2y$, $ay^2$ da $-\frac{x^4}{a}$, $+\frac{x^4}{a}$ infinitamente pequeños de cuarto orden, que son despreciables respecto á $-a^2x$; luego esta hipótesis debe desecharse, lo mismo que la siguiente $x^2y - a^2x = 0$ que da $y = \frac{a^2}{x}$, es decir $y$ infinito, resultando el término $ay^2$ infinitamente grande respecto á los otros dos.

Para el empleo del triángulo hay que seguir varias reglas en que no es necesario insistir, tales como por ejemplo que en dos rectas paralelas trazadas en el triángulo, los términos contenidos en la superior son de orden superior; que si se unen con una recta dos términos que deben ser de igual orden, también lo serán los comprendidos en esta recta, los cuales formarán en la ecuación que debe conservarse, etc.

Así pues, estableceremos la siguiente regla: *Si comparamos dos términos, suponiéndolos de igual orden, y se traza una recta por los centros de las casillas correspondientes á estos términos, todos los términos situados en las casillas cuyos centros se hallan en dicha recta, serán del mismo orden que los términos comparados.*

Además: *toda casilla cuyo centro se halla sobre la recta, contiene un término de orden superior, y si está debajo de la recta será de orden inferior,* lo que demuestra Cramer fácilmente fundándose en la disposición de los exponentes, según progresiones aritméticas.

De esto se deduce la regla siguiente, para distinguir en una ecuación indeterminada los términos que se hacen infinitamente mayores que los demás, por la suposición de ser $x$ ó $y$ infinitos ó infinitamente pequeños, (*) según la enuncia Cramer: *Trazado el triángulo analítico, se colocará cada término en*

(*) Cramer, *Introd. a l' Analyse* Newton. *Metod. fluxiones Epist. ad Oldemburgum.*

*la casilla correspondiente ó, mejor, se formará el triángulo con puntos dispuestos en tresbolillo* (quinconce), *y se cambiará en un asterisco, cada punto que ocupe el lugar de uno de los términos de la ecuación. Después se colocará el triángulo sobre la fila sin* x *ó sin* y, *según que* x *ó* y *se supongan infinitas ó infinitamente pequeñas.*

Según esto, si la variable se ha supuesto infinita, se verá por qué casillas de las señaladas por asterisco se puede hacer pasar una regla, sin dejar encima ninguna casilla señalada. Los términos que ocupan estas casillas son los únicos de toda la ecuación, y la recta, que trazada á lo largo de la regla, determina los términos mayores, se llama una *determinatriz superior*, y análogamente se define una *determinatriz inferior.*

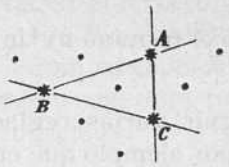


Fig. 55

EJEMPLO 1.º—Sea la ecuación ya considerada

$$x^2y + ay^2 - a^2x = 0.$$

En este ejemplo hay tres determinatrices AB, BC, CA, de las cuales, colocando el triángulo de manera que su base sea la banda sin $x$, resultan ser superiores AB y AC, siendo BC inferior (fig. 56). Pero si colocamos el triángulo de manera que su base sea la banda sin $y$, se verá que la determinatriz AC es superior y las AB y BC inferiores (fig. 57). Así tenemos que

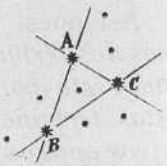


Fig. 56

$$\begin{array}{lll} \text{AB} & \text{da} & x^2y + ay^2 = 0 \quad \text{ó} \quad x^2 + ay = 0, \qquad (1) \\ \text{AC} & \text{»} & x^2y - a^2x = 0 \quad \text{»} \quad xy - a^2 = 0, \qquad (2) \\ \text{BC} & \text{»} & ay^2 - a^2x = 0 \quad \text{»} \quad y^2 - ax = 0. \qquad (3) \end{array}$$

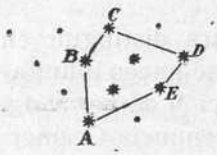


Fig. 57

Luego por la suposición de ser $x = \infty$, la ecuación propuesta se reduce á la (1) y (2) á que conducen las determinatrices superiores AB y AC, cuando el triángulo está sobre la banda sin $x$.

La hipótesis de ser $x$ infinitamente pequeña conduce á la ecuación (3), que da la determinatriz inferior en la misma posición del triángulo.

Pero la hipótesis $y = \infty$ conduce á la sola ecuación (1) dada por la determinatriz AB superior en el triángulo colocado sobre la banda sin $y$. En fin, la hipótesis de ser $y$ infinitamente pequeña conduce á las ecuaciones (2) y (3), que resultan de las determinatrices inferiores AC, BC en el triángulo colocado sobre la banda sin $y$.

EJEMPLO 2.°—Sea la ecuación

$$x^2y^2 + axy^2 + axy^2 + bx^2y + cx^3 + d^2xy + e^2x^2 + f^3y = 0.$$

Se obtienen cinco determinatrices que dan las siguientes ecuaciones

| | | |
|---|---|---|
| AB | $f^3y + axy^2 = 0,$ | $xy + \frac{f^3}{a} = 0,$ |
| BC | $axy^2 + x^2y^2 = 0,$ | $x + a = 0,$ |
| CD | $x^2y^2 + cx^3 = 0,$ | $y^2 + cx = 0,$ |
| DE | $cx^3 + e^2x^2 = 0,$ | $x + \frac{e^2}{c} = 0,$ |
| EA | $e^2x^2 + f^3y = 0,$ | $x^2 + \frac{f^3}{c}y = 0.$ |

Colocando el triángulo sobre la línea de las $y$, en el caso de ser $x$ infinita, resulta la CD como sola determinatriz superior; luego la ecuación se reduce á $y^2 + cx = 0$.

Si $x$ es infinitamente pequeña, en la misma posición del triángulo, se ve que las determinatrices inferiores son AB y AC; luego la ecuacion propuesta se reduce á las dos

$$xy + \frac{f^3}{a} = 0, \qquad x^2 + \frac{f^3}{e^2}y = 0.$$

En el caso de suponerse $y$ infinita ó infinitamente pequeña se colocaría el triángulo sobre la línea de las $x$.

Cuando una determinatriz pasa por más de dos casillas con términos de la ecuación propuesta, la que resulta tendrá más de dos términos.

OBSERVACIONES.—Se ve que la alteración de los exponentes en progresión aritmética, lo que da la colocación en línea recta de los términos de igual orden infinitesimal y la relación $k : l$

entre los exponentes de $x$ é $y$, que lleva consigo la inclinación respecto á las líneas ó á las columnas que forman los términos del triángulo, son los conceptos en que se basa el procedimiento empleado por De Gua.

Así cuando $k = l$, la determinatriz se halla igualmente inclinada respecto á las bandas ó lados del triángulo. Si $\frac{k}{l} > 1$ ó $k > l$ la determinatriz se halla más inclinada respecto á las bandas verticales que á las horizontales y resta un segmento mayor en la banda sin $y$ que en la banda sin $x$. Si $k = 0$, lo que sucede cuando la determinatriz es paralela al lado sin $x$, entonces á $x$ infinita corresponden valores finitos de $y$; y cuando $l = 0$ á $y$ infinita corresponden valores finitos de $x$ determinados por las raíces de la ecuación.

$$ax^m y^n + bx^{m+k} y^{n+l} + cx^{m+2k} y^{n+2l} + \ldots = 0$$

que corresponde á la determinatriz considerada, y que dividiendo por $x^m y^n$ se reduce á

$$a + bx^x + cx^{2x} + \ldots = 0 \ (*)$$

**76.** DESARROLLO EN SERIES.—Dada la ecuación

$$ay^3 - x^3 y - ax^3 = 0,$$

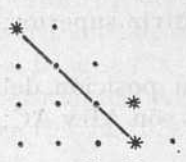


Fig. 58

desarrollar $y$ en serie ascendente respecto á $x$.

Colocada sobre el triángulo, se ve que solo tiene una determinatriz inferior que da la ecuación $ay^3 - ax^3 = 0$ ó $y = x$.

Tendremos el primer término.

Para obtener el segundo, se sustituye $y$ por $x + u$, y la ecuación se transformará en

$$3aux^2 + 3au^2 x + au^3 - x^4 - x^3 u = 0$$

que colocada en el triángulo da dos determinatrices inferiores, una que da $3aux^2 - x^4 = 0$, ó $u = \frac{x^2}{3a}$ que es el segundo término de la serie, no teniéndose en cuenta la otra que pasa por las casillas $u^3, u^2 x, ux^2$ y que daría por segundo término $u = \mathrm{R}\, x$

(*) *Cramer*, obra cit., p. 173.

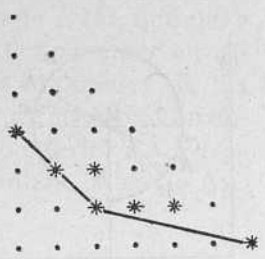
(representando R un número) que no da un exponente superior al obtenido en la primera operación.

Sustituyendo $u$ por $\frac{x^2}{3a} + t$ en la ecuación precedente, resulta $3atx^2 + tx^3 + 3at^2x + \frac{x^6}{27a^2} + \frac{tx^4}{3a} + t^2x^2 + at^3 = 0$.

Colocándola en el triángulo analítico, se obtendrá la determinatriz inferior que da la ecuación

$$3atx^2 + \frac{x^6}{27a^2} = 0 \quad \text{ó} \quad t = -\frac{x^4}{81a^3}$$

que es el tercer término de la serie, cuya determinación podrá continuarse de igual modo, y que será



$$y = x + \frac{x^2}{3a} - \frac{x^4}{81a^3} + \ldots\ldots$$

Cramer en su obra, de la que extractamos la presente teoría expone el procedimiento para calcular los términos *irregulares* de una serie, que son los dados por ecuaciones que tienen *raíces múltiples* ó *imaginarias*, y cómo se puede llegar á una serie regular.

Para conocer una rama infinita de curva representada por la serie

$$Ax^h + Bx^i + Cx^k + Dx^l + \ldots\ldots$$

hay que reconocer si los términos corresponden á parábolas ó hipérbolas, lo cual será objeto de otro capítulo.

## § 4.° Discusión de los puntos singulares

**77.** Teorema.—*Una ecuación algebráica con dos incógnitas representa en general una curva.* Sea la ecuación

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

que representa un polinomio entero de grado $n$ con respecto á $x$ é $y$.

Tracemos dos ejes rectangulares y tomemos en su plano un

punto M $(a, b)$. Las coordenadas de un punto próximo serán $a+h$ y $b+k$; y desarrollando la ecuación (1), resulta:

$$\frac{df}{da}h+\frac{df}{db}k+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{da^2}h^2+2\frac{d^2f}{dadb}hk+\frac{d^2f}{db^2}k^2\right)+\ldots=0\,. \quad (2)$$

Describamos desde M como centro y con un radio $\rho$ suficientemente pequeño una circunferencia. Para hallar los puntos de esta circunferencia que satisfacen á la ecuación propuesta, haremos

$$h=\rho\cos\theta\,, \qquad k=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,,$$

siendo $\theta$ el ángulo del radio vector con el eje de las $x$.

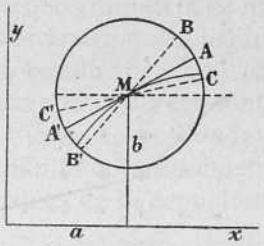


Fig. 59.

Podremos determinar un módulo H y un ángulo $\alpha$ de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial a}=-\,\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial b}=\mathrm{H}\cos\alpha\,;$$

y la ecuación (1) se reducirá á

$$\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,(\theta-\alpha)+\mathrm{P}\rho+\mathrm{Q}\rho^2+\ldots\ldots=0\,. \quad (3)$$

Siendo $\rho$ infinitamente pequeño, si H no es nula, la ecuación (3) sólo podrá quedar satisfecha por valores de $\theta$ próximos á los que anulan á sen $(\theta-\alpha)$, es decir, próximos á $\alpha$ ó á $180^\circ+\alpha$.

Tracemos por M una recta que forme el ángulo $\alpha$ con el eje de las $x$, y entonces los puntos que se buscan solo pueden hallarse en la proximidad de los puntos A y A' de intersección de dicha recta con la circunferencia.

En efecto, si damos á $\theta$ un valor que difiera de $\alpha$ ó de $180^\circ+\alpha$ en una cantidad superior ó igual al ángulo muy pequeño $\Theta$, pero determinado, será posible obtener una cantidad $e$ muy pequeña tal, que para todo valor $\rho$ inferior ó igual á $e$, el primer término del polinomio

$$\mathrm{H}\,\mathrm{sen}\,(\theta-\alpha)+\mathrm{P}\rho+\mathrm{Q}\rho^2+\ldots\ldots \quad (4)$$

adquiera un valor numérico mayor que la suma de los demás términos, y que dé por consiguiente su signo al polinomio.

Consideremos la derivada

$$H \cos(\theta - \alpha) + \frac{dP}{d\theta} \rho + \ldots . \qquad (5)$$

del polinomio (4) con respecto á $\theta$. Por no anularse el primer término de esta derivada para ningún valor de $\theta$ comprendido entre $\alpha - \Theta$ y $\alpha + \Theta$, ó bien entre $180 + \alpha - \Theta$ y $180 + \alpha + \Theta$, pues el coseno de un ángulo muy pequeño tiende hacia la unidad, se podrá hallar una cantidad muy pequeña $e'$ tal, que para todo valor de $\rho$ inferior ó igual á $e'$, exceda dicho primer término á la suma de todos los demás. Llamemos $\varepsilon$ la menor de las cantidades $e$ y $e'$, supongamos que el radio de la circunferencia descrita alrededor del punto M sea igual ó inferior á $\varepsilon$, y tracemos las rectas BB' y CC' que formen á ambos lados de AA' el ángulo $\Theta$.

De lo que precede resultará que:

1.° Siendo positivo el polinomio (4) para todos los puntos del arco BC' y negativo para todos los del arco B'C, dichos arcos no contienen ninguna solución de la ecuación (1); 2.°, este polinomio, que es función continua de $\theta$, (por ser función del seno y coseno de un arco), tiene valores de signos contrarios en los extremos de cada uno de los arcos BC y B'C'; por consiguiente cada uno de estos arcos contiene, por lo menos, una solución de la ecuación propuesta; 3.°, no anulándose la derivada del polinomio (4) para ninguno de los puntos de los arcos BC y B'C', cada uno de estos arcos sólo contiene una solución.

Si ahora concebimos que $\rho$ decrezca de una manera continua desde $\varepsilon$ hasta cero, cada uno de los valores de $\rho$ dará en cada uno de los ángulos infinitamente pequeños BMC y B'MC' un punto particular, y la serie de estos puntos formará una curva continua.

TEOREMA II.—*Si las coordenadas de un punto satisfacen á una ecuación algebráica* $f(x, y) = 0$, *pero sin anular simultáneamente á sus dos derivadas de primer orden; por este punto pasa una rama de curva simple con ó sin inflexión.*

En efecto, pudiendo ser el ángulo $2\Theta$ tan pequeño como se quiera, la recta AA' cuya ecuación es la siguiente

$$\frac{df}{da}(x - a) + \frac{df}{db}(y - b) = 0 ,$$

es tangente á la curva en M.

Para estudiar la forma de la curva en la proximidad de M, hagamos $\theta = \alpha$ ó $\theta = 180° + \alpha$ en el polinomio (4), que se reducirá á

$$P\rho + Q\rho^2 + \ldots . \qquad (6)$$

por anularse su primer término.

Podemos hallar una cantidad pequeña $e''$ tal, que para todo valor de $\rho$ inferior ó igual á $e''$, el primer término del polinomio (6) que no se anula, dé su signo al polinomio.

Llamemos $\varepsilon'$ á la menor de las cantidades $\varepsilon$ y $e''$, y supongamos que la circunferencia descrita alrededor del punto M tenga un radio inferior á $\varepsilon'$. Además, para $\theta = \alpha$ y para $\theta = 180° + \alpha$ los coeficientes P, Q,... tienen el mismo valor numérico, los coeficientes de orden impar con el mismo signo y los de orden par con signo contrario.

Si pues, el primer término que no se anula en el polinomio (6) es de orden impar, el polinomio (4) tendrá el mismo signo, por ejemplo, el signo + en A y en A'; y, por consiguiente los dos puntos de la curva se hallarán el uno entre A y C, el otro entre A' y B', la curva será convexa y su concavidad estará dirigida en el sentido de las $y$ negativas. Si el signo común fuese —, la curva sería también convexa, pero su concavidad estaría dirigida en sentido opuesto.

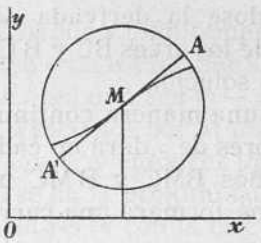


Fig. 60

En el caso de ser de orden par el primer término del polinomio (6) que no se anule; entonces, si en A es positivo y en A' negativo, uno de los puntos de la curva estará entre A y C y el otro entre A' y C' y habrá un punto de inflexión (figs. 59 y 60).

Siendo M un punto cuyas coordenadas satisfacen á las tres ecuaciones

$$f(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0, \qquad (7)$$

la ecuación (3) se reduce á la forma general

$$\left(\frac{\partial^m f}{\partial a^m}\cos^m\theta + \frac{m}{1}\frac{\partial^m f}{\partial a^{m-1}\partial b}\cos^{m-1}\theta \operatorname{sen}\theta + \ldots . + \frac{\partial^m f}{\partial b^n}\operatorname{sen}^m\theta\right) + S\rho + T\rho^2 + \ldots . = 0. \qquad (8)$$

Para satisfacer á esta ecuación, es necesario dar á $\theta$ valores próximos á los que anulan á su primer término, para lo que basta obtener las soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial^m f}{\partial b^m}\operatorname{sen}^m\theta + \frac{m}{1}\frac{\partial^m f}{\partial b^{m-1}\partial a}\operatorname{sen}^{m-1}\theta\cos\theta + \ldots\ldots\frac{\partial^m f}{\partial a^m}\cos^m\theta = 0. \qquad (9)$$

Si $\frac{\partial^m f}{\partial b^m}$ no se anula, esta ecuación no queda satisfecha por $\cos\theta = 0$. Podremos, pues, dividir por $\cos^m\theta$, y obtendremos, haciendo $tg\theta = u$,

$$\frac{\partial^m f}{\partial b^m}u^m + \frac{m}{1}\frac{\partial^m f}{\partial b^{m-1}\partial a}u^{m-1} + \ldots\ldots = 0, \qquad (10)$$

reduciéndose la ecuación general á la forma

$$\left(\frac{\partial^m f}{\partial b^m}u^m + \ldots\right) + \cos\theta\, S'\rho + \cos^2\theta\, T'\rho^2 + \ldots\ldots = 0, \qquad (11)$$

expresando S', T',... polinomios enteros respecto á $u$.

Consideremos las $m$ soluciones de esta ecuación, que determinarán $2m$ puntos en la circunferencia, opuestos diametralmente, dos á dos.

Si se anulan los $m'$ primeros coeficientes de la ecuación (9), esta ecuación se descompondrá en las dos

$$\cos^{m'}\theta = 0, \qquad (12) \qquad \frac{\partial^m f}{\partial b^{m-m'}}u^{m-m'} = 0. \qquad (13)$$

La primera da una raíz del grado $m'$ de multiplicidad, que será $\theta = 90°$ ó $\theta = 270°$. La segunda dará $m - m'$ raíces distintas de las anteriores. De manera, que si hacemos variar á $\theta$ desde 0° hasta 180°, considerando los puntos diametralmente opuestos como una sola solución, podremos decir que la ecuación (9) tiene $m$ raíces, de las que basta considerar las reales, simples ó múltiples.

Supongamos los puntos $A_1$, $A_2$, $A_3$,... y sus opuestos diametralmente en la circunferencia, $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$,...; cada uno colocado entre dos puntos muy próximos á ellos, también en la circunferencia, de modo que tengamos en su orden de colocación:

$$c_1\, A_1\, b_1, \ldots\, c_2\, A_2\, b_2, \ldots,\, c_3\, A_3\, b_3, \ldots\ldots,\, c'_1\, A'_1\, b'_1, \ldots,\, c'_2\, A'_2\, b'_2 \ldots\ldots,$$

representando por $\Theta$ el ángulo menor que la menor de las diferencias de las raíces de la ecuación (9)).

El primer miembro de la ecuación (9) y por consiguiente el de la ecuación (8) no se anulan, conservando el mismo signo, si $\rho$ es suficientemente pequeño en toda la extensión de los arcos $b_1 c_2, b_2 c_3, \ldots$; de manera que las soluciones sólo podrán encontrarse en los arcos exteriores á éstos, $b_1 c_1, b_2 c_2, \ldots$ que comprenden respectivamente á cada uno de los puntos $A_1, A_2, \ldots$

Pero los polinomios que consideramos tendrán, en los extremos de cada uno de estos arcos, el mismo signo ó signo contrario, según que corresponda dicho arco á una raíz de grado par ó impar de multiplicidad, pues ya en el caso de las $m'$ soluciones $\theta = 90°$ ó $\theta = 270°$, ya en el de las otras $m - m'$ soluciones, el primer miembro de la ecuación (8) se podrá escribir bajo la forma

$$G \cos^{m'} \theta + S\rho + T\rho^2 + \ldots \qquad (14)$$

cuando existe una solución $\theta = 90°$ ó $\theta = 270°$; y no anulándose G para esta solución, dicho polinomio conservará su signo entre $90° - \Theta$ y $90 + \Theta$ ó entre $270° - \Theta$ y $270° + \Theta$, para valores suficientemente pequeños de $\Theta$. Y para las otras soluciones dicho polinomio se escribirá bajo la forma

$$G (u - u_0)^{m'} + S\rho + T\rho^2 + \ldots, \qquad (15)$$

expresando $u_0$ la tangente del ángulo que se considera.

Así: *Cada uno de los arcos* $b_1 c_1, b_2 c_2, \ldots$ *contiene un número par* (incluído el cero) *ó impar de soluciones, según que el grado de multiplicidad correspondiente sea par ó impar.* Además *este número de puntos será á lo más igual al grado* m′ *de multiplicidad;* porque si fuese mayor, sería preciso que la derivada de orden $m'$ de los polinomios (14) y (15) se anulase en la extensión del arco de que se trata, lo que es imposible, por que ambas derivadas contienen un término de la forma $G \operatorname{sen}^{m'} \theta$ ó G. Las raíces simples dan una rama con ó sin inflexión. Estudiemos una raíz doble, $\theta = \alpha$, y sea AA′ (fig. 61) la recta correspondiente. Dividiendo por G los polinomios (14 y 15), tendremos

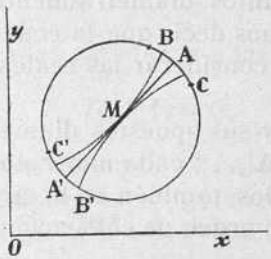


Fig. 61

$\cos^2\theta + S'\rho + T'\rho^2 + \ldots$ (16) $(u - u_0)^2 + S'\rho + T'\rho^2 + \ldots$ (17)

En los extremos de los arcos BC y B'C' estos polinomios tienen el signo $+$.

Si el primer término del polinomio $S'\rho + T'\rho^2 + \ldots$, que para $\theta = \alpha$ ó $\theta = 180^\circ + \alpha$ no se anula, es de orden par, este término, y por consiguiente el polinomio tendrán el mismo signo en A y A'. Supongamos que sea el signo $-$. En este caso existe una solución á cada lado de los puntos A y A'; y la curva tiene la forma representada en la fig. 61.

Cuando este signo común es $+$, hay ambigüedad. Cada uno de los arcos BC y B'C' puede no contener solución alguna ó contener dos situadas á un mismo lado de A y A'. Si el primer término del polinomio $S'\rho + T'\rho^2 + \ldots$ que no se anula para $\theta = \alpha$ ó $\theta = 180^\circ + \alpha$, es de orden impar, este primer término, y por consiguiente el polinomio, tendrá signos contrarios en A y en A'. Por ejemplo, el signo $-$ en A y el signo $+$ en A'. El arco contiene entonces dos soluciones, una á cada lado de A; pero hay duda para el otro arco B'C'. Para evitarla, escribamos los polinomios bajo la forma.

$$\cos^2\theta + \rho(S' + T'\rho + \ldots), \qquad (u - u_0)^2 + \rho(S + T'\rho + \ldots)$$

S' da su signo al paréntesis en toda la extensión del arco B'C'; y por consiguiente el polinomio, suma de dos cantidades positivas, no puede anularse. La curva ofrece un retroceso de primera especie (fig. 64).

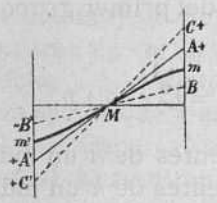



Fig. 62

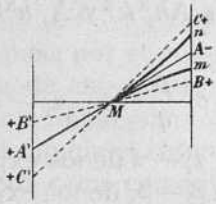



Fig. 63

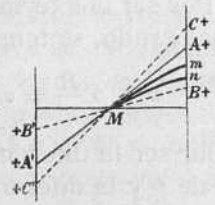



Fig. 64

Para salvar la ambigüedad que hemos encontrado en la discusión de la raíz doble consideremos dos paralelas al eje de las $y$ distantes de éste en $h$, y hagamos $u = u_0 + u'h'$, lo que reducirá la ecuación (15) á

$$(u'^2 + P'_0 u' + Q_0) + Sh + \ldots\ldots = 0, \qquad (18)$$

que se tratará, por consiguiente, como la ecuación (15).

Si $P'^2_0 - 4Q_0 < 0$, esta ecuación es imposible, y el punto M es aislado. Si $P'^2_0 - 4Q_0 > 0$, la ecuación que resulta igualando á cero el trinomio de la ecuación (18), admite dos raíces desiguales $u'_0$ y $u'_1$; y según que tengan el mismo signo ó signos contrarios, las dos ramas convexas, de que se compone la curva, se hallan situadas á un mismo lado ó á distinto lado de la tangente.

Cuando $P'^2_0 - 4Q_0 = 0$, si además $S_0$ es diferente de cero, la ecuación (18) admite, para una de las dos paralelas, dos soluciones próximas á $u'_0$, lo que da para $u$ dos valores próximos de $u_0 + u'_0 h$. Hay un *retroceso de segunda especie* (fig. 64). Si $S_0$ es cero, habrá ambigüedad y se hará $u' = u'_0 + u'' h$, continuándose el razonamiento.

Vamos á ver cómo esta discusión se reduce al método de Newton y Puisseux, expuesto en el t. II (págs. 257-266), siendo la ecuación de la forma $\Sigma A h^\alpha k^\beta = 0.$ (19)

Consideremos uno de los modos de agrupación de término de igual orden, representado por uno de los lados del polígono convexo formado, según la regla que allí se expuso.

Sea $\frac{p}{q}$ el valor correspondiente de $\mu$, expresando una fracción irreducible, en la recta

$$x - \alpha_1 = -\mu (y - \beta_2).$$

Por ser dos términos $Ah^\alpha k^\beta$ y $A_1 h^{\alpha_1} k^{\beta_1}$ del primer grupo, de igual grado, se tendrá

$$\alpha + \beta \frac{p}{q} = \alpha_1 + \beta_1 \frac{p}{q} \quad \text{ó} \quad (\alpha_1 - \alpha) q = (\beta - \beta_1) p.$$

Y por ser la diferencia $\alpha_1 - \alpha$ de los exponentes de $h$ un múltiplo de $p$ y la diferencia $\beta - \beta_1$ de los exponentes de $k$ un múltiplo de $q$, será

$$\alpha_1 - \alpha = np, \qquad \beta - \beta_1 = nq,$$

expresando $n$ un número entero. El primer grupo se escribirá así:

$$Ah^\alpha k^\beta + Bh^{\alpha+bp} k^{\beta-bq} + Ch^{\alpha+cp} k^{\beta-cq} + \ldots + Gh^{\alpha+gp} k^{\beta-gp}$$

siendo $b$, $c$,... números crecientes. Para continuar las transformaciones, consideremos primeramente que sea $q$ impar.

Si se hace $h = h'q$, $k = uh'^p$, siendo $h'$ una nueva cantidad infinitamente pequeña de igual signo que $h$ y $u$ una cantidad finita, el primer grupo se reduce á

$$h'^{\alpha q+\beta p} u^{\beta-gp}\left[Au^{gq} + Bu^{(g-b)q} + \ldots\ldots + G\right],$$

Por contener todos los términos de la ecuación el factor $h'^{\alpha p+\beta p}$, se puede dividir por éste, reduciéndose dicha ecuación á la forma

$$u^{\beta-gp}\left[Au^{gq} + Bu^{(g-b)q} + \ldots\ldots + G\right] + \ldots\ldots = 0. \quad (1)$$

Debiendo ser infinitamente pequeño el primer grupo, para que pueda reducirse con los siguientes el valor finito de $u$, deberá diferir muy poco de una de las raíces de la ecuación

$$Au^{gq} + Bu^{(g-b)q} + \ldots\ldots + G = 0. \quad (2)$$

Y haciendo $u^q = v$, esta ecuación se reduce al grado $g$ y se transforma en

$$Av^g + Bv^{g-h} + \ldots\ldots + G = 0. \quad (3)$$

Estudiemos cada una de las raíces de esta ecuación.

Si $v_0$ es una raíz simple de la ecuación (3), la ecuación (2) admitirá la raíz simple $u_0 = v_0^{1:q}$; y se demostrará, como anteriormente, que para cualquier signo de $h'$, la ecuación (1) admite una raíz próxima á $u_0$ y una sola; por lo tanto, $k$ tendrá un valor muy próximo á $u'_0 h'^q$. A esta raíz simple corresponde una rama de curva que pasa por el punto M y se extiende á la derecha y á la izquierda de este punto. La forma de la curva varía según que $p$ es par ó impar, mayor ó menor que $q$.

1.º $p$ impar. Cuando cambie el signo de $h$ ó de $h'$, cambia el signo de $k$, resultando una rama con inflexión, tangente á una paralela al eje de las $x$, si $\frac{p}{q} > 1$ (fig. 65, 1), á una paralela al eje de las $y$, si $\frac{p}{q} < 1$ (fig. 65, 2).

Cuando $p = q = 1$, la tangente se obtiene y no existe necesariamente inflexión.

2.° $p$ par. Cuando $h'$ cambia de signo, $h$ conserva el mismo signo. Si $\frac{p}{q} > 1$, la curva tiene la forma convexa ordinaria y es tangente á una paralela al eje de las $x$ (fig. 65, 3). Si $\frac{p}{q} < 1$, forma un retroceso de primera especie, cuya tangente es paralela al eje de las $y$ (fig. 65, 4).

3.° Sea $q$ par. Haremos

$$h = \pm h'^q, \qquad k = uh'^p, \qquad u^q = v,$$

siendo $h'$ una cantidad infinitamente pequeña, positiva ó negativa y $u$ una cantidad finita, que podremos suponer positiva, en virtud del doble signo de $h'$ ó de $h'^p$, puesto que $p$ es impar. Y afectaremos con el signo + ó — á la cantidad $h'^q$, según que se busquen puntos situados en la paralela á la derecha ó en la paralela á la izquierda.

Si consideramos la paralela á la derecha, será preciso hacer $h = h'^q$. La transformación es la misma que la efectuada anteriormente, llegándose á las ecuaciones (1), (2) y (3).

Si se considera la paralela á la izquierda, será preciso hacer $h = -h'^q$, y las ecuaciones (1), (2) y (3) quedarán sustituídas por las siguientes:

$$u^{\beta - gp}[Au^{gp} + (-1)^b Bu^{(g-b)q} + \ldots + (-1)^g G] + \ldots = 0 \quad (1')$$

$$Au^{gp} + (-1)^b Bu^{(g-b)q} + \ldots + (-1)^g G = 0 \quad (2')$$

$$Av^g + (-1)^b Bv^{g-b} + \ldots + (-1)^g G = 0. \quad (3')$$

Observaremos desde luego que las ecuaciones (3) y (3') tienen sus raíces iguales y de signo contrario. Los valores de $v$ únicamente admisibles son los positivos, dando origen los negativos á valores imaginarios de $u$. Sea pues, $v_0$ una raíz simple positiva de una de estas dos ecuaciones, por ejemplo, de la (3). La ecuación (2) admite la raíz real y positiva $u_0 = v_0^{1:q}$. Si en la ecuación (1) se dan sucesivamente á $h'$ un valor positivo y un valor negativo, esta ecuación admite dos raíces reales próximas á $u_0$, Resultan pues, para $k$ dos valores de signos contrarios próximos á $u_0 h'^p$. A esta raíz simple $v_0$ corresponde, por consiguiente, una rama doble de la curva situada á un mismo lado del punto M, á la derecha, en la hipótesis actual, que forma una rama

convexa ordinaria, tangente á una paralela al eje de las $y$, si $\frac{p}{q} < 1$ (fig. 65, 5), ó un retroceso de primera especie tangente á una paralela al eje de las $x$, si $\frac{p}{q} > 1$ (fig. 65, 6).

En los casos analizados, resulta pues una rama simple que puede tener una inflexión ó un retroceso de primera especie.

Sea ahora una raíz cuyo grado de multiplicidad es $n$. El primer miembro de la ecuación (3) ó (3') es divisible por $(v - v_0)^n$ y el primer miembro de la (2) ó (2') por $(u' - u_0)^n$. Si se hace $u = u_0 + k'$, siendo $k'$ una cantidad infinitamente pequeña, y se sustituye $u$ por este valor, la ecuación (1) ó (1') tendrá todos sus términos infinitamente pequeños, y tomará la forma

$$\Sigma A' h'^{\alpha' \beta'} = 0.$$

Se tratará esta ecuación como su análoga, la propuesta, siguiendo el procedimiento de Puisseux; y se examinarán las maneras de formar los grupos correspondientes, cada uno de las cuales conducirá á una ecuación análoga á la (19) cuando se haya escrito $h' = \pm h''^{q'}, k' = u'^{h''p'}, u'^{q'} = v'$. Las raíces simples de esta ecuación no ofrecerán ninguna dificultad. A una raíz simple corresponde un valor de $k'$ de la forma $u'_0{}^{h''p'}$, y por consiguiente, un valor de $k$ sensiblemente igual á $(u_0 + u'_0 k''^{p'})\, h'^{p}$.

Si $q$ y $q'$ son impares, $h'$ y $h''$ tienen el signo de $k$, y se tiene una rama de curva que se extiende á la derecha y á la izquierda del punto M, lo que reproduce las formas representadas en la fig. 65 (1, 2, 3, 4).

Si $q$ es par y $q'$ impar, es necesario elegir el signo de $h$, lo que indica que la curva sólo se extiende á un lado, $h'$ conserva el doble signo, $h''$ tiene el mismo signo que $h'$. Se tiene pues, para $k$, en una misma paralela, dos valores de signos contrarios, lo que reproduce una de las dos formas representadas por la fig. 65 (5, 6).

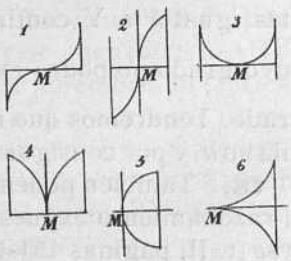


Fig. 65

Si $q$ es impar y $q'$ par, $h'$ tiene el mismo signo que $h$ y $h''$ un doble signo. Pero será necesario elegir en la nueva ecuación el signo de $h'$, lo que indica que la curva sólo se extiende á un

lado. Conservando $h''$ el doble signo y siendo $p'$ impar, se tiene para $k$, en una misma paralela, dos valores del mismo signo, lo que da un retroceso de segunda especie, cuya tangente es paralela al eje de las $x$ ó de las $y$, según que $\frac{p}{q}$ sea $>$ ó $<1$ (fig. 66). Sin embargo, en el caso ser $p=q=1$, el retroceso es de primera especie, siendo oblicua la dirección de la tangente (fig. 63).



Fig. 66

Por último, si $q$ y $q'$ son pares, es necesario elegir el signo de $h$ y después el de $h'$, conservando $h''$ el doble signo Se tendrá todavía un retroceso de segunda especie (fig. 66).

Cuando la ecuación en $v'$ tiene raíces múltiples reales, se hace $u' = u'_0 + k''$, y se efectúa una nueva transformación, análoga á las precedentes; y así sucesivamente, hasta llegar á una ecuación que no tenga ninguna raíz múltiple.

Ya se vió (t. II, p. 257) que el número de transformaciones es finito, pues si $m$ es el grado de la ecuación, siendo el mayor exponente de $k$ y de $u$ en las ecuaciones $\Sigma = 0$ y (1), á lo más $m$, es evidente que el grado de la ecuación (3) no puede exceder á $\frac{m}{q}$. Cuando se sustituye $u$ por $u_0 + k'$ en (1), el primer grupo da un término $k'^n$ independiente de $h'$. El exponente de $k'$ en el primer grupo de la nueva ecuación será, por consiguiente, á lo más igual á $n$. Y continuando así, llegaremos á una ecuación cuyo grado no podrá exceder á $\frac{m}{qq'q''\ldots}$, que será de primer grado. Tendremos que resolver, por último, una ecuación binomia en $u$, y por consiguiente, una ecuación de primer grado en $v$.

**78.** También podemos llegar al mismo resultado, siguiendo el razonamiento expuesto por M. Laurent en su *Cours d' Analyse* (t. II, páginas 154-162).

Sea $$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

Dando á $x$ é $y$ los incrementos $\xi$, $\eta$ y desarrollando $f(x+\xi, y+\eta)$ tendremos

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\xi\eta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2\right) + \ldots = 0 \qquad (2)$$

Tomando el punto $(x, y)$ como origen de coordenadas, estudiaremos el modo de cortar la curva á dos paralelas AB y A'B' al eje de las $y$, trazadas á una distancia $\xi$, á uno y otro lado de éste.

Puesto que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ no son nulas, á la vez supondremos $\frac{\partial f}{\partial y} \gtrless 0$, y haremos $\alpha = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\eta}{\xi} = a$; y podremos escribir

$$a - \alpha + \xi P = 0 , \qquad (3)$$

expresando P una función de $\xi$ y de $a$, finita para $\xi = 0$ y para valores finitos de $a$. Si se supone $\xi$ muy pequeño, en virtud de (3) $a$ converge hacia $\alpha$, y el coeficiente angular $a = \frac{\eta}{\xi}$ de la secante OM trazada por el origen O, converge hacia el coeficiente angular de la tangente; y siendo la derivada de (3)

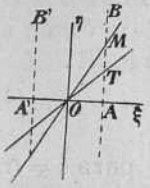


Fig. 67

$$1 + \xi \frac{\partial P}{\partial a} = 0 ,$$

la cual no puede anularse para valores muy pequeños de $\xi$, por conservar la derivada $1 + \xi \frac{\partial p}{\partial a}$ el mismo signo, el primer miembro de (3) sólo se anula una vez. La ecuación (1) tiene pues una sola raíz finita $a = \alpha$, y la curva encuentra á AB en un solo punto, pues para $a = \alpha$ el primer miembro de (3) tiene el signo de P; y, haciendo $a = \alpha + h$ ó $a = \alpha - h$, este primer miembro será, para valores pequeños de $\xi$, positivo ó negativo. Supongamos que P sea positivo. Entonces, la raíz de (3) estará comprendida entre $a$ y $a - h$; y por consiguiente la curva cortará á AB debajo de OT, cortándola sobre OT en el caso contrario (fig. 67). Análogas conclusiones obtendremos respecto á la paralela A'B' correspondiente á los valores negativos de $\xi$.

Si P tiene á $\xi$ por factor, cambiará de signo con éste.

Para $P > 0$ y $\xi > 0$, la curva corta á AB debajo de la tangente, y para $\xi < 0$, siendo $P < 0$, la curva cortará á A'B' en la región superior á la tangente. Hay pues inflexión.

Ahora bien; para que la curva $f(x, y) = 0$ presente una sin-

gularidad en $x$, $y$, es necesario que $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}=0$; y además demostraremos que es suficiente.

Siendo nulas las derivadas primeras de $f(x, y)=0$, tendremos que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\xi^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\xi\eta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\eta^2\right)+\ldots\ldots=0\,.$$

Esta ecuación debe tener un término independiente de $\xi$ ó $\eta$, sin lo que sería divisible por una de estas variables, y la ecuación propuesta no sería irreducible. Supongamos $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\gtrless 0$. Dividiendo por $\frac{1}{2}\xi^2$, tendremos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2a\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\xi Q=0\,, \qquad (4)$$

expresando Q un polinomio que permanece finito para $\xi=0$, mientras que $a$ no sea infinito. Distinguiremos tres casos:

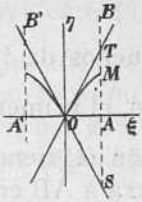


Fig. 68

1.° Que el trinomio escrito en la ecuación (4) se descomponga en dos factores reales y desiguales, por lo que se podrá escribir bajo la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a-\alpha)(a-\beta)+\xi Q=0\,. \qquad (5)$$

Suponiendo $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ positivo, tracemos las rectas OT y OS (fig. 68) cuyos coeficientes angulares son $\alpha$ y $\beta$; y podremos suponer Q distinto de cero para $a=\alpha$ ó $b=\beta$, sin lo que $f=0$ no sería ecuación irreducible. Supongamos además $\alpha>\beta$ y $Q>0$ para $a=\alpha$.

Haciendo $a=\alpha$ y $a=\alpha-h$, el primer miembro de (5) adquiere signos contrarios, cuando $\xi$ es suficientemente pequeño. La ecuación (5) tiene pues una raíz $a$ próxima á $\alpha$, teniendo $y$ un valor AM próximo á $\alpha\xi=$ AT; y la curva corta á AB en la proximidad de T (en el caso presente bajo el punto T). Se verá de igual manera que la curva corta á AB en la proximidad del punto S. Además no existe ningún otro punto próximo á O en

la curva AB, porque la derivada del primer miembro de (5) ó (4) se reduce á

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2a\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \xi\frac{\partial Q}{\partial a},$$

y se anula tan solo una vez para valores finitos de $a$, cuando $\xi$ es muy pequeño. Y es fácil determinar si estos puntos se hallan sobre ó bajo OS y OT, que siendo los límites de la secante, son tangentes. El punto O es pues singular, y en él se cruzan dos ramas de la curva. Es un *punto doble* ó *nodo simple.*

2.° Si el trinomio considerado no puede descomponerse en factores reales, la ecuación (4) conserva el signo de este trinomio (que no puede anularse) para valores pequeños de $\xi$. No existen puntos de la curva en la proximidad del punto O, que es un punto *aislado* ó *conjugado.*

3.° Si el trinomio es un cuadrado perfecto, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

y la ecuación (4) se reduce á la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a-\alpha)^2 + \xi Q = 0. \qquad (6)$$

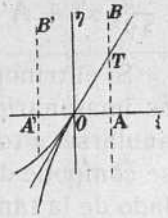


Fig. 69

Si trazamos la recta OT cuyo coeficiente angular es $\alpha$, entonces $a$ tiende hacia $\alpha$ para $\xi = 0$. Esta recta OT es por lo tanto una tangente. Si se hace $a = \alpha$, para $\xi > 0$, el primer miembro de (6) tiene el mismo signo que Q. Para otros valores de $a$ es positivo.

Se concluye pues, que hay por lo menos dos intersecciones á ambos lados de la tangente en A'B'; y no hay mas que dos, pues la derivada del primer miembro de (6) es

$$2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a-\alpha) + \xi\frac{\partial Q}{\partial a},$$

que se anula una vez tan solo para valores pequeños de $\xi$. Análogamente razonaremos para el caso de ser Q negativo, cuando $a = \alpha$.

Pero si Q puede cambiar de signo con $\xi$, tendremos que escribir el desarrollo $Q = A + B\xi + C\xi^2 + \ldots\ldots$ Entonces (6) se reduce á

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a-\alpha)^2 + A\xi + B\xi^2 + \ldots\ldots = 0 . \qquad (7)$$

Supongamos $A = 0$ para $a = \alpha$; y el primer miembro de (7) tendrá el mismo signo que B. Si pues B es negativo; como para $a \gtrless \alpha$, este primer miembro es positivo, la curva encontrará á cada una de las rectas AB y A'B' en dos puntos. La curva tiene dos ramas tangentes entre sí (fig. 59).

En el caso de ser B positivo, haremos $a = \alpha + \alpha'\xi$ y la ecuación (7) se reducirá á

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\alpha'^2\xi^2 + (A_0 + A'_0\xi\alpha' + \ldots)\xi + (B_0 + B'_0\xi\alpha' + \ldots)\xi^2 + \ldots = 0$$

expresando $A_0, B_0, \ldots\ldots$ los valores de A, B, $\ldots\ldots$ para $a = \alpha$; y dividiendo por $\xi^2$, tendremos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\alpha'^2 + A'_0\alpha' + B_0 + \xi\left(\frac{A''_0}{2}\alpha'^2 + B'_0\alpha' + \ldots\right) + \ldots = 0 . \qquad (8)$$

Si el trinomio $\alpha'$, independiente de $\xi$ es siempre positivo, $\alpha'$ es imaginario y O es un punto aislado. Si este trinomio puede anularse, $a$ toma dos valores reales $\alpha + \alpha'\xi$ y $\alpha + \beta'\xi$; y la curva se compone de dos ramas situadas á uno y otro lado ó al mismo lado de la tangente común, según que $\alpha'$ y $\beta'$ tengan signo igual ó contrario.

Si el trinomio en $\alpha'$ tiene raíces iguales, la ecuación (8) tiene dos raíces iguales.

Si el coeficiente de $\xi$ es positivo cuando $\xi$ es negativo, $a$ tiene entonces dos valores de la forma

$$\alpha + (\alpha' + \varepsilon_1)\xi \quad \text{y} \quad \alpha + (\alpha' + \varepsilon_2)\xi ,$$

siendo $\varepsilon_1$ y $\varepsilon_2$ muy pequeños con relación á $\alpha'$. La curva se presenta bajo la forma de dos ramas situadas á un mismo lado de la tangente común, no cortando más que á una de las paralelas AB y A'B'. En el punto O hay un *retroceso de segunda especie*.

En resumen: Si las tres derivadas segundas de $f$ no son nulas á la vez, la curva tiene en $(x, y)$ un punto *singular ordinario*, que será *extraordinario*, cuando se anulen simultáneamente dichas tres derivadas, lo que exige un razonamiento más detallado.

EJEMPLO.—Sea la curva

$$f(x,y) = x^5 y + ax^7 + bx^2 y^5 + cx^8 + dx^4 y^4 + exy^7 + fx^4 y^5 + gy^9 + hy^{10} = 0 \qquad (1)$$

que tiene un punto séxtuplo en el origen.

Podremos despreciar, desde luego, los términos en los que el exponente de $x$ es mayor que 5 y podremos despreciar el término en $y^{10}$, porque según la figura la construcción de Puiseux comienza en $y^3$. Tendremos por consiguiente,

$$x^5 y + bx^2 y^5 + dx^4 y^4 + exy^7 + fx^4 y^5 + gy^9 = 0. \qquad (2)$$

Según la construcción de Puiseux los términos correspondientes á los puntos (0,9) y (2,5) pertenecen á un ciclo y juntamente con ellos el correspondiente al punto (1,7) en línea recta con los otros dos. Tendremos, pues, la ecuación

$$C_1 = bx^2 + exy^2 + gy^4 = 0. \qquad (3)$$

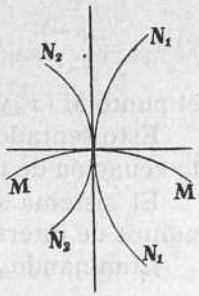
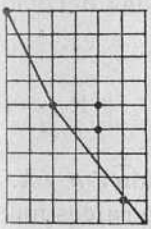


Fig. 70

Para $y = 0$, resulta $x^2 = 0$; para $x = 0$, $y^4 = 0$; luego el eje de las $x$ encuentra á la curva en dos puntos coincidentes y el de las $y$ en cuatro. Haremos $x = x'^2$ é $y = y'$, resolviendo la ecuación de segundo grado que resulte. La curva $C_1$ se descompone en dos factores lineales $x' - m_1 y'$ y $x' - m_2 y'$. Siendo $x$ comparable $y^2$, las dos curvas correspondientes á estos factores lineales, serán del tipo de la parábola, esto es:

$$x = m_1 y^2, \qquad x = m_2 y^2.$$


Fig. 71

La recta que une los puntos (2,5) y (5,1) da otro ciclo, representado por la ecuación

$$C_2 = x^3 + by^4 = 0. \qquad (4)$$

$x^3$ es comparable con $y^4$; por consiguiente la curva tiene en el origen un punto triple con tres tangentes que se confunden con $x = 0$, que corresponden á

$$x = \sqrt[3]{-by^4}$$

Hay pues dos ramas imaginarias y una real.

No existiendo más ciclos, según la figura, podremos completar la determinación del punto séxtuplo por la construcción de una rama aproximada, uniendo el punto (5,1) correspondiente al término $x^5y$ con el punto (0,7) correspondiente al término $ax^7$ de la ecuación (1), lo que da

$$B = y + ax^2 = 0$$

que pertenece al tipo de la parábola.

DEFINICIÓN.—Si en la ecuación (1) se tiene, para $x = x_0$, $y = y_0$

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

$$f'_{x_0}(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_{y_0}(x_0, y_0) = 0,$$

$$f''_{x_0 x_0}(x_0, y_0) = 0, \qquad f'_{x_0 y_0}(x_0, y_0) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{p-1}_{x_0 p-1}(x_0, y_0) = 0, \ldots, f^{p-1}_{y_0 p-1}(x_0, y_0) = 0,$$

el punto M $(x_0 y_0)$ es un punto múltiplo de orden $p$.

Esto sentado, sea $$y - y_0 = \lambda (x - x_0) \qquad (2)$$ la ecuación de una secante que pasa por M.

El sistema de ecuaciones $f(x, y) = 0$ y (2) determina los puntos de intersección de la secante y de la curva.

Eliminando $y$,

resulta $$f(x, y_0 + \lambda x - x_0) = 0,$$ y haciendo

$$x = x_0 + h \qquad k = \lambda h,$$

se obtiene $$f(x_0 + h, y_0 + k) = 0;$$

y en virtud de las condiciones de anulación de las derivadas hasta el orden $p$,

$$\frac{1}{p!}\left[h^p \frac{d^p f(x_0 y_0)}{dx^p} + ph^{p-1} \frac{d^p f(x_0, y^0)}{dx^{p-1} dy}\right] + \ldots + R_p = 0,$$

siendo $R_p$ de grado $p + 1$ por lo menos, con relación á $h$ y $k$.

Podemos sustituir $\lambda h$ en vez de $k$ y suprimir $p$ raíces nulas. Por consiguiente la recta (2) encuentra á la curva en $p$ puntos confundidos con M, quedando la ecuación reducida á la forma

$$\frac{1}{p!}\left[\frac{d^p f(x_0, y_0)}{dx^p} + p\lambda \frac{d^p f(x_0, y_0)}{dx^{p-1} dy} + \ldots\right] + h R'^p = 0 \qquad (3)$$

Para que la secante se convierta en tangente, es necesario que un nuevo punto de intersección de la secante con la curva pase á M, ó que la ecuación (3) tenga una nueva raíz nula, lo que se consigue haciendo

$$\left(\frac{d^p f}{dx^p}\right) + p\lambda\left(\frac{d^p f}{dx^{n-1}\,dy}\right)_0 + \ldots + \lambda^p\left(\frac{d^p f}{dy^p}\right)_0 = 0. \quad (4)$$

Esta ecuación en $\lambda$ determina las $p$ tangentes á la curva en M; y obtendremos la ecuación del conjunto de las tangentes, eliminando $\lambda$ entre la ecuación (4) y la (2).

## § 5.° Diferentes especies de puntos singulares

**79.** Punto múltiple es aquel por el cual pasan varias ramas de curva, admitiendo ésta en él varias tangentes.

Ejemplo.—Sea

$$y = \varphi(x) \pm (x - a\,(x - b)^{\frac{p}{q}},$$

representando $\frac{p}{q}$ una fracción irreducible cuyo denominador es par.

La curva representada por la ecuación tiene dos ramas que se reducen á una $y = \varphi(a)$, para $x = a$.

La derivada

$$\frac{dy}{ax} = \varphi'(x) \pm (x - b)^{\frac{p}{q}} \pm \frac{p}{q}(x - a)(x - b)^{\frac{p}{q}-1}$$

se reduce para $x = a$ á

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(a) \pm (a - b)^{\frac{p}{q}}$$

expresión que da los coeficientes angulares de las dos tangentes en el punto $x = a$, $y = \varphi(a)$.

Si $a > b$, habrá dos tangentes distintas que se reducen á una sola, cuando $x = a$. El punto $x = a$, $y = \varphi(a)$ es un punto doble.

Si $a < b$, $\frac{dy}{dx}$ será imaginaria; no habrá tangente. No existe ningún punto de la curva en la proximidad del punto considerado, que es un *punto aislado*.

**80.** PUNTOS DE INFLEXIÓN están caracterizados por cambiar de signo el coeficiente angular de la tangente.

EJEMPLO.—Sea la curva, llamada lemniscata

$$y = \pm x\sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-x^2} \mp \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Para $x = 0$, se tiene $\frac{dy}{dx} = \pm 1$.

El punto $x = 0$ $y = 0$ es pues un punto doble. Además se tiene que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{\frac{x(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} - 4x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)} = \pm\frac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{2:3}}$$

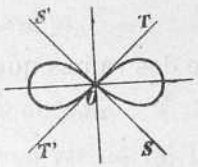


Fig. 72

Para $x = 0$, se tiene $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. El origen es un punto de inflexión.

En general, una tangente gira de una manera continua alrededor de la curva, mientras que su punto de contacto camina en el mismo sentido. Pero en un punto de inflexión dos tangentes sucesivas coinciden, de manera que mientras el punto continúa avanzando regularmente, la rotación de su tangente en el punto de inflexión es nula. Esta tangente (tangente estacionaria) se detiene un instante, para continuar su rotación en sentido opuesto.

En la figura 73, la curva está sustituída por un polígono. El punto $(x)$ avanza sobre la recta envolvente $(u)$, siempre en la misma dirección; pero esta recta, después de haber girado en el mismo sentido, de la posición $u$ á $u'$, pasa de $u'$ á $u''$, girando en sentido opuesto. En $u'$ la rotación es nula. Los ángulos de

contingencia en $u'$ se hacen infinitamente pequeños respecto á los que preceden y á los que les siguen.

La tangente en el punto de inflexión encuentra á la curva en tres puntos. Por consiguiente las curvas de segundo grado no tienen puntos de inflexión y las de tercero no pueden encontrarla en un nuevo punto. Pero las de órdenes superiores pueden encontrarlas en más puntos.

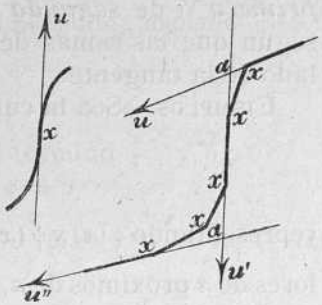


Fig. 73

Siendo AB una tangente de inflexión; si por cierta hipótesis se anula la distancia AB, el contacto equivaldrá á cuatro intersecciones. El punto será de *doble inflexión* ó de *serpenteo*, (fig. 75). Las inflexiones son alternativamente visibles é invisibles.

Ejemplos.—La parábola ordinaria $y = x^2$ solo tiene en el vértice un punto simple sin inflexión, solo la encuentra el eje de abscisas en dos puntos.

La parábola cúbica $y = x^3$ tiene una inflexión en el origen; $y = 0$ da $x^3 = 0$; luego las tres raíces iguales á cero manifiestan que el eje de abscisas encuentra tres veces á la curva en el origen y es á la vez tangente y secante (fig. 74).

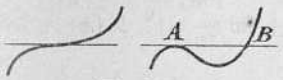


Fig. 74

Se verá que si en vez de $y = x^3$ se hace $y = x^3 - bx^2$, la curva considerada es tangente en A y secante en B, pues queda satisfecha por $x = 0$, $x = 0$, $x = b$; pero si AB disminuye sucesivamente (fig. 72), cuando sea cero, se pasará á la curva $y = x^3$ y á tres raíces nulas.

La parábola de cuarto grado $y = x^4$ tiene un punto de serpenteo. Podemos considerar la curva $y = x^4 - bx^3$ que tiene un punto de inflexión en el origen A y corta á la curva en B. Cuando la distancia AB se haya reducido á cero la raíz $x = b$ se reducirá también á cero.



Fig. 75

La parábola cuadrado-cúbica, ó de quinto grado, tendrá un punto de triple inflexión en el origen.

PUNTOS DE RETROCESO son, como sabemos, aquellos en que terminan dos ramas que tienen una tangente común. Son de *primera* ó de *segunda especie,* como se ha visto (pág. 76), según que las ramas de curva están á distinto ó á un mismo lado de la tangente.

EJEMPLOS.—Sea la curva

$$y = \varphi(x) \pm (x-a)^{\frac{p}{q}} \psi(x),$$

representando $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ dos funciones reales y finitas para valores de $x$ próximos de $a$, y suponiéndose la fracción $\frac{p}{q}$ positiva, irreducible y con denominador par.

Para cada valor de $x$ superior á $a$, el segundo término tendrá dos valores reales iguales y de signo contrario.

Los dos valores distintos de $y$ se hacen iguales para $x = a$ é imaginarios para $x < a$.

Dos ramas se reunen, pues, en el punto $x = a$, $y = \varphi(a)$. La derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \pm \frac{p}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1} \psi(x) \pm (x-a)^{\frac{p}{q}} \psi'(x).$$

Si $\frac{p}{q} > 1$, al valor $x = a$ corresponde $\frac{dy}{dx} = \varphi'(a)$.

Luego las dos ramas, que se reunen en el punto $x=a, y=\varphi(a)$, tienen la misma tangente, y dicho punto es de retroceso.

Para saber si es de primera ó de segunda especie, derivaremos, y resultará

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(x) \pm \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)(x-a)^{\frac{p}{q}-2} \psi(x)$$
$$\pm 2\frac{p}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1} \psi'(x) \pm (x-a)^{\frac{p}{q}} \psi''(x).$$

Supondremos: 1.º $\frac{p}{2} - 2 > 0$, y se tendrá, para $x = a$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(a) .$$

Si pues $\varphi''(a)$ no es nula, $\frac{d^2y}{dx^2}$ tiene el mismo signo en las dos ramas, y la curva tiene un retroceso de segunda especie.

2.° Si se tiene $$\frac{p}{q} - 2 < 0 ,$$

para un valor un poco superior á $a$, el término

$$\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)(x-a)^{\frac{p}{q}-2}\psi(x) \qquad (\alpha)$$

será muy grande en valor absoluto, y no sucederá lo mismo á los otros términos de $\frac{dy^2}{dx^2}$ que todos, excepto el primero $\varphi''(x)$, convergen hacia cero, cuando $x$ tiende hacia $a$.

Así, el término $(\alpha)$ da su signo á $\frac{d^2y}{dx^2}$; y por tener doble signo, resulta que, en el punto $[x = a, y = \varphi(a)]$, las dos ramas se hallan á los dos lados de la tangente común.

EJEMPLO.—Sea

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}} .$$

A un valor positivo de $x$ corresponden dos valores de $y$, que se hacen iguales para $x = 0$. La curva no tiene ningún punto al lado de las abscisas negativas. Por el lado de las abscisas positivas tiene dos ramas infinitas, la una hacia las $y$ positivas, la otra hacia las $y$ negativas, ésta, después de haber cortado al eje de las $x$ en el punto $x = 1$ (fig. 76).

El límite de la relación $\frac{y}{x}$ es cero cuando $x = 0$, y cuando $x$ se hace igual á cero, por el lado de las $x$ positivas, los dos valores correspondientes de $y$ son positivos; luego las dos ramas tienen la misma tangente en el origen, y se hallan situadas cerca de este punto al mismo lado de la tangente; por consiguiente el origen es un punto de retroceso de segunda especie.

Vemos además que

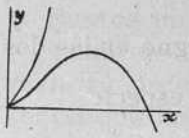


Fig. 76.

$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 2 \pm \frac{15}{4}x^{\frac{1}{2}}.$$

Para $x = 0$, se tiene

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} > 0.$$

**81.** PUNTOS AISLADOS.—*Punto aislado* es aquél cuyas coordenadas satisfacen á la ecuación de la curva, sin que ninguna rama de ésta pase por el mismo.

EJEMPLO.—Sea

$$y = \pm (x - a)\sqrt{x - b}.$$

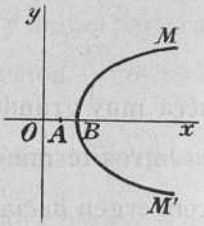


Fig. 77

1.º Sea $a < b$. Para $x = b$ se tiene $y = 0$.

Se tiene pues, un punto B en el eje de las $x$.

Si $x$ aumenta desde $b$ hasta $+\infty$, $y$ aumenta desde 0 hasta $\pm\infty$, y se tiene una rama MBM'. Si $x < b$, será $y$ imaginaria, excepto para $x = a$, correspondiendo $y = 0$ (fig. 77).

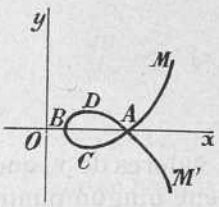


Fig. 78

El punto $x = a$, $y = 0$ es pues, un punto aislado.

2.º Si $a > b$, la curva tiene un bucle entre los valores $x = a$, $x = b$, correspondiendo en este intervalo dos valores de $y$ á cada valor de $x$, que se reducen á cero para dichos valores extremos de $x$. Desde $x = a$ hasta $x = \infty$, $y$ crece hasta el infinito, teniendo dos ramas infinitas que se cortan en el punto A, correspondiente á $x = a$, que es punto doble.

**82.** PUNTO DE PARADA.—Se entiende por *punto de parada* el punto en que una rama de curva se detiene.

EJEMPLO.—Sea

$$y = e^{\frac{1}{x}}.$$

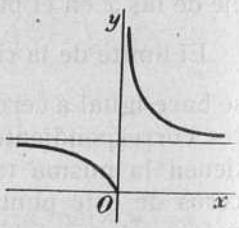


Fig. 79

Demos á $x$ valores positivos.

Para $x = 0$, se tiene $y = \infty$. Si $x$ crece hasta $+\infty$, $y$ decrece desde $+\infty$ hasta $+1$, lo que da una rama asintótica al eje de las $y$ y á la recta $y = 1$.

Cambiando $x$ en $-x$ será $y = 1 : e^{\frac{1}{x}}$. Para $x = 0$ será $y = 0$. La curva pasará por el origen. La ordenada aumentará con el valor absoluto de $x$ hasta $y = 1$.

Existirá una segunda rama asintótica á la recta $y = +1$ que se detendrá en el origen, viniendo á las $x$ negativas.

Hay un punto de inflexión (fig. 79) para

$$x = -\frac{1}{2}.$$

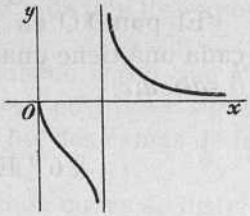


Fig 80

EJEMPLO.—Sea

$$y = \frac{1}{lx}.$$

No se puede dar valores negativos á $x$, porque $lx$ sería imaginario. Si le da á $x$ valores positivos muy pequeños, la ordenada será muy pequeña y negativa y crecerá en valor absoluto con $x$ hasta $x = 1$, haciéndose igual á $-\infty$ para $x = 1$.

Se tendrá pues, una rama de curva que parte del origen y cuya asíntota por el lado de las $y$ negativas es la recta $x = 1$. Si $x$ crece á partir de 1 hasta $\infty$, $y$ se hace positiva; y esta ordenada, al principio muy grande, decrece indefinidamente hasta cero, lo que da la rama MM'. El origen es un punto de parada (fig. 80).

**83.** PUNTO SALIENTE Ó ANGULOSO.—Sea

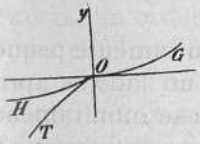


Fig. 81

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

Para $x = 0$ se tiene $y = 0$. El origen es un punto de la curva. Si en $\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ se ha-

ce $x = 0$, se tiene $\lim \frac{y}{x} = 0$. La rama OM tiene por tangente en el origen el eje de las $x$.

Si ahora hacemos $x = -z$, de donde $\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{z}}}$ para $x = -z = 0$ se tiene $\lim \frac{y}{x} = 1$; luego la rama ON situada en la parte inferior de las $x$ negativas, tiene por tangente la bisectriz OT del ángulo de los ejes.

El punto O en el que terminan dos ramas de curva que cada una tiene una tangente distinta, se llama *punto anguloso ó saliente*.

## § 6.° Estudio de las ramas infinitas

Si consideramos, siguiendo la exposición de Cramer en su *Introduction á l'analyse des lignes courbes* la serie,

$$y = Ax^h + Bx^i + Cx^k + \ldots\ldots,$$

ordenada con arreglo á las potencias descendentes de $x$; para estudiar la rama de curva que representa, tendremos que examinar las curvas $y = Ax^h$, $u = Bx^i$, . . . . que se conocen con el nombre de *hipérbolas* ó de *parábolas*, según que los exponentes $h$, $i$, . . . sean negativos ó positivos.

La ecuación $y^l = \alpha x^{-k}$ ó $y = Ax^{-k:l}$ se llama la familia de las hipérbolas de las que las más sencillas son la hipérbola ordinaria $xy = \alpha$ y la *hipérbola cúbica* $xy^2 = \alpha$. Todas estas hipérbolas tienen por asíntotas sus ejes; porque en la ecuación

$$y = Ax^{-k:l} = \frac{A}{x^{k:l}},$$

al valor infinito de $x$ corresponde un valor infinitamente pequeño de $y$, é inversamente; de manera que por un lado se aproxima infinitamente del eje de abscisas, alejándose infinitamente del de las ordenadas, y por el otro, se aproxima infinitamente del eje de las ordenadas, alejándose infinitamente del eje de las abscisas.

A su vez la parábola ordinaria origina, como la hipérbola una familia numerosa comprendida en las curvas que representa la ecuación general $y = x^{+h:l}$. Entre estas parábolas se encuentra la recta $y = x$, bisectriz del ángulo de las coordenadas rectangulares.

Las dos familias de curvas se pueden representar por la ecuación común $y^l = \alpha x^k$ ó $y = Ax^h$, que expresa parábolas, cuando $\frac{h}{l}$ ó $k$ es positivo é hipérbolas, cuando es negativo.

La disposición de estas curvas respecto á los ejes de coordenadas depende del signo del parámetro $\alpha$ y de que los exponentes $k$ y $l$ sean pares ó impares. Así:

1.° Si $k$ y $l$ son impares, $x^k$ tendrá el mismo signo que $x$; luego $\alpha x^k$ tendrá el mismo signo que $x$ si $\alpha$ es positivo y signo contrario, si $\alpha$ es negativo, distribuyéndose las dos ramas de la curva en el 1.° y 3.er cuadrante ó en el 2.° y 4.°

2.° Si $k$ es par y $l$ impar, las ramas de cada curva se distribuirán en el 1.° y 2.° ó en el 3.° y 4.° cuadrantes.

3.° Si $k$ es impar y $l$ par, la distribución de las ramas será en el 1.° y 4.° ó en el 2.° y 3.°

4.° Si $k$ y $l$ son pares, la curva será imaginaria cuando $\alpha$ sea negativo; pero tendrá cuatro ramas reales, una en cada cuadrante, cuando $\alpha$ sea positivo.

Toda rama infinita, al alejarse al infinito adquiere insensiblemente la naturaleza de una rama hiperbólica ó parabólica, difiriendo de ella poco á una gran distancia, confundiéndose con ella en el infinito. Las ramas hiperbólicas tienen una asíntota y las parabólicas no tienen ninguna.

Esto hace que las ramas infinitas de las curvas se dividan en dos géneros: *ramas hiperbólicas* y *ramas parabólicas.*

Si la serie

$$Ax^h + Bx^i + Cx^k + \ldots\ldots$$

expresa la ordenada de una rama infinita, para conocer si esta rama es hiperbólica ó parabólica, se tomarán todos los términos en los cuales el exponente de $x$ es positivo ó cero; y llamando $v$ á su suma, si la línea cuyas coordenadas son $x$ y $v$ es una recta, la rama es hiperbólica y esta recta es la asíntota. La rama será parabólica, si la línea cuya cuya abscisa y ordenada son $x$ y $v$ no es una recta.

Si la línea cuyas coordenadas son $x$ y $v$ es una recta, la serie $v + \ldots\ldots$ es una rama hiperbólica cuya asíntota es dicha recta, porque todos los términos siguientes, en los que el exponente de $x$ es negativo, tienen una suma tanto más pequeña cuanto mayor es $x$, reduciéndose á cero cuando $x$ es infinita.

Para que los términos de $v$ sean la ordenada de una recta, es necesario que $x$, en estos términos, no pase del primer grado.

Una rama hiperbólica que tiene una asíntota recta, tiene también una asíntota curva ó varias, porque cuantos más términos se tomen en la serie, más se aproximará á la ordenada de la curva. Luego si se describe una curva cuya abscisa sea $x$ y la ordenada $v$ con uno ó varios términos siguientes de la serie, esta curva será una asíntota de la propuesta, que se aproximará tanto más en el infinito, cuantos más términos se tomen después de $v$. Así, como el primer término de los que sigue á $v$ vale infinitamente más que todos los demás, la curva cuya ordenada es $v$ con el primer término que sigue, es decir, con el primer término de la serie en el que $x$ tiene exponente negativo, es propiamente la que se llama asíntota curva de la rama infinita representada por dicha serie, y esta curva es una hipérbola cuya abscisa es CO ($z$) y cuya ordenada es ON ($t$); porque siendo PM la ordenada de la curva propuesta M$m$, PO ($v$), la ordenada de la asíntota BCO, PN ($v+t$) la ordenada de la asíntota curva N$n$, ($t$) es el primer término de la serie en que $x$ tiene un exponente negativo, por ejemplo $Cx^{-k:l}$; y las paralelas AC y PO dan AB: BC = AP: CO.

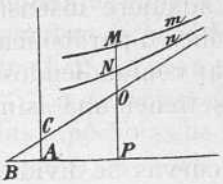


Fig. 82

La razón $\frac{AB}{BC}$ está determinada por el triángulo ABC. Sea B : K la razón de AB á BC. Tendremos B : K = AP ($x$): CO ($z$); luego $z = \frac{Kx}{B}$ ó $x = \frac{Bz}{K}$, y la ordenada $t$ ó sea $Cx^{-k:l} = \frac{CB^{-k:l}}{K^{-k:l}} z^{-k:l}$ ó $t^l = \frac{C^l K^k}{B^k} z^{-k}$, que es la ecuación de una hipérbola.

Si el coeficiente tiene en el infinito el mismo ó signo contra-

rio que $v$, las ramas caen más allá ó más acá de la asíntota recta.

La rama infinita representada por una serie será parabólica, cuando en el primer término $Ak^h$ el exponente es un número positivo distinto de la unidad ó cuando al ser igual á la unidad el exponente $i$ del segundo término $Bx^i$ sea positivo, pero inferior á la unidad.

Para obtener las ramas infinitas por medio del triángulo analítico, Cramer procede en su *Introduction á l' Analyse* de la manera siguiente:

EJEMPLO 1.º—Sea la curva $xy^2 - a^2y - b^3 = 0$, que colocada en el triángulo analítico, da dos determinatrices

(AB) $xy^2 - a^2y = 0$, (AC) $xy^2 - b^3 = 0$

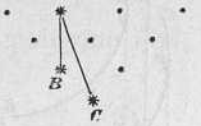


Fig. 83

que indican ramas hiperbólicas, designando, la primera, ramas que tienen por asíntota el eje de ordenadas y la segunda, ramas cuya asíntota es el eje de abscisas. La primera ecuación de $x = \dfrac{a^2}{y}$; expresa una asíntota curva que es una hipérbola cónica con parámetro positivo. Sus ramas se extienden en las coordenadas de igual signo.

La determinatriz AC da $y = \pm b^{3:2}x^{-1:2}$ que indica una hipérbola de tercer orden en los ángulos de las abscisas positivas.

Resuelta la ecuación propuesta respecto á $y$, se obtiene

$$y = \frac{a^2 \pm \sqrt{4b^3x + a^4}}{2x}$$

y se deduce la forma de la curva representada por la fig. 84.

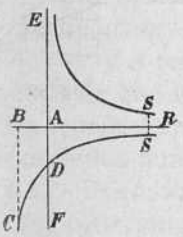


Fig. 84

EJEMPLO 2.º—Sea $x^2y^2 - a^3y - b^3x = 0$. Colocando esta ecuación en el triángulo, se obtienen dos determinatrices AB y AC que corresponden á las ecuaciones

$$x^2y^2 - a^3y = 0, \qquad x^2y^2 - b^3x = 0$$

indican ramas hiperbólicas cuyas asíntotas son respectivamente los ejes de ordenadas y de abscisas.

La ecuación

$$y = \frac{a^3 \pm \sqrt{a^6 + 4b^3x^3}}{2x^2}$$

expresa la forma de la curva; $y$ tiene dos valores. Tomando $x$ positiva, uno de los dos valores de $y$ es positivo y el otro negativo. Si $x = \infty$, estos dos valores se reducen á $\pm b^{3:2}x^{-1:2}$, siendo por lo tanto, infinitamente pequeños é iguales, pero de signo opuesto.

Cuando $x$ es infinitamente pequeña, el valor positivo se reduce á $\frac{a^3}{x^2}$ y el negativo á cero.

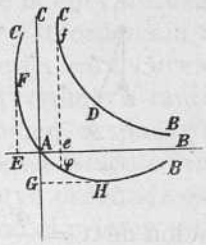


Fig. 85

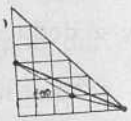
El valor positivo representa pues, una rama BCD cuyas asíntotas son los dos ejes y el valor negativo una rama BHA cuya asíntota es el eje de las $x$, que pasa por el origen. Si se toma $x$ negativa, los dos valores de $y$ son positivos. La curva no tiene, por ser positivos los valores de $y$ ramas en el ángulo de las coordenadas negativas; pero tiene dos ramas AF y FC en el ángulo de las abscisas negativas y de las ordenadas positivas, siendo $EF = \frac{b^2\sqrt[3]{2}}{a}$ el valor de la ordenada correspondiente á la mayor abscisa negativa.

Resolviendo la ecuación respecto á $x$, tenemos

$$x = \frac{b^3 \pm \sqrt{b^6 + 4a^3y^3}}{2y^2}$$

que da para la ordenada extrema y su abscisa correspondiente, los valores

$$GH = \frac{a^2\sqrt[3]{2}}{b}, \qquad AG = \frac{b^2}{a\sqrt[3]{4}}.$$


Fig. 86

La curva tiene cuatro ramas hiperbólicas.

EJEMPLO 1.°—Sea la ecuación

$$x^6 + 2a^2x^3y - b^3y^3 = 0.$$

Colocando la ecuación en el triángulo de De Gua (fig. 86), según el procedimiento expuesto por Cramer, la figura correspondiente indica dos ramas que pasan por el origen y una rama infinita dadas por las ecuaciones

$$x^3+2a^2y=0, \quad 2a^2x^3-b^3y^2=0,$$
$$x^2-by=0.$$

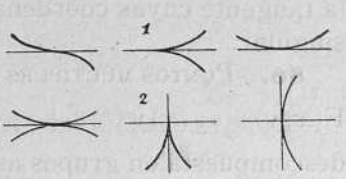


Fig. 87

Y las ramas son de la forma expresada por la fig. 87,1.

EJEMPLO 2.°—Sea la ecuación

$$x^3y^2+xy^5-y^3-x^7=0,$$

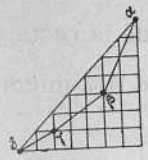


Fig. 88

Tendremos en el triángulo el polígono $\alpha\beta\gamma\delta$, que dará

$$y^2-x^4=0 \quad (\alpha\beta), \qquad x^2+y^3=0 \quad (\beta\gamma),$$
$$x-y^2=0 \quad (\gamma\delta),$$

representadas por la fig. 87,2.

**84.** ESTUDIO DE LOS PUNTOS EN EL INFINITO.—La consideración de las asíntotas como tangentes en el infinito, permite clasificar las asíntotas y sus puntos de contacto como puntos singulares.

Para hallar las asíntotas de una curva $f(x, y, z)=0$, cuya ecuación está escrita en coordenadas homogéneas, se hará $z=0$, que representa la recta del infinito, y resolviendo la ecuación $f(x, y, 0)=0$, hallaremos las tangentes en los puntos $(x, y)$ raíces de esta ecuación. La curva tendrá puntos singulares en el infinito, si

$$f_1=0, \qquad f_2=0, \qquad f_3=0,$$

que podrán ser de retroceso, dobles, triples, etc.

*Observación.*—El que la resultante de dos ecuaciones de grados $m$ y $n$ tenga menos raíces que indica el producto $mn$ depende de que no se consideran las soluciones infinitas.

La teoría de las asíntotas da á conocer el número y la naturaleza de los puntos en el infinito.

**85.** TANGENTES SINGULARES.—Puede exponerse una teoría de tangentes singulares análoga á la de los puntos singulares. Sea la ecuación tangencial $f(\xi, \eta, \zeta)=0$; si se supone

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0,$$

la tangente cuyas coordenadas satisfacen á esta ecuación, será singular.

**86.** PUNTOS MÚLTIPLES EN EL INFINITO *a)*. —Sea la ecuación

$$F(x,y) = \varphi_p(x)y^{m-p} + \varphi_{p+1}(x)y^{m-n-1} + \ldots + \varphi_m(x) = 0, \quad (1)$$

descompuesta en grupos ascendentes de diversos grados, y sea $a$ una raíz simple de $\varphi_p(x) = 0$.

Cortemos la curva por una recta paralela á la recta $x = a$ y próxima á esta recta $x = a + \varepsilon$; la ecuación

$$\varphi_p(a+\varepsilon)y^{m-p} + \varphi_{p+1}(a+\varepsilon)y^{m-n-1} + \ldots + \varphi_m(a+\varepsilon) = 0 \quad (2)$$

dará las ordenadas de los puntos de intersección de la recta y de la curva. Hagamos $y = \frac{1}{z}$, y multipliquemos los dos miembros de la ecuación (2) por $z^{m-p}$, se obtendrá

$$\varphi_p(a+\varepsilon) + \varphi_{p+1}(a+\varepsilon)z + \ldots + \varphi_m(a+\varepsilon)z^{m-p} = 0. \quad (3)$$

A cada raíz infinitamente pequeña de la ecuación (3) corresponde una raíz infinitamente grande de la ecuación (2).

Supongamos

$$\varphi_{p+1}(a) = 0, \quad \varphi_{p+2}(a) = 0, \quad \varphi_{p+q-1}(a) = 0,$$

y sea $\varphi_{p+q}(a)$ la primera de las cantidades de la forma $\varphi_i(a)$ que no se anula. La ecuación (3) tomará la forma

$$\varepsilon[\varphi'_p(a) + \ldots + z\varphi'_{p+1}(a) + \ldots] + z^q[\varphi_{p+q}(a) + \varepsilon'\varphi'_{p+q}(a) + \ldots] = 0. \quad (4)$$

Por ser $a$ una raíz simple de la ecuación

$$\varphi_p(x) = 0, \quad \text{será} \quad \varphi'_p(a) \gtrless 0,$$

y los términos que siguen á los primeros términos en cada uno de los paréntesis tienen por factores, sea $\varepsilon$ y $z$; y la ecuación (4) se podrá escribir

$$\varepsilon[\varphi'_p(a) + \alpha] + z^q[\varphi_{p+q}(a) + \beta] = 0, \quad (5)$$

siendo $\alpha$ y $\beta$ tan pequeñas como se quiera, cuando se sustituye á $z$ en los paréntesis una de las $q$ raíces próximas á cero que ad-

quiere la ecuación (4) para valores suficientemente pequeños de $\varepsilon$. Podremos, pues, representar por

$$Z^q = -\frac{\varphi'_p(a)}{\varphi_{p+q}(a)}\varepsilon = -Re \qquad (6)$$

los valores aproximados de las $q$ raíces infinitamente pequeñas de la ecuación (4).

Si $q$ es impar la ecuación (6) sólo tiene una raíz real de signo contrario al de R, y supongamos que esta fracción es positiva. Para un valor positivo de $\varepsilon$, la raíz real de la ecuación (6) es negativa, y haciendo $OA = a$ (fig. 89) se obtendrá un punto M' hacia el lado de las $y$ negativas en la recta $B_1 B'_1$ cuya ecuación es $x = a + \varepsilon$. Cuando $\varepsilon$ tiende hacia cero, esta raíz engendra la rama B'M'; y para valores negativos de $\varepsilon$ se obtiene la rama BM. Estas dos ramas son asíntotas á uno y otro lado de la recta BB' cuya ecuación es $x = a$, y el signo de la relación R da la posición de la curva con respecto á la asíntota.

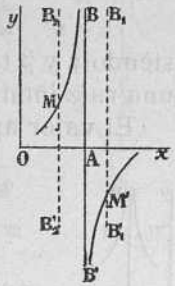


Fig. 89

Supongamos ahora $q$ par y R positiva. Para valores positivos de $\varepsilon$, todas las raíces infinitamente pequeñas de la ecuación (5) son imaginarias. Si al contrario, se da á $\varepsilon$ valores negativos, dos de las raíces infinitamente pequeñas de la ecuación (5) son reales, una positiva, la otra negativa. Se obtienen pues, en la recta $B_1 B'_1$ (fig. 90) dos puntos situados, el uno en la región las $y$ positivas, el otro en el de las negativas. Cuando $\varepsilon$ tiende hacia cero, las dos raíces consideradas engendran las ramas MB y M'B' situadas á un mismo lado de la asíntota.

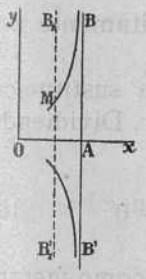


Fig. 90

Todo lo que se ha dicho respecto á la raíz $a$ se dirá respecto á las demás, y se construirán las ramas de curva correspondientes á cada una.

*b).* Supongamos que $a$ es raíz doble; en este caso será

$$\varphi'_p(a) = 0, \quad \varphi''_p(a) \gtrless 0;$$

la ecuación (3) se podrá escribir así:

$$\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_p(a)+\ldots\ldots+\frac{\varepsilon^p}{p!}\varphi^{(p)}_p(a)$$

$$+\varepsilon\left[\varphi_{p+1}(a)+\varepsilon\varphi'_{p+1}(a)+\ldots\ldots\right]+\ldots\ldots$$

$$+\varepsilon^{m-p}\left[\varphi_m(a)+\varepsilon\varphi'_m(a)+\ldots\ldots\frac{\varepsilon^m}{m!}\varphi^m_m(a)\right]=0 \qquad (7)$$

Supongamos que $a$ no anula á la función $\varphi_{p+1}(x)$; entonces la ecuación (7) podrá escribirse como sigue:

$$\frac{\varepsilon^2}{1.2}\left[\varphi''_p(a)+\alpha\right]+\varepsilon\left[\varphi_{p+1}(a)+\beta\right]=0, \qquad (8)$$

siendo $\alpha$ y $\beta$ tan pequeñas como se quiera, cuando $\varepsilon$ designa una raíz infinitamente pequeña de la ecuación (8).

El valor aproximado de $\varepsilon$ es

$$\varepsilon=-\frac{\varphi''_p(a)}{\varphi_{p+1}(a)}\frac{\varepsilon^2}{1.2}=-R_1\frac{\varepsilon^2}{1.2}$$

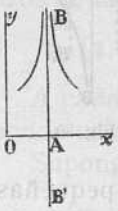


Fig. 91

A esta raíz corresponden dos ramas de curva análogas á las de la figura 91 construída en la hipótesis de ser $R_1 > 0$.

Consideremos el caso en que

$$\varphi_{p+1}(a)=0,\quad \varphi'_{p+1}(a)\gtrless 0 \quad \text{y}\quad \varphi_{p+2}\gtrless 0,$$

siendo $a$ una raíz doble de $\varphi_p(x)=0$.

La ecuación (3) tomará la forma

$$\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_p(a)+\varepsilon\varepsilon\varphi'_{p+1}(a)+\varepsilon^2\varphi_{p+2}(a)+\gamma=0, \qquad (9)$$

siendo $\gamma$ la suma de los términos restantes, infinitamente pequeños respecto á los escritos.

Hagamos $\varepsilon=\zeta\varepsilon$. La ecuación (9), después de la sustitución contiene en su primer miembro á $\varepsilon^2$ como factor. Dividiendo por éste, resulta

$$\frac{1}{1.2}\varphi''_p(a)+\zeta\varphi'_{p+1}(a)+\zeta^2\varphi_{p+2}(a)+\gamma'=0 \qquad (10)$$

siendo $\gamma'$ la suma de términos que tienen todos á $\varepsilon$ como factor. Para valores de $\varepsilon$ infinitamente pequeños, la función $\zeta$ se aproximará cuanto queramos á una de las raíces de la ecuación

$$\frac{1}{1.2}\varphi''_p(a) + \zeta\varphi'_{p+1}(a) + \zeta^2\varphi_{p+2}(a) = 0. \qquad (11)$$

Sean éstas $\zeta_0$ y $\zeta_1$. Las dos raíces de la ecuación en $z$ que tienden hacia cero, tendrán los valores aproximados

$$z = \zeta_0\varepsilon, \qquad z = \zeta_1\varepsilon.$$

Por consiguiente, si $\zeta_0$ y $\zeta_1$ tienen igual signo (positivo), la curva presentará una disposición análoga á la de la figura 92, y si $\zeta_0$ y $\zeta_1$ tienen signos contrarios, la curva tendrá la disposición de la fig. 93. Si las raíces de la ecuación (11) son imaginarias, no hay ramas reales asíntotas á la recta BB'. En fin, si las raíces de la ecuación (11) son iguales, tomará ésta la forma

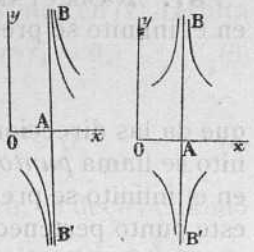


Fig. 92 Fig. 93

$$\varphi_{p+2}(a)(\zeta-\zeta_0)^2 + A\varepsilon + B\varepsilon^2 + \ldots = 0, \qquad (12)$$

y por consiguiente

$$\zeta - \zeta_0 = \pm\sqrt{-\frac{A\varepsilon + B\varepsilon^2 + \ldots}{\varphi_{p+2}(a)}}.$$

Los dos valores aproximados de $\zeta$ que tienen por límite $\zeta_0$ son

$$\zeta = \zeta_0 \pm \sqrt{-\frac{A}{\varphi_{p+2}(a)}\varepsilon},$$

y darán á la curva una disposición análoga la de la figura 51,4 que corresponde al retroceso de segunda especie.

Vamos á tratar el caso

$$\varphi_{p+1}(a) = 0, \quad \varphi_{p+2}(a) = 0, \ldots \varphi_{p+n-1}(a) = 0, \varphi_{p+n}(a) \gtrless 0,$$

$$\varphi'_{p+1}(a) = 0, \quad \varphi'_{p+2}(a) = 0, \ldots \varphi'_{p+n-1}(a) = 0, \varphi'_{p+n}(a) \gtrless 0.$$

Introduciendo estas hipótesis en la ecuación (3), tendremos

$$\frac{\varepsilon^2}{1.2}\varphi''_p(a) + \varepsilon z^n\varphi'_{p+n}(a) + z^n\varphi_{p+n}(a) + \delta = 0.$$

Y podremos concluir:

1.° Si $n \geqslant N$, las ramas ofrecen la disposición de la figura 91 cuando N es impar, y cuando N es par, ó no hay ramas ó adoptan la disposición de la fig. 93.

2.° Si $N = 2n$ se obtiene la disposición de las figuras 51,5, y 51,7, si $n$ es par y si las raíces de la ecuación en $\zeta^n$

$$\frac{1}{1.2}\varphi''_p(a) + \zeta^n \varphi'_{p+n}(a) + \zeta^{2n} \varphi_{p+2n}(a) = 0.$$

son reales y desiguales. (*)

**87.** RAMAS PARABÓLICAS.—Cuando la dirección de un punto en el infinito se presenta como raíz simple de la ecuación

$$\varphi\left(1, \frac{y}{x}\right) = \psi(\varepsilon) = 0,$$

que da las direcciones de las ramas infinitas, el punto en el infinito se llama *punto hiperbólico;* y cuando la dirección del punto en el infinito se presenta como raíz múltiple de dicha ecuación, este punto pertenece generalmente á una rama parabólica, y á veces á varias ramas hiperbólicas con asíntotas paralelas ó coincidentes. En todos estos casos los puntos se llaman *parabólicos.*

Los *puntos parabólicos* son verdaderos puntos singulares situados en el infinito, y el coeficiente angular de la tangente en uno de ellos, se presenta bajo forma indeterminada, mientras nos limitemos á considerar ecuaciones de derivadas parciales de primer orden.

Los puntos hiperbólicos existen generalmente en las curvas, mientras que los puntos parabólicos solo se encuentran excepcionalmente, cuando existe una ó varias ecuaciones de condición entre los coeficientes de la ecuación de la curva.

Para construir las ramas parabólicas dadas por una dirección múltiple de los puntos en el infinito, puede seguirse el procedimiento empleado por el Sr. Biehler en su memoria arriba citada, de la cual extractamos los siguientes indicaciones:

Sea, como arriba se indicó,

$$F(x, y) = f_m(x, y) + f_{m-1}(x, y) + \ldots + f_0 = 0 \qquad (1)$$

la ecuación de la curva.

Cortémosla por la recta $x = \frac{1}{\lambda}$, y formemos el haz de rectas

(*) Véase *Biehler,* Théorie des points singuliers Nouv. Ann. t. XIX (1880) et t. XX (1881).

que unen el origen á los puntos de intersección de la recta y de la curva. Para ello, eliminaremos $z$ entre las ecuaciones

$$f_m(x, y) + zf_{m-1}(x, y) + \ldots + z^m f_0 = 0 \quad \text{y} \quad x = \frac{z}{\lambda}.$$

La ecuación del haz de rectas será

$$f_m(x, y) + \lambda x f_{m-1}(x, y) + \ldots + \lambda^m x^m f_0 = 0. \tag{2}$$

Sea $t$ la inversa del coeficiente angular de uno cualquiera de los rayos del haz. Tendremos $x = ty$. Sustituyendo en (2), resulta

$$f_m(1, t) + \lambda t f_{m-1}(t, 1) + \ldots + \lambda^m t^m f_0 = 0, \tag{3}$$

que escribiremos como sigue:

$$\varphi_m(t) + \lambda t \varphi_{m-1}(t) + \ldots + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0. \tag{4}$$

Cuando la recta $x = \frac{1}{\lambda}$ se aleja del origen, es decir, cuando $\lambda$ tienda hacia cero, uno ó varios de los valores de $t$ deberán tender hacia cero, si existen ramas parabólicas en la dirección del eje de las $y$.

Pero la ecuación (4), desarrollada, se transforma en

$$\varphi_m(0) + t\varphi'_m(0) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''_m(0) + \ldots$$
$$+ \lambda t[\varphi_{m-1}(0) + t\varphi'_{m-1}(0) + \ldots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\varphi^{m-1}_{m-1}(0)] + \ldots$$
$$+ \lambda^{m-1} t^{m-1}[\varphi_1(0) + t\varphi'_1(0)] + \lambda^m t^m \varphi_0 = 0. \tag{5}$$

Es necesario pues, que $\varphi_m = 0$ y $\varphi'_m(0) = 0$, para que la ecuación (5) pueda quedar satisfecha por un sistema de valores infinitamente pequeños de $\lambda$ y de $t$, es decir, que la dirección del eje de las $y$ sea una dirección doble de puntos en el infinito. La ecuación (5), en esta hipótesis, se reduce después de suprimir el factor $t$, á

$$\frac{t}{1.2}\varphi''_m(0) + \ldots + \lambda[\varphi_{m-1}(0) + t\varphi'_{m-1}(0) + \ldots]$$
$$+ \lambda^{m-1} t^{m-2}[\varphi_1(0) + t\varphi'_1(0)] + \lambda^m t^{m-1}\varphi_0 = 0, \tag{6}$$

que se puede escribir bajo la forma

$$t\left[\frac{1}{1.2}\varphi''_m(0) + \alpha\right] + \lambda[\varphi_{m-1}(0) + \beta] = 0 \tag{7}$$

de la que resulta

$$t = -\frac{\varphi_{m-1}(0) + \beta}{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(0) + \alpha}\lambda,$$

siendo $\alpha$ y $\beta$ sumas de términos que contienen todos, sea $t$ sea $\lambda$, como factor.

Cuando $\lambda$ tiende hacia cero, una sola raíz de la ecuación (6) tenderá hacia cero, y la fórmula

$$t = -\frac{\varphi_{m-1}(0)}{\frac{1}{1.2}\varphi''_m(0)}\lambda \qquad (8)$$

da un valor aproximado de la misma, suponiendo que $\varphi'_m(0)$ y $\varphi_{m-1}(0)$ sean diferentes de cero.

Para interpretar geométricamente estos resultados, sea OA (figura 94) la cantidad $\frac{1}{\lambda}$. A medida que $\lambda$ disminuye, la recta AM, paralela al eje de las $y$ se aleja del origen. En esta recta se halla el punto M de la curva, dado por la intersección de AM con un rayo OM muy próximo de $Oy$, cuyo coeficiente angular es la inversa de la raíz infinitamente pequeña representada por la fórmula (8). Cuando $\lambda$ disminuye, el punto M engendra la rama MN, y la región en la que se halla dicha rama está dada por el signo de la relación $\frac{\varphi_{m-1}(0)}{\varphi''_m(0)}$.

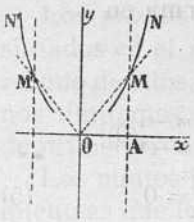


Fig. 94

Cuando $\lambda$ cambia de signo, la raíz infinitamente pequeña cambia también de signo y da la rama N'M' situada al otro lado del eje de las $y$. La figura está construída en la hipótesis de ser positivo el coeficiente $\lambda$ de la fórmula (8).

Supongamos que $\varphi_{m-1}(0)$ sea distinta de cero, y que cierto número de derivadas de $\varphi_m(t)$, para $t = 0$, sean

$$\varphi''_m(0) = 0, \ldots \varphi_m^{(q-1)}(0) = 0, \text{ y } \varphi_m^{(q)}(0) \gtrless 0,$$

La ecuación (6) tomará la forma

$$t^{q-1}\left[\frac{\varphi_m^{(q)}(0)}{q!} + \alpha\right] + \lambda[\varphi_{m-1}(0) + \beta] = 0, \qquad (9)$$

conteniendo $\alpha$ y $\beta$ en todos sus términos, sea $t$ ó sea $\lambda$ como factor.

Si $q-1$ es impar, una sola de las $q-1$ raíces infinitamente pequeñas de la ecuación (9), que tiende hacia cero, engendra una curva cuya forma general es análoga á la de la figura 94.

Si $q-1$ es par, dos de las raíces de la ecuación (9) son reales y de signo contrario; pero es necesario, para esto, que $\lambda$ haya recibido un valor cuyo signo sea el de la relación $-\dfrac{\varphi_{m-1}(0)}{\varphi^{q}_{m}(0)}$; en este caso, la curva afecta una forma semejante á la fig. 95.

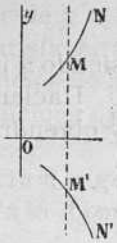


Fig. 95

Supongamos ahora $\varphi_{m-1}(0)=0$.

La ecuación (6) no quedará satisfecha por valores pequeños de $\lambda$ y $t$, mientras que no sea $\varphi_m(0)=0$, $\varphi'_m(0)=0$, $\varphi''_m(0)=0$, es decir, mientras la dirección del eje de las $y$ no sea triple. En este caso la ecuación (6) toma la forma

$$t\left[\frac{1}{3!}\varphi'''_m(0)+\alpha\right]+\lambda[\varphi'_{m-1}(0)+\beta]=0,$$

y se obtienen todavía ramas parabólicas análogas á las de la figura 94.

Pero si $\varphi_{m-1}(0)=0$ con $\varphi'_{m-1}(0)=0$ y si $\varphi''_{m-1}(0)$ es también nula, la ecuación podrá escribirse así:

$$t\left[\frac{1}{3!}\varphi'''_m(0)+\alpha\right]+\lambda^2[\varphi_{m-2}(0)+\beta]=0,$$

y la raíz infinitamente pequeña $t$ engendra ramas MN y M'N' (figura 96) situadas á uno y otro lado del eje de las $y$, en regiones opuestas del plano. La figura está construída en la hipótesis de ser $\dfrac{\varphi_{m-2}(0)}{\varphi'''_m(0)}$ negativa.

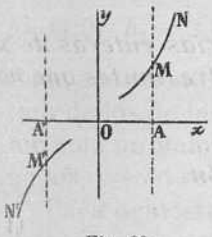


Fig. 96

Supongamos

$$\varphi_m(0)=0,\quad \varphi'_m(0)=0,\quad \varphi''_m(0)=0,$$

$$\varphi'''_m(0)=0,\quad \varphi^{IV}_m(0)=\lessgtr 0$$

$$\varphi_{m-1}(0) = 0, \quad \varphi'_{m-1}(0) = 0, \quad \varphi''_{m-1} \gtrless 0 \text{ con } \varphi_{m-2} \gtrless 0.$$

La ecuación (6) se reduce á

$$t^2 \frac{\varphi^{IV}_m(0)}{4!} + \lambda t \frac{\varphi'_{m-1}(0)}{2!} + \lambda^2 \varphi_{m-2}(0) + \gamma = 0$$

siendo $\gamma$ infinitamente pequeño de orden superior.

Haciendo $t = \tau.\lambda$, todos los términos serán divisibles por $\lambda^2$, y obtendremos sucesivamente

$$\tau^2 \frac{\varphi^{IV}_m(0)}{4!} + \tau . \frac{\varphi''_{m-1}(0)}{1.2} + \varphi_{m-2}(0) + \gamma' = 0 \qquad (12)$$

$$\tau^2 \frac{\varphi^{IV}_m(0)}{4!} + \tau \frac{\varphi''_{m-1}(0)}{2!} + \varphi_{m-2}(0) = 0.$$

Cuya interpretación geométrica y ulteriores desarrollos pueden verse en la memoria citada de M. Biehler.

## § 7.º Reversión de las series

**88.** Sea la función

$$\Sigma(m, n) x^m y^n \equiv (1, 0)x + (0, 1)y + (2, 0)x^2 + (1, 1)xy + \ldots$$

en la que el símbolo $(m, n)$ expresa los coeficientes constantes.

En el caso de ser infinita la serie doble, la suponemos absolutamente convergente cuando mod $x$ = mod $y$ = 1, de manera que el coeficiente $(m, n)$ será infinitamente pequeño cuando $m$ ó $n$ sean infinitamente grandes.

Teorema.—*Se puede obtener un valor, y solamente uno de* y *como función de* x, *tal que:*

1.º y *sea desarrollable en serie de potencias enteras de* x *para todos los valores de* x, *comprendidos entre límites que no se hallen infinitamente próximos.*

2.º y *tiene el valor inicial* 0 *cuando* x = 0.

3.º y *satisface idénticamente á la ecuación*

$$\Sigma(mn) x^m y^n = 0. \qquad (1)$$

Supongamos por ahora que puede obtenerse dicha serie. El

término constante es nulo, en virtud de la 2.ª condición. La serie será pues, de la forma

$$y = b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots\ldots \qquad (2)$$

Para que la sustitución de (2) en (1) la haga idéntica, debe ser posible hallar un valor de $x < 1$ tal, que (2) dé un valor de $y < 1$.

La serie (1), transformada por medio de (2), debe satisfacer al criterio de Cauchy, y poder ordenarse según las potencias de $x$. Para satisfacer á la tercera condición, es necesario además que los coeficientes de las potencias de $x$ se anulen.

Convengamos en hacer $(0, 1) = -1$, lo que no afecta á la generalidad del razonamiento. La identidad (1) adquirirá la forma

$$\begin{aligned} y = &\{(1,0)x + (2,0)x^2 + (3,0)x^3 + \ldots\} \qquad (3)\\ &+\{(1,1)x + (2,1)x^2 + (3,1)x^3 + \ldots\}y \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\{(0,n) + (1,n)x + (2,n)x^2 + (3,n)x^3 + \ldots\}y^n \end{aligned}$$

y sustituyendo en la (2), tendremos

$$\begin{aligned} &b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots \\ &= \{(1,0)x + (2,0)x^2 + (3,0)x^3 + \ldots\} \\ &+\{(1,1)x + (2,1)x^2 + (3,1)x^3 + \ldots\}(b_1 + b_2x + b_3x^2 + \ldots)x \qquad (4)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+\{(0,n) + (1,n)x + (2,n)x^2 + \ldots\}(b_1 + b_2x + b_3x^2 + \ldots)^n x^n \end{aligned}$$

é identificando,

$$b = (1,0),\ b_2 = (2,0) + (1,1)b_1 + \ldots,\ b_n = (n,0) + (1,1)b_{n-1} + \ldots \qquad (5)$$

Cada coeficiente de una ecuación está expresado en función entera de los de las que le preceden; y puesto que la primera da tan solo un valor para $b_1$, todos los coeficientes están determinados, y solo se obtendrá un valor de $y$.

Para demostrar que el sistema (5) da una solución, hay que demostrar que para un valor de $x$ cuyo módulo sea suficientemente pequeño, pero no infinitamente pequeño, las condiciones

de la convergencia absoluta de (2) y (4) quedarán satisfechas cuando $b_1, b_2, \ldots$ tengan los valores dados por (5).

Los módulos de los coeficientes de la serie (3) son finitos é inferiores al módulo $\lambda$. Supongamos que en (3) $\lambda$ sustituye á todos los coeficientes, siendo $x$ positivo y $<1$; tendremos

$$y = \lambda(x + x^2 + \ldots) + \lambda(x + x^2 + \ldots)\, y + \lambda(1 + x + x^2 \ldots) y^2 \ldots \quad (6)$$

Esta serie es convergente para $x < 1$ é $y < 1$, pues añadiendo $\lambda + \lambda y$ á los dos miembros, resulta

$$(1+\lambda)y + \lambda = \frac{\lambda}{(1-x)(1-y)} \text{ ó sea } (1+\lambda)y^2 - y + \frac{\lambda x}{1-x} = 0.$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{1 - \dfrac{4\lambda(1+\lambda)x}{1-x}}}{2(\lambda+1)}\ ; \quad (7)$$

pero mientras $4\lambda(1+\lambda)x:(1-x) < 1$, ó sea $x < 1:(2\lambda+1)^2$, el segundo miembro de (7) puede desarrollarse en serie absolutamente convergente, según las potencias enteras de $x$, cuyo término constante es nulo; luego, si $x < 1:(2\lambda+1)^2$, el valor de $y$ dado por (7) es positivo y menor que 1. Luego (6) es convergente.

Para resolver el problema que consideramos, sea la serie que expresa $y$ la siguiente:

$$y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \ldots; \quad (8)$$

las ecuaciones que determinan $C_1, C_2, C_3, \ldots$ se obtendrán haciendo $(1, 0) = (2, 0) = (1, 1) \ldots = \lambda$ en (5), es decir

$$C_1 = \lambda, \qquad C_2 = \lambda(1 + C_1 + C_1^2),$$
$$C_3 = \lambda(1 + C_2 + C_1 + C_1^2 + 2C_1C_2 + C_1^3),$$
$$\ldots\ldots C_n = \lambda(1 + C_{n-1} + C_{n-2} + \ldots C_1^n), \quad (9)$$

en las que $C_1, C_2, \ldots$ serán reales y positivas.

Y representando los módulos con un acento, será

$$b' = (1,0)' < \lambda < C_1,$$
$$b'_2 > (2,0)' + (1,1)'\, b'_1 + (0,2)'\, b'^2_2 < \lambda(1 + C_1 + C^2_1) < C_2,$$
$$b'_3 > (3,0)' + (1,1)' b'_2 + (2,1)' b'_1 + (1,2)' b'^2_2 + 2(0,2)\, b'_1 b'_2 + (0,3)' b'^3_1$$
$$< \lambda(1 + C_2 + C_1 + C_1^2 + 2\, C_1\, C_2 + C_1^3) < C_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Luego los módulos de los coeficientes de (2) son menores que los módulos en la serie (8), que es absolutamente convergente; luego la serie (2) es absolutamente convergente, siempre que $x < \frac{1}{(2\lambda+1)^2}$. Sólo falta demostrar que $x$ puede elegirse (sin ser infinitamente pequeño) de manera que $y$, dada por (2) sea tal que $|y| > 1$. Tenemos, en efecto, que

$$|y| < |b_1||x| + |b_2||x|^2 + \ldots < C_1||x| + C_2|x|^2 + \ldots$$

$$< \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda(1+\lambda)|x|} : (1 - |x|)}{2(\lambda+1)} \qquad (11)$$

Pero el segundo miembro de (11) es $<1$ cuando $|x| < 1 : (2\lambda+1)^2$; luego si $|x| < 1 : 2\lambda+1)^2$, las series (3) y (4) son convergentes, y (1) se reduce á una identidad.

Se ha demostrado, pues, que puede hallarse uno y tan solo un valor de $y$, desarrollable entre ciertos límites según las potencias de $x$, que satisfaga á la ecuación (1) y *las funciones de* x *y de* y *así determinadas, siendo representables por series potenciales, son continuas.*

Esto sentado, podremos enunciar el problema de la *reversión de las series,* como sigue:

*Dada la ecuación*

$$x = a_0 + a_m y^m + a_{m+1} y^{m+1} + \ldots \qquad (1)$$

*en la que* $a_m \neq 0$, *pero en la que* $a_0$ *puede ó no ser igual á cero, y la serie* $a_m y^m + a_{m+1} y^{m+1} + \ldots$ *es absolutamente convergente, mientras que* $|y| \not> a$ *es una cantidad positiva* $\rho$, *hallar el desarrollo convergente de* y *según las potencias de* $x - a_0$.

Supongamos que $\xi$ exprese el valor principal de la $m^{\text{sima}}$ raíz de $\frac{x - a_0}{a_m}$ y $\omega_m$ una raíz primitiva de la unidad, entonces (1) es equivalente á $m$ ecuaciones del tipo

$$\omega_m^r \xi = y\left(1 + \frac{a_{m+1}}{a_m} y + \frac{a_{m+2}}{a_m} y^2 + \ldots\right)^{\frac{1}{m}} \qquad (2)$$

Pero, siendo absolutamente convergente la serie entre paréntesis de (2), para todos los valores de $y$ tales que $|y| \not> \rho$,

resulta del teorema del binomio que podemos, tomando $y$ entre ciertos límites, desarrollar el segundo miembro de (2) en serie según las potencias de $y$, y tendremos

$$-\omega_m^r \xi + y + C_2 y^2 + C_3 y^3 + \ldots = 0. \qquad (3)$$

Luego, según el teorema anterior, y mientras $\xi$ no pase de cierto límite, tendremos que

$$y = b_1 \omega_m^r \xi + b_2 \omega_m^{2r} \xi^2 + b_3 \omega_m^{3r} \xi_3 + \ldots \qquad (4)$$

*Tenemos, por consiguiente,* m *de estos resultados, en los que los coeficientes* $b_1, b_2, b_3, \ldots$ *son los mismos, pero en los que* r *tiene los diversos valores* $0, 1, 2, \ldots (m-1)$.

Cada una de estas soluciones es una función continua de $x$.

COROLARIO.—*Cuando* $a_0 = 0$ *y* $m = 1$, *tenemos la solución*

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots \qquad (5)$$

EJEMPLO.—Invertir la serie

$$z = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots \qquad (6)$$

Haciendo $z = 1 + x$, tendremos $x = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots$ (7)

y para $x$ entre ciertos límites $y = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$ (8)

Establecida la existencia de la serie convergente (8), vamos á determinar los coeficientes. Incrementando (7), se tiene que

$$h = \frac{(y+k)-y}{1} + \frac{(y+k)^2 - y^2}{2!} + \frac{(y+k)^3 - y^3}{3!} + \ldots$$

y siendo $$\lim \frac{(y+k)^n - y^n}{k} = n y^{n-1}$$

$$\text{tenemos } \lim \frac{h}{k} = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \ldots = 1 + x. \qquad (9)$$

Por otra parte, de (8) se deduce derivando

$$\lim \frac{k}{h} = b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \ldots\ldots \qquad (10)$$

y combinando (9) con (10), resulta

$$b_1 + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \ldots\ldots = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots\ldots$$

é identificado, resulta $b_1 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{1}{3}$;

luego $y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \frac{z-1}{1} - \frac{(z-1)^2}{2} + \ldots$

Esta expresión da la única rama de $y$ desarrollable según las potencias de $z - 1$, que se anula cuando $z = 1$.

**89.** DESARROLLO DE LAS VARIAS RAMAS DE UNA FUNCIÓN ALGEBRÁICA.—No es necesario tratar detalladamente esta cuestión, que ya se expuso extensamente en el tomo II, págs. 254-266. Bastará suponer que la ecuación

$$A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \ldots\ldots + A_1 y + A_0 = 0 \qquad (1)$$

en la que $A_0, A_1, \ldots, A_n$ son funciones enteras de $x$, es irreducible, no excluyendo la irreducibilidad la existencia de raíces múltiples. Por cada valor de $x$ *(punto-cero)* que hace $A_0 = 0$, una rama de $y$ tiene un valor cero, por cada valor de $x$ *(doble punto-cero)* que hace $A_0 = 0$ y $A_1 = 0$, dos ramas tienen un valor cero, etc.

Para cada valor de $x$ *(polo)* que hace $A_n = 0$, una rama de $y$ tiene un valor infinito; para cada valor de $x$ *(doble polo)*, que hace $A_n = 0$ y $A_{n-1} = 0$, dos ramas de $y$ tienen un valor infinito, y así sucesivamente.

También se demostró *que cada rama de una función algebráica es* (dentro de ciertos límites) desarrollable en series de potencias ascendentes ó descendentes, de manera que cada rama es, excepto en un polo, continua para todos los valores finitos de $x$. Podemos decir que: *si en el punto* $x = a$ *la función algebráica* y *tiene un solo valor* $y = b$, entonces $y - b$ *es, dentro de ciertos límites, desarrollable en una serie absolutamente convergente de la forma*

$$y - b = C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \ldots \qquad (2)$$

Sea $x = a + \xi$, $y = b + \eta$, entonces la ecuación (1) se reduce á

$$(0, 0) + (1, 0)\xi + (0, 1)\eta + (2,0)\,\xi^2 + \ldots = 0. \qquad (3)$$

Puesto que $y = b$ es una raíz simple de (1) correspondiente á $x = a$, cuando $\xi = 0$, la ecuación (3) da solo un valor cero de $\eta$; por consiguiente debemos tener $(0, 0) = 0$ y $(0, 1) \neq 0$, y del teorema (*p.* 200) resulta, entre ciertos límites, el único desarrollo

$$\eta = C_1\xi + C_2\xi^2 + C_3\xi^3 + \ldots$$

que satisface á la ecuación (3), esto es,

$$y = b + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + C_3(x - a)^3 + \ldots \qquad (4)$$

que satisface á la ecuación (1).

La función determinada por (4) es continua, mientras que mod $(x - a)$ sea menor que el radio de convergencia de la serie, y tiene el valor $y = b$ cuando $x = a$.

Si todos los valores de $y$, á saber, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ correspondientes á $x = a$ son simples, para cada uno se tendrá un valor de $y$ de la forma (4); luego

COROLARIO.—*Mientras no tengan un punto común dos ramas de una función algebráica, cada rama es una función continua de* x, *y el incremento de* y *en cada punto de una rama particular es desarrollable en una serie de potencias ascendentes de* x, *mientras que el módulo del incremento de* x *no exceda de cierto límite finito.*

Respecto al caso en $x = a$ es un punto múltiplo de la función $y$, se demostró ya (t. II p. cit.) que: *Para cada punto múltiplo de orden* q *que corresponde á un valor* q — *uplo* y = b, *se pueden obtener* q *desarrollos diferentes de* y *bajo la forma* $y = b + \Sigma C_r (x - a)^r$, *en los que los exponentes* r *forman una serie de quebrados positivos crecientes.*

Ya que se trató de esta cuestión, nos bastará decir que si $\eta$ es desarrollable en serie absolutamente convergente de la forma

$$\eta = C_1\xi^{\alpha_1} + C_2\xi^{\alpha_1 + \alpha_2} + C_3\xi^{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3} + \ldots\ldots$$

siendo $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ positivos, se puede establecer la serie de transformaciones

$\eta = \xi^{\alpha_1}(C_1 + \eta_1)$, $\eta_1 = \xi^{\alpha_2}(C_2 + \eta_2)$, ....., $\eta_{n-1} = \xi^{\alpha_n}(C_n + \eta_n)$

anulándose $\eta_1, \eta_2, \ldots$ para $\xi = 0$, siendo $C_1, C_2, C_3 \ldots$ independientes de $\xi$ y

$$C_1 = \lim \frac{\eta}{\xi^{\alpha_1}}, \quad C_2 = \lim \frac{\eta_2}{\xi^{\alpha_2}}, \ldots . \quad C_n = \lim \frac{\eta_{n-1}}{\xi^{\alpha_n}}, \text{ para } \xi = 0.$$

Si hacemos $x = a + \xi$, $y = b + \eta$, la ecuación (1) se reduce á

$$\Sigma (m,n)\, \xi^m \eta^n = 0 \tag{5}$$

y puesto que $q$ valores de $y$ se hacen iguales á $b$ para $\xi = 0$, la menor potencia de $\eta$ en (5) que no está multiplicada por $\xi$ es $\eta^q$, hagamos

$$\eta = \xi^{\lambda}(C_1 + \eta_1) = \xi^{\lambda} v, \tag{6}$$

no siendo $C_1 = \lim \eta : \xi^{\lambda}$ ni cero ni infinitopara $\xi = 0$.

La ecuación (5) da $\quad \Sigma (m,n)\, \xi^{m+\lambda n} v^n = 0 \tag{7}$

La ecuación (7) dará valores de $v$ finitos para $\xi = 0$, cuando se pueda determinar $\lambda$ de modo que dos términos de (7) sean de igual grado positivo en $\xi$.

Ya sabemos (t. II, pág. 258, t. IV, pág. 168) que podremos escribir:

$$\delta = m_1 + \lambda n_1 = m_2 + \lambda n_2 = \ldots = m_r + \lambda n_r, (n_1 > n_2 > n_3 \ldots \tag{8}$$

$$\text{y} \quad \lambda = (m_1 - m_r) : (n_r - n_1), \quad \delta = (m_1 n_r - m_r n_1) : n_r - n_1 \tag{9}$$

Haciendo $\xi_1 = \xi^{\frac{1}{n_r - n_1}}$ de modo que $\xi_1 = 0$ cuando $\xi = 0$, y dividiendo por $\xi_1^{m_1 n_r - m_r n_1}$, obtendremos una ecuación de la forma

$$\psi (\xi_1, v)\, \xi_1 + (m_r, n_r) v^{n_r} + \ldots . + (m_1, n_1) v^{n_1} = 0 \tag{10}$$

La $n_r - n_1$ raíces de (10) que no son nulas ni infinitas están dadas, como hemos visto en este tomo y en el II, por

$$(m_r, n_r) v^{n_r - n_1} + (m_{r-1}, n_{r-1})\, v^{n_r - 1 - n_1} + \ldots + (m_1, n_1) = 0 \tag{11}$$

Si los valores de $v$ son simples, tendremos para cada valor de $\eta_1$ un desarrollo de la forma

$$\eta_{11} = d_1 \xi_1 + d_2 \xi_1^2 + \ldots = d_1 \xi^{\frac{1}{n_r - n_1}} + d_2 \xi^{\frac{2}{n_r - n_1}} + \ldots \quad (12)$$

y cada uno de estos dará para $\eta_1$ un desarrollo correspondiente de la forma

$$\eta_1 = C_1 \xi^{(m_1 - m_r) : n_r - n_1} + d_1 \xi^{(m_1 - m_r + 1) : n_r - n_1} + \ldots\ldots \quad (13)$$

Si las raíces de un grupo de raíces de (11) son iguales, emplearemos una segunda transformación

$$\eta_{11} = \xi_1^{\mu} (C_2 + \eta_{12}).$$

para separar las raíces de igual valor. Así podremos separar los $q$ desarrollos correspondientes á las $q$ raíces del punto $q$ — uplo, $x = a$.

EJEMPLO.—Separar las ramas de la función $s$, correspondientes á $x = 0$, determinadas por la ecuación

$$D\xi^3 \eta^5 + C\xi^7 \eta^2 + E\eta^{10} + B\xi^{10} \eta + A\xi^{13} + L\xi^9 \eta^4 + J\xi^3 \eta^{11}$$
$$+ F\xi^3 \eta^{13} + K\xi^8 \eta^{10} + G\xi^6 \eta^{14} + I\xi^{14} \eta^7 + H\xi^{10} \eta^{12} = 0. \quad (14)$$

El término de menor grado en que está sola $\eta$ es $\eta^{10}$, de manera que en $\xi = 0$ hay 10 raíces coincidentes, ó un punto múltiplo de orden 10.

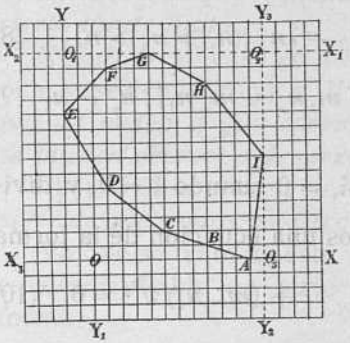


Fig. 97

Empleando el diagrama de Newton ó de Puiseux, se obtiene que las rectas ABC, CD y DE representan los grupos de las raíces. Haciendo, para mayor claridad

$$A = 2, \quad B = -3, \quad C = +1,$$
$$D = -1, \quad E = 1,$$

al grupo ABC corresponde

$$\lambda = \frac{6}{2} \quad \text{y} \quad v^2 - 3v + 2 = 0,$$

es decir, $v = 1$ ó $v = 2$, cuyos desarrollos correspondientes son

$$\eta_1 = \xi^3(1 + d_1\xi^{\frac{1}{2}} + d_2\xi^{\frac{2}{2}} + \ldots) \qquad \eta_1 = {}^3\xi(2 + d'_1\xi^{\frac{1}{2}} + d'_2\xi^{\frac{2}{2}} + \ldots)$$

Para el grupo CD tenemos

$$\lambda = \frac{4}{3}, \qquad v^3 - 1 = 0,$$

y siendo los desarrollos correspondientes

$$\eta_1 = \xi^{\frac{4}{3}}(1 + d_1\xi^{\frac{1}{3}} + d_2\xi^{\frac{2}{3}} + \ldots), \qquad \eta_1 = \xi^{\frac{4}{3}}(\omega + d'_1\xi^{\frac{1}{3}} + d'_2\xi^{\frac{2}{3}} + \ldots),$$

$$\eta_1 = \xi^{\frac{4}{3}}(\omega^2 + d''_1\xi^{\frac{1}{3}} + d''_2\xi^{\frac{2}{3}} + \ldots),$$

expresando $\omega$ una raíz primitiva imaginaria cúbica de la unidad.

Análogamente DE da desarrollos del tipo

$$\eta_1 = \xi^{\frac{3}{5}}(\alpha + d_1\xi^{\frac{1}{5}} + d_2\xi^{\frac{2}{5}} + \ldots),$$

expresando $\alpha$ una de las cinco raíces de 1.

El grupo ABC da

$$A\xi^{13} + B\xi^{10}\eta_1 + C\xi^7\eta_1^2 = 0 \quad \text{ó} \quad C\eta_1^2 + B\xi^3\eta_1 + A\xi^6 = 0,$$

que se descompone en las dos ecuaciones

$$\eta_1 + p\xi^3 = 0, \qquad \eta_1 + q\xi^3 = 0$$

que dan dos funciones, cada de las cuales tiene una rama coincidente, *en una primera aproximación,* con una rama de $\eta_1$, que tiene cero por valor inicial.

De igual manera DC y DE dan respectivamente

$$C\xi^4 + D\eta_1^3 = 0, \qquad D\xi^3 + E\eta_1^6 = 0,$$

Volviendo al empleo del paralelógramo de Newton de que se ha tratado en el artículo anterior, especialmente para los casos en que $x$ ó $y$ se hacen infinitas, observaremos que:

1.° Suponiendo que el valor de $y$ tienda hacia un límite finito $b$ cuando $x$ tiende hacia $\infty$; si hacemos $\eta_1 = y - b$, $x = \xi$,

tendremos una ecuación de la forma $\Sigma(m, n)\xi^m \eta_1^n = 0$ (15), que da $\eta_1 = 0$, cuando $\xi = \infty$.

Si $\xi^k$ es la mayor potencia de $\xi$ que existe en (15), de manera que en la figura correspondiente $OO_3 = k$, haciendo $\xi = \frac{1}{\xi'}$ en (15) y multiplicando por $\xi'^k$, resultará

$$\Sigma(m, n)\xi'^{k-m}\eta_1^n = 0, \qquad (16)$$

que es equivalente á (15)

Pero podemos emplear el diagrama de Newton tomando por nuevos ejes $O_3X_3$ y $O_3Y_3$, construyendo un contorno convexo respecto á $O_3$ como se construyó respecto á O, y obtendremos las ramas de $\eta_1$ desarrollables según las potencias ascendentes de $\xi'$ ó descendentes de $\xi$, que da $\eta_1 = 0$ para $\xi = \infty$, esto es,

$$\eta_1 = \xi'^{\lambda}(c + d\xi'^{\alpha} + e\xi'^{\beta} + \ldots) \text{ ó } (y - b)x^{\lambda} = c + \frac{d}{x^{\alpha}} + \frac{e}{x^{\beta}} + \ldots \quad (17)$$

donde $\lambda$, $\alpha$, $\beta$ son positivas y $c$ finito de ambos modos *(both ways)*, es decir, ni nulo ni infinito, según la expresión de Morgan. (*)

2.º Si $x = a$ es un polo de $y$, es decir, que $y = \infty$ para $x = a$, haciendo $\eta_1 = y$, $\xi = x - a$, de la ecuación correspondiente á los ejes OX y OY

$$\Sigma(m, n)\xi^m \eta_1^n = 0 \quad (18) \quad \text{se pasa á} \quad \Sigma(m, n)\xi^m \eta_1'^{l-n} = 0 \quad (19)$$

haciendo $\eta_1 = \frac{1}{\eta_1'}$, y en la que $l$ expresa el mayor exponente de $\eta_1$ en (18).

En el diagrama de Newton los nuevos ejes son $O_1X_1$ y $O_1Y_1$. El contorno convexo respecto á $O_1$ es EFG, que da las ramas de $\eta_1'$ ó de $\frac{1}{\eta_1}$ desarrollables según las potencias ascendentes de $\xi$, y tenemos

$$\eta_1 \xi^{\lambda} = \frac{1}{c + d\xi^{\alpha} + c\xi^{\beta} + \ldots}$$

---

(*) Chrystal. *Álgebra*, t. II, pág. 366.

en la que $\lambda$, $\alpha$, $\beta$ son positivas y $c$ finita de ambos modos, y sucesivamente,

$$\eta_1 \xi^{\lambda} = \frac{1}{c + d'\xi^{\alpha} + \ldots}, \quad \text{ó sea} \quad y(x-a)^{\lambda} = \frac{1}{c + d'(x-a)^{\alpha} + \ldots}$$

3.º Si $y=\infty$, $x=\infty$, haciendo $x=\xi=\frac{1}{\xi'}$, $y=\eta_1=\frac{1}{\eta_1'}$ resulta

$$\eta_1' = \xi'^{\gamma}(c + d\xi'^{\alpha} + \ldots), \quad \frac{y}{x^{\lambda}} = \frac{1}{c + \frac{d}{x^{\alpha}} + \ldots} = \frac{1}{c + \frac{d'}{x^{\alpha}} + \ldots}$$

Razonaremos análogamente considerando el contorno convexo GHI respecto á $O_2$. En resumen

si $y=0$ , $x=a\,(a \neq \infty)$ $\lim \frac{y}{(x-a)^{\lambda}}$ es finito de ambos modos

« $y=0$ , $x=\infty$, $\lim y : x^{-\lambda}$ » » » » »

» $y=\infty$, $x=a\,(a \neq \infty)$ $\lim y : (x-a)^{-\lambda}$ » » » » »

» $y=\infty$, $x=\infty$, $\lim y : x^{\lambda}$ » » » » »

$\lambda$ puede llamarse el *orden* del valor particular 0 ó $\infty$ de $y$. (*)

Respecto á las varias aproximaciones que pueden obtenerse, trataremos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.º—Hallar la tercera aproximación de una de las ramas del grupo CD correspondiente á la ecuación (14).

Haciendo por sencillez, D = 1, C = B = A = − 1, dicha ecuación será

$$\xi^3\eta_1^2(\eta_1^3 - \xi^4) - \xi^{10}\eta_1 - \xi^{13} + \ldots = 0 \quad \text{ó} \quad \eta_1^3 - \xi^4 - \frac{\xi^7}{\eta_1}\frac{\xi^{10}}{\eta_1^2} + \ldots = 0. \quad (20)$$

La primera aproximación es $\eta_1 = \xi^{4:2}$; y despreciando $\frac{\xi^{10}}{\eta_1^2}$ en la ecuación (20), tenemos

$$\eta_1^3 - \xi^4 - \xi^7 : \xi^{\frac{4}{3}} = 0, \quad \text{ó} \quad \eta_1 = \xi^{\frac{4}{3}}(1 + \xi^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} = \xi^{\frac{4}{3}}\left(1 + \frac{1}{3}\xi^{\frac{5}{3}}\right). \quad (21)$$

Empleando la segunda aproximación en $\frac{\xi^7}{\eta_1}$ y la primera en

$\frac{\xi^{10}}{\eta^2}$ que ahora se considera, la ecuación (20) da como tercera aproximación

$$\eta^3 - \xi^4 - \frac{\xi^7}{\xi^{\frac{4}{3}}}\left(1 + \frac{1}{3}\xi^{\frac{5}{3}}\right) - \frac{\xi^{10}}{\xi^{\frac{8}{3}}} = 0.$$

Y despreciando el penúltimo término,

$$\eta^3 - \xi^4 - \xi^{\frac{17}{3}} - \frac{2}{3}\xi^{\frac{22}{3}} = 0$$

que da

$$\eta = \xi^{\frac{4}{3}}\left(1 + \xi^{\frac{5}{3}} + \frac{2}{3}\xi^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \xi^{\frac{4}{3}}\left(1 + \frac{1}{3}\xi^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{9}\xi^{\frac{10}{3}}\right),$$

según se deseaba, la tercera aproximación.

EJEMPLO 2.°—Hallar la segunda aproximación para las ramas correspondientes á ABC en la ecuación (14), cuando $A = 1, B = -2, C = 1, D = -1$.

Los términos correspondientes á esta aproximación son ABC y D. Haremos

$$\xi^7(\eta - \xi^3)^2 - \xi^3\eta^5 = 0 \quad \text{ó} \quad (\eta - \xi^3)^2 - \frac{\eta^5}{\xi^4} = 0.$$

La primera aproximación es $\eta = \xi^3$ y la segunda está dada por

$$(\eta - \xi^3)^2 - \frac{\xi^{15}}{\xi^4} = 0 \quad \text{ó} \quad (\eta - \xi^3)^2 - \xi^{11} = 0;$$

por consiguiente $$\eta - \xi^3 \pm \xi^{\frac{11}{2}} = 0,$$

que da la segunda aproximación correspondiente al grupo. Estas son *dos;* porque en la primera aproximación las ramas coinciden. Este es un caso en el que es necesaria una segunda aproximación para distinguir las ramas.

EJEMPLO 3.°—Hallar una segunda aproximación para grandes valores de $\xi$ y $\eta$ de la rama correspondiente á HI en la ecuación (14).

Si HI se mueve paralela á sí misma hacia O, el punto más próximo que encuentra es el G, la ecuación (14) se reduce á

$$H\xi^{10}\eta_1^{12} + I\xi^{14}\eta_1^{7}) + G\xi^{6}\eta_1^{14} = 0.$$

Haciendo, por sencillez, $H = 1$, $I = G = -1$, resulta

$$\eta_1^{5} - \xi^{4} - \frac{\eta_1^{7}}{\xi^{4}} = 0.$$

Limitándonos á una de las cinco primeras aproximaciones, á saber, $\eta_1 = \xi^{\frac{4}{5}}$, la segunda es

$$\eta_1^{5} - \xi^{4} - \xi^{\frac{8}{5}} = 0 \quad \text{que da} \quad \eta_1 = \xi^{\frac{4}{5}}\left(1 + \frac{1}{5}\xi^{-\frac{2}{5}}\right).$$

EJEMPLO 4.º—Dada

$$x = y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots\ldots$$

hallar una cuarta aproximación.

*Solución*: $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$ (*)

## § 7.º APLICACIONES Á LA CONSTRUCCIÓN DE CURVAS Y DETERMINACIÓN DE PUNTOS SINGULARES

1. $$x^4 - ax^2y + by^3 = 0.$$

*Solución.*—El origen es un punto triple. Una de las ramas es tangente al eje de las $x$, las otras forman con este eje ángulos cuyas tangentes son

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad -\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}$$

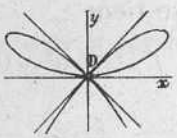


Fig. 98

2. $x^4 - 2ax^2y - 2x^2y^2 + ay^3 + y^4 = 0.$

(*) *Chrystal.* Algebra, An. elementary text. Book, t. II, pág. 360.

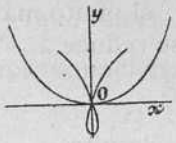


Fig. 99

*Solución.*—Punto triple en el origen, en este punto los valores de $\frac{dy}{dx}$ son 0, $2^{\frac{1}{2}}$, $-2^{\frac{1}{2}}$.

3. $x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0.$

*Solución.*—Tres puntos dobles

$$y = 0, \quad x = a, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$y = 0, \quad x = -a, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

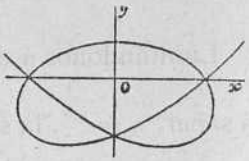


Fig. 100

$$y = -a, \quad x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \pm \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

4. $x^4 + x^2y^2 - 6ax^2y + a^2y^2 = 0.$

*Solución.*—Punto doble en el origen. Una tangente que pasa por el origen; pero diferente del eje de las $x$, cuyo punto de contacto es

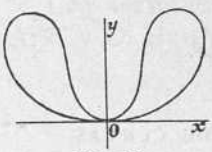


Fig. 101

$$x = \frac{2^{\frac{3}{2}}a}{3}, \qquad y = \frac{8a}{3}$$

5. *Determinar los puntos múltiplos de la curva*

$$(a^2x^2 + b^2y^3 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x^2y^2 = 0.$$

Haciendo $P \equiv a^2x^2 + b^2y^2 - c^4$ y homogénea la ecuación, se tiene

$$f'_x \equiv 6a^2x(P^2 + 9b^2c^4y^2z^2), \quad f'_y \equiv 6b^2y(P^2 + 9a^2c^4x^2z^2)$$

$$f'_z \equiv 6c^4z(-P^2 + 9a^2b^2x^2y^2)$$

Igualando cada una de estas derivadas á cero, se obtienen las curvas

$$x = 0, \qquad P \pm 3bc^2yz\sqrt{-1} = 0, \qquad (1)$$

$$y = 0, \qquad P \pm 3\,ac^2 xz\sqrt{-1} = 0,$$

$$z = 0, \qquad P \pm 3\,abxy = 0.$$

Si sus coordenadas no anulan á las derivadas segundas, son dobles, y la consideración de estas derivadas dará las tangentes en cada uno.

Haciendo $z = 0$ en las dos primeras ecuaciones, se obtiene el mismo resultado

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0; \qquad (2)$$

y como la recta $z = 0$ forma parte de la tercera curva, los dos puntos así determinados en el infinito, que son imaginarios, son dos puntos múltiplos. Las derivadas segundas son

$$f_{11}{}^2 = 6\,a^2 (P^2 + 4\,a^2 P x^2 + 9 b^2 c^4 y^2 z^2)$$

$$f_{22}{}^2 = 6\,b^2 (P^2 + 4\,P b^2 y^2 + 9 a^2 c^4 x^2 z^2)$$

$$f_{33}{}^2 = 6 c^4 (-P^2 - 4 c^4 P z^2 + 9 a^2 b^2 x^2 y^2)$$

$$f_{12}{}^2 = 12\,b^2 c^4 yz\,(-2P + 9\,a^2 x^2), \quad f_{31}{}^2 = 12\,a^2 c^4 zx\,(-2P + 9 b^2 y^2)$$

$$f_{21}{}^2 = 12\,a^2 b^2 xy\,(2P + 9 c^4 z^4)$$

Si se hace $z = 0$, $a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0$, ó $z = 0$, $P = 0$, todas las derivadas se anulan, excepto la tercera; pero como el sistema de las tangentes es entonces $z^2 = 0$, es decir, dos rectas confundidas en el infinito, estos dos puntos son de retroceso. La ecuación $a^2 x^2 + b^2 y^2 = 0$, manifiesta que son imaginarias.

Se encuentra además dos puntos de retroceso reales sobre el eje de las $x$, y otros dos sobre el eje de las $y$

$$y = 0, \qquad x = \mp \frac{c^2}{a}; \qquad x = 0, \qquad y = \mp \frac{c^2}{b}$$

Por otra parte, los tres sistemas de dos curvas de segundo grado pueden escribirse,

$$P = \pm 3\,bc^2 yz\sqrt{-1} = \pm 3\,ac^2 xz\sqrt{-1} = \pm 3\,abxy.$$

Si estos tres sistemas tienen puntos comunes, las dos últimas ecuaciones muestran que estos puntos se hallan sobre el sistema de rectas

$$\pm ax = \pm by = \pm c^2 z\sqrt{-1}$$

de lo que resulta, haciendo $z = 1$

$$x = \pm \frac{c^2}{a}\sqrt{-1}, \quad y = \pm \frac{c^2}{b}\sqrt{-1}$$

y se verifica que las coordenadas de cada uno de estos puntos, en número igual á cuatro, satisfacen á una de las dos ecuaciones (1) de que se compone cada polar, y por consiguiente á la de la curva.

Si tomamos el signo +, y sustituímos en las derivadas segundas, resulta que son distintas de cero y se obtiene para el sistema de tangentes en este punto las dos rectas distintas representadas por la ecuación

$$a^2x^2 - abxy + b^2y^2 - ac^2\sqrt{-1}\,x - bc^2\sqrt{-1}\,y - c^4 = 0$$

que se descompone así

$$2ax - by\left(1 \pm 3\sqrt{-1}\right) - c^2\left(\sqrt{-1} \pm 3\right) = 0.$$

La curva tiene dos puntos de retroceso imaginarios en el infinito y cuatro puntos dobles imaginarios simétricos respecto á los ejes y dos reales en cada eje; es la evolvente de la elipse.

Una recta de longitud constante se apoya en dos rectas rectangulares envolviendo á una epicicloide. Si se forma la podar de esta curva con relación á un polo P, tomado en la bisectriz del ángulo $yOx$, esta podar es una curva llamada *escarabea*.

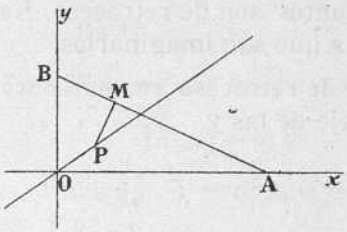


Fig. 102

De manera que la escarabea es *el lugar de las perpendiculares bajadas desde un punto fijo tomado en la bisectriz de un ángulo recto sobre una recta de longitud constante, cuyos extremos se mueven en los lados del ángulo en cuestión.*

Para obtener la ecuación de esta curva hagamos $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OP = a$, $AB = l$. Las coordenadas $x$ é $y$ del punto M satisfacen á la ecuación

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1 \qquad (1)$$

de la recta AB en la que $\alpha^2+\beta^2=l^2$, y también satisfacen á la ecuación de la recta MP

$$\alpha\left(x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\beta\left(y-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0. \qquad (2)$$

Para eliminar $\alpha$ y $\beta$, obtendremos $\frac{1}{\alpha}$ y $\frac{1}{\beta}$ de (1) y (2) y sustituiremos en $\alpha^2+\beta^2=l^2$; escrita bajo al forma

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{l^2}{\alpha^2\beta^2}; \qquad \text{lo que da}$$

$$\left[y\left(y-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+x\left(x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]^2\left[\left(x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$$
$$=l^2\left(x-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(y-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2.$$

Transportando el origen al punto P, tendremos

$$\left[x^2+y^2+a\,(x+y)\sqrt{2}\right]^2(x^2+y^2)=l^2x^2y^2, \qquad (3)$$

que en coordenadas polares se reduce á

$$\left[r^2+ra\,(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)\sqrt{2}\right]^2r^2=l^2r^4\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta,$$

de la que resulta

$$r=a\sqrt{2}\,(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)\pm l\operatorname{sen}\theta\cos\theta,$$

que sustituyendo $\theta$ por $\theta+\frac{\pi}{4}$ se simplifica reduciéndose á

$$r=2a\cos\theta\pm\frac{l}{2}\cos 2\theta$$

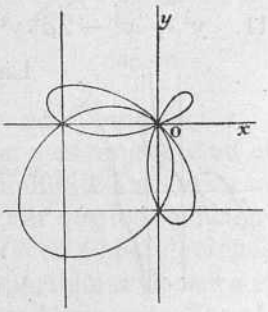


Fig. 103

La ecuación desarrollada es

$$(x+y^2)^3+2a\sqrt{2}\,(x^2+y^2)^2(x+y)$$
$$+2a^2(x+y)^2(x^2+y^2)-l^2x^2y^2=0.$$

El origen es un punto cuádruplo. Los puntos

$$x=0,\quad y=-\frac{a\sqrt{2}}{2}\quad \text{y}\quad x=-\frac{a\sqrt{2}}{2},\quad y=0$$

son dobles. Los umbílicos del plano son también dobles.

8. *Curva del diablo*. Su ecuación es

$$y^4-x^4+ay^2+bx^2=0.$$

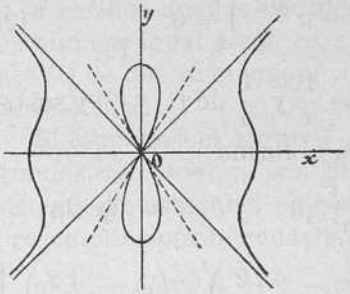


Fig. 104

Se deduce de la ecuación de la hipérbola equilátera, sustituyendo $y$ por $y^2$ y $x$ por $x^2$. Haciendo $a=-24$, $b=25$ se reduce á

$$y^4-x^4-24y^2+25x^2=0.$$

Tiene un punto doble en el origen. Pasa por los umbílicos.

9. $(by-cx)^2=(x-a)^5$.

Retroceso de primera especie para $x=a$.

10. $16(y^4-2ay^3-2a^2y^2)+(x^2-4a^2)^2=0$.

Dos puntos dobles para $x=\pm 2a$. En estos puntos

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Cuatro puntos de inflexión (fig. 106).

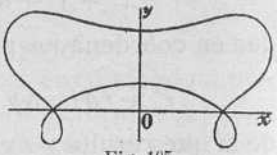


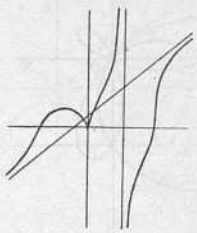
Fig. 105

11. $y^4+x^4-2a^2y^2-2b^2x^2+b^4=0$.

La ecuación se reduce á

$$y=\pm\left[\left(\frac{a^2+b^2-x^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\pm\left(\frac{a^2-b^2+x^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$x=0,\quad y=\pm\left[\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$


Fig. 106

Puntos de inflexión: $y=0$, $x=\pm b$ (fig. 105).

Puntos múltiplos para los que $\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{2}\,b}{a}$.

12. *Asíntotas de la curva* $y=e^x$.

*Solución.*—Haciendo homogénea la ecuación propuesta, resulta $y = ze^{\frac{x}{z}}$, y tenemos que

$$x = z \log \frac{y}{z} = z \log y - z \log z; \quad \text{para } z = 0, \quad \text{es } x = 0.$$

La curva tiene un punto en el infinito sobre el eje de las $y$. La asíntota correspondiente no podría hallarse á distancia finita, porque $y$ no se hace infinita para ningún valor finito de $x$; $y$ aumenta indefinidamente con $x$ para $x > 0$. Lo mismo sucede á los dos términos del coeficiente angular $\frac{y}{x} = \frac{e^x}{x}$. La rama correspondiente de la curva es por consiguiente parabólica.

13. Discusión.—Observaremos la analogía que existe entre las curvas $y = e^x$, $y = xe^{\frac{1}{x}}$, cuyas ecuaciones homogéneas son $y = ze^{x:z}$, $y = xe^{z:x}$, deduciéndose la una de la otra cuando se permutan $x$ y $z$, siendo $\frac{x}{z'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{x'}$ las fórmulas de transformación homográfica, que cuando $z = z' = 1$, se reducen á $x = \frac{1}{x'}$, $y = \frac{y'}{x}$ en coordenadas cartesianas.

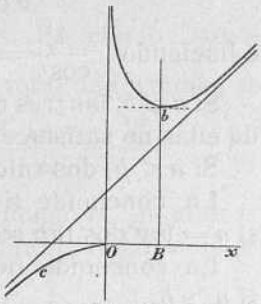


Fig. 107

Respecto á la curva $y = xe^{1:x}$, observaremos que, cuando $x$ tiende hacia cero para valores negativos, hay un punto de parada en el origen, que es punto de contacto de la curva con el eje de las $x$, y otro en el infinito.

Para valores positivos de $x$, el eje de las $y$ es tangente en el infinito. El origen es un punto de discontinuidad. La curva es discontinua entre $-\varepsilon$ y $+\varepsilon$. Se puede observar que los coeficientes de la transformación considerada satisfacen á las relaciones que caracterizan la homología, en el caso particular de ser $a$ el centro de homología, y la recta $b$B el eje de homología, $x = 1$, paralelo al eje de las $y$, trazado por el punto de intersección de las dos curvas (súplase en la figura la curva que pasa por $b$, cuya asíntota es el eje negativo de las $x$) que representa la curva $y = e^x$ es el de la segunda, para el que $y$ es un mínimo.

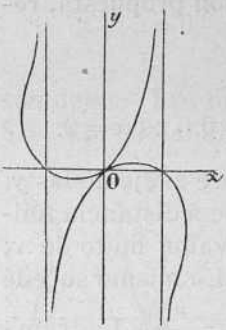


Fig 109

13. $r^2 = \dfrac{a^2}{\theta}$

$r^2 = \dfrac{a^2}{\theta} r^2 + 2\dfrac{dr^2}{d\theta^2} - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2} = 0$ ó $\infty$, condición para los puntos de inflexión.

Se tiene:

$$r = \frac{a}{\theta^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{2}\frac{a}{\theta^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{3a}{4\theta^{\frac{5}{2}}};$$

luego $a^2(4\theta^2 - 1) = 0$, $\theta = \dfrac{1}{2}$, $r = a\sqrt{2}$

14. $r = \sec\theta + b$. *(Conchoide).*

Se tiene: $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{a\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}$, $\dfrac{d^2r}{d\theta^2} = a\dfrac{\cos^3\theta + 2\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta}{\cos^4\theta}$

La ecuación $r^2 + 2\dfrac{dr^2}{d\theta^2} - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2} = 0$, se reduce á

$$b\cos^3\theta + 3a\cos^2\theta - 2a = 0$$

ó haciendo $\dfrac{1}{\cos\theta} = z$ $\qquad 2az^3 - 3az - b = 0 \qquad (1)$

Si $a \geqslant b$, las tres raíces de la ecuación (1) son reales, pero una de ellas no satisface á la condición $-1 < \cos\theta < 1$.

Si $a < b$, dos raíces son imaginarias.

La conchoide tiene 4 puntos de inflexión si $a = b$ y dos tan solo, cuando $a < b$.

La conchoide tiene 2 puntos de inflexión si $a > b$.

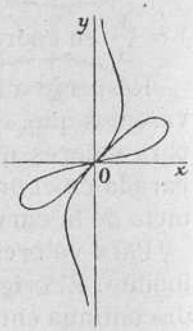


Fig. 109

15. $r = a(tg\theta - 1)$

Asíntotas para $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$

El origen es un punto doble.

La ecuación $21\,tg^3\theta + 31\,tg^2\theta + 3 = 0$, indica un punto de inflexión.

16. $r^2 = a^2\,\mathrm{sen}\dfrac{3\theta}{\cos\theta}$

*Solución.*—El eje de las $y$ es una asíntota. Los puntos de inflexión, que no son el origen, se hallan determinados por la ecuación $8\cos^3 2\theta + 3\cos^2 2\theta + 6\cos\theta\,2 + 10 = 0$.

# LIBRO TERCERO

# ESTUDIO SISTEMÁTICO DE LAS FIGURAS PLANAS

## CAPÍTULO I

### Propiedades numerativas de las curvas (*)

#### § 1.º Número de condiciones de las curvas

**90.** Número de puntos. Teorema I.—*Una curva en general, está determinada por* $\frac{m(m+3)}{2}$ *puntos*. En efecto, suponiendo la ecuación homogénea, el número total de términos es

$$1+2+3+\ldots\ldots+m+1=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

Y como podemos dividir por uno de los coeficientes, sin alterar la ecuación, hay que restar 1 á dicho número, resultando el del enunciado.

La condición de que la curva pase por $\frac{m(m+3)}{2}$ puntos da este número de ecuaciones lineales, con igual número de coeficientes, de cuya eliminación resulta la ecuación de la curva que pasa por dichos puntos.

Teorema II.—*Si por* $\frac{m(m+3)}{2}$ *puntos dados pasa una curva* C *de orden* m *tal, que entre dichos puntos haya más de* mp

(*) La Geometría numerativa tiene por objeto determinar, entre $\infty^r$ objetos definidos, el número de los que satisfacen á un número de condiciones equivalentes á $r$ condiciones simples. En Geometría numerativa se encuentra el número de soluciones finitas de un sistema de ecuación dotadas de singularidades cualesquiera.

*en otra curva* C′ *de orden* p, *la curva* C *se descompondrá en una curva de orden* p *y en otra de orden* m — p.

En efecto, cortando la curva C á la C′ en más de *mp* puntos, las ecuaciones de ambas deben tener un factor común, y siendo C′ una curva irreducible, el primer miembro de su ecuación dividirá al primer miembro de la ecuación de C, que se descompondrá según indica el teorema.

TEOREMA III.—*Si entre los* $\frac{m(m+3)}{2}$ *que determinan una curva* C *de orden* m *hay en otra curva de orden* p, *más de*

$$mp - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$$

*puntos, dicha curva se puede descomponer.*

En efecto, si hubiese

$$mp - \frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1$$

puntos en una curva A de orden $p$, por los

$$\frac{m(m+3)}{2} - mp + \frac{(p-1)(p-2)}{2} - 1 = \frac{(m-p)(m-p+3)}{2}$$

puntos restantes se podría hacer pasar una curva de orden $m-p$, que con la curva A formará otra de orden $m$ que pasa por los puntos dados. Si pues la curva C es única, puede descomponerse. En general, dos curvas de orden $m$ se cortan en $m^2$ puntos y se tiene que $m^2 \geqslant \frac{m(m+3)}{2}$, porque esta fórmula se reduce á $m^2 - 3m \geqslant 0$ ó á $m \geqslant 3$. Y si suponemos $m \geqslant 3$, se demuestra que $\frac{m(m+3)}{2}$ no determinan siempre una curva de orden $m$, ó lo que es igual, el siguiente

TEOREMA IV.—*Todas las curvas de orden* m *que pasan por* $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ *puntos dados, pasan por otros*

$$m^2 - \frac{m(m+3)}{2} + 1 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

*puntos fijos.*

En efecto, siendo $\varphi = 0$ y $\psi = 0$ las ecuaciones de las dos curvas de orden $m$ que pasan por los puntos dados, $\varphi + \lambda\psi = 0$ será la de una curva que pasa por dichos puntos, que pasará además por las otras $m^2 - \frac{m(m+3)}{2} + 1$ intersecciones de $\varphi = 0$ y de $\psi = 0$.

Pero representando la ecuación $\varphi + \lambda\psi = 0$ un haz de curvas que pasa por los puntos dados, la indeterminada $\lambda$ permitirá hacer pasar á la curva que consideramos por un punto determinado. Pasará pues por $\frac{m(m+3)}{2}$ puntos dados.

TEOREMA V.—*Si se dan* $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ *de los puntos de intersección de dos curvas de orden* m, *se obtendrán los otros*

$$m^2 - \frac{m(m+3)}{2} + 1 = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

*puntos de intersección.*

En efecto, dadas las ecuaciones de las dos curvas de orden $m$, sus intersecciones darán los puntos buscados.

TEOREMA VI.—*Si un polígono de* 2m *lados está inscrito en una cónica, los* m (m — 2) *puntos que se obtienen tomando la intersección de un lado cualquiera de orden par con los lados no adyacentes de orden impar, están situados en una curva de grado* m — 2.

En efecto, los lados de orden par forman un polígono de $m$ lados, y los de orden impar otro. Entre los $m^2$ puntos de intersección de estas dos líneas de grado $m$ hay $2m$ situados en una curva de segundo grado; luego los otros $m(m-2)$ se hallan en una curva de grado $m - 2$.

**91.** FORMAS DE LA ECUACIÓN DE UNA CURVA.—La ecuación general de las curvas de grado $m$ puede escribirse bajo la forma

$$\alpha\varphi + k\beta\psi = 0,$$

siendo $\alpha$ y $\beta$ polinomios lineales, $k$ un parámetro y $\varphi$, $\psi$ polinomios del grado $m - 1$, pues el primer miembro contiene un número

$$(m-1)(m+2)+5=m^2+m+3>\frac{m(m+3)}{2}$$

de parámetros.

Una curva de grado $m$ solo puede representarse en algunos casos bajo la forma

$$\alpha\beta\gamma\ldots\ldots+k\alpha'\beta'\gamma'\ldots\ldots=0,$$

siendo $\alpha,\beta,\gamma,\ldots\ldots,\alpha',\beta',\gamma',\ldots$ factores lineales en $x$ é $y$, porque el número de parámetros del primer miembro es igual á $4m+1$, número menor que $\frac{m(m+3)}{2}$ desde que $m>5$.

TEOREMA VII.—*Si se corta á una curva de grado* m *por una recta cualquiera, y se trazan tangentes por los* m *puntos de intersección, los otros puntos de intersección de dichas tangentes con la curva se hallan en una curva de grado* $m-2$.

En efecto, si $\beta=0$ es la secante dada, la ecuación de la curva puede escribirse bajo la forma

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\ldots\alpha_m+k\beta^2\varphi=0$$

siendo $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ funciones lineales y $\varphi$ una función de grado $m-2$, porque esta ecuación contiene, aparte de $\beta$,

$$2m+1+\frac{(m-2)(m+1)}{2}=\frac{m(m+3)}{2}$$

constantes arbitrarias.

Las rectas $\alpha_1=0,\ldots\alpha_m=0$ son tangentes en los puntos de intersección con $\beta=0$; los otros $m(m-2)$ puntos de intersección de estas tangentes y de la curva se hallan en la curva $\varphi=0$.

## § 2.º NÚMERO DE CONDICIONES IMPUESTO POR LA EXISTENCIA DE UN PUNTO SINGULAR

**92.** TEOREMA.—*La existencia de un punto múltiplo de orden* p *en una curva algebráica equivale á la existencia de* $\frac{p(p+1)}{2}$ *puntos simples, ó á la hipótesis de igual número de condiciones.*

En efecto, la hipótesis de un punto de orden $p$, implica las relaciones

$$f=0,\quad f_1=0,\quad f_2=0,\quad f_3=0,$$
$$f_{11}=0,\quad f_{12}=0,\ \ldots\ldots f_{13}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_{1,p-1}=0,\ \ldots\ldots f_{p-1,p-1}=0,$$

comprendiendo las últimas á las demás, por lo que el número de condiciones se reduce al de términos de un polinomio homogéneo, de grado $p-1$, ó $\frac{p(p+1)}{2}$ con tres variables.

Dada la ecuación de la curva bajo la forma

$$u_1+u_2+\ldots\ldots+u_m=0$$

siendo $u_1, u_2, \ldots, u_m$ polinomios homogéneos de primero, de segundo, . . . , de $m^{simo}$ grado en $x$ é $y$; por tener el polinomio $u_1$ dos coeficientes, un punto doble equivale á $1+2=3$ puntos simples; análogamente se ve que un punto triple equivale á $1+2+3=6$ puntos simples y, en general, un punto múltiplo de orden especial $p$ á $\frac{p(p+1)}{2}$ puntos simples.

Podemos además concluir que: *un punto múltiplo de orden* p *procede de la reunión de* $\frac{p(p-1)}{2}$ *puntos dobles,* pues si se trazan diversas ramas de la curva, de manera que pasen exactamente por el mismo punto, como sucede en la fig. 110, en el caso de un punto cuádruplo, se ve que el número de intersecciones es $6=\frac{4.3}{2}$.

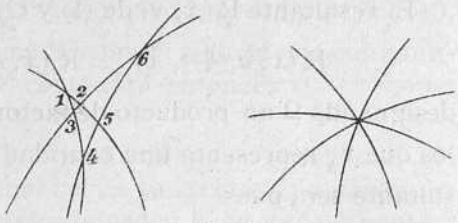


Fig. 110

**93.** Intersección de dos curvas.—Dos curvas de órdenes $m$ y $n$ respectivamente se cortan generalmente en $mn$ puntos, pero pueden cortarse en menor número de puntos. Podremos enunciar el siguiente

Teorema.—*Dos curvas que pasan por un mismo punto* M *y tienen en éste un lazo de orden* i *y otro de orden* j, *deben considerarse como cortándose, por lo menos, en* ij *puntos confundidos.*

Sean las dos curvas con un punto singular común

$$\varphi_i(x, y) + \varphi_{i+1}(x, y) + \varphi_{i+2}(x, y) + \ldots\ldots = 0, \qquad (1)$$

$$\psi_j(x, y) + \psi_{j+1}(x, y) + \psi_{j+2}(x, y) + \ldots\ldots = 0 \qquad (2)$$

expresando $\varphi_i, \ldots, \psi_j, \ldots$ polinomios homogéneos de grados $i, i+1, \ldots, j, j+1, \ldots$; de manera que las curvas tendrán respectivamente, en el origen, un punto múltiplo de orden $i$ y otro de orden $j$.

Haciendo $\frac{y}{x} = t$, podremos escribir la primera ecuación del modo siguiente:

$$x^i \varphi_i(1, t) + x^{i+1} \varphi_{i+1}(1, t) + \ldots\ldots = 0,$$

ó

$$\varphi_i(1, t) + x \varphi_{i+1}(1, t) + \ldots\ldots = 0. \qquad (3)$$

Para $x = 0$, esta ecuación se reduce á $\varphi_i(1, t) = 0$; luego, para $x = 0$, $i$ raíces de la ecuación (3) se reducen á las $i$ raíces $r_1, r_2, \ldots, r_i$ de $\varphi_i(1, t) = 0$, que pueden expresarse por $r_1 + \varepsilon_2$, $r_2 + \varepsilon_2, \ldots$, designando $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ cantidades infinitamente pequeñas en la proximidad de $x = 0$; luego $i$ raíces $y$ de la ecuación (1) estarán representadas por $a_1 x + \varepsilon_1 x, \ldots, a_i + \varepsilon_i x$.

El resultante R $(x, y)$ de (1) y (2) será

$$\mathrm{R}(x, a_1 + \varepsilon_1 x) \ldots \mathrm{R}(x, a_i x + \varepsilon_1 x)\, \Omega = 0,$$

designando $\Omega$ un producto de factores tales como R $(x, y_h)$, en los que $y_h$ representa una cantidad finita para $x = 0$. Dicho resultante será pues

$$\Pi[\psi_j(x, a_k x + \varepsilon_k x) + \psi_{j+1}(x, a_k x + \varepsilon_k x) \ldots] \Omega = 0,$$

$$\Pi[x^j \psi_j(1, a_k + \varepsilon_k) + x^{j+1} \psi_{j+1}(1, a_k + \varepsilon_k) + \ldots] \Omega = 0,$$

$$x^{ij} \Pi[\psi_j(1, a_k + \varepsilon_k) + x \psi_{j+1}(1, a_k + \varepsilon_k) + \ldots] \Omega = 0,$$

$$x^{ij} \Pi[\psi_j(1, a_k) + \varepsilon_k \psi_j(1, a_k) + \ldots + x \psi_{j+1}(1, a_k) + \ldots] \Omega = 0,$$

Los términos de menor grado del resultante contendrán pues, $x^{ij}$ como factor, y el teorema queda demostrado.

En el caso en que una de las cantidades $\psi_j(1, a_k)$ se anulase, las ecuaciones $\varphi_i(1, t) = 0$ y $\psi_j(1, t) = 0$ tendrían una raíz común; y puesto que estas ecuaciones son las del coeficiente angular de la tangente, dichas curvas tendrían una tangente común, y podremos enunciar el siguiente

TEOREMA.—*Si dos curvas tienen en un punto* M *nudos con* i *y* j *ramas, deberán considerarse como teniendo* i + j *puntos confundidos en* M, *más tantos puntos confundidos con éstos como tengan tangentes comunes en* M.

En efecto, sustituyendo $t$ por $a_k + \varepsilon_k$ en (3), tendremos

$$\varphi_i(1, a_k + \varepsilon_k) + x\,\varphi_{i+1}(1, a_k + \varepsilon_k)(1, a_k + \varepsilon_k) + \ldots = 0,$$

$$\varphi_i(1, a_k) + \varepsilon_k\,\varphi'_i(1, a_k) + \ldots\ldots + x\,\varphi_{i+1}(a_k) + \ldots = 0,$$

$$\varepsilon_k = -\frac{\varphi_{i+1}(1, a_k)}{\varphi'_i(1, a_k)}\,x,$$

con una aproximación de segundo orden; $\varepsilon_k$ será pues proporcional á $x$ y de la forma $b_k x + \varepsilon'_k x$, anulándose todavía con $x$. Cuando $\varphi'_i(1, a_k)$ no sea nulo esta conclusión no es cierta.

Si suponemos pues $\varepsilon_k = b_k x + \varepsilon'_k x$ y $\psi_j(1, a_k) = 0, \varphi_i(1, a_k) = 0$, no sólo las curvas tienen un nudo común, sino además una tangente común. La fórmula (4) contendrá entonces $x^{i+j+1}$ como factor.

**94.** INFLUENCIA DE LOS PUNTOS SINGULARES.—Siendo todas las polares de un punto de una curva tangentes á la misma en dicho punto, si éste es múltiplo de orden $k$, en cada secante $k$ factores $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_k$ son nulos.

Si $n < k$ la ecuación de la polar se reduce á una identidad, si $n \geqslant k$, la ecuación de la polar contiene el factor $r^k$, por consiguiente el punto P es también en cada polar un punto múltiplo de orden $k$. Las tangentes á la curva propuesta en el punto múltiplo son también tangentes á la polar. Entonces la polar de grado $k$ es un sistema de $k$ rectas. Así, la polar cónica de un punto doble se compone de dos rectas, que son las dos tangentes á la curva.

TEOREMA.—*Todo punto singular de una curva de grado* m *pertenece á la polar de grado* m − 1 *de un punto cualquiera del plano. Todo punto triplo de la curva es un punto de la polar de grado* m − 2 *y un punto doble de la polar de grado* m − 1 *de un punto cualquiera del plano. Todo punto cuádruplo es un punto de la polar de grado* m − 3, *un punto doble de la polar de grado* m − 2, *un punto triplo de la polar de grado* m − 1 *de un punto cualquiera del plano, y así sucesivamente.*

En efecto, un punto de la curva $f = 0$ para el que

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0,$$

pertenece á la curva

$$x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3 = 0,$$

que es la polar de orden $m-1$ de un punto cualquiera $(x_0, y_0, z_0)$.

Un punto triplo de la curva, para el que se tiene

$$f_{11} = 0, \quad f_{12} = 0, \quad f_{13} = 0, \quad f_{22} = 0, \quad f_{23} = 0, \quad f_{33} = 0,$$

pertenece á la curva

$$x_0^2 f_{11} + y_0^2 f_{22} + z_0^2 f_{33} + 2 y_0 z_0 f_{23} + 2 x_0 z_0 f_{13} + 2 x_0 y_0 f_{12} = 0,$$

que es una polar de grado $m - 2$.

También se tiene para este punto, cualesquiera que sean $x_0, y_0, z_0$,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3) = 0, \quad \frac{\partial}{dy}(x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3 = 0,$$

y la polar de grado $m - 1$ tiene un punto doble, así sucesivamente.

También podemos demostrar que:

*La tangente á la primera polar de un punto cualquiera es armónica conjugada á las tangentes de la curva primitiva, en el punto doble, y á la recta que une éste con el polo,* pues pudiéndose escribir, en el caso del punto doble, la ecuación de la curva, bajo la forma

$$f = xyz^{n-2} + \varphi_3 z^{n-3} + \ldots\ldots = 0,$$

la ecuación de la polar en el punto $x_0, y_0, z_0$ será

$$\varphi = (x_0 y + y_0 x)\, z^{n-2}$$

$$+ \left[(n-2)\, xyx_0 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} x_0 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} y_0\right] z^{n-3} + \ldots$$

Y la ecuación de la tangente en el origen y la de la recta que une el origen al polo son, respectivamente,

$$x_0 y + x y_0 = 0, \qquad x_0 y - x y_0 = 0.$$

TEOREMA.—*Si una curva tiene un punto de retroceso, ó en general, un punto singular con dos tangentes confundidas, la polar de grado* m − 1 *es tangente en este punto á la curva.*

En efecto, tomando por origen el punto singular, la ecuación de la curva será

$$z^{m-k} \varphi_k (x, y) + z^{m-k-1} \varphi_{k+1} (x, y) + \ldots \varphi_m (x, y) = 0$$

expresando $\varphi_k, \varphi_{k+1}, \varphi_{k-2}, \ldots$ funciones homogéneas de grados $k, k+1, k+2 \ldots$ La ecuación de las tangentes en el nudo es $\varphi_k (x, y) = 0$, la de la polar del punto $x_0, y_0, z_0$ es

$$0 = x_0 \left[z^{m-k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + z^{m-k-1} \frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial x} + \ldots\right]$$

$$+ y_0 \left[z^{m-k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} + \ldots\right] + z_0 \left[(m-k)\, z^{m-k-1} \varphi_k + \ldots\right]$$

Los términos de menor grado en $x$ é $y$ son

$$z^{m-k} \left(x_0 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \varphi_k}{\partial y}\right);$$

luego la polar pasa por los puntos singulares, puesto que $k$ es por lo menos igual á 2, si el origen es un punto singular, y el punto singular en el origen de la polar es de orden inmediatamente inferior al de la curva. Además la ecuación de las tangentes en el nudo de la polar es

$$x_0 \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + y_0 \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} = 0.$$

Pero si $\varphi_k = 0$ tiene una raíz doble, y si en este caso, la cur-

va tiene dos tangentes confundidas ó un retroceso, dicha raíz es simple para $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}$ y para $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}$; luego la tangente de la polar es la tangente doble en el nudo.

TEOREMA.—*Una curva de orden* m *es, en general, de la clase* m (m — 1); *pero un punto doble rebaja á ésta en dos unidades, un punto de retroceso en tres, un punto de orden de multiplicidad* n *en* n (n — 1) *unidades por lo menos.*

En efecto, puesto que todos los puntos de contacto de las tangentes trazadas por P $(x_0, y_0, z_0)$ á la curva pertenecen á la polar de orden $m - 1$ de P; si la curva no tiene puntos dobles, los puntos de intersección darán $m(m-1)$ tangentes. Pero si la curva tiene un punto doble, la polar pasará por este punto, y la recta trazada por P al punto singular no será propiamente tangente. Además la curva, en la proximidad del punto doble, cortará á la polar en dos puntos confundidos, y desaparecerán dos tangentes. Así *la presencia de un punto doble rebaja á la clase en dos unidades.*

*Si el punto doble fuese de retroceso,* la curva y la polar serían tangentes, y por consiguiente se cortarían en tres puntos confundidos. *La clase se rebajaría en tres unidades.* En fin, *al ser un punto de orden* n *de multiplicidad,* un punto de orden $n - 1$ de la polar, la curva y su polar se cortan en dicho punto en $n(n-2)$ puntos confundidos y *la clase se rebaja, por lo menos en* n (n — 1) *unidades,* pues si el punto múltiplo considerado tuviese tangentes múltiples, la curva y la polar tendrían contactos que aumentarían el número de puntos comunes confundidos.

Tomando el polo por origen, la ecuación de la curva es

$$z^{m-k}\varphi_k(x,y) + z^{m-k-1}\varphi_{k+1}(x,y) + \ldots\ldots + \varphi_m(x,y) = 0.$$

El origen es un nudo, si $k > 1$. Por la ecuación de la polar de grado $m - 1$,

$$(m-k)z^{m-k-1}\varphi_k(x,y) + z^{m-k-2}(m-k-1)\varphi_{k+1}(x,y) + \ldots = 0,$$

se ve que tiene las mismas tangentes que la curva propuesta y que el número de puntos comunes á las dos curvas es superior al que tienen en el caso general.

En general, un punto múltiplo de orden $p$ aparece como un punto en el que están condensados $p$ puntos de la curva.

*Aplicaciones.*—Si una curva de segundo grado tiene un punto doble, una recta que pasa por este punto, no la corta, mientras no se confunda con ella; luego la curva se debe descomponer en dos rectas.

Si una curva de tercer grado tiene un punto doble, una recta que pase por éste, solo la cortará en otro punto.

*Una curva de tercer grado no puede tener dos puntos dobles*, porque la recta que pasase por ellos, encontraría á la curva en cuatro puntos y formaría parte de ésta que se descompondría en una recta y una cónica.

*Una curva de cuarto grado no puede tener más de tres puntos dobles,* porque una cónica que pasase por estos cuatro puntos y por un quinto punto, la cortaría en nueve puntos. Dicha cónica formaría parte de la curva, que se descompondría en dos cónicas, etc.

TEOREMA.—*Todas las polares primeras de una curva que tiene un punto de retroceso, encuentran á la misma en tres puntos coincidentes con éste, es decir, que la ecuación de que dependen las intersecciones de las dos curvas, tiene tres raíces iguales correspondientes al punto de retroceso.*

En efecto, la ecuación de la curva, en el caso del punto de retroceso, puede escribirse bajo la forma

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^2 z^{n-2} + dy^3 z^{n-3} + \varphi_4 z^{n-4} + \ldots\ldots = 0,$$

pues hallándose confundidas dos tangentes en el punto de retroceso, la ecuación de la curva se reduce á

$$f(x_1, x_2, x_3) = x^2 z^{n-2} + \varphi_3 z^{n-3} + \ldots\ldots,$$

siendo $\varphi_3$ por ejemplo igual á

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3;$$

pero la recta $y = 0$ no se halla sujeta más que á la condición de pasar por el punto de retroceso. Podemos pues, dejando $x$ fija, disponer de $y$ y $z$ de modo que los términos de tercer grado formen un cubo perfecto; haremos pues

$$y = y' + \lambda x, \qquad z = z' + \mu y' + \nu x$$

y $f$ se transformará en

$$f = x^2 z'^{n-2} + \psi_3 z'^{n-3} \psi_4 z'^{n-4} + \ldots\ldots$$

Determinaremos $\lambda$, $\mu$, y $\nu$ de modo que

$$\psi_3 = (n-2)\, x^2 (\mu y' + \nu x) + a x^3 + 3 b x^2 (y' + \lambda x)$$
$$+ 3 c x (y' + \lambda x)^2 + d (y' + \lambda x^3 = [(n-2)\nu + a + 3 b \lambda + \ldots] x^3$$
$$+ [(n-2)\mu + 3 b + \ldots] x^2 y + 3 (c + d\lambda) x y'^2$$

se reduzca á un término que sólo contenga $y'^3$, para lo que basta hacer

$$(n-2)\nu + a + 3 b \lambda + c \lambda^2 + d \lambda^3 = 0,$$
$$(n-2)\mu + 3 b + 6 c \lambda + 3 d \lambda^2 = 0,$$
$$c + d\lambda = 0,$$

y resultará la ecuación de la curva bajo la forma

$$f = x^2 z^{n-2} + d y^3 z^{n-3} + \psi_4 z^{n-4} + \ldots\ldots = 0. \qquad (a)$$

Esto sentado, para demostrar el teorema, formaremos la ecuación de la polar de esta curva

$$\psi = 2 x x_0 z^{n-2} + [3 d y_0 y^2 + (n-2) z_0 x^2] z^{n-3} + \psi_3 z^{n-4} \ldots = 0.$$

La recta $x = 0$ es pues, también tangente á la primera polar; de manera que: *en un punto de retroceso, la primera polar de un punto cualquiera es tangente á la tangente de retroceso.*

**95.** GENERACIÓN DE UN PUNTO DE RETROCESO.—Este puede obtenerse de un punto doble en el límite, porque de la ecuación ($a$) resulta

$$x = \sqrt{-d y^3},$$

expresión imaginaria para $d > 0$ desde que $y$ se hace $> 0$, y teniendo su origen un punto doble en la existencia de un lazo ó bucle de la curva, cuando las dos tangentes, en dicho punto doble tienden á confundirse, la parte comprendida en su espacio angular tiende á anularse, porque no hay más allá del retroceso, ningún punto de la curva.

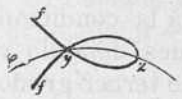


Fig. 111

Una recta ó curva, trazada por el punto doble, encuentra al bucle en un punto $z$, cuya distancia al punto doble tiene una distancia máxima dependiente del bucle;

pero al degenerar el punto doble en punto de retroceso, disminuye el bucle y por consiguiente su máximo hasta reducirse á un punto, lo que hace que en la ecuación

$$\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 = 0$$

correspondiente al grupo homogéneo de segundo grado de la ecuación de la curva, la cantidad $\alpha\gamma - \beta^2$ se aproxime á cero. En este momento las dos tangentes en el punto doble coinciden con la recta trazada, y el tercer punto $z$ de la rama considerada se confunde con el punto doble, originándose el punto de retroceso. Considerando la primera polar, tres de sus puntos de intersección quedan reunidos en el punto de retroceso de la curva primitiva.

## § 3.º Influencia de la Hessiana

**96.** Sabemos que la Hessiana $H = 0$ es una curva de grado $3(m-2)$ que pasa por los puntos de inflexión de la curva dada (pág. 78). Dicha curva puede definirse también por la propiedad enumerada en el siguiente

Teorema 1.º—*La Hessiana de una curva es el lugar de los puntos para los que la polar cónica se reduce á dos rectas.*

En efecto, la ecuación de la polar cónica del punto $(x, y, z)$ es

$$X^2 f_{11} + Y^2 f_{22} + Z^2 f_{33} + 2\,YZ f_{23} + \ldots\ldots = 0,$$

siendo X, Y, Z las coordenadas generales; y para que esta cónica se reduzca á dos rectas es necesario que $H = 0$.

Teorema 2.º—*La Hessiana es el lugar de los puntos dobles de la primera polar de la curva dada.*

En efecto, siendo la ecuación de la primera polar

$$x_0 f_1 + y_0 f_2 + z_0 f_3 = 0,$$

eliminaremos $x_0, y_0, z_0$ entre las ecuaciones

$$x_0 f_{11} + y_0 f_{12} + z_0 f_{13} = 0, \quad x_0 f_{21} + \ldots = 0, \quad x_0 f_{31} + \ldots = 0,$$

y el resultante, que es la Hessiana, será el lugar de los puntos singulares de la primera polar.

La teoría de las polares permite obtener directamente la ecuación de la Hessiana, pues si tomamos la tangente de inflexión por eje de las $x$, la ecuación

$$\varphi_m + \varphi_{m-1} + \ldots \varphi_2 + \varphi_1 = 0$$

de la curva se reduce á la forma

$$\varphi_m + \varphi_{m-1} \ldots + z^{m-3}(Ax^3 + \ldots) + z^{m-2}(ay^2 + bxy) + z^{m-1}y = 0;$$

porque siendo $\varphi_1 = 0$ la ecuación de la tangente $\varphi_1 = cy$; además el término en $x^2$ no puede figurar en $\varphi_2$, por ser el origen un punto triple, y $x^3$ figurará en $\varphi_3$.

Derivando $m - 2$ veces, obtendremos la polar cónica

$$(m-1)(m-2) \ldots 2yz + (m-2) \ldots 2.1\,(ay^2 + bxy) = 0$$

que representa dos rectas, de las que una es el eje de las $x$.

TEOREMA.—*En un punto doble de la curva primitiva, la Hessiana tiene también un punto doble y las tangentes de las dos curvas en el punto doble son las mismas.*

En efecto, de $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ se deducen las ecuaciones derivadas cuyo resultante es la Hessiana.

Tomando por origen el punto singular, y solamente los términos de menor grado de la Hessiana, si representamos por $\varphi$ característica de los grupos homogéneos de la ecuación de la curva, tendremos

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & (m-k-1)\,\varphi \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Si el punto es doble, $\varphi$ es de segundo grado, y los términos de menor grado de la Hessiana son también de segundo, y ésta tendrá también un punto doble.

Si $\varphi$ es de tercer grado, á un punto triplo de la curva corresponde un punto quíntuplo de la Hessiana.

En el caso de ser el nudo un punto doble, $\varphi$ se reduce á $xy$ y el determinante á

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & x \\ y & x & (m-3)\,xy \end{vmatrix} = -(m-5)xy.$$

La Hessiana tiene las mismas tangentes que la curva propuesta, á saber $x = 0, y = 0$.

En el caso de ser $\varphi = y^2$, la curva tendrá un punto de retroceso; dicho determinante será nulo. Entonces podremos escribir un término más, y tendremos la ecuación

$$z^{m-2}y^2 + z^{m-3}\theta + \ldots\ldots = 0,$$

y se tiene

$$H = \begin{vmatrix} z^{m-3}\theta_{11} & z^{m-3}\theta_{12} & (m-3)\,z^{m-4}\theta_1 \\ z^{m-3}\theta_{12} & 2\,z^{m-2} & 2\,(m-2)\,z^{m-3}y \\ (m-3)\,z^{m-4}\theta_1 & 2y\,(m-2)\,z^{m-3} & (m-3)\,m-2\,z^{m-4}y^2 \end{vmatrix} +$$

y no tomando del Hessiano más que los factores de menor grado, será $H = y^2\theta_{11}$.

La Hessiana tiene pues un punto triplo y dos tangentes comunes con la curva propuesta.

Una rama de la Hessiana encuentra á cada rama de la curva primitiva en un punto doble y á otra en su solo punto, luego: *El número de puntos de intersección que pueden considerarse, en general, reunidos en un punto doble, es igual á seis.*

También puede verse que: *Las dos ramas tangentes entre sí de la Hessiana y de la curva se presentan respectivamente en su lado convexo.* Para demostrarlo, observemos, considerando las ramas tangentes á $x = 0$, que para un punto próximo, $x$ es de un orden infinitesimal superior al de $y$. Hallándose pues la ecuación de la curva reducida á la forma

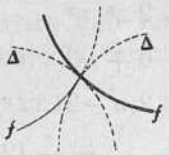


Fig. 112

$$f = xyz^{n-2} + f_3 z^{n-3} + \ldots\ldots = 0,$$

en la que $f_3 = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$,

la primera agrupación de términos que podemos hacer, dará la parábola $x + dy^2 = 0$. Despreciando enseguida en el Hessiano $\frac{1}{6}[n(n-1)]^3 H$, cuyas tres primeras líneas verticales son

$$f_{11}z^{n-3} \quad z^{n-2}f_{12}z^{n-3} \quad (n-2)\,yz^{n-3} + (n-3)f_1 z^{n-4} + \ldots,$$
$$z^{n-2} + f_{12}z^{n-3} \quad f_{22}z^{n-3} \quad (n-2)\,xz^{n-3} + (n-3)f_2 z^{n-4},$$
$$(n-2)\,yz^{n-3} + (n-3)\,f_1 z^{n-4}; \quad (n-2)\,xz^{n-3} + (n-3)f_2 z^{n-4};$$
$$(n-2)\,(n-3)\,xyz^{n-4} + (n-3)\,(n-4)\,fz^{n-5} + \ldots$$

(habiendo escrito solo los primeros términos cuyos términos de

menor grado en $x$ é $y$ son

$$2(n-2)^2 xyz^{3n-8}(n-2)(n-3)xyz^{3n-8}=(n-1)(n-2)xyz^{3n-8}$$

los términos multiplicados por $x$, hallamos por coeficiente de $z^{3n-9}$, la expresión

$$2(n-2)(n-3)yf_2+(n-3)(n-4)f-(n-2)^2y^3f_{22}.$$

Si despreciamos nuevamente los términos multiplicados por $x$, buscando enseguida el factor de $y^3$ se obtiene para la rama correspondiente de la Hessiana, la parábola

$$(n-2)x-ndy^2=0,$$

cuya convexidad es opuesta á la de la primera parábola.

Para un *punto de retroceso,* hallándose las dos tangentes confundidas, por ejemplo con el eje $x=0$, la ecuación de la curva se reduce á

$$x^2z^{n-2}+y^3z^{n-3}+\ldots\ldots=0$$

y tenemos que

$$\begin{vmatrix} 2z^{n-2} & 0+\ldots\ldots & 2(n-2)xz^{n-3}+\ldots \\ 0+\ldots\ldots & 6yz^{n-3} & 3(n-3)y^2z^{n-4}+\ldots \\ 2(n-2)xz^{n-2}; & 3(n-3)y^2z^{n-4}+\ldots; & (n-2)(n-3)x^2z^{n-4}+\ldots \end{vmatrix}$$

$$=-12(n-1)(n-2)yx^2z^{3n-9}+\Delta^{(4)}z^{3n-10}+\ldots$$

Los términos de menor grado en $x$ é $y$ de este determinante son del tercero, y la presencia del factor $x^2$ permite enunciar el siguiente

TEOREMA.—*En un punto de retroceso de la curva propuesta, la Hessiana tiene un punto triplo, y dos de sus ramas son tangentes á la tangente de retroceso, mientras que la tercera tiene una tangente separada,* pues podemos formarnos idea de la disposición de las ramas de la Hessiana, observando que la expresión $\Delta^4$ contiene un término en $y^4$, á saber,

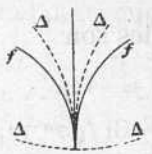


Fig. 113

$$12(n-1)(n-2)y^4z^{3n-10}$$

procedente de los términos

$$3(n-3)y^2z^{n-4},\quad 3(n-3)y^2z^{n-4},\quad 2z^{n-2}$$

mientras que los demás están multiplicados por $x^1$. Pero $x$ es de un orden infinitesimal superior al de $y$, porque la distancia á la tangente, en un punto infinitamente próximo al de contacto, es de orden superior al segmento comprendido entre el pie de la perpendicular y dicho punto. Los términos que contienen $x^2$ pueden pues, despreciarse, en la proximidad del punto de retroceso, y la curva Hessiana puede reducirse á la curva

$$yx^2 + \delta y^4 = 0,$$

es decir, se compone de dos ramas de las que una es tangente á $y = 0$ y la otra pertenece al tipo del punto de retroceso.

La expresión $\delta = \frac{1}{2}\frac{n-3}{n-3}d$ indica que $\delta < d$; de manera que á un mismo valor de $y$ corresponde un valor menor de $x$ para H que para $f$; lo que explica la disposión de la figura.

TEOREMA.—*En el punto de retroceso se hallan reunidos ocho puntos de intersección de una curva y de su Hessiana.* Esto se ha demostrado cuando $2n > 7$. Pero es también cierto cuando $n = 3$, puesto que existen, en general, nueve puntos de inflexión; pero en el caso del punto de retroceso existe uno tan solo, pues hemos visto que $f$ puede escribirse bajo la forma $f = x^2 z + y^3$, de donde

$$6^2 \Delta = \begin{vmatrix} 2z & 0 & 2x \\ 0 & 6y & 0 \\ 2x & 0 & 0 \end{vmatrix} = -24\, x^2 y.$$

Para $f = 0$, $\Delta = 0$, se tiene ó $x^2 = 0$ é $y^3 = 0$, lo que da seis puntos de intersección reunidos en el punto de retroceso, ó $y = 0$ y $x^2 z = 0$, lo que da dos intersecciones reunidas en el punto de retroceso y además el punto único de inflexión $y = 0$, $z = 0$.

**96.** TIPOS FUNDAMENTALES.—La discusión de una curva en un punto singular da origen á los tres tipos siguientes:

(I) $x^{2h+1} = y^{2k}$ *tipo de la parábola.*

(II) $x^{2h+1} = y^{2k+1}$ *tipo del punto de inflexión.*

(III) $x^{2h} = y^{2k+1}$ *tipo del punto de retroceso.*

## § 4.º Intersección de dos curvas

Teorema.—*Si un punto determinado debe ser un punto múltiplo de orden* q *en una curva algebráica, esta condición es equivalente á* $\frac{q(q+1)}{2}$ *condiciones lineales,* es decir, que para una curva de $n^{simo}$ orden no se puede elegir más que

$$\frac{n(n+3)-q(q+1)}{2}$$

puntos arbitrariamente.

Sea la curva $f \equiv A\varphi + B\psi = 0$, y supongamos que en la proximidad de un punto P en que se cortan las dos curvas $\varphi = 0$, $\psi = 0$, la primera tenga un punto múltiplo de orden $q$ y la segunda uno de orden $r$, de manera que se hallen reunidas en P, $qr$ intersecciones de las curvas. Supongamos, para precisar, que $r \geqslant q$ y que las ramas no son tangentes entre sí.

Si tomamos como origen el punto P, todos los términos de grado $0, 1, 2, \ldots, (q-1)$ en $f$ se anularán, por hipótesis; luego $f$ tendrá un punto múltiplo de orden $q$, lo que da la anulación de

$$1+2+3+\ldots+q = \frac{q(q+1)}{2} \text{ constantes.}$$

Teorema.—*Si dos curvas* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *tienen respectivamente en uno de sus puntos de intersección* P *un punto múltiplo de orden* q *y un punto múltiplo de orden* r $(r > q)$, *es necesario, para que una curva que pasa por los puntos de intersección de* $\varphi$ *y de* $\psi$ *pueda expresarse bajo la forma*

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0,$$

*que dicha curva tenga en* P *un punto múltiplo de orden* q, *y que si se toma como origen este último, los coeficientes de* f *hasta el* $(r+q-1)^{simo}$ *grado exclusivamente, satisfagan á* $rq - \frac{1}{2}q(q+1)$ *ecuaciones homogéneas.*

Siendo $r > q$ al teorema anterior hay que añadir otras condiciones, pues los términos de orden $q$, $q+1, \ldots\ldots, r-1$ de $\psi$ son nulos. Por consiguiente los $(q+i+1)$ coeficientes de los

términos del orden $(q+1)^{simo}$ en $f$ (siendo $i = 0, 1, \ldots, r-q-1$) dependen únicamente de los coeficientes de los términos de igual orden en el producto $A\varphi$. Estos últimos se obtienen respectivamente multiplicando términos de orden $q$ en $\varphi$ por términos de orden $i$ en A, de orden $(q+1)$ en $\varphi$ por términos de orden $i-1$ en A, ..... de orden $(q+i)$ en $\varphi$ por términos de orden 0 en A.

No pueden pues, representarse bajo la forma $A\varphi + B\varphi$ más que las funciones $f$, en las cuales los $q+i+1$ coeficientes de los términos de grado $(q+i)$ puedan expresarse linealmente por

$$1+2+\ldots\ldots+(i+1)=\frac{(i+1)(i+2)}{2}$$

cantidades arbitrarias que son los coeficientes de A. Pero los términos de grado $q^{simo}$, $(q+1)^{simo}$, ... $(r-1)^{simo}$ en $f$ contienen

$$(q+1)+(q+2)+\ldots+r=\frac{(q+r-1)(r-q)}{2}$$

coeficientes, por los que serán funciones lineales y homogéneas de los

$$1+2+3+\ldots+(r-q)=\frac{(r-q+1)(r-q)}{2}$$

coeficientes arbitrarios de los términos de grado $0, 1, \ldots, (r-q-1)$ en A. Es decir, que entre los coeficientes de los términos de $q, (q+1), \ldots\ldots, (r-1)$ grado de $f$ deben existir las ecuaciones lineales homogéneas en número

$$\frac{(r-q)(r+q+1)}{2}-\frac{(r-q)(r-q+1)}{2}=(r-q)\,q, \qquad (1)$$

que resultan de la eliminación de los coeficientes de que se trata de A.

Pero la singularidad que presentan $\varphi$ y $\psi$ en el punto considerado, ejerce todavía su influencia en una serie de términos de orden más elevado, cuando $f$ es representable por $A\varphi + B\psi$. En general, los términos de orden $k$ en $f$ se obtienen multiplicando en $\varphi$ los términos de orden $q$ por los de orden $k-q$ en A,

los de orden $q+1$ por los de orden $k-q-1, \ldots$ los de orden $k$ por los de orden 0, en ♀ y en A respectivamente

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| en ♄ | los de orden | $r$ | por | los de | $k-r$ | en B |
| » | » | » | » | » | $r-1$ | » | » | » | $k-r+1$ | » |
| . | . | . | . | . | . | . | . | . | . | . |
| » | | $k$ | » | | 0 | » |

Podemos, por consiguiente, determinar el número de los coeficientes de A y B que entran en los de la función $A♀ + B♄$ hasta el orden $k$ inclusive, y obtendremos

$$1+2+\ldots+(k-q+1)=\frac{1}{2}(k-q+2)(k-q+1),$$

$$1+2+\ldots+(k-r+1)=\frac{1}{2}(k-r+2)(k-r+1),$$

coeficientes de A y de B, respectivamente.

Por consiguiente $A♀ + B♄$ contiene en los términos contados hasta el grado $k$ inclusive,

$$Q=\frac{1}{2}[(k-q+2)(k-q+1)(k-r+2)(k-r+1)]$$

parámetros, mientras que el número de coeficientes que se han de expresar por dichos parámetros en los términos de igual orden en $f$, es decir, en los comprendidos desde el orden $q$ hasta el orden $k$, es

$$P=\frac{1}{2}(k+q+2)(k-q+1).$$

Si aumentamos $k$ en 1, Q aumentará en

$$k-q+2+k-r+2$$

y los $k+2$ coeficientes de una forma binaria de grado $k+1$ se adjuntan á P, es decir, que P aumenta en $k+2$; y la diferencia P -- Q aumenta en $k-q-r+2$, que es el número de condiciones introducidas, cuando se toma el término de grado $(k+1)^{simo}$ además de los del $k^{ésimo}$. Si pues $k$ es, en particular, igual á $q+r-2$, no se añade ninguna condición nueva, es decir, que: *Los coeficientes de los términos del grado* $(q+r-1)^{ésimo}$ *de* f *no quedan modificados por el punto singular*. Luego, si hacemos $k=q+r-2$, resulta

$$P - Q = rq - \frac{1}{2} q(q+1),$$

que es el número de ecuaciones lineales necesarias, entre las que se hallan comprendidas las $(r - q)\, q$ indicadas en (1). Como además se hallan impuestas $\frac{1}{2} q(q+1)$ condiciones por el punto múltiplo de orden $q$ que $f$ tiene en P, queda demostrado el teorema.

El recíproco de este teorema es cierto, es decir, que las $rq$ condiciones halladas son *suficientes* para que $f$ pueda presentarse bajo la forma $f = A + B\psi$. (2)

En efecto (*): Si las $rq$ condiciones se hallan satisfechas, se pueden hallar dos series $a$, $b$ ordenadas según las potencias ascendentes de $x$, tales que se tenga $f = a\varphi + b\psi$. Si pues, sustituímos el origen por un punto cualquiera, nos bastará demostrar el teorema siguiente:

*Sean* $(\alpha, \beta)$ *un sistema de soluciones de las ecuaciones* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *y* a, b *dos desarrollos según las potencias enteras positivas y ascendentes de* $(x - \alpha)$ *y* $(x - \beta)$. *Para que* f *sea de la forma* $A\varphi + B\psi$, *es necesario y suficiente que se puedan determinar* a *y* b *por la condición*

$$f = a\varphi + b\psi.$$

Supongamos, en primer lugar, $\varphi = x$, agrupemos en $f$, $\varphi$ y B los términos independientes de $x$, y escribamos

$$f = xf' + F(y), \quad \psi = x\psi' + \Psi(y), \quad B = xB' + \mathfrak{B}(y).$$

Efectuando la misma agrupación en $(A\varphi + B\psi)$, y reteniendo tan sólo los términos independientes de $x$, se obtiene

$$F(y) = \mathfrak{B}(y)\, \Psi(y),$$

es decir, que *para la exactitud de la ecuación* $A\varphi + B\psi = 0$, *haciendo* $\varphi = x$, *es necesario que la parte independiente de* x *en* f *sea divisible por la parte independiente de* x *en* $\psi$. Esta condición es suficiente como se ve enseguida.

(*) Halphen *Sur une proposition d'Algèbre* (Bulletin de la Societé Mathématique de France), t. V, pág. 160.

Sea $\beta$ una raíz de $\Psi(y)$, y supongamos satisfecha la condición (2) para el sistema 0, $\beta$; se concluye por el mismo razonamiento que $F(y) = b_1 y \Psi(y)$, siendo $b_1$ una serie convergente en la proximidad de $y = \beta$; luego F contiene á $(y - \beta)$ como factor, por lo menos con el mismo exponente que $\Psi$.

Si ahora sucede lo mismo para cada raíz de $\Psi$, resultará que F es divisible por $\Psi$. Luego la proposición queda demostrada para el caso de ser $\varphi \leqq x$. Por medio de una sustitución lineal, se concluye que *la proposición queda probada también para el caso en que* $\varphi$ *es un trinomio de primer grado en* x *é* y.

Pasemos al caso general. Supongamos variables los coeficientes de $\varphi$, y hagámosles variar de modo que el sistema de soluciones $(\alpha, \beta)$, múltiplo de $rq$, se cambie en $rq$ sistemas diferentes $(\alpha_1, \beta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2)$, . . . Sean $P_1, P_2, \ldots$ trinomios de primer grado sujetos simplemente á las condiciones de anularse, $P_1$ para $x = \alpha_1$, $y = \beta_1$, $P_2$ para $x = \alpha_2$, $y = \beta_2$, . . .

Al mismo tiempo, un segundo sistema de soluciones $(\alpha', \beta')$ múltiplo de orden $r' q'$, se cambia en $r' q'$ sistemas diferentes. Sean igualmente $P'_1, P'_2, \ldots$ trinomios sujetos á condiciones análogas, y así sucesivamente.

Sean II el producto de todos estos trinomios y $\varphi'$ el polinomio $\varphi$ cuyos coeficientes se hacen variar. Siendo simples todas las soluciones comunes á $\varphi' = 0$ y $\psi = 0$, tenemos

$$\Pi = A' \varphi' + B' \psi',$$

siendo A' y B' polinomios enteros. Esta relación subsiste en el límite, cuando $\varphi' = \varphi$. Entonces $P_1, P_2, \ldots$ se anulan para $x = \alpha$, $y = \beta$, y lo mismo para las demás. Luego:

*Si* $P_1, P_2, \ldots$ *son trinomios de primer grado en* x, y, *sujetos simplemente á anularse para* $x = \alpha$, $y = \beta$; *si* $P'_1, P'_2, \ldots$ *son también trinomios sujetos á anularse para* $x = \alpha'$, $y = \beta'$, *y lo mismo para cada solución común á* $\varphi = 0$, $\psi = 0$, *se puede elegir el número de estos trinomios de modo que se tenga, expresando* II *su producto y siendo* f *un polinomio cualquiera,*

$$Hf = C\varphi + D\psi,$$

*siendo también* C *y* D *polinomios cualesquiera.*

Supongamos ahora que se halle satisfecha la condición (2)

en la proximidad de $(\alpha, \beta)$. Resulta entonces de la ecuación últimamente escrita y en los mismos límites

$$(a\Pi - C)\varphi + (b\Pi - D)\psi = 0;$$

luego

$$C = a\Pi + c\psi,$$

expresando $c$ un desarrollo análogo á $a$.

Consideremos separadamente en $\Pi$ el factor $P_1$. Las soluciones comunes á $P_1 = 0$ y $\psi = 0$, distintas de $(\alpha, \beta)$, son simples y no anulan á $\varphi$; por consiguiente anulan á C, según una de las ecuaciones anteriores. En lo que concierne á la ecuación $C = a\Pi + c\psi$, puede considerarse como expresando que la condición (2) queda satisfecha con respecto á $P_1$ y $\psi$, haciendo C las veces de $\varphi, \psi, f$. Por otra parte, $P_1$ es un trinomio de primer grado; luego, según un resultado anterior,

$$C = C_1 P_1 + B\psi,$$

expresando $C_1$ y B polinomios enteros.

Sustituyendo el valor de C en $Hf \equiv C\varphi + C\psi$, tenemos

$$Hf = C_1 P_1 \varphi + (D + B\varphi)\psi.$$

Conteniendo $\Pi$ á $P_1$ como factor, el coeficiente de $\psi$ en esta última identidad contiene también este factor. Suprimiéndolo y llamando $\Pi_1$ al producto de los demás trinomios, tendremos

$$\Pi_1 f = C_1 \varphi + D_1 \psi.$$

Repitamos con respecto á esta ecuación y á $P_2$ el mismo razonamiento, y así sucesivamente. Conseguiremos al fin que desaparezan del coeficiente de $f$ en $\Pi f = C\varphi + D\psi$ todos los trinomios relativos á la solución $(\alpha, \beta)$. Si ahora quedan satisfechas las condiciones análogas á (2) por $f$, para todas las soluciones comunes á $\varphi = 0$ y $\psi = 0$, se harán desaparecer también todos los trinomios $P', P'', \ldots$; luego $f$ es de la forma $A\varphi + B\psi$, según se tenía que demostrar.

Citaremos el siguiente importante

TEOREMA.—*Una curva* $f = 0$ *que tiene en* P *un punto múltiplo de orden* $r + q - 1$ *y que pasa por los puntos de intersección de dos curvas* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *tales, que* $\varphi$ *tenga en* P *un punto múltiplo de orden* q *y* $\psi$ *un punto múltiplo de orden* r, *puede representarse bajo la forma*

$$f \equiv A\varphi + B\psi = 0,$$

*teniendo* $A = 0$ *en* P *un punto múltiplo de orden* $r - 1$ *y* $B = 0$ *un punto múltiplo de orden* $q - 1$.

### § 5.º La dualidad de las singularidades

**97.** Conforme con el principio de dualidad, hay que tener en cuenta, no sólo los puntos, sino también las tangentes singulares. En efecto, según dicho principio, debemos figurarnos engendrada cualquiera curva de dos maneras distintas: como descrita por un punto ó como envuelta por una tangente móvil. El punto generador determina, en cada intervalo, una dirección; y esta dirección, que corresponde á un avance infinitamente pequeño, es la tangente á la curva en una de las posiciones del punto generador. De igual modo, la recta envolvente determina un punto para cada cambio infinitamente pequeño de posición, porque este cambio puede siempre considerarse como una rotación alrededor de un punto determinado, que será el de contacto de la recta de que se trata.

Obtendremos pues, la curva de que se trata, considerando constantemente la rotación de la recta como una función del avance de uno de sus puntos. Pueden presentarse algunas particularidades en esta dependencia respectiva de los dos movimientos, lo que da origen á los puntos y á las tangentes *singulares*. Estas circunstancias tienen lugar, ó cuando el elemento generador ó envolvente llega dos veces á una misma posición, ó cuando uno de los elementos cambia de sentido en el movimiento, mientras que el otro sigue su marcha continua. Ya se ha tratado de esto en los casos del *punto doble* y del *punto de inflexión* (80). Al punto doble corresponde dualísticamente la *tangente doble*, es decir, una tangente que tiene dos contactos diferentes (fig. 114) y correlativamente á las diferentes especies de *puntos múltiples* corresponde el mismo número de especies de *tangentes múltiples*. Pero debe notarse que una tangente doble no puede considerarse como una singularidad, mientras consideremos una curva como un lugar geométrico de puntos; porque, según veremos, la curva



Fig. 114

representada por una ecuación general en coordenados puntos posee cierto número de tangentes dobles, y también un punto doble solo debe considerarse como singularidad, cuando nos representemos á la curva como envolvente de una recta.

Si pues, en un elemento doble se presenta una indeterminación con respecto á la dirección de avance, es decir, del elemento próximo, no interviene por esto discontinuidad en el movimiento del punto y de la tangente, porque nos aproximamos al elemento doble en una rama determinada, y consideramos á la curva según su descripción. Pero no ocurre lo mismo cuando se trata del punto de inflexión, por consistir la singularidad en una relación entre el punto y la tangente, entrando en consideración una sola rama de curva. Un hecho análogo ocurre respecto al punto de retroceso, en virtud de la ley de dualidad, porque se ve inmediatamente en una figura que el punto cambia su dirección de avance, mientras que la tangente continúa su rotación en el mismo sentido.

Por medio de la investigación *simultánea* de dos especies de singularidades, se llega á resolver la contradicción aparente que surge cuando se trata de volver á pasar de la ecuación en coordenadas-líneas de una curva dada en coordenadas-puntos á la ecuación en coordenadas-puntos de que se partió. Hallaremos, en efecto, que no existe curva de orden superior al segundo que no contenga ni punto ni tangente múltiple, y que al contrario: *Toda curva de orden superior sin punto múltiplo, tiene necesariamente un número determinado de tangentes dobles ó múltiples, de igual modo que toda curva sin tangente múltiple necesariamente tiene un número determinado de puntos dobles ó múltiplos.* Si añadimos á esta observación que el número $n(n-1)$ que expresa la clase de una curva, sufre ciertas excepciones á consecuencia de haber un punto múltiplo, es claro que, según el principio de dualidad, el orden de una curva que tiene tangentes dobles no debe expresarse inmediatamente en función de la clase $k$ por el número $k(k-1)$, y con esto queda salvada la contradicción aparente señalada. Lo mismo puede manifestarse respecto á las tangentes de inflexión y á los puntos de retroceso (*). Esta influencia de los puntos

(*) Clebsch. *Vorlesungen über Geometrie*, t. I, pág. 341 ó trad. francesa, t. II, pág. 52.

dobles y de retroceso en la clase, resulta del modo de presentarse las polares de estos puntos, como vamos á ver.

Observaremos de paso, que las ecuaciones

$$k = n(n-1) \quad \text{y} \quad n = k(k-1)$$

son incompatibles, excepto cuando $x = n = 2$.

## § 6.° Fórmulas de Plücker

**98.** Se sabe que los puntos de contacto de las tangentes trazadas por un punto P á una curva de orden $n$ se hallan en la intersección de esta curva y de la primera polar de P, que es del grado $n-1$, siendo por consiguiente en número de $n(n-1)$. Resultaría pues la igualdad de la clase $k$ de la curva:

$$k = n(n-1),$$

si todos los puntos comunes á la curva y á la polar de P fuesen efectivamente puntos de contacto de las tangentes trazadas por P. Pero como los puntos dobles también están en la primera polar, haciendo pasar esta polar por la proximidad del punto doble, antes de hacerle pasar exactamente por dicho punto, se ve que un punto doble absorbe dos intersecciones de la curva y de la polar.

Para tener las tangentes efectivas trazadas por P, basta disminuir $\frac{n(n-1)}{2}$ en $2d$, expresando $d$ el número de puntos dobles. Este razonamiento supone que la polar pasa por el punto doble, sin tener ninguna tangente común con la curva. Hay pues que hallar la tangente de la polar en el punto doble. Tomemos este punto por origen y las dos tangentes en el mismo por ejes de coordenadas. La ecuación de la curva será

$$0 = xy + \varphi_3(x, y) + \ldots\ldots,$$

y la de la polar del punto P $(\alpha, \beta)$

$$0 = \alpha y + \beta x + \text{términos de 2.° grado al menos.}$$

La tangente en el origen

$$\alpha y + \beta x = 0$$

forma con los ejes y la recta OP un haz armónico, es pues dis-

tinta de las tangentes en el punto doble. Esta conclusión no es cierta, si las tangentes en el punto doble coinciden (punto de retroceso); entonces la tangente á la polar se confunde con la tangente en el punto de retroceso. Sea en este caso $ox$ la tangente de retroceso; y la ecuación de la curva será

$$0 = y^2 + \varphi_3(x, y) + \cdots\cdots,$$

y la primera polar

$$0 = 2\beta y + \text{términos de grado superior.}$$

De estas dos ecuaciones se deduce, multiplicando la segunda por $y$, la primera por $-2\beta$ y sumándolas, la de una curva que tiene un punto triple en el origen, y que tiene los mismos puntos comunes con la polar que ésta con la curva propuesta; y desarrollando los cálculos, se ve que, en el caso general, esta curva no es tangente á $Ox$. Luego las tres ramas en $o$ cortan á la polar en tres puntos simples, y el punto de retroceso absorbe tres de los puntos de intersección de la curva con la primera polar. Queda pues para la clase $k$ de la curva de orden $n$ la fórmula

$$k = n(n-1) - 2d - 3r, \qquad (1)$$

designando $d$ y $r$ los números de los puntos dobles y de retroceso.

«Tratándose de puntos reales (*) se puede explicar la necesidad de esta reducción como sigue: Consideremos una curva sin punto doble, pero tal que dos de sus ramas se hallen tan próximas, que por medio de una pequeña deformación se obtenga una curva con punto doble. Se ve entonces cómo las dos tangentes $u$ y $v$ trazadas desde un punto $y$ á dichas ramas (fig. 115) se confunden con la recta que une $y$ al punto doble, cuando se ha efectuado la deformación, de modo que esta línea de unión se cuenta efectivamente dos veces como tangente propiamente dicha.» Y se ve también, en virtud de consideraciones precedentes respecto á la formación del punto de retroceso, mediante uno doble y un lazo, que dicha recta debe contarse tres veces en el punto de retroceso.

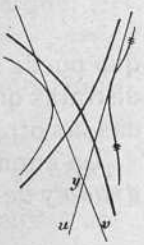


Fig. 115

(*) Clebsch. *Leçons de Géométrie*, t. I, pág 55.

Considerando la figura polar recíproca, se obtiene la fórmula correlativa

$$n = k(k - 1) - 2t - 3w \qquad (2)$$

designando $t$ las tangentes dobles y $w$ los puntos de inflexión.

Los puntos de inflexión se hallan en la intersección de la curva con la Hessiana; y como el grado de ésta es $3(n - 2)$, se tendrá

$$w = 3n(n - 2),$$

si no hay puntos singulares.

Pero como se ha visto que los puntos dobles y de retroceso de la curva propuesta se hallan también en la Hessiana, y se han dado las tangentes de esta curva en dichos puntos, resulta que: 1.º un punto doble absorbe seis puntos comunes á la curva y á la Hessiana; 2.º que un punto de retroceso absorbe ocho puntos comunes á las mismas, como ya hemos visto (p. 237); luego

$$w = 3n(n - 2) - 6d - 8r. \qquad (3)$$

Considerando la polar recíproca, tenemos la fórmula correlativa

$$r = 3k(k - 2) - 6t - 8w. \qquad (4)$$

Las fórmulas (1), (2), (3) y (4) son las llamadas *fórmulas de Plücker*, que no son independientes entre sí, pues restando las (1) y (3) ó las (2) y (4) se obtiene

$$3(k - n) = w - r, \qquad (5)$$

que puede sustituir á las (2) y (4). Quedan pues, tres ecuaciones distintas que permiten calcular tres de las cantidades, conocidas las otras tres. (*)

La enumeración de las diversas especies de curvas de *tercer grado* y de *tercera clase* están dadas por los siguientes cuadros:

| $n = 3$ | | | |
|---|---|---|---|
| $d$ | $r$ | $k$ | $w$ |
| 0 | 0 | 6 | 9 |
| 1 | 0 | 4 | 0 |
| 0 | 1 | 3 | 1 |

| $k = 3$ | | | |
|---|---|---|---|
| $t$ | $w$ | $n$ | $r$ |
| 0 | 0 | 6 | 9 |
| 1 | 0 | 4 | 3 |
| 0 | 1 | 3 | 1 |

(*) Rouché et Levy. *Analyse infinitésimal*, t. I, pág. 379.

No hay tangentes dobles, porque una de estas rectas tendría cuatro puntos comunes con la cúbica.

Las curvas de *cuarto grado* tienen además tangentes dobles, y dan lugar al siguiente cuadro, $p$ es el género (pág. 253):

| $d$ | $r$ | $k$ | $w$ | $t$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 12 | 24 | 28 | 3 |
| 1 | 0 | 10 | 18 | 16 | 2 |
| 0 | 1 | 9 | 16 | 10 | 2 |
| 2 | 0 | 8 | 12 | 8 | 1 |
| 1 | 1 | 7 | 10 | 4 | 1 |
| 0 | 2 | 6 | 8 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 6 | 6 | 4 | 0 |
| 2 | 1 | 5 | 4 | 2 | 0 |
| 1 | 2 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 3 | 3 | 0 | 1 | 0 |

Las fórmulas de Plücker sugieren otra observación. Los números de los primeros miembros son siempre positivos ó nulos, de manera que el número de los puntos dobles no puede exceder de $\frac{n(n-1)}{2}$, según la fórmula (1) ni aun de $\frac{n(n-2)}{2}$, según la fórmula (3).

Pero estos límites son demasiado elevados, puesto que: *El máximo de puntos dobles de una curva de orden* n *no puede exceder á* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. (Puede alcanzar este máximo, como se ve tomando, por ejemplo, una cúbica con punto doble).

En efecto, se sabe que para determinar una curva de orden $n$ es necesario dar $\frac{n(n+3)}{2}$ puntos. Esto sentado, vamos á demostrar que si hay más de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ puntos dobles, por ejemplo

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = d,$$

la curva comprende una curva de orden menor, y por consi-

guiente se descompone. Con este objeto, determinemos una curva de orden $n-1$ sujetándola á pasar por $d$ puntos dobles y por otros $2n-3$ puntos, tomados en la curva propuesta, es decir, por

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1+2n-3=\frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

puntos. Las dos curvas se cortarán en $2n-3+2d$ puntos, porque los puntos dobles deben contarse por dos en la intersección, lo que hace $n(n-1)+1$ puntos comunes, es decir, uno de más que admite el teorema de Bezout para dos curvas de órdenes $n$ y $n-1$, que no tienen una infinidad de puntos comunes. La curva de orden $n$ por consiguiente, ó debe de componerse ó no tener más de $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ puntos dobles.

Si se da, por ejemplo, una curva de orden $n$, sin punto doble ni de retrocesó, se tiene, como se ha visto

$$k=n(n-1),\quad w=3n(n-2),\quad t=\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9).$$

Pero según el principio de dualidad, el orden y la clase se corresponden recíprocamente, sucediendo lo mismo al punto doble y á la tangente doble, de manera que, como se ve, hay que sustituir en las fórmulas $n$ por $k$ y $d$ por $t$.

Además, á una tangente de inflexión, recta que encuentra á la curva en tres puntos, corresponde un punto en el que se cortan tres tangentes sucesivas, es decir, un punto de retroceso, correspondiéndose $w$ y $r$ dualísticamente en las fórmulas anteriores. Para demostrarlo, comparemos la manera de ser de las tangentes en la proximidad de una tangente de inflexión con la de los puntos en la proximidad de un punto de retroceso. Transportándolo al origen, la ecuación de la curva es de la forma

$$f=x^2z^{n-2}+y^3z^{n-3}+\ldots\ldots=0.$$

Las coordenadas de la tangente de un punto $(x, y, z)$ infinitamente próximo del origen serán, despreciando infinitamente pequeños de orden superior,

$$\varsigma u=\frac{\partial f}{\partial x}=2xz^{n-2},\qquad \varsigma v=\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2z^{n-3},$$

$$\varsigma w=\frac{\partial f}{\partial z}=(n-2)x^2z^{n-3}+(n-3)y^3z^{n-4}$$

Con auxilio de la ecuación $x^2z + y^2 = 0$, se obtiene

$$4v^3 - 27u^2w = 0,$$

ecuación á la que satisfacen las tangentes en la proximidad del punto de retroceso. Existe una curva de tercera clase, que presenta la sucesión de las tangentes consecutivas en la proximidad de dicho punto.

Haciendo pues, abstracción del factor numérico $\frac{4}{27}$, la curva en la proximidad del punto de retroceso, *si se considera como figura engendrada por un punto, es del tipo* $x^2 z + y^3 = 0$, *y si se le considera como engendrada por una recta, es del tipo* $u^2w + v^3 = 0$, siendo $x = 0$, $y = 0$ las coordenadas del punto de retroceso y $v = 0$, $w = 0$ las de su tangente. Pero la última ecuación es la correspondiente dualística de la forma

$$xz^2 + y^3 = 0,$$

característica del punto de inflexión, porque sólo hay que sustituir $w$ por $x$, $u$ por $z$, pues en $u^2w + v^3 = 0$, las coordenadas de la tangente de retroceso están dadas por $v = 0$, $w = 0$, y en $xz^2 + y^3 = 0$, las del punto de inflexión lo son por $x = 0$, $y = 0$. La ecuación de la curva cerca del punto de inflexión es

$$xz^2 + y^3 = 0,$$

y por consiguiente, las coordenadas de la tangente de inflexión

$$\rho u = z^2, \quad \rho v = 3y^2, \quad \rho w = 2xz,$$

que satisfacen á la condición

$$4v^3 - 27uw^2 = 0;$$

y si sustituímos de nuevo $u$ por $z$, $w$ por $x$, tendremos el tipo del punto de retroceso. *La ecuación de la curva en la proximidad del punto de inflexión es por consiguiente del tipo*

$$xz^2 + y^3 = 0,$$

*si se considera la curva engendrada por un punto; y si se considera engendrada por una recta, es del tipo*

$$uw^2 + v^3 = 0.$$

Luego, *con relación á las cantidades infinitamente peque-*

*ñas, el punto de retroceso se presenta como tangente de inflexión* $x = 0$ *y el punto de inflexión como tangente de retroceso.*

Reuniremos estos resultados en el siguiente cuadro:

| *Coordenadas-puntos* | *Coordenadas-líneas* |
|---|---|
| Punto doble con dos tangentes reales. | Tangente doble cuyos puntos de contacto son reales. |
| Punto de retroceso. | Tangente de inflexión. |
| Punto doble con dos tangentes imaginarias (punto aislado). | Tangente doble cuyos puntos de contacto son imaginarios (tangente aislada). |
| Punto de inflexión. | Tangente de retroceso. |

Para hacer visible la proposición contenida en la fórmula (2), al menos mientras se trate de cantidades reales, partiremos de una curva que necesite deformarse un poco para tener una tangente doble. Dos ramas de la curva recorren un segmento para originar la tangente doble (fig. 116). Los dos puntos de intersección de una recta cualquiera ($u$) con dichas ramas se hallan entonces transportados á la tangente doble, y deben, como intersecciones impropiamente dichas, restarse del número $k(k-1)$, pues un punto de intersección de $u$ con la curva está definido por la propiedad de poderse trazar dos tangentes coincidentes desde este punto á la curva, lo que se verifica para todo punto de una tangente doble. Si ahora se hacen coincidir gradualmente los dos puntos de contacto en la curva de tangente doble, se ve que un tercer punto de intersección de $u$ se halla en la tangente doble, debiendo ser esta tangente de inflexión. Puede hacerse que las ramas, designadas por $a$ en la figura, se confundan con la tangente doble, lo que origina la curva de puntos.

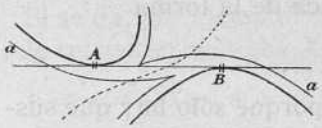


Fig. 116

## § 7.° Género de una curva

**99.** Definición.—Se llama *género* de una curva, al exceso del número máximo de sus puntos dobles que exige su orden

sobre el número de puntos dobles que tiene efectivamente. Designemos este exceso por $p$. Su introducción en las fórmulas de Plücker les da la forma más simétrica siguiente:

$$\left.\begin{aligned} 2p-2 &= k+r-2n = n+w-2k \\ &= n(n-3)-2(d+r) = k(k-3)-2(t+w) \end{aligned}\right\} \quad 5$$

DEFINICIÓN.—Se llaman *curvas unicursales* aquellas para las que las dos coordenadas pueden expresarse *racionalmente* en función de un mismo parámetro.

**100.** TEOREMA.—*Las curvas de género cero son unicursales ó se descomponen.*

En efecto, hagamos pasar una curva (C′) de orden $n-2$ por los puntos dobles de la curva dada (C) y por otros $n-3$ puntos fijos de la misma, lo que es siempre posible de una infinidad de maneras, porque no se han fijado más que

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n-3=\frac{(n-1)(n+1)}{2}-1$$

puntos de la curva de orden $n-2$, es decir, uno menos de los necesarios para determinarla. Y siendo lineales con relación á los coeficientes de la curva, las condiciones para que ésta pase por los puntos dados, el número de ecuaciones lineales será

$$\frac{(n-2)(n+1)}{2}-1 \quad \text{entre} \quad \frac{(n-2)(n+1)}{2} \text{ coeficientes,}$$

que permitirán expresar todos éstos en función lineal de uno solo, y finalmente la ecuación de (C′) se presentará bajo la forma

$$S+\lambda S'=0,$$

en la que $\lambda$ es un parámetro arbitrario y S, S′ funciones de grado $n-2$, á lo más.

Las curvas (C) y (C′) se cortan en

$$n-3+2d=n-3+(n-1)(n-2)=n(n-2)-1$$

puntos fijos. Por consiguiente, tienen además un punto común; y se puede aprovechar la indeterminación de $\lambda$ para que este punto sea uno cualquiera de (C). Busquemos las coordenadas de este punto.

Operaciones puramente algebráicas, permitirán eliminar

una de las coordenadas, $y$ por ejemplo, y se obtendrá una ecuación de grado $n\,(n-2)$ en $x$, de la cual se conocerán todas las raíces, excepto una, á saber: las abscisas $x_1, x_2, \ldots, x_d$ de los puntos dobles y las $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-3}$ de los puntos fijos dados; luego, dividiendo el primer miembro de la ecuación por

$$(x-x_1)^2\,(x-x_2)^2 \ldots (x-x_d)^2\,(x-x'_1) \ldots (x-x'_{n-3}),$$

quedará una ecuación de primer grado en $x$, que permitirá conocer la abscisa del punto M en función racional de $\lambda$.

En el caso de que el último punto dejado como indeterminado fuese de los fijos, la indeterminación de $\lambda$ permitiría hacer pasar todavía (C') por un punto de (C), y las dos curvas tendrían entonces $n\,(n-2)+1$ puntos comunes. Habría una curva plana común y (C) se descompondría.

RECÍPROCAMENTE.—*Toda curva unicursal tiene su máximo de puntos dobles ó es del género cero.*

Supongamos que las coordenadas se expresan racionalmente en función de un parámetro $t$ por las fórmulas

$$x = \frac{\theta_1(t)}{\theta(t)}, \qquad y = \frac{\theta_2(t)}{\theta(t)} \tag{1}$$

en las que una por lo menos de las funciones $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$ es del grado $n$, pudiéndose suponer también que las fracciones son irreducibles.

Desde luego la curva es del grado $n$, porque los puntos de intersección con una recta cualquiera

$$ux+vy+w=0$$

se hallan dadas por la ecuación de grado $n$

$$u\theta_1(t)+v\theta_2(t)+w\theta(t)=0.$$

La ecuación de la curva se obtendrá eliminando $t$ entre las dos ecuaciones (1), que expresaremos por

$$F(x,y)=0; \tag{2}$$

y se sabe que, en general, si esta ecuación resultante se verifica por un sistema de valores $x_0, y_0$, las ecuaciones (1) tienen tan sólo una raíz común; luego á todo punto de la curva (2) corresponde un solo valor de $t$, en general.

Sin embargo podría suceder lo contrario. Por ejemplo, si

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0,$$

las ecuaciones

$$x = \frac{at^2 + bt + c}{a''t^2 + b''t + c''}, \qquad y = \frac{a't^2 + b't + c'}{a''t^2 + b''t + c''}$$

no representan una cónica, sino una recta recorrida dos veces, y á todo punto de la recta corresponden dos valores de $t$, ligados por la ecuación

$$(ab' - ba'')t_1 t_2 + (ac'' - ca'')(t_1 + t_2) + bc'' - cb'' = 0.$$

Pero vamos á demostrar que, si *todos* los puntos de una curva pueden obtenerse por varios valores del parámetro $t$, se puede hallar siempre otro parámetro T tal, que á todo punto de la curva corresponda un solo valor de T (á excepción de los puntos múltiplos).

Si se obtiene un mismo punto por dos valores $t_1$ y $t_2$ del parámetro, se obtendrán las dos condiciones

$$\frac{\theta_1(t_1)}{\theta(t_1)} = \frac{\theta_1(t_2)}{\theta(t_2)}, \qquad \frac{\theta_2(t_1)}{\theta(t_1)} = \frac{\theta_2(t_2)}{\theta(t_2)}$$

ó

$$\left.\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \theta_1(t_1)\theta(t_2) - \theta(t_1)\theta_1(t_2) = 0 \\ R_1(t_1, t_2) &= \theta_2(t_1)\theta(t_2) - \theta_2(t_2)\theta(t_1) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Las dos funciones R y $R_1$ admiten evidentemente el divisor $t_1 - t_2$; pero puede existir un divisor de grado superior. Sea $D(t_1, t_2)$ el máximo común divisor, de modo que

$$\left.\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= D\,t_1, t_2)\, Q(t_1, t_2) \\ R_1(t_1, t_2) &= D(t_1, t_2)\, Q_1(t_1, t_2) \end{aligned}\right\}, \quad (4)$$

no pudiéndose anular Q y $Q_1$ más que para sistemas aislados de valores $t_1$ y $t_2$, lo que dará puntos dobles con ramas distintas, porque los valores de $t$ infinitamente próximos de $t_1$ y de $t_2$, no anulan ya ni á R ni á $R_1$.

Ordenemos el polinomio D con relación á $t_2$:

$$D = A t_2^m + A_1 t_2^{m-1} + \ldots + A_m.$$

Uno por lo menos de los coeficientes $A_h$ es de grado $m$ en $t_1$; porque, si se permutan las letras $t_1$ y $t_2$, los polinomios R y $R_1$ cambian de signo, sin cambiar en valor absoluto, y por consiguiente su máximo común divisor D permanece el mismo, salvo un factor constante. Sea $A_h$ uno de los coeficientes de grado $m$ en $t_1$, los demás serán de igual grado ó de un grado menor. A será ciertamente de grado menor, porque debiendo anularse D para $t_2 = t_1$, no puede contener al término $t_1^m t_2^m$. Pero si se sustituye en D, sea $t_2$ sea $t_1$, para una $t_i$ cualquiera de las $m$ raíces de la ecuación $D = 0$, ésta quedará verificada todavía, y las dos ecuaciones

$$D(t_1, t_2) = A(t_1) t_2^m + A_1(t_1) t_2^{m-1} + \ldots + A_m(t_1) = 0,$$

$$D(t_i, t_2) = A(t_i) t_2^m + A_1(t_i) t_2^{m-1} + \ldots + A_m(t_i) = 0,$$

en cuyos coeficientes hemos puesto de manifiesto la variable, tendrán las mismas raíces en $t_2$; luego sus coeficientes serán proporcionales, y se tendrá

$$\frac{A_h(t_1)}{A(t_1)} = \frac{A_h(t_i)}{A(t_i)}$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$. Si pues se hace $T = \dfrac{A_h(t)}{A(t)}$, (5)

el parámetro T tomará un valor único para los $m$ valores $t_1$, $t_2, \ldots, t_m$, es decir, para el punto considerado de la curva.

Para demostrar ahora el teorema, supondremos que á un punto cualquiera de la curva definida por las ecuaciones (1) corresponde un solo valor del parámetro $t$ (á excepción de los puntos múltiplos que vamos á buscar). Estos puntos se hallarán dados por las soluciones comunes á las ecuaciones (3). Dividamos R y $R_1$ por $t_1 - t_2$, para excluir la solución extraña $t_2 = t_1$; obtendremos las dos ecuaciones

$$S(t_1, t_2) = 0, \quad S_1(t_1, t_2) = 0 \qquad (6)$$

simétricas en $t_1$ y $t_2$ y de grado $n-1$, con relación á estas letras. Hagamos

$$t_1 + t_2 = u, \qquad t_1 t_2 = v. \tag{5}$$

Por estar formadas las ecuaciones (4) con términos de la forma

$$A_{\alpha\beta}(t_1^{\alpha} t_2^{\beta} + t_2^{\alpha} t_1^{\beta}) = A_{\alpha\beta}(t_1 t_2)^{\beta}(t_1^{\alpha-\beta} + t_2^{\alpha-\beta}), \quad (\alpha > \beta)$$

y expresarse las sumas $t_1^k + t_2^k$, en virtud de la fórmula

$$t_1^k + t_2^k = (t_1^{k-1} + t_2^{k-1})\, u - v\,(t_1^{k-2} + t_2^{k-2}),$$

por funciones de grado $k$ en $u$ y $v$, la sustitución (5) en las ecuaciones (4) conducirá á ecuaciones de grado $n-1$, que tendrán $(n-1)^2$ grupos de soluciones comunes. Pero no todos estos grupos convendrán, pues para obtener las ecuaciones (3) hemos debido multiplicar por $\theta(t_1)$ y $\theta(t_2)$; y si $t_1$ y $t_2$ anulan á $\theta(t)$, el grupo correspondiente debe desecharse. Pero existen tantos de estos grupos como hay combinaciones de las $n$ raíces de $\theta(t)$, dos á dos, $\dfrac{n(n-1)}{2}$; luego quedarán

$$(n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

grupos de soluciones útiles, á cada uno de los que corresponde un punto doble. La curva tiene pues el máximo de puntos dobles; es del género cero.

TEOREMA.—*Las cónicas son unicursales,* pues son del género cero; sus expresiones son

$$P^2 + Q^2 = H^2, \quad P^2 - Q^2 = H^2, \quad P^2 = mQ.$$

Haciendo, respectivamente en cada uno de los casos

$$P = H\frac{2t}{t^2+1}, Q = H\frac{t^2-1}{t^2+1}; \quad \frac{P+Q}{H} = \frac{H}{P-Q} = t; \; P = t, \; Q = \frac{t^2}{m}$$

las coordenadas de un punto móvil de la cónica en función de $t$ se obtendrán resolviendo las ecuaciones respecto á $x$ é $y$.

# CAPÍTULO II

## Transformaciones planas

### § 1.º Transformaciones cuadráticas

**101.** Definición.—La primera transformación de un plano en otro ha sido la *transformación proyectiva* ó *afinidad lineal*, en las que dos figuras se corresponden biunívocamente punto con punto. Ahora vamos á tratar de la *transformación cuadrática*, que consiste en una relación no lineal por la que se corresponden dos figuras de dos planos, que también pueden reducirse á uno solo, elemento por elemento, mediante las ecuaciones

$$\rho x_1 = y_0 y_3, \qquad \rho x_2 = y_3 y_1, \qquad \rho x_3 = y_1 y_2, \tag{1}$$

en las que $x_1, x_2, x_3$ é $y_1, y_2, y_3$ expresan las coordenadas homogéneas de los dos puntos correspondientes de cada uno de los dos planos ó de las dos figuras planas, siendo las fórmulas inversas, las siguientes:

$$\sigma y_1 = x_2 x_3, \qquad \sigma y_2 = x_3 x_1, \qquad \sigma y_3 = x_1 x_2. \tag{2}$$

A una recta $u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ corresponde en virtud de (1), en el plano $P_y$, una cónica

$$u_1 y_2 y_3 + u_2 y_3 y_3 + u_3 y_2 y_1 = 0, \tag{3}$$

é inversamente, á una recta $v_y = 0$ corresponde en virtud de (2) y en el plano $P_x$, una cónica

$$v_1 x_2 x_3 + v_2 x_3 x_1 + v_3 x_1 x_2 = 0.$$

El carácter unívoco de esta correspondencia entre los dos planos resulta de las consideraciones siguientes: Al punto de intersección de dos rectas $u_x = 0$ y $u'_x = 0$ en $P_x$, corresponden en $P_y$ los puntos de intersección de la cónica (3) con la cónica

$$u'_1 y_2 y_3 + u'_2 y_3 y_1 + u'_3 y_1 y_2 = 0.$$

Pero de estos cuatro puntos, tres son siempre los mismos, á saber: los vértices del triángulo $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$; luego:

*A las rectas de uno de los planos corresponden en el otro cónicas que pasan por tres puntos fijos ó puntos fundamentales, y al punto de intersección de dos rectas, el cuarto punto de intersección móvil de las dos cónicas correspondientes.*

Podemos en general, definir esta transformación de la manera siguiente: Sentaremos como un hecho que el conjunto de las rectas en número doblemente infinito de un plano corresponde al conjunto de cónicas en número doblemente infinito de una red con tres puntos fundamentales. A las cónicas que pasan por un punto de uno de los planos corresponden entonces las rectas que pasan por un punto del otro plano. A cada punto de uno de los planos corresponde, por consiguiente, la intersección de dos rectas (y, por consiguiente, de una infinidad de rectas) del otro plano, y recíprocamente. Según esto, podemos concebir la representación algebráica de la transformación de una manera más general. Sean $Q_1, Q_2, Q_3$ y $Q'_1, Q'_2, Q'_3$ funciones cualesquiera lineales en $y_1, y_2, y_3$. Las dos ecuaciones lineales

$$Q_1 x_1 + Q_2 x_2 + Q_3 x_3 = 0, \quad Q'_1 x_1 + Q'_2 x_2 + Q'_3 x_3 = 0 \quad (4)$$

dan de nuevo la relación de que tratamos, porque resolviéndolas tenemos

$$\rho x_1 = Q_2 Q'_3 - Q_3 Q'_2, \quad \rho x_2 = Q_3 Q'_1 - Q_1 Q'_3, \quad \rho x_3 = Q_1 Q'_2 - Q_2 Q'_1,$$

y las ecuaciones $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ representan todavía tres cónicas con tres puntos fijos, á saber, los puntos fundamentales del plano $P_y$. La inversión de las fórmulas se obtendría ordenando las ecuaciones (4) según las $y_i$, y resolviendo.

Designaremos por $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ los puntos fundamentales del plano $P_y$, por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ los tres puntos fundamentales de $P_x$. *Para estos tres puntos, nuestra transformación no es ya de determinación única,* pues se encuentran puntos excepcionales, análogos en todas las transformaciones de orden superior. Al punto $\alpha_1$ $(x_2 = 0, x_3 = 0)$ corresponden, en efecto, según (1) y (2), *todos* los puntos de la recta $\beta_2 \beta_3$ $(y_2 = 0)$ en $P_y$, é inversamente á todo punto de esta recta corresponde un solo punto $\alpha_1$ en $P_x$. Pero, como la recta $\overline{\beta_2 \beta_3}$ contiene los puntos $\beta_2$ $\beta_3$ á los que correspon-

den respectivamente las rectas totales $\overline{\alpha_3\,\alpha_1}$ y $\overline{\alpha_1\,\alpha_2}$, el teorema, según el que, á toda recta de uno de los sistemas corresponde en el otro una cónica que pasa por los tres puntos fundamentales, no sufre ninguna excepción para la recta $\beta_2\,\beta_3$.

Con auxilio de estas observaciones, podemos indicar las modificaciones que sufre una curva por la transformación de que tratamos. Es claro que á una curva $C_n$ en $P_x$ corresponde en $P_y$ una curva $C'_{2n}$ cuya ecuación se deduce de la ecuación $C_n$, sustituyendo simplemente $y_2\,y_3$ á $x_1$, etc. Pero como las rectas $\alpha_2\,\alpha_3, \alpha_3\,\alpha_1, \alpha_1\,\alpha_2$ se hallan cortadas, cada una, por $C_n$ en $n$ puntos á los cuales corresponde siempre el mismo punto ($\beta_1$, $\beta_2$ ó $\beta_3$) en $P_y$, $C'_{2n}$ pasa $n$ veces por cada uno de los puntos $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; y estas $n$ ramas de $C'_{2n}$ tienen todas trayecto separado si los $n$ puntos de intersección de $C_n$ con las rectas fundamentales correspondientes del otro plano tienen una situación distinta, los unos con relación á los otros. Si, por el contrario, $C_n$ pasa por un punto fundamental $\alpha_1$, una parte fija, esto es, la recta $\overline{\beta_2\,\beta_3}$ que corresponde á $\alpha_1$, se separa de la curva $C'_{2n}$, y queda solamente una curva de orden $2n-1$ que no pasa más que $n-1$ veces por $\beta_2$ y $\beta_3$; luego:

*En general, á una curva de orden* $n^{simo}$, *perteneciente á uno de los planos y que pasa respectivamente* $k_1, k_2, k_3$ *veces por los puntos fundamentales* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *de éste, corresponde respectivamente en el otro plano una curva de orden* $2n-k_1-k_2-k_3$ *que pasa respectivamente* $n-(k_2+k_3)$, $n-(k_3+k_1)$, $n-(k_1+k_2)$ *veces por los puntos fundamentales* $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ *de este último plano*. Así, por ejemplo, á una curva $C_4$, que tiene un punto doble en cada uno de los puntos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, corresponde una cónica que no pasa por $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; y recíprocamente, á una de estas cónicas corresponde una curva $C_4$ que tiene tres puntos dobles en $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

**102.** TRANSFORMACIÓN RACIONAL Ó DE CREMONA.—Hagamos

$$\rho y_i = f_i(x_1, x_2, x_3) \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

siendo las $f_i$ funciones racionales enteras de orden $n$ con respecto á $x_1, x_2, x_3$ (sin factor común) cuyo determinante funcional

no sea idénticamente nulo; y supongamos que resolviendo con relación á las $x$ se tenga

$$\sigma x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3), \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{2}$$

siendo las $\varphi$ funciones también racionales y enteras de orden $\nu$ respecto de las $y$. Entonces diremos que las ecuaciones (1) determinan *una transformación birracional ó biunívoca plana*, en el sentido de que se podrá hacer corresponder los puntos de los dos planos $P_x$ y $P_y$ (que podrán considerarse también superpuestos) de modo que *á un punto del uno corresponda uno y solo uno del otro plano y recíprocamente.*

Esta transformación se llama *transformación birracional ó Cremoniana.* Una propiedad fundamental es que: *El grado de las $\varphi_i$ sea el mismo que el de las $f_i$.* Además: *Para que la transformación sea biunívoca es necesario que la red formada por las tres curvas*

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

*tenga* $n^2 - 1$ *puntos fijos (puntos fundamentales de la transformación).* Esta red en la que todas las curvas se encuentran dos á dos *en un solo punto móvil* se llama *red homaloídica.*

A las rectas $u_x = 0$ en $P_x$ corresponden, en $P_y$, las curvas de $\nu^{\text{ésimo}}$ orden $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, y á las rectas $v_y = 0$, en $P_y$, corresponden las curvas $\Sigma v_i f_i = 0$ de orden $n^{\text{simo}}$ en $P_x$. A los puntos de intersección de $u_x = 0$ y $\Sigma v_i f_i = 0$ corresponden los puntos de intersección de $v_y = 0$ y $\Sigma u_i \varphi_i = 0$.

Pero como el número de estas intersecciones debe ser necesariamente el mismo entre $P_x$ y $P_y$, en virtud del carácter supuesto de determinación única, será $n = \nu$.

*Las sustituciones biunívocas reversibles son del mismo orden que sus inversas.* Si buscamos el punto $x$ que corresponde á dos rectas $v$ y $w$ situadas en $P_y$, tendremos que eliminar $x$ entre las ecuaciones

$$v_y \equiv \Sigma v_i f_i = 0, \quad w \equiv \Sigma w_i f_i = 0, \quad u_x = 0. \tag{3}$$

El resultado final, que contiene las $u$ en el grado $n^2$, las $v$

y las $w$ en el grado $n$, cada una, da la ecuación del producto de los $n^2$ puntos de intersección de los curvas (3). Entre estos debe hallarse el punto buscado, cuya ecuación está expresada por $\Sigma u_i \varphi_i = 0$; y si se hace

$$y_1 = v_2 w_3 - w_2 v_3, \quad y_2 = v_3 w_1 - w_3 v_1, \quad y_3 = v_1 w - w_1 v_2,$$

la expresión $\Sigma u_i \varphi_i = 0$ es un factor del resultado de la eliminación. Pero $\Sigma \varphi_i u_i$ contiene también, en este caso, las $v$ y $w$ en el $n^{simo}$ orden; y queda demostrado el teorema: *Dos curvas cualesquiera* $\Sigma v_i f_i = 0$ *del sistema se cortan en un solo punto móvil y en* $n^2 - 1$ *puntos fijos que son los puntos fundamentales de la transformación.* Lo mismo sucede para el sistema de las curvas $\Sigma u_i \varphi_i = 0$, en el otro plano. *Luego toda relación biunívoca de dos planos es una relación Cremoniana.*

*Ejemplo.*—Vamos á ver que puede obtenerse la representación conforme, de una curva simple (C) de *género uno* en una cúbica sin punto doble. Hagamos pasar por los

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$$

puntos dobles y por otros $n - 3$ puntos fijos de C una curva (C') de orden $n - 2$. Su ecuación será de la forma

$$\alpha_1 \varphi_1 (x, y) + \alpha_2 \varphi_2 (x, y) + \alpha_3 \varphi_3 (x, y) = 0, \qquad (1)$$

y cortará á (C) en

$$2\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1\right] + n - 3 = n(n-2) - 3$$

puntos fijos y en otros *tres* puntos cuyas coordenadas dependerán de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Hagamos

$$X = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \quad Y = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}; \qquad (2)$$

y entre estas dos ecuaciones y

$$f(x, y) = 0 \qquad (3)$$

eliminemos $x$, $y$. Obtendremos

$$F(X, Y) = 0 \qquad (4)$$

A un punto $m$ de (C) corresponde un solo punto M de esta nueva curva (Γ). Recíprocamente si X, Y satisfacen á la ecuación (4), las tres ecuaciones (2) y (3) adquieren una nueva solución común en $x, y$ lo que hace en totalidad

$$n(n-2)-2,$$

y no pueden tener más, sin lo que la curva

$$\varphi_1 - X\varphi_3 + \lambda(\varphi_2 - Y\varphi_3) = 0$$

sólo tendría con (C) un punto de intersección cuyas coordenadas dependiesen de λ. Las coordenadas de este punto se expresarían racionalmente en función del parámetro λ; la curva $C_n$ sería del género cero, lo que es contra la hipótesis. Así á todo punto de la curva Γ corresponde sólo un punto de la curva (C), siendo Γ una cúbica.

## § 2.° Transformaciones isogonales

**103.** Función armónica.—Se vió en el cálculo diferencial que si $w = X + iY$ es una función monógena, satisface á las condiciones

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \text{ó á} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Toda función de las dos variables reales $x$ é $y$ que satisface á la última ecuación diferencial llamada *ecuación de Laplace*, se llama *función potencial ó armónica*. Y sabemos que:

*Si* w *es una función uniforme de* z, *tanto su parte real* X *como el coeficiente de* i *satisfacen á la ecuación de Laplace y recíprocamente si* X *é* Y *son funciones continuas de* x *é* y *que satisfacen á esta ecuación, podrán formar la parte real y el coeficiente de* i *de una función uniforme.*

Representando $z$ los puntos de un plano (plano $z$) y $w$ los puntos correspondientes de la función $w$ en otro plano (plano $w$) (dichos planos pueden ser el mismo). Tenemos una *representa-*

*ción isogonal*, puesto que *el ángulo de dos líneas que se encuentran en un punto del plano* z *es igual al ángulo de las líneas correspondientes en el punto correspondiente del plano* w. Una representación que conserva los ángulos se llama *representación conforme.*

Un triángulo infinitamente pequeño del plano $z$ es semejante al triángulo infinitesimal correspondiente del plano $w$.

**104.** TRANSFORMACIÓN POR RADIOS VECTORES RECÍPROCOS.—Ya se ha tratado de esta transformación que se llama también inversión. Observaremos desde luego que conserva los ángulos y es por tanto una representación conforme que puede considerarse como un caso particular de la transformación cuadrática, en la que uno de los puntos fundamentales es el origen y los otros dos los puntos circulares del plano.

Hemos visto que una función que tiene una derivada da el medio de transformar isogonalmente las figuras planas. Sea $u = \frac{1}{z}$. Si hacemos

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \quad \text{se tiene} \quad u = \frac{1}{r}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta).$$

Cuando el punto $z'$ describe la prolongación $zl$ (fig. 117) del radio vector, el punto $u'$ describe la recta $uO$ aproximándose al origen. A la curva $zz_1$ corresponde la curva $uu_1$, y el ángulo $b_1uO$ es igual al $a_1zl$. Hagamos girar la segunda figura alrededor del eje $Ox$. El punto $u$ se aplica en $m$ sobre el radio vector $Oz$, y la curva $uu_1$ toma la posición $mn$. Las tangentes $za_1$, $mc$ á las curvas $zz_1$, $mn$ forman ángulos iguales con el radio vector.

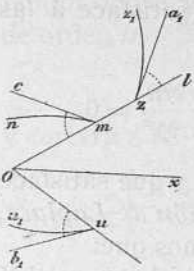


Fig. 117

Toda función que admite una derivada, trasforma un sistema de líneas ortogonales en otro. Consideremos, por ejemplo, la función $u = z^2$. Si se hace

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \quad u = r'(\cos\theta' + i \operatorname{sen}\theta'),$$

se tiene que $r' = r'^2$, $\theta' = 2\theta$.

A las rectas $r \operatorname{sen}\theta = b$, $r\cos\theta = a$, respectivamente paralelos á los ejes $Ox$ y $Oy$, corresponden las parábolas homofocales

$$r' = \frac{2b^2}{1 - \cos \theta'}, \qquad r' = \frac{2a^2}{1 + \cos \theta'}.$$

**105.** TRANSFORMACIÓN DE HIRST.—Sean O un punto fijo y S una cónica. Tracemos por O la secante $Omm'$ que encuentra á S en $m$ y $m'$. Si $a$ y $a'$ son dos puntos conjugados armónicos de $m$ y $m'$, las figuras $a$ y $a'$ quedarán transformadas entre sí por el método de Hirst. Cuando la cónica es un círculo y el punto es su centro, la transformación se confunde con la transformación por radios vectores recíprocos.

## § 3.º APLICACIONES

**106.** Supongamos una curva (C) no susceptible de descomposición ó propiamente tal, de *género cero*. Por sus puntos dobles y por otros $n - 4$ puntos fijos hagamos pasar otra curva (C') de orden $n - 2$; como sólo hemos fijado $\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 2$ puntos, quedarán arbitrarios dos parámetros, y la ecuación de la curva (C') será de la forma

$$\alpha_1 \varphi_1(x, y) + \alpha_2 \varphi_2(x, y) + \alpha_3 \varphi_3(x, y) = 0 \qquad (1)$$

siendo $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ funciones determinadas. La curva (1) tiene $n(n-2) - 2$ puntos fijos comunes con (C); y por cortarse éstas en $n(n-2)$ puntos, quedan solamente dos, cuyas coordenadas dependen de $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$.

Hagamos $$X = \frac{\varphi_1}{\varphi_3}, \qquad Y = \frac{\varphi_2}{\varphi_3}. \qquad (2)$$

Si $x, y$ es un punto dado, X, Y queda determinado de una manera unívoca por estas fórmulas. Eliminemos $x, y$ entre las ecuaciones (2) y la de (C), es decir, expresemos que las ecuaciones

$$\varphi_1 - X\varphi_3 = 0, \qquad \varphi_2 - Y\varphi_3 = 0, \qquad f(x, y) = 0 \qquad (3)$$

tienen por lo menos una solución común de más que las ya existentes. El resultado de la eliminación será

$$F(X, Y) = 0. \qquad (4)$$

A cada punto M de (4) corresponderá, por lo menos, un nuevo punto $m(x, y)$ de C común á las tres curvas (3); pero las dos primeras de éstas pertenecen al tipo (1), y por consiguiente tenían ya $n(n-2)-2$ puntos comunes con (C); luego si el punto X, Y está en la curva (4) tienen $n(n-2)-1$ puntos comunes con (C), y no pueden tener más, sin lo que la curva

$$\varphi_1 - X\varphi + \lambda(\varphi_2 - Y\varphi_3) = 0,$$

que tendría también $n(n-2)$ puntos comunes con (C) podría, por una reducción conveniente de X, tener $n(n-2)+1$ puntos en C y, por consiguiente formaría parte de (C) que se podría descomponer, contra lo supuesto. Luego, á un punto M de (4) corresponde un punto único M de (C).

Es importante observar que la ecuación (4) es la de una cónica. Basta, para probarlo, demostrar que á cada valor de X corresponden dos valores de Y, y recíprocamente. Ahora bien, si se da X, la primera ecuación (3) determina una curva de la red (1), es decir, una curva que corta á (C) en dos puntos solamente, cuyas coordenadas dependen de X. A cada uno de estos puntos corresponden por (2) un solo valor de Y; luego totalmente dos.

Por otra parte, una transformación homográfica seguida de una inversión, permite hacer corresponder á una cónica un círculo y después una recta. Queda pues establecido que, por una transformación birracional se puede hacer corresponder siempre, punto por punto, una curva cualquiera de género cero á una recta.

Se puede pues, obtener de una manera racional la representación con forma de una curva de género cero en una recta.

Hemos visto también como puede establecerse la representación conforme de una curva (C) propia de *género uno,* en una cúbica sin punto doble, haciendo pasar por los

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1$$

puntos dobles y por otros $n-3$ puntos fijos de C una curva C′ de orden $(n-2)$ (*).

(*) Rouché et Levy. *Analyse infinitesimal.*

**107.** CURVAS ANALAGMÁTICAS. DEFINICIÓN.—Curvas *analagmáticas* son las que coinciden con sus transformadas por radios vectores recíprocos:

TEOREMA DE MOUTARD.—*Toda analagmática es la envolvente de una serie de círculos ortogonales á un círculo fijo llamado* DIRECTOR, *cuyos centros se mueven en una curva llamada* DEFERENTE.

En efecto, si se considera el cuadrilátero cuyos vértices son dos puntos infinitamente próximos de la analagmática y sus correspondientes, este cuadrilátero será inscriptible y el círculo circunscrito será tangente á la analagmática en dos puntos $m$ y $m'$. Tracemos por el polo la secante $Om$ que pasará por $m'$, y tendremos $Om.\ Om' = k^2$, expresando $k$ el módulo de la transformación.

Si se traza por O la tangente al círculo, será igual á $k$; y el círculo de radio $k$, que es el *círculo director*, será ortogonal al primero, considerado como envolvente de la analagmática.

Recíprocamente: *Toda envolvente de círculo que permanece ortogonal á un círculo dado es una analagmática.*

Demos una *deferente*, es decir, una curva á lo largo de la que se mueve el centro del círculo ortogonal al círculo fijo de radio $k$. Tomemos el centro de este círculo director por polo de la transformación de módulo $k$. La tangente á la deferente en el punto en donde se encuentra el centro del círculo generador de la analagmática es perpendicular á la recta que une los dos puntos en que el círculo móvil es tangente á su envolvente, pues por ser el círculo

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

ortogonal al $x^2 + y^2 = k^2$ ($\alpha$, $\beta$ es un punto de la deferente), su ecuación será

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + k^2 = 0;$$

su envolvente se obtiene eliminando $\alpha$ entre esta ecuación y su derivada $x + \beta' y = 0$, que expresa que el coeficiente angular $\beta'$ de la tangente á la deferente es igual á $-\frac{x}{y}$. La tangente á la deferente es pues, perpendicular al radio vector de los dos puntos en que el círculo móvil toca á su envolvente.

Sea P el punto en que la tangente á la deferente encuentra al radio vector $Omm'$ de los puntos en que el círculo móvil es tangente á la envolvente. Se tendrá

$$OP = \frac{Om + Om'}{2}, \quad k_2 = Om.\ Om'.$$

Si se toma en OP un punto P' tal que $OP.\ OP' = k^2$, el punto P' describirá la polar recíproca de la deferente con relación al círculo director.

De este razonamiento resulta el modo de construir la analagmática. Sea

$$f(x', y') = 0$$

la ecuación de la polar recíproca de la deferente con relación al círculo director, curva que llamaremos *segunda deferente*; por tener los puntos $m$ y $m'$, ó más bien uno de ellos $(x, y)$ cuyo radio vector sea $r$; este valor $r$ será raíz de la ecuación

$$r^2 - 2OPr + k^2 = 0 \quad \text{ó} \quad r^2 - 2\frac{k^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} + k^2 = 0.$$

Pero se tiene evidentemente que

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{r}{\sqrt{x'^2 + y'^2}};$$

de lo que resulta

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{r^2 + k^2}{2k^2} = \frac{x^2 + y^2 + k^2}{2k^2};$$

luego $\left\{ x' = \frac{2k^2 x}{x^2 + y^2 + k^2}, \quad y' = \frac{2k^2 y}{x^2 + y^2 + k^2}; \right.$

la ecuación de la analagmática es

$$f\left(\frac{2k^2 x}{x^2 + y^2 + k^2}, \frac{2k^2 y}{x^2 + y^2 + k^2}\right) = 0,$$

ó si $f(x, y, z) = 0$ es la ecuación de la segunda deferente en coordenadas homogéneas,

$$f(2k^2 x, 2k^2 y, x^2 + y^2 + k^2) = 0.$$

La sustitución (2) transforma una curva en otra, que es la analagmática que tiene por deferente la polar recíproca de ésta.

**108.** ANALAGMÁTICAS DE TERCERO Y CUARTO ORDEN. — Sea $f(x, y, z) = 0$ la ecuación de la segunda deferente; hemos visto que la ecuación de la analagmática era

$$f(2k^2 x, 2k^2 y, x^2 + y^2 + k^2) = 0;$$

su grado es, en general, doble del de la segunda deferente. Si ésta es de segundo grado, la primera también lo será. Siendo la ecuación de la segunda deferente de la forma

$$1 + \frac{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}{4k^2} + \frac{2ax + 2by}{2k^2} = 0, \qquad (1)$$

la de la analagmática será

$$\left.\begin{aligned}&(x^2 + y^2 + k^2)^2 + 2(ax + by)(x^2 + y^2 + k^2)\\ &+ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Cuando la segunda deferente pasa por el origen, la ecuación de la analagmática es

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2(ax + by)(x^2 + y^2 + k^2) = 0. \qquad (3)$$

Las ecuaciones (2) y (3) son las ecuaciones más generales de las analagmáticas de tercero y cuarto grado, pues pueden escribirse bajo la forma

$$\left.\begin{aligned}&(x^2 + y^2)^2 + 2(ax + by(x^2 + y^2)\\ &+ P + 2k^2(ax + by) + k^4 = 0\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$2(x^2 + y^2)(ax + by) + P + 2k^2(ax + by) = 0, \qquad (5)$$

siendo P un polinomio homogéneo de segundo grado.

EJEMPLOS.—1.° *Los óvalos de Cassini.* – Cuando la primera y por tanto la segunda deferente son curvas con centro situado en el polo de la transformación, la ecuación de la analagmática es de la forma

$$(x^2 + y^2)^2 + Ax^2 + Cy^2 + k^4 = 0.$$

El caso de ser $A = -C = 2c^2$ es notable. La segunda deferente es una hipérbola equilátera y la analagmática se llama *cassinoide, elipse de Cassini ó lemniscata*, cuya ecuación es

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) + k^4 = 0.$$

Si se hace $k^2 = c^4 - h^4$ esta curva es tal, que el producto de las distancias de uno de sus puntos á dos puntos fijos distantes entre sí en $2c$, llamados focos, sea igual á una constante $h^2$.

La cassinoide deja de ser analagmática cuando $c = h$. Su ecuación es entonces

$$(x^2 + y^2)^2 + (y^2 - x^2)\,2c^2 = 0;$$

pero es unicursal, y es la transformada por radios vectores recíprocos de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = \frac{K^2}{2c^2}$, entonces la cassinoide se llama *lemniscata de Bernoulli.*

2.º Los *óvalos de Descartes.* Sean F y G dos puntos y una recta $r$ que corta en A á FG. Describamos desde F como centro un círculo con un radio cualquiera, y sea B una de sus intersecciones con FG. Determinemos en $r$ un punto, de modo que sea $\frac{AC}{AB} = \lambda$, siendo $\lambda$ constante. Tomemos en $r$ el segmento AR = AG y describamos alrededor de G una circunferencia con un radio CR que corta á la ya descrita en M. El lugar del punto M es un óvalo de Descartes.

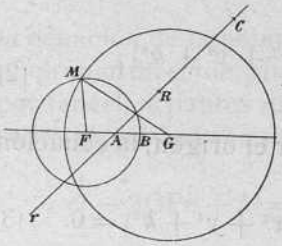


Fig. 118

Tenemos que

$$FM = FB = FA + AB = FA + \frac{1}{\lambda}\,AC,$$

$$GM = RC = AC - AR = AC - AG,$$

$$\lambda.\,FM - GM = \lambda.\,AF - AG;$$

haciendo por simetría $\lambda = -\frac{\mu}{\nu}$, será

$$\mu.\,MF + \nu.\,MG = \mu.\,AF - \nu.\,AG,$$

y haciendo $\mu.\,AF - \nu.\,AG = l$, se obtiene

$$\mu.\,MF + \nu.\,MG = l \qquad (1)$$

que traducida al lenguaje ordinario dice que: *Un óvalo de Des-*

*cartes es el lugar de los puntos cuyas distancias á dos puntos fijos multiplicadas por dos números dados dan una suma constante.*

Representando por $a'$, $b'$ y por $a''$, $b''$ las coordenadas de F y de G, tendremos

$$\mu\sqrt{(x-a')^2+(y-b')^2}+\nu\sqrt{(x-a'')^2+(y-b'')^2}=l. \quad (2)$$

Haciendo $a'=-a''=a$, $b'=b''=0$, $x+iy=\frac{\xi}{\zeta}$, $x-iy=\frac{\eta}{\zeta}$, resultará

$$\mu\sqrt{(\xi-\alpha\zeta)(\eta-\alpha\zeta)}+\nu\sqrt{(\xi+\alpha\zeta)(\eta+\alpha\zeta)}=\lambda\zeta,$$

ó despejando los radicales,

$$[\mu^2(\xi-\alpha\zeta)(\eta-\alpha\zeta)-\nu^2(\xi+\alpha\zeta)(\eta+\alpha\zeta)]^2$$
$$-2l^2\zeta^2[\mu^2(\xi-\alpha\zeta)(\eta-\alpha\zeta)+\nu^2(\xi+\alpha\zeta)(\eta+\alpha\zeta)]+l^4\zeta^4=0. \quad (3)$$

Esta ecuación manifiesta que los puntos $(\xi=0,\zeta=0)$, $(\eta=0,\zeta=0)$ es decir, los puntos circulares del plano son puntos dobles de la curva (3). Las tangentes en el punto $(\xi, \eta, \zeta)$ están dadas por

$$[\mu^2(\xi-\alpha\zeta)-\nu^2(\xi+\alpha\zeta)]^2=0.$$

Este punto es un punto de retroceso ó cuspidal. Siendo

$$\xi=\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2}a\,\zeta$$

la ecuación de la tangente. Las dos tangentes cuspidales de los puntos circulares se expresan en coordenadas cartesianas, por las ecuaciones

$$x+iy=\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2}a, \qquad x-iy=\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2}a.$$

Las dos tangentes cuspidales (ó de retroceso) obtenidas, se cortan en el punto real cuyas coordenadas son

$$x=\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2}a, \qquad y=0$$

que es uno de los focos de la curva. (*)

(*) Dr. Gino Loria. *Specielle Algebr. u. Trans. ebene Kurven.*

**109.** TEOREMA DE NÖTHER. — *Por medio de una serie de transformaciones cuadráticas birracionales se puede siempre transformar una curva algebráica cualquiera en otra que solo tenga puntos múltiplos con tangentes separadas.*

En efecto, sabemos que las fórmulas de transformación cuadrática son de la forma

$$x' = \frac{U}{W}, \quad y' = \frac{V}{W},$$

expresando U, V, W tres polinomios de segundo grado en $x$ é $y$, ó sea

$$\frac{x'}{U} = \frac{y'}{V} = \frac{z'}{W}, \tag{1}$$

siendo $x'\,y'\,z'$ coordenadas homogéneas y U, V, W funciones de las tres coordenadas homogéneas $x, y, z$.

En general, si se da el punto $(x', y', z')$ las ecuaciones (1) representan las tres cónicas

$$Wy' - Vz' = 0, \quad Uz' - Wx' = 0, \quad Vx' - Uy' = 0. \tag{2}$$

Sabemos ya, que si estas cónicas tienen tres puntos comunes A, B, C, las cónicas (2) pasarán por dichos tres puntos y sólo tendrán un punto de intersección variable, cuyas coordenadas serán funciones de $x', y', z'$; $x, y, z$ serán entonces funciones racionales de $x', y', z'$.

Consideremos el triángulo ABC por triángulo de referencia, las fórmulas (1) tomarán la forma

$$\frac{x'}{Ayz + Bxz + Cxy} = \frac{y'}{A'yz + B'xz + C'xy} = \frac{z'}{A''yz + B''xz + C''xy} \tag{3}$$

pero si se hace

$$\lambda A + \mu A' + \nu A'' = 1, \quad \lambda' A + \mu' A' + \nu' A'' = 0 \quad \lambda'' A + \mu'' A' + \nu'' A'' = 0$$

$$\lambda B + \mu B' + \nu B'' = 0, \quad \lambda' B + \mu' B' + \nu' B'' = 1 \quad \lambda'' B + \mu'' B' + \nu'' B'' = 0$$

$$\lambda C + \mu C' + \nu C'' = 0, \quad \lambda' C + \mu' C' + \nu' C'' = 0 \quad \lambda'' C + \mu'' C' + \nu'' C'' = 1$$

las cantidades $\lambda, \mu, \nu$ están bien determinadas si

$$\begin{vmatrix} A & A' & A'' \\ B & B' & B'' \\ C & C' & C'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

es decir, si U = 0, V = 0, W = 0 son distintas, y de (3) se deducirá

$$\frac{\lambda x' + \mu y' + \nu z'}{yz} = \frac{\lambda' x' + \mu' y' + \nu' z'}{zx} = \frac{\lambda'' x' + \mu'' y' + \nu'' z'}{xy}.$$

Una transformación homográfica de la figura $x', y', z'$ reducirá estas fórmulas á la forma

$$\frac{x'}{yz} = \frac{y'}{xz} = \frac{z'}{xy} \text{ y recíprocamente } \frac{x}{y'z'} = \frac{y}{z'x'} = \frac{z}{x'y'},$$

de manera que *al punto* $x, y, z$ *corresponde un solo punto* $x', y' z'$ y *viceversa*.

Sea la transformación

$$\frac{x}{y'z'} = \frac{y}{z'x'} = \frac{z}{x'y'}$$

que da $\frac{x'}{yz} = \frac{y'}{zx} = \frac{z'}{xy}$.

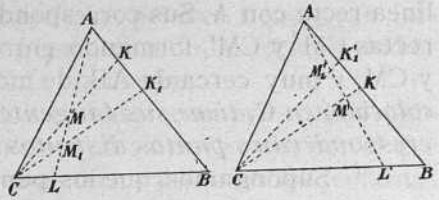



Fig. 119

Propongámonos el punto M $(x, y, z)$, y veamos cómo se construye el punto M' $(x', y', z')$.

Sean ABC el triángulo de referencia y X = 0, Y = 0, Z = 0 las ecuaciones de BC, CA, AB, respectivamente (fig. 119).

El punto M está en la intersección de las rectas CK y AL, representadas por las ecuaciones

$$\frac{Y}{y} = \frac{X}{x}, \quad \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z};$$

luego el punto M' está en la intersección de las rectas CK' y AL'

$$\frac{X}{y} = \frac{Y}{x}, \quad \frac{Z}{y} = \frac{Y}{z}.$$

Construyamos el punto M' en la otra figura. CK' y AL' serán rectas tales que $\angle CAL' = \angle BAL$, $\angle BCK' = \angle ACK$, luego:

1.° *A un punto* M, *no situado en el perímetro del triángulo de referencia, corresponde un punto* M' *no situado en el perímetro de referencia.*

2.° *Si el punto* M *experimenta una mutación* dx, dy, dz, *el punto* M' *sufrirá una mutación de igual orden* dx', dy', dy', *siempre que* M *no se halle en el perímetro del triángulo de referencia.*

3.° De esto resulta que, *si el punto* M *es un punto múltiplo de una curva, no situado en el perímetro del triángulo de re-*

*ferencia, el punto* M' *será un punto múltiplo de igual especie en la curva transformada.* Debiéndose entender por punto de igual especie, no sólo un punto de igual orden de multiplicidad, sino además un punto que tenga el mismo número de tangentes confundidas, teniendo las ramas de curva tangentes el mismo orden de contacto en la curva propuesta y en la transformada.

4.º Supongamos ahora que una curva tenga en C un punto múltiplo de orden $\nu$. Veamos cómo se hallará situado su correspondiente y cuál será su naturaleza. Con este objeto, tomemos dos puntos M y $M_1$ en dos ramas de la curva, próximos á C y en línea recta con A. Sus correspondientes M' y $M'_1$ estarán en dos rectas CM' y $CM'_1$, formando entre sí el mismo ángulo que CM y $CM_1$ y muy cerca de AB, de modo que, *si el punto múltiplo colocado en* C, *tiene sus tangentes separadas, á este punto corresponderán* $\nu$ *puntos distintos en* AB.

5.º Supongamos que los puntos M y $M_1$ estén en ramas de la curva que tengan un contacto de orden $n$, $MM_1$ será de orden $n+1$ y $M'M'_1$ será de orden $n$. A las ramas tangentes en C corresponderán pues dos ramas tangentes de la curva transformada que sólo tendrán un contacto de orden $n-1$. Así pues: *Si el punto múltiplo colocado en* C *tiene tangentes confundidas con contactos de órdenes* $n, n', n'', \ldots$, *á cada par de estas ramas corresponderán otras ramas que tienen un contacto de orden* $n-1, n'-1, n''-1, \ldots$

Para demostrar el teorema de Nöther, coloquemos el vértice C del triángulo de referencia en un punto que tenga tangentes confundidas de la curva por transformar, y elijamos el triángulo de referencia, de manera que ninguno de sus lados sea tangente á la curva. La transformación cuadrática podrá introducir nuevos puntos múltiplos; pero ninguno tendrá tangentes confundidas. En cuanto al punto C, se ha sustituído por otros puntos simples ó múltiplos con ramas que tienen un contacto de orden menos elevado en una unidad que en la curva primitiva.

Operando sucesivamente transformaciones análogas, se podrán introducir nuevos puntos múltiplos, pero con tangentes separadas; y se terminará por hacer desaparecer todo contacto entre las ramas que pasan por un punto singular.

# CAPÍTULO III

## Estudio sistemático de las figuras planas

### § 1.º La polaridad y la invariación

**110.** Polaridad.—La teoría de las polares tiene gran importancia en la interpretación geométrica de las formas simbólicas empleadas en el Álgebra de las formas.

La representación simbólica conduce á un principio debido á Clebsch y que se llama principio de translación, por el que se pueden utilizar para las formas ternarias todos los teoremas conocidos acerca de las formas binarias.

**111.** Invariación. Citaremos los siguientes importantes Teoremas.—1.º *Toda formación invariante de un sistema de formas ternarias puede representarse por una reunión de productos simbólicos, cuyos factores son invariantes idénticos de la forma* $u_x$, (x, y, z) *ó* (uvw) ó sea

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

2.º *Todas las propiedades invariantes de una forma ternaria pueden representarse por la anulación de invariantes, ó por la anulación idéntica de covariantes, de contravariantes ó de formas mixtas de la forma primitiva.*

**112.** Principio de translación (*).—Sea el punto $x$ referido á los puntos fundamentales $y$, $z$:

$$x_1 = \varkappa_1 y_1 + \varkappa_2 z_1, \quad x_2 = \varkappa_1 y_2 + \varkappa_2 z_2, \quad x_3 = \varkappa_1 y_3 + \varkappa_2 z_3.$$

Sustituyendo en $f(x_1, x_2, x_3) = a_x^n = b_x^n = 0$,

(*) El *principio de translación* fué enunciado por Clebsch en (*Crelle Journ* L. IX).

los puntos de intersección de la recta $\overline{yz}$ quedarán determinados por las $n$ raíces $\frac{x_1}{x_2}$ de la ecuación.

$$f = [x_1 (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3) + x_2 (a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)]^n$$
$$= (x_1 a_y + x_2 a_z)^n = 0.$$

Se sabe que puede escribirse bajo forma simbólica un número ilimitado de covariantes, cuya significación geométrica se deduce de la teoría de las polares. Citaremos covariantes caracterizados de una manera general por la condición de que la $r^{sima}$ polar de un punto tenga una propiedad invariante determinada, por ejemplo, que la primera polar de un punto $y$ relativamente á la curva fundamental

$$f = a_x^n = b_x^n = \ldots\ldots = 0$$

tenga un punto doble. El lugar de este punto es la Hessiana, cuyo orden es $3(n-2)$, que se obtiene eliminando las $y_i$ (coordenadas del polo) entre las tres ecuaciones $\left(f_{ik} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}\right)$

$$a_x^{n-2} a_y a_1 = \Sigma f_{1k} y_k = 0, \quad a_x^{n-2} a_y a_2 = \Sigma f_{2k} y_k = 0,$$
$$a_x^{n-2} a_y a_3 = \Sigma f_{3k} y_k = 0.$$

Expresando para abreviar, $a_y$, $a_z$ por $\alpha_1$, $\alpha_2$, obtendremos la forma binaria

$$\varphi = (x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2)_x^n = \alpha_x^n = \beta_x^n,$$

que está representada geométricamente en la recta $\overline{yz}$ por los $n$ puntos de intersección de ésta con la curva dada $f = 0$. Cada una de las propiedades proyectivas de este sistema de puntos tiene por condición la anulación de un intervariante de la forma binaria $\varphi$. Y dicho invariante se compone, según las proposiciones relativas á las formas binarias, de una reunión de productos cuyos factores están dados por determinantes simbólicos de la forma $(\alpha\beta) = \alpha_1 \beta_2 - \beta_2 \alpha_1$.

Si pues representamos este invariante por $I = \Sigma c \Pi (\alpha\beta)$,

expresando las $c$ factores numéricos que pueden encontrarse en aquél, y sustituímos de nuevo $\alpha, \beta$ por sus expresiones en $y, z$, resultará dada una propiedad invariante del sistema de los puntos de intersección, por una ecuación de la forma

$$I = \Sigma c \Pi (a_y b_z - b_y a_z) = 0.$$

Podemos, en fin, introducir las coordenadas líneas $u$; porque se tiene

$$a_y b_z - b_y a_z = (a_1 y_1 + \ldots)(b_1 z_1 + \ldots) - (b_1 y_1 + \ldots)(a_1 z_1 + \ldots)$$
$$= (a_1 b_2 - b_1 a_2)(y_1 z_2 - z_1 y_2) + (a_2 b_3 - b_2 a_3)(y_2 z_3 - z_2 y_3)$$
$$+ (a_3 b_1 - b_3 a_1)(y_3 z_1 - z_3 y_1);$$

y por ser los determinantes menores de las $y, z$ proporcionales á las coordenadas de su recta de unión $u$, despreciando el factor de proporcionalidad, tendremos

$$a_y b_z - b_y a_z = (abu).$$

La condición para que el sistema de puntos de intersección de una recta $u$ con la curva $f = 0$ tenga la propiedad invariante

$$\Sigma c \Pi (\alpha\beta) = 0$$

está dada por la ecuación

$$\Sigma c \Pi (abu) = 0.$$

Podemos pues, enunciar el principio de traslación de la manera siguiente: *Se sustituirá todo determinante binario* $(\alpha\beta)$ *por un determinante ternario* (abu), *donde* a, b, . . . *son los símbolos de la forma ternaria que corresponden á los símbolos* $\alpha, \beta, \ldots$ *Además, todo factor lineal se sustituirá por un determinante* (auv), *donde las* v *se consideran como arbitrarias.*

*Dicha transformación igualada á cero representa, en coordenadas* u, *una curva (ó un sistema de curvas) cuyas tangentes cortan á la curva ó á las curvas dadas en puntos que gozan de propiedades invariantes especiales.*

**113.** APLICACIONES. — 1.ª El discriminante de una forma binaria cúbica

$$\alpha^3{}_x = \beta^3{}_x = \gamma^3{}_x = \delta^3{}_x \text{ es } (\alpha\beta)^2 (\gamma\delta)^2 (\alpha\gamma)(\beta\delta);$$

por consiguiente, la condición para que una recta $u$ encuentre á una curva de tercer orden en dos puntos coincidentes, ó la ecuación de la curva en coordenadas líneas es

$$(abu)^2\,(cdu)^2\,(acu)\,(bdu) = 0.$$

*La curva general de tercer orden es pues de sexta clase.*

2.ª Propongámonos representar en coordenadas-líneas la ecuación de una cónica

$$a_x^2 = b_x^2 = 0.$$

La curva queda cortada por una recta $u$ en un par de puntos dados por la ecuación

$$\alpha^2{}_x = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 = 0.$$

Para una tangente, deben confundirse los dos puntos de intersección, es decir, que el discriminante $(\alpha\beta)^2$ de la forma $\alpha^2{}_x$ debe ser nulo; luego la ecuación de la cónica se expresará por

$$(abu)^2 = 0.$$

Demostremos la identidad de esta ecuación con la dada. Tenemos

$$a_x^2 = b_x^2 = a_{11}\,x^2{}_1 + a_{22}\,x^2{}_2 + a_{33}\,x^2{}_3 + 2\,a_{23}\,x_2\,x_3 + \ldots$$

y hemos de hacer en $(abu)^2$, $a_i\,a_k = b_i\,b_k = a_{ik}$.

Desarrollando el determinante simbólico, resulta

$$(abu)^2 = u^2{}_1\,(a_2\,b_3 - b_2\,a_3)^2 + u^2{}_2\,(a_3\,b_1 - b_3\,a_1)^2 + \ldots$$
$$+ 2u_2\,u_3\,(a_3\,b_1 - b_3\,a_1)\,(a_1\,b_2 - b_1\,a_2) + \ldots$$
$$= 2u^2{}_1\,(a_{22}\,a_{33} - a^2{}_{23}) + \ldots + 4u_2\,u_3\,(a_{12}\,a_{13} - a_{11}\,a_{23}) + \ldots$$

que da

$$(abu)^2 = -2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

3.ª El discriminante de la forma binaria bicuadrática $\alpha_x^k = \beta_x^k = \ldots$ se representa por

$i^3 - 6j^2$, siendo $i = (\alpha\beta)^4$, $j = (\alpha\beta)^2(\beta\gamma)^2(\gamma\alpha)^2$;

luego la ecuación de la curva de cuarto orden $\alpha^4_x = 0$ es, en coordenadas-líneas,

$I^3 - 6J^2 = 0$, si se hace $I = (abu)^4$, $J = (abu)^2(bcu)^2(cau)^2$.

*La curva general de cuarto orden es pues de la duodécima clase.*

Ahora, como se tienen métodos generales para formar el discriminante de una forma binaria, se puede establecer la ecuación en coordenadas-líneas de toda curva dada en coordenadas-puntos. Se puede pues indicar especialmente la clase general de una curva de orden $n^{simo}$, así como el grado de la ecuación en coordenadas-líneas con relación á los coeficientes. El discriminante de una forma binaria de orden $n^{simo}$ es, en efecto, del grado $2(n-1)$ con relación á los coeficientes de ésta, de manera que contiene $2(n-1)$ símbolos diferentes, pero equivalentes entre sí, de la $n^{sima}$ dimensión cada uno. Pero estas circunstancias no alteran, cuando se sustituye un determinante binario $(ab)$ por el determinante ternario $(abu)$; luego: *La ecuación en coordenadas-líneas de una curva de orden* n *es del grado* $2(n-1)$ *con relación á los coeficientes de su ecuación en coordenadas-puntos.*

De este resultado se deduce inmediatamente que: *Una curva de orden* n *es en general de la clase* $n(n-1)$ (*)

La anulación del discriminante de una forma binaria bicuadrática no es más que un caso particular de la condición de que su invariante absoluto $\frac{i^3}{j^2}$ tenga un valor dado, es decir, que los cuatro puntos fundamentales formen una relación anarmónica determinada. Correlativamente, la ecuación

$$I^3 - kJ^2 = 0,$$

en la que $k$ expresa un parámetro, representa según el principio de translación de Clebsch un sistema de curvas de la duodécima clase, tales que todas las tangentes de cada una encuentran á la curva dada de cuarto orden en un grupo cuaternario

(*) Clebsch, obra citada, t. I, pág. 347.

correspondiente á cierta relación anarmónica. Citaremos los siguientes resultados:

*Las rectas que cortan equianarmónicamente á una curva dada de cuarto orden* $a_x^4 = 0$, *envuelven una curva de cuarta clase* $I = (abu)^4 = 0$.

*Las rectas que cortan armónicamente á esta misma curva, envuelven una curva de sexta clase* $J = (abu)^3\,(bcu)^3\,(cau)^3 = 0$.

*Las rectas, cuyos puntos de intersección con dos cónicas* $a_x^2 = 0$, $\alpha_x^2 = 0$, *forman una relación anarmónica determinada* $\alpha$, *envuelven una curva de cuarta clase dada por la ecuación*

$$D'^2\,(\alpha - 1)^2 - DD''\,(\alpha + 1)^2 = 0,$$

si se hace $D' = (a\alpha u)^2$, $D = (abu)^2$, $D'' = (\alpha\beta u)^2$.

*Esta curva se compone de la cónica* $(a\alpha u)^2 = 0$, *contada dos veces, si la relación es armónica.* Podemos escribir inmediatamente *la ecuación del producto de los cuatro puntos de intersección de dos cónicas* $D'^2 - DD'' = 0$. (*)

## § 2.º Algunas curvas covariantes

**114.** Redes ó haces de curvas planas.—Si $a_x^n = 0$, $b_x^n = 0$, ... son las ecuaciones de $k + 1$ curvas planas de orden $n$, el sistema representado por

$$\lambda_1 a_x^n + \lambda_2 b_x^n + \ldots = 0$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ son $k + 1$ parámetros arbitrarios, constituye lo que se llama *un sistema lineal de especie* k. Para $k = 1$ se tiene *el haz*, para $k = 2$ la *red*.

Citaremos las siguientes proposiciones: *Un sistema lineal de especie* k, *está determinado por* $k + 1$ *curvas de orden* n *que no pertenecen á un mismo sistema lineal de especie inferior.*

*Si* $k > 1$, *las curvas del sistema no tendrán, en general, ningún punto común (puntos de base); pero si las* $k + 1$ *curvas que determinan el sistema tienen un punto común, este punto pertenece á las demás curvas del sistema.*

---

(*) Clebsch, obra citada, págs. 348-50.

*Si* $k = 1$, *habrá siempre* $n^2$ *puntos-bases del haz, es decir, puntos por los que pasan todas las curvas del sistema.*

*Un sistema lineal de curvas de orden* n *y de especie* k *determina en una transversal una involución de puntos de orden* n *y especie* k.

*Entre las curvas de un sistema lineal hay* $(k + 1)(n - k)$ *que tienen un contacto de orden* k *con una recta dada, etc.*

Si se consideran dos haces de rayos que tienen por centros dos de los $n^2$ puntos-bases en un haz de curvas de orden $n$, y se consideran como correspondientes los dos rayos que son las tangentes trazadas desde los dos puntos-bases á una misma curva del haz, *los dos haces de rayos son proyectivos*, es decir, que *la relación anarmónica de las cuatro tangentes á cuatro curvas del haz en un mismo punto-base, es igual á la de las cuatro tangentes en otro punto-base cualquiera.* (*)

**115.** STEINERIANA Y CAYLEYANA.—A las anteriores proposiciones añadiremos las siguientes:

*Los puntos dobles de las curvas de un haz tienen la misma recta polar respecto á todas las curvas del haz.*

*El lugar de un punto en el que son tangentes dos curvas de una red es una curva de orden* $3(n - 1)$, *la Hessiana,* cuya ecuación simbólica es

$$(abc)\, a_x^{n-1} b_x^{n-1} c_x^{n-1} = 0.$$

*La Hessiana de una red es el lugar de los puntos dobles de las curvas de la red.*

DEFINICIÓN.—El lugar de los puntos de intersección de las rectas polares, respecto á las curvas de la red de todos los puntos de la Hessiana, es la curva llamada *Steineriana,* y la envolvente de las rectas que unen los puntos correspondientes de la Hessiana y la Steineriana es una curva llamada *Cayleyana.*

**116.** PROPIEDADES. — Se vió que eliminando $y$ entre las ecuaciones

$$a_x^{n-2} a_y a_1 = 0, \quad a_x^{n-2} a_y a_2 = 0, \quad a_x^{n-2} a_y a_3 = 0 \qquad (1)$$

se obtiene la Hessiana y además que la Steineriana es la curva

(*) Véase E. Pascal. *Repertorio di Matematiche superiori.* II, págs. 219 y siguientes.

recorrida por el polo $y$. La ecuación de la Steineriana se obtiene eliminando $x$ entre las ecuaciones (1).

TEOREMA.—*A cada punto de la Hessiana corresponde una tangente de la Steineriana.*

En efecto, las coordenadas $u_i$ de una de las tangentes se obtienen por medio de las fórmulas

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 = 0, \quad u_1 dy_1 + u_2 dy_2 + u_3 dy_3 = 0. \quad (2)$$

Si escribimos en las ecuaciones (1) $x_i + dx_i$ en vez de $x_i$, tendremos

$$\left.\begin{aligned} f_{11} dy_1 + f_{12} dy_2 + f_{13} dy_3 + y_1 df_{11} + y_2 df_{12} + y_3 df_{13} = 0, \\ f_{21} dy_1 + f_{22} dy_2 + f_{23} dy_3 + y_1 df_{21} + y_2 df_{22} + y_3 df_{23} = 0, \\ f_{31} dy_1 + f_{32} dy_2 + f_{33} dy_3 + y_1 df_{31} + y_2 df_{32} + y_3 df_{33} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Multiplicando las ecuaciones (1) respectivamente por $x_1$, $x_2$, $x_3$ y luego por $dx_1$, $dx_2$, $dx_3$ y sumándolas, dan

$$f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0, \quad y_1 df_1 + y_2 df_2 + y_3 df_3 = 0. \quad (4)$$

Por otra parte, de las ecuaciones (3) multiplicadas respectivamente por $x_1$, $x_2$, $x_3$ y sumadas, resulta:

$$f_1 dy_1 + f_2 dy_2 + f_3 dy_3 = 0,$$

y por comparación con las (4), se obtiene

$$\mu u_1 = f_1, \quad \mu u_2 = f_2, \quad \mu u_3 = f_3,$$

de las que resulta demostrado el teorema.

TEOREMA.—*Las primeras polares de los puntos de una curva envuelta por las polares lineales de otra curva $\varphi$ son tangentes á esta última.*

En efecto, siendo $\Phi = 0$ una curva envuelta por las polares lineales de los puntos de una curva de orden $m^{\text{simo}}$ $\varphi = 0$, respecto á la curva original $f = 0$, de orden $n$, la clase queda determinada por el número de tangentes que pasan por un punto fijo $\xi$, y en consecuencia, por el número de puntos de intersección de la curva de orden $n - 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \xi_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \xi_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} \xi_3 = 0, \quad (5)$$

con $\varphi = 0$, y es por lo tanto igual á $m(n-1)$.

Para determinar el orden, debemos elegir el punto $\xi$ en una recta cualquiera $v$ de tal manera, que dos tangentes trazadas por este punto, y por consiguiente, dos puntos de intersección de las curvas $\varphi = 0$ y (5) estén infinitamente próximos. A cada uno de estos puntos de intersección corresponde una de las tangentes de que se trata, y queda el teorema demostrado.

Vamos ahora á establecer la condición de contacto de las curvas $\varphi = 0$ y (5). Para ello nos propondremos, extendiendo el problema, *determinar en general el grado del tactinvariante (es decir, de la condición de contacto) de dos curvas de órdenes* m *y* $\mu$ *con relación á los coeficientes de sus ecuaciones.*

Sean $\varphi = 0$, $\psi = 0$ estas dos curvas que son tangentes en el punto $x$. Si $v$ designa una recta cualquiera y $\xi$ su punto de intersección con la tangente común de $\varphi$ y $\psi$ en $x$, las ecuaciones siguientes quedan necesariamente satisfechas:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial\psi}{\partial x_3}\xi_3 = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\xi_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\xi_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\xi_3 = 0,$$

$$v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + v_3\xi_3 = 0.$$

Eliminando las $\xi_i$, resulta

$$V \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\psi}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\psi}{\partial x_2} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (6)$$

ecuación de grado $m + \mu - 2$ que, en general, representa el lugar de los puntos cuyas polares lineales se cortan en la recta $v$; esta curva pasa pues, independientemente de las $v$, por el punto de contacto.

Si por el contrario, suponemos constantes las $x$ y las $v$ variables la fórmula (6) da la ecuación del punto de intersección de las dos polares lineales de $x$; pero este punto de intersección se confunde con el polo $x$, si este último es un punto común de $\varphi = 0$ y $\psi = 0$. La eliminación de las $x$ entre $\varphi = 0$, $\psi = 0$ y (6) da, por consiguiente, el producto de los puntos de intersección de $\varphi$ y $\psi$. Además este producto está multiplicado por un factor

extraño, porque la ecuación sería aquí del grado $m\mu$ con relación á los coeficientes de V, del grado $\mu\,(m+\mu-2)$ con relación á los de $\varphi$ y del grado $m\,(m+\mu-2)$ con relación á los de $\psi$; luego en total de los grados $\mu\,(2m+\mu-2)$ y $m\,(2\mu+m-2)$ con relación á los coeficientes de $\varphi$ y de $\psi$, mientras que estos números no pueden ser iguales respectivamente á $\mu$ y $m$.

El grado del factor que interviene es pues $\mu\,(2m+\mu-3)$ y $m\,(2\mu+m-3)$ con relación á los coeficientes de $\varphi$ y $\psi$, respectivamente. Pero como la expresión (6), y por consiguiente nuestro resultante se anula independientemente de las $v$, si $x$ es un punto de contacto de $\varphi$ y de $\psi$, el factor de que se trata igualado á cero, da precisamente la condición de contacto, y resulta el teorema:

*La condición de contacto (tactinvariante) de dos curvas cuyos órdenes son* m *y* $\mu$, *es del grado* $\mu\,(m+\mu-3)$ *y el* $m\,(2\mu+m-3)$ *respectivamente con relación á los coeficientes de la primera y la segunda.*

## § 3.° Sistemas de curvas

**117.** Ya hemos tratado de las redes de curvas ó sistemas lineales al definir la Steineriana y la Cayleyana. Ahora vamos á hacer algunas indicaciones más acerca de las relaciones respectivas de dos curvas, ó sea de los invariantes funcionales *simultáneos* de dos formas algebráicas ternarias.

Se obtendrán covariantes simultáneos imponiendo, por ejemplo, la condición de que las polares de cierto orden de una de las curvas tengan con otra curva una relación invariante determinada tal como una relación de contacto. Demostraremos los siguientes teoremas:

1.° *El lugar de un punto cuya cónica polar tiene una infinidad de triángulos polares circunscritos á una cónica dada, es una curva de orden* $n-2$.

2.° *El lugar de un punto cuya cónica polar se halla inscrita en un triángulo polar perteneciente á una cónica dada (y por consiguiente en una infinidad) es una curva de orden* $2\,(n-2)$.

En efecto, si se toman una curva de $n^{simo}$ orden y otra de primero

$$a_x^n = 0, \quad u_\alpha = 0,$$

la condición de que las polares cónicas, es decir, las $(n-2)^{\text{ésimas}}$ polares de un punto sean tangentes á la recta $u$, da la ecuación

$$(abu)^2 a_x^{n-2} b_\alpha^{n-2} = 0.$$

Se obtiene también, si las polares cúbicas deben ser tangentes á $u$, la ecuación de grado 4 $(n-3)$,

$$(abu)^2 (cdu)^2 (acu)(bdu) a_x^{n-3} b_x^{n-3} c_\alpha^{n-3} d_x^{n-3} = 0.$$

Dadas enseguida una curva de $n^{\text{simo}}$ orden y una cónica

$$a_x^n = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_\alpha^2 = 0,$$

se puede imponer la condición de que para las dos cónicas

$$a_y^{n-2} a_x^2 = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_x^2 = 0$$

se anule uno de los invariantes simultáneos $A_{112}$ ó $A_{122}$; y se obtienen respectivamente, las dos curvas

$$(a\alpha\beta)^2 a_y^{n-2} = 0 \quad \text{y} \quad (ab\alpha)^2 a_y^{n-2} b_y^{n-2} = 0.$$

La generación de curvas por medio de otras curvas de grado inferior, depende de la consideración de los haces.

**118.** Puntos y curvas de coincidencia.—Sean los sistemas de curvas representados por una ecuación homogénea con relación á las $y$ y á las $x$, de los órdenes $m$ y $n$ con relación á las $x$ é $y$ respectivamente:

$$f\begin{pmatrix} m & n \\ x, & y \end{pmatrix} = 0.$$

A cada punto $x$ corresponde una curva de orden $n$, á cada punto $y$ una curva de orden $m$.

Dados dos sistemas de curvas de la especie citada

$$f\begin{pmatrix} m & n \\ x, & y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \varphi\begin{pmatrix} m' & n' \\ x, & y \end{pmatrix} = 0,$$

á cada punto del plano corresponden $\alpha' = nn'$ puntos $y$, que son

las intersecciones de las dos curvas, relacionadas con este punto por $f = 0$ y $\varphi = 0$. Análogamente á cada punto $y$ del plano corresponden $\alpha = mm'$ puntos $x$. Se pide hallar cuales son los puntos $x$ que coinciden con sus correspondientes $y$. Haciendo $x = y$ en $f = 0$ y $\varphi = 0$, obtenemos los *puntos de coincidencia* buscados como intersecciones de las dos curvas

$$f\begin{pmatrix} m & n \\ x, & x \end{pmatrix} = 0, \qquad \varphi\begin{pmatrix} m' & n' \\ x & x \end{pmatrix} = 0;$$

número que es igual á

$$(m+n)(m'+n') = mm' + nn' + mn' + nm' = \alpha + \alpha' + \beta,$$

si se hace $\beta = mn' + nm'$. El número $\beta$ es el orden de la curva que describe $y$, si $x$ se mueve en una recta, pues se obtiene la ecuación de esta curva haciendo en $f = 0$ y $\varphi = 0$, $x_i = \varepsilon_i + \lambda t_i$ y se elimina $\lambda$. El resultante es de orden $mn' + nm'$ en $y$.

Admitamos que á un punto $x$ corresponden $\alpha'$ puntos $y$ y que á un punto $y$ corresponden $\alpha$ puntos $x$. Sea $\beta$ el orden de la curva que recorre los puntos $y$ homólogos de $x$, cuando $x$ describe una recta. $\beta$ depende simétricamente de los grupos de puntos $x$ é $y$; $\beta$ *es pues al mismo tiempo el orden de la curva que describen los puntos* x *homólogos de* y, *cuando* y *se mueve en una recta.*

*La curva de coincidencia* es aquélla cuyos puntos son de coincidencia.

**119.** PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA. — Chasles enunció el siguiente principio: *Si entre los puntos de dos punteadas sobrepuestas se establece una correspondencia tal, que á cada punto de la una corresponden* m *puntos de la otra y que á cada punto de ésta corresponden* n *puntos de aquélla, existirán* m + n *puntos que se corresponderán á sí mismos.*

## § 4.º NOCIONES SOBRE LOS CONEXOS

**120.** Consideremos la figura representada por una ecuación algebráica que contiene de una manera homogénea las coordenadas de un punto móvil $(x)$ y las de una recta $(u)$, es decir,

$$f(x, u) \equiv a_x^m u_\alpha^n = 0, \qquad (1)$$

en la que las $x_i$ entran en la dimensión $m$ y las $u_i$ en la dimensión $n$. La figura se llamará un *conexo* de $m^{\text{simo}}$ orden y de $n^{\text{sima}}$ clase, ó más brevemente $(m, n)$.

A dicha figura no pertenece una forma geométrica propiamente dicha, y al contrario, para *cada* recta $u$ del plano puede hallarse una infinidad de puntos $x$, y para cada punto $x$ una infinidad de rectas que satisfacen á la ecuación del conexo.

A cada recta $u$ corresponden, en general, en virtud de (1) un número infinito de puntos $x$ que forman una curva $C_m$ de orden $m$; á cada punto $x$ una infinidad de rectas que envuelven una curva $k_n$ de $n^{\text{sima}}$ clase. Así para $m = 1, n = 1$, por ejemplo, á cada punto $x$ corresponde otro punto $y$, como vértice de un haz de rayos (curva de primera clase) formado por las rectas correspondientes $u$, y á toda recta $u$ corresponde otra recta $v$ (curva de primer orden). En este caso, en efecto, la ecuación

$$f(x, u) \equiv a_x u_\alpha \equiv \Sigma\Sigma \beta_{ik}\, x_i\, u_k = 0$$

da solamente una representación particular de la colineación general, porque se obtiene, para las coordenadas del punto $y$ que corresponde á $x$,

$$\rho y_k = \beta_{1k} x_1 + \beta_{2k} x_2 + \beta_{3k} x_3,$$

y para las coordenadas de la recta $v$ que corresponde á $u$,

$$\sigma x_i = \beta_{i1} u_1 + \beta_{i2} u_2 + \beta_{i3} u_3.$$

Como aquí el punto y la recta se presentan siempre juntos, es ventajoso para la concepción más sencilla de estas relaciones, no considerar ni el punto ni la recta como elemento fundamental del plano. Designaremos, por el contrario, como elemento $(x, u)$ *toda combinación de un punto* x *del plano con una recta* u *del mismo.*

Se obtiene pues, el conjunto de los elementos $(x, u)$, combinando cada uno de los puntos, en número doblemente infinito $x$ con cada una de las rectas $u$ en número doblemente infinito.

*El conjunto de los elementos forma, según esto, un sistema cuádruplemente infinito (llena una multiplicidad) de cuatro dimensiones,* y este sistema descansa en el plano. La ecuación

de un conexo se desprende de él, como siendo el sistema *triplemente* infinito de los elementos que satisfacen á esta ecuación. Puede expresarse lo que precede de este modo: *Los puntos que forman con una recta dada los elementos de un conexo* (m, n) *se hallan situados en una curva* $C_m$ *de orden* m; *las rectas que forman con un punto dado los elementos del conexo, envuelven una curva* $K_n$ *de la* n^sima *clase.* Todas las curvas $K_n$ que se originan así forman un sistema doblemente infinito cuyos parámetros son las relaciones de las $x_i$; igualmente las curvas $C_m$ forman un sistema de curvas doblemente infinito, cuyos parámetros son las relaciones de las $u_i$.

Puede suceder que todo punto del plano forma con una recta determinada, ó que toda recta forme con un punto determinado del plano un elemento del conexo. Así, por ejemplo, en el conexo

$$x_1 \varphi(u) + x_2 \psi(u) = 0,$$

el punto $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, forma con cada una de las rectas $u$ un elemento. Los puntos ó rectas de esta especie se llaman *puntos* ó *rectas fundamentales.*

Cuando, por ejemplo, no existen las $u$, se tiene la ecuación de una curva en *coordenadas-puntos.*

El estudio de las propiedades de un conexo $a_x^m u_\alpha^n = 0$ conduce al estudio de los invariantes funcionales, es decir, á invariantes, covariantes, contravariantes y formas mixtas que pertenecen á la forma fundamental $a_x^m u_\alpha^n$. Se puede siempre sustituir á las formas mixtas que intervienen, por lo que se llama formas *normales,* es decir, formas $\varphi$ que satisfacen á la ecuación diferencial $\sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \, \partial u_i} = 0$. Todos estos invariantes funcionales podrán representarse simbólicamente, y se tendrá que distinguir factores simbólicos de los tipos siguientes (haciendo $a_x^m u_\alpha^n \equiv b_x^m u_\beta^n \equiv c_x^m u_\gamma^n$)

$$a_x, \ (abu), \ (abc), \ a_\alpha, \ u_\alpha, \ (\alpha\beta x), \ (\alpha\beta\gamma).$$

Citaremos ahora un principio análogo al de *translación,* pues

la relación establecida por el conexo entre los puntos y las rectas del plano pueden considerarse de otra manera.

Sea un punto cualquiera, que puede considerarse como intersección de las dos rectas $v$, $w$, y que representaremos por $(v, w)$; y sea la recta $(y, z)$ que une $y$ con $z$. Su reunión formará un elemento elegido arbitrariamente que, en general, no pertenece al conexo. *Sin embargo, por medio del conexo* (m, n) *los rayos del haz* (v, w) *están asociados á los puntos de la recta* (y, z); y esta dependencia respectiva es de *nm* determinaciones, en el sentido de que á todo punto corresponden $n$ rayos $(\Gamma_n)$ y á todo rayo $m$ puntos $(G_m)$, pues si se representa un punto de la serie por $x_1 y + x_2 z$ y un rayo del haz por $\lambda_1 v + \lambda_2 w$, se obtiene que para los puntos y los rayos asociados entre sí por el conexo $a_x^m u_\alpha^n = 0$ se verifica la ecuación

$$(x_1 a_y + x_2 a_z)^m (\lambda_1 v_\alpha + \lambda_2 w_\alpha)^n = 0,$$

que es del orden $m$ en $x_1 : x_2$ y del orden $n$ en $\lambda_1 : \lambda_2$. Si hacemos ahora simbólicamente

$$a_y = A_1, \quad a_z = A_2, \quad v_\alpha = \mathfrak{A}_1, \quad w_\alpha = \mathfrak{A}_2,$$

tendremos la forma doblemente binaria

$$\varphi = A_x^m A_\lambda^n,$$

estableciendo $\varphi = 0$ la relación enunciada.

Si consideramos un elemento $x$, $u$ perteneciente al conexo dado, en el que el punto $x$ forma parte de la serie $(y, z)$, el rayo $u$ forma parte del haz $(v, w)$; y si imponemos la condición de que el grupo $\Gamma_n$ correspondiente á $x$ (y conteniendo á $u$) posea una propiedad invariante binaria, y que igualmente $G_m$ posea esta misma propiedad ú otra, resulta una condición invariante para el rayo $(y, z)$ y el punto $(v, w)$; *y el elemento* (y, z), (v, w) *formado con los dos, pertenece á un conexo covariante.* La condición impuesta estará representada por la anulación de un invariante de la forma binaria $\varphi$, que debe conservar todavía la propiedad invariante, si una de las series de variables $(x)$ está sometida á una transformación lineal cualquiera, y la otra $(\lambda)$ á una transformación lineal igualmente cualquiera; porque el grupo $\Gamma_n$, que corresponde á todo punto *cualquiera* $x = x_1 y + x_2 z$,

en virtud de ser $\varphi = A_x^m \mathfrak{A}_\lambda^n$, debe poseer la propiedad invariante en cuestión, y lo mismo sucede al grupo $G_m$ que corresponde á un rayo *cualquiera* $u = \lambda_1 v + \lambda_2 w$. Los invariantes de la forma $\varphi$, que se consideran aquí, son del tipo

$$I = \Sigma c \Pi (AB) \ldots \Pi (\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \ldots,$$

expresando las cantidades $c$ coeficientes numéricos, y las cantidades A, B símbolos equivalentes de una de las dos especies y las cantidades $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ símbolos de la otra especie; pero estas dos clases de símbolos no pueden nunca presentarse al mismo tiempo, y por esta razón no puede entrar en I el factor $(A\mathfrak{A})$. Pero se tiene, en virtud de la hipótesis $a_y = A_1, a_z = A_2, v_\alpha = \mathfrak{A}_1, w_\alpha = \mathfrak{A}_2$,

$$(AB) = a_y b_z - b_y a_z = (abu),$$

haciendo $u_i = (y\mathfrak{z})_i$, y para $x_i = (v w)_i$,

$$(A\mathfrak{B}) = v_\alpha w_\beta = w_\alpha v_\beta = (\alpha\beta x).$$

*La ecuación del conexo covariante buscado,* es pues, en virtud de la última hipótesis,

$$I \equiv \Sigma c \Pi (abu) \ldots \Pi (\alpha\beta x) \ldots = 0 \quad \textit{(Clebsch, obra cit., t. III)}$$

**121.** CONEXO CONJUGADO.—Se puede formar con relación á $f$ un conexo covariante notable, que se llama *conexo conjugado.*

Partamos de un elemento cualquiera $y$, $v$ del plano. A todo punto $x$ de $v$ corresponden, en virtud de $f = 0$, $n$ rayos que pasan por $y$, y á todo rayo $u$ que pasa por $y$, $m$ punto de $v$ (pág. 289). Los $n$ rayos son las tangentes de $y$ á la curva $K_n$ que corresponde á $x$; los $m$ puntos son los de intersección de $v$ con la curva $C_m$, que corresponde á $u$. Actualmente, si la curva $K_n$, que corresponde á $x$, pasa por $y$, dos de los $n$ rayos se confunden con la tangente de $K_n$ en el punto $y$; y esta es la sola manera de que se origine un rayo doble de esta especie, porque $K_n$ no tiene, en general, ni tangentes dobles, ni tangentes de inflexión. Este rayo forma con $x$ un elemento del conexo dado $f = 0$, y puede, en particular, designarse por $u$. Igualmente, si la curva $C_m$ que corresponde á $u$, es tangente á la recta $v$, dos de los $m$ puntos de intersección situados en $v$ se confunden. Este punto

contado dos veces, forma con $u$ un elemento de $f = 0$, y estará, en particular, representado por $x$. Todo elemento $(y, v)$ que ofrece esta relación frente á un elemento $(x, u)$ de $f$, es un elemento de un conexo covariante, que se llama *conjugado* de $f$. *Un elemento* (y, v) *de este último se halla pues definido por la circunstancia de que, con relación al conexo dado, al punto* y *corresponde una recta* u *que se cuenta doble, y á la recta* v *corresponde igualmente un punto* x *que se cuenta doble.*

También podemos decir que: Si $(x, u)$ es un elemento de $f = 0$, es decir, si $x$ está en la curva $C_m$ correspondiente á $u$, y $u$ es tangente á la curva $K_n$ correspondiente á $x$; si además $y$ es el punto de contacto de $u$ con esta curva $K_n$ y $v$ la tangente de la primera curva $C_m$ en $x$, $(y, v)$ es un elemento conjugado, y se obtiene completamente el elemento conjugado, haciendo recorrer al elemento $(x, u)$ todo el conexo dado.

*Se obtiene pues, la ecuación* F (y, v) = 0 *del conexo conjugado, eliminando las cantidades* $\rho, \sigma, x_i, u_i$ *entre las ecuaciones*

$$\rho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad f = 0.$$

**122.** Coincidencia principal. — Entre los conexos existe uno de gran importancia, es el conexo lineo-lineal dado por la anulación del covariante idéntico $u_x$, es decir, por la ecuación

$$u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

que se llama *conexo idéntico*. En este conexo, á cada punto corresponde el conjunto de las rectas que pasan por él, y á toda recta el conjunto de puntos situados en ella, es decir, que el elemento del conexo idéntico es, en general, toda combinación del punto y de la recta en situación reunida. La curva $K_1$ que corresponde á un punto es pues, el mismo punto considerado como vértice de un haz de rayos. La curva $C_1$ que corresponde á una recta es esta recta, considerada como base de una serie puntual.

El conjunto de los elementos comunes á un conexo dado arbitrariamente $f = 0$ y al conexo idéntico $u_x = 0$ da una coincidencia covariante, particularmente importante para el estudio del conexo $f = 0$, que se llama *coincidencia principal del cone-*

$xo$. En esta figura, á cada punto corresponden $n$ rayos que pasan por este punto *(rayos de coincidencia)*, y son las tangentes trazadas por este punto á la curva correspondiente $K_n$; á cada recta corresponden $m$ puntos situados en ella *(puntos de coincidencia)*, esto es, sus puntos de intersección con la curva correspondiente $C_m$.

Así, á todo conexo corresponde una coincidencia principal; pero al contrario, existe una infinidad de conexos á los que corresponde una misma coincidencia principal $(m, n)$. Si, en efecto, $f = 0$ es uno de ellos, todos los conexos

$$f + Mu_x = 0, \tag{2}$$

representando $M = 0$ un conexo cualquiera $(m - 1, n - 1)$, comprenden evidentemente la misma coincidencia que $f$.

La coincidencia principal tiene especial interés por su íntima conexión con las *ecuaciones diferenciales algebráicas de primer orden*.

Si se trazan por cada punto del plano $n$ direcciones de las rectas que le corresponden en la coincidencia principal, y se las considera como elementos de arco de un sistema de curvas, se podrá formar así una familia de curvas de las que $n$ pasan por cada punto, y sus tangentes en este punto son los $n$ rayos que corresponden á éste en la coincidencia principal. Para obtener las curvas que se originan, será preciso integrar una ecuación diferencial, que se obtendrá de la manera siguiente: Haremos nuevamente $f = a_x^m u_\alpha^n$. Sea $u$ una recta que pasa por el punto $x$ que le corresponde en la coincidencia principal, de modo que $f(x, u) = 0$ y $u_x = 0$. Un punto $x + dx$ próximo de $x$ satisface entonces á las ecuaciones (3)

$$u_{dx} \equiv u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3 = 0,\ u_x \equiv u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0,$$

en virtud de las que se obtienen las relaciones de las $u_i$ iguales á las de los determinantes formados con las $x_i$ y las $dx_i$. Si pues, se introducen estos últimos en $f$ ó en $f + Mu_x$, se obtiene la ecuación diferencial

$$f(x_1, x_2 x_3;\ x_2 dx_3 - x_3 dx_2,\ x_3 dx_1 - x_1 dx_3,\ x_1 dx_2 - x_2 dx_1) \equiv a_x^m (\alpha x d x)^n = 0. \tag{4}$$

Se puede partir correlativamente de un rayo $u$ y de sus $n$ puntos de coincidencia. Si se traza por uno de éstos un rayo $u + du$ próximo de $u$, se obtendrá en este último un punto $x + dx$ correspondiente. Partiendo de este nuevo punto, se puede ir más lejos, obteniéndose un sistema de curvas de las que $m$ son tangentes á una recta dada. Para la determinación de éstas, se emplearán en vez de las ecuaciones (3), las ecuaciones

$$u_x = 0, \quad (du)_x \equiv x_1\, du_1 + x_2\, du_2 + x_3\, du_3 = 0, \tag{5}$$

y se obtiene así, en vez de (4), la ecuación diferencial

$$f[(udu), u] \equiv (au\, du)^m\, u_\alpha^n = 0. \tag{6}$$

Este sistema de curvas tiene la propiedad de que la tangente de una de estas curvas que lo forman en uno de sus puntos, está dado por uno de los rayos de coincidencia de este punto. Pero el sistema de curvas dado por la ecuación diferencial (4) estaba caracterizado por la misma propiedad. *Los dos sistemas son pues idénticos. La ecuación* (6) *es la ecuación diferencial en coordenadas-líneas para el mismo sistema de curvas cuya ecuación en coordenadas-puntos se halla obtenida por la integración de la ecuación diferencial* (4). Llamaremos á las curvas así representadas, *curvas de coincidencia principal ó curvas integrales del conexo* $f = 0$.

Citaremos, en fin las proposiciones siguientes:

*El lugar de los puntos* x *que completados por sus rectas de unión con un punto fijo* y, *forman elementos de una coincidencia principal, es una curva de orden* $m + n$

$$X_y = 0,$$

*y esta curva tiene, en* y, *un punto múltiplo de orden* n.

*La envolvente de los rayos* u *que, completados por sus puntos de intersección con un rayo fijo* v, *forman elementos de una coincidencia principal, es una curva de la clase* $m + n$

$$U_v = 0,$$

*y esta curva tiene á* v *por tangente múltiple de orden* m.

Entre los puntos del plano son especialmente notables aquéllos para los que se confunden dos de las $n$ direcciones que parten de ellos; y como esta exigencia equivale á una condición,

habrá un número infinito de puntos de esta especie, es decir, que los puntos de que se trata formarán una curva. Se obtiene igualmente otra curva como envolvente de las rectas para las que dos puntos de coincidencia que les corresponden están infinitamente próximos uno de otro. Si dos de las $n$ tangentes trazadas por un punto $x$ á la curva correspondiente $K_n$ deben coincidir, es necesario que el punto $x$ se halle en $K_n$. Si pues se representa en coordenadas-puntos X, bajo la forma $F(x, X) = 0$, á la ecuación $f(x, u) = 0$ de esta última, $F(x, x) = 0$ será la ecuación del lugar buscado.

*Se obtiene el lugar de los puntos* x *situados en su curva correspondiente* $K_n$, *para los que dos de las direcciones homólogas de avance de la coincidencia principal se confunden, representando* $K_n$ *en coordenadas-puntos. Se obtiene correlativamente la envolvente de las rectas tangentes á su curva correspondiente* $C_m$, *representando esta última en coordenadas-líneas* u.

La primera curva no existe más que cuando $m > 1$, y la segunda cuando $n > 1$. Para el conexo $a_x u_\alpha^2 = 0$ se obtiene, por ejemplo,

$$F(x, X) \equiv a_x b_x (\alpha\beta X)^2;$$

y el lugar de los puntos en cuestión, está dado por la curva de *cuarto* orden

$$F(x, x) \equiv a_x b_x (\alpha\beta X)^2 = 0.$$

Para el conexo de $a_x^2 u_\alpha^2$, se obtiene

$$F(x, X) = a_x^2 b_x^2 (\alpha\beta X)^2,$$

y por tanto la curva de sexto orden

$$F(x, x) \equiv a_x^2 b_x^2 (\alpha\beta x)^2 = 0.$$

Las curvas citadas se refieren, por relaciones especiales y muy importantes, á las curvas integrales del conexo $f = 0$. Consideremos los puntos situados á uno y otro lado de la curva $f(x, x) = 0$. Para un punto de ésta se confunden dos de las

ramas correspondientes de las curvas integrales; luego, según las leyes comunes de la continuidad, estas ramas son necesariamente reales para los puntos colocados á uno de los lados de la curva $F(x, x) = 0$, imaginarias para los puntos situados al otro lado. Luego, en todo punto de F, tienen la misma tangente, *sin prolongarse más allá de este punto*, dos ramas reales de las curvas integrales, es decir, que se forma un punto cuspidal ó de retroceso de la curva integral (fig. 119). Si pues, se hace el razonamiento correlativo, podremos enunciar las dos proposiciones siguientes:

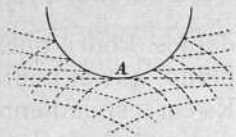


Fig. 119

*El lugar* $(F = 0)$ *de los puntos que se hallan en las curvas* $K_n$ *que les corresponden en el conexo, es al mismo tiempo el lugar de los puntos de retroceso de las curvas integrales del conexo.*

*La envolvente* $(F' = 0)$ *de las rectas tangentes á las curvas* $C_m$ *que les corresponden en el conexo, es al mismo tiempo el lugar de las tangentes de inflexión de las curvas integrales del conexo.*

Las tangentes de retroceso de las curvas integrales, que pertenecen á los puntos de $F = 0$, envolverán, en general, otra curva $\Phi = 0$, é igualmente los puntos de inflexión de estas curvas describirán una nueva curva $\Phi' = 0$, y solamente en puntos particulares de F sucederá que la tangente de retroceso correspondiente, sea al mismo tiempo tangente de F en este punto, como se verifica para el punto A en la fig. 119. En el caso, tan solo, de que existan condiciones particulares entre los coeficientes de la ecuación $f = 0$, podrá conseguirse que la tangente de *todo* punto de F sea también tangente á la curva correspondiente $K_n$. Entonces la curva integral es tangente á F en cada uno de sus puntos. La curva $F = 0$ da en este caso una integral singular de la ecuación diferencial $f = 0$.

Siendo una curva de clase $n$, en general, del orden $n(n-1)$ y su ecuación en coordenadas-puntos del grado $2(n-1)$ con relación á los coeficientes de la ecuación en coordenadas-líneas, se obtiene que el orden de F y la clase de F' son respectivamente $(n-1)(2m+n)$ y $(m-1)(2n+m)$.

$F = 0$ representa el lugar de los puntos de retroceso de las

curvas integrales, $\Phi = 0$ representa la envolvente de las tangentes de retroceso de estas mismas curvas.

Las dos curvas se corresponden *unideterminativamente* entre sí. A un punto $x$ de F corresponde, como tangente de $\Phi$, precisamente la tangente en $x$ de la curva $K_n$ que corresponde á $x$. Pero tal curva $K_n$ tiene en general, $\frac{1}{2} n (n-1)(n^2-9)$ puntos dobles. Podrá pues suceder, en un número finito de puntos del plano, que el punto $x$ coincida con un punto doble de la curva $K_n$ correspondiente, y entonces le corresponden dos tangentes distintas de $\Phi$. Según las leyes de la transformación unideterminativa, este hecho se verifica *si el punto en cuestión es un punto doble* de F. El número de puntos dobles podrá determinarse según el principio de correspondencia de Salmon y Zeuthen. (*)

Citaremos para terminar las siguientes proposiciones:

*En un conexo* (1, n) *existen* $n^2 + n + 1$ *rectas que forman, cada una con todos sus puntos, elementos de coincidencia fundamental ó rayos fundamentales.*

*Los* $n^2 + n + 1$ *rayos fundamentales de un conexo* (1, n) *forman parte del sistema de curvas integrales de la coincidencia principal y son las tangentes dobles de la curva correspondiente* $\Phi = 0$, que en general, *no tiene otras tangentes singulares.* Además, *forman juntamente con los* n *rayos de coincidencia que corresponden á un punto cualquiera de la coincidencia principal, un sistema de* $(n+1)^2$ *rectas á las que son tangentes infinidad de curvas de la* $(n+1)^{sima}$ *clase* $(U_v = 0)$.

**123.** TRANSFORMACIONES DE CONTACTO. – Se ha observado que la teoría de los conexos da origen á nuevos puntos de vista respecto á las ecuaciones diferenciales, y facilita medios de integración de las mismas.

Para establecer la *transformación de contacto,* Lie define el *elemento lineal de un plano* como el conjunto de un punto y de una recta que pasa por éste. Siendo $x, y$ las coordenadas cartesianas de un punto é $y'$ el coeficiente angular de la recta, toda transformación en $x, y, y'$ puede considerarse como una

(*) Véase *Leçons sur la Géométrie,* por A. Clebsch, t. I, págs 108-9 y t. III, pág. 393 y siguientes.

transformación de elementos lineales del plano. Para llegar á tales transformaciones, consideremos la transformación puntual

$$x_1 = X(x, y), \qquad y_1 = Y(x, y) \tag{1}$$

que origina una transformación de elementos lineales. Todas las curvas que tienen en un punto $(x, y)$ una tangente cuyo coeficiente angular es $y'$, se transforman en curvas que tienen en el punto $(x_1, y_1)$ la misma tangente, de manera que el coeficiente angular $y'_1$ de esta nueva tangente esté dado por una relación de la forma

$$y'_1 = P(x, y, y'). \tag{2}$$

El conjunto de las ecuaciones (1) y (2) define pues una transformación de elementos lineales del plano que, según la denominación de Lie, es la *transformación prolongada (erweiterte)* correspondiente á la transformación puntual (1). Esta transformación tiene la propiedad de cambiar toda familia de elementos $(x, y, y')$, que satisfacen á la ecuación

$$dy - y'\,dx = 0 \tag{3}$$

en otra familia de elementos $(x_1, y_1, y'_1)$ que satisfacen á la relación análoga $dy_1 - y'_1\,dx_1 = 0$.

Pero las transformaciones puntuales prolongadas no son las únicas que tienen esta propiedad, y Lie consideró lo que llama *transformación del contacto del plano,* á toda transformación de los elementos lineales del plano que deja invariante la ecuación de Pfaff

$$dy - y'\,dx = 0.$$

Dicha transformación debe verificar una identidad de la forma

$$dy - y'\,dx = \varrho(x, y, y')\,(dy_1 - y'_1\,dx_1),$$

hallándose las variables $x, y, x_1, y_1$ ligadas por una ó dos relaciones. Si están ligadas por dos relaciones, la transformación es una transformación puntual prolongada; si están ligadas por una sola relación

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0, \tag{4}$$

es una transformación de contacto propiamente dicha, definida por la ecuación (4) y las ecuaciones

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + y' \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + y'_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0 \tag{5}$$

La definición de las transformaciones de contacto adquiere una forma geométrica por la introducción de las multiplicidades ó variedades de elementos $M_1$. Lie llama así al conjunto de elementos definidos por un sistema de dos ecuaciones en $x, y, y'$ que satisface á la ecuación de Pfaff (3). Es ó bien el conjunto de todos los elementos lineales de una curva (puntos y tangentes), ó bien el conjunto de todos los elementos lineales que tienen un punto común.

Esto sentado, las transformaciones de contacto son las transformaciones de los elementos lineales que cambian toda multiplicidad $M_1$ en una multiplicidad $M_1$. Entre ellas, las transformaciones puntuales prolongadas son las únicas que cambian todo punto en un punto.

En cuanto á la transformación de contacto propiamente dicha, definida por las ecuaciones (4) y (5), cambia todo punto cuyas coordenadas son $x = a$, $y = b$ en una curva cuya ecuación es

$$\Omega (a_1, b_1, x_1, y_1) = 0 .$$

Por consiguiente transforma toda curva lugar de puntos $(a, b)$ en la envolvente de las curvas

$$\Omega (a, b, x_1, y_1) = 0$$

correspondientes, é inversamente toda curva envolvente de una familia de curvas $\Omega (x, y, a_1, b_1) = 0$ en el lugar de los puntos correspondientes $(a_1, b_1)$ Como sucede, por ejemplo, en la transformación por polares recíprocas, que tienen por cónica directriz la parábola $2y - x^2 = 0$, y que es la transformación de contacto definida por la ecuación $y + y_1 - xx_1 = 0$.

Lie da otra interpretación de la ecuación (3) de Pfaff. Expresa que los dos elementos infinitamente próximos $(x, y, y')$ y $(x + dx, y + dy, y' + dy')$ son dobles, es decir, que la distancia del punto del uno á la recta del otro, es de segundo orden con relación á la distancia de los dos puntos. Se puede definir pues una transformación de contacto como una transformación de

elementos que cambia siempre elementos dobles en elementos dobles. (*)

Para terminar citaremos la definición de Lie de curva integral: *Una serie simplemente infinita de elementos principales* x, y, p *se llamará curva integral, ó mejor, una variedad integral de una dimensión* ($M_1$) *cuando para dos elementos principales consecutivos* x, y, p *y* x + dx, y + dy, p + dp, *situados á distancia finita, queda satisfecha la ecuación* (3). (**)

El problema de la integración de una ecuación $\varphi(x, y, p) = 0$ puede formularse diciendo que *los elementos en número doblemente infinito de la ecuación* $\varphi = 0$ *deben reunirse en las integrales* $M_1$ *en número simplemente infinito.*

Pero estas elevadas consideraciones están fuera del cuadro de este tratado.

## § 5.° Geometría sobre una curva plana

**124.** Definiciones.—En la llamada *Geometría sobre una curva algebráica* se estudian los grupos de puntos obtenidos en una curva fundamental de orden *n* por sistemas de otras curvas de orden cualquiera, y especialmente cuando tales sistemas son *lineales,* es decir, que sus ecuaciones contienen *linealmente* parámetros variables. Si la curva fundamental es una recta, estos grupos de puntos constituyen *involuciones de orden superior.*

Sea una curva de orden $n^{simo}$ $f(x) = 0$, cortada por otra de orden $m^{simo}$ $\varphi = 0$ en $mn$ puntos, que supondremos no coinciden con los puntos dobles ó de retroceso de $f = 0$. Si $m < n$, hay $\frac{m(m+3)}{2}$ puntos de intersección dados. Estos puntos determinan completamente la curva $\varphi = 0$, y por consiguiente sus otros puntos de intersección con $f = 0$. Si, por el contrario, $m \geqslant n$, se puede si no se trata más que de las intersecciones de las dos curvas y no de la curva secante $\varphi$, sustituir la ecuación $\varphi = 0$ por la ecuación

$$\varphi' = \varphi + \mu f = 0,$$

(*) Sophus Lie. *Theorie des Transformationsgruppen Zweiter Asbchnitt.* Kap. 1.
(**) Sophus Lie. *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen Ordnung erster.*

siendo $\mu$ una expresión de orden $(m - n)$. Los

$$\frac{1}{2}(m-n+1)(m-n+2)$$

coeficientes completamente arbitrarios de $\mu$ pueden elegirse de manera que anulen un número igual de coeficientes de $\varphi'$. Se puede pues, sin modificar el sistema de los puntos de intersección, sustituir á una curva general $\varphi = 0$ una curva especial

$$\varphi' = \varphi + \mu f = 0.$$

que sólo dependa de

$$\frac{m(m+3)}{2} - \frac{(m-n+1)(m-n+2)}{2} = mn - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

constantes. Esta curva reducida, está ahora determinada por $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ puntos; si pues se da igual número de puntos de intersección de $f = 0$ y $\varphi' = 0$, los otros $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ quedan por esto fijados, y lo mismo sucede respecto á puntos de intersección de $f = 0$ y $\varphi = 0$, porque son los mismos puntos.

Los dos números

$$\frac{mn - m(m+3)}{2} \quad \text{y} \quad \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

que indican respectivamente, para el caso de ser $m < n$ y el de ser $m \geqslant n$, cuántos puntos de intersección del sistema se hallan dados por los otros, coinciden cuando $m = n - 1$ y $m = n - 2$. Para $m > n - 3$ se puede pues admitir el número $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ el cual es por completo independiente de $m$; pero para valores más pequeños de $m$, el número de los puntos que están dados por los otros es menor.

Estas consideraciones exigen una ligera modificación, cuando $\varphi$ pasa por algunos puntos dobles ó de retroceso de $f$. En efecto, estos puntos deben contarse una sola vez como elementos determinadores de $\varphi$, y al contrario dos veces como puntos de intersección de $\varphi$ con $f$. El número de los puntos de intersección determinados por los otros, quedará disminuído en el nú-

mero ($\delta$) de los puntos que coinciden con los puntos excepcionales de que tratamos, y que por consiguiente son conocidos de antemano. Tenemos pues el siguiente

TEOREMA.—*Entre los puntos de intersección de una curva de* $m^{simo}$ *orden* $f = 0$ *con una curva de* $m^{simo}$ *orden sujeta á pasar por* $\delta$ *puntos excepcionales de* $f = 0$, *sin que tenga puntos múltiples, el número de puntos determinados por los otros, será*

1.° $$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \delta \quad \text{si} \quad m \geqslant n-2,$$

2.° $$mn - \frac{m(m+3)}{2} - \delta \quad \text{si} \quad m < n-2,$$

Este teorema puede enunciarse de otro modo más exacto diciendo que: $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta$ ó $mn - \frac{1}{2}m(m+3) - \delta$ *puntos de intersección*, á lo más, *quedan determinados por los otros, cuando no se establecen otras condiciones*. Para $m = n = 3$ diremos que:

*Todas las curvas de tercer orden que tienen ocho puntos comunes, pasan todavía por un noveno.*

*Ejemplo.*—Sean los seis puntos 1, 2, 3, 4, 5, 6 situados en una cónica y unidos por pares

$$\overline{12}\,,\ \overline{45}\,,\ \text{I}\,;\ \overline{23}\,,\ \overline{56}\,,\ \text{II}\,;\ \overline{34}\,,\ \overline{61}\,,\ \text{III}\,,$$

siendo cada dos rectas lados opuestos de un exágono y I, II, III sus puntos de intersección repetidos.

La figura se considera como formada por tres curvas de tercer orden con ocho puntos comunes que se descomponen, y son:

1.° La cónica y la recta $\overline{\text{I II}}$, 2.° las tres rectas $\overline{12}$, $\overline{56}$, $\overline{34}$, 3.° las tres rectas $\overline{45}$, $\overline{23}$, $\overline{61}$. (*)

**125.** CURVA ADJUNTA.—Se dice que una *curva es adjunta, cuando pasa una vez por todos los puntos dobles y los puntos de retroceso de la curva fija*, ó más generalmente, cuando pasa $i - 1$ veces por cada punto de orden $i$ de ésta sin que, en gene-

(*) Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, t. I, pág. 131.

ral, las ramas particulares de las dos curvas sean tangentes. Si pues $f$ no tiene más puntos múltiplos que puntos dobles y cuspidales (de retroceso), una *curva adjunta* es una curva sometida tan solo á las condiciones de pasar *simplemente* por todo punto doble ó cuspidal de $f$.

Si suponemos que la curva $C_n$ de orden $n$ tenga en cada punto tangentes separadas, podemos considerar á todo punto múltiplo de orden $i$ sustituído por $\frac{1}{2} i\,(i-1)$ puntos dobles, y escribir

$$p = \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - \sum_i \alpha_i \frac{i\,(i-1)}{2},$$

si la curva $C_n$ tiene $\alpha_2$ puntos dobles, $\alpha_3$ puntos triplos . . . Para el sistema de los puntos de intersección de una curva adjunta, tendremos que hacer en las fórmulas del teorema fundamental $\delta = \frac{1}{2} \Sigma \alpha_i (i-1)$; y podremos entonces enunciarlo de la manera siguiente, así como se ve fácilmente, ya que en un punto múltiplo de orden $i$ se hallan siempre reunidos $i\,(i-1)$ puntos de la curva adjunta:

*Entre los puntos de intersección de una curva adjunta de orden* m *con la curva dada* $C_n$, *no situados en los puntos singulares.*

1.º *Para* $m > n-3, p$ *á lo más se hallan determinados por los* $nm - \Sigma \alpha_i\, i\,(i-1) - p = n\alpha + p - 2\ [\alpha = m-(n-3)]$ *restantes;*

2.º *Para* $m = n-2-r,\ p = 1 - \frac{1}{2}(r+2)(r-1)$ *á lo más están determinados por los* $\frac{1}{2} m\,(m+3) - \frac{1}{2} \Sigma \alpha_i\, i\,(i-1)$ *restantes.*

En el examen de las curvas adjuntas hay que considerar los elementos siguientes:

1.º El número (Q) de los puntos que se encuentran en cada grupo del sistema, es decir, el número de los puntos de intersección *móviles* de una curva adjunta del sistema considerado. Esta puede tener, además de los puntos singulares de $f$, cierto número de puntos de intersección *fijos*, comunes con $C_n$;

2.º *La multiplicidad del sistema,* es decir, el número $q$ de los parámetros arbitrarios de que dependen los coeficientes de una curva del sistema.

3.º *El grado del sistema,* es decir, la dimensión ó la forma según la que estos $q$ parámetros entran en la ecuación de la curva, los que se supone entran siempre racionalmente.

*Ejemplos.*—Supongamos que $C_n$ sea una curva de tercer orden sin puntos singulares. Entonces todas las rectas del plano forman un sistema doblemente infinito $\infty^2$ $(q = 2)$ de curvas adjuntas que dependen de dos parámetros; los grupos de puntos determinados por ellas en $C_3$ forman por consiguiente un sistema *lineal doblemente infinito de tres puntos* $(Q = 3)$. Por otra parte, todas las rectas que pasan por un punto fijo de $C_3$ y que, por consiguiente, cortan todavía á esta curva en dos puntos móviles, determinan *un sistema lineal simplemente infinito de dos puntos* $(Q = 2, q = 1)$. Además, siendo representables las tangentes de una cónica fije $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ bajo la forma

$$x_1 + 2\lambda x_2 + \lambda^2 x_3 = 0,$$

constituyen un *sistema cuadrático simplemente infinito de tres puntos.*

Si $C_3$ tiene un punto doble, y consideramos el haz de rayos trazado por este punto, cortando todavía cada rayo á $C_3$ en un punto móvil, el haz de que se trata determina un *sistema simplemente infinito de un solo punto* $(Q = 1)$. En fin, por lo general, todas las curvas adjuntas de orden $m$ (siendo $m > n - 3$) que pasan por $s$ puntos fijos cualesquiera, determinan en $C_n$ un sistema lineal de grupos de puntos para los que

$$Q = nm - \Sigma\alpha_i\, i\,(i-1),\quad q = nm - \Sigma\alpha_i\, i\,(i-1) - p - s;$$

porque entre los Q puntos de intersección hay $p$ que, según el teorema fundamental sobre los sistemas de intersecciones, se hallan determinados por otros, y por consiguiente solo $Q - q$ permanecen arbitrarios. Se tiene pues $q = Q - s - p$. Si, al contrario, entre los $s$ puntos fijos hay R situados en $C_n$, tendremos

$$Q = mn - \Sigma\alpha_i\, i\,(i-1) - R,\quad q = mn - \Sigma\alpha_i\, i\,(i-1) - s - p.$$

Mientras que los grupos de puntos situados en $C_n$ aparecen,

según lo expuesto, como dependientes de las curvas adjuntas que les pertenecen, se llega por medio del *teorema del resto,* á definir estos grupos, en cierto modo independientemente de las curvas que los atraviesan, de modo que son además figuras subsistentes por sí mismas conforme á las exigencias de la Geometría sobre una sola curva. Ante todo diremos que *residuo* de un grupo $G_Q$ de Q puntos es un grupo de puntos ($G_R$) que reunido al primero, forma el sistema completo de las intersecciones de la curva en cuestión $C_n$ con una curva adjunta, siendo indiferente aquí el orden de ésta. En el sistema de puntos de intersección no comprendemos las intersecciones situadas en los puntos singulares de $C_n$. Puede, por otra parte suceder que, entre los puntos de $G_Q$ (por ejemplo, en virtud de un contacto de la curva secante con las ramas de la curva primitiva en los puntos singulares), se halle en estos puntos un número de intersecciones superior al número normal. Las que exceden á este número deben contarse entre los $Q + R$ puntos. El grupo de puntos $G_R$ se dice *residual* de $G_Q$, y recíprocamente.

Llamaremos *corresiduales con relación á* $G_Q$ á dos grupos de puntos $G_R$ y $G_{R'}$ que son residuales de un mismo grupo $G_Q$, y por consiguiente, pueden ser cortados por dos curvas adjuntas cuyos otros puntos de intersección con $C_n$ se hallan todos en los puntos de Q. Estas curvas pueden ser del mismo orden ó de orden diferente. La importancia de la noción de *corresidualidad* tienen su origen en que, por medio del teorema del resto, se hace precisamente independiente de un residuo especial $G_Q$.

*Ejemplo.*—Sea una curva de quinto orden ($n = 5$) con dos puntos dobles ($p = 4$). Todas las cónicas adjuntas que pasan por dos puntos fijos de $C_5$ (y por dos puntos dobles) cortan á $C_5$ todavía en otros cuatro puntos. Cada uno de estos grupos $G_4$ es residual de los dos primeros puntos fijos, y son en número simplemente infinitos, corresiduales respecto al grupo fijo $G_2$.

**126.** TEOREMA DEL RESTO.—*Si en una curva algebráica los grupos de puntos* $G_R$, $G_{R'}$, *son corresiduales entre sí, respecto á un grupo de puntos* $G_Q$, *son también corresiduales relativamente á cualquier otro grupo de puntos* $G_Q$, *que es residual de uno de ellos* (por ejemplo de $G_R$).

Si por ejemplo, tenemos la curva $G_5$ con dos puntos dobles

($p = 4$) y el haz de curvas adjuntas $C_2$ que pasa por dos puntos fijos $G_2$ (y además por los puntos dobles); este haz determina un sistema lineal simplemente infinito de grupos $G_4$ que son corresiduales respecto á $G_2$. Pero para el grupo $G_4$ solo se puede hacer pasar una cónica adjunta; luego, para llegar á un grupo $G_{Q'}$ que sea corresidual del grupo $G_2$ relativamente á $G_4$, debemos hacer pasar por $G_4$ una curva adjunta de orden más elevado, por ejemplo de tercer orden. Esta corta entonces á la curva $C_5$ en siete puntos que forman un grupo $C_7$ corresidual de $G_2$ relativamente á $G_4$. Ahora, el teorema del resto expresa que por estos puntos $G_7$ se puede hacer pasar un haz de curvas adjuntas $C_3$ que determinan sobre $C_5$ el *mismo* sistema de grupos de puntos $G_4$ que el determinado antes por medio de un haz de cónicas adjuntas. La curva adjunta $C_3$ trazada al principio arbitrariamente por uno de los grupos $G_4$ habría podido elegirse de modo que fuese tangente de $G_5$ en uno de los cuatro puntos, de manera que un punto del grupo $G_7$, cortado por ella, habría coincidido con un punto de $G_4$. Observemos, en general, que *los grupos* $G_R$, $G_{R'}$, . . . *y los grupos* $G_Q$, $G_{Q'}$, . . . *pueden contener indiferentemente puntos distintos todos ó parcialmente los mismos.*

Para demostrar el teorema, admitamos que la curva dada $C_n$ sea $f = 0$, y que los grupos de los puntos $G_Q$ y $G_R$, $G_Q$ y $G_{R'}$, $G_{Q'}$, y $G_R$ estén determinados por $A = 0$, $B = 0$, $\alpha = 0$, respectivamente, siendo estas tres ecuaciones las de las curvas adjuntas á $f = 0$. Tenemos que demostrar que los grupos $G_{Q'}$, y $G_{R'}$ están situados también en la curva adjunta. Se puede, en efecto, hallar siempre las curvas adjuntas

$$\beta = 0,\ \gamma = 0, \quad \text{tales que} \quad \alpha . B = \beta . A + \gamma . f$$

se verifique idénticamente. Porque además de los puntos singulares de $f$, la curva (reducible)

$\alpha . B = 0$ contiene el grupo de puntos $G_Q$, $G_{Q'}$, $G_R$, $G_{R'}$,
$\gamma . f = 0$ » $G_Q$, $G_{Q'}$, $G_{R'}$,
$A = 0$ » $G_Q$, $G_R$.

Por consiguiente, para que $\beta . A$ sea nulo, para todos los puntos raíces comunes de $\alpha . B$ y $\gamma . f$, debe $\beta = 0$ contener necesariamente los grupos $G_{Q'}$ y $G_{R'}$, lo que debía demostrarse.

En el caso de entrar los parámetros linealmente, podemos decir que:

*El número de las curvas linealmente independientes entre sí, de un sistema lineal de curvas adjuntas, es igual al número correspondiente relativo á todo sistema equivalente.*

Indicaremos además las siguientes proposiciones cuyo estudio detallado puede hacerse en las *Leçons de Géométrie* de Clebsch:

*Entre los números* q, Q *de un sistema* $g_Q^{(q)}$ *determinado por las intersecciones de las curvas de orden* m *sobre una curva del género* p, *existe la relación:*

Para $m > n-3 \ldots\ldots\ldots q \geqslant Q-p,$

» $m = n-2-r \ldots\ldots q \geqslant Q-p+1+\frac{1}{2}(r+2)(r-1),$

*Entre los* 2p — 2 *puntos de intersección de una curva adjunta de orden* n — 3, *si* p > 1, p — 1 *á lo más están determinados por los* p — 1 *restantes, y entre los mismos* q, Q *de un sistema cortado por curvas de esta naturaleza, existe la relación* $q \geqslant Q-p+1$, y recíprocamente.

*Todo sistema lineal* q *veces infinito de* $g_Q^q$ *de grupos que comprenden cada uno* Q *puntos, puede ser cortado siempre sobre la curva fundamental* f *por un sistema de curvas adjuntas de orden* n — 3, *con tal que sea*

$$q \geqslant Q-p+1,$$

*condición que excluye el ser* Q > 2p — 2.

En particular: *Si un haz* (q = 1) *de curvas adjuntas tiene* p *intersecciones móviles con la curva* f, *todo grupo de tales puntos* p *está situado en una curva adjunta de orden* n — 3.

Un grupo de Q puntos por los que pasa por lo menos una curva adjunta de orden $n-3$ se llama *grupo especial*. El sistema á que pertenece se llama *especial*.

El sistema $g_{2p-2}^{p-1}$ se llama *canónico*. *Este no tiene puntos fijos y es único*.

**127.** EXTENSIÓN DEL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA. — *El principio de correspondencia generalizado* fué expuesto por

Cayley y demostrado por Brill. En lo concerniente á las curvas de género cero, no difiere esencialmente del de Chasles. Se agrega al número dado anteriormente un número dependiente del género de la curva $C_n$. Sea

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

la ecuación de la curva considerada $C_n$, que supondremos de orden $n$ y género $p$, y admitamos, por de pronto, que no tengan ningún punto doble ni de retroceso. Sea ahora una ecuación

$$\varphi\begin{pmatrix} r, & s \\ x, & y \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

en virtud de la que á cada punto $x$ del plano corresponde una de curva de orden $s$, á cada punto $y$ otra orden $r$. En la curva $f$ tenemos entonces, cuando se verifica simultáneamente que

$$f(x) = 0 \quad \text{y} \quad f(y) = 0,$$

una *correspondencia,* en virtud de la que, á cada punto $y$ de la curva corresponden $a = rn$ puntos $x$, y á cada punto $x$ de la misma curva, $b = sn$ puntos $y$. Debe pues suponerse desde luego que *todas las curvas móviles correspondientes á* y *ó á* x *no tienen los mismos puntos fijos comunes,* y que por consiguiente, los puntos $a$ ó $b$ son todos móviles con $y$ ó $x$. Ahora, la curva de orden $r + s$

$$\varphi\begin{pmatrix} r & s \\ x, & x \end{pmatrix} = 0$$

representa el lugar de un punto tal, que la curva que le corresponde pasa por este mismo punto. Determina pues, en $f$,

$$(r + s)\, n = a + b$$

puntos, para los que uno de los puntos $x$ que corresponden á $y$ coincide con $y$, ó recíprocamente. Llamaremos á éstos $a + b$ puntos los *puntos de coincidencia de la correspondencia* $\varphi$, expresándose por medio de $(a, b)$ la correspondencia relativamente á $\varphi$.

Las consideraciones expuestas dejan de ser exactas cuando la ecuación (3), á consecuencia de $f(x) = 0$ y $f(y) = 0$, queda satisfecha para *todo* punto $x$ ó $y$ de $f$, es decir, si entre los

puntos de intersección de las curvas correspondientes á $x$, uno ó varios, $\gamma$ por ejemplo, coinciden con el mismo $x$, y si entre los puntos de intersección de las curvas, correspondientes á $y$, $\delta$ puntos se hallan en $y$. Entonces debe ocurrir que $\gamma = \delta$.

Estas consideraciones conducen á obtener *cuántas veces en la correspondencia* $(a - \gamma, b - \gamma)_\gamma$ *un punto* y *coincide con uno de los puntos correspondientes* x.

Considerando para $\gamma = 0$ dos correspondencias $(a, b)$ y $(a', b')$

$$\varphi\begin{pmatrix} r & s \\ x, & y \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \varphi'\begin{pmatrix} r' & s' \\ x, & y \end{pmatrix} = 0,$$

hallar el número de pares de puntos $x$, $y$ situados en $f$, que satisfagan simultáneamente á las dos correspondencias.

Basta con las nociones expuestas, para dar á conocer los conceptos fundamentales de la Geometría sobre una curva algebráica, pudiéndose acudir para más detalles y para el estudio de sus numerosas aplicaciones, á la obra varias veces citada de Clebsch. Entre éstas citaremos únicamente el enlace de esta rama geométrica con la teoría de las integrales abelianas, expuesta en el tomo III de dicha obra: *Leçons sur la Géométrie*.

## § 6.º Nociones de Geometría numerativa

**128.** Definiciones.—El problema que se propone la Geometría puede enunciarse como sigue:

*Determinar entre los* $\infty^r$ *objetos cuya definición se da, el número de los que satisfacen á un número de condiciones equivalentes á* r *condiciones simples.*

Puede considerarse á Chasles como el primer investigador en este orden de ideas; sus varias memorias, así como otras debidas á Jonquières comienzan el primer período de existencia de esta nueva rama geométrica que hoy ha llegado á un estado de gran desarrollo, cuya síntesis se encuentra hecha por el Dr. Hermann Schubert en su *Kalkül der abzählenden Geometrie* (*).

(*) El profesor G. Loria hace un resumen de los descubrimientos de la Geometría numerativa en su obra *Il passato ed il presente delle principali Teorie geometriche.*

No siendo objeto principal de la presente obra el tratar de esta teoría geométrica, nos limitaremos á exponer un resumen de la teoría de las características que Clebsch utiliza, con la elegancia de exposición propia de este notable matemático, en la teoría de las curvas.

**129.** MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS.--Este método se halla incluído en la rama geométrica hoy de gran extensión llamada *Geometría numerativa*, cuyo objeto ya se ha indicado.

Un sistema de curvas en número simplemente infinito puede representarse como sigue: Los coeficientes de la curva móvil del conjunto ($f = 0$) son funciones algebráicas, no necesariamente racionales, de un parámetro $\lambda$. Si esta dependencia es irracional, se pueden siempre expresar los coeficientes *racionalmente* por medio de *dos* parámetros, entre los cuales existe una ecuación algebráica, ó si introducimos un factor de homogeneidad, como funciones homogéneas enteras de $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, ligadas por una ecuación homogénea. Respecto al sistema de curvas, existen dos números de importancia especial, llamados características del sistema, á saber:

$\mu$, el número de las curvas del sistema que pasan por un punto fijo cualquiera.

$\nu$, el número de curvas del sistema que son tangentes á una recta fija dada.

El número $\mu$, cuando los coeficientes de la curva móvil son funciones racionales de un parámetro, se confunde con la dimensión según la que entra este último en la ecuación puntual $f = 0$ del sistema. El número $\nu$ dará entonces, en general, la dimensión según la que entra este parámetro en la ecuación $\varphi = 0$ del sistema en coordenadas-líneas; luego en las curvas de orden $n$ será igual á $2\mu\,(n-1)$, porque $\varphi$ es del grado $2\,(n-1)$ con relación á los coeficientes de $f$.

Pero ocurren algunas eventualidades, tal es, por ejemplo la de descomponerse una curva de orden $n$ en otra de orden $n-2$ y una recta doble. Entonces las curvas de esta especie, que satisfacen á la ecuación $\varphi = 0$, quedan comprendidas en el número $2\mu\,(n-1)$, mientras que en $\nu$ sólo queremos incluir las curvas que tienen un *contacto propiamente dicho*.

Estas eventualidades hacen necesario el tener siempre simultáneamente á la vista las ecuaciones $f = 0$, $\varphi = 0$. Las *curvas*

*singulares,* con ramas que se cuentan varias veces, aparecen en las investigaciones geométricas, cuando se hacen degenerar sucesivamente una curva general.

Por ejemplo, rectas que se cuentan eventualmente varias veces, pueden separarse de una curva, mientras que en la concepción lineal pueden pasar desapercibidas, las cuales se llaman *ramas rectas.*

Estas descomposiciones manifiestan que, para la determinación de los números $\mu$ y $\nu$ de un sistema, es necesario ante todo conocer completamente las curvas singulares del mismo; y en la determinación de éstas y especialmente en la del orden de multiplicidad de las ramas rectas y de los vértices, se encuentra la principal dificultad del problema.

Explicaremos estas circunstancias con respecto á los *sistemas de cónicas.* En tales sistemas son posibles las curvas siguientes:

1.º En la concepción puntual:

El *par de rectas,* cuyo punto doble es entonces un vértice. La *recta doble,* que es una rama recta y en la que se hallan separados los vértices.

2.º En la concepción lineal:

El *par de puntos,* cuya recta de unión es una rama recta. El *punto doble,* que es un vértice por el que pasan dos ramas rectas separadas.

3.º En los dos puntos de vista, simultáneamente:

La *recta* con un solo punto en ésta.

Determinaremos desde luego el número $\lambda$ de rectas y $\pi$ de puntos dobles.

Por todo punto de una recta cualquiera pasan $\mu$ curvas del sistema, de las que cada una corta todavía á la recta en un punto $y$. Igualmente, á todo punto $y$ corresponden $\mu$ puntos $x$ en la recta; tenemos por tanto $2\mu$ coincidencias. Estas se producen, bien por el contacto de la recta con una cónica propiamente dicha, bien por la intersección de una recta doble; pero hay $\nu$ cónicas propiamente dichas, tangentes á una recta cualquiera, y tenemos por consiguiente

$$\lambda = 2\mu - \nu, \quad \pi = 2\nu - \mu. \tag{1}$$

Por medio de estas ecuaciones se puede determinar las ca-

racterísticas $\mu$, $\nu$ de un sistema por los números $\lambda$, $\pi$, cuando se conocen éstos. Los números en cuestión se obtendrán por los sistemas dados que se llaman *condiciones elementales*, es decir, si se pide que las cónicas pasen por cuatro puntos dados, ó pasen por tres y sean tangentes á una recta, etc., que designaremos por los símbolos

$$\left(\begin{smallmatrix}****\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}**\end{smallmatrix}{}^{*}_{*}\,|\right),\ \left(\begin{smallmatrix}**\end{smallmatrix}\,||\right),\ \left(\begin{smallmatrix}*\\\end{smallmatrix}\,|||\right),\ (||||)$$

Los valores de $\mu$, $\nu$, $\lambda$, $\pi$ están reunidos en el siguiente cuadro:

| | $\mu$ | $\nu$ | $\lambda$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|
| $\begin{smallmatrix}* & *\\ * & *\end{smallmatrix}$ | 1 | 2 | 0 | 3 |
| $\begin{smallmatrix}**\end{smallmatrix}{}^{*}_{*}\,\vert$ | 2 | 4 | 0 | 6 |
| $\begin{smallmatrix}**\end{smallmatrix}\,\vert\vert$ | 4 | 4 | 4 | 4 |
| $\begin{smallmatrix}*\\\end{smallmatrix}\,\vert\vert\vert$ | 4 | 2 | 6 | 0 |
| $\vert\vert\vert\vert$ | 2 | 1 | 3 | 0 |

Sin entrar en detalles, nos limitaremos á considerar el caso $\left(\begin{smallmatrix}**\end{smallmatrix}{}^{*}_{*}\,|\right)$. Tenemos tres puntos fijos A, B, C y la tangente fija $u$. La hipérbola $\varphi$ se aproxima á uno de los pares de vértice D.

Vamos á ver cómo en un sistema lineal de curvas, una cónica degenera insensiblemente en un par de rectas ó en un par de puntos.

En un haz debemos considerar un par de rectas como proviniendo de que, en uno de los espacios angulares del par de que se trata, las ramas de una hipérbola se aproximan cada vez más á la forma de un sistema de dos rectas, para en seguida, continuando el movimiento, y después de haber llegado á esta posición límite, alejarse de nuevo en el otro espacio angular.

El par de rectas no se recorre más que una vez en esta cir-

cunstancia. Lo mismo sucede para el par de puntos en un sistema de cónicas con cuatro tangentes comunes, por ejemplo, un sistema confocal. Una elipse se estrecha cada vez más alrededor de los puntos del par, hasta que al fin se cubre dos veces en la parte interior de su línea de unión. Entonces, como figura-línea, está representada por dos puntos (vértices).

Si pasamos á la curva inmediatamente próxima, será una hipérbola estrechamente aplicada en las dos partes de la recta que, á partir de los dos puntos tienden hacia el infinito y recubren así doblemente esta parte. En el tránsito sucesivo á otras curvas, las ramas de las hipérbolas forman un ángulo cada vez mayor con la recta doble de que se acaba de tratar. El par de puntos debe evidentemente contarse una sola vez; forma un simple tránsito de las curvas del sistema.

No sucede lo mismo si se trata del sistema $(_{*}{}^{*}{}_{*}|)$, representado abreviadamente en la figura 120. Aquí A, B, C son tres puntos fijos y $u$ la tangente fija. La hipérbola $\varphi$, una de cuyas ramas es tangente á la recta $u$, se aproxima á uno de los pares citados (cuyo vértice es D), mientras que la otra rama llega á estar infinitamente próxima del otro lado.

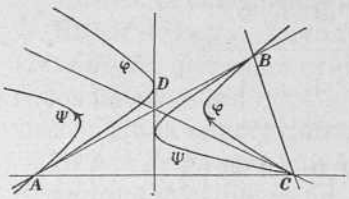


Fig. 120

Cuando ha alcanzado al par de rectas, no pasa la hipérbola con sus ramas á los espacios angulares próximos, sino que vuelve atrás, adquiriendo en la figura la posición de la curva $\psi$, y aparece en el sistema como un punto de retroceso de una curva algebráica, siendo visible que debe contarse dos veces como curva del sistema.

Para la representación dualística del sistema $(_{**}||)$, tomemos el punto de intersección de las dos rectas como vértice $u_1 = 0$ del triángulo de las coordenadas y la recta de unión de los dos puntos como lado $x_1 = 0$. Determinemos los demás elementos del triángulo, de modo que los dos puntos dados sean conjugados armónicos de los $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, y al mismo tiempo las rectas dadas sean armónicas con los $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. La ecuación de la cónica es entonces de la forma

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0,$$

siendo $a_{22} : a_{33} = c$ una constante. Igualmente debe ser constante en la ecuación en coordenadas-líneas, la cantidad

$$\frac{a_{11}a_{12} - a^2_{12}}{a_{11}a_{33} - a^2_{13}} = c'$$

y faltar el término $u_2u_3$, lo que da la ecuación

$$a_{12}a_{13} = 0,$$

y tenemos el teorema: *El sistema de cónicas con dos puntos fijos y dos tangentes fijas es reducible, es decir, se descompone en dos sistemas separados.*

Haciendo $a_{12} = 0$ y

$$\lambda = a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22} = ca_{33}, \quad \lambda_3 = a_{13},$$

la ecuación de uno de los sistemas se reduce á

$$\lambda_1 x_1^2 + \frac{1}{c}\lambda_2(cx_2^2 + x_3^2) + 2\lambda_3 x_1 x_3 = 0,$$

con la condición

$$\lambda_1\lambda_2(c - c') + cc'\lambda_3^2 = 0.$$

Luego por todo punto pasan dos cónicas. Lo mismo sucede en el sistema $a_{13} = 0$. Por consiguiente, en este caso $\mu = 4$, y en virtud del principio de dualidad, también $\nu = 4$. Luego, en virtud de (1), $\lambda = \pi = 4$. En efecto, para cónicas desvanecentes, el discriminante

$$\lambda_1\lambda_2^2 - c\lambda_3^2\lambda_2 = 0,$$

es necesariamente nulo, y se tiene

$$\text{ó bien} \quad \lambda_2 = 0 \quad \text{ó bien} \quad \lambda_1\lambda_2 - c\lambda_3^2 = 0.$$

En el primer caso, por la ecuación de condición (6), se tiene también $\lambda_3 = 0$. En el segundo, (6) se transforma en $\lambda_1\lambda_2 = 0$, de manera que se tiene, bien $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$, lo que constituye el caso precedente, ó bien $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_3 = 0$. Estas últimas condiciones dan el par de rectas $cx_2^2 + x_3^2 = 0$, que está formado por las rectas que unen los dos puntos fijos á la intersección de las

dos tangentes fijas. Las ecuaciones $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, por el contrario, conducen á la *recta doble* $x_1^2 = 0$, que es la recta de unión de los dos puntos fijos. Esta se cuenta dos veces en cada uno de los dos sistemas, y por consiguiente, cuatro en todo; porque para $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$, no sólo se anula el discriminante $\lambda_1 \lambda_2^2 - c\lambda_3^2 \lambda_2$, sino que también sus derivadas parciales con relación á $\lambda_1$, $\lambda_2$ y $\lambda_3$ son individualmente nulas. Existe además un vértice que se cuenta cuatro veces (de donde $\pi = 4$), á saber, la intersección de las dos rectas dadas.

Podemos formarnos una idea de la multiplicidad de las curvas singulares por consideraciones geométricas semejantes á las hechas con ocasión del sistema $(_*{}^*{}_*|)$. En las fig. 121, dos cónicas pertenecientes á cada uno de los sistemas, en los que se descompone el $(_{**}\|)$, se han representado un poco antes y un poco después de las posición límite indicada por la recta doble AB. Los dos sistemas se distinguen, como se ve, en que en una de las curvas se cortan siempre en cuatro puntos reales, mientras que en el otro no ocurre siempre así. La circunstancia de que la elipse aplanada infinitamente no se extiende como se verificó arriba, de modo que se transforme en una hipérbola, sino que se transforma en elipse infinitamente próxima, sin que las ramas infinitas de la línea doble queden recubiertas por una hipérbola infinitamente aplanada, indica ahora que la recta doble debe contarse dos veces. Se presenta precisamente como un punto de retroceso de una curva algebráica. De una manera completamente análoga se efectúa bajo el punto de vista de la dualidad que existe, en los dos sistemas, la aproximación sucesiva hacia el punto de intersección C de las dos

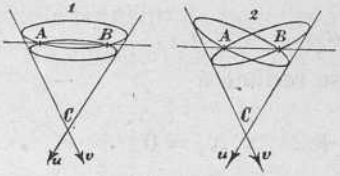


Fig. 121

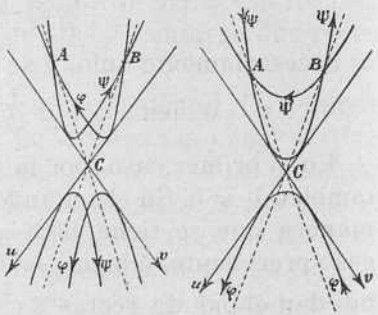


Fig. 122

rectas dadas $u$ y $v$, lo que se hace visible en la figura 122. Las tangentes de las hipérbolas en los puntos A y B se aproximan siempre cada vez más á las rectas AC y BC, correlativamente á la circunstancia de que en la figura anterior, los puntos de contacto de las elipses tienden cada vez más hacia los puntos de intersección de la recta doble con $u$ y con $v$.

---

# APENDICE

## ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS CURVAS DE TERCER ORDEN

La ecuación general de una curva de tercer orden contiene homogéneamente dieciseis coeficientes; por consiguiente, dados arbitrariamente nueve puntos en un plano, queda, en general, determinada una cúbica que pase por ellos.

Todas las cúbicas que pasan por ocho puntos del plano, pasan también por un noveno punto, determinado por los primeros.

La cúbica es en general de 6.ª clase y de género 1; tiene nueve puntos de inflexión.

Si la cúbica tiene un punto doble, su género es cero y su clase es la 4.ª Tiene tres puntos de inflexión en línea recta.

Si la cúbica tiene un punto de retroceso, su género es cero, su clase 3.ª y el número de sus inflexiones 1, su ecuación depende de siete constantes.

La recta que une dos de los puntos de inflexión pasa por un tercero.

Los nueve puntos de inflexión se hallan situados tres á tres en 12 rectas, y por cada punto de inflexión pasan cuatro de dichas rectas.

De los nueve puntos de inflexión á lo más tres son reales.

Por los nueve puntos de inflexión de una cúbica pasan infinitas cúbicas con los mismos puntos de inflexión. El haz de estas curvas se llama *sizigético*.

*Si una cónica pasa por cuatro puntos fijos de una curva de*

*tercer grado, la recta que une los otros dos puntos de intersección, para por un punto fijo, situado en la curva,* pues hallando la intersección de las dos curvas

$$\alpha\beta - k\alpha'\beta' = 0 \quad \text{y} \quad \alpha\beta\gamma - k'\alpha'\beta'\gamma' = 0,$$

obtendremos que la ecuación $k'\gamma - k'\gamma' = 0$ es la de la recta que une los dos puntos 5.° y 6.° de intersección; y esta ecuación queda satisfecha por las coordenadas de un punto fijo (intersección con la recta que pasa por los puntos 5.° y 6.°) situado en la curva.

*Si en los puntos en que una recta cualquiera corta á una curva de tercer grado se trazan tangentes, los tres puntos de intersección de estas tangentes con la curva, se hallan en línea recta,* y recíprocamente:

*Si desde tres puntos de la curva situados en línea recta, se trazan tangentes á la curva, los puntos de contacto de estas tangentes se hallan situados tres á tres en línea recta.*

En efecto, la ecuación $\alpha\beta\gamma - k\alpha'^2\gamma' = 0$ tiene once constantes; una de las cinco rectas es arbitraria. Las tres rectas $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ son tangentes y sus puntos de contacto están en $\alpha' = 0$.

*El lugar del conjugado armónico de un punto* p' *de la curva es la polar cónica de ésta,* pues siendo la polar cónica el lugar de los puntos dados por

$$\sum \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3}\right) + \ldots = 0$$

$$\frac{\dfrac{1}{\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_3}}}{} + \frac{1}{\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_2}} + \frac{1}{\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r_1}} = 0$$

$$\frac{r r_3}{r_3 - r} + \frac{r r_2}{r_2 - r} + \frac{r r_1}{r_1 - r} = 0$$

obtendremos $\dfrac{r_1 - r}{r_1} - \dfrac{r_2 - r}{r_2} = 0$ ó $\dfrac{2}{r} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$.

Si $p$ es punto de inflexión, la polar cónica se reduce á dos rectas, una de ellas tangente á la curva. El lugar es la segunda recta. Así: *El lugar de un punto conjugado armónico de un punto de inflexión es una recta,* pues siendo la ecuación de la polar cónica

$$(x_0 D_x + y_0 D_y + z_0 D_z) f(x, y, z) = 0$$

ó

$$(\alpha_0 D_\alpha + \beta_0 D_\beta + \gamma_0 D_\gamma) f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

escribiéndola bajo la forma $\alpha\beta\gamma - k\delta^3 = 0$, la ecuación de la polar cónica será

$$\alpha_0 \beta\gamma + \beta_0 \gamma\alpha + \gamma_0 \alpha\beta - 3k\delta_0 \delta = 0;$$

y cuando el polo coincide con un punto de inflexión ($\alpha_0 = 0$, $\delta_0 = 0$), esta ecuación se reduce á $\alpha(\beta_0 \gamma + \gamma_0 \beta) = 0$, que representa dos rectas.

La consideración de la polar armónica conduce á los siguientes

TEOREMAS: 1.° *Las rectas que unen los extremos de dos rayos trazados por el polo, se cortan en la polar.*

2.° *Las tangentes trazadas por los extremos de un rayo que pasa por el polo se cortan en la polar.*

3.° *La polar armónica pasa por los puntos de contacto de las tres tangentes trazadas por un punto de inflexión.*

FIN DEL TOMO TERCERO

# ÍNDICE DEL TOMO TERCERO

PÁGINA

INTRODUCCIÓN

LO IMAGINARIO Y LO INFINITO EN GEOMETRÍA

CAPÍTULO I.—*Geometría ordinaria ó euclídea* ..... III

CAPÍTULO II.—*Pangeometría*

§ 1.º Exposición basada en la Geometría de Cayley ..... XXII
§ 2.º Extensión de la determinación métrica al espacio. .. XXX
§ 3.º Geometría de *n* dimensiones ..... XXXVI

LIBRO PRIMERO

GEOMETRÍA DIFERENCIAL PLANA

CAPÍTULO I.—*Cuestiones que dependen de infinitamente pequeños de primer orden*

§ 1.º Tangentes y normales..... 43
§ 2.º Transformaciones por radios vectores recíprocos .... 51
§ 3.º Envolventes..... 52
§ 4.º Coordenadas tangenciales..... 57
§ 5.º Aplicaciones..... 60

CAPÍTULO II - *Cuestiones que dependen de un orden infinitesimal superior al primero*

§ 1.º Longitud de un arco de curva ..... 64
§ 2.º Diferencial de una área de curva plana..... 68
§ 3.º Contactos de diversos órdenes, curvas osculatrices .. 70
§ 4.º Curvatura de las curvas planas..... 82
§ 5.º Evolutas y evolventes..... 88
§ 6.º Problemas..... 95

PÁGINA

CAPÍTULO II.—*Estudio cinemático de algunas curvas planas*

§ 1.° Nociones cinemáticas ..... 101
§ 2.° Cicloide ..... 104
§ 3.° Epicicloides ..... 109

LIBRO SEGUNDO

SINGULARIDADES DE LAS CURVAS PLANAS

CAPÍTULO I.—*Aplicaciones del Álgebra de las formas*

§ 1.° Formas homogénea, invariantes, covariantes, etc..... 119
§ 2.° Aplicaciones á las formas proyectivas y á las afinidades lineales ..... 124
§ 3.° Teoría de las polares ..... 132

CAPÍTULO II.—*Estudio particular de las curvas planas*

§ 1.° Asíntotas ..... 139
§ 2.° Aplicaciones ..... 151
§ 3.° Estudio de una curva en la proximidad de uno de los puntos ..... 153
§ 4.° Discusión de los puntos singulares ..... 161
§ 5.° Diferentes especies de puntos singulares ..... 179
§ 6.° Estudio de las ramas infinitas ..... 186
§ 7.° Reversión de las series ..... 200
§ 8.° Aplicaciones á la construcción de curvas y determinación de puntos singulares ..... 213

LIBRO TERCERO

ESTUDIO SISTEMÁTICO DE LAS FIGURAS PLANAS

CAPÍTULO I.—*Propiedades numerativas de las curvas*

§ 1.° Número de condiciones de las curvas ..... 221
§ 2.° Número impuesto por la existencia de un punto singular ..... 224
§ 3.° Influencia de la Hessiana ..... 233
§ 4.° Intersección de dos curvas ..... 238
§ 5.° La dualidad en las singularidades ..... 244
§ 6.° Fórmulas de Plücker ..... 246
§ 7.° Género de una curva ..... 252

PÁGINA

CAPÍTULO II.—*Transformaciones planas*

§ 1.° Transformaciones cuadráticas ..... 258
§ 2.° Transformaciones isogonales ..... 263
§ 3.° Aplicaciones ..... 265

CAPÍTULO III.—*Estudio sistemático de las figuras planas*

§ 1.° La polaridad y la invariación ..... 275
§ 2.° Algunas curvas covariantes ..... 280
§ 3.° Sistemas de curvas ..... 284
§ 4.° Nociones sobre los conexos ..... 286
§ 5.° Geometría sobre una curva plana ..... 299
§ 6.° Nociones de Geometría numerativa ..... 308

# ERRATAS DEL TOMO TERCERO

| Página | Linea | Dice | Debe decir |
|---|---|---|---|
| XXIV | 8 | $\lambda$, | $\gamma_1$ |
| 44 | 5 | $y$ | Y |
| 45 | 3 y 4 | suprímase | cuaciones . . . las |
| 47 | 11 | tangente MT | normal MN |
| 47 | 12 | normal MN | tangente MT |
| 60 | 13 | $\frac{x}{1}$ | $\frac{1}{x}$ |
| 61 | 4 | Y = | Y − |
| 66 | 9 | tiene MM′ I | tiene |
| 67 | 23 | L′ | P |
| 68 | 18 | 2.ª | 9.ª |
| 69 | 8 | L | A |
| 69 | 14 | M | M′ |
| 92 | 2 | tendremos $\frac{dy}{dx}$ | tendremos |
| 92 | 3 | $y^2$ | $y^3$ |

BIBLIOTECA PROVINCIAL SORIA

Rº nº 17. B.º 1806

NUEVA ENCICLOPEDIA MATEMÁTICA.--T. V

# Tratado de Análisis Matemático

TOMO SEGUNDO

## PRINCIPIOS GENERALES

DE LA

# TEORÍA DE LAS FUNCIONES

POR EL

**Dr. Zoel G. de Galdeano**

Catedrático de Cálculo infinitesimal
en la Universidad de Zaragoza, corresponsal de las RR. Academias de Ciencias
de Madrid y de Lisboa y miembro de otras asociaciones matemáticas.

BIBLIOTECA
INSTITUTO PROVINCIAL
SORIA

BIBLIOTECA PÚBLICA SORIA

ZARAGOZA

Tipografía de Emilio Casañal, Coso, 100

1904

# LIBRO PRIMERO

# INTRODUCCIÓN Á LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES

## CAPÍTULO I

### Nociones acerca de los números irracionales y de los límites

1. Definiciones. No existe ningún número racional, como sabemos, que satisfaga á la ecuación $x^2 - 5 = 0$. La condición de ésta permite separar todos los números racionales positivos en dos clases: la primera que contenga todos los números cuyo cuadrado es menor que 5, y la segunda aquéllos cuyo cuadrado es mayor que 5. Todo número de la primera clase es menor que un número cualquiera de la segunda. Todo número de la segunda clase es mayor un número cualquiera de la primera, pues de dos números positivos es mayor el que tiene mayor cuadrado. Además en la primera clase no existe ningún número mayor que todos los demás de la misma clase, así como en la segunda no existe ningún número menor que los demás de la misma.

En efecto, si en la primera clase existe un número $a$ mayor que los demás números de la misma, por pertenecer $a$ á la primera clase, $a^2$ será menor que 5; y por ser $a$ el número mayor de la primera clase, todo número racional $a + h$, mayor que $a$ pertenecerá á la segunda; luego suponiendo que sea positivo el número racional $h$ será

$$(a + h)^2 > 5;$$

pero la diferencia

$$(a + h)^2 - a^2 = h(2a + h)$$

puede suponerse menor que un número racional positivo cualquiera $\varepsilon$. Basta para esto hacer que

$$0 < h < \frac{\varepsilon}{2a + 1}, \qquad h < 1;$$

En particular, podemos elegir $h$ de manera que dicha diferencia sea menor que el número positivo $5 - a^2$. Pero entonces de

$$(a + h)^2 - a^2 < 5 - a^2 \quad \text{resulta} \quad (a + h)^2 < 5.$$

lo que es contrario á que el número $a + h$ sea de la segunda clase.

Siempre que se haya podido dividir la totalidad de los números reales positivos y negativos en dos clases tales, que todo número de la primera clase sea menor que todo número de la segunda, y que no haya en la primera clase un número mayor ni en la segunda un número menor que los demás números de la misma clase, habremos definido un número irracional. La primera clase será inferior relativamente á un número irracional y la segunda superior.

Se dirá que un número irracional A es mayor que todo número racional de la clase inferior relativa á él. Todo número de esta clase se dirá ser menor que A; y análogamente se dirá respecto á la clase superior.

Para definir un número irracional, bastará tener un medio de descomponer en dos clases, análogas á las arriba descritas, todos los números racionales comprendidos entre dos números racionales $a$ y $b$. Se completará la clase inferior, haciendo entrar en ella todos los números racionales menores que el menor de los dos números $a$ y $b$, y análogamente respecto al mayor.

Se dice que dos números irracionales A y B son iguales,

cuando los dos modos de descomposición que los definen son idénticos, de manera que todo número racional perteneciente á una de las dos clases inferior ó superior, relativas á uno de los dos números A y B, pertenezca también á la clase del mismo nombre relativa al otro. Además la identidad de las clases inferiores lleva consigo la de las superiores, y recíprocamente. De esta definición resulta que, si dos números irracionales son iguales á un tercer número irracional, serán iguales entre sí.

Sean A y B dos números irracionales desiguales. Las dos clases inferiores relativas á estos dos números no son idénticas. Hay un número racional que figura en una de ellas, por ejemplo la inferior relativa á B, y que no figura en la otra, figurando en la clase superior relativa á A. Entonces se dice que A es menor que B ó que B es mayor que A, escribiéndose

$$A < B, \quad B > A.$$

Así, por definición, la desigualdad $A < B$ relativa á dos números irracionales A y B implica la existencia de un número racional $a$ tal, que se tenga $A < a$, $a < B$, y tal número existe, cualesquiera que sean los números A y B que verifiquen la desigualdad $A < B$.

Esto es evidente, si los dos números A y B son racionales; y en el caso de ser solo B racional, resulta de que, en la clase superior relativa á A, de la que forma parte el número racional B, hay números racionales menores que B. Análogamente razonaremos en el caso de ser A racional y B irracional. Inversamente, de la existencia de un número racional $a$ tal, que sea

$$A < a, \quad a < B, \quad \text{resulta} \quad A < B,$$

pues, siendo A, B, C tres números cualesquiera, racionales ó no, de las desigualdades $A < B$, $B < C$, resulta $A < C$.

Las desigualdades propuestas en efecto, implican la existencia de números racionales tales que se tenga

$$A < a, \ a < B, \ B < b, \ b < C.$$

Pero $a$ es menor que $b$, porque, si B es irracional, $a$ pertenece á la clase inferior y $b$ á la clase superior relativas á B.

Por último $a$ es también menor que C, porque si C es irracional, $b$ y por consiguiente $a$, que es menor que $b$, pertenece á la clase inferior relativa á C. Además de las desigualdades $A < a$, $a < C$, siendo $a$ racional resulta la $A < C$.

Si se consideran dos números desiguales cualesquiera A y $B > A$, hay una infinidad de números racionales tales que se tenga

$$A < a < B$$

En efecto, después de haber elegido uno de estos números, se ve que existe otro también racional $a'$ tal, que sea

$$A < a' < a \quad \text{y por consiguiente} \quad A < a' < a < B.$$

Todo número racional $a''$ comprendido entre $a$ y $a'$ satisface también á las desigualdades $A < a'' < B$, y todos ellos se dice que están comprendidos entre A y B.

Dados dos números racionales ó no, A y B; si se puede probar que se hallan comprendidos entre dos números racionales cuya diferencia sea menor que el número racional positivo $\varepsilon$, se puede afirmar que $A = B$, porque si se tuviese $A < B$, existirían dos números racionales $a$ y $b$ tales, que se tuviese

$$A < a < b < B,$$

y los números A y B no podrían hallarse entre dos números racionales $a_1$ y $b_1$ cuya diferencia fuese menor que $a - b$, porque de

$$a_1 < A < B < b_1, \quad \text{resultaría} \quad a_1 < A < a < b < B < b_1,$$
$$b_1 - a_1 > b - a.$$

Un número irracional se dice positivo, cuando es mayor que cero, y negativo en el caso contrario.

Dado un número irracional A se le puede adjuntar otro número irracional A′ tal que: un número racional $a$ pertenecerá á la clase inferior ó superior relativamente á A′ según que el nú-

mero racional — $\alpha$ pertenezca á la clase superior ó á la inferior relativa al A, y el número A se puede deducir del A′ como éste de aquél. Uno de los números es positivo y el otro negativo. Se llaman iguales y de signo contrario.

Si A se halla comprendido entre $n\alpha$ y $(n+1)\alpha$, y se supone que $\alpha$ es tan pequeño como se quiera, se ve que un número irracional puede estar comprendido entre dos números racionales cuya diferencia sea tan pequeña como se quiera.

Sean $n\alpha$ y $m\beta$ dos valores aproximados de A y sea $\alpha = p\beta$, siendo $p$ entero. Se tendrá

$$n\alpha < A < (n+1)\alpha \qquad m\beta < A < (m+1)\beta;$$

deduciremos de las primeras desigualdades que pueden escribirse así, $np\beta < A < (n+1)p\beta$, las siguientes:

$$np\beta < (m+1)\beta, \qquad m\beta < (n+1)p\beta,$$

$$\frac{m}{p} - 1 < n < \frac{m+1}{p};$$

y resultando de esto que $n$ es la parte entera de $\frac{m}{p}$, se concluye:

$$m \geq np, \qquad m\beta \geq n\alpha$$
$$m+1 \leq (n+1)p, \qquad (m+1)\beta \leq (n+1)\alpha.$$

Asi el valor aproximado por defecto en menos de $\beta$, es por lo menos igual al valor aproximado por defecto en menos de $\alpha$; y el valor aproximado por exceso en menos de $\beta$ es á lo más igual al valor aproximado por exceso en menos de $\alpha$. Si

$$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_p, \ldots\ldots$$

expresa una serie de valores aproximados de un número irracional A en menos de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\ldots\ldots$, $\frac{1}{10^p}$ por defecto, los números que se encuentran sucesivamente no van nunca de-

creciendo; además, si se supone

$$u_p = \frac{P}{10^p}, \quad u_{p+1} = \frac{P'}{10^{p+1}},$$

siendo P y P′ enteros, P será la parte entera del cociente de P′ por 10, de modo que si los números $u_p$ y $u_{p+1}$ están escritos en forma de fracciones decimales, la parte entera y las $p$ primeras cifras decimales de la fracción $u_{p+1}$ serán la fracción $u_p$.

Al contrario, no van jamás creciendo los números

$$u_1 + \frac{1}{10}, \quad u_2 + \frac{1}{100}, \ldots\ldots u_p + \frac{1}{10^p}, \ldots\ldots$$

Conviene observar que, siendo $a$ un número racional menor que A, los términos de la serie $u_1, \ldots\ldots, u_p, \ldots\ldots$ anteriormente definida, acaban por exceder á $a$.

Supongamos, en efecto, que $b$ sea un número racional mayor que $a$ é inferior también á A. Si $b$ es igual á una fracción $\frac{P}{10^p}$, $u_p$ será por lo menos igual á $b$, y la proposición queda demostrada.

Si no es así, podremos hallar una fracción decimal menor que $b$ que difiera de $b$ en menos que $b - a$ y que, por consiguiente, sea á la vez, superior á $a$ é inferior á A, hallándonos en el primer caso. Observaremos que cada término de la serie va seguido de términos mayores que él.

De esto resulta que un número irracional positivo A se halla completamente definido por la serie de los valores aproximados $u_1, \ldots\ldots, u_p, \ldots\ldots$ en menos de $\frac{1}{10}, \ldots\ldots \frac{1}{10^p}, \ldots\ldots$ puesto que un número racional positivo $a$ deberá hallarse en la clase inferior ó en la clase superior según que exista ó no exista en esta serie número igual ó superior á $a$.

**2.** SUMAS DE NÚMEROS IRRACIONALES. Supongamos dos números cualesquiera A, B racionales ó no. Sean $a$, $a'$, $b$, $b'$ núme-

ros racionales que satisfagan á las desigualdades

$$a < A < a', \quad b < B < b' \quad (1), \quad \text{se tendrá} \quad a + b < a' + b'. \quad (2)$$

Sea ahora $r$ un número racional. Si no existen dos números racionales $a$ y $b$ que satisfagan á las condiciones (1), tales que $r = a + b$, sucederá que para números racionales $a$ y $b$ cualesquiera, se tendrá que $r > a + b$. (3)

En efecto, si para dos de dichos números $a$ y $b$ se tuviese

$$r < a + b \qquad \text{resultaría} \qquad r - a < b < B,$$

y la suma de los dos números racionales $a < A$ y $r - a < B$ sería igual á $r$.

De igual manera, dado el número racional $r$, si no existen dos números racionales $a'$ y $b'$ que satisfagan á las condiciones (1) y tales que se tenga $r = a' + b'$, se verifica la relación

$$r < a' + b', \quad (4)$$

para números $a'$ y $b'$ que satisfagan á dichas condiciones.

Observaremos, por fin, que solo puede existir un número R racional ó no, para el que se tenga, cualesquiera que sean los números $a$, $b$, $a'$, $b'$ que satisfagan á las condiciones

$$a + b < R < a' + b'.$$

En efecto, para cualquier número racional positivo $\varepsilon$, hay números racionales $a$, $b$, $a'$, $b'$ que satisfacen á las desigualdades (1) y á las siguientes:

$$a' - a < \frac{\varepsilon}{2}, \quad b' - b < \frac{\varepsilon}{2},$$

y por consecuencia á

$$(a' + b') - (a + b) < \varepsilon.$$

Pero dos números racionales ó no tales, que se hallen comprendidos entre números cuya diferencia es menor que $\varepsilon$, son iguales.

Esto sentado, pueden ocurrir dos casos: ó existe un número racional $r$ que satisface á las desigualdades (3) y (4), es decir,

mayor que la suma de dos números racionales cualesquiera, respectivamente menores que A y B y menor que la suma de dos números racionales cualesquiera mayores que A y B, ó no existe dicho número. El primer caso se presenta, especialmente, cuando los dos números A y B son racionales, y entonces el número $r$ es precisamente $A + B$. Pero puesto que un número racional $r$ que no fuera ni la suma de dos números racionales $a$ y $b$ respectivamente menores que A y B, ni la suma de dos números racionales $a'$ y $b'$ respectivamente mayores que A y B, satisfaría á la vez á las dos desigualdades

$$r > a + b, \qquad r < a' + b',$$

y esto para números cualesquiera racionales $a$, $b$, $a'$, $b'$ que satisfagan á las condiciones (1), se ve que si no existe el número $r$, será porque todo número racional, ó es la suma de dos números racionales $a$ y $b$ respectivamente menores que A y B, ó la suma de dos números racionales $a'$ y $b'$ respectivamente mayores que A y B. Si esto es así, coloquemos en una primera clase todos los números racionales que son la suma de dos números racionales respectivamente menores que A y B y en una segunda clase todos los números racionales que son la suma de dos números racionales respectivamente mayores que los números A y B. Cada número de la primera clase será menor que cada número de la segunda, en virtud de la desigualdad (2). En la primera no hay número mayor que todos los demás, porque de $a < A$, $b < B$ resultará que existen dos números $a_1$ y $b_1$ tales que

$$a < a_1 < A, \qquad b < b_1 < B,$$

y el número $a_1 + b_1 > a + b$ pertenece á la clase primera. Igualmente no existe en la segunda clase un número menor que todos los demás.

El número $A + B$ queda definido como mayor que la suma de dos números racionales cualquiera respectivamente menores que A y B y menor que la suma de dos números racionales cualesquiera respectivamente mayores que A y B.

3. Multiplicación. Sean A y B dos números positivos cualesquiera y $a$, $b$, $a'$, $b'$ números racionales positivos que verifiquen las desigualdades

$$a < A < a', \qquad b < B < b', \tag{1}$$

se tendrá:

$$ab < a'b'. \tag{2}$$

Si un número racional $r$ positivo es tal, que no existan dos números racionales positivos $a$ y $b$ que satisfagan á las desigualdades (1) y á la igualdad $r = ab$, será

$$r > ab \tag{3}$$

y si $r$ es tal que no existen dos números $a'$ y $b'$ que verifiquen las desigualdades (1) y la igualdad $r = a'b'$, será

$$r < a'b'; \tag{4}$$

entonces solo puede existir un número racional ó no $r$, que verifique simultáneamente las desigualdades (3) y (4), pues haciendo $a' - a = \varepsilon$ y $b' - b = \eta$, se tiene

$$a'b' - ab = a\eta + b\varepsilon + \varepsilon\eta < (a + b + 1)\delta,$$

suponiendo los números racionales $\varepsilon$ y $\eta$ menores que el número racional $\delta$, menor que la unidad. Si se representa por $\alpha$ un número racional positivo cualquiera, bastará hacer

$$\delta < \frac{\alpha}{a + b + 1} \quad \text{para que se tenga} \quad a'b' - ab < \alpha.$$

Si existe un número racional $r$ que verifique simultáneamente las desigualdades (3) y (4) para números cualesquiera $a$, $b$, $a'$, $b'$ que satisfacen á las condiciones (1), será el producto AB. Si no existe dicho número $r$, cada número racional positivo será ó el producto de dos números racionales positivos menores respectivamente que los números A y B ó el producto de dos números racionales positivos respectivamente mayores que A y B. De esta manera llegamos á descomponer la totalidad de los números racionales positivos en dos clases, de las que la primera comprende todos los números obtenidos multiplicando

dos números racionales positivos respectivamente menores que A y B y la segunda comprende todos los números obtenidos multiplicando dos números racionales positivos respectivamente mayores que A y B. Cada número de la primera clase es menor que cada número de la segunda; no existe en la primera ningún número mayor ni en la segunda menor que todos los demás. Este número irracional positivo así definido es el número AB.

4. Radicación. Si no existe ningún número racional que satisfaga á la ecuación $x^m = A$ (1), se podrán distribuir todos los números racionales positivos en dos clases que comprenderán, la primera todos los números racionales positivos cuya $m^{sima}$ potencia sea un número menor que A y la segunda aquéllos cuya $m^{sima}$ potencia sea mayor que A, y no habrá en la primera ningún número mayor ni en la segunda ninguno menor que todos los demás, pues si por ejemplo fuese $a$ el número mayor de la primera clase, se tendría para cualquier número positivo racional $h$ y $a' \geqq a + h$,

$$a^m < A < (a+h)^m < a^m + mha'^{m-1}.$$

Y si $a^m + \varepsilon$ expresase un número racional cualquiera comprendido entre $a^m$ y A, sería preciso que se tuviese

$$a^m + \varepsilon < a^m + mha'^{m-1}, \quad h > \frac{\varepsilon}{ma'^{m-1}},$$

contra la hipótesis de ser $h$ tan pequeño como se quiera. Igualmente se verá que no existe en la segunda clase un número inferior á todos los demás. Este modo de descomposición define un número irracional positivo, pues si X es dicho número, se tendrá $X^m = A$.

En efecto, si se representan por $a$ y $a + h$ dos números racionales positivos, entre los que se halla comprendido X y por $a'$ un número racional igual ó superior á $a + h$, los números $a^m$ y $(a+h)^m < a^m + mha'^{m-1}$ comprenderán entre sí á $X^m$ y A; pudiendo ser la diferencia entre los dos números racionales $a^m + mha'^{m-1}$ y $a^m$ menor que cualquier número racional positivo, será preciso que $X^m$ y A sean iguales. X es

pues el único número positivo cuya potencia $m^{sima}$ sea igual á A. Es la raíz $m^{sima}$ aritmética de A.

La noción de las operaciones aritméticas se extiende á los números irracionales mediante la noción de *conjunto* expuesta en el primer capítulo del *Cálculo diferencial*. Pero tambien se puede definir un número irracional por medio de una serie infinita de números racionales.

Esta exposición de M. Tannery en su *Introduction a la Théorie des fonctions d'une variable* se funda en el concepto de *seccion* debido á Dedekind (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Brunswick, 1872), que se expresa como sigue:

«1.° Llamo *seccion* del dominio R de los números racionales, una división de los números racionales en dos categorías tales, que cada número de la primera categoría sea algebráicamente menor que cada número de la segunda.

2.° Todo número racional determinado *a engendra* una sección determinada (ó dos secciones no esencialmente distintas); porque un número racional cualquiera quedará clasificado en la primera ó en la segunda categoría, según que sea menor ó mayor que *a* (mientras que *a* podrá quedar inscrito arbitrariamente en una de las dos categorías).

3.° Hay una infinidad de secciones que *no pueden* ser engendradas por números racionales del modo indicado; para toda sección de esta especie se crea y se introduce un número *irracional* especial correspondiente á la sección.

4.° Por medio de las secciones correspondientes á dos números $\alpha$ y $\beta$ reales cualesquiera *a*, se pueden definir las cuatro secciones correspondientes á las cuatro operaciones fundamentales.

5.° Los números irracionales así definidos forman, reunidos á los racionales un dominio R sin lagunas y continuo».

Se dice que una serie infinita de números racionales

$$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$$

está *dada;* cuando se da el medio de calcular un término cualquiera, conocido su lugar.

Se dice que una serie infinita de números racionales

$$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$$

tiene por límite un número racional U, cuando á cada número positivo racional $\varepsilon$ corresponde un número entero positivo $n$ tal, que el valor absoluto de $U - u_p$ sea menor que $\varepsilon$ para todos los valores de $p$ iguales ó superiores á $n$, de modo que $|U - u_p| < \varepsilon$.

Se dice que la serie infinita de números racionales $u_1, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$, es *convergente*, si á cada número racional positivo $\varepsilon$ se puede hacer corresponder un número entero positivo $n$ tal, que se tenga

$$|u_p - u_q| < \varepsilon$$

para todos los valores de los enteros $p$ y $q$ iguales ó superiores á $n$. Esta desigualdad manifiesta que se debe tener para todos los valores enteros de $p$ iguales ó superiores á $n$,

$$u_n - \varepsilon < u_p < u_n + \varepsilon.$$

Citaremos las siguientes proposiciones demostradas en la obra del Sr. Tannery:

Dada una serie convergente de números racionales que no tiene 0 por límite, todos sus términos acaban, después de cierto lugar $n$, por tener igual signo y mayor valor absoluto que cierto número racional positivo $\varepsilon$.

Sea $u_1, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots$ una serie convergente de números racionales; ó admite por límite un número racional U, y en este caso se dice que aquélla define el número U, ó no es así, y entonces define un modo de descomposición de la totalidad de los números racionales en dos clases, conforme se han definido ya éstas.

Así no existe en la primera clase un número mayor que los demás, porque si $a$ pertenece á la primera clase, los términos de la serie

$$u_1 - a, \quad u_2 - a, \quad \ldots\ldots, \quad u_n - a, \ldots\ldots$$

son después de cierto lugar todos positivos y mayores que cierto número racional $\varepsilon$. Si $b$ es un número comprendido entre $a$ y

$a + \varepsilon$, después del lugar $n$, los términos de la serie

$$u_1 - b, \quad u_2 - b, \quad \ldots\ldots, \quad u_n - b, \ldots\ldots$$

serán todos positivos y $b$ pertenecerá á la primera clase. Lo mismo se razonará para la segunda.

*Si se consideran varias series de números racionales*

$$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n; \quad v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n; \quad w_1, w_2, \ldots, w_n; \ldots\ldots,$$

*existe un número positivo* A *al que son inferiores todos los términos de éstas series en valor absoluto.*

Dado un número positivo racional $\varepsilon$, existe un número entero positivo $n$ tal, que bajo la condición de que los enteros $p$ y $q$ sean por lo menos iguales á $n$, se pueda afirmar que las cantidades $|u_p - u_q|$, $|v_p - v_q|$, $|w_p - w_q| \ldots\ldots$ sean menores que $\varepsilon$. El número $n$ puede, en efecto, determinarse por cada una de las series, y se tomará el mayor obtenido.

Si las tres series tienen á los números racionales U, V, W... por límites, á cada número positivo $\varepsilon$ corresponde un entero $n$ tal, que se tenga á la vez:

$$|u_p - U| < \varepsilon, \quad |v_p - V| < \varepsilon, \quad |w_p - W| < \varepsilon,$$

con tal que $p$ sea superior á $n$.

*Si las dos series infinitas de números racionales*

$$u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n, \ldots\ldots, \quad v_1, v_2, \ldots\ldots, v_n, \ldots\ldots$$

*son convergentes, también lo serán las series*

$$u_1 + v_1, \; u_2 + v_2, \ldots, \; u_n + v_n, \ldots; \quad u_1 v_1, \; u_2 v_2, \ldots, \; u_n v_n, \ldots$$

Las dos series tienen respectivamente por límites $U + V$ y $UV$.

Considerando dichas dos series, y observando que al no tener cero por límite la segunda serie, después de cierto lugar, no se encuentran términos nulos; para probar la convergencia de la serie

$$\frac{u_1}{v_1}, \; \frac{u_2}{v_2}, \ldots\ldots, \; \frac{u_n}{v_n}, \ldots\ldots,$$

observaremos que, no teniendo cero por límite la serie $v_1, v_2, \ldots$, á partir de cierto lugar todos sus términos serán, en valor abso-

luto, superiores á cierto número racional positivo $\omega$. Supongamos además que $\varepsilon$ sea un número racional positivo cualquiera; habrá un entero positivo $n$ tal que para $p \geq n$, se tenga

$$|v_p| > \omega, \quad |\alpha_p| < \varepsilon, \quad |\beta_p| < \varepsilon,$$

haciendo, para abreviar, $\alpha_p = u_p - u_n$, $\beta_p = v_p - v_n$, y tendremos

$$\frac{u_p}{v_p} - \frac{u_n}{v_n} = \frac{\alpha_p v_n - \beta_p u_n}{v_p v_n};$$

luego, designando por A un número racional positivo superior á los valores absolutos de las dos series propuestas, se tendrá

$$\left| \frac{u_p}{v_p} - \frac{u_n}{v_n} \right| < \frac{2A\varepsilon}{\omega^2},$$

A, $\omega$ son dos números fijos y $\varepsilon$ arbitrario. Se ve pues que, para un número racional positivo $\varepsilon'$ tan pequeño como se quiera, siendo $p \geq n$, será

$$\left| \frac{u_p}{v_p} - \frac{u_n}{v_n} \right| < \varepsilon'.$$

La serie $w_1, w_2, \ldots$ define pues un número W racional ó no tal, que se tenga $U = VW$.

Definidas ya las cuatro operaciones fundamentales de la Aritmética para los números irracionales, se puede pasar al caso más general de la función racional.

Considerando las series $(u)$, $(v)$, $(w)$, ..., en número finito y cuyos límites son U, V, W, ..., se podrá considerar la función $\frac{f(u, v, w \ldots)}{\varphi(u, v, w, \ldots)}$, en la cual el numerador y el denominador son polinomios enteros respecto á las variables $u, v, w, \ldots$. Si no se tiene $\varphi(U, V, W, \ldots) = 0$, la serie infinita, cuyo $n^{\text{simo}}$ término es

$$\frac{f(u_n, v_n, w_n, \ldots)}{\varphi(u_n, v_n, w_n, \ldots)} \quad \text{tiene por límite} \quad \frac{f(U, V, W, \ldots)}{\varphi(U, V, W, \ldots)}.$$

# CAPÍTULO II

## Principios de la teoría de las cantidades complejas con $n$ unidades principales

### § 1.º Definiciones, unidades principales y coordenadas

5. Definiciones. Todas las cantidades complejas que vamos á considerar, formarán un *Conjunto* C. Una cualquiera de aquéllas se llama un elemento.

Para establecer un cáculo de las cantidades complejas en armonía con las cantidades ordinariamente empleadas, fijaremos las siguientes condiciones:

1.ª Si $a$, $b$, $c$, ..... son elementos del conjunto C, su suma, su diferencia, su producto y su cociente, dos á dos son también elementos del conjunto.

2.ª Las propiedades *conmutativa*, *asociativa* y *distributiva* se aplican á los elementos de C, de manera que tenemos

$$a+b=b+a, \quad (a+b)+c=(a+c)+b, \quad (a-b)+b=a \qquad (1)$$

$$ab=ba, \quad (ab)c=(ac)b, \quad a(b+c)=ab+ac. \qquad (2)$$

Y agregaremos la igualdad

$$\frac{a}{b}\,b=a \qquad (3)$$

que sirve de definición al cociente de los dos elementos $a$ y $b$, de igual modo que la igualdad $(a-b)+b=a$ sirve de definición á su diferencia.

El conjunto C de cantidades complejas que consideramos es aquél en el cual tienen la forma

$$\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots\ldots + \xi_n e_n$$

Los números $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n$ *reales, comensurables ó no* se llaman *coordenadas* de la cantidad compleja. Los $n$ símbolos $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$ se llaman *unidades principales.*

**6.** CONDICIONES. La primera condición á que han de satisfacer las unidades principales es que *han de ser linealmente distintas*, es decir, que no ha de existir entre ellas ninguna relación de la forma

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots\ldots + \lambda_n e_n = 0 \qquad (4)$$

en la cual $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_n$ son números reales que no son á la vez nulos. Si existiera una relación lineal, el número de unidades principales sería inferior á $n$.

*Consecuencias.* 1.ª Si un elemento es nulo, sus $n$ coordenadas son nulas separadamente.

2.ª Si dos cantidades

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n, \quad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

son iguales, sus coordenadas de igual lugar son iguales dos á dos, es decir, que

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \ldots\ldots, \quad \alpha_n = \beta_n;$$

porque si $a = b$, la diferencia $a - b$ debe ser nula, las $n$ coordenadas de esta diferencia son pues, nulas; pero estas coordenadas son precisamente

$$\alpha_1 - \beta_1, \quad \alpha_2 - \beta_2, \quad \ldots\ldots \quad \alpha_n - \beta_n.$$

3.ª Sean $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$, $n$ elementos del conjunto C

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{1n} e_n, \\ a_2 &= \xi_{21} e_2 + \xi_{22} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{2n} e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= \xi_{n1} e_1 + \xi_{n2} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{nn} e_n, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Supongamos que no sea nulo el determinante

$$\Xi = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \ldots\ldots \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \ldots\ldots \xi_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} \ldots\ldots \xi_{nn} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Sean además $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$, $n$ números reales indeterminados, que *no son todos nulos;* la cantidad

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots\ldots + \lambda_n a_n$$

no podrá ser nula.

Se tiene que

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots\ldots + \lambda_n a_n = (\lambda_1 \xi_{11} + \lambda_2 \xi_{21} + \ldots\ldots + \lambda_u \xi_{n1})\, e_1$$
$$+ (\lambda_1 \xi_{12} + \lambda_2 \xi_{22} + \ldots \lambda_n \xi_{n2})\, e_2 + \ldots + (\lambda_1 \xi_{1n} + \lambda_2 \xi_{2n} + \ldots + \lambda_n \xi_{nn})\, e_n,$$

Esta cantidad es un elemento del conjunto C, y no puede ser nula más que en el caso de ser nulas las $n$ coordenadas, es decir. si se tiene

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 \xi_{11} + \lambda_2 \xi_{21} + \ldots\ldots + \lambda_n \xi_{n1} &= 0, \\ \lambda_1 \xi_{21} + \lambda_2 \xi_{22} + \ldots\ldots + \lambda_n \xi_{n2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \lambda_1 \xi_{n1} + \lambda_2 \xi_{n2} + \ldots\ldots + \lambda_n \xi_{nn} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Pero no siendo nulo $\Xi$, estas ecuaciones darán las únicas soluciones $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots\ldots = \lambda_n$, lo que es contra la hipótesis.

Respecto al producto $e_p e_q$ de dos unidades, se debe exigir que sea expresable por $n$ unidades, de manera que

$$e_p e_q = \varepsilon_{1pq} e_1 + \varepsilon_{2pq} e_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{npq} e_n \qquad (8)$$

Los números reales $\varepsilon_{rpq}$ *son los que definen el sistema de las unidades principales, y su elección es arbitraria en ciertos límites que aprenderemos á conocer.*

Los teoremas expresados por las igualdades (1) quedan satisfechos para toda elección de los números $\varepsilon_{rpq}$, no sucediendo

lo mismo á las igualdades (2). El teorema conmutativo exige que escribamos

$$e_p e_q = e_q e_p \quad \text{ó} \quad \varepsilon_{rpq} = \varepsilon_{rqp} \tag{9}$$

para

$$r = 1, 2, \ldots, n; \quad p = 1, 2, \ldots, n; \quad q = 1, 2, \ldots, n.$$

7. Según el teorema asociativo, debe tenerse

$$(e_p e_q) e_r = (e_p e_r) e_q \qquad (p, q, r = 1, 2, \ldots n) \tag{10}$$

ó, aplicando varias veces la fórmula (8),

$$(\varepsilon_{1pq} e_1 + \varepsilon_{2pq} e_2 + \ldots + \varepsilon_{npq} e_n) e_r = (\varepsilon_{1pr} e_1 + \ldots + \varepsilon_{npr} e_n) e_q$$

ó bien,

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{1pq}(\varepsilon_{11r} e_1 + \varepsilon_{21r} e_2 + \ldots + \varepsilon_{n1r} e_n) + \varepsilon_{2pq}(\varepsilon_{12r} e_1 + \ldots \\ &\qquad + \varepsilon_{n2r} e_n) + \ldots + \varepsilon_{npq}(\varepsilon_{1nr} e_1 + \ldots + \varepsilon_{nnr} e_n) \\ &= \varepsilon_{1pr}(\varepsilon_{11q} e_1 + \varepsilon_{21q} e_2 + \ldots + \varepsilon_{n1q} e_n) + \varepsilon_{2pr}(\varepsilon_{1nq} e_1 + \ldots \\ &\qquad + \varepsilon_{n2q} e_n) + \ldots + \varepsilon_{npr}(\varepsilon_{1nq} e_1 + \varepsilon_{2nq} e_2 + \ldots + \varepsilon_{nnq} e_n) \end{aligned}$$

Esta igualdad y sus análogas, dan cada una $n$ relaciones entre las $\varepsilon_{rpq}$, cuyo tipo general es (para $p, q, r, k = 1, 2, \ldots n$)

$$\varepsilon_{1pq}\varepsilon_{k1r} + \varepsilon_{2pq}\varepsilon_{k2r} + \ldots + \varepsilon_{npq}\varepsilon_{knr} = \varepsilon_{1pr}\varepsilon_{k1q} + \ldots + \varepsilon_{npr}\varepsilon_{knq} \tag{11}$$

Con el fin de verificar las igualdades (9) y (11), observaremos que disponiendo de la definición de los símbolos $e_1, e_2, \ldots, e_n$, podemos definirlos por la fórmula

$$e_p e_q = 0 \tag{12}$$

ó

$$e_p e_p = e_p \tag{13}$$

según que $p$ y $q$ sean iguales ó desiguales. Entonces los $\varepsilon_{rpq}$ son todos nulos, excepto

$$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{222} = \varepsilon_{333} = \ldots = \varepsilon_{nnn} = 1;$$

y las igualdades (9) y (11) se verifican para este sistema particular de números $\varepsilon_{rpq}$, deduciéndose de este sistema una infinidad de otros sistemas.

Tomemos un sistema cualquiera de $n^2$ números $\xi_{ij}$ sujetos á

la sola condición de que sea distinto de cero el determinante

$$\Xi = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & & \xi_{nn} \end{vmatrix}.$$

Y hagamos, conservando para $e_1, e_2, \ldots, e_n$ las definiciones (12) y (13)

$$E_1 = \xi_{11}e_1 + \xi_{12}e_2 + \cdots + \xi_{1n}e_n,$$

$$E_2 = \xi_{21}e_1 + \cdots + \xi_{2n}e_n, \ldots E_n = \xi_{n1}e + \cdots + \xi_{nn}e_n. \quad (14)$$

Las $n$ cantidades $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son linealmente distintas, y teniendo en cuenta las fórmulas (12) y (13), resulta que

$$E_p E_q = E_q E_p, \quad (E_p E_q)E_r = (E_p E_r)E_q. \quad (15)$$

Además $E_p E_q$ se expresa en función lineal de $e_1, e_2, \ldots, e_n$, y por consiguiente también en función lineal de $E_1, E_2, \ldots, E_n$, porque según la condición $\Xi \neq 0$, las ecuaciones (14) dan $e_1, e_2, \ldots, e_n$ en función lineal de $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

Se tiene pues,

$$E_p E_q = \varepsilon'_{1pq} E + \varepsilon'_{2pq} E_2 + \cdots + \varepsilon'_{npq} E_n.$$

Los números $\varepsilon'_{rpq}$ deben necesariamente verificar las igualdades (9) y (11) en virtud de las relaciones (15), que se han establecido directamente. Por otra parte existe una infinidad de sistemas de números $\varepsilon'_{rpq}$, porque éstos dependen tan sólo de los números $\xi_{ij}$ que son absolutamente arbitrarios, con la condición $\Xi \neq 0$.

Haciendo abstracción del sistema $E_1, E_2, \ldots, E_n$, se ha demostrado que las igualdades (9) y (11) pueden verificarse de infinidad de maneras.

8. *Caso particular:* $n = 2$. Hagamos por brevedad

$$\varepsilon_{111} = \lambda, \quad \varepsilon_{112} = \varepsilon_{121} = \mu, \quad \varepsilon_{122} = \nu,$$

$$\varepsilon_{211} = \lambda' \quad \varepsilon_{221} = \varepsilon_{212} = \mu', \quad \varepsilon_{222} = \nu'.$$

Se tiene entonces

$$e_1^2 = \lambda e_1 + \lambda' e_2, \qquad e_1 e_2 = \mu e_1 + \mu' e_2, \qquad e_2^2 = \nu e_1 + \nu' e_2.$$

Las varias condiciones á que deben satisfacer los seis coeficientes $\lambda$, $\lambda'$, $\mu$, $\mu'$, $\nu$, $\nu'$ se sacan de las dos desigualdades

$$(e_1 e_2) e_1 = (e_1 e_1) e_2 \qquad (e_2 e_1) e_2 = (e_1 e_2) e_1$$

ó

$$\mu(\lambda e_1 + \lambda' e_2) + \mu'(\mu' e_1 + \mu e_2) = \lambda(\mu e_1 + \mu' e_2) + \lambda'(\nu e_1 + \nu' e_2),$$
$$\mu(\mu e_1 + \mu' e_2) + \mu'(\nu e_1 + \nu' e_2) = \nu(\lambda e_1 + \lambda' e_2) + \nu'(\mu e_1 + \mu' e_2),$$

y se reduce á

$$\mu\mu' - \nu\lambda' = 0, \qquad \mu\lambda' + \mu'^2 - \mu'\lambda - \nu'\lambda' = 0,$$
$$\mu^2 + \mu'\nu - \lambda\nu - \mu\nu' = 0. \qquad (16)$$

Se puede hacer que $\nu$ sea cualquiera, pero distinta de cero. Las tres igualdades (16) se verifican, si se hace

$$\mu' = \frac{\lambda\nu + \mu\nu' - \mu^2}{\nu}, \qquad \lambda' = \frac{\mu\mu'}{\nu} = \frac{\mu\lambda\nu + \mu^2\nu' - \mu^3}{\nu^3}.$$

De los seis coeficientes tres son arbitrarios y un cuarto sólo está sujeto á ser distinto de cero. Si se hace $\nu = 0$, se tendrá

$$\mu\mu' = 0, \quad \mu\lambda' + \mu'^2 - \mu'\lambda - \nu'\lambda' = 0, \quad \mu^2 - \mu\nu' = 0.$$

Se debe hacer $\mu = 0$ ó $\mu' = 0$; y solo hay que verificar la única igualdad

$$\mu'^2 - \mu'\lambda - \nu'\lambda' = 0,$$

lo que permite tomar de una manera arbitraria tres de los coeficientes. Si $\mu' = 0$, se tiene

$$(\mu - \nu')\lambda' = 0, \qquad (\mu - \nu')\mu = 0,$$

lo que exige solamente $\mu = \nu'$, porque se supone $\mu$ distinto de cero, de modo que, además de $\lambda$, dos de los tres coeficientes $\mu$, $\lambda'$, $\nu'$ son arbitrarios.

Concluímos pues, reuniendo los dos casos $\nu \gtrless 0$ y $\nu = 0$,

que *cuatro* de los seis coeficientes pueden siempre tomarse arbitrariamente.

## § 2.° Las cuatro operaciones sobre los elementos del conjunto C

**9.** Adición y sustracción. Sean

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots\ldots + \alpha_n e_n, \quad b = \beta_1 e_1 + \ldots\ldots + \beta_n e_n.$$

Se tiene inmediatamente

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \ldots\ldots + (\alpha_n + \beta_n) e_n,$$
$$a - b = (\alpha_1 - \beta_1) e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) e_2 + \ldots\ldots + (\alpha_n - \beta_n) e_n.$$

La suma y la diferencia de dos elementos del conjunto son elementos del conjunto.

**10.** Multiplicación. Formemos el producto $ab$. Se tiene

$$\begin{aligned} ab = {} & \alpha_1\beta_1 e_1^2 + \alpha_2\beta_1 e_2 e_1 + \alpha_3\beta_1 e_3 e_1 + \ldots\ldots + \alpha_n\beta_1 e_n e_1 \\ & + \alpha_1\beta_2 e_1 e_2 + \alpha_2\beta_2 e_2^2 + \alpha_3\beta_2 e_3 e_2 + \ldots\ldots + \alpha_n\beta_2 e_n e_2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \alpha_1\beta_n e_1 e_n + \alpha_2\beta_n e_2 e_n + \alpha_3\beta_n e_3 e_n + \ldots\ldots + \alpha_n\beta_n e_n^2 \end{aligned}$$

Cada uno de los productos $e_p\, e_q$ se expresa en función lineal, con coeficientes reales, de las unidades principales, en virtud de la igualdad (8). Lo mismo sucede á $ab$. *Así* ab *forma parte del conjunto* C. Supongamos ahora que un término cualquiera del producto $ab$, por ejemplo, $\alpha_p\beta_q e_p e_q$ tenga su correspondiente $\beta_q\alpha_p e_q e_p$ en el producto $ba$, y que por otra parte

$$\alpha_p\beta_q = \beta_q\alpha_p, \qquad e_p e_q = e_q e_p,$$

se deberá concluir $ab = ba$.

Un razonamiento análogo manifestaría que lo mismo sucede respecto á las igualdades siguientes:

$$(ab)\, c = (ac)\, b, \qquad a\,(b + c) = ab + ac$$

Vemos pues que se verifican los teoremas (2) (núm. 5).

11. División. Relativamente á la división de dos cantidades complejas $a$ y $b$ del conjunto propuesto, partimos de la igualdad (3) (núm. 5) tomada como definición, lo que está completamente de acuerdo con la manera de proceder en los elementos del cálculo ordinario; y exigiremos además que el cociente $c = \frac{a}{b}$, ya tal como $cb = \frac{a}{b}\, b = a$, sea una cantidad de igual forma que $a$ y $b$, es decir, que se halla en el conjunto C. Desde entonces la división de $a$ por $b$ se reduce á la determinación de las coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_n$ del elemento $c$ por la condición $cb = a$, ó

$$(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \cdots \gamma_n e_n)\,(\beta_1 e_1 + ,.. \beta_n e_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$$

ó bien

$$\gamma_1(\beta_1 e_1^2 + \beta_2 e_1 e_2 + \ldots\ldots + \beta_n e_1 e_n)$$

$$+ \gamma_2(\beta_1 e_2 e_1 + \beta_2 e_2^2 + \ldots\ldots + \beta_n e_2 e_n)$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \gamma_n(\beta_1 e_n e_1 + \beta_2 e_n e_2 \ldots\ldots + \beta_n e_n^2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots\ldots + \alpha_n e_n.$$

Sustituyendo los productos $e_p e_q$ por sus valores sacados de (8) (núm. 6) é igualando después los coeficientes de $e_1$, $e_2$, ....., $e_n$ se obtienen, para determinar las $n$ coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_n$ las $n$ ecuaciones lineales

$$\gamma_1(\varepsilon_{111}\beta_1 + \varepsilon_{112}\beta_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{11n}\beta_n) + \gamma_2(\varepsilon_{121}\beta_1 + \varepsilon_{122}\beta_2 + \ldots\ldots$$
$$+ \varepsilon_{12n}\beta_n) + \ldots\ldots + \gamma_n(\varepsilon_{1n1}\beta_1 + \varepsilon_{1n2}\beta_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{1nn}\beta_n) = \alpha_1$$

$$\gamma_1(\varepsilon_{211}\beta_1 + \varepsilon_{212}\beta_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{21n}\beta_n) + \gamma_2(\varepsilon_{221}\beta_1 + \varepsilon_{222}\beta_2 + \ldots\ldots$$
$$+ \varepsilon_{22n}\beta_n) + \ldots\ldots + \gamma_n(\varepsilon_{2n1}\beta_1 + \varepsilon_{2n2}\beta_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{2nn}\beta_n) = \alpha_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\gamma_1(\varepsilon_{n11}\beta_1 + \varepsilon_{n12}\beta_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{n1n}\beta_n) + \gamma_2(\varepsilon_{n21}\beta_1 + \varepsilon_{n22}\beta_2 + \ldots\ldots$$
$$+ \varepsilon_{n2n}\beta_n) + \ldots\ldots + \gamma_n(\varepsilon_{nn1}\beta_1 + \varepsilon_{nn2}\beta_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{nnn}\beta_n) = \alpha_n.$$

Consideremos el determinante

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{111}\beta_1 + \varepsilon_{112}\beta_2 + \ldots \varepsilon_{121}\beta_1 + \ldots + \varepsilon_{12n}\beta_n \ldots \varepsilon_{1n1}\beta_1 + \ldots + \varepsilon_{1nn}\beta_n \\ \varepsilon_{211}\beta_1 + \varepsilon_{212}\beta_2 + \ldots \varepsilon_{221}\beta_1 + \ldots + \varepsilon_{22n}\beta_n \ldots \varepsilon_{2n1}\beta_1 + \ldots + \varepsilon_{2nn}\beta_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_{n11}\beta_1 + \varepsilon_{n12}\beta_2 + \ldots \varepsilon_{n21}\beta_1 + \ldots + \varepsilon_{n2n}\beta_n \ldots \varepsilon_{nn1}\beta_1 + \ldots + \varepsilon_{nnn}\beta_n \end{vmatrix}$$

Este determinante contiene dos clases de cantidades: Las primeras dependen del sistema de las *unidades principales*, tales son $\varepsilon_{rpq}$, las segundas dependen únicamente de la *cantidad compleja particular que sirve de divisor*, son las coordenadas $\beta_1, \ldots\ldots, \beta_n$ del elemento $b$.

La elección de las $\varepsilon_{rpq}$ podría ser tal, que el determinante $\varepsilon$ fuese nulo, cualesquiera que fuesen las coordenadas $\beta_1, \ldots\ldots, \beta_n$; por ejemplo, si se tomase $\varepsilon_{rpq} = 1$ para todos los valores $(r, p, q = 1, 2, \ldots\ldots, n)$. El sistema de las ecuaciones (18) sería entonces imposible ó indeterminado. También *excluímos* todo sistema de números $\varepsilon_{rpq}$ para el que se presente este caso. Podemos convencernos de que el determinante $\varepsilon$ puede no ser idénticamente nulo, considerando un caso particular, por ejemplo, el indicado en el n.º 6, que corresponde á las fórmulas (12) y (13).

Habiendo supuesto que el determinante $\varepsilon$ no es *idénticamente* nulo, si las coordenadas del divisor $b$ no anulan á $\varepsilon$, hallaremos, cualquiera que sea el dividendo $a$, un sistema único y determinado de coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_n$, y por consiguiente, un valor único y determinado del cociente $c$. Pero, si al contrario, las coordenadas de $b$ anulan á $\varepsilon$, ó bien no existe ningún sistema de coordenadas finitas $\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_n$ que verifiquen á las ecuaciones (18), ó existirá una infinidad, algunas de las cuales sean indeterminadas, lo que dependerá de las coordenadas $\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n$ del dividendo $a$.

12. Divisores de cero. Consideremos el caso en que $a = 0$, es decir, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots\ldots \alpha_n = 0$. Las ecuaciones (18) serán compatibles, y además el sistema de soluciones $\gamma_1 = \gamma_2 \ldots\ldots$

$= \gamma_n = 0$ admitirá una infinidad de otros valores, y esto, ya se suponga $b = 0$ ó $b \neq 0$.

Sea $b \neq 0$ y $c$ una cantidad compleja cuyas coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots \gamma_n$ no sean todas nulas y verifiquen las ecuaciones (18).

*Se tendrá*

$$b \neq 0, \quad c \neq 0 \quad \text{y } \textit{sin embargo} \quad bc = 0.$$

Este hecho no se presenta nunca en el cálculo ordinario basado en las dos unidades principales 1 y $\sqrt{-1}$. El divisor considerado $b \neq 0$ se ha llamado por Weierstrass *un divisor de cero.*

La denominación, *divisor de cero*, dada al divisor $b$, se halla evidentemente fundada en la propiedad $bc = 0$ que supone $a = 0$; pero, reflexionando sobre lo que precede, se ve enseguida que esta propiedad del *divisor* b *de cero* depende únicamente del determinante $\varepsilon$ que es nulo, sin intervenir en él la cantidad $a$, de modo que se debe definir un *divisor de cero* diciendo que es *un elemento del conjunto* C *para el que el determinante* $\varepsilon$ *correspondiente es nulo.*

Teorema. *Si* b *y* c *no son nulos, siendo* b *un divisor de cero y* bc $= 0$, *será también* c *un divisor de cero.*

Esto resulta de las ecuaciones (18), suponiendo $\alpha_1 = \alpha_2 \ldots = \alpha_n = 0$.

Basta, para verlo, observar que el determinante $\varepsilon'$ de estas ecuaciones consideradas, no ya en $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_n$, sino en $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n$ es nulo; porque si no fuese nulo, las ecuaciones (18) no darían mas que el único sistema de soluciones $\beta_1, = \beta_2 = \ldots\ldots = \beta_n = 0$, contra la hipótesis.

Esta propiedad de *un divisor de cero* $b \neq 0$, de existir además ciertas cantidades $c \neq 0$, tales que *el producto* bc *sea nulo*, es una *propiedad característica de los divisores de cero.*

Teorema. *El producto de un divisor de cero por una cantidad compleja cualquiera es también un divisor de cero.* En efecto, $b$ divisor de cero equivale á $bc = 0$, teniendo $c$ ciertos valores.

Resulta pues también que $kbc = 0$ ó $(kb)c = 0$; luego $kb$ es divisor de cero.

Caso de $n = 2$. Empleando las notaciones del n.° 7 y suponiendo $\nu \neq 0$, se tienen las dos condiciones

$$\mu' = \frac{\lambda\nu + \mu\nu' - \mu^2}{\nu}, \qquad \lambda' = \frac{\mu\lambda\nu + \mu^2\nu' - \mu^3}{\nu^2}.$$

En este caso se verifica que

$$\varepsilon = \begin{vmatrix} \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 & \mu\beta_1 + \nu\beta_2 \\ \lambda'\beta'_1 + \mu'\beta_2 & \mu'\beta_1 + \nu'\beta_2 \end{vmatrix} = (\lambda\mu' - \mu\lambda')\beta_1^2 + (\lambda\nu' - \nu\lambda')\beta_1\beta_2 + (\mu\nu' - \nu\mu')\beta_2^2;$$

en virtud de las fórmulas (17) se tiene

$$\left.\begin{aligned} \lambda\mu' - \mu\lambda' &= \frac{(\lambda\nu - \mu^2)^2 + \mu\nu'(\lambda\nu - \mu^2)}{\nu^2} \\ &= \frac{\lambda\nu - \mu^2 + \mu\nu'}{\nu^2}(\lambda\nu - \mu^2), \\ \lambda\nu' - \nu\lambda' &= \frac{\nu' - \mu}{\nu}(\lambda\nu - \mu^2), \\ \mu\nu' - \nu\mu' &= -(\lambda\nu - \mu^2). \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Según esto, es necesario y suficiente, para que $\varepsilon$ sea idénticamente nulo, que $\lambda\nu - \mu^2 = 0$.

Sea por el contrario $\lambda\nu - \mu^2 \neq 0$. Si $\beta_1 = \beta_2 = 0$, será $\varepsilon$ nulo. Para que existan otros valores reales de $\beta_1$ y $\beta_2$ que anulen á $\varepsilon$, es necesario y suficiente que

$$(\lambda\nu' - \nu\lambda')^2 - 4(\lambda\mu' - \mu\lambda')(\mu\nu' - \nu\mu') \geqq 0,$$

y, en virtud de las fórmulas (19),

$$\frac{(\lambda\nu - \mu^2)^2}{\nu}[(\nu' - \mu)^2 + 4\mu\nu' + 4(\lambda\nu - \mu^2)] \geqq 0.$$

ó

$$(\mu + \nu')^2 + 4(\lambda\nu - \mu^2) \geqq 0 \qquad (20)$$

Esta condición quedará particularmente satisfecha, si se hace

$$\lambda\nu - \mu^2 > 0;$$

luego: *Aún en el caso de ser* $n = 2$, *existen sistemas de unidades principales tales, que los conjuntos de cantidades complejas que dependen de ellas admiten divisores de cero.*

CASO PARTICULAR. Sea $n = 2$, $e_1 = 1$, $e_2 = \sqrt{-1}$. Se tiene aquí

$$e_1^2 = e_1, \quad e_1 e_2 = e_2, \quad e_2^2 = -1;$$

luego: $\lambda = 1$, $\mu' = 1$, $\nu = -1$, $\mu = \lambda' = \nu' = 0$;

$\nu$ no es cero y nos hallamos en el caso de $n = 2$, pág. 27. Las condiciones (17) quedan satisfechas. Además $\varepsilon$ no es idénticamente nulo, porque se tiene en nuestro caso $\mu^2 - \lambda\nu = 1$.

En fin, siendo $\mu + \nu'$ nulo y $\lambda\nu - \mu^2 < 0$, la condición (20) no queda satisfecha, y no existen valores reales de $\beta_1$ y de $\beta_2$ distintos de 0, anulando o á $\varepsilon$, lo que manifiesta directamente la expresión de $\varepsilon$, que es $\varepsilon = \beta_1^2 + \beta_2^2$; luego:

*No hay otros divisores más que el cero, en el caso de tomarse* 1 y $\sqrt{-1}$ *como unidades principales.*

## § 3.° EXPRESIÓN DE LAS CANTIDADES COMPLEJAS POR MEDIO DE UN SISTEMA PARTICULAR DE UNIDADES PRINCIPALES.

**13.** LA CANTIDAD $e_0$. Sea

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots\cdots + \alpha_n e_n$$

un elemento del conjunto C que *no sea divisor de cero.* Si se sustituyen en las ecuaciones (18) $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n$ respectivamente por $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$, éstas darán un sistema único de valores finitos y determinados para las coordenadas $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_n$ de cierta cantidad compleja $e_0$. Esta cantidad compleja será pues, por definición, tal que $e_0 = \frac{a}{a}$.

PRIMERA PROPIEDAD. *Un elemento cualquiera del conjunto* C *permanece invariable cuando se le multiplica por* $e_0$.

Si $c = be_0 = b\frac{a}{a}$ será $c = b$.

En efecto, para obtener las coordenadas de $c$, es necesario efectuar el producto $ba$ é identificar con $ca$. Sean

1.° $b = 0$. Entonces es preciso que $c = 0$, luego $b = c$;

2.° $b \neq 0$. Entonces, puesto que $a$ no es divisor de cero, las ecuaciones (18) determinan un sistema único de coordenadas $\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_n$ finitas y determinadas; luego, si se conoce un sistema de coordenadas que verifiquen á estas ecuaciones, habrá seguridad de que no existen otras. Pero el sistema

$$\gamma_1 = \beta_1, \quad \gamma_2 = \beta_2, \quad \ldots\ldots, \quad \gamma_n = \beta_n$$

satisface evidentemente, porque transforma en identidad la igualdad $ca = ba$; luego $c = b\frac{a}{a} = b$.

Segunda propiedad. *Cualquiera que sea la cantidad compleja (no siempre divisor de cero) que sirve de punto de partida, se llegará siempre á la misma cantidad* $e_0$, ó lo que es igual: si $a$ y $a'$ son dos elementos de C no divisores de cero y $\frac{a}{a} = e_0$, $\frac{a'}{a'} = e'_0$, se tendrá $e_0 = e'_0$.

Según la primera propiedad, toda cantidad compleja, multiplicada sea por $e_0$, sea por $e'_0$, permanece invariable; luego, en particular, $ae_0 = a$, $ae'_0 = a$, es decir, que las coordenadas de $e'_0$ satisfacen á las mismas ecuaciones que las coordenadas de $e_0$, y por consiguiente, son idénticamente las mismas, porque el sistema de las ecuaciones de que dependen, admiten un sólo sistema de soluciones, por no ser $a$ divisor de cero, luego $e'_0 = e_0$.

*Observación.* La fórmula $ae_0 = a$ ó $ae_0 = e_0a = a$, manifiesta que *en el cálculo de las cantidades complejas, la cantidad* $e_0$ *se conduce absolutamente como* el 1 *en el cálculo ordinario.*

Cálculo de $e_0$. Las coordenadas de $e_0$ están determinadas por las ecuaciones (18), cuando se hace en ellas

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_2, \ldots\ldots, \quad \beta_n = \alpha_n.$$

Pero como en virtud de la segunda propiedad de $e_0$, esta cantidad permanece la misma, cualquiera que sea $a$ (no siempre

divisor de cero), se escribirá que las ecuaciones (18) se verifican, cualesquiera que sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n$, lo que conduce á las $n^2$ ecuaciones

$$\gamma_1 \varepsilon_{111} + \gamma_2 \varepsilon_{121} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{1n1} = 1, \quad \gamma_1 \varepsilon_{112} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{1n2} = 0, \quad \ldots\ldots, \quad \gamma_1 \varepsilon_{11n} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{1nn} = 0,$$

$$\gamma_1 \varepsilon_{211} + \gamma_2 \varepsilon_{221} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{2n1} = 0, \quad \gamma_1 \varepsilon_{212} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{2n2} = 1, \quad \ldots\ldots, \quad \gamma_1 \varepsilon_{21n} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{2nn} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\gamma_1 \varepsilon_{n11} + \gamma_2 \varepsilon_{n21} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{nn1} = 0, \quad \gamma_1 \varepsilon_{n12} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{nn2} = 0, \quad \ldots\ldots, \quad \gamma_1 \varepsilon_{n1n} + \ldots\ldots + \gamma_n \varepsilon_{nnn} = 1.$$

Los segundos miembros de estas ecuaciones son siempre o ó 1. Se debe tomar 1 cuando figure en el primer miembro un número $\varepsilon_{rpq}$ con índices iguales, y o en el caso contrario. Aunque el número de ecuaciones excede al de incógnitas, son compatibles y admiten otro sistema de soluciones distinto de $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots\ldots = \gamma_n = 0$, como lo exigen la existencia y las propiedades de $e_0$.

*Caso* n = 2. Las $n^2 = 4$ ecuaciones son

$$\gamma_1\lambda + \gamma_2\mu = 1, \quad \gamma_1\mu + \gamma_2\nu = 0, \quad \gamma_1\lambda' + \gamma_2\mu' = 0, \quad \gamma_1\mu' + \gamma_2\nu' = 1$$

que pueden combinarse dos á dos de seis maneras. Combinando la segunda y la tercera, se debe tener $\mu\mu' - \lambda'\nu = 0$. Las otras cinco combinaciones dan:

$$\gamma_1 = \frac{\nu}{\lambda\nu - \mu^2} = \frac{-\mu'}{\lambda'\nu' - \mu'^2} = \frac{\nu' - \mu}{\lambda\nu' - \mu\mu'} = \frac{\mu'}{\lambda\mu' - \mu\lambda'} = \frac{-\nu}{\mu\nu' - \nu\mu'},$$

$$\gamma_2 = \frac{-\mu}{\lambda\nu - \mu^2} = \frac{\lambda'}{\lambda'\nu' - \mu'^2} = \frac{\lambda - \mu'}{\lambda\nu' - \mu\mu'} = \frac{-\lambda'}{\lambda\mu' - \mu\lambda'} = \frac{\mu}{\mu\nu' - \nu\mu'},$$

Cuando las unidades principales son 1 y $\sqrt{-1}$, se tiene $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, porque $\lambda = \mu' = 1$, $\nu = -1$, $\mu = \lambda' = \nu' = 0$. En este caso $e_0 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 = \gamma_1 + \gamma_2\sqrt{-1} = 1$.

## § 4.° El sistema de las $g$.

14. Sea $g = \xi_{11} e_2 + \xi_{12} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{1n} e_n$ un elemento del conjunto C que no es un divisor de cero. Formando sus potencias sucesivas por medio de las fórmulas (8), reduciremos cada una de dichas potencias á la forma lineal con respecto á las unidades principales. Tendremos así

$$\begin{aligned} g &= \xi_{11} e_1 + \xi_{12} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{1n} e_n , \\ g^2 &= \xi_{21} e_1 + \xi_{22} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{2n} e_n , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g^n &= \xi_{n1} e + \xi_{n2} e_2 + \ldots\ldots + \xi_{nn} e_n , \end{aligned}$$

expresando con $\xi_{ij}$ las coordenadas, que son cantidades reales funciones de aquélla de entre ellas cuyo índice es 1, y también de las cantidades $\varepsilon_{rpq}$ que entran en las fórmulas (8).

Supongamos que el conjunto C satisfaga á la nueva condición de que para ningún sistema de valores de las coordenadas, sea nulo el determinante

$$\Xi = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \ldots\ldots \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \ldots\ldots \xi_{2n} \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} \ldots\ldots \xi_{nn} \end{vmatrix} .$$

Esta hipótesis puede hacerse, porque de otro modo debería ser imposible el hallar sistemas de números $\varepsilon_{rpq}$ tales que, el determinante $\Xi$ no sea idénticamente nulo; pero el empleo de un sistema particular de números $\varepsilon_{rpq}$ manifiesta precisamente lo contrario, pues si tomamos el sistema ya empleado (7) para demostrar la posibilidad de satisfacer á las ecuaciones (9) y (11). En este sistema, todos los $\varepsilon_{rpq}$ son nulos, excepto

$$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{222} = \ldots\ldots = \varepsilon_{nnn} = 1, \quad \text{y se tiene} \quad e_p e_q = 0$$

$$\text{si } p \gtrless q \quad \text{con} \quad e_p e_q = e_p .$$

En el caso actual, se obtiene pues

$$g^i = \xi_{i1} e_1 + \xi_{i2} e_2 + \ldots + \xi_{in} e_n = \xi^i_{11} e_1 + \xi^i_{12} e_2 + \ldots + \xi^i_{1n} e_n;$$

luego, escribiendo $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots$ en vez de $\xi_{11}, \xi_{12}, \ldots\ldots$, se tiene

$$\Xi = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots\ldots & \xi_n \\ \xi^2_1 & \xi^2_2 & \ldots\ldots & \xi^2_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi^n_1 & \xi^n_2 & \ldots\ldots & \xi^n_n \end{vmatrix},$$

determinante distinto de cero, cualesquiera que sean las coordenadas $\xi_1, \ldots\ldots, \xi_n$ de $g$, con tal de que dos cualesquiera de éstas no sean iguales.

Actualmente, pudiéndose resolver las ecuaciones (25) con respecto á las *unidades principales* $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$, dan

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \alpha_{11} g + \alpha_{12} g^2 + \ldots\ldots + \alpha_{1n} g^n, \\ e_2 &= \alpha_{21} g + \alpha_{22} g^2 + \ldots\ldots + \alpha_{2n} g_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= \alpha_{n1} g + \alpha_{n2} g^2 + \ldots\ldots + \alpha_{nn} g_n, \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

siendo $\alpha_{ij}$ cantidades reales.

Formemos todavía $g^{n+1}$, como hemos formado $g^2, \ldots, g^n$ y sustituyamos después, en su expresión, las unidades $e_1, e_2, \ldots$ por sus valores sacados de las ecuaciones (27), obtendremos una relación que podrá escribirse

$$g^{n+1} + \varepsilon_1 g^n + \varepsilon_2 g^{n-1} + \ldots\ldots + \varepsilon_n g = 0 \qquad (28)$$

(siendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots\ldots$ cantidades reales) ó bien

$$g^n + \varepsilon_1 g^{n-1} + \varepsilon_2 g^{n-2} + \ldots\ldots + \varepsilon_{n-1} g + \varepsilon_n e_0 = 0. \qquad (28')$$

De la ecuación (28') se deduce igualmente, cualquiera que sea el entero positivo $\mu$,

$$g^{\mu+n} + \varepsilon_1 g^{\mu+n-1} + \varepsilon_2 g^{\mu+n-2} + \ldots\ldots + \varepsilon_n g^{\mu} = 0.$$

*Oservaciones.* Vemos que:

1.° Según las relaciones (15) y la condición $\Xi \gtrless 0$, las cantidades

$$\frac{g}{g}, \frac{g^2}{g}, \ldots\ldots, \frac{g^n}{g} \quad \text{ó} \quad e_0, g, g^2, \ldots\ldots g^{n-1}$$

son linealmente independientes, como las $g, g^2, \ldots\ldots g^n$.

2.° Todo elemento de C puede expresarse en función lineal con coeficientes reales de las $n$ cantidades

$$e_0, g, g^2, \ldots\ldots, g^{n-1}.$$

3.° Recíprocamente toda expresión lineal y homogénea con relación á estas cantidades, pertenece al conjunto.

Luego: *las* n *cantidades*

$$e_0, g^2, \ldots\ldots g^{n-1}$$

*forman un sistema de* n *unidades principales que pueden sustituirse á las* n *unidades* $e_1, e_2, \ldots e_n$.

15. Recapitulación. Poco tiempo después que Weierstrass publicó la teoría cuyos principios se acaban de exponer, el profesor de la universidad de Brunswick Herr R. Dedekind hizo ver en su memoria *Zur Theorie der aus* n *Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen* (1885) que el nuevo cálculo no difiere esencialmente del cálculo de los sistemas de cantidades que en el Suplemento XI á las *Lecciones sobre la teoría de los números* de Dirichlet desarrolla con el título de *cuerpos finitos.*

Considera el cuadro E de $n^2$ números cualesquiera

$$E \begin{cases} e_{11}, e_{21} \ldots\ldots e_{n1} \\ e_{12}, e_{22} \ldots\ldots e_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_{1n}, e_{2n} \ldots\ldots e_{nn} \end{cases} \quad \text{y el determinante} \quad e = \begin{vmatrix} e_{11}, e_{21} \ldots\ldots e_{n1} \\ e_{21}, e_{22} \ldots\ldots e_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_{1n}, e_{2n} \ldots\ldots e_{nn} \end{vmatrix}$$

Dichas cantidades, asociadas por líneas, forman $n$ sistemas de $n$ cantidades del tipo $e_{1s}, \ldots\ldots, e_{ns}$.

Consideremos un sistema de $n$ cantidades $e_1, \ldots\ldots, e_n$, á las que aplicaremos las $n$ sustituciones

$$\left.\begin{array}{l}(e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n \mid e_{11}, e_{21}, \ldots\ldots, e_{n1}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n \mid e_{1n}, e_{2n}, \ldots\ldots, e_{nn}),\end{array}\right\}. \qquad (29)$$

Las cantidades $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n$ forman una *base;* sus diversos valores corresponden á las $n$ sustituciones (29), de modo que *toda relación* $F(e_1, e_2, \ldots\ldots, e_n) = 0$ (30) *formada racionalmente con las* n *cantidades de la base y con números reales ó imaginarios determinados, equivale por definición, á las* n *relaciones que se deducen efectuando las sustituciones* (29).

Citaremos el siguiente teorema fundamental:

*Toda función racional entera* x *de las* n *cantidades de la base se expresa de una sola manera bajo la forma*

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots\ldots + \xi_n e_n, \qquad (31)$$

*siendo* $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots$ *números (reales ó imaginarios) llamados coordenadas de* x.

Considera Herr Dedekind otro cuadro F de $n^2$ números $f_{11}, f_{21}, \ldots\ldots$ etc. asociados por columnas como los $e_{11}, \ldots\ldots$ estaban por líneas, siendo

$$f_s = \xi_1^{(s)} e_1 + \xi_2^{(s)} e_2 + \ldots\ldots + \xi_n^{(s)} e_n$$

un elemento del conjunto C; y se determinan análogamente los $n$ elementos $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ por $n$ sustituciones.

El sistema de las cantidades $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ es la *base complementaria.* Se puede cambiar la base $e_1, \ldots\ldots, e_n$ por otra base equivalente, por ejemplo,

$$c_q = e_1 f_{1q} + e_2 f_{2q} + \ldots\ldots + e_n f_{nq}$$

en cuyo caso, si el determinante de las coordenadas no es nulo, constituye una *base normal,* llegándose á expresar un elemento $x$ cualquiera del conjunto por medio de la base normal.

# LIBRO SEGUNDO

# FUNCIONES DE VARIABLES REALES

## CAPÍTULO I

### Modos generales de expresar una función

§ 1.º INTEGRAL DEFINIDA

15. *El problema de las cuadraturas* da origen al cálculo integral.

El cálculo integral es el inverso del diferencial. Su objeto es determinar una función $y$ cuya derivada sea otra función dada $f(x)$, es decir, hallar la función que satisfaga á la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \qquad (1)$$

Admitamos que $f(x)$ sea una función continua entre los límites dentro de los que permanezca la variable y que exista una función $y$ que satisfaga á la ecuación (1) adquiriendo el valor $y_0$ para $x = a$ y el valor Y para $x = b$.

Dividamos el intervalo $(a, b)$ en $n$ intervalos, y sean $x_1$, $x_2$, ....., $x_n$ los puntos de subdivisión, siendo $y_1$, $y_n$, ....., $y_n$ los valores correspondientes de $y$.

Si el intervalo $x_1 - a$ es suficientemente pequeño, el cociente $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - a}$ difiere poco de $f(a)$, y tendremos las relaciones aproximadas

$$y_1 - y_0 = (x_1 - a)\, f(a)$$
$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1)\, f(x_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Y - y_{n-1} = (b - x_{n-1})\, f(x_{n-1}).$$

Sumando miembro á miembro, resulta

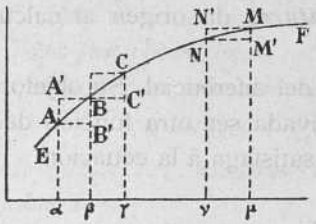
$$Y - y_0 = (x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})(fx_{n-1}),$$

igualdad aproximada, tanto más, cuanto mayor es el número de intervalos que se van aproximando á cero.

De manera que nos vemos conducidos á *estudiar la suma*

$$(x_1 - a)f(a) + \ldots\ldots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

Para facilitar la adquisición del concepto de integral definida, vamos en este primer examen á valernos de una representación gráfica correspondiente.




Consideremos el área del trapecio mixtilíneo $\alpha\Lambda N\nu$.

Descomponiendo esta área en rectángulos inscritos y circunscritos, y llamando $x_0, x_1, \ldots, x_n$ á las abscisas de los puntos $\alpha, \beta, \ldots, \nu$, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ á las ordenadas correspondientes, tendremos que las sumas

$$s = (x_1 - x_0)y_0 + (x_2 - x_1)y_1 + \ldots\ldots + (x_n - x_{n-1})y_{n-1}$$
$$S = (x_1 - x_0)y_1 + (x_2 - x_1)y_2 + \ldots\ldots + (x_n - x_{n-1})y_n$$

de los rectángulos inscritos y circunscritos al trapecio mixtilíneo comprenden entre sí el área T de éste, de modo que

$$s < T < s + (S - s);$$

y si se representa por $\delta$ el mayor de los intervalos $x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1}$, se ve que la diferencia $S - s$ tiende hacia cero con $\delta$, porque dicha diferencia es menor que

$$\delta(y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \ldots\ldots + y_n - y_{n-1})$$

es decir, menor que $\delta(y_n - y_0)$.

Por consiguiente el área T es el límite hacia el que tiende la suma $\alpha$, cuando cada uno de los intervalos $x_1 - x_0, x_2 - x_1 \ldots, x_n - x_{n-1}$ tiende hacia cero.

Si damos á la base del trapecio mixtilíneo considerado el incremento $\nu\mu$, el trapecio mixtilíneo $\nu NM\mu$ será el incremento del área, que estará comprendido entre los rectángulos $\nu NM'\mu$ y $\nu N'M\mu$, cuyas áreas están expresadas por $\nu N \cdot \nu\mu$ y $\nu N' \cdot \nu\mu$; tendremos pues

$$N\nu < \frac{\nu NM\mu}{\nu\mu} < N'\nu.$$

Tendiendo $\nu\mu$ hacia cero, en el límite *la derivada del área será la ordenada* $\nu N = f(x)$, correspondiente á la abscisa $O\nu = x$.

La cuestión de las cuadraturas se reduce pues á obtener una función cuya derivada es $f(x)$, problema fundamental del cálculo integral.

Esto sentado, si llamamos $x_0$ y X las abscisas extremas del trapecio mixtilíneo $\alpha AN\nu$, el límite de la suma

$$\Sigma = (x_1 - x_0) y_0 + (x_2 - x_1) y_1 + \ldots\ldots + (x - x_{n-1}) y_{n-1}$$

se representa por

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx \qquad (1)$$

y se llama la *integral definida* $f(x)\, dx$.

Si $x_0$ permanece constante y X es variable, la integral (1) se reduce á una función de X cuya derivada es $f(X)$, es decir, una función *primitiva* de $f(x)$.

Si además $\varphi(X)$ expresa una función primitiva cualquiera de X, $\varphi(X) - \varphi(x_0)$ será aquélla de las funciones primitivas que se anula para $X = x_0$; y como la integral (1) representa esta misma función primitiva, se obtiene la fórmula

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = \varphi(X) - \varphi(x_0). \qquad (2)$$

No estamos por ahora en el caso de obtener las integrales de cada función diferencial. Este problema es objeto del cálculo integral. Nos bastará, por ejemplo, decir que ya conocemos al-

gunas integrales, puesto que siendo

$$mx^{m-1}dx, \quad \frac{dx}{x}, \quad \cos x\, dx, \quad \text{etc.}$$

las diferenciales de $x^m$, $lx$, sen $x$, etc., estas funciones serán las integrales de aquéllas.

**16.** DIFERENCIACIÓN BAJO EL SIGNO $\int$. Sea $\varphi'(x) = f(x)$. Tendremos que la integral general de $f(x)\,dx$ será $\varphi(x) + C$, siendo C una constante arbitraria, y además que

$$u = \int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{1}$$

La integral definida es función de sus límites $a$ y $b$, y siendo

$$du = \frac{\partial u}{\partial a}\,da + \frac{\partial u}{\partial b}\,db$$

la expresión de su diferencial total, así como las derivadas parciales de (1),

$$\frac{\partial u}{\partial a} = -\varphi'(a) = -f(a), \quad \frac{\partial u}{\partial b} = \varphi'(b) = f(b),$$

resultará que

$$du = -f(a)da + f(b)db. \tag{2}$$

**17.** DIFERENCIACIÓN CON RESPECTO Á UN PARÁMETRO. Sea

$$u = \int_a^b f(x, t)\,dx.$$

Si los límites $a$ y $b$ son independientes del parámetro $t$, se obtiene:

$$u + \Delta u = \int_a^b f(x, t + \Delta t)\,dx,$$

$$\Delta u = \int_a^b f(x, t + \Delta t)\,dx - \int_a^b f(x, t)\,dx$$

$$= \int_a^b [f(x, t + \Delta t) - f(x, t)]\,dx;$$

luego

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \int_a^b \frac{f(x, t+\Delta t) - f(x, t)}{\Delta t}\, dx, \qquad \frac{du}{dt} = \int_a^b \frac{df(x, t)}{dt}\, dx.$$

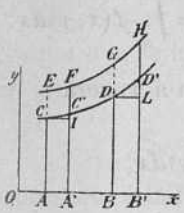
Si $a$ y $b$ dependen del parámetro $t$, resulta que siendo

$$\frac{\partial u}{\partial a} = -f(a, t), \qquad \frac{\partial u}{\partial b} = f(b, t), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\, dx,$$

la diferencial total será

$$du = -f(a, t)da + f(b, t) + dt \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\, dx. \qquad (3)$$

18. Interpretación geométrica. Sea CD la curva cuya ecuación es $y = f(x, t)$.




Si OA $= a$, OB $= b$ tendremos

$$\int_a^b f(x, t)dt = \text{área ABDC.}$$

A un incremento $dt$ de $t$, corresponden incrementos $da$ y $db$ de $a$ y de $b$, cambiándose la curva CD en otra infinitamente próxima EH, y se tiene

$$u + du = \int_{a+da}^{b+db} f(x, t + dt)\, dx = \text{área A'GHB'.}$$

Pero área A'GHB' = AEFB − AEGA' + BFHB';

luego

$$du = \text{A'GHB'} - \text{ACDB} = (\text{AEFB} - \text{ACDB}) - \text{AEGA'} + \text{BFHB'},$$

y despreciando infinitamente pequeños de segundo orden,

$$du = \int_a^b f(x, t + dt)\, dx - \int_a^b f(x, t)\, dx - f(a, t)da + f(b, t)\, db$$

y en fin

$$du = dt \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\, dx - f(a, t)da + f(b, t)db.$$

**19.** INTEGRACIÓN BAJO EL SIGNO $\int$. Multiplicando por $dy$ la integral definida $\int_a^b f(x, y)dx$ é integrando enseguida con respecto á $y$, se tiene que

$$\int dy \int_a^b f(x, y)dx,$$

y podremos obtener que

$$\int dy \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b dx \int f(x, y)dy,$$

En efecto, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_a^b [dx \int f(x, y)dy] = \int_a^b dx \frac{\partial \int f(x, y)}{\partial y} dy = \int_a^b f(x, y)dx;$$

luego, integrando los dos miembros con relación á $y$, será

$$\int_a^b dx \int f(x, y)dy = \int dy \int_a^b f(x, y)dx;$$

y tomando por límites de $y$ las constantes $c$ y $d$, resulta que

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx.$$

## § 2.° CONVERGENCIA UNIFORME

Sea la serie

$$u_1(x), \quad u_2(x), \ldots\ldots, \quad u_n(x), \ldots\ldots \qquad (1)$$

cuyos términos son funciones determinadas de una variable $x$; y supongamos que esta serie sea convergente, cuando $x$ toma un valor cualquiera comprendido en un intervalo $(a, b)$ finito ó infinito. Resulta de la definición de la convergencia, que se

puede hallar un número positivo N tal, que para $n \geq N$ se tenga

$$| R_n (x) | < \varepsilon$$

siendo $\varepsilon$ una cantidad dada previamente, y designando $R_n (x)$ el resto

$$u_{n+1} (x) + u_{n+2} (x) + \ldots\ldots \qquad (1)$$

correspondiente á la suma de los $n$ primeros términos.

El número N depende, en general, de $\varepsilon$ y del valor $x$ elegido en el intervalo $(a, b)$.

Cuando N no depende mas que de $\varepsilon$, es decir, es el mismo para todos los valores de $x$ comprendidos en el intervalo $(a, b)$, se dice que la serie es *uniformemente convergente, equiconvergente ó convergente en igual grado* en este intervalo.

Las series uniformemente convergentes son interesantes, porque si la serie (1), por ejemplo, es uniformemente convergente en un intervalo $(a, b)$, la suma

$$S_N = u_1 (x) + u_2 (x) + \ldots\ldots + u_N (x)$$

representa á la función $f(x)$ definida por la serie con una aproximación cuyo límite superior $\varepsilon$ es el mismo para todos los valores de $x$ comprendidos en el intervalo $(a, b)$, pudiéndose por consiguiente, por el estudio de la serie, reconocer la marcha de la función con cierta aproximación.

Esta ventaja no se obtiene cuando la serie sólo es convergente sin serlo uniformemente. En este caso, según el valor de $x$, hay que tomar un número de términos á veces pequeño y á veces considerable.

Aunque es difícil muchas veces el reconocer si una serie es uniformemente convergente, puede con frecuencia emplearse con éxito la siguiente regla:

*Una serie de términos variables es uniformemente convergente en un intervalo dado, si sus términos son menores en valor absoluto que los términos correspondientes de una serie de términos positivos, convergente y numérica.*

En efecto, si designamos por $R_n$ y $\rho_n$ los restos correspondientes de las dos series, tendremos

$$|R_n| < \rho_n.$$

Pero, puesto que la serie de comparación es numérica y convergente, se puede, dado $\varepsilon$, determinar un número N independiente de $x$, de modo que se tenga $\rho_n < \varepsilon$ y por tanto $|R_n| < \varepsilon$.

*Ejemplo* 1.° Sea la serie

$$\alpha_1 \operatorname{sen} \beta_1 x, \quad \alpha_2 \operatorname{sen} \beta_2 x, \ldots\ldots$$

en la que $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots$ representan cantidades cualesquiera, mientras que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$ son cantidades positivas que forman una serie convergente. La serie propuesta es convergente en un intervalo cualquiera, porque sus términos son respectivamente inferiores ó iguales á los de la serie convergente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots$

*Ejemplo* 2.° La serie

$$1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n + \ldots\ldots$$

es uniformemente convergente para los valores de $x$ cuyo módulo es menor $\alpha < 1$; porque para que sea

$$|x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots\ldots| < \varepsilon,$$

basta hacer

$$\left| \frac{x^{n+1}}{1 - x} \right| < \varepsilon,$$

y se satisface á esta condición, haciendo

$$\frac{\alpha^{n+1}}{1 - \alpha} < \varepsilon \quad \text{ó} \quad n + 1 < \frac{l(\varepsilon - \alpha\varepsilon)}{l\alpha}$$

lo que determina para $n$ un valor independiente de $x$.

20. Que una serie puede ser convergente sin serlo uniformemente, lo pone de manifiesto el siguiente ejemplo: La serie

$$x(e^{-x} - 2e^{-2x}) + x(2e^{-2x} - 3e^{-3x}) + \ldots\ldots$$
$$+ x(ne^{-nx} - (n+1)e^{-(n+1)x}) + \ldots\ldots$$

es convergente para cualquier valor de $x$, porque la suma de sus $n$ primeros términos es

$$xe^{-x} - (n+1)xe^{-(n+1)x},$$

que para $n = \infty$ tiene por límite $xe^{-x}$; pero no es uniformemente convergente para los valores próximos á cero, porque para satisfacer á la condición

$$xe^{-x} - (n+1)xe^{-(n+1)x} < \varepsilon,$$

sería preciso que se verificara que

$$(n+1)e^{-(n+1)} > e^{-x} - \frac{\varepsilon}{x}$$

y que los valores de $n$ susceptibles de satisfacer á esta desigualdad dependiesen de $x$ y aumentasen, al tender $x$ hacia cero.

*Ejemplo* de una serie que es función continua de la variable sin ser una serie uniformemente convergente. Sea

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2} \right]$$

La suma de la serie es la función continua $\frac{x}{1+x^2}$.

Se tiene que $R_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

Tomándose $n$ tan grande como se quiera, si $x$ se halla comprendida en un intervalo que contenga el punto cero, se podrá siempre tomar $x = \frac{1}{n}$, y entonces será $R_n = \frac{1}{2}$; luego no se podrá jamás hallar un valor de $n$ que para *todos los valores de* $x$ sea siempre $R_n < \sigma$, siendo $\sigma$ tan pequeña como se quiera.

Otro ejemplo nos ofrece la serie

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (2nxe^{-nx^2} - (2n+2)xe^{-(n+1)x^2}).$$

La suma de esta serie es $2xe^{-x^2}$, y esta serie representa

una función continua de $x$, sin ser una serie uniformemente convergente, porque la expresión de $R_n$ es

$$2(n+1)xe^{-(n+1)x^2}$$

y para $x = \frac{1}{n+1}$ el límite es 2, cuando $n = \infty$; de manera que la serie no es uniformemente convergente en un intervalo que comprende el punto cero.

Sea $$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x} \right].$$

La suma de dicha serie es

$$\lim_{n=\infty} \left( 1 - \frac{1}{1+nx} \right).$$

Para $x$ distinta de cero este límite es 1 y para $x = 0$ es cero. Luego la serie representa una función continua en todo punto $x$ distinto de cero (siendo una función constante, discontinua en $x = 0$. El resto es

$$\frac{1}{1+nx}.$$

Si suponemos que $x$ varía en un intervalo que no comprenda el punto cero (supongamos que sea siempre positiva y mayor que $a$), se tendrá

$$\frac{1}{1+nx} < \frac{1}{1+na},$$

y determinando $n$ de modo que

$$\frac{1}{1+na} < \sigma,$$

se tiene para $x > a$ $\quad R_n(x) < \sigma$

y la serie es uniformemente convergente. Pero si $a = 0$, haciéndose $n$ grande, se podrá hacer $x$ suficientemente pequeña para que el producto $nx$ sea tan pequeño como se quiera y $\frac{1}{1+nx}$ sea mayor que cualquier cantidad dada, y la serie no será uniformemente convergente en un intervalo que comprenda ó tenga en un extremo el punto cero.

De lo expuesto resulta inmediatamente que una condición *suficiente* pero *no necesaria* para la convergencia uniforme de una serie, es que la serie de los valores máximos que sus diversos términos adquieran en el intervalo dentro del que varían las variables, sea una serie convergente.

**21.** TEOREMA. *Si los términos de una serie* $u_1, u_2, \ldots$ *son funciones continuas de una variable* $x$ *en un intervalo* $(a, b)$ *en el que la serie es uniformemente convergente, la suma de la serie es una función* $f(x)$ *continua en el mismo intervalo.*

En efecto, escribamos

$$f(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + R_n$$

Por hipótesis se puede elegir $n$ suficientemente grande para que se tenga

$$|R_n| < \varepsilon,$$

siendo $x$ cualquiera en el intervalo $(a, b)$ y $\varepsilon$ una cantidad asignada previamente, tan pequeña como se quiera.

Se tendrá entonces para valores cualesquiera de $x$ y de $x'$ en el intervalo considerado,

$$f(x) - f(x') = (u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n) - (u_1 + \ldots + u_n) + R'_n - R_n$$

y

$$R'_n - R_n < 2\varepsilon.$$

Pero la función $u_1 + \ldots + u_n$, suma de un número limitado de términos continuos, es continua; luego se puede tomar $x'$ bastante próxima á $x$, para que la diferencia de las cantidades comprendidas en los paréntesis sea menor en valor absoluto que $\varepsilon$; luego, para $x'$ bastante próxima de $x$,

$$f(x') - f(x) < 3\varepsilon.$$

**22.** INTEGRAL. Siendo $\alpha$ y $\beta$ dos números comprendidos en el intervalo $(a, b)$, se tiene que

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta u_1 dx + \ldots + \int_\alpha^\beta u_n dx + \int_\alpha^\beta R_n(x)dx.$$

Pero si se determina $n$ como se ha indicado, representando $\varepsilon_1$ un número tan pequeño como se quiera, se tendrá

$$\left| \int_\alpha^\beta R_n(x)dx \right| < \varepsilon_1(\beta - \alpha);$$

siendo $\varepsilon_1$ tan pequeño como se quiera; luego la serie

$$\int_\alpha^\beta u_1 dx + \int_\alpha^\beta u_2 dx + \ldots\ldots$$

es convergente y su suma es $\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Así: *Se obtendrá la integral de la serie, integrando cada término entre los dos mismos límites y efectuando la suma de las integrales así obtenidas.*

**23.** DERIVACIÓN. Supongamos que las funciones $u_1, \ldots, u_n \ldots$ tengan derivadas contínuas.

No siendo necesariamente convergente la serie de las derivadas de $f(x) = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n \ldots\ldots$

$$\frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \ldots\ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots\ldots$$

ésta no representará siempre la derivada de $f(x)$; pero *si dicha serie es uniformemente convergente en un intervalo* (a, b), *representará en éste la derivada* de $f(x)$.

En efecto, suponiendo la serie $u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots$ uniformemente convergente, hagamos

$$\varphi(x) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \ldots\ldots + \frac{du_n}{dx} + \ldots\ldots,$$

é integrando entre $\alpha$ y $x$, y designando por $\lambda_n$ el valor que ad-

quiere $u_n(x)$ para $x = \alpha$, tendremos

$$\int_{\alpha}^{x} \varphi(x)\,dx = (u_1 - \lambda_1) + (u_2 - \lambda_2) + \ldots\ldots$$

Pero puesto que las series $u_1, u_2, \ldots\ldots$ y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots$ son absolutamente convergentes, se puede sustituir el segundo miembro por

$$(u_1 + u_2 + \ldots\ldots) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots) = f(x) - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots)$$

por consiguiente $\varphi(x) = f'(x)$, puesto que las $\lambda$ son constantes.

## § 3.° Series enteras

**24.** Las series de funciones más importantes son las *series enteras*, es decir, las series de la forma

$$u_0,\ u_1 x,\ \ldots\ldots,\ u_n x^n,\ \ldots\ldots \qquad (1)$$

expresando $x$ una variable cualquiera y $u_0, u_1, \ldots\ldots, u_n$, coeficientes constantes, cuyos módulos representaremos por $a_0$, $a_1, \ldots\ldots a_n, \ldots\ldots$

Primer teorema de Abel. *Si para un valor de la variable* x *cuyo módulo es* r', *los módulos de la serie* (1) *son inferiores á un número positivo y finito* M, *la serie será convergente para todo valor de* x *cuyo módulo es menor que* r'.

En efecto, demos á $x$ un valor cuyo módulo $r$ sea menor que $r'$, y multipliquemos respectivamente por los números

$$a_0,\ a_1 r',\ \ldots\ldots,\ a_n r'^n,\ \ldots\ldots \qquad (2)$$

los términos de la serie convergente

$$1,\ \frac{r}{r'},\ \frac{r^2}{r'^2},\ \ldots\ldots$$

Siendo, por hipótesis, los números (2) inferiores á M, obtendremos una nueva serie convergente

$$a_0,\ a_1 r,\ a_2 r^2,\ \ldots\ldots,\ a_n r^n,\ \ldots\ldots;$$

luego la serie propuesta es absolutamente convergente para todo valor de $x$ cuyo módulo $r$ es inferior á $r'$. Siendo

$$a_n r'^n < M,$$

podemos decir que: *Si una serie es convergente para un valor de* x *cuyo módulo es* $\rho$, *será también convergente para todo valor de* x *cuyo módulo es inferior á* $\rho$, y por consiguiente:

*Si una serie entera es divergente para un valor* $x_1$ *de* x, *es divergente para todo valor* $x_2$ *cuyo módulo es superior al de* $x_1$, pues si fuera convergente para $x = x_2$, lo sería para $x = x_1$, cuyo módulo es inferior al de $x_2$.

Si imaginamos que $x$ varíe de modo que su módulo vaya creciendo, mientras permanecen finitos los módulos correspondientes de los diversos términos de la serie, estos módulos tienen, en general un límite L, y entonces la serie es convergente para todo valor de $x$ cuyo módulo es inferior á L. A este número positivo se le llama *radio de convergencia.*

*Ejemplos:* 1.° La serie

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots + \frac{x_n}{n} + \ldots\ldots$$

ofrece un caso en que el radio de convergencia no es nulo ni infinito, éste es igual á la unidad.

La serie es convergente para $x = -1$ y divergente para $x = 1$.

La serie

$$1 + x + 4x^2 + \ldots\ldots + n^n x^n + \ldots\ldots$$

tiene cero por radio de convergencia, y es divergente para todos los valores de $x$.

2.° Teorema de Abel. *Si una serie entera es convergente para un valor* X *de la variable* x, *es uniformemente convergente para todos los valores de* x *que satisfacen á las desigualdades*

$$-1 < \frac{X}{x} \leq 1.$$

*Lema. Sean n cantidades* $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$, *y n factores positivos* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_n$, *tales que cada uno no sea mayor que el anterior.*

*Si se designa por* $\varepsilon$ *la expresión*

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_n u_n \qquad (3)$$

*y por s y S la menor y la mayor de las sumas*

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \ldots\ldots \quad s_n = u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n,$$

*se tendrá*

$$\varepsilon_1 s \leqq \Sigma \leqq \varepsilon_1 S. \qquad (4)$$

En efecto, se puede escribir

$$u_1 = s_1, \quad u_2 = s_2 - s_1, \ldots\ldots, \quad u_n = s_n - s_{n-1}$$

Por consiguiente

$$\Sigma = \varepsilon_1 s_1 + \varepsilon_2(s_2 - s_1) + \ldots\ldots + \varepsilon_n(s_n - s_{n-1}),$$

ó

$$\Sigma = \varepsilon(1 - \varepsilon_2)s_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)s_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_n s_n.$$

Pero por hipótesis los coeficientes de $s_1\ s_2, , \ldots\ldots, s_n$ son positivos ó nulos. Si pues en lugar de $s_1, s_2, \ldots\ldots, s_n$ se sustituye sucesivamente $s$ y S, se obtendrán un límite inferior $\varepsilon_1 s$ y un límite superior $\varepsilon_1 S$ de $\Sigma$, lo que demuestra las desigualdades del enunciado.

Para demostrar el teorema, observaremos que en la serie

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots\ldots + a_n X^n + \ldots\ldots$$

supuesta convergente, se puede hacer $n$ bastante grande para que sea inferior en valor absoluto á $\xi$ cada una de las sumas

$$a_n X^n$$
$$a_n X^n + a_{n+1} X^{n+1}$$
$$a_n X^n + a_{n+1} X^{n+1} + a_{n+2} X^{n+2}.$$

Determinado así el número $n$, demos en la serie (1) á la variable $x$ un valor comprendido entre cero y X, que puede ser igual al uno ú otro de estos dos límites. La suma S de los tér-

minos, que en la serie (1) siguen al $n^{\text{simo}}$, puede escribirse

$$a_n X^n \left(\frac{x}{X}\right)^n + a_{n+1} X^{n+1} \left(\frac{x}{X}\right)^{n+1} + \ldots\ldots$$

siendo las cantidades

$$\left(\frac{x}{X}\right)^n, \left(\frac{x}{X}\right)^{n+1}, \ldots\ldots, \left(\frac{x}{X}\right)^{n+p},$$

positivas y cada una menor que la precedente.

Luego, en virtud del lema, la misma serie S es, en valor absoluto, inferior á $\varepsilon \left(\frac{x}{X}\right)^n$ y *á fortiori* á $\varepsilon$.

Luego existe un número $n$ valedero para todo valor de $x$ comprendido entre o y X inclusivamente, y tal que el resto $R_n(x)$ de la serie (1) sea inferior en valor absoluto á $\varepsilon$, lo que demuestra el segundo teorema de Abel.

Combinando este teorema con el del número 21, resulta que si una serie entera (1) es convergente para un valor X de la variable $x$, su suma es una función $\varphi(x)$ continua en el intervalo (o, X), comprendidos los límites de este intervalo. Si pues $x$ tiende hacia X por valores inferiores en valor absoluto á $|X|$, el límite de $\varphi(x)$ es $\varphi(X)$.

Por ejemplo, sea

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots = \log(1+x);$$

para $x$ comprendido entre o y 1, la suma de la serie convergente $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\ldots$ es log 2.

**25.** APLICACIONES Á LA DIFERENCIACIÓN É INTEGRACIÓN.

1.° Sea R el radio de convergencia de

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_n x_n + \ldots\ldots \qquad (5)$$

En todo intervalo $(\alpha, \beta)$ comprendido entre $-R$ y $+R$ la serie es uniformemente convergente y el teorema 22 aplicable.

Si elegimos, por ejemplo, el intervalo (0, $x$), siendo $x < R$ en valor absoluto, se tiene

$$\int_0^x f(x)dx = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \ldots\ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots\ldots \quad (6)$$

2.° Sea ahora la serie

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots\ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots\ldots \quad (7)$$

cuyos términos son las derivadas de la serie (5).

Supongamos que X es un número cuyo módulo está comprendido entre $|x|$ y R, siendo R el radio de convergencia de la serie (5), suponiendo también que X y $x$ tengan igual signo. La serie

$$1 + 2\left(\frac{x}{X}\right) + 3\left(\frac{x}{X}\right)^2 + \ldots\ldots \quad (8)$$

es convergente, porque el límite de la relación de un término al precedente es $\frac{x}{X}$, menor que 1.

Pero la serie (8) tiene todos sus términos positivos, y si se les multiplica respectivamente por los números

$$a_1,\ a_2 X,\ a_3 X^2, \ldots\ldots \quad (9)$$

se obtiene la serie (7); luego para probar la convergencia, basta demostrar que los multiplicadores (9) permanecen finitos, lo que se ve inmediatamente, por ser $a_n X^{n-1}$ el producto del número fijo $\frac{1}{X}$ por $a_n X_n$, que es el término general de una serie convergente.

La serie (7) es pues absolutamente convergente en el intervalo (— R, + R) y, por consiguiente, uniformemente convergente en todo intervalo ($\alpha$, $\beta$) comprendido en el anterior.

Luego (23) la serie (5) representa la derivada $f'(x)$. Así:

*Una serie entera define, en el intervalo* (— R, R), *siendo* R *el radio de convergencia, una función continua cuya derivada es la serie formada por las derivadas de sus diversos términos.*

**26.** DERIVADAS SUCESIVAS DE UNA SERIE ENTERA. Sea la serie entera

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n + \ldots\ldots$$

convergente en el intervalo $(-R, +R)$. Su derivada

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots\ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots\ldots$$

es convergente en el mismo intervalo, pues si $X < R' < R$, la serie auxiliar

$$\frac{1}{R'} + \frac{2}{R'}\frac{X}{R'} + \frac{3}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^2 + \ldots\ldots + \frac{n}{R'}\left(\frac{X}{R'}\right)^{n-1} + \ldots\ldots$$

es convergente, porque el límite de la relación de un término al precedente es un número $\frac{X}{R'} < 1$. Multiplicando los términos de esta serie respectivamente por $A_1 R'$, $A_2 R'^2$, $\ldots\ldots A_n R'^n$, $\ldots\ldots$, menores todos que un número fijo, porque $R' < R$, la nueva serie obtenida

$$A_1 + 2A_2 X + \ldots\ldots + n A_n X^{n-1} + \ldots\ldots$$

es convergente. Se demuestra de igual manera que la serie es divergente si $X > R$.

La suma de la serie $a_1 + 2a_2 x + \ldots\ldots$ es una función continua de la variable en el mismo intervalo que la serie primitiva. Y por ser uniformemente convergente en todo intervalo $(-R, +R')$, donde $R' < R$, representa la derivada de $f(x)$ en este intervalo.

Pero, pudiéndose tomar R' tan próximo á R como se quiera, resulta que la función $f(x)$ admite para todo valor de $x$ comprendido entre $-R$ y $+R$, una derivada representada por la serie obtenida derivando

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots\ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots\ldots \quad (10)$$

Repitiendo el razonamiento, deduciremos que $f(x)$ admite una derivada segunda

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots\ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots\ldots$$

y así sucesivamente. Por consiguiente la función $f(x)$ admite en el intervalo $(-R, +R)$ una función ilimitada de derivadas, representadas por las series obtenidas diferenciando

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \ldots\ldots n a_n + 2 \cdot 3 \ldots\ldots n(n+1) a_{n+1} x + \ldots\ldots \quad (11)$$

Si se hace $x = 0$, resulta

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

de manera que el desarrollo $f(x)$ es idéntico á la fórmula de Mac Laurin.

27. Extensión de la fórmula de Taylor. Sea $f(x)$ la suma de una serie entera, convergente en el intervalo $(-R, +R)$, $x_0$ un punto de este intervalo tal, que $|x_0| + |h| < R$. La serie

$$a_0 + a_1 (x_0 + h) + a_2 (x_0 + h)^2 + \ldots\ldots + a_n (x_0 + h)^n + \ldots\ldots$$

cuya suma es $f(x_0 + h)$, puede sustituirse por otra serie á doble entrada, que se obtiene desarrollando las diversas potencias de $x_0 + h$ y escribiendo en una misma línea los términos de igual grado en $h$,

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots\ldots + a_n x_0^n + \ldots\ldots \\ + a_1 h + 2 a_2 x_0 h + \ldots\ldots + n a_n x_0^{n-1} h + \ldots\ldots \\ + a_2 h^2 + \ldots\ldots + \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_n x_0^{n-2} h^2 + \ldots\ldots \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} \quad (12)$$

Esta serie es absolutamente convergente.

En efecto, si se sustituye cada término por su valor absoluto, se tendrá la nueva serie á doble entrada con términos positivos

$$\left.\begin{array}{l} A_0 + A_1 |x_0| + A_2 |x_0|^2 + \ldots\ldots + A_n |x_0|^n + \ldots\ldots \\ + A_1 |h| + 2 A_2 |x_0|\,|h| + \ldots\ldots + n A_n |x_0|^{n-1} |h| + \ldots\ldots \\ + A_2 |h|^2 + \ldots\ldots + \dfrac{n(n-1)}{1 \cdot 2} A_n |x_0|^{n-2} |h|^2 + \ldots \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} \quad (13)$$

Si se suman los elementos de este cuadro por columnas verticales, se obtiene la serie

$$A_0 + A_1[|x_0| + |h|] + \ldots\ldots + A_n[|x_0| + |h|]^n + \ldots\ldots$$

que es convergente, por ser $|x_0| + |h| < R$, por hipótesis. Puede pues, efectuarse la suma, sea por líneas sea por columnas. Efectuándose por columnas, se obtiene $f(x_0 + h)$, efectuándose por líneas, el resultado queda ordenado según las potencias de $h$, siendo los coeficientes de $h$, $h^2$, ..... respectivamente $f'(x_0)$, $\frac{f''(x_0)}{1 \cdot 2}$, ..... ; y podremos escribir suponiendo $|h| < R - |x_0|$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1} f'(x_0) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(x_0) + \ldots\ldots \quad (14)$$

La fórmula (14) se aplica desde luego en el intervalo $(x_0 - R + |x_0|, x_0 + R - |x_0|)$; pero puede conseguirse que el segundo miembro de (14) sea convergente en un intervalo mayor.

Por ejemplo el desarrollo de $(1 + x)^m$, siende $m$ entero y positivo, es válido desde $x = -1$ hasta $x = +1$. Sea $x_0$ un valor comprendido en este intervalo. Podremos escribir

$$(1 + x)^m = (1 + x_0 + x - x_0)^m = (1 + x_0)^m [1 + z]^m$$

$$\text{donde} \quad z = \frac{x - x_0}{1 + x_0}$$

y desarrollar $(1 + z)^m$ según las potencias de $z$.

Este desarrollo será válido para $|z| < 1$, es decir, para los valores de $x$ comprendidos entre $-1$ y $1 + 2x_0$.

Si $x_0$ es positivo, el nuevo intervalo es mayor que el anterior, y por consiguiente, la nueva fórmula permitirá calcular el valor de la función para valores de la variable exteriores al intervalo primitivo.

**28.** FUNCIONES MAYORANTES. (*). Lo expuesto permite establecer íntima analogía entre los polinomios y las series enteras. Así, dadas varias series enteras, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..... $f_n(x)$, siendo $(-r, +r)$ la menor de las regiones de convergencia, y $|x| < r$, estas series son absolutamente convergentes, y se las puede combinar por adición y multiplicación, como los polinomios. Análogamente, todo polinomio entero en $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ puede desarrollarse en una serie entera convergente en el mismo intervalo.

Para extender estas propiedades, consideremos una serie entera

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n + \ldots\ldots$$

y sea $\varphi(x)$ otra serie entera

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \ldots\ldots + \alpha_nx^n + \ldots\ldots$$

cuyos coeficientes $\alpha_i$ son positivos. Se dice que la función $\varphi(x)$ es *mayorante* respecto á la función $f(x)$, si cualquiera de los coeficientes $\alpha_n$ es superior al valor absoluto del coeficiente correspondiente de $f(x)$, de modo que

$$|a_0| < \alpha, \quad |a_1| < \alpha_1, \ldots\ldots, \quad |a_n| < \alpha_n, \ldots\ldots$$

La utilidad de las funciones mayorantes estriba en la propiedad siguiente:

Sea $P_n(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n)$ un polinomio que depende de los $n + 1$ primeros coeficientes de $f(x)$, que son reales y positivos. Si se sustituye en el polinomio $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ por los coeficientes correspondientes de la función mayorante $\varphi(x)$, se

---

(*) El concepto de *función mayorante*, de que hace importantes aplicaciones M. Goursat en su *Cours d' Analyse mathématique* t. I, fué introducido por M. Meray en sus *Leçons nouvelles sur l' Analyse infinitesimal* (première partie) pág. 265. Dice: *Dada una función olótropa* $f(x, y, \ldots\ldots)$ *de variables cualesquiera, llamamos* FUNCIÓN MAYORANTE *de esta función en* $x_0, y_0, \ldots\ldots$ *á toda función* $\varphi(x, y, \ldots\ldots)$ *de las mismas variables con la propiedad de que para* $x = x_0, y = y_0, \ldots\ldots$, *su valor y los de sus derivadas de todos los órdenes sean reales, positivos y superiores á los módulos de los valores correspondientes de* $f(x, y, \ldots\ldots)$ *y de sus derivadas semejantes.*

tendrá evidentemente

$$|P(a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n) \leqq P(\alpha_0, \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n).$$

Por ejemplo, si $\varphi(x)$ es una función mayorante para $f(x)$, la serie que representa á $[\varphi(x)]^2$ será mayorante para $[f(x)]^2$, ... y, en general, $[\varphi(x)]^n$ será mayorante respecto á $[f(x)]^n$. Igualmente si $\varphi$ y $\varphi_1$ son funciones mayorantes respecto á $f$ y $f_1$, el producto $\varphi\varphi_1$ será mayorante respecto al producto $ff_1$.

Dada una serie entera $(fx)$ convergente en el intervalo $(-R, +R)$, la investigación de una función mayorante es un problema indeterminado; pero interesa especialmente elegir la función mayorante más simple que sea posible.

Sea $r$ un número positivo inferior á R, pero tan próximo á R como se quiera. Siendo la serie absolutamente convergente, para $x = r$, si M es el límite superior del valor absoluto de los términos de dicha serie, se tiene para cualquier valor de $n$,

$$A_n r^n \leqq M \quad \text{ó} \quad |a_n| = A_n \leqq \frac{M}{r^n}.$$

La serie cuyo término general es $M\,\frac{x^n}{r^n}$, ó

$$M + M\,\frac{x}{r} + \ldots\ldots + \frac{Mx^n}{r^n} + \ldots\ldots = \frac{M}{1 - \frac{x}{r}}$$

es una función mayorante de $f(x)$. Cuando $f(x)$ no tiene término constante, se toma por función mayorante

$$\frac{M}{1 - \frac{x}{r}} - M.$$

Se puede tomar para $r$ un número cualquiera $< R$, y es claro que el número correspondiente M disminuye en general con $x$, pero nunca puede ser inferior á $A_0$, si $A_0$ no es nulo. Cuando esto sucede, se puede siempre hallar un número posi-

tivo $\rho < R$ tal, que la función $\dfrac{A_0}{1 - \dfrac{x}{\rho}}$ sea mayorante para $f(x)$.

En efecto, sea

$$M + M\frac{x}{r} + M\frac{x^2}{r^2} + \ldots\ldots + M\frac{x^n}{r^n} + \ldots\ldots$$

donde $M > A_0$, una primera mayorante. Tomemos un número $\rho < r\dfrac{A_0}{M}$, y podremos escribir, suponiendo $n \geq 1$,

$$|a_n \rho^n| = |a_n r^n| \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^n < M\frac{\rho}{r}\left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1},$$

y por consiguiente $|a_n \rho^n| < A_0$; por otra parte se tiene $|a_0| = A_0$. La serie

$$A_0 + A_0\frac{x}{\rho} + A_0\frac{x^2}{\rho^2} + \ldots\ldots + A_0\frac{x^n}{\rho^n} + \ldots\ldots$$

es pues mayorante.

El conocimiento de una progresión geométrica decreciente permite conocer la aproximación obtenida, cuando se sustituye la suma $f(x)$ de la serie por sus $n + 1$ primeros términos. Si la serie $\dfrac{M}{1 - \dfrac{x}{r}}$ es mayorante para $f(x)$, el resto de la serie propuesta

$$a_{n+1}\, x^{n+1} + a_{n+2}\, x^{n+2} + \ldots\ldots$$

es menor en valor absoluto que el resto correspondiente de la serie

$$M\left(\frac{x^{n+1}}{r^{n+1}} + \frac{x^{n+2}}{r^{n+2}} + \ldots\ldots\right) \quad \text{ó que} \quad M\frac{\left(\dfrac{x}{r}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{x}{r}}$$

**29.** SUSTITUCIÓN DE UNA SERIE POR OTRA. Sea

$$z = f(y) = a_0 + a_1 y + \ldots\ldots + a_n y^n + \ldots\ldots \qquad (15)$$

una serie ordenada según las potencias de una variable $y$, y convergente cuando $|y| < R$. Sea además

$$y = \varphi(x) = b_0 + b_1 x + \ldots\ldots + b_n x^n + \ldots\ldots \qquad (16)$$

otra serie convergente en el intervalo $(-r, +r)$. Si sustituimos en la serie (15) $y$, $y^2$, ..... por sus desarrollos en serie según las potencias de $x$ deducidos de la fórmula (16), obtendremos un cuadro de doble entrada

$$\left.\begin{array}{l} a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 \qquad + \ldots\ldots + a_n b_0^n + \ldots\ldots \\ + a_1 b_1 x + 2a_2 b_0 b_1 x \quad + \ldots\ldots + n a_n b_0^{n-1} b_1 x + \ldots\ldots \\ + a_1 b_2 x^2 + a_2 (b_1^2 + 2 b_0 b_2) x^2 + \ldots\ldots \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{array}\right\} \qquad (17)$$

Para que este cuadro á doble entrada sea absolutamente convergente, es necesario desde luego que la primera línea

$$a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + \ldots\ldots$$

sea absolutamente convergente, ó que $|b_0| < R$.

Esta condición es además suficiente, porque si queda satisfecha, se puede tomar por función mayorante de $\varphi(x)$ una expresión de la forma $\dfrac{m}{1 - \dfrac{x}{\rho}}$ en la que $m$ es un número positivo cualquiera mayor que $|b_0|$ y en la que $\rho < r$. Puede pues suponerse que se haya tomado $m < R$. Sea R′ un número positivo comprendido entre $m$ y R; la función $f(y)$ admite por función mayorante una expresión de la forma

$$\frac{M}{1 - \dfrac{y}{R}} = M + M\frac{y}{R'} + M\frac{y^2}{R'^2} + \ldots\ldots$$

Si en esta se sustituye $y$ por $\dfrac{m}{1-\dfrac{x}{\rho}}$, y se desarrollan las diversas potencias de $y$ según las potencias crecientes de $x$, por la fórmula del binomio, se obtendrá un nuevo cuadro á doble entrada

$$\left.\begin{aligned} &M + M\left(\frac{m}{R'}\right) + \cdots\cdots + M\left(\frac{m}{R'}\right)^n + \cdots\cdots \\ &+ M\frac{m}{R'}\frac{x}{\rho} + \cdots\cdots + nM\left(\frac{m}{R'}\right)^n\frac{x}{\rho} + \cdots\cdots \\ &+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

cuyos coeficientes son todos positivos y mayores que los módulos de los coeficientes correspondientes del cuadro (17); porque un coeficiente cualquiera del cuadro (17) se deduce de los coeficientes $a_0, a_1, \ldots\ldots, b_0, b_1, \ldots\ldots$ por adiciones y multiplicaciones, tan sólo. Si pues la serie (18) á doble entrada es absolutamente convergente, también lo será la (17). Y si en la serie (18) se sustituye $x$ por su valor absoluto, será preciso, para que el cuadro (17) sea convergente, que las series obtenidas tomando los términos de una misma columna sean convergentes, es decir, que se tenga $|x| < \rho$. Cuando esta condición se cumple, la suma de los términos de la $(n+1)^{\text{sima}}$ columna es igual á

$$M\left[\frac{m}{R'\left(1-\dfrac{|x|}{\rho}\right)}\right]^n$$

y será necesario que se tenga también

$$m < R'\left(1-\frac{|x|}{\rho}\right), \quad \text{es decir,} \quad |x| < \rho\left(1-\frac{m}{R'}\right). \quad (19)$$

Siendo consecuencia de esta última relación la precedente $|x| < \rho$, resulta que expresa la condición necesaria y suficiente para que la doble serie (18) sea absolutamente convergente; luego la doble serie (17) será también absolutamente convergen-

te para valores de $x$ que satisfagan á esta condición. Todos estos valores de $x$ hacen convergente á la serie $\varphi(x)$; y el valor correspondiente de $y$ es menor que R′ en valor absoluto, porque de las desigualdades

$$|\varphi(x)| < \frac{m}{1 - \frac{|x|}{\rho}}; \qquad \frac{|x|}{\rho} < 1 - \frac{m}{R'},$$

resulta que $|\varphi(x)| < R'$. Si pues se efectúa la suma de la serie (17) por columnas, se obtiene

$$a_0 + a_1\varphi(x) + a_2[\varphi(x)]^2 + \ldots\ldots + a_n[\varphi(x)]^n + \ldots\ldots,$$

es decir, $f[\varphi(x)]$.

Si se suma por líneas horizontales, se obtendrá una serie ordenada según las potencias crecientes de $x$, y se podrá escribir

$$f[\varphi(x)] = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots\ldots + c_n x^n + \ldots\ldots, \quad (20)$$

expresándose los coeficientes $c_0, c_1, \ldots\ldots$ por medio de los coeficientes de las dos series, con auxilio de las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} c_0 &= a_0 + a_1b_0 + a_2b_0^2 + \ldots\ldots + a_nb_0^n + \ldots\ldots \\ c_1 &= a_1b_1 + 2a_2b_1b_0 + \ldots\ldots \qquad + na_nb_0^{n-1}b_1 + \ldots\ldots \\ c_2 &= a_1b_2 + a^2(b_1^2 + 2b_0b_2) + \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

La relación (20) sólo queda establecida para el caso de que los valores de $x$ satisfagan á la desigualdad (19); pero puede hacerse que subsista para un intervalo mayor, lo que exige el estudio de las funciones de una variable imaginaria.

*Ejemplo.* Cauchy ha demostrado que puede deducirse la fórmula del binomio del desarrollo de $\log(1 + x)$. En efecto

$$(1 + x)^m = e^{m\log(1+x)} = e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$$

haciendo

$$y = m\log(1 + x) = m\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\right),$$

lo que da, sustituyendo el segundo desarrollo en el primero,

$$(1+x)^m = 1 + m\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\right) + \frac{m^2}{1\,.\,2}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots\ldots\right)^2 + \ldots\ldots$$

Ordenando el segundo miembro según las potencias de $x$, se obtiene para coeficiente de $x^n$ un polinomio de grado $n$ en $m$, $P_n(m)$, que debe anularse para $m = 0, 1, 2, \ldots\ldots n-1$ y reducirse á 1 para $m = n$, obteniéndose

$$P_n = \frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots n}.$$

30. División de las series enteras. Sea, en primer lugar, la inversa de una serie entera que principia por la unidad

$$f(x) = \frac{1}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots}$$

convergente en el intervalo $(-r, +r)$. Si hacemos

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots,$$

tendremos $$f(x) = \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + \ldots\ldots;$$

y sustituyendo, $$f(x) = 1 - b_1 x + (b_1^2 - b_2)x^2 + \ldots\ldots,$$

serie valedera en cierto intervalo.

Sea ahora el cociente de dos series enteras convergentes

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots}. \qquad (22)$$

Si $b_0$ no es nulo, podremos escribir

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots)\,\frac{1}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots}$$

que es el producto de dos series enteras convergentes. El cociente podrá por consiguiente escribirse bajo la forma de una

serie entera convergente para valores de $x$ próximos á cero,

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots\ldots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\ldots \qquad (23)$$

Quitando el denominador é identificando en los dos miembros, se obtienen las relaciones

$$a_n = b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots\ldots + b_n c_0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots\ldots) \qquad (24)$$

que determinan sucesivamente los coeficientes $c_0, c_1, \ldots\ldots$, coeficientes que también se determinan efectuando la división de los polinomios, según la regla conocida de esta operación.

En el caso de ser $b_0 = 0$, hagamos $\psi(x) = x^k \psi_1(x)$, siendo $k$ un número entero, positivo y $\psi_1(x)$ una serie entera cuyo término constante no es nulo. Podremos escribir

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{1}{x^k} \frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}$$

y, según lo expuesto,

$$\frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)} = c_0 + c_1 x + \ldots\ldots + c_{k-1} x^{k-1} + c_k x^k + \ldots\ldots$$

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{c_0}{x^k} + \frac{c_1}{x^{k-1}} + \ldots + \frac{c_{k-1}}{x} + c_k + c_{k+1} x + \ldots \qquad (25)$$

El cociente es pues igual á la suma de una fracción racional que se hace infinita para $x = 0$ y de una serie entera convergente en cierto intervalo alrededor del origen.

*Ejemplo.* Desarrollar, según las potencias de $z$, la fracción

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}}.$$

Haciendo $y = 2xz - z^2$, se puede escribir, cuando $|y| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - y}} = (1 - y)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} y + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} y^2 + \ldots\ldots,$$

y sustituyendo,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = 1 + \frac{2xz-z^2}{2} + \frac{3}{8}(2xz-z^2)^2 + \ldots\ldots$$

y ordenando según las potencias de $z$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \ldots + P_n z^n + \ldots \qquad (26)$$

siendo $P_0 = 1$, $P_1 = x$, $P_2 = \frac{3x^2-1}{2}$, $\ldots\ldots$

Si diferenciamos la fórmula (26) con relación á $z$, tendremos

$$\frac{x-z}{(1-2xz+z^2)^{\frac{3}{2}}} = P_1 + 2P_2 z + \ldots\ldots + nP_n z^{n-1} + \ldots\ldots,$$

y en virtud de la fórmula (26),

$$(x-z)(P_0 + P_1 z + \ldots\ldots + P_n z^n + \ldots\ldots) = (1-2xz+z^2)(P_1 + 2P_2 z + \ldots\ldots)$$

que da la relación recurrente

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}.$$

31. Series enteras de muchas variables. Sea primero la serie doble $\Sigma\, a_{mn} x^m y^n$ en la que los números $m$ y $n$ varían desde o hasta $+\infty$, y en la que los coeficientes $a_{mn}$ tienen cualquier signo. Podemos enunciar el siguiente

Teorema. *Si para un sistema de valores* $x = x_0$, $y = y_0$, *el valor absoluto de un término cualquiera de la serie* $\Sigma\, a_{mn} x^m y^n$ *es inferior á un número fijo, la serie es absolutamente convergente para todo sistema de valores de* x *é* y *tal, que sea* $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$.

En efecto, supongamos que para valores cualesquiera de los índices $m$ y $n$, se tenga

$$|a_{mn} x_0^m y_0^n| < M \quad \text{ó} \quad |a_{mn}| < \frac{M}{|x_0|^m |y_0|^n}.$$

El valor absoluto del término general de la serie doble $\Sigma\, a_{mn}x^m y^n$ es menor que el término correspondiente de la serie doble $\Sigma\, M \left|\frac{x}{x_0}\right|^m \left|\frac{y}{y_0}\right|^n$, que es convergente siempre que $|x| < |x_0|$, $|y| < |y_0|$ y cuya suma es $\frac{M}{\left(1 - \left|\frac{x}{x_0}\right|\right)\left(1 - \left|\frac{y}{y_0}\right|\right)}$.

Representemos por $r$ y $\rho$ dos números positivos tales, que la doble serie $\Sigma\, |a_{mn}| r_m \rho_n$ sea convergente; y sea R el rectángulo formado por las cuatro rectas $x = r$, $x = -r$, $y = \rho$, $y = -\rho$.

Para todos los puntos tomados en el interior ó en uno de los lados del rectángulo, los términos de la serie á doble entrada

$$F(x, y) = \Sigma\, a_{mn}x^m y^n \qquad (27)$$

son todos menores en valor absoluto que los de la $\Sigma\, |a_{mn}| r^m \rho^n$; luego es absoluta y uniformemente convergente en el interior de R, y define por tanto una función continua de las dos variables $x$ é $y$ en esta región del plano.

Se demuestra, como para el caso de una variable, que las serie dobles obtenidas diferenciándolas un número cualquiera de veces, son absoluta y uniformemente convergentes en el rectángulo formado por las rectas $x = r - \varepsilon$, $x = -r + \varepsilon$, $y = \rho - \varepsilon'$, $y = -\rho + \varepsilon'$, siendo $\varepsilon$ y $\varepsilon'$ números positivos tan pequeños como se quiera. Estas series representan las derivadas parciales de los diferentes órdenes de $F(x, y)$.

Por ejemplo, la suma de la serie $\Sigma\, m a_{mn}x^{m-1}y^n$ es igual á $\frac{\partial F}{\partial x}$, y la fórmula (27) puede escribirse así:

$$F(x, y) = \sum \frac{\left(\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n}\right)}{1 \cdot 2 \ldots m \cdot 1 \cdot 2 \ldots n} x^m y^n \qquad (28)$$

habiéndose tomado los valores de las derivadas parciales de $F(x, y)$ para $x = y = 0$.

Si se agrupan los términos de igual grado en $x$ é $y$ de la serie doble, se obtendrá una serie simple, que puede escribirse

$$F(x, y) = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots\ldots + \varphi_n + \ldots\ldots \qquad (29)$$

expresando $\varphi_n$ un polinomio homogéneo de grado $x$ é $y$, cuya representación simbólica es

$$\varphi_n = \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{(n)}.$$

Dicho desarrollo es equivalente al que daría la fórmula de Taylor.

Sea $(x_0, y_0)$ un punto interior al rectángulo R, y $(x_0 + h, y_0 + k)$ un punto próximo tal, que se tenga $|x_0| + |h| < r$, $|y_0| + |k| < \rho$. En el interior del rectángulo formado por las cuatro rectas

$$x = x_0 \pm [r - |x|], \quad y = y_0 \pm [\rho - |y_0|],$$

la función $F(x, y)$ puede desarrollarse en serie entera ordenada según las potencias positivas de $x - x_0$ y de $y - y_0$,

$$F(x_0 + h, y_0 + k) = \sum \frac{\left(\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial y^n}\right)_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}}{1 \cdot 2 \ldots m \cdot 1 \cdot 2 \ldots n} h^m k^n, \qquad (30)$$

lo que se demuestra sustituyendo en la doble serie

$$\Sigma a_{mn}(x_0 + h)^m (y_0 + k)^n$$

cada término por su desarrollo según las potencias de $h$ y de $k$, y observando que la nueva serie múltiple es absolutamente convergente en las condiciones enunciadas. Ordenando según las potencias de $h$ y $k$, se obtiene la fórmula (30).

**32.** Funciones mayorantes. Dada una serie entera de $n$ variables $f(x, y, z, \ldots\ldots)$, se dirá que otra serie de $n$ variables $\varphi(x, y, z, \ldots\ldots)$ es mayorante respecto á la primera, si un coeficiente cualquiera $\varphi(x, y, z, \ldots\ldots)$ es positivo ó superior al valor absoluto del coeficiente correspondiente de $f(x, y, z, \ldots\ldots)$,

Si la serie $\Sigma\,|a_{mn}x^m y^n|$ es convergente para $x = r$, $y = \rho$, la función

$$\varphi(x, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{\rho}\right)} = M\,\Sigma\left(\frac{x}{r}\right)^m\left(\frac{\rho}{y}\right)^n$$

en la que M es superior á todos los términos de la serie $\Sigma\,|a_{mn}\rho^m r^n|$ es una función mayorante respecto á la serie $\Sigma\,a_{mn}x^m y^n$. La función

$$\psi(x, y) = \frac{M}{1 - \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{\rho}\right)}$$

es también una función mayorante, porque el coeficiente de $x^m y^n$ en $\psi(x, y)$ es igual al coeficiente de este mismo término en $M\left(\frac{x}{r} + \frac{y}{\rho}\right)^{m+n}$, y por consiguiente, es por lo menos igual al de $x^m y^n$ en $\varphi(x, y)$.

Igualmente la serie triple

$$f(x, y, z) = \Sigma\,a^{mnp}x^m y^n z^p,$$

absolutamente convergente para $x = r$, $y = r'$, $z = r''$, siendo $r$, $r'$, $r''$ tres números positivos, admite por función mayorante á

$$f(x, y, z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{y}{r'}\right)\left(1 - \frac{z}{r''}\right)},$$

que se puede substituir por cualquiera de las siguientes:

$$\frac{M}{1 - \left(\frac{x}{r} + \frac{y}{r'} + \frac{z}{r''}\right)}, \quad \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left[1 - \left(\frac{y}{r'} + \frac{z}{r''}\right)\right]}.$$

Cuando $f(x, y, z)$ no contiene término constante, se puede tomar también por función mayorante cualquiera de las precedentes, disminuida en M.

El teorema de la substitución de una serie entera por otra serie entera, se extiende al caso de más de una variable. Nos limitaremos á enunciar el siguiente

TEOREMA. *Si en una serie entera convergente de* p *variables*, $y_1, y_2, \ldots, y_p$, *se substituyen estas variables por* p *desarrollos en series enteras de* q *variables* $x_1, x_2, \ldots, x_q$, *que no tengan términos constantes, y convergentes, el resultado puede obtenerse bajo la forma de una serie entera ordenada con relación á las potencias de* $x_1, x_2, \ldots, x_q$, *siempre que los valores absolutos de estas variables sean inferiores á ciertos límites.*

33. FUNCIONES IMPLÍCITAS. Establecida la existencia de las funciones implícitas (*Calc. dif. p.* 53) bajo ciertas condiciones de continuidad, vamos ahora á examinarlas en el caso de que las ecuaciones que las definen sean desarrollables en series enteras, enunciando el siguiente

TEOREMA. *Sea* $F(x, y) = 0$ *una ecuación cuyo primer miembro puede desarrollarse en serie convergente, ordenada según las potencias ascendentes de* $x - x_0$, $y - y_0$, *sin tener dicha serie término constante y sin ser nulo el coeficiente de* $y - y_0$. *Esta ecuación admite una raíz y sólo una, que tiende hacia* $y_0$, *cuando* x *tiende hacia* $x_0$, *y puede desarrollarse en serie entera, ordenada según las potencias de* $x - x_0$.

Supongamos para más sencillez, $x_0 = y_0 = 0$. Separando en un miembro el término de primer grado en $y$, se puede escribir la ecuación así:

$$y = f(x, y) = a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots . \quad (31)$$

Esto sentado, se puede satisfacer *formalmente* á dicha ecuación sustituyendo $y$ por una serie

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + \ldots . + c_n x^n + \ldots . , \quad (32)$$

y operando en el segundo miembro como si esta serie fuese convergente, pues identificando los dos miembros, obtendremos las condiciones

$$c_1 = a_{10}, \quad c_2 = a_{20} + a_{11}c_1 + a_{02}c_1^2, \ldots .$$

En general, $c_n$ se expresa por medio de los coeficientes $a_{ik}$ en los que $i+k \leq n$ y de los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, mediante adiciones y multiplicaciones tan solo, de manera que podremos escribir

$$c_n = P_n(a_{10}, a_{20}, a_{11}, \ldots, a_{0n}), \tag{33}$$

siendo $P_n$ un polinomio cuyos coeficientes son enteros positivos. Para demostrar la legitimidad de las operaciones precedentes, basta demostrar que la serie obtenida es convergente para valores de $x$ suficientemente pequeños.

Sea $$\varphi(x, Y) = \Sigma b_{mn} x^m Y^n$$

una función mayorante respecto á $f(x, y)$, en la que se tiene $b_{00} = b_{01} =$ o siendo $b_{mn}$ positivo y por lo menos igual á $|a_{mn}|$. Si se considera la ecuación auxiliar

$$Y = \varphi(x, Y) = \Sigma b_{mn} x^m Y^n, \tag{34}$$

y se trata como arriba, de satisfacer á esta ecuación tomando por Y una serie entera en $x$,

$$Y = C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots \tag{35}$$

obtendremos para los valores de los coeficientes $C_1, C_2, \ldots$

$$C_1 = b_{10}, \qquad C_2 = b_{20} + b_{11} C_1 + b_{02} C_1^2, \ldots$$

y en general,

$$C_n = P_n(b_{10}, b_{20}, \ldots, b_{0n}) \tag{36}$$

Comparando las relaciones (33) y (36) tendremos $|c_n| < C_n$, porque todos los coeficientes del polinomio $P_n$ son positivos, y se tiene $|a_{mn}| \leq b_{mn}$. La serie (32) será pues convergente si la serie (35) lo es. Pero podemos tomar como función mayorante $\varphi(x, Y)$ una expresión de la forma

$$\varphi(x, Y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{Y}{\rho}\right)} - M - M\frac{Y}{\rho},$$

siendo M, $r$, $\rho$ tres números positivos, y la ecuación auxiliar (34) se reduce, después de quitar denominadores, á

$$Y^2 - \frac{\rho^2 Y}{\rho + M} + \frac{M\rho^2}{\rho + M} \frac{\frac{x}{r}}{1 - \frac{x}{r}} = 0.$$

Esta ecuación admite una raíz nula para $x = 0$, cuya expresión es

$$Y = \frac{\rho^2}{2(\rho + M)} - \frac{\rho^2}{2(\rho + M)} \sqrt{1 - \frac{4M(\rho + M)}{\rho^2} \frac{\frac{x}{r}}{1 - \frac{x}{r}}}.$$

La cantidad subrradical puede escribirse así:

$$\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-1}, \quad \text{haciendo} \quad \alpha = r\left(\frac{\rho}{\rho + 2M}\right)^2,$$

y se tiene todavía

$$Y = \frac{\rho^2}{2(\rho + M)}\left[1 - \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

Esta raíz Y puede desarrollarse en serie convergente en el intervalo $(-\alpha, +\alpha)$, desarrollo que es idéntico al que daría la sustitución directa, es decir, al desarrollo (35). Por consiguiente, la serie (32) es *a fortiori* convergente en el intervalo $(-\alpha, +\alpha)$, que sólo es un límite inferior del mismo.

Del modo de obtener los coeficientes $c_n$, resulta que la suma $y$ de la serie (32) satisface á la ecuación (31).

Escribámosla bajo la forma $F(x, y) = y - f(x, y) = 0$, y sea $y = P(x)$ la raíz que acabamos de obtener. Si se hace en $F(x, y)$, $y = P(x) + z$ y se ordena el resultado de la sustitución según las potencias de $x$ y $z$, todos los términos deben ser divisibles por $z$, porque el resultado debe anularse para cualquier

valor de $x$ cuando $z = 0$; luego tendremos idénticamente

$$F[x, P(x) + z] = zQ(x, z),$$

siendo $Q(x, z)$ una serie entera en $x$ y $z$; y si sustituimos $z$ por $y - P(x)$ en $Q(x, z)$, se obtiene finalmente la identidad

$$F(x, y) = [y - P(x)]Q_1(x, y).$$

El término constante $Q_1$ debe ser igual á 1, porque el coeficiente de $y$ debe ser tambien 1, y podemos escribir

$$F(x, y) = [y - P(x)]\ (1 + \alpha x + \beta y + \ldots\ldots) \qquad (37)$$

descomposición en un producto debida á Weierstrass.

34. Teorema general. Sea un sistema de $p$ relaciones entre $p + q$ variables

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p) &= 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ F_p(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q; y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

en el cual $F_1, F_2, \ldots\ldots$ son nulas para $x_i = y_k = 0$ y desarrollables en series enteras en la proximidad.

Supongamos además que el determinante funcional

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots\ldots, F_p)}{D(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p)}$$

*no sea nulo* para estos valores.

Entonces, *las ecuaciones* (38) *admiten un sistema de soluciones, y uno solo, de la forma*

$$y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q), \ldots\ldots\ y_p = \varphi_p(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q),$$

*siendo* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots, \varphi_p$ *series enteras en* $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_q$, *que se anulan para* $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_q = 0$.

Limitándonos al caso de dos ecuaciones entre dos funciones $u$, $v$ y tres variables independientes $x$, $y$, $z$.

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= au + bv + cx + dy + ez + \ldots\ldots = 0 \\ F_2 &= a'u + b'v + c'x + d'y + e'z + \ldots\ldots = 0 \end{aligned}\right\}, \tag{39}$$

Puesto que el determinante $ab' - bc'$ no es nulo, por hipótesis, podemos sustituir las dos ecuaciones (39) por dos ecuaciones de la forma

$$\left.\begin{aligned} u &= \Sigma a_{mnpqr} x^m y^n z^p u^q v^r, \\ v &= \Sigma b_{mnpqr} x^m y^n z^p u^q v^r, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

cuyos segundos miembros no contienen términos constantes ni de primer grado en $u$ y en $v$.

Demostraremos de igual modo que arriba, que se satisface formalmente á estas ecuaciones tomando para $u$ y $v$ series enteras en $x, y, z$

$$u = \Sigma c_{ikl} x^i y^k z^l, \qquad v = \Sigma c'_{ikl} x^i y^k z^l \tag{41}$$

cuyos coeficientes se deducen de los coeficientes $a_{mnpqr}$ y $b_{mnpqr}$ por adiciones y multiplicaciones solamente.

Para establecer la convergencia de dichos desarrollos, basta compararlos con los desarrollos análogos obtenidos tratando de satisfacer á las dos ecuaciones auxiliares

$$U = V = \frac{M}{\left(1 - \frac{x+y+z}{r}\right)\left(1 - \frac{U+V}{\rho}\right)} - M\left(1 + \frac{U+V}{\rho}\right),$$

en las que M, $r$ y $\rho$ son números positivos cuyo significado se sabe. Estas dos ecuaciones se reducen á una sola ecuación de segundo grado

$$U^2 - \frac{\rho^2 U}{2\rho + 4M} + \frac{M\rho^2}{2\rho + 4M} \cdot \frac{\frac{x+y+z}{r}}{1 - \frac{x+y+z}{r}} = 0,$$

que admite una raíz nula para $x = y = z = 0$, cuya expresión es

$$U = \frac{\rho^2}{4(\rho + 2M)} - \frac{\rho^2}{4(\rho + 2M)} \sqrt{\frac{1 - \frac{x+y+z}{\alpha}}{1 - \frac{x+y+z}{r}}},$$

siendo $\alpha = r\left(\frac{\rho}{\rho + 4M}\right)^2$.

Esta raíz puede desarrollarse en serie entera mientras que los valores absolutos de $x, y, z$ no excedan á $\frac{\alpha}{3}$. La series (41) son pues convergentes entre estos límites.

35. Fórmula de Lagrange. Sea

$$z = x + y\varphi(z) \qquad (42)$$

una ecuación en la que $\varphi(z)$ es desarrollable en serie convergente según las potencias ascendentes de $z - x$, mientras que el valor de $z - x$ no exceda de cierto límite,

$$\varphi(z) = \varphi(x) + (z - x)\varphi'(x) + \frac{(z - x)^2}{1 \cdot 2}\varphi''(x) + \ldots\ldots$$

Según el teorema del núm. 33, esta ecuación admite una sola raíz, que tiende hacia $x$ cuando $y$ tiende hacia cero, y esta raíz se halla representada, para valores de $y$ suficientemente pequeños, por la suma de una serie convergente

$$z = x + x_1 y + x_2 y^2 + \ldots\ldots$$

En general, si $f(z)$ es una función desarrollable según las potencias de $z - x$, después de haber sustituido $z$ por el desarrollo anterior, se tendrá, para $f(z)$ un desarrollo ordenado según las potencias de $y$, que será todavía válido para valores de $y$ comprendidos entre ciertos límites,

$$f(z) = f(x) + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots\ldots + A_n y^n + \ldots\ldots \qquad (43)$$

El objeto de la fórmula de Lagrange es dar precisamente la expresión de los coeficientes $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n, \ldots\ldots$ en función de $x$.

Este problema no es esencialmente distinto del problema general. El coeficiente $A_n$ es, salvo el factor $n!$, la derivada $n^{\text{sima}}$, para $y = 0$ de $f(z)$, estando definida $z$ por la ecuación (42).

El cálculo de dicha derivada se abrevia, mediante las siguientes observaciones debidas á Laplace.

Las derivadas parciales de la función $z$ definida por la ecuación (42) con relación á las variables $x$ é $y$ se obtienen por las fórmulas

$$[1 - y\varphi'(z)]\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z), \qquad [1 - y\varphi'(z)]\frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

de las que se deduce inmediatamente

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{44}$$

haciendo $u = f(z)$. Además, si $F(z)$ es una función cualquiera de $z$, se verifica inmediatamente que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F(z)\frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[F(z)\frac{\partial u}{\partial x}\right], \tag{45}$$

porque el desarrollo de cada una de las derivadas es

$$F'(z)f'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + F(z)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Para demostrar que

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\varphi(z)^n\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

observaremos que es cierta en virtud de (44) para $n = 1$, y suponiendo que es cierta para cierto valor de $n$, se deducirá

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial y^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial x^{n-1}\partial y}\left[\varphi(z)^n\frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

Pero en virtud de (44) y (45)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\varphi(z)^n \frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)^n \frac{\partial u}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi(z)^{n+1} \frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

Resulta pues, que

$$\frac{\partial^{n+1} u}{\partial y^{n+1}} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\varphi(z)^{n+1} \frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

resultando la fórmula cierta para cualquier valor de $n$.

Supongamos ahora $y = 0$; $z$ se reduce á $x$, $u$ á $f(x)$; y la derivada $n^{\text{sima}}$ de $u$ con relación á $y$ se reduce á

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}[\varphi(x)^n f'(x)].$$

La fórmula de Taylor da para el desarrollo de $f(z)$,

$$f(z) = f(x) + y\varphi(x)f'(x) + \frac{y^2}{1 \cdot 2}\frac{d}{dx}[\varphi(a)^2 f'(a)] + \ldots\ldots \quad (46)$$

que es, como se vió anteriormente, la fórmula de Lagrange.

*Ejemplo.* La ecuación

$$z = x + \frac{y}{2}(z^2 - 1) \quad (47)$$

admite una raíz igual á $x$ para $y = 0$.

La fórmula de Lagrange da

$$z = x + \frac{y}{2}(x^2 - 1) + \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{y}{2}\right)^2 \frac{d(x^2 - 1)^2}{dx} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n}\left(\frac{y}{2}\right)^n \frac{d^{n-1}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots \quad (48)$$

Además, resolviendo la ecuación (47) tenemos

$$z = \frac{1}{y} \pm \frac{1}{y}\sqrt{1 - 2xy + y^2},$$

y con objeto de tener la raíz igual á $x$ para $y = 0$, hay que

tomar el signo —. Derivando con respecto á $x$ los dos miembros de la fórmula (48) obtendremos la fórmula, salvo las notaciones

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + z^2}} = 1 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots\ldots + X_n z^n + \ldots\ldots$$

que resulta inmediatamente de la (26) expresando $X^n$ un polinomio de Legendre

$$X_n = \frac{1}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2n} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$$

36. Inversión. Sea

$$z = x_1 y + x_2 y^2 + \ldots\ldots + x_n y^n + \ldots\ldots \qquad (49)$$

una serie convergente en el intervalo $(-r, +r)$, en la que el primer coeficiente $x_1$ no es nulo.

Considerando á $z$ como variable independiente, y á $y$ como función de $z$, esta ecuación admite, según el teorema general (33), tan sólo una raíz, que tiende hacia cero con $z$, y esta raíz es desarrollable en serie ordenada según las potencias de $z$

$$y = b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \ldots\ldots + b_n z^n + \ldots\ldots \qquad (50)$$

Los coeficientes $b_1, b_2, \ldots\ldots$ se determinan sucesivamente sustituyendo $y$ por su desarrollo, en la fórmula (49), y escribiendo que se obtiene una identidad. Tendremos

$$b_1 = \frac{1}{x_1}, \quad b_2 = -\frac{x_2}{x_1^3}, \quad b_3 = \frac{2x_2 - x_1 x_3}{x_1^5}, \ldots\ldots$$

Podemos obtener también la expresión general de los coeficientes $b_n$ por medio de la fórmula de Lagrange. Hagamos

$$\psi(x) = x_1 + x_2 y + \ldots\ldots + x_n y^{n-1} + \ldots\ldots$$

La ecuación (49) puede escribirse así

$$y = z \frac{1}{\psi(y)},$$

y la fórmula de Lagrange da, para el desarrollo de la raíz que se anula con $z$,

$$y = z\frac{1}{\psi(0)} + \ldots\ldots + \frac{z^n}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\left(\frac{1}{\psi(y)}\right)_0^n + \ldots\ldots$$

expresando el subíndice o, que se hace $y = 0$, después de derivar.

**37.** DESARROLLO DE UNA FUNCIÓN CONTINUA. TEOREMA DE WEIERSTRASS. *Si* $\varepsilon$ *es un número positivo suficientemente pequeño dado previamente, se puede determinar un polinomio* P(x) *tal, que la diferencia* f(x) — P(x) *sea menor que* $\varepsilon$ *en valor absoluto para todo valor de* x *en el intervalo* (a, b).

*Demostración de M. Lebesgue.* (*) Sea primero $\psi(x)$ una función continua en el intervalo $(-1, +1)$ definida de la manera siguiente: para $-1 \leq x \leq 0$ se tiene $\psi(x) = 0$, y para $0 \leq x \leq 1$ se tiene $\psi(x) = 2kx$, siendo $k$ un factor constante dado.

Podemos escribir $\psi(x) = k[x + |x|]$. Además, para los valores de X comprendidos entre $-1$ y $+1$, se tiene

$$|x| = \sqrt{1 - (1 - x^2)},$$

y, para estos mismos valores de $x$, el radical puede desarrollarse en serie *uniformemente convergente* ordenada según las potencias de $(1 - x^2)$; $|x|$, y por consiguiente $\psi(x)$, puede representarse, en este intervalo, con la aproximación que se quiera, por un polinomio.

Tomemos ahora una función cualquiera continua en el intervalo $(a, b)$, y supongamos que este intervalo se halla dividido en $n$ intervalos parciales $(a_0, a_1)$, $(a_1, a_2)$, $\ldots\ldots$ $(a_{n-1}, a_n)$ en los que $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_{n-1} < a_n = b$, de manera que la oscilación de $f(x)$ (es decir, $\Delta = M - m$, siendo M y $m$ los límites superior é inferior de $f(x)$ comprendidos en dicho intervalo) en cada uno de estos intervalos sea menor que

(*) *Bulletin des Sciences mathématiques*, p. 278 1898 y E. Goursat *Cours d'Analyse mathématique* t. I. pág. 159.

$\frac{\varepsilon}{2}$. Sea L la línea quebrada obtenida uniendo sucesivamente los puntos de la curva $y = f(x)$ cuyas abscisas son $a_0, a_1, \ldots, b$. La ordenada de un punto de dicha línea es evidentemente una función continua de la abscisa $\varphi(x)$, y la diferencia $f(x) - \varphi(x)$ es menor en valor absoluto que $\frac{\varepsilon}{2}$.

En efecto, en el intervalo $(a_{i-1}, a_i)$, por ejemplo, se puede escribir

$$f(x) - \varphi(x) = [f(x) - f(a_{i-1})]\,[1 - \theta] + [f(x) - f(a_i)]\,\theta,$$

donde $x - a_{i-1} = \theta(a_i - a_{i-1})$. Siendo positivo el factor $\theta$ é inferior á la unidad, la diferencia $f - \varphi$ es menor en valor absoluto que $\frac{\varepsilon}{2}(1 - \theta + \theta) = \frac{\varepsilon}{2}$.

Esta función $\varphi(x)$ puede descomponerse en una suma de $n$ funciones análogas á la función $\psi(x)$.

Sean, en efecto, $A_0, A_1, \ldots$ los vértices consecutivos de la línea poligonal L; $\varphi(x)$ es igual á la función continua $\psi_1$ representada en el intervalo $(a, b)$ por la recta que corresponde al lado $A_0A_1$, más una función $\varphi_1$ representada por una línea poligonal $A'_0A', \ldots A'_n$ cuyo primer lado $A'_0A'_1$ está en el eje $Ox$; $\varphi_1(x)$ es á su vez la suma de dos funciones continuas $\psi_2$ y $\varphi_2$, de las que la primera $\psi_2$ es nula entre $a$ y $a_1$ y está representada por la recta que corresponde á $A'_1\,A'_2$ entre $a_1$ y $b$, mientras que $\varphi_2$ está representada por una línea poligonal $A''_0A''_1A''_2 \ldots A''_n$ cuyos vértices $A''_0, A''_1, A''_2$ están en $Ox$. Se llega finalmente á sustituir $\varphi(x)$ por una suma de $n$ funciones $\varphi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n$, en la que $\psi_h$ es una función continua nula entre $a$ y $a_h$, representada por un segmento de recta comprendido entre $a_{h-1}$ y $b$. Si se efectúa el cambio de variable $X = mx + n$, eligiendo convenientemente $m$ y $n$, $\psi_h$ estará definida en el intervalo $(-1, +1)$ por la igualdad

$$\psi_h = k\,[X + |X|],$$

y por consiguiente podrá estar representada por un polinomio con la aproximación que se quiera. Pudiendo hallarse representada cada una de las funciones $\psi_i$ por un polinomio, en el intervalo $(a, b)$, con una aproximación inferior á $\frac{\varepsilon}{2n}$, la suma de dichos polinomios diferirá de $f(x)$ en menos que $\varepsilon$.

De este teorema se deduce que: *Toda función continua en un intervalo* (a, b) *puede representarse por una serie uniformemente convergente de polinomios en este intervalo*, pues si se considera una serie de números positivos decrecientes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots \varepsilon_n, \ldots\ldots$, de modo que el término general $\varepsilon_n$ tienda hacia cero, cuando $n$ aumenta indefinidamente, según el teorema precedente, á cada número $\varepsilon_i$ de esta serie podremos hacer corresponder un polinomio $P_i(x)$ tal, que la diferencia $f(x) - P_i(x)$ sea inferior en valor absoluto á $\varepsilon_i$, en todo intervalo $(a, b)$. Esto sentado, la serie

$$P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + \ldots\ldots + [P_n(x) - P_{n-1}(x)] + \ldots\ldots$$

es convergente, siendo su suma $f(x)$, cuando $x$ está comprendido en el intervalo $(a, b)$. Y claro es que la suma $S_n$ de los $x$ primeros términos es igual á $P_n(x)$. La diferencia $f(x) - S_n$, que es inferior á $\varepsilon_n$ tiende pues hacia cero cuando $n$ aumenta indefinidamente. Además la serie es uniformemente convergente, porque tomando $n$ bastante grande, la diferencia $f(x) - S_n$ será menor que un número dado de antemano para todo valor de $x$ comprendido en el intervalo $(a, b)$.

# CAPÍTULO II

## Continuidad y discontinuidad

### § 1.º Funciones uniformemente continuas

38. La continuidad uniforme de una función tiene mucha semejanza con la convergencia uniforme de una serie.

Que una función es continua en un punto quiere decir, como se ha dicho ya, que dado un valor $\sigma$ tan pequeño como se quiera, se puede hallar un entorno, para cuyos puntos la diferencia entre el valor de la función y el de ésta en $a$ es menor que $\sigma$.

Si se trata de una función de una variable, el entorno de que se trata será cierto segmento de la recta representativa, de longitud $\varepsilon$.

Para todo el dominio ó campo de variación considerado, á un mismo valor $\sigma$ fijado corresponderá un valor de $\varepsilon$.

Se pide ahora hallar un mismo valor $\varepsilon$ que corresponda á todos los puntos del campo de variación.

Si se trata de un número finito de puntos, bastará calcular el valor de $\varepsilon$ para cada uno, y considerar después el menor de todos, que valdrá para todos los puntos; pero en el caso de existir un número infinito de puntos, hay que hacer otras consideraciones.

Una continuidad de tal forma se llamará *continuidad uniforme*, que á primera vista parece más restringida que la simple continuidad, como la convergencia uniforme lo era respecto á la

simple convergencia; pero el Sr. Cantor ha demostrado que la *continuidad uniforme no difiere de la continuidad ordinaria.*

En efecto, supongamos la función $f(x)$ continua desde $a$ hasta $b$, y hallemos un intervalo á la derecha de $a$ tal, que para un punto $x$ se tenga

$$f(x) - f(a) \leqq \sigma.$$

La amplitud $\varepsilon$ de tal intervalo puede ser varia, porque obtenida una, las menores que ella satisfacen á la misma condición.

Entre las varias $\varepsilon$ tomemos la mayor de todas ó el *límite superior* de ellas.

Sea $x_1$ el punto que representa el extremo de dicho intervalo $\varepsilon$. Es fácil ver que en $x = x_1$ la diferencia $f(x) - f(a)$ es exactamente igual á $\sigma$ en valor absoluto, esto es, que

$$f(x_1) - f(a) = \pm \sigma.$$

En efecto, empezemos por observar que, siendo por hipótesis $f(x)$ una función continua, lo será también la función $f(x) - f(a)$.

Se puede hacer ver que el valor de tal diferencia no puede ser ninguna de las cuatro cantidades

$$+\sigma - \varepsilon, \quad +\sigma + \varepsilon, \quad -\sigma - \varepsilon, \quad -\sigma + \varepsilon.$$

Si fuese, por ejemplo, $+\sigma - \varepsilon$, entonces, por efecto de la continuidad de la función, se podría hallar á la derecha de $x_1$ un segmento tal, que para todo punto del mismo, el valor absoluto de $f(x) - f(a)$ fuese diferente de $\sigma - \varepsilon$ en una cantidad $\varepsilon_1$ menor que $\varepsilon$, esto es, menor que $\sigma$; lo que es contra la hipótesis de que el segmento cuyo extremo es $x_1$ sea el límite superior de todos los segmentos en los que $f(x) - f(a) < \sigma$.

Si $f(x_1) - f(a)$ fuese igual á $+\sigma + \varepsilon$, entonces, por efecto de la continuidad, se podría hallar á la izquierda de $x_1$ un segmento tal, que en un punto del mismo, el valor absoluto de $f(x) - f(a)$ fuese diferente de $\sigma + \varepsilon$ en una cantidad $\varepsilon_1 < \varepsilon$, y por consiguiente mayor que $\sigma$, lo que es contradictorio con la

hipótesis hecha respecto á $x_1$, pues por un punto cualquiera á la izquierda de $x_1$ el valor de $f(x) - f(a)$ debe ser menor que $\sigma$.

Establecido pues que en $x_1$ se tiene

$$f(x_1) - f(a) = \sigma$$

procedamos de igual manera desde $x_1$ hacia la derecha hasta el punto $x_2$ en el que sea

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \sigma.$$

Continuando así podremos establecer una serie de puntos.

$$a x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots x_n x_{n+1} \ldots\ldots$$

tales que $$f(x_{n+1}) - f(x_n) = \sigma$$

Entre dos de estos puntos consecutivos se halla un segmento para dos de los que la diferencia de los valores de la función es menor que $\sigma$.

Pero si recorriendo todo el intervalo desde $a$ hasta $b$, el número de tales puntos intermedios es *finito*, entonces el intervalo $(a, b)$ quedará dividido en intervalos en número finito, cada uno de los cuales tiene la propiedad indicada. Tomando ahora el menor de todos estos intervalos de amplitud $\varepsilon$, en una amplitud menor que $\varepsilon$ se satisfará á la condición indicada.

Falta ver que los puntos $x_1, x_2, \ldots\ldots$ no pueden ser en número infinito. En efecto, si fuesen en número infinito, entonces admitirían un punto-límite $u$, y por efecto de la continuidad de la función en $u$, se podría hallar un entorno de $u$ tal, que para dos puntos cualesquiera del mismo fuese

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\sigma}{2}. \text{ (*)}$$

Pero al mismo tiempo, por la naturaleza del punto-límite se hallarán contenidos infinitos puntos $x_n\, x_{n+1}$ y se deberá ser

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| = \sigma,$$

(*) E. Pascal. *Lezioni di calcolo infinitesimale* t. I pp. 34.

mientras que por otra parte, siendo $x_n\, x_{n+1}$ dos puntos del entorno deben ser

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| < \frac{\sigma}{2}.$$

La contradicción que resulta hace inadmisible la hipótesis de que los puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots$ sean en número infinito.

39. Como corolario resulta que: *Dada una función continua en un intervalo desde* a *hasta* b, *se puede dividir éste en un número finito de otros intervalos parciales tales, que en cada uno de ellos la diferencia entre dos valores cualquiera de la función sea menor que una cantidad* $\sigma$ *tan pequeña como se quiera.*

40. Ya sabemos que se llama *oscilación* de la función en un intervalo, á la diferencia entre el límite superior y el límite inferior de los valores de la función en dicho intervalo.

Se puede decir que *siempre es posible la división en un número finito de intervalos parciales, de modo que en cada uno de éstos la oscilación de la función sea menor que* $\sigma$.

Basta para justificarlo, el emplear el procedimiento arriba indicado. Podemos ahora demostrar el

TEOREMA 1.° *Si una función continua está determinada en un número infinito de puntos, lo estará en los puntos-límites de la misma.*

En efecto, sea $x'$ uno de dichos puntos-límites; debiendo ser la función continua en $x'$, deberá tener un límite determinado cuando $x$ se aproxima á $x'$, y en $x'$ el valor de la función no puede ser otro que dicho límite.

Siendo los puntos *irracionales* límites de los puntos *racionales*, podemos concluir que:

TEOREMA 2.° *Si una función continua está determinada en todos los puntos racionales de un segmento, está determinada también en los puntos irracionales.*

Considerando todos los valores que tiene una función en un intervalo, se tienen infinitos números que tendrán un *límite superior* y un *límite inferior*. Podrá suceder que no exista ningún

valor de las variables para el cual el valor de la función sea propiamente el límite superior. Si esto no sucede, entonces el límite superior es uno de los valores de la función que es su valor *máximo* y también el límite inferior es el valor *mínimo*.

Se puede hacer ver que *para las funciones continuas existen efectivamente el valor máximo y el valor mínimo*, esto es, *que la función adquiere en un punto el valor representado, ya por el límite superior ya por el límite inferior*.

41. Teorema de Weierstrass. *Si una función admite un límite superior* S *en un segmento dado, se puede siempre hallar un segmento tan pequeño como se quiera tal, que el límite superior de los valores que la función adquiere en tal segmento es también* S.

Ante todo recordaremos que en un grupo infinito de puntos contenido en un segmento finito de una recta, existirá un punto de ésta tal, que á su derecha no existan otros puntos del grupo y que además, ó pertenece al grupo, y en un intervalo tan pequeño como se quiera á su izquierda existen siempre puntos del grupo, ó bien, perteneciendo al grupo, no se verifica la segunda propiedad, ó en fin, *no perteneciendo al grupo*, se verifica la segunda propiedad. En el primero y segundo caso dicho punto se llamará el *máximo* de los valores de la variable y en el tercero se dirá simplemente el *límite superior*. Evidentemente el límite superior es un punto-límite del grupo.

Análogamente se definirán el mínimo y el límite inferior.

Si no existe el máximo existe ciertamente el límite superior.

El concepto de la existencia de un máximo ó de un límite superior es independiente del de la existencia de los puntos límites de un grupo infinito.

Esto sentado, si consideramos una función, por ejemplo de una variable, definida en cierto segmento finito, todos los valores de la función correspondientes á los puntos del segmento representados á su vez sobre una recta formarán, en general, un grupo infinito de puntos sobre la misma. Suponiendo este grupo contenido en un intervalo finito, existirá un *límite superior* y un *límite inferior* de los valores de la función.

Si en particular existe un *máximo* y un *mínimo* de los valores de la función, esto quiere decir, que existirá un valor de la variable independiente para el cual la función adquiere el valor máximo ó mínimo.

Pero si en vez de admitir dicho grupo de puntos un máximo admite sólo un límite superior, entonces no se puede decir lo mismo de los valores de la variable, por esto es útil demostrar el teorema de Weierstrass.

Para ello, dividamos el segmento primitivo en dos partes, y consideremos los valores de la función para los puntos de dichos segmentos separadamente.

Si $S_1$ y $S_2$ son límites superiores de los valores de la función en los dos segmentos parciales, se puede ver inmediatamente que uno al menos de estos dos debe ser igual á S, porque si S fuese menor que ambos, no sería ya límite superior de los valores de la función en todo el intervalo, y por otra parte, si S fuese mayor que los dos límites $S_1$ y $S_2$, entonces habría valores de la función ó mayores que $S_1$ ó que $S_2$, lo que es imposible.

Sea ahora $S = S_1$, y dividamos el intervalo en el que el límite superior es $S_1$ en dos partes, en una de las cuales al menos, por igual razonamiento, el límite superior de los valores de la función debe ser todavía S. Continuando de esta manera, se ve que se puede hallar un intervalo, tan pequeño como se quiera, en el cual el límite superior de los valores es todavía S.

42. LÍMITES DE LAS FUNCIONES. Supongamos que una función $y$ de una sola variable $x$, se aproxima á un valor límite $a$, y fijemos un número $\sigma$ tan pequeño como se quiera. Se puede hallar solo á la derecha ó solo á la izquierda ó á ambos lados del punto $a$ un segmento tal, que el valor de $y$ para cualquier punto contenido en dicho segmento sea tal, que la diferencia $(A - y)$ sea menor en valor absoluto que $\sigma$, siendo A un número fijo. Diremos entonces que A es el límite de los valores de $y$ para $x = a$, y escribiremos

$$\lim_{x=a} f(x) = A.$$

Distinguiremos el límite á la derecha, ó el límite á la izquierda ó el límite á ambos lados del punto $a$, según que el segmento se halle á la derecha, á la izquierda ó á los dos lados, y podrá suceder que el límite á la derecha sea distinto del límite á la izquierda, los cuales se expresan por los símbolos $a + o$ y $a - o$ (excluyéndose el punto $a$).

Si uno de los valores $a$ ó A por ejemplo, es infinito, se dirá entonces que $y$ tiene por límite $\pm \infty$ para $x = a$, si dado $\omega$ tan grande como se quiera, se puede hallar un entorno del punto $a$ tal, que para todos los puntos de dicho entorno la $y$ sea siempre el valor absoluto mayor de $\omega$, teniendo el signo positivo ó negativo respectivamente.

Supongamos que sea $a = \infty$, esto es, que se considere el límite de $y$ cuando el valor de la variable aumenta indefinidamente. Podemos entonces decir que $y$ tiene por límite A para $x = \infty$, cuando dado $\sigma$ tan pequeño como se quiera, se puede siempre hallar un valor $m$ de $x$, de manera que para todo valor de $x$ mayor que $m$, la $y$ tenga un valor tal, que la diferencia $A - y$ sea en valor absoluto menor que $\sigma$.

En fin, diremos que $y$ tiene por límite el $\infty$ para $x = \infty$, cuando, dado $\omega$ tan grande como se quiera, se pueda hallar un valor $m$ de modo que la $y$ sea siempre mayor que $\omega$.

Para $x = a$, se tiene que

$$\lim (x - a) \operatorname{sen} \frac{1}{x - a} = o \text{ á derecha é izquierda}$$

$$\lim \frac{1}{(x - a) \operatorname{sen} \frac{1}{x - a}} = \pm \infty \text{ á derecha ó izquierda}$$

$$\lim \frac{1}{x - a} = + \infty \text{ ó } - \infty, \text{ para } x = a, \text{ á derecha ó á izquierda.}$$

Para $x = + \infty$, $\lim \frac{\operatorname{sen} x}{x} = o$,

para $x = \pm \infty$, $\lim \left( x + \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) = \pm \infty$.

Cuando al acercarse $x$ á $a$ por la derecha ó la izquierda, ó al crecer indefinido de $x$ por valores positivos ó negativos no se halla la función en ninguno de los casos tratados, se dirá que la función $y$ no tiene límite determinado para $x = a$ á derecha ó izquierda ó para $x = \pm \infty$.

Las cantidades

$$y = \operatorname{sen} \frac{1}{x - a}, \quad y = 1 + \frac{1}{x - a} \operatorname{sen} \frac{1}{x - a}$$

para $x = a$ á derecha é izquierda, y las cantidades

$$y = \operatorname{sen} x, \quad y = x \operatorname{sen} x \quad \text{para} \quad x = \pm \infty$$

no tienen límites determinados.

*Observación 1.ª* Debemos tener presente que el *valor especial* de $y$ para $x = a$ no es lo mismo que el *límite de los valores* de $y$ á la derecha ó á la izquierda de $a$, porque el límite de $y$ depende solamente de sus valores en los puntos $a + o$ y $a - o$ exteriores al punto-límite $a$, mas no del valor de $y$ en este punto; y aunque en algunos casos estas cantidades pueden existir simultáneamente y ser iguales, en otros puede suceder que exista el valor límite de $y$ á la derecha ó á la izquierda de $a$ y que no exista el valor $y_a$ ó no tenga significado alguno, como puede existir este valor $y$ de $y_a$, sin existir un valor límite ó existir ambos, siendo diferentes. Así en la expresión

$$\frac{\operatorname{sen}(x - a)}{x - a}$$

el valor $y_a$ de $y$, para $x = a$, no tiene significado alguno, mientras que el valor límite á la derecha ó á la izquierda, es igual á 1.

Para $x$ distinto de $a$, la derivada de

$$(x - a)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x - a} \quad \text{es} \quad y = 2(x - a) \operatorname{sen} \frac{1}{1 - x} - \cos \frac{1}{x - a},$$

y para $x = a$ es

$$y_a = \lim_{h=0} \frac{h^2 \operatorname{sen} \frac{1}{h}}{h} = 0.$$

En este caso $y_a$ tiene un valor determinado igual á cero, mientras que cuando se aproxima $x$ indefinidamente por la derecha ó por la izquierda al valor $a$ es indeterminado.

*Observación 2.ª* En general no se habla de límite de $y$ para $x = a$ (á la derecha ó á la izquierda) sino cuando el valor $y_a$ no está definido, ó cuando, siendo conocido, es diferente del valor del límite.

En general, cuando se habla de límite, domina la idea de no llegar al valor límite (*).

43. En el caso de una función de varias variables, por ejemplo dos, dada $\sigma$, debe poder obtenerse un entorno del punto $(a_1\ a_2)$ tal, que para todos los puntos de dicho entorno, la diferencia entre A é $y$ sea menor que $\sigma$.

Pero este entorno puede ser de varias especies.

Puede suceder que existan uno ó varios segmentos de recta que partan del punto $(a_1\ a_2)$, y entonces esto quiere decir que la $y$ tiene por límite A sólo cuando las variables $(x_1, x_2)$ se aproximen á $(a_1, a_2)$ de un modo especial y no de otro. O puede suceder que el entorno de que se trata sea un área plana que tenga el punto $(a_1\ a_2)$ no como un punto interior, sino como un punto del contorno, lo que quiere decir que entonces $y$ tiene A por límite, cuando el punto $(x_1, x_2)$ se aproxima al $(a_1\ a_2)$ en ciertas direcciones, en número infinito, pero no en todas las direcciones; y puede ocurrir que el entorno comprenda siempre en su interior al punto $(a_1\ a_2)$ y entonces el límite subsiste, cualquiera que sea la dirección según la cual hagamos aproximarse el punto $(x_1\ x_2)$ al $(a_1\ a_2)$. Se ve que en este caso en vez de considerarse dos límites como en el caso de una variable, se pue-

(*) Dini. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, pág. 26.

den considerar infinitos límites diversos, según las infinitas direcciones, en las que se aproxima el punto $(x_1\ x_2)$ al $(a_1\ a_2)$.

Podemos observar también que la variable independiente $x$ puede aproximarse de varios modos al valor $a$. Así, puede aproximarse de un modo *continuo*, es decir, recorriendo $x$ todo el segmento rectilíneo, ó sus infinitos puntos; puede también aproximarse á $a$ no pasando por los infinitos puntos del segmento, sino por un conjunto de infinitos puntos cuyo punto-límite sea $a$, ó *saltuariamente* (*).

## § 2.° Funciones discontinuas

44. Especies de discontinuidad. 1.° Cuando $a$ no es un extremo del intervalo que se considera, en el caso de tener los valores $f(a+h)$ y $f(a-h)$ de $f(x)$ á derecha ó izquierda un límite determinado A diferente del valor de $f(x)$ en $a$, tendremos una *discontinuidad que puede suprimirse*, según la expresión de Riemann, si en vez de $f(a)$ se toma A por valor de la función en el punto $a$.

2.° Si el punto en que $f(x)$ es discontinua no es un extremo del intervalo, y los valores de ésta á un lado de $a$ tienen por límite $f(a)$ y al otro lado no tienen límite determinado, ó lo tienen distinto de $f(a)$, se dirá que $f(x)$ es *continua á un lado* (á derecha ó izquierda) de $a$ y *discontinua al otro lado*, es decir, discontinua *á un solo lado de a*.

3.° Si á un lado de $a$ hay discontinuidad de $f(x)$, y ésta es tal que los valores de $f(x)$ al mismo lado de $a$ tienen un límite determinado, se dirá que es una discontinuidad *ordinaria* ó de *primera especie*, mientras que si los mismos valores de $f(x)$ no tienen un límite determinado, la discontinuidad será de *segunda especie*, y así las discontinuidades que pueden quitarse cambiando el valor de la función en el punto correspondiente, serán siempre discontinuidades ordinarias á los dos lados de este punto; y

(*) Pascal. *Obra cit.*

cuando la función $f(x)$ en un punto $a$, que no es un extremo del intervalo es discontinua, podrá suceder que sea continua á un lado de $a$ y que tenga al otro una discontinuidad ordinaria, ó una discontinuidad de segunda especie, ó que siendo discontinua á los dos lados de $a$, tenga en ambos una discontinuidad ordinaria ó una discontinuidad de segunda especie ó tenga á un lado una discontinuidad ordinaria y al otro una discontinuidad de segunda especie; y cambiando el valor de la función en este punto, podremos quitar siempre la discontinuidad al menos á un lado si es de primera especie, pero no si es de segunda.

Así, cuando el punto de discontinuidad de $f(x)$ sea un extremo del intervalo, si la discontinuidad es de primera especie, podrá considerarse como de la que puede suprimirse cambiando el valor de la función en dicho punto.

Debe observarse que cuando á un lado de un punto $a$ se tenga una discontinuidad de segunda especie, los valores de $f(x)$ al aproximarse $x$ hacia $a$ por el mismo lado formarán continuas oscilaciones (en número infinito) de amplitud mayor que cierto número dado (*), porque entonces estos valores de $f(x)$ no tendrán un límite determinado. Y de esto se tiene un ejemplo en la función que, para los valores de $x$ diferentes de $a$ es igual á $\operatorname{sen} \frac{1}{x-a}$ y para $x = a$ es cero, porque esta función, para $x = a$ á derecha é izquierda tiene una discontinuidad de segunda especie, y al aproximarse indefinidamente $x$ hacia $a$, á uno ú otro lado, oscila continuamente entre $-1$ y $+1$.

Además puede notarse que una función continua á derecha ó izquierda de un punto $a$, ó que tenga simplemente una discontinuidad ordinaria á uno de los dos lados del mismo, podrá hacer en la proximidad al lado que se considera un número infinito de oscilaciones; pero la amplitud de estas se empequeñecerá fuera de todo límite, con aproximarse $x$ hacia $a$.

Esto sucede en el punto $x = 0$ á la función que para $x$ dis-

(*) Véase Dini. *Obra cit.*, págs. 29-30.

tinta de cero es igual á $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ y que para $x = a$ es cero ó tiene otro valor finito cualquiera.

Además debe observarse que una función podrá ser continua ó tener solamente una discontinuidad ordinaria á un lado de $a$, por ejemplo á la derecha, y ser después discontinua y aun discontinua de segunda especie á la izquierda de los puntos que se encuentran en la parte á derecha de todo entorno de $a$ arbitrariamente pequeño (esto es, los puntos situados á la derecha de $a$ y próximos cuanto se quiera de $a$); y viceversa, puede haber discontinuidad y también de segunda especie á la derecha de $a$, y continuidad á la izquierda de los puntos, próximos cuanto se quiera de $a$ y que estén á la derecha de $a$.

En efecto, el haber continuidad á la derecha de un punto $a$, ó una discontinuidad ordinaria, lleva consigo el que para todo número positivo $\sigma$ exista un número positivo $\varepsilon$ tal, que en el intervalo $(a, a + \varepsilon)$, que tiene el extremo inferior en $a$, se tenga numéricamente

$$f(a + \varepsilon) - f(a + \delta) < \sigma \qquad (1)$$

Por el contrario, el haber continuidad ó solo discontinuidad ordinaria á la izquierda de un punto $x = a + \varepsilon'$ que se encuentra á la derecha de $a$ y próximo cuanto se quiera de $a$, implica que para todo número positivo $\sigma_1$ exista un intervalo $(a + \varepsilon' - \varepsilon_1, a + \varepsilon')$ *con el extremo superior en el punto fijo* $a + \varepsilon'$, para todo punto $x$ en el cual se tenga numéricamente

$$f(a + \varepsilon' - \varepsilon) - f(x) < \sigma_1; \qquad (2)$$

y esto demuestra inmediatamente lo arriba enunciado ya que una de las dos condiciones (1) y (2) no implica la otra, por cuanto con disminuir $\sigma$ continúa existiendo siempre un intervalo $(a, a + \varepsilon)$ con extremo inferior en $a$ y en el cual queda satisfecha la condición (1), no es necesario que al disminuir $\sigma_1$, deba continuar existiendo un intervalo $(a + \varepsilon' - \varepsilon'_1, a + \varepsilon')$ con el

extremo superior en el *punto fijo* $a + \varepsilon'$ en el cual quede satisfecha la condición (2).

Supongamos ahora que la función $f(x)$ tenga una discontinuidad de primera ó de segunda especie á un lado del punto $a$, á la derecha, por ejemplo, y observemos que todos los números positivos $\sigma$ diferentes de cero pueden distinguirse en números que satisfacen respectivamente y números que no satisfacen á la condición de que para ellos sea posible siempre hallar un intervalo á la derecha de $a$ $(a, a + \varepsilon)$ en el cual sea siempre en valor absoluto

$$f(x) - f(a) < \sigma.$$

Entonces por las consideraciones expuestas acerca de la división de los números en dos clases, se verá que debe existir un número $\sigma'$, límite inferior de los números $\sigma$ para los cuales existe el intervalo $(a, a + \varepsilon)$, que realizará la división de los números en las dos clases indicadas, y este número $\sigma'$ será diferente de cero, porque de otro modo no existiría en $f(x)$ la discontinuidad supuesta, y gozará de la propiedad que para todo número $\sigma > \sigma'$ existirá un intervalo $(a, a + \varepsilon)$ á la derecha de $a$, en el cual se tendrá siempre numéricamente $f(x) - f(a) < \sigma$, mientras que para todo número positivo $\sigma < \sigma'$, existirán en cualquier intervalo $(a, a + \varepsilon)$ valores de $x$ para los cuales será numéricamente $f(x) - f(a) > \sigma$.

Este número $\sigma'$ se llama el *salto* de la función en el punto $a$, *á la derecha.*

Análogamente habrá un *salto* $\sigma'$ *á la izquierda*, cuando $f(x)$ sea discontinua á la izquierda. Y cuando $f(x)$ sea discontinua á ambos lados de $a$, se llamará *salto* de la función en el punto $a$, al mayor de los dos números que representan el salto á la derecha y á la izquierda.

Cuando $f(x)$ es continua á derecha ó izquierda de $a$ ó tiene tan solo una discontinuidad ordinaria, por la notación de Dirichlet se suele indicar con $f(a + 0)$ ó $f(a - 0)$ el límite para $h$, positivo y tendiendo á cero, de los valores $f(a + h)$ ó $f(a - h)$

que se tienen para $f(x)$ en el lado correspondiente. Por tanto si hay continuidad á los dos lados, ó si hay una discontinuidad de las que pueden suprimirse cambiando el valor de la función en dicho punto $a$, las cantidades $f(a+0)$ y $f(a-0)$ serán iguales entre sí y en el primer caso serán iguales á $f(a)$.

Pero la misma cantidad no tendrá ningún significado, cuando la discontinuidad de $f(x)$ en el lado á que nos referimos de $a$, es de segunda especie.

En el caso de ser la discontinuidad para $x=a$, al menos á uno de los lados, á la derecha por ejemplo, una discontinuidad ordinaria, el salto de la función será evidentemente el valor absoluto de $f(a+0)-f(a)$, é igualmente el valor absoluto de $f(a-0)-f(a)$ será el salto de $f(x)$ en el caso en que se tenga una discontinuidad ordinaria á la izquierda de $a$ (*).

*Ejemplo.* Como ejemplo de una discontinuidad de segunda especie tenemos la que ofrece la función definida por la serie:

$$\frac{1-x}{1+x}+\frac{2x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)}+\ldots+\frac{2x^{k-1}(1-x)}{(1+x^k)(1+x^{k-1})}+\ldots$$

pues se tiene sucesivamente que

$$\frac{1-x^m}{1+x^m}=-1+\frac{2}{1+x^m},$$

$$\frac{1}{1+x^m}=\frac{1}{1+x^{m-1}}+\frac{x^{m-1}(1-x)}{(1+x^m)(1+x^{m-1})},$$

. . . . . .

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+x}+\frac{x(1-x)}{(1+x^2)(1+x)}$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}+\frac{1(1-x)}{2(1+x)};$$

(*) Dini *Fondamenti per la teorica delle funzione di variabili reale.*

y haciendo las sustituciones sucesivas,

$$\frac{1-x^m}{1+x^m} = \frac{2(1-x)}{2(1+x)} + \frac{2x(1-x)}{(1+x)(1+x^2)} + \cdots\cdots + \frac{2x^{m-1}(1-x)}{(1+x^{m-1})(1+x^m)}$$

y por consiguiente

$$\lim_{m=\infty} \frac{1-x^m}{1+x^m} = 2\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^{k-1}(1-x)}{(1+x^{k-1})(1+x^k)}$$

De esta igualdad resulta que la función dada es igual á

$+1$ ó $-1$, según que $x$ es $<$ ó $>$ que 1,

0 ó $\infty$ si $x = 1$ ó $x = -1$.

La función es discontinua en el punto $x = 1$, donde pasa del valor $+1$ al $-1$ y en el punto $x = -1$ donde es infinita.

*Ejemplos.* Como ejemplo de funciones discontinuas tales que $f(x+h)$ y $f(x-h)$ tengan cuando $h$ tienda hacia cero, límites diferentes de $f(x)$, se puede presentar la función $E(x)$ que representa el mayor entero contenido en $x$. Se tiene

$$E(n-0) = n-1, \quad E(n) = n, \quad E(n+0) = n.$$

Otro ejemplo ofrece la función $(x)$ que representa la diferencia entre $x$ y el entero más próximo, la cual es indeterminada para todos los valores de $x =$ entero $+\frac{1}{2}$. En este caso hacemos $(x) = 0$.

Esta función es continua, excepto para los valores de $x = n + \frac{1}{2}$ siendo $n$ entero, y se tiene entonces

$$\left(n+\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \left(n+\frac{1}{2}-0\right) = \frac{1}{2}, \quad \left(n+\frac{1}{2}+0\right) = -\frac{1}{2}.$$

45. CONDENSACIÓN DE LAS SINGULARIDADES. Existen funciones que en un intervalo finito son discontinuas en un número infinito de puntos, separados por otros en que son continuas, y existen funciones que en un intervalo finito, son discontinuas en todos los puntos.

Para formar funciones de esta naturaleza, Hankel halló el *método de la condensación de las singularidades*, por medio del cual, partiendo de una función con un número limitado de singularidades, se forma una función con infinitas singularidades. (*)

Para dar una idea de este método, representemos por $\varphi(y)$ una función que entre $y = -1$ é $y = +1$, exceptuado el punto $y = 0$, sea continua y menor que una cantidad M, que en el punto o sea nula y que, cuando $y$ tiende hacia cero, pasando separadamente por valores positivos y negativos, tienda hacia un límite diferente de cero, ó á dos límites de los cuales, uno por lo menos sea distinto de cero.

La función $\varphi(\operatorname{sen} p\pi x)$ en la que $p$ es entero, será nula y discontinua en los puntos donde $x = \frac{m}{p}$ ($m$ entero) y será continua en los demás puntos.

En estos últimos puntos, la función

$$f(x) = \sum_{1}^{\infty} A_n \varphi(\operatorname{sen} n\pi x) \qquad (1)$$

es también continua si $A_1, A_2, \ldots\ldots$ representan cantidades positivas tales, que la serie $\sum_{1}^{\infty} A_n$ sea convergente. En efecto, en este caso, á cada valor $\delta$, tan pequeño como se quiera, corresponderá un valor $\alpha_1$ de $\alpha$ tal, que la desigualdad

$$\sum_{n=\alpha+1}^{\alpha+\beta} MA_n < \delta$$

(*) Hankel. *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen.* Gomes Teixeira, *Curso de Analyse infinitesimal.*

quede satisfecha cuando $\alpha > \alpha_1$. Luego *a fortiori* la desigualdad

$$\left| \sum_{n=\alpha+1}^{\alpha+\beta} A_n \varphi(\operatorname{sen} n\pi x) \right| < \delta$$

quedará satisfecha, para los mismos valores de $\alpha$; luego la serie (1) es uniformemente convergente, y por tanto la función $f(x)$ es continua en los puntos considerados (21).

Consideremos ahora los puntos en que la función $\varphi(\operatorname{sen} p\pi x)$ es discontinua y supongamos que $p$ sea par.

Hagamos $n = ap + b$ siendo $b < p$. Tenemos

$$f\left(\frac{m}{p}\right) = \sum_{a,b} A_{ap+b} \varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right],$$

refiriéndose el signo $\Sigma$ á todos los valores enteros y positivos de $a$ y de $b$, excluyendo los términos correspondientes á $b = 0$, que son nulos.

Tenemos de igual modo

$$f\left(\frac{m}{p}+h\right) = \sum A_{ap+b} \varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p}+h\right)\pi\right],$$

ó separando los términos correspondientes á $b = 0$,

$$f\left(\frac{m}{p}+h\right) = \sum A_{ap+b} \varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p}+h\right)\pi\right] + \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi[\operatorname{sen}(am\pi + aph\pi)].$$

Luego será

$$f\left(\frac{m}{p}+h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) = \sum_{a,b} \left\{ \varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\left(\frac{m}{p}+h\right)\pi\right] - \varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right] \right\} + \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi(\operatorname{sen} aph\pi),$$

y por ser la función

$$\sum_{a,b} A_{ap+b} \varphi\left[\operatorname{sen}(ap+b)\frac{m}{p}\pi\right]$$

continua, cuando $b$ es distinto de cero,

$$\lim_{h=0}\left[f\left(\frac{m}{p}+h\right)-f\left(\frac{m}{p}\right)\right]=\lim_{h=0}\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\varphi\,(\text{sen}\,aph\pi).$$

Ya tienda $h$ hacia cero pasando por valores positivos ó por valores negativos, á causa de ser la serie

$$\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen}\,aph\,\pi)$$

uniformemente convergente en la proximidad de $h=0$, se concluye, que para un valor tan pequeño como se quiera de $\delta$, existe siempre un valor $\alpha_1$ tal, que la desigualdad

$$\left|\sum_{a=\alpha+1}^{\infty}A_{ap}\,\varphi\,(\text{sen}\,aph\,\pi)\right|<\frac{\delta}{3}$$

queda satisfecha para valores de $\alpha$ mayores $\alpha_1$.

Además, por ser convergente la serie $\Sigma\,A_{ap}$, existe un número $\alpha_2$ tal, que la desigualdad

$$\left|\lim_{h=0}\varphi(\text{sen}\,aph\,\pi)\sum_{a=\alpha+1}^{\infty}A_{ap}\right|<M\left|\sum_{a=\alpha+1}^{\infty}A_{ap}\right|<\frac{\delta}{3}$$

queda satisfecha cuando $\alpha>\alpha_2$.

Luego las dos desigualdades precedentes quedan satisfechas simultáneamente para los valores de $m$ superiores á $\alpha_1$ y $\alpha_2$.

Determinado asi $\alpha$, se tiene siempre un valor $h_1$ tal, que la desigualdad

$$\left|\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\,\varphi(\text{sen}\,aph\pi)-\lim_{h=0}\varphi(\text{sen}\,aph\pi)\sum_{a=1}^{\infty}A_{pa}\right|<\frac{\delta}{3}$$

queda satisfecha cuando $|\,h\,|<h_1$.

De estas tres desigualdades resulta

$$\left|\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\,\varphi(\text{sen}\,aph\pi)-\lim_{h=0}\varphi(\text{sen}\,aph\pi)\sum_{a=1}^{\infty}A_{ap}\right|<\delta$$

cuando $|h| < h_1$; por tanto

$$\lim_{h=0} \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap} \varphi(\operatorname{sen} aph\pi) = \lim_{h=0} \varphi(\operatorname{sen} aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap},$$

de donde

$$\lim_{h=0} \left[ f\left(\frac{m}{p} + h\right) - f\left(\frac{m}{p}\right) \right] = \lim_{h=0} \varphi(\operatorname{sen} aph\pi) \sum_{a=1}^{\infty} A_{ap}.$$

Como por hipótesis uno por lo menos de los dos valores

$$\lim_{h=0} \varphi(\operatorname{sen} aph\pi) \quad \text{y} \quad \lim_{h=0} \varphi(-\operatorname{sen} aph\pi)$$

correspondientes, el uno á valores positivos y el otro á valores negativos de $h$, es diferente de cero, la función $f(x)$ es discontinua en los puntos $x = \frac{m}{p}$.

Por un razonamiento semejante se demuestra que la función $f(x)$ es discontinua en los puntos $x = \frac{m}{p}$, cuando $m$ es impar.

Luego la función es continua cuando se dan valores irracionales á $x$, y discontinua en todos los puntos en que $x$ es racional.

Para aplicar el método anterior, basta formar una función $\varphi(y)$ que satisfaga á las condiciones impuestas á esta función. Sea

$$\varphi(y) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y(y+1)^{k-1}}{[(y+1)^k + 1][(y+1)^{k-1} - 1]},$$

que se deduce de la serie estudiada en el número 44 haciendo $x = y + 1$.

En efecto, siendo aquella serie igual á $+1$, o, $-1$, según que sea $x < 1$, $x = 1$, ó $x > 1$, ésta será igual á $+1$, o, ó $-1$, según que $y < 0$, $y = 0$, ó $y > 0$.

*Ejemplo.* La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n![\varphi(\operatorname{sen} n\pi x)^2]} \quad \text{es igual á} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$$

cuando $x$ es un número irracional, y es infinita, cuando $x$ es racional, porque en el primer caso la función $[\varphi(\text{sen } n\pi x)]^2$ es igual á $+1$, y en el segundo caso es nula, cuando $n = p$ y $x = \frac{m}{p}$; luego la función

$$f(x) = \frac{e - 1}{\sum_1^\infty \frac{1}{n![\varphi(\text{sen } n\pi x)]^2}}$$

es igual á cero cuando $x$ es racional, y es igual á $+1$ cuando $x$ es irracional.

Por tanto es totalmente discontinua en un intervalo cualquiera.

## § 3.° Funciones integrables.

**46.** Teorema de Darboux. Sean M, $m$ y $\Delta$ el límite máximo, el mínimo y la oscilación de una función en un intervalo $(a, b)$, y consideremos otro intervalo $(x_0, x_1)$ comprendido en el primero, es decir, tal, que se tenga

$$x_0 \geqq a, \qquad x_1 \leqq b.$$

El límite máximo M′ del segundo intervalo no podrá ser mayor que M, ni su límite mínimo $m'$ menor que $m$; luego

$$M' \leqq M, \qquad m' \geqq m, \qquad \Delta' \leqq \Delta.$$

Sean ahora $(a, c)$ y $(c, b)$ dos intervalos consecutivos á los que corresponden respectivamente M, $m$, $\Delta$ y M′, $m'$, $\Delta'$, y sea $(x_0, x_1)$ un nuevo intervalo comprendido en $(a, b,)$ tal, que

$$x_0 \vee c < x_1;$$

este nuevo intervalo tiene una parte común con los otros dos (empiète). El límite máximo en $(x_0, x_1)$ será á lo más igual al

mayor de los dos números M y M'. Análogamente el límite mínimo será superior ó igual al menor de los dos números $m$ y $m'$. En fin, la oscilación será á lo más igual á la suma $\Delta + \Delta'$ de las oscilaciones en los dos intervalos consecutivos $(a, c)$ y $(c, b)$.

Esto sentado, consideremos una función cualquiera $f(x)$, definida en un intervalo $(a, b)$ y sujeta á permanecer comprendida entre dos límites fijos A y B. Las oscilaciones de la función en todo intervalo comprendido en $(a, b)$ son evidentemente finitas é inferiores á B — A.

Intercalemos entre $a$ y $b$ $n$ — 1 valores $x_1, \ldots\ldots, x_{n-1}$, y hagamos, para abreviar,

$$x_1 - a = \delta_1, \quad x_2 - x_1 = \delta_2, \ldots\ldots, \quad a - x_{n-1} = \delta_n$$

Tendremos las tres sumas

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= \mathrm{M}_1\delta_1 + \ldots\ldots + \mathrm{M}_n\delta_n, \\ m &= m_1\delta_1 + \ldots\ldots + m_n\delta_n, \\ \Delta &= \Delta_1\delta_1 + \ldots\ldots + \Delta_n\delta_n, \end{aligned}$$

entre las que existe la relación idéntica

$$\Delta = \mathrm{M} - m.$$

Se puede demostrar que: *Cuando se tome* n *suficientemente grande y los intervalos* $\delta$ *tiendan hacia cero, las tres sumas, cualquiera que sea la función considerada, continua ó discontinua, tenderán cada una hacia un límite finito y determinado, que solo dependerá de la naturaleza de la función y de los valores extremos* a *y* b *que limitan el intervalo considerado.*

En efecto, supongamos que se pasa de un sistema de intervalos $\delta_i$ á otro subdividiendo éstos, por ejemplo,

$$\begin{aligned} &a, \ y_1, \ y_2, \ \ldots\ldots, \ y_{p-1}, x_1, \\ &x_1 \ z_1, \ z_2, \ \ldots\ldots, \ z_{q-1}, x_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Es fácil demostrar que en el nuevo sistema de intervalos, las

sumas M y $\Delta$ se harán menores ó permanecerán constantes, y $m$ ó será constante ó aumentará. Consideremos, por ejemplo, M.

Llamemos $\delta_1^1, \delta_1^2, \ldots\ldots \delta_1^p$ los $p$ intervalos en que se descompone $\delta_1$, tendremos:

$$\delta_1 = \delta_1^1 + \delta_1^2 + \ldots\ldots + \delta_1^p.$$

Sea $M_1^i$ el límite máximo en $\delta_1^i$. El término $M_1 \delta_1$ de M se deberá sustituir, cuando se haya hecho la subdivisión, por

$$M_1^1 \delta_1' + \ldots\ldots + M_1^p \delta_1^p.$$

Pero, los máximos $M_1^1, \ldots\ldots, M_1^p$ son todos iguales ó menores que $M_1$; luego

$$M_1^1 \delta_1 + M_1^2 \delta_1^2 + \ldots\ldots + M_1^p \delta_1^p \leqq M_1 (\delta_1' + \ldots\ldots + \delta_1^p) \leqq M_1 \delta_1$$

luego: *En toda subdivisión de los intervalos, por lejos que se continúe,* M *solo puede permanecer constante ó disminuir. Tiene pues, un límite.*

Análoga conclusión se obtendrá respecto á $m$.

Falta demostrar que *los tres límites permanecen siempre los mismos, de cualquier modo que los intervalos tiendan hacia cero.*

Con este objeto sea $\delta_1, \delta_2, \ldots\ldots, \delta_n$ un sistema de intervalos y

$$M = M_1 \delta_1 + \ldots\ldots + M_n \delta_n$$

la suma correspondiente. Tomemos otro sistema de intervalos $\delta_1', \ldots\ldots, \delta_p'$ tal, que el mayor de éstos sea menor que el menor de los intervalos $\delta$ dividido por un entero $h$. Entonces se tendrá para cualquier valor de $\alpha$ y $\beta$,

$$\delta_\alpha' < \frac{\delta_\beta}{h}$$

y, sea

$$M' = M'_1 \delta_1' + \ldots\ldots + M_p' \delta_p'$$

el valor de la suma M correspondiente á este nuevo sistema de intervalos.

Proponémonos con esto, no hallar un límite superior de la diferencia M' — M, sino un número mayor que M' — M.

Sean

$$a,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_{n-1},\ b;\qquad a,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_{p-1},\ b$$

las dos series de valores de $x$, que determinan respectivamente los intervalos

$$\delta_1 = x_1 - a,\quad \delta_2 = x_2 - x_1,\quad \ldots\ldots;$$
$$\delta'_1 = y_1 - a,\quad \delta'_2 = y_2 - y_1,\quad \ldots\ldots$$

Intercalando estas dos series entre $a$ y $b$, se tendrá

$$a,\ y_1,\ \ldots\ldots,\ y_\mu,\ x_1,\ y_{\mu+1},\ \ldots\ldots\ldots,$$
$$y_\nu,\ x_2,\ y_{\nu+1},\ \ldots\ldots,\ y_\rho,\ x_3,\ \ldots\ldots,\ b$$

Siendo los intervalos $\delta'$ menores que los $\delta$, entre dos valores consecutivos de $y$ no pueden hallarse dos valores de $x$. Tendremos pues,

$$\delta_1 = x_1 - a = y_1 - a + y_2 - y_1 + \ldots + y_\mu - y_{\mu-1} + x_1 - y_\mu$$
$$\delta_2 = x_2 - x_1 = y_{\mu+1} - x_1 + y_{\mu+2} + \ldots\ldots + \ldots\ldots x_2 - y_\nu$$
$$\delta_3 = x_3 - x_2 = y_{\nu+1} - x_2 + \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots x_3 - y_\rho$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y por consiguiente

$$M = (y_1 - a)\,M_1 + (y_2 - y_1)\,M_1 + \ldots\ldots + (x_1 - y_\mu)\,M_1$$
$$+ (y_{\mu+1} - x_1)\,M_2 + \ldots\ldots + x_2 - y_\nu)\,M_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$M' = (y_1 - a)\,M'_1 + (y_2 - y_1)M'_2 + \ldots\ldots + (x_1 - y_\mu)\,M'_{\mu+1}$$
$$+ (y_{\mu+1} - x_1)\,M'_{\mu+1} + \ldots\ldots + (x_2 - y_\nu)\,M'_{\nu+1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$M' - M = (y - a)\,(M'_1 - M_1) + \ldots + (x_1 - y_\mu)\,(M'_{\mu+1} - M_1)$$
$$+ (y_{\mu+1} - x_1)\,(M'_{\mu+1} - M_2) + \ldots + (x_2 - x_\nu)\,(M'_{\nu+1} - M_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pero, hallándose comprendidos, por ejemplo, los intervalos $\delta'_1, \delta'_2, \ldots\ldots$ en $\delta$, los límites máximos $M'_1, \ldots\ldots, M'_\mu$, son inferiores ó iguales á $M_1$; luego

$$M' - M \leq (x_1 - y_\mu)(M'_{\mu+1} - M_1) + (y_{\mu+1} - x_1)(M'_{\mu+1} - M_2)$$
$$+ (x_2 - y_\nu)(M'_{\nu+1} - M_2) + \ldots\ldots$$
$$+ (x_3 - y_\rho)(M'_{\rho+1} - M_3) + \ldots\ldots$$

y siendo cada una de las diferencias $M'_{\mu+1} - M_1, \ldots\ldots$, en valor absoluto inferior á $B - A$, se tiene

$$M' - M < \delta'_{\mu+1} + \delta'_{\nu+1} + \delta_{\rho+1} + \ldots\ldots)(B - A);$$

pero $$\delta'_{\mu+1} < \frac{\delta_1}{h}, \quad \delta'_{\nu+1} < \frac{\delta_2}{h}, \quad \ldots\ldots;$$

luego

$$M' - M < \frac{B - A}{h}(\delta_1 + \delta_2 + \ldots\ldots) < \frac{(b - a)(B - A)}{h};$$

y la diferencia $M' - M$, *si es positiva*, será inferior á un número que tiende hacia cero, cuando $h$ crece indefinidamente; podrá pues, hacerse menor que cualquier número dado.

Si ahora suponemos que en cada sistema de intervalos se haga tender á éstos hacia cero, vamos á demostrar que los límites de la suma M, para cada sistema de división, serán iguales.

Sea $\mu$ el límite de M en un primer sistema de división y $\mu'$ en otro. Si no son iguales, será por ejemplo $\mu' > \mu$.

Esto sentado, en el sistema de los intervalos correspondientes al límite $\mu$ se puede tomar un número de éstos bastante grande, para que la suma M correspondiente satisfaga á las desigualdades

$$\mu < M < \mu + \sigma < \mu';$$

Entonces, en el sistema correspondiente á $\mu'$, todas las sumas $M'$ serán mayores que $\mu'$ y por consiguiente, que M.

Supongamos que se haya llevado la subdivisión bastante lejos, para que todos los intervalos correspondientes á la suma M′ sean menores que los intervalos correspondientes á M, divididos por $h$. Se tendrá

$$M' - M < \frac{(b - a)\,(B - A)}{h}.$$

Así se podrá hacer la diferencia positiva M′ — M menor que cualquier número dado, tomando $h$ suficientemente grande. Esto es evidentemente imposible, si $\mu' > \mu$, puesto que la suma M′ es mayor que $\mu'$ y la suma M menor $\mu + \sigma$; luego

$$M' - M > \mu' - \mu - \sigma;$$

y como se puede hacer $\sigma$ tan pequeña como se quiera, M′ — M se podrá hacer mayor que un número determinado; luego $\mu'$ no puede ser diferente de $\mu$.

Termina el Sr. Darboux su demostración haciendo ver que la suma M se aproximará siempre á $\mu$, cualquiera que sea el sistema de división adoptado, con tal que los intervalos tiendan hacia cero.

Así, para cualquier sistema de intervalos, si se subdivide indefinidamente de una manera cualquiera, haciendo tender sus intervalos hacia cero, la suma M, siempre decreciente, tenderá hacia un límite determinado $\mu$.

Para llegar á la definición de la integral, según Riemann, basado en las conclusiones que preceden, M. Darboux divide las funciones discontinuas en dós clases, pues habiendo demostrado que las tres sumas

$$M = \delta_1 M_1 + \ldots\ldots + \delta_n M_n$$

$$m = \delta_1 m_1 + \ldots\ldots + \delta_n m_n$$

$$\Delta = \delta_1 D_1 + \ldots\ldots + \delta_n D_n$$

tienden hacia límites finitos y determinados, cuando todos los intervalos tienden hacia cero, llamando $M_{ab}$, $m_{ab}$ y $\Delta_{ab}$ á estos

límites, obtiene

$$\Delta_{ab} = M_{ab} - m_{ab};$$

y como la naturaleza íntima de la función depende del límite $\Delta_{ab}$, resulta que, para una primera clase de funciones, se tendrá

$$\Delta_{ab} = 0, \quad M_{ab} = m_{ab},$$

y para la segunda clase, $\Delta_{ab}$ será en general una función de $a$ y $b$ distinta de cero.

Riemann da el carácter que permite reconocer si la suma

$$\Delta = \delta_1 D_1 + \ldots\ldots + \delta_n D_n$$

tiende hacia cero, pues tomando una cantidad fija $\sigma$, tan pequeña como se quiera, *para que la suma* $\Delta$ *tienda hacia cero, es necesario y suficiente que la magnitud total de los intervalos para los que la oscilación es mayor que* $\sigma$, *tienda hacia cero cuando* n *aumenta indefinidamente.*

Esta condición es necesaria, porque si no queda satisfecha, la contribución total de los intervalos, en que la oscilación es mayor que $\sigma$, á la suma $\Delta$, es mayor que su longitud total $l$ multiplicada por $\sigma$; y como $l$ no tiende hacia cero, $\Delta$ será siempre mayor que $l\sigma$, y no tenderá hacia cero.

Dicha condición es suficiente; porque si queda satisfecha, la contribución de los intervalos en que la oscilación es mayor que $\sigma$, será menor que $l(B - A)$. Por otra parte, siendo la magnitud total de los demás intervalos menor que $(b - a)$, se tendrá

$$\Delta < l(B - A) + \sigma\,(b - a),$$

tendiendo $l$ hacia cero y pudiendo ser $\sigma$ tan pequeña como se quiera, se puede concluir que $\Delta_{ab}$ es inferior á todo número positivo tan pequeño como se quiera; luego

$$\Delta_{ab} = 0.$$

Siendo $f(x)$ una función continua comprendida entre A y B, cuando $x$ varia entre $a$ y $b$, y $x_1, x_1, \ldots\ldots$ una serie creciente

de valores entre estos dos límites, y $\delta_1 = x_1 - a$, $\delta_2 = x_2 - x_1$, ..., consideremos la suma

$$\Sigma = \delta_1 f(a + \theta\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \theta_2\delta_2) + \ldots\ldots$$

dependiente de los intervalos $\delta$ y de las cantidades $\theta$. Estudiemos su variación.

Representando $M_i$ y $m_i$ los límites máximo y mínimo de la función en el intervalo $i$, el término $\delta_i f(x_i + \theta_{i+1}\delta_{i+1})$ permanecerá comprendido entre $\delta_i M_i$ y $\delta_i m_i$ cuando $\theta_{i+1}$ varía, y se aproximará cuanto se quiera á una de estas cantidades; luego la suma $\Sigma$ quedará comprendida entre

$$M = \delta_1 M_1 + \ldots\ldots + \delta_n M_n \quad \text{y} \quad m = \delta_1 m_1 + \ldots\ldots + \delta_n m_n$$

á las que podrá aproximarse cuanto se quiera; luego si se supone que todos los intervalos $\delta$ tienden hacia cero, aumentando su número indefinidamente, para que la suma $\Sigma$ tenga un límite, *cualesquiera que sean* las $\theta$, es necesario y suficiente que los límites M y $m$ sean iguales, y por consiguiente que se tenga

$$M_{ab} = m_{ab}, \qquad \Delta_{ab} = 0$$

luego: *la condición necesaria y suficiente para que la suma* $\Sigma$ *tenga un límite, es que la magnitud total de los intervalos en los que las oscilaciones son mayores que* $\sigma$ *tienda hacia cero, cuando todos los intervalos tienden hacia cero, siendo* $\sigma$ *fija, pero tan pequeña como se quiera.*

Si esta condición queda satisfecha, el límite $\Sigma$ se llama la integral de $f(x)$ entre los límites $a$ y $b$, y se tiene

$$\lim \Sigma = \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Si $\Delta_{ab}$ no es nula, el límite de $\Sigma$ dependerá de la elección de las cantidades $\theta$, y podrá adquirir todos los valores intermedios entre $M_{ab}$ y $m_{ab}$, en este caso $\Sigma$ será *indeterminada.* (*).

(*) *Mémoire sur les fonctions discontinues.* Ann. Scient. de l' Ecole Normal Supérieur.

47. INTEGRABILIDAD. Las funciones continuas son susceptibles de integración. Esto resulta del teorema siguiente: *Dada una función* f(x) *continua en el intervalo* (a, b), *se puede asignar, para cada valor de* $\sigma$, *tan pequeño como se quiera, una cantidad* $\delta$ *tal, que si se subdivide el intervalo* (a, b) *en intervalos todos menores que* $\delta$, *las oscilaciones de la función en estos intervalos sean menores que* $\sigma$.

Pero fundándonos en las consideraciones del núm. 39 unidas á las que acabamos de exponer, nos bastará indicar que siendo toda la función continua también *uniformemente continua*, y puesto que siendo continua una función en cierto intervalo, éste puede subdividirse en otros, de modo qne en cada uno de éstos la oscilación sea una cantidad tan pequeña como se quiera, podemos añadir que para la *función continua*, el número $\tau$, por ejemplo, que representa la suma de todos los intervalos en los cuales la oscilación excede á un número fijo $\sigma'$, puede hacerse siempre cero, y por consiguiente las funciones continuas son *integrables.*

*También son integrables las funciones finitas discontinuas que tienen un número finito de puntos de discontinuidad en los que la función tiene un salto finito*, entendiéndose por *salto*, en el caso de ser el límite de la función indeterminado, la diferencia de los valores extremos entre los cuales oscila el valor de la función al aproximarse al punto *a*.

Para demostrar este teorema, indiquemos con $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ los *n* puntos de discontinuidad de la función que consideramos, rodeados de ó incluidos en intervalos tan pequeños como se quiera. Si *d* es el máximo de todos éstos, la suma de los mismos es menor que *nd*. En todo lo restante del intervalo total de integración, la función es continua, y por esto se puede efectuar la división en intervalos parciales tales, que la oscilación en ellos sea siempre menor que una cantidad cualquiera fijada $\sigma'$. Los intervalos en los cuales la oscilación de la función *pueda ser* mayor que $\sigma'$, son los que se hallan alrededor de los puntos de discontinuidad; pero la suma de éstos es menor que *nd*, y puede hacerse

tan pequeña como se quiera, porque $n$ es finito y $d$ arbitrario; luego en nuestro caso el límite de $\tau$ es cero.

Existen otras clases de funciones discontinuas integrables; para distinguirlas recordemos que los puntos de discontinuidad pueden formar un grupo infinito de puntos; pero un grupo infinito de puntos puede ser de dos especies: ó es posible reunir todos los puntos del grupo en intervalos cuya suma pueda hacerse menor que cualquier cantidad asignable, ó no puede conseguirse esto.

En el primer caso el grupo infinito de puntos es un *grupo discreto* y en el segundo un *grupo lineal de puntos.*

Las funciones discontinuas, según correspondan á uno de estos dos casos, se llaman *punteada discontinua* ó *función discontinua lineal.*

Teniendo presentes estas consideraciones en el razonamiento qne nos ha conducido á demostrar la integrabilidad de las funciones continuas, resulta el teorema de Riemann, expresado bajo esta forma: *una función punteada discontinua es integrable,* pues para la punteada discontinua se verifica la propiedad fundamental, consistente en que todos los puntos de discontinuidad pueden encerrarse en intervalos, cuya suma puede hacerse tan pequeña como se quiera.

*Ejemplo.* Si $f(x)$ tiene el valor 1 en todos los puntos del grupo.

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{1}{n}, \quad \ldots\ldots$$

y el valor 0 en los demás puntos del segmento comprendido entre 0 y 1, dicha función es integrable en el intervalo. Su valor es cero; porque si hacemos la división del segmento de 0 á 1 en segmentos parciales, resultan dos especies de éstos, á saber los que rodean á los puntos de discontinuidad y los demás. La suma

$$\Sigma f_r \delta_r$$

correspondiente á los segundos intervalos es cero, porque $f(x)$

es siempre cero en ellos, y la parte de la suma correspondiente á los primeros intervalos tendrá siempre un valor menor ó igual al producto de todos los intervalos por 1, que es el valor de la función en los puntos de discontinuidad; pero la suma de estos intervalos puede hacerse tan pequeña como se quiera; luego el límite de la suma es cero.

TEOREMA. *Si todos los términos de una serie uniformemente convergente son funciones integrables, la serie representa una función integrable, y la integración se efectúa integrando todos sus términos.*

Para demostrar este teorema, hay que ver primero que, si dos funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son integrables y las sumas

$$\Sigma \varphi_r \delta_r \quad \text{y} \quad \Sigma \psi_r \delta_r$$

tienen límites determinados y finitos, también tendrá un límite determinado y finito la suma de estas sumas. Además:

*El producto de dos funciones integrables es también integrable.* En efecto, supongamos que $\varphi$ y $\psi$ son siempre positivas en todo el camino de la integración.

Siendo $M_\varphi$ y $m_\varphi$, $M_\psi$ y $m_\psi$ los límites superiores é inferiores de las funciones propuestas, tendremos que

$$M_\varphi - m_\varphi, \quad M_\psi - m_\psi, \quad M_{\varphi\psi} - m_{\psi\varphi}$$

son las oscilaciones de $\varphi$, $\psi$, $\varphi\psi$ en el intervalo $\delta_r$, y tendremos sucesivamente

$$M_{\varphi\psi} \leqq M_\varphi M_\psi, \quad m_{\varphi\psi} \geqq m_\varphi m_\psi;$$

luego

$$M_{\varphi\psi} - m_{\varphi\psi} \leqq M_\varphi M_\psi - m_\varphi m_\psi$$
$$\leqq M_\varphi (M_\psi - m_\psi) + m_\psi (M_\varphi - m_\varphi);$$

é indicando con $D_\varphi^{(r)}$, $D_\psi^r$ las oscilaciones de las tres funciones

$\varphi$, $\psi$, $\varphi\psi$, tendremos

$$D^{(r)}_{\varphi\psi} \leqq M_\varphi D^{(r)}_\psi + m_\psi D^{(r)}_\varphi ,$$

y con mayor razón

$$D^{(r)}_{\varphi\psi} \leqq M_\varphi D^{(r)}_\psi + M_\psi D^{(r)}_\varphi .$$

Si representamos por M y M' los límites superiores de los valores de $\varphi$ y $\psi$ en todo el intervalo de la integración, tendremos con mayor razón

$$D^{(r)}_{\varphi\psi} \leqq MD^{(r)}_\psi + M'D^{(r)}_\varphi$$

$$\Sigma\delta_r D^{(r)}_{\varphi\psi} \leqq M\Sigma\delta_r D^{(r)}_\varphi + M'\Sigma\delta_r D^{(r)}_\varphi .$$

Por ser integrables las funciones dadas, las sumas

$$\Sigma\delta_r D^{(r)}_\psi \quad \text{y} \quad \Sigma\delta_r D^{(r)}_\varphi$$

tenderán hacia cero; luego también tenderá hacia cero $\Sigma\delta_r D^{(r)}_{\varphi\psi}$, y el producto de las dos funciones $\varphi$ y $\psi$ será integrable.

Si las funciones son negativas, basta repetir el razonamiento para $\varphi + C$ y $\psi + C'$, siendo C y C' constantes que hagan positivas á las dos expresiones.

Si ahora se trata de una suma de infinitos términos, cada uno de los cuales representa una función integrable, consideraremos la expresión

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots = \sum_1^\infty u_h(x)$$

ó bien

$$f(x) = \sum_{h=1}^{h=n} u_h(x) + R_n(x),$$

pudiendo ser, en virtud de la hipótesis, $R_n$ tan pequeño como se quiera para cualquier punto $x$.

No pudiendo el valor límite superior de $f$ superar á la suma

de los límites superiores de todos los sumandos (pues solo en el caso particularísimo de que todos los sumandos tengan el máximo ó el mínimo en el mismo punto corresponderá el máximo ó mínimo de la función á la suma de los máximos ó mínimos de los sumandos), se tendrá

$$M^{(f)} \leqq M^{(1)} + M^{(2)} + \ldots\ldots + M^{(R)}$$
$$(m)^{(f} \geqq m^{(1)} + m^{(2)} + \ldots\ldots + m^{(R)}$$

y restando

$$D_r^{(f)} \leqq D_r^{(1)} + D_r^{(2)} + \ldots\ldots + D_r^{(R)}.$$

Si ahora para cualquiera $x$ se tiene, en valor absoluto, que

$$R_n x) < \sigma;$$

la oscilación de R no puede exceder á $2\sigma$; luego

$$D_r^{(f)} \leqq D_r^{(1)} + D_r^{(2)} + \ldots\ldots + 2\sigma$$
$$\Sigma\delta_r D_r^{(f)} \leqq \Sigma\delta_r D_r^{(1)} + \Sigma\delta_r D_r^{(2)} + \ldots\ldots + 2\sigma\Sigma\delta_r.$$

Siendo $\Sigma\delta_r = b - a$, por tender á cero las sumas del segundo miembro, pues suponemos que las funciones $u_1(x), (u_2 x)$ son integrables; y por ser $\sigma$ susceptible de hacerse tan pequeño como se quiera, el primer miembro se podrá hacer tan pequeño como se quiera, y la función $f$ será integrable. En fin, su integral es la suma de las integrales de sus términos, pues si escribimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1(x)\,dx + \ldots\ldots + \int_a^b R_n(x)\,dx,$$

teniendo el segundo miembro un número finito de términos, bastará demostrar que

$$\int_a^b R_n(x)\,dx$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera, haciendo á $n$ sufi-

cientemente grande. Entonces la serie de las integrales

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \int_a^b u_h(x)\,dx$$

será una serie convergente, y su valor el de la integral de $f(x)$.

Pero $R_n(x)$ puede hacerse menor que $\sigma$ para cualquiera $x$ comprendida en el intervalo de la integración; luego

$$\int_a^b R_n(x)\,dx < \int_a^b \sigma\,dx = (b-a)\sigma,$$

en valor absoluto. Queda pues demostrado que el primer miembro de esta desigualdad puede hacerse menor que cualquier valor, tan pequeño como se quiera.

## § 4.° Funciones continuas no derivables.

48. Sea

$$f(x) = \sum_0^\infty b^n \cos(\pi a^n x),$$

representando $a$ un número entero impar y $b$ un número positivo menor que 1.

La serie que define la $f(x)$ es uniformemente convergente, cualquiera que sea $x$, porque, siendo convergente la serie $\Sigma b^n$, de los máximos para $b < 1$, á cada valor $\delta$, por pequeño que sea, corresponde un valor $m_1$ tal, que la desigualdad

$$\sum_{n=m+1}^{m+p} b^n < \delta$$

queda satisfecha cuando $m > m_1$. Luego la desigualdad

$$\left| \sum_{n=m+1}^{m+p} b^n \cos \pi a^n x \right| < \delta$$

queda satisfecha por los mismos valores de $m$, cualquiera que sea $x$, y la serie es uniformemente convergente, y por ser cada término de la serie una función continua, la función $f(x)$ es continua.

Weierstrass demuestra que esta función no tiene derivada de la manera siguiente:

Sea $x_0$ un valor cualquiera de $x$, $m$ un entero positivo y $\alpha_m$ un entero tal que se tenga

$$-\frac{1}{2} < a^m x_0 - \alpha_m \leqq \frac{1}{2}.$$

Haciendo

$$a^m x_0 - \alpha_m = x^{m+1}$$

y

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \qquad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^n}$$

resulta

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \qquad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m}.$$

por lo cual se concluye que $x_0$ está comprendida entre $x'$ y $x''$ y que se puede dar á $m$ un valor tan grande, que $x'$ y $x''$ difieran de $x_0$ en tan poco como se quiera. Hemos construido pues á los dos lados de $x_0$ dos grupos de puntos cuyo punto límite es $x_0$.

Formemos ahora la relación incremental. Se tiene

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \sum_0^\infty b^n \frac{\cos \pi a^n x' - \cos \pi a^n x_0}{x' - x_0}$$

$$= \sum_0^{m+1} (ab)^n \frac{\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0}{a^n (x' - x_0)} +$$

$$+ \sum_0^\infty b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} \pi x' - \cos^{m+n} \pi x_0}{x' - x_0}.$$

Pero podemos escribir

$$\frac{\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0}{a^n (x' - x_0)} =$$

$$= -\pi \operatorname{sen} \frac{1}{2} a^n \pi (x' + x_0) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a^n \pi (x' - x_0)}{\frac{1}{2} a^n \pi (x' - x_0)}$$

y los dos últimos factores del segundo miembro oscilan entre $-1$ y $+1$. El primero puede alcanzar este límite, pero el segundo no, mientras que $x'$ no coincida con $x_0$.

Por consiguiente, tenemos en valor absoluto,

$$\sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \frac{\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0}{a^n (x' - x_0)} <$$

$$< \sum_{0}^{m-1} (ab)^n \pi < \frac{\pi (ab)^m}{ab - 1}$$

por ser la suma una progresión geométrica cuya razón es $ab$.

Examinemos ahora la segunda parte de la suma.

Por ser $a$ un número entero impar, sustituyendo el valor de $x'$ y el $x_0$, se tiene

$$\cos^{m+n} \pi x' = \cos a^n (a_m - 1)\pi = (-1)^{a_m - 1}$$

$$\cos^{m+n} \pi x_0 = \cos a^n (a_m \pi + \pi x_{m+1}) =$$

$$= (-1)^{a_m} \cos a^n \pi x_{m+1}.$$

Tenemos pues que

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} \pi x' - \cos a^{m+n} \pi x_0}{x' - x_0} =$$

$$= (-1)^{a_m - 1} (ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{1 + \cos a^n \pi x_{m+1}}{a^m (x' - x_0)}$$

$$= (-1)^{a_m} (ab)^m \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{1 + \cos a^n \pi x_{m+1}}{1 + x_{m+1}}.$$

Los términos comprendidos en la suma son todos positivos; porque hallándose $x_{m+1}$ siempre entre $-\frac{1}{2}$ y $+\frac{1}{2}$, el denominador será positivo y comprendido entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$, mientras que el numerador estará siempre comprendido entre o y 2.

El primero de estos términos

$$\frac{1 + \cos \pi x_{m+1}}{1 + x_{m+1}}$$

está comprendido entre $\frac{2}{3}$ y 4, porque el numerador está comprendido entre 1 y 2, no pudiendo ser $\cos \pi x_{m+1}$ negativo, ya que $x_{m+1}$ es menor ó igual á $\frac{1}{2}$ en valor absoluto.

Representando $\varepsilon'$ un número comprendido entre $-1$ y $+1$, y $\eta_1'$ un número mayor que 1, tendremos pues

$$\frac{f(x') - f(x)_0}{x' - x_0} = \varepsilon' \frac{\pi (ab)^m}{ab - 1} + (-1)^{a_m} (ab)^m \frac{2}{3} \eta_1'$$

y análogamente resultará que

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = \varepsilon'' \frac{\pi (ab)^m}{ab - 1} - (-1)^{a_m} (ab)^m \frac{2}{3} \eta_1''$$

Eligiendo $a$ y $b$ de modo que

$$\frac{\pi}{ab - 1} < \frac{2}{3} \quad \text{ó} \quad ab > \frac{3}{2}\pi + 1,$$

en cada una de las anteriores fórmulas prevalecerá el signo del segundo termino, y las dos relaciones incrementales tendrán constantemente signos opuestos. Además por ser $ab > 1$, sus valores absolutos crecerán más allá de todo límite al crecer $m$, y por consiguiente al aproximarse los dos puntos $x'$ y $x''$ al $x_0$. Así pues, la función $f(x)$ no tendrá para ningún valor de $x^0$ derivada determinada finita ó infinita.

Esto no se opone á que, para ciertos valores de $x_0$, pueda determinarse un grupo especial de puntos que tengan por punto-límite al $x_0$, y que para el mismo, el límite de la relación incremental sea determinado.

*

## § 5.° Integrales definidas singulares de Cauchy.

**49.** Definición. Se llama *integral definida singular*, según Cauchy, una integral de la forma

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)dx$$

en la que $\varepsilon$ y $\varepsilon'$ son infinitamente pequeños, pero de signos iguales, y en la que $a$ es un valor de $x$ que hace á $f(x)$ infinita. Se supone, por otra parte, $f(x)$ finita entre $a-\varepsilon$ y $a-\varepsilon'$. Las reglas para decidir cuando dichas integrales son finitas ó infinitamente pequeñas se fundan en el

Teorema I. *Sea* G *una cantidad comprendida entre el mayor y el menor valor que pueda tomar* f(x) *cuando* x *varía desde* $x_0$ *hasta* X; *se tiene, suponiendo que la función* $\varphi(x)$ *sea siempre positiva ó siempre negativa entre dichos límites*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)dx = G\int_{x_0}^{X} \varphi(x)dx;$$

*y si* f(x) *es continua entre* $x_0$ *y* X,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\varphi(x)dx = f(x_0 + \theta\,\overline{X - x_0})\int_{x_0}^{X} \varphi(x)dx,$$

*expresando* $\theta$ *un número comprendido entre* 0 y 1.

En efecto, sean M el máximo y $m$ el mínimo de $f(x)$ entre $x_0$ y X, es evidente que $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ estará comprendida entre

las expresiones

$$\int_{x_0}^{X} m\varphi(x)\,dx = m\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx \quad \text{y} \quad M\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx;$$

pero $G\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\,dx$ es la expresión de las cantidades comprendidas entre las dos anteriores; de manera que si $f(x)$ es continua, pasará por el valor G comprendido entre $x_0$ y X; luego G es de la forma $f(x_0 + \theta\,\overline{X - x_0})$, hallándose $\theta$ comprendido entre o y 1, lo que demuestra el teorema.

*Ejemplo.* Para saber si es nula la integral singular

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}\sqrt{x}}\,dx,$$

se escribirá bajo la forma

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\sqrt{x}\cos x}{\operatorname{sen}\sqrt{x}}\,\frac{dx}{\sqrt{x}},$$

ó, designando con $\xi$ un valor de $x$ comprendido entre $\varepsilon$ y $\varepsilon'$,

$$\frac{\sqrt{\xi}\cos\xi}{\operatorname{sen}\sqrt{\xi}}\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,\frac{\sqrt{\xi}\cos\xi}{\operatorname{sen}\sqrt{\xi}}\,(\sqrt{\varepsilon'} - \sqrt{\varepsilon});$$

el factor exterior al paréntesis es finito é igual á 2 para $\xi = 0$, el segundo tiene cero por límite; luego la integral singular es nula.

TEOREMA II. *Sean* $\alpha$ *un exponente menor que* 1, $\varphi(x)$ *una función de* x *que permanece inferior á una cantidad fija para valores de* x *próximos á* a, *la integral singular*

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}}\,dx$$

*es nula cuando se supone á* $\varepsilon$ *y* $\varepsilon'$ *infinitamente pequeños de igual signo.*

Supongamos que $\varepsilon$ y $\varepsilon'$ son positivos, entonces llamando M al máximo de $\varphi(x)$, cuando $x$ varía desde $a$ hasta $a + \varepsilon'$, se tendrá

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}}\,dx < M \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$$

ó

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}}\,dx < \frac{M}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{\varepsilon'^{\alpha-1}}\right).$$

Cuando $\varepsilon$ y $\varepsilon'$ tienden hacia cero, el segundo miembro de esta fórmula tiende hacia cero, y por consiguiente la integral singular tiende hacia cero.

Teorema III. *Sean* $\alpha$ *un exponente mayor ó igual á* 1, $\varphi(x)$ *una función de* x *que permanece superior en valor absoluto á una cantidad fija, y que no cambia de signo para valores de* x *próximos á* a; *la integral singular*

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}}\,dx$$

*puede hacerse tan grande como se quiera, eligiendo convenientemente* $\varepsilon$ *y* $\varepsilon'$.

Supongamos que $\varepsilon$ y $\varepsilon'$ son positivos y $\varphi(x)$ también. Llamemos $m$ al mínimo de $\varphi(\varepsilon)$ cuando $x$ varía entre $a$ y $a + \varepsilon'$; se tendrá

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}}\,dx > m \int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}};$$

si $\alpha = 1$, se tendrá

$$\int_{a+\varepsilon}^{a+\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{(x-a)^{\alpha}} > m \log \frac{\varepsilon'}{\varepsilon};$$

que será tan grande como se quiera cuando $\varepsilon'$ sea suficientemente pequeño; luego la integral singular se podrá hacer tan grande como se quiera, si $\alpha > 1$.

*Ejemplo.* La integral singular

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{e^x dx}{\sqrt{x}},$$

es nula; y las siguientes pueden ser tan grandes como se quiera,

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{e^x dx}{x}, \quad \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{e^x dx}{x^2}, \quad \int_{1+\varepsilon}^{1+\varepsilon'} \frac{x}{1-x}\, dx.$$

## § 6.° Integrales en las que la función ó los límites se hacen infinitos

**50.** Caso de la función infinita. Supongamos que $f(x)$ se hace infinita para $x = a_1, a_2, \ldots, a_k$, comprendidos entre $x_0$ y X, en la integral $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ que expresa el límite hacia el que tiende la expresión

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_0}^{a_1-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{a_1+\eta_{11}}^{a_2-\varepsilon_2} f(x)dx + \int_{a_2+\eta_{12}}^{a_3-\varepsilon_3} f(x)dx + \ldots \\ &\qquad + \int_{a_k+\eta_{1k}}^{X} f(x)\,dx, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

cuando los números positivos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \eta_{11}, \eta_{12}, \ldots$ tienden hacia cero. La expresión (1) generalmente no tiene límite; pero hay casos en que este límite existe y permanece el mismo, para cualquier modo de variar las $\varepsilon$ y las $\eta$ al tender hacia cero.

*Para decidir si una integral* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ *tiene un valor bien determinado, se forman las integrales singulares tales como*

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx, \qquad \int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)\,dx,$$

*expresando* a *un valor que hace á* f(x) *infinita entre los límites* $x_0$ *y* X; *y si todas estas integrales singulares son nulas, la integral* $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ *está bien determinada.*

Se demuestra este teorema de Cauchy, probando que, si la integral singular $\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx$ es nula, la integral

$$\int_{p}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx, \tag{2}$$

en la que $p$ expresa un número tal, que entre $p$ y $a$, $f(x)$ no se hace infinita y se tiene un valor determinado. En efecto, la suma (1) que sirve para definir la expresión $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, puede ser descompuesta en integrales de la forma (2). Pero se tiene que

$$\int_{p}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx = \int_{p}^{a-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx.$$

Si la integral singular que figura en esta fórmula tiene por límite cero, de cualquier manera que $\varepsilon$ y $\varepsilon'$ tiendan hacia cero, se podrán tomar $\varepsilon$ y $\varepsilon'$ bastante pequeños para que aquélla sea siempre menor que $\frac{E}{2}$ en valor absoluto, de modo que, si representamos $\int_{p}^{a-\varepsilon} f(x)\,dx$ por $\varphi(\varepsilon)$, la fórmula precedente se po-

drá escribir

$$\varphi(\varepsilon') = \varphi(\varepsilon) + \int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon'} f(x)\,dx;$$

y se ve que $\varphi(\varepsilon')$ podrá hallarse comprendida entre límites $\varphi(\varepsilon) + \frac{E}{2}$ y $\varphi(\varepsilon) - \frac{E}{2}$, ó si se quiere, llamando A y B dos números fijos cuya diferencia sea E, se puede decir que $\varphi(\varepsilon')$ queda comprendida entre A y B para valores suficientemente pequeños de $\varepsilon'$. Pero podrá también hacerse de modo que $\varphi(\varepsilon')$ se halle comprendida entre otros dos números A' y B' cuya diferencia B' — A' sea menor que $E < \frac{E}{2}$; y como $\varphi(\varepsilon')$ debe quedar comprendida entre A y B, se puede suponer á A' y B' comprendidos entre A y B. Se vería tambien que $\varphi(\varepsilon')$ puede hallarse comprendida entre otros dos números fijos A'' y B'' cuya diferencia sea menor que $E'' < \frac{E'}{2}$, y por consiguiente comprendidos entre A' y B', y así sucesivamente. Tendremos pues

$$A \leqq A' \leqq A'' \ldots\ldots \leqq A^{(m)} < B^{(m)} \leqq B^{(m-1)} \ldots\ldots \leqq B;$$

de manera que no creciendo los números A, A' A', A'', ..... más allá que B, tienen un límite $a$; y no decreciendo los números B, B', ..... hasta un valor menor que A, tienen un límite $b$. Por consiguiente $a$ es igual á $b$, porque $A^{(m)}$ $B^{(m)}$ puede tomarse tan pequeño como se quiera, luego su límite $a - b$ es nulo.

En fin, pudiendo $\varphi(\varepsilon')$ hallarse comprendida entre $A^{(m)}$ y $B^{(m)}$, diferirá del límite $a$ en menos de $A^{(m)} - B^{(m)}$ ó $E^{(m)}$, es decir, en menos de una cantidad menor que cualquiera otra dada; luego $\varphi(\varepsilon')$ tiene por límite $a = b$.

*Ejemplo.* La integral $\int_{-1}^{+1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, aunque la cantidad

colocada bajo el signo $\int$ se hace infinita para $x = -1$ $x = +1$, es finita, porque las integrales singulares

$$\int_{-1+\varepsilon}^{-1+\varepsilon'} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \int_{+1-\varepsilon}^{1-\varepsilon'} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

son nulas, pues la cantidad bajo el signo en la primera, puede escribirse así:

$$\frac{e^x}{(1+x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x}} \quad \text{ó} \quad \frac{e^x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+x}};$$

pero el exponente del factor que anula al denominador es $< 1$; y como $\frac{e^x}{\sqrt{1-x}}$ no es nulo ni infinito para $x = -1$, la primera integral singular es nula. Se verá de igual manera que también es nula la segunda integral singular.

51. Integrales entre límites infinitos. Teorema I. *Para que la integral*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{ó} \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx,$$

*en la cual* f(x) *no se hace infinita cuando se hace variar* x *desde* a *hasta* $\infty$, *tenga un valor bien determinado, basta que la integral singular*

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)\,dx \quad \text{ó} \quad \int_{-\varepsilon}^{-\varepsilon'} f(x)\,dx$$

*en la que* $\varepsilon$ *y* $\varepsilon'$ *crecen indefinidamente, tenga un valor nulo, cualquiera que sea el modo de crecer de estas dos cantidades.*

Basta repetir el razonamiento hecho para demostrar el teorema demostrado en la pág. 119.

Teorema II. *Si* $\alpha > 1$ *y el límite de* $f(x)\,x^{\alpha}$ *es nulo para*

$x = \infty$, *la integral singular*

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)\,dx \qquad (1)$$

*es nula cuando* $\varepsilon$ *y* $\varepsilon'$ *tienden hacia* $+\infty$.

En efecto, si el límite de $f(x)\,x^{\alpha}$ es nulo, hagamos

$$f(x)\,x^{\alpha} = \varphi(x);$$

la integral singular se escribirá

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\,dx;$$

y llamando M á una cantidad igual al mayor valor que pueda tomar $\varphi(x)$ entre los límites $\varepsilon$ y $\varepsilon'$, se ve que la integral (1) es menor en valor absoluto que

$$M\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{x^{\alpha}} \quad \text{ó} \quad \frac{M}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{\varepsilon'^{\alpha-1}}\right),$$

cantidad evidentemente nula para $\varepsilon = \infty$ y $\varepsilon' = \infty$, cuando $\alpha > 1$, porque M tiene o por límite para $x = \infty$.

De igual manera se demuestra que: *Si* $\alpha > 1$ *y el límite de* $f(x)x^{\alpha}$ *es nulo para* $x = -\infty$, *la integral* (1) *es nula cuando se suponen* $\varepsilon$ *y* $\varepsilon'$ *iguales á* $-\infty$.

*Si* $\alpha < 1$ ó $= 1$ *y además el límite de* $f(x)x^{\alpha}$ *es finito para* $x = \infty$, *ó si* $f(x)x^{\alpha}$ *crece conservando el mismo signo, la integral*

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)\,dx$$

*es infinita para* $\varepsilon = \infty$, *siempre que sea* $\varepsilon$ *suficientemente grande.*

En efecto, haciendo $\varphi(x) = f(x)x^{\alpha}$, la integral dada será igual á

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\,dx,$$

y llamando M á una cantidad inferior en valor absoluto al valor mínimo que adquiere $\varphi(x)$ entre los límites $\varepsilon$ y $\varepsilon'$, valor que se puede suponer mayor que cero, se ve que

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\,dx > M \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

si $\alpha = 1$ se tiene $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)}{x^{\alpha}}\,dx > M \log \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$;

si $\alpha < 1$, se tiene $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{\varphi(x)\,dx}{x^{\alpha}} > \frac{M}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - \frac{1}{\varepsilon'^{\alpha-1}}\right)$.

En los dos casos la integral es infinita para $\varepsilon' = \infty$.

Teorema III. *Si* $\alpha < 1$ ó $= 1$ *y además la expresión* $f(x)x^{\alpha}$ *es finita ó infinita, pero diferente de cero para* $x = -\infty$, *la integral* $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} f(x)dx$ *es infinita para* $\varepsilon' = -\infty$, *siempre que* $\varepsilon$ *sea negativo y suficientemente grande en valor absoluto.*

*Ejemplo 1.°* La integral $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ es finita, porque el límite de $\displaystyle x^2 \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ para $x = \infty$ es nulo.

*Ejemplo 2.°* La integral $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{lx\sqrt{1+x^2}}$ es infinita pues considerando la integral singular

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{\log x\sqrt{1+x^2}} = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{x\log x}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

se ve que es mayor que la mitad de

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dx}{xlx} = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dlx}{lx} = [llx]_{\varepsilon}^{\varepsilon'} = ll\varepsilon' - ll\varepsilon = l\,\frac{l\varepsilon'}{l\varepsilon},$$

que es tan grande como se quiera tomando $\varepsilon'$ suficientemente grande con respecto á $\varepsilon$. La integral es pues infinita.

TEOREMA DE CAUCHY. *La serie*

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots\ldots + \varphi(n) + \ldots\ldots$$

*y la integral definida* $\int_0^\infty \varphi(x)dx$ *tienen al mismo tiempo valores finitos ó infinitos, cuando* $\varphi(x)$ *expresa una función indefinidamente decreciente desde* o *hasta* $\infty$, *y que tiene por límite cero.*

En efecto, se tiene

$$\int_0^\infty \varphi(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx + \int_1^2 \varphi(x)dx + \int_2^3 \varphi(x)dx + \ldots\ldots$$

Evidentemente

$$\int_0^n \varphi(x)dx < \varphi(a) + \varphi(1) + \ldots\ldots + \varphi(n-1); \qquad (1)$$

si pues, la serie es convergente para $n = \infty$, el segundo miembro será finito y también el primero. Pero además

$$\int_0^n \varphi(x)dx > \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots\ldots + \varphi(n);$$

y si el segundo miembro es infinito para $n = \infty$, la serie será divergente y la integral infinita. Igualmente, si la integral es finita, el primer miembro de (2) es finito, el segundo miembro también, y la serie es convergente.

*Ejemplo 1.°* La serie $\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots\ldots$ es convergente, si $k$ es $> 1$. En efecto $\varphi(n) = \frac{1}{n^k}$, y se tiene

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^k} = \left[ -\frac{1}{(k-1)x^{k-1}} \right]_1^\infty = \frac{1}{k-1},$$

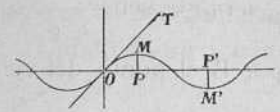
cantidad finita, cuando se supone $k > 1$. Se ve de igual modo que la serie es divergente para $k < 1$ ó para $k = 1$.

*Ejemplo 2.º* La serie cuyo término general es $\frac{1}{n\,ln}$ es divergente, porque $\int_2^\infty \frac{dx}{x\,lx} = [llx]_2^\infty$ es infinito.

La serie cuyo término general es $\frac{1}{n\,ll\ldots n}$ es divergente.

## 52. Representación geométrica de las funciones.

1. Sea $y = \text{sen } x$, la *sinusoide*. Se tiene




para $x = 0$, $y = \text{sen } 0 = 0$,

» $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$,

» $x = \pi$, $y = \text{sen } \pi = 0$.

Se ve además que la función crece desde $x = 0$ hasta llegar al máximo en $x = \frac{\pi}{2}$, que luego decrece hasta cero, conservando su concavidad hacia el eje de las $x$, y luego se repiten estas alteraciones en el lado de las $y$ negativas. En fin, que en $x = 0$, $\pi$, ..... $\frac{dy}{dx} = +1, -1, \ldots\ldots$, y dichos puntos son de inflexión.

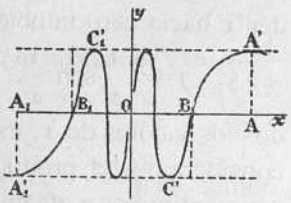
2. $y = \cos x$, *cosinusoide*. Análoga discusión que la anterior. Pero en $x = 0$, coseno es $= 1$, etc.

3. $y = \text{sen } \frac{1}{x}$.

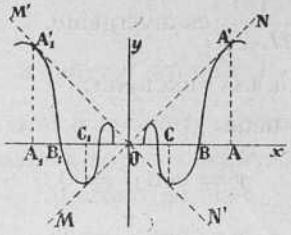
Esta curva es continua, excepto para $x = 0$.

Haciendo tender á $x$ hacia el infinito, para valores cualesquiera, positivos ó negativos, $y$ se halla siempre comprendido entre $+1$ y $-1$.

Hagamos tender á $x$ hacia $\infty$ para valores positivos. La $y$ tendrá cero por límite, y la curva se aproximará al eje de las $y$ sin llegar á él. Si damos $\frac{1}{x}$ la

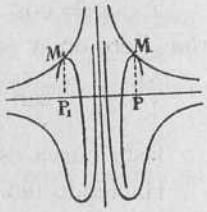


serie de valores $\frac{\pi}{2}$, $2\frac{\pi}{2}$, $3\frac{\pi}{2}$, ..... Tendremos, para $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, y designando por A el punto cuya abscisa es $x = \frac{2}{\pi}$, será A' el punto cuya ordenada es $y = 1$ y cuya abscisa es $x = \frac{2}{\pi}$.




Para $x = \frac{2}{2\pi}$, será $y = \text{sen}\frac{2\pi}{2} = 0$; y expresando por B el punto del eje de abscisas para el que $x = \frac{2}{2\pi}$, la ordenada será $y = 0$; y así sucesivamente.

4. $y = x \text{ sen}\frac{1}{x}$. Trazados los ejes ortogonales y las bisectrices de sus ángulos, se ve que la curva está comprendida en el ángulo MOM' y su opuesto por el vértice, pues para cualquier valor dado á $\frac{1}{x}$, $\text{sen}\frac{1}{x}$ oscila entre $+1$ y $-1$; luego los valores extremos son $+x$ y $-x$, esto es, será siempre $y \leqq x$, $y \geqq -x$. Pero $y = x$ representa la bisectriz OM é $y = -x$ la bisectriz ON; luego la curva tiene sus puntos en la una ó en la otra de dichas rectas.




A los valores $\frac{2}{\pi}$, $\frac{2}{2\pi}$, .... de $x$ corresponderán los puntos A', B, .....; y al tender $x$ hacia cero también tiende $y$ hacia cero. Etcétera.

5. $y = \frac{1}{x}\text{ sen}\frac{1}{x}$. Esta función queda determinada para todos los valores de $x$, excepto para $x = 0$. Siendo la función que consideramos el producto de dos factores, será continua si estos son continuos, y efectivamente lo son, excepto para $x = 0$.

Al tender $x$ hacia $\infty$, tendrá $y$ por límite cero. Además sen $\frac{1}{x}$ está comprendido siempre entre $+1$ y $-1$, por consiguiente las dos curvas cuyas ecuaciones son

$$y = +\frac{1}{x}, \quad y = -\frac{1}{x}$$

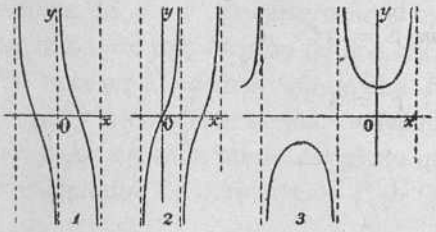
comprenden entre sí á la curva que tratamos de describir. Dichas ecuaciones representan dos hipérbolas cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas.

Dando ahora á $x$ la serie de valores

$$\frac{2}{\pi}, \frac{2}{2\pi}, \ldots\ldots \text{ para } x = \frac{2}{\pi} \text{ será } y = \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{x};$$

luego el punto $M\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$ que es punto de la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, pertenece á la curva.

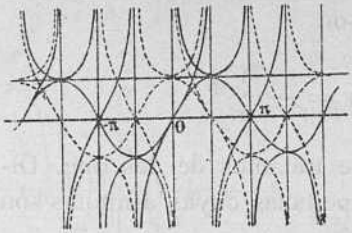
Para $x = \frac{2}{2\pi}$ es $y = 0$; luego el punto $N\left(\frac{2}{2\pi}, 0\right)$ pertenece á la curva.




Para $x = \infty$ es $\lim y = 0$; luego la curva, á partir de M, se aproxima indefinidamente al eje de las $x$. Para $x = \frac{2}{3\pi}$ se tiene: $y = \frac{1}{x}$, y el punto $P\left(\frac{2}{3\pi}, -\frac{3\pi}{2}\right)$ es un punto de la hipérbola $y = -\frac{1}{x}$ y de la curva que se busca.

Para $x = \frac{2}{5\pi}$, $y = \frac{1}{x}$; el punto $\varphi\left(\frac{2}{5\pi}, \frac{5\pi}{2}\right)$ es común

á la curva y á la hipérbola $y = \frac{1}{x}$. La curva al acercarse $x$ á cero, efectúa innumerables oscilaciones de una á otra hipérbola. (*)




Las curvas $y = \text{tg } x$, $y = \sec x$, $y = \cot x$ se hallan representadas por los números 1, 2, 3 en la figura correspondiente; y también se hallan representadas todas las funciones circulares en la última figura.

6. *Estudiar las variaciones de la función*

$$y = x - \frac{1}{2}\,\text{tg } x - \frac{2}{3}\,\text{sen } x$$

*cuando* x *varía desde cero hasta* $\frac{\pi}{2}$.

7. *Estudiar las variaciones de la función* $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

8. *Estudiar las variaciones de* $x^x - x$.

9. *Variaciones de* $\frac{a^x}{x}$.

10. *Estudiar la fnnción* $y = x^x$.

11. « » » $y = x^{\frac{1}{x}}$.

(*) C. Alasia. *Exercici ed applicazioni di calcolo infinitesimale.*

# LIBRO TERCERO

# FUNCIONES DE VARIABLES COMPLEJAS

## CAPÍTULO I

### Series

#### § 1.º Definiciones

**53.** Sea $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \equiv P + Qi$.

Para que $f(z)$ sea una función determinada de $z = x + iy$, no basta que se halle determinado su valor cuando se dan los valores de $x$ é $y$. En este caso el estudio de la función $f$ se reduciría al de una función de dos variables reales independientes. Es necesario además que dicha función tenga una derivada única y bien determinada, independiente de los incrementos $\Delta x$ y $\Delta y$ en cada punto del plano que corresponde al valor de $z$ considerado. La derivada de $P + Qi$ es

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \sqrt{-1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right)}{dx + dy\sqrt{-1}};$$

y para que sea independiente de la relación $\frac{dy}{dx}$ es decir, del

modo de tender $dx + dy\sqrt{-1}$ hacia cero, es necesario que

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial Q}{\partial x}}{1} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} + \sqrt{-1}\frac{\partial Q}{\partial y}}{\sqrt{-1}},$$

y por consiguiente, que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Si entre cada dos puntos de una región A del plano en que están rèpresentados los valores de $z$ se puede trazar una línea continua que no corte su contorno, la región considerada se llama una *área continua.* Si en todos los puntos de esta región $f(z)$ tiene una derivada, se dice que $f(z)$ es una *función monógena* (de derivada *única)* de $z$ en el área A. El área considerada puede ser todo el plano, como sucede en el caso de $e^z$, sen $z$, ...

Una función monógena $f(z)$ se llama *uniforme* ó *monódroma* cuando á cada punto del plano corresponde un sólo valor de aquélla.

Una función de una variable imaginaria $z$ puede ser monógena solo en una parte del área en que está determinada. En este caso se halla la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n z^{a_n},$$

cuando $a$ representa un entero positivo impar y $b$ una cantidad positiva menor que 1, con la condición

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab - 1}$$

pues, cuando $z \leqq 1$, la serie es convergente; y en todos los puntos tales que $|z| < 1$, la función tiene una derivada finita; pero en los puntos que satisfacen á la condición $|z| = 1$, la función

no tiene derivada, pues si $z = \cos \omega + i \operatorname{sen} \omega$, se tendrá que

$$f(z) = \sum_0^\infty b^n [\cos (a^n \omega) + i \operatorname{sen} (a^n \omega)],$$

y la función $\sum_0^\infty b^n \cos (a^n \omega)$ no tiene derivada con respecto á $\omega$.

Cuando una región del plano en que está determinada una expresión analítica ó función monógena $f(z)$, se compone de muchas áreas separadas, $f(z)$ puede representar en estas áreas diferentes funciones monógenas completamente independientes. Esta observación fué demostrada por Weierstrass del modo siguiente:

Sea $\varphi(z)$ una expresión igual á $+1$, cuando $|z| < 1$ é igual á $-1$, cuando $|z| > 1$. Haciendo

$$F_0(z) = \frac{f_1(z) + f_2(z)}{2}, \qquad F_1(z) = \frac{f_1(z) - f_2(z)}{2},$$

la expresión $F_0(z) + F_1(z)\varphi(z)$ es igual á $f_1(z)$, cuando $|z| < 1$ é igual á $f_2(z)$, cuando $|z| > 1$.

Hay varias expresiones analíticas que satisfacen á las condiciones impuestas á $\varphi(z)$, por ejemplo (*) la expresión

$$\varphi(z) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}(1 - z)}{(1 + z^{k-1})(1 + z^k)}.$$

Pues por ser (pág. 92)

$$\varphi(z) = \lim_{m=\infty} \frac{1 - z^m}{1 + z^m},$$

se deduce que $\varphi(z) = 1$, cuando $|z| < 1$ y $\varphi(z) = -1$, cuando $|z| > 1$.

Una función monódroma, finita y continua en el interior de un área C, se llama *sinéctica* en el interior de dicha área (Cauchy).

(*) Gomes Teixeira, *Curso de Analyse infinitesimal*, t. I, pág. 341.

54. FUNCIONES NO MONÓDROMAS, POLÍTROPAS Ó MULTIFORMES son las que adquieren más de un valor para cada valor de la variable ó en cada punto de la región correspondiente.

*Ejemplo* 1.º Sea $z = x + iy = re^{\theta i}$, la función

$$\log lz = \log lr + \theta\sqrt{-1}$$

es polítropa, multiforme ó mejor, infinitiforme en el interior de un círculo descrito desde el origen de coordenadas como centro con radio $r$.

En efecto, haciendo recorrer á $z$ una circunferencia de radio $r$, $lr$ permanecerá constante, pero $\theta$ variará, y cuando el punto haya descrito la circunferencia, $\theta$ habrá aumentado en $2\pi$, $lz$ habrá aumentado en $2\pi i$.

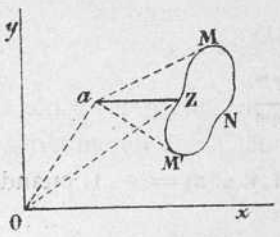
*Ejemplo* 2.º Sea $u = \sqrt{(z-a)(z-b)\ldots\ldots(z-c)}$. Tenemos que

$$\operatorname{mod}\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots\ldots} = \sqrt{\operatorname{mod}(z-a)}\,\sqrt{\operatorname{mod}(z-b)\ldots\ldots}$$

$$\arg\sqrt{(z-a)(z-b)\ldots\ldots} = \frac{1}{2}\arg(z-a) + \frac{1}{2}\arg(z-b) + \ldots\ldots$$

Consideremos, por ejemplo, el punto $a$.

Si el punto $z$ describe el contorno MM'N, el ángulo que el vector $z - a$ forma con el eje las $x$ irá primero aumentando hasta llegar á la posición extrema $a$M' para disminuir luego hasta la otra posición extrema $a$M. El ángulo, después de recorrer el punto $z$ el contorno, habrá adquirido de nuevo su valor primitivo.



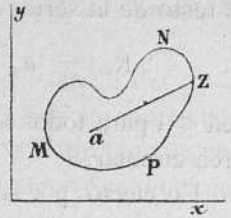

Si suponemos que el punto $a$ se halla en el interior del contorno que describe el punto $z$, cuando lo haya recorrido, el argumento del vector habrá aumentado en $2\pi$; luego en este caso el argumento de la expresión habrá variado en $\pm\pi$ por cada punto que se halla en el interior del contorno.

Si todos los puntos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ están en el interior del contorno, la expresión de $u$ será

$$u = (r_1 r_2 \ldots)^{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\theta_1 + 2\pi}{2} + \ldots \right) + i \left( \operatorname{sen} \frac{\theta_1 + 2\pi}{2} + \ldots \right).$$

En general, si

$$u = (z - a_1)^{\frac{d_1}{q_1}} (z - a_2)^{\frac{p_2}{q_2}} \ldots,$$




para cada punto $a$, por ejemplo, el argumento aumenta en $\frac{2p_1\pi}{q_1}$, y la función queda multiplicada por $j_1 = \cos \frac{2p_1\pi}{q_1} + i \operatorname{sen} \frac{2p_1\pi}{q_1}$, que es una raíz primitiva de la ecuación binomia $x^{q_1} = 1$. Después de una segunda vuelta quedará multiplicada otra vez por $j_1$; y en fin, si designamos por $u_0$ el valor primitivo de la función, su valor final será de la forma

$$u_0 j_1^{m_1} j_2^{m_2} \ldots.$$

## § 2.° Serie de potencias, círculo de convergencia.

**55.** Esfera compleja y plano complejo. Si consideramos una variable compleja $z = x + iy$ representada en el *plano complejo de Gauss*, que es tan solo imagen geométrica de la variabilidad compleja, se podrán referir los puntos de aquél á la *esfera compleja*, mediante la proyección estereográfica polar, es decir, que considerando la esfera de radio 1 y cuyo centro se halle en el origen, desde el punto P $\equiv$ (0, 0, 1) de la esfera (*polo*), proyectaremos todos los puntos M $(x, y)$ del plano complejo $(\xi, \eta)$ en M' sobre la esfera.

Teorema. *Si en un punto* $z_0$ *del plano complejo, distinto del origen* 0, *la serie de potencias*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \sum_0^\infty a_n z^n \qquad (1)$$

*converge, y describimos con centro en* o *un círculo que deje al punto* $z_0$ *al exterior, en toda el área del círculo y en la circunferencia, la serie* (1) *converge absolutamente y en igual grado.*

Vamos á demostrar que dado un número $\varepsilon$ tan pequeño como queramos, se puede obtener un número $m$ tan grande, que el resto de la serie

$$R_m = |a_m|\,|z|^m + |a_{m+1}|\,|z|^{m+1} + \ldots\ldots$$

sea $< \varepsilon$ para todos los valores de $z$ cuyos índices se hallan en el área circular.

En efecto, por ser la serie $\Sigma a_n z_0^n$ convergente, en virtud de la hipótesis, tendremos

$$\lim_{n=\infty} (a_n z_0^n) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n=\infty} (|a_n|\,|z_0|^n) = 0.$$

Fijemos una cantidad positiva finita $g$ tal, que para todos los valores de $n$ se tenga

$$|a_n|\,|z_0|^n < g. \tag{2}$$

Podemos escribir

$$R_m = |a_m|\,|z_0|^m \zeta^m + |a_{m+1}|\,|z_0|^{m+1}\zeta^{m+1} + \ldots\ldots$$

siendo $\left(\zeta = \dfrac{|z|}{|z_0|}\right)$, y por la desigualdad (2),

$$R_m < g\,(\varepsilon^m + \varepsilon^{m+1} + \ldots\ldots). \tag{3}$$

Si expresamos por $r$ el radio del círculo considerado, y hacemos $\dfrac{r}{|z_0|} = q$, será $\zeta < q < 1$, y la desigualdad (3) se reduce á

$$R_m < g\,\frac{\zeta^m}{1-\zeta} \quad \text{y} \quad R_m < g\,\frac{q^m}{1-q};$$

luego basta tomar $m$ suficientemente grande para que se tenga

$g \frac{q^m}{1-q} \leq \varepsilon$, lo que siempre es posible por ser $q < 1$; de modo que, para todos los puntos del área circular y de la circunferencia, será $R_n < \varepsilon$.

COROLARIO. *Si en un punto z la serie de potencias* (1) *es divergente, con mayor razón será divergente en cualquier punto distante del origen más que* z.

56. CÍRCULO DE CONVERGENCIA. La existencia del *círculo de convergencia* se deduce inmediatamente de las anteriores consideraciones. Para ello distribuyamos todos los círculos de centro O (ó sus radios) en dos clases A y B. Diremos que un círculo pertenece á la primera clase, *si en el interior del círculo* la serie es convergente y á la segunda clase, cuando *al exterior* del círculo la serie es divergente.

Todo círculo pertenecerá á la una ó á la otra clase; porque si no pertenece á la clase A, en algún punto interno al círculo la serie es divergente y entonces, por el corolario anterior, es divergente con mayor razón en todo el exterior del círculo que, por consecuencia, pertenecerá á B. Análogamente, si un círculo no es de la clase B, pertenecerá á la clase A. Además, si un círculo es de la clase A, cualquier círculo concéntrico y menor que A pertenece á dicha clase, y análogamente se dirá para la clase B. En fin, no puede existir más que *un solo* círculo perteneciente á las dos clases.

La repartición de los círculos de centro O en las dos clases, satisfacen, por consecuencia, á las condiciones fundamentales que aseguran la existencia de un círculo C, límite de las dos clases, dotado de la propiedad característica de que todo círculo de centro O pertenece á la clase A y todo círculo exterior á la clase B, de modo que: *en todo punto interior á C la serie de potencias converge y en todo punto exterior la serie es divergente.* Respecto á los puntos de la circunferencia, nada puede afirmarse en general. Dicho círculo es el círculo de convergencia.

57. SERIE DERIVADA. Sea la serie $\sum_1^\infty n a_n z^{n-1}$ de las de-

rivadas de la serie (1) de potencias, diremos que: *La serie de las derivadas de una serie de potencias tiene el mismo círculo de convergencia que ésta*, es decir que:

1.º *En cualquier punto interior á C, la serie de los módulos*

$$\Sigma\, n\,|a_n|\;|z|^{n-1}$$

*es convergente, y 2.º en cualquier punto exterior es divergente.*

En efecto, si $z_0$ es un punto interior á C, será $|z| < R$; y para demostrar la convergencia de la serie de los módulos

$$\Sigma\, n\,|a_n|\;|z_0|^{n-1},$$

tomaremos un punto $z_1$ interior á C, pero más próximo á la circunferencia que $z_0$, de modo que $|z_1| > |z_0|$; y tendremos que

$$\Sigma\, n\,|a_n|\;|z_0|^{n-1} = \Sigma\, n\,|a_n|\;|z_1|^{n-1}\left(\frac{|z_0|}{|z_1|}\right)^{n-1};$$

y haciendo $q = \dfrac{|z_0|}{|z_1|}$ será $q < 1$, y los términos de

$$\Sigma\, n\,|a_n|\;|z_0|^{n-1} = \Sigma\, n\,|a_n|\;|z_1|^{n-1}\,q^{n-1}$$

se deducen de los de la serie convergente $\Sigma\, nq^{n-1}$, que al multiplicar por $|a_n|\;|z_1|^{n-1}$, no solo permanecen finitos, sino que por la convergencia en $z_1$ de la serie primitiva, decrecen; luego la serie $\Sigma\, n\,|a_n|\;|z_0|^{n-1}$ también es convergente.

Si ahora $z_1$ es un punto exterior á C, la serie $\Sigma\, n\,|a_n|\;|z_1|^{n-1}$ es divergente; porque si fuese convergente, lo sería también la serie $\Sigma\, n\,|a_n|\;|z_1|^n$ y la $\Sigma\,|a_n|\;|z_1|^n$, lo que es absurdo, siendo $z_1$ exterior al círculo de convergencia de la serie primitiva; lo que demuestra el teorema.

Observación 1.ª De lo expuesto resulta que en todo campo interior al círculo C, la serie derivada converge en igual grado. En dicho campo es por tanto legítima la derivación por serie; de manera que siendo $w = \Sigma\, a_n z_1^{\,n}$, la cantidad $w$ admitirá las derivadas parciales finitas y continuas

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \Sigma\, n a_n z^{n-1}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = i\,\Sigma\, n a_n z^{n-1};$$

de las que resulta la condición:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y},$$

es decir que: *una serie de potencias* $w = \Sigma a_n z^n$ *representa en el interior del círculo de convergencia una función finita, continua y monódroma de la variable compleja* $z$.

Observación 2.ª No solo la derivada primera, sino las de todos los órdenes sucesivos de dicha función, tienen el mismo círculo de convergencia; de manera que todas son funciones finitas, continuas y monódromas de la variable compleja $z$ en el círculo de convergencia.

58. Teorema de Hadamard. Suponiendo que la serie $\Sigma a_n z^n$ es convergente en cualquier punto $z_0$ distinto del origen, entonces por ser

$$\lim_{n=\infty} |a_n|\,|z_0|^n = 0,$$

podremos tomar $m$ tan grande que se tenga siempre

$$|a_n|\,|z_0|^n < 1 \quad \text{para} \quad n \geq m \quad \text{ó} \quad |a_n| < \frac{1}{|z_0|^n} \quad (n \geq m).$$

De esto resulta que, para una serie de potencias convergente en cualquier punto distinto del origen $z = 0$, todos los términos

$$|a_1|, \quad \sqrt{|a_2|}, \quad \sqrt[3]{|a_3|}, \ldots\ldots \sqrt[n]{|a_n|}, \ldots\ldots \qquad (1)$$

deben permanecer inferiores á una cantidad finita $g$.

Si ahora dividimos los números positivos $g$ en dos clases A y B, colocando en la primera todo número $a$ tal, que en la serie (1) haya siempre términos $> a$ y en la segunda un número $b$ tal, que de cierto punto en adelante, todos los términos sean $\leq b$. Esta repartición de los números comprendidos entre 0 y $g$ en dos clases, satisface á las condiciones fundamentales arriba citadas que aseguran la existencia de un número límite $\alpha$, sección de las dos clases; de manera que todo número $< \alpha$ perte-

nece á la clase A y todo número $> \alpha$ pertenece á la clase B; y con este precedente podemos enunciar el teorema de Hadamard:

*El radio R del círculo de convergencia es precisamente igual al inverso del número* $\alpha$, es decir, $R = \frac{1}{\alpha}$.

En efecto, sea $|z| < \frac{1}{\alpha}$, y tomemos $\varepsilon$ positivo y tan pequeño que sea

$$(\alpha + \varepsilon)\,|z| = q < 1.$$

Puesto que $\alpha + \varepsilon$ pertenece á B, desde cierto valor de $n$ en adelante, se tiene siempre que

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \alpha + \varepsilon, \quad \sqrt[n]{|a_n|}\,|z| \leq q, \quad |a_n|\,|z|^n \leq q^n;$$

luego la serie $\Sigma\,|a_n|\,|z|^n$ tiene, desde cierto término en adelante, sus términos menores que los de la progresión $\Sigma\,q^n$ cuya razón $q$ es $< 1$, y por tanto es convergente.

Sea pues $|z| > \frac{1}{\alpha}$ y hagamos $\varepsilon = \alpha - \frac{1}{|z|}$.

El número $\alpha - \varepsilon = \frac{1}{|z|}$ pertenece á la clase A; luego hay siempre valores de $n$ tan grandes como se quiera, tales que sea

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{|z|} \quad \text{ó} \quad |a_n|\,|z|^n > 1;$$

luego la serie, en este caso, es divergente.

COROLARIO 1.° *El radio del círculo de convergencia de una serie de potencias depende tan solo de los módulos de los coeficientes.* Esto resulta de la serie de los módulos es convergente en el interior del círculo y divergente en el exterior. Además la serie será convergente en todo el plano, cuando sea $\alpha = 0$, ó cuando

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0;$$

y, en efecto, si $\alpha = 0$, un número positivo $\varepsilon$ tan pequeño como se quiera, pertenece á la clase B, por lo que desde cierto valor de $n$ en adelante, se tiene $\sqrt[n]{|a_n|} < \varepsilon$; viceversa si

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \text{ será } \alpha = 0;$$

luego: *La condición necesaria y suficiente para que la serie de potencias* $\Sigma a_n z^n$ *sea convergente en todo el plano, es que se tenga*

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0.$$

## § 3.° Extensión de la fórmula de Taylor.

**59.** Tenemos que

$$z = \rho(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega) = \rho e^{i\omega}.$$

Sea $$F(z) = F(\rho e^{i\omega}) = \varphi(\rho) + i\psi(\rho)$$

una función de $z$ que suponemos admite derivadas hasta el orden $n$, finitas para los valores de $z$ desde o hasta $z$.

Desarrollando según la fórmula de Mac Laurin $\varphi(\rho)$ y $\psi(\rho)$, resulta

$$F(z) = F(0) + \sum_{a=1}^{n-1} \frac{\rho^a}{a!} [\varphi^a(0) + i\psi^a(0)] + R_n$$

$$R_n = \frac{\rho^n}{(n-1)!\,m} [(1-\theta_1)^{n-m}\varphi^n(\theta_1\rho) + i(1-\theta_2)^{n-m}\varphi^n(\theta_2\rho)],$$

y derivando $a$ veces $F(z)$ respecto á $\rho$,

$$e^{ai\omega} F^a(z) = \varphi^a(\rho) + i\psi^a(\rho);$$

pero $$\theta_1 \rho e^{i\omega} = \theta_1 z, \quad \theta_2 \rho e^{i\omega} = \theta_2 z$$

y $$e^{ni\omega}F^n(\theta_1 z) = \varphi^n(\theta_1\rho) + i\psi^n(\theta_1\rho),$$
$$e^{ni\omega}F^n(\theta_2 z) = \varphi^n(\theta_2\rho) + i\psi^n(\theta_2\rho);$$

luego $$F(z) = F(0) + \sum_{a=1}^{n-1} \frac{z^a}{a!} F^a(0) + R_n \qquad (1)$$

$$R_n = \frac{(1-\theta_1)^{n-m}}{(n-1)!m} \{z^n F^n(\theta_1 z)\}_R + i \frac{(1-\theta_2)^{n-m}}{(n-1)!m} \{z^n F^n(\theta_2 z)\}_I,$$

representando por $\{A\}_R$ y $\{A\}_I$ la parte real y el coeficiente de $i$ de A.

Haciendo en $R_n$,

$$z^n = Be^{ib}, \quad \frac{(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!m} F^n(\theta_1 z) = Ce^{ic},$$
$$\frac{(1-\theta)^{n-m}}{(n-1)!m} F^n(\theta_2 z) = De^{id},$$

puede dársele la forma

$$R_n = BC\cos(b+c) + BDi\,\text{sen}\,(b+d) = He^{ih}$$

de donde

$$H^2 = B^2C^2\cos^2(b+c) + B^2D^2\,\text{sen}^2(b+d).$$

Suponiendo ahora $C \leq D$, tenemos $H \leq 2B^2C^2$, y por tanto $H = \lambda BC\sqrt{2}$, siendo $\lambda$ un factor comprendido entre 0 y 1; luego tenemos

$$R_n = \lambda\sqrt{2}\, e^{ia} \frac{z^n(1-\theta_1)^{n-m}}{(n-1)!m} F^n(\theta_1 z), \qquad (2)$$

donde $a = h - b - c$.

Si fuese $D > C$, se deduciría del mismo modo la fórmula, haciendo $H = \lambda BD\sqrt{2}$.

Aplicando las fórmulas (1) y (2) á la función $f(z+z_0)$ y sustituyendo en el resultado $z$ por $Z - z_0$, se obtiene

$$f(Z) = f(z_0) + (Z-z_0)f'(z_0) + \ldots + \frac{(Z-z_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(z_0) + R_n,$$

$$R_n = \lambda \sqrt{2}\, e^{\alpha i} \frac{(Z - z_0)^n (1 - \theta)^{n-m}}{(n-1)!\, m} f^n[z_0 + \theta(Z - z)],$$

forma del resto de Darboux, que se verifica cuando las funciones $f(z), f'(z), \ldots\ldots$ son finitas para todos los valores que adquiere $z$ cuando recorre la recta que une los puntos $z_0$ y Z.

**60.** Desarrollo del binomio. Consideremos la función $u = (1 + z)^k$, siendo $k$ real; y partiremos de $u = 1$ correspondiente á $z = 0$. Tenemos

$$(1 + z)^k = 1 + \sum_{a=1}^{n-1} C_a^k z^a + R_n$$

$$R_n = \lambda \sqrt{2}\, \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!}\, z^n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right)^{n-1} (1 + \theta z)^{k-1}.$$

Si el módulo $\rho$ de $z = \rho e^{i\omega}$ es menor que 1, la cantidad

$$\frac{k(k-1)\ldots\ldots(k-n+1)}{(n-1)!}\, \rho^n$$

tiende hacia cero cuando $n$ tiende hacia el infinito, y además tenemos que

$$\left|\frac{1-\theta}{1+\theta z}\right| = \frac{1-\theta}{\sqrt{1 + \theta^2\rho^2 + 2\theta\rho\cos\omega}} \leq \frac{1-\theta}{1-\theta\rho} < 1.$$

Luego $R_n$ tiende hacia cero cuando $n$ tiende hacia el infinito, y el binomio puede ser desarrollado en serie ordenada según las potencias de $z$ por la fórmula

$$(1 + z)^k = 1 + \sum_{a=1}^{\infty} C_a^k z^a.$$

Si el módulo de $z$ es $> 1$, la serie es divergente, pues el módulo del cociente de dos términos consecutivos tiende hacia $\rho$ cuando $a$ tiende hacia el infinito. Luego se tiene un valor de $a$, á partir del que los módulos de los términos de la serie crecen indefinidamente.

**61.** LEMA. *Si la serie*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (z = x + iy)$$

*es convergente en un círculo de radio dado, y si en todos los puntos del exterior de este círculo que tienen el mismo módulo* $\rho$, *el módulo de* F(z) *es menor que una cantidad positiva* L, *el módulo de cada término de la serie será también menor que* L.

En efecto, multiplicando la serie propuesta por $z^{-m}$ se tiene

$$z^{-m} F(z) = \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n z^{n-m}$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n z^{n-m} + R,$$

representando R una cantidad cuyo módulo tiende hacia cero, cuando $k$ tiende hacia el infinito. Pero, como por hipótesis,

$$|z^{-m} F(z)| < L\rho^{-m},$$

y como, por pequeño que sea el valor que se atribuye á una cantidad positiva $\delta$, se tiene siempre un valor $k_1$ tal, que $|R| < \delta$, cuando $k > k_1$ tenemos

$$|z^{-m} F(z) - R| < L\rho^{-m} + \delta$$

ó

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n z^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n z^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta.$$

Dando en esta desigualdad á $z$ los valores

$$\rho, \quad \rho e^{i\theta}, \quad \rho e^{2i\theta}, \quad \ldots\ldots, \quad \rho e^{(a-1)i\theta}$$

y á $k$ un valor mayor que los valores de $k_1$ correspondientes á estos valores de $z$, tenemos

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m} \right| < L\rho^{-m} + \delta$$

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} + c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n e^{n \quad m} e^{(n-m)i\theta} \right|$$

$$< L\rho^{-m} + \delta$$

. . . . . .

que sumando da

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n \rho^{n-m} (1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots\ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta}) \right.$$

$$+ \sum_{n=m+1}^{k} c_n \rho^{n-m} (1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots\ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta})$$

$$\left. + a c_m \right| < a(L\rho^{-m} + \delta)$$

ó, haciendo

$$1 + e^{i(n-m)\theta} + \ldots\ldots + e^{i(a-1)(n-m)\theta} = \frac{1 - e^{ia(n-m)\theta}}{1 - e^{i(n-m)\theta}} = A,$$

y dando á la cantidad $\theta$ un valor que no sea raiz de la ecuación $1 - e^{i(n-m)\theta} = 0$, esto es, un valor tal que A sea finito, será

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} c_n A \rho^{n-m} + a c_m + \sum_{n=m+1}^{k} c_n A \rho^{n-m} \right| < a(L\rho^{-m} + \delta)$$

ó

$$\left| c_m + \frac{B}{a} \right| \leqq L\rho^{-m} + \delta,$$

representando por B la parte de la anterior desigualdad independiente de $c_m$.

De esta desigualdad resulta

$$|c_m| \leqq L\rho^{-m} + \delta; \qquad (1)$$

porque si fuese $|c_m| > L\rho^{-m} + \delta$, se podría dar á $a$ un valor tan grande, que fuera

$$|c_m| - \frac{|B|}{a} > L\rho^{-m} + \delta$$

ó *á fortiori*

$$\left| c_m + \frac{B}{a} \right| > L\rho^{-m} + \delta$$

ya que

$$\frac{|B|}{a} + \left| c_m + \frac{B}{a} \right| \geqq |c_m| .$$

De la desigualdad (1) resulta el lema enunciado, porque si fuese $|c_m| > L\rho^{-m}$, se podría dar á $\delta$ un valor tan pequeño que fuese $|c_m| > L\rho^{-m} + \delta$.

**60.** Teorema. *Si una función* f(z) *es susceptible de ser desarrollada en serie uniformemente convergente dentro de un círculo de radio* R *con el centro en el origen de coordenadas*

$$f(z) = P_0(z) + P_1(z) + \ldots\ldots + P_n(z) + \ldots\ldots, \qquad (1)$$

*y si las funciones* $P_0(z)$, $P_1(z)$, ..... *son susceptibles de ser desarrolladas en series ordenadas según las potencias de* z, *convergentes dentro del mismo círculo:*

$$P_n(z) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} z + \ldots\ldots + A_m^{(n)} z^m + \ldots\ldots, \qquad (2)$$

*la función* f(z) *será también susceptible de ser desarrollada en una serie ordenada según las potencias de* z:

$$f(z) = A_0 + A_1 z + \ldots\ldots + A_m z^m + \ldots\ldots \qquad (3)$$

*y será*

$$A_m = A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots\ldots + A_m^{(n)} + \ldots\ldots \qquad (4)$$

Este teorema ha sido demostrado por Weierstrass de la manera siguiente:

Sea $\rho$ una cantidad positiva menor que R. Por ser la serie (1) uniformemente convergente en la circunferencia de radio $\rho$, á cada valor de la cantidad positiva $\delta$, tan pequeño como se quiera, corresponderá un valor $n_1$ de $n$ tal, que la desigualdad

$$|P_{n+1}(z) + P_{n+2}(z) + \ldots\ldots + P_{n+p}(z)| < \delta$$

quede satisfecha para todo valor de $n$ superior á $n_1$ y para todos los valores de $z$ cuyo módulo sea $\rho$, cualquiera que sea $p$.

Pero tenemos que

$$P_{n+1}(z) + \ldots + P_{n+p}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m (A_m^{(n+1)} + \ldots + A_m^{(n+p)});$$

luego, en virtud del lema, tenemos la desigualdad

$$[A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots\ldots + A_m^{(n+p)}] < \delta \rho^{-m},$$

de donde se concluye la convergencia de la serie (4). Considerando ahora otro número positivo $\rho_1$ tal, que sea $R > \rho_1 > \rho$, podemos dar á $n_1$ un valor tal, que

$$|A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots\ldots + A_m^{(n+p)} < \delta \rho_1^{-m}$$

por grande que sea $p$, y por consiguiente

$$\left| \lim_{p=\infty} (A_m^{(n+1)} + \ldots\ldots + A_m^{(n+p)} \leq \delta \rho_1^{-m}. \right.$$

Haciendo, por brevedad,

$$A_m^{(0)} + A_m^{(1)} + \ldots\ldots + A_m^{(n)} = A_m'$$

$$\lim_{p=\infty} (A_m^{(n+1)} + A_m^{(n+2)} + \ldots\ldots + A_m^{(n+p)}) = A_m''$$

resulta $A_m = A_m' + A_m'', \quad |A_m''| \leq \delta \rho_1^{-m},$

y se obtiene para los valores de $z$ cuyo módulo $\rho$ es inferior á $\rho_1$ la desigualdad

$$|A_0''| + |A_1'' z| + \ldots\ldots + |A_m'' z^m| + \ldots\ldots$$

$$< \delta \left[ 1 + \frac{\rho}{\rho_1} + \ldots\ldots + \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^m + \ldots\ldots \right] < \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho},$$

de la que resulta la serie

$$A_0'' + A_1'' z + \ldots\ldots + A_m'' z^m + \ldots\ldots$$

que es absolutamente convergente.

Además, es absolutamente convergente la serie

$$P_0(z) + P_1(z) + \ldots\ldots + P_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m (A_m^{(0)} + \ldots\ldots + A_m^{(n)}$$

$$= A_0' + A_1' z + \ldots\ldots + A_m' z^m + \ldots\ldots$$

Luego la serie

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots\ldots$$

es absolutamente convergente.

Tenemos enseguida

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m' + A_m'') z^m = \sum_{a=0}^{n} P_a(z) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m'' z^m ,$$

de donde

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m = \sum_{a=n+1}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m'' z^m ,$$

y por tanto,

$$\left| \sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) - \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m \right| < \delta + \delta \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho} .$$

Puesto que se puede dar á $\delta$ un valor tan pequeño como se quiera, se deduce de esta desigualdad

$$\sum_{a=0}^{\infty} P_a(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m z^m$$

según se quería demostrar. (*)

*Ejemplo.* La función $f(z) = \text{sen (sen } z)$ da la serie

$$f(z) = \text{sen } z - \frac{\text{sen}^3 z}{3!} + \frac{\text{sen}^5 z}{5!} - \ldots\ldots$$

que es uniformemente convergente para cualquier valor de $z$.

---

(*) Esta demostración es de Weierstrass. *Monatsbericht der kön, Akademie de Wissenschaften zu Berlin* 1880.

La función

$$\operatorname{sen}^n z = \left(z - \frac{z^3}{z!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\ldots\right)^n$$

puede desarrollarse en serie ordenada según las potencias de $z$; luego, en virtud del teorema último, también puede desarrollarse la función sen (sen $z$) según las potencias de $z$.

**63.** Aplicando el teorema anterior á las series ordenadas según las potencias de $z - a$, se obtiene el

TEOREMA *La serie*

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots\ldots + c_n(z - a)^n + \ldots\ldots \quad (1)$$

*es convergente en el interior de un círculo de centro* a *y radio* R, *cuando* $|z - a| < R$, *y si* $z_0$ *representa un punto del interior de este círculo, las derivadas* $f'(z_0)$, $f''(z_0)$, ..... *existen y son finitas y respectivamente iguales á las sumas de las derivadas de primero, de segundo,* ..... *orden de los términos de la serie propuesta, es decir:*

$$f'(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z_0 - a)^{n-1},$$

$$f''(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (z_0 - a)^{n-2}, \text{ etc.}$$

*Además, si* $|z_0 - a| + |z - z_0| < R$, *tendremos*

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + \ldots\ldots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + \ldots\ldots$$

En efecto, haciendo en la serie propuesta $z = z_0 + h$, tendremos

$$f(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_0 + h - a)^n,$$

Esta serie, considerada como función de $h$, es uniformemente convergente, cuando $|z_0 + h - a| < R$ ó *a fortiori*, cuando $|z_0 - a| + |h| < R$.

Desarrollando enseguida los binomios y ordenando según las potencias de $h$, tendremos, en virtud del teorema anterior

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hf_1(z_0) + \ldots\ldots$$

donde $$f_1(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z_0 - a)^{n-1},$$

$$f_2(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (z_0 - a)^{n-2}, \ldots\ldots$$

Haciendo ahora $h = z - z_0$, resulta

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f_1(z_0) + \ldots\ldots + (z - z_0)^n f_n(z) + \ldots\ldots$$

con la condición $|z_0 - a| + |z - z_0| < R$; luego

$$\lim \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) = f_1(z_0).$$

Y como cada una de las funciones $f_1(z), f_2(z), \ldots\ldots$ se deduce de la anterior de igual manera que $f'(z_0)$ se deduce de $f(z_0)$, el teorema queda demostrado.

COROLARIO 1.° *Si la serie* (1) *es convergente en el interior del círculo de radio* R *y de centro* a, *la funcion es continua dentro del mismo círculo*, pues en todos los puntos interiores á este círculo $f(z)$ tiene una derivada finita.

Respecto á la continuidad de las derivadas de las series, enunciaremos los teoremas siguientes, análogos á los relativos á las funciones reales.

1.° *Si la serie* $f(x) = \Sigma f_n(x)$ *es uniformemente convergente en una área dada, la función* $f(x)$ *es continua en los puntos de esta área en que todas las funciones* $f_1(x), f_2(x), \ldots\ldots$ *son continuas.*

2.° *Si una serie* $\Sigma f_n(z)$ *fuese convergente en una área dada, y en la misma fuese uniformemente convergente la serie* $\Sigma f_n'(z)$, *formada con las derivadas de los términos de la serie precedente, tendríamos* $f'(z) = \Sigma f_n'(z)$ *en el área considerada.*

## § 4.° Funciones regulares.

**64.** Definición. Si una función $f(z)$ es desarrollable en serie, en la proximidad del punto $z_0$, según las potencias ascendentes de $z - z_0$, de modo que exista un número tal que sea

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \ldots\ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots\ldots$$

cuando $|z - z_0| < R$, se dice que *la función* $f(z)$ *es regular en el punto* $z_0$.

*Ejemplo 1.°* Sea $(1 + z)^k$. Tenemos

$$(1 + z)^k = (1 + z_0)^k \left[1 + \frac{z - z_0}{1 + z_0}\right]^k$$

$$= (1 + z_0)^k \Sigma C_n^k \left(\frac{z - z_0}{1 + z_0}\right)^n$$

cuando $|z - z_0| < |1 + z_0|$, por consiguiente es regular en todo el plano, excepto en el punto $z_0 = -1$, cuando $k$ no es entero ni positivo.

*Ejemplo 2.°* Se tiene que

$$e^z = e^{z-z} e^{z_0} = e^{z_0}\left[1 + z - z_0 + \ldots\ldots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} + \ldots\ldots\right]$$

y la función $e^z$ es regular en todo el plano.

*Ejemplo 3.°* De la igualdad

$$\log(1 + z) = \log(1 + z_0) + \log\left(1 + \frac{z - z_0}{1 + z_0}\right)$$

$$= \log(1 + z_0) + \frac{z - z_0}{1 + z_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{z - z_0}{1 + z_0}\right)^2 + \ldots\ldots$$

que se verifica cuando $|z - z_0| < |1 + z_0|$, se concluye que $\log(1 + z)$ es regular en todo el plano excepto en el punto $z_0 = -1$.

TEOREMA 1.° *Si una función uniforme, regular en todos los puntos de una área continua* A, *es constante en todos los puntos de una línea finita contenida en el área* A, *es constante en toda el área.*

Tomando un punto $a$ de la línea dada, tendremos, para todos los valores de $z$ representados por los puntos comprendidos en un círculo de centro $a$ y de radio R,

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots\ldots + c_n(z - a)^n + \ldots\ldots$$

$$f(z) = f(a) + (z - a)f'(a) + \ldots\ldots + \frac{(z - a)^n}{n!} f^n(a) + \ldots\ldots$$

Pero por ser constante $f(z)$ en todos los puntos de la línea dada, tenemos $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, .....; luego será $f(z) = f(a)$ en todo el círculo considerado.

Tomando enseguida un punto $b$ del círculo anterior, y repitiendo el razonamiento, resulta que $f(z) = f(b) = f(a)$ en todos los puntos del segundo círculo y en parte del anterior, tomando un punto $c$ de este círculo hállase lo mismo $f(z) = f(a) = f(b) = f(c)$ ..... y así sucesivamente.

TEOREMA 2.° *Si dos funciones uniformes, regulares en todos los puntos de una área continua* A, *son iguales en todos los puntos de una línea finita contenida en el área* A, *son iguales en toda el área*, pues siendo nula la diferencia de las dos funciones en todos los puntos de la línea dada, será nula en toda el área.

TEOREMA 3.° *Si una función uniforme y regular en el punto* a, *se anula así como todas sus derivadas hasta el orden* m — 1, *cuando* $z = a$, *tendremos*

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z),$$

*siendo* $\varphi(z)$ *una función regular en la proximidad del punto* a.

En efecto, siendo por hipótesis

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + \ldots\ldots$$

y $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, ....., tenemos

$$f(z) = z - a)^m \left[\frac{1}{m!} f^m(a) + \frac{z - a}{(m + 1)!} f^{m+1}(a) + \ldots\ldots\right].$$

TEOREMA 4.° *Los puntos en que una función uniforme y regular en una área* A, *tienen un mismo valor, están separados por intervalos finitos, si la función no es constante.*

En efecto, por no ser constante la función $f(z)$ en el área A, las derivadas $f'(a)$, $f''(a)$, ..... no pueden ser todas iguales á cero, y si $f^m(a)$ es la primera derivada que no se anula, se tendrá

$$f(z) - f(a) = (z-a)^m \left[ \frac{1}{m!} f^m(a) + \frac{z-a}{(m+1)!} + \ldots\ldots \right]$$

y por consiguiente es posible dar á $\delta$ un valor suficientemente pequeño, para que el módulo de su primer término sea mayor que el módulo de la suma de los siguientes, cuando $|z-a| \leqq \delta$; luego en el círculo de centro $a$ y de radio $\delta$, la diferencia $f(z) - f(a)$ no puede ser nula en ningún punto diferente de $a$.

TEOREMA 5.° *La suma de dos expresiones uniformes, regulares en todos los puntos del área* A, *es una expresión regular en los mismos puntos.*

Siendo $f(z)$ y $F(z)$ las dos expresiones dadas, tenemos

$$f(z) = \Sigma c_n (z-a)^m, \qquad F(z) = \Sigma\, C_n (z-a)^n$$

$$f(z) + F(z) = \Sigma\, (c_n + C_n)\,(z-a)^n.$$

TEOREMA 6.° *El producto de dos expresiones uniformes, regulares en todos los puntos de una área* A *es una expresión regular en los mismos puntos.*

TEOREMA 7.° *El cociente de dos expresiones* $\varphi(z)$ *y* $\psi(z)$ *uniformes, regulares en el área* A, *es regular en los puntos de esta en que el denominador* $\psi(z)$ *no se anula*, pues haciendo

$$\psi(z) = c_0 + c_1(z-a) + \ldots\ldots,$$

donde $c_0$ es distinto de cero, tenemos

$$\frac{1}{\psi(z)} = c_0 \left[ 1 + \frac{(z-a)\,(c_1 + c_2)\,(z-a) + \ldots\ldots}{c_0} \right]^{-1}$$

$$= c_0 \left[ 1 + P(z-a) \right]^{-1},$$

haciendo

$$\frac{(z-a)\,[c_1+(e-a)c_2+\ldots\ldots]}{c_0}=P_0(z-a).$$

Dando á $|z-a|$ un valor suficientemente pequeño para que sea $P|z-a|<1$, podremos desarrollar $[\psi(z)]^{-1}$ en serie ordenada según las potencias de $z-a$, y tendremos

$$\frac{1}{\psi(z)}=c_0\{1-P(z-a)+[P(z-a)^2]-\ldots\ldots+\ldots\ldots\}$$

serie uniformemente convergente en la proximidad de $a$, lo mismo que las series que resultan de $P(z-a)$, $P(z-a)^2$ etc.; luego la función $[\psi(z)]^{-1}$ es susceptible de desarrollarse en serie ordenada según las potencias de $z-a$ en la proximidad de $a$. Esta función es, pues, regular en el punto $a$, así como $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}=\varphi(z)\frac{1}{\psi(z)}$.

65. Las funciones uniformes y regulares en todos los puntos del plano se llaman *holomorfas*, tales son los polinomios racionales, las funciones $e^z$, sen $z$, ..... es decir, todas las funciones susceptibles de desarrollo en serie según las potencias ascendentes de $z$.

66. Teorema de Weierstrass. *Dada la serie de cantidades* $0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ *colocadas según el orden creciente de sus módulos que satisfacen á la condición*

$$\lim_{c=\infty}|a_c|=\infty$$

*se puede formar una función transcendente entera por la fórmula*

$$f(z)=z^{n_0}\prod_{c=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_c}\right)^{n}e^{n_c S_c},\quad S_c=\sum_{k=1}^{m_c}\frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k,\qquad(1)$$

*cuyas raices son* $0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ *y cuyos grados respectivos de multiplicidad son* $n_0, n_1, \ldots\ldots$

Recíprocamente. *Si* $f_1(z)$ *representa una función entera cuyas raíces son* $0, a_1, a_2, \ldots\ldots$ *y los grados respectivos de multi-*

*plicidad* $n_0, n_1, \ldots\ldots$, *esta función puede descomponerse en factores que hacen explícitas estas raices, por medio de la fórmula*

$$f_1(z) = e^{\varphi(z)} z^{n_0} \prod_{c=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c}, \qquad (2)$$

*representando* $\varphi(z)$ *una función entera.*

Demostración de Mittag-Leffler. De la serie

$$\log\left(1 - \frac{n}{a_c}\right)^{n_c} = -n_c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

que se verifica cuando $\left|\frac{z}{z_c}\right| < 1$, se deduce

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} = e^{-n_c S_c(1,\infty)} \qquad (3)$$

escribiendo, por brevedad,

$$S_c(u, v) = \sum_{k=u}^{v} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k.$$

Por consiguiente tenemos

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c} e^{n_c S_c(1, m_c)} = e^{-n_c S_c(m_c+1, \infty)} \qquad (4)$$

donde $m_c$ representa un número entero ó cero, debiendo en este caso representar $e^{n_c S_c(1, m_c)}$ la unidad.

Consideremos ahora una serie de cantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots$ tales, que $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$ sea convergente, y demos á $m_c$ un valor tan grande que sea

$$n_c |S_c(m_c + 1, \infty)| < \varepsilon_c, \qquad (5)$$

para cualquier valor que se dé á $z$ que satisfaga á la condición $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, lo que siempre es posible, por ser en este caso la

serie $S_c(1, \infty)$ uniformemente convergente. El producto $\Pi E_c$ en el que

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{n_c S_c(1, m_c)} = E_c,$$

representa una función regular en todos los puntos del plano, que se anula en los puntos $a_1, a_2, \ldots\ldots$, En efecto, consideremos un punto cualquiera $z_0$ del plano, y los puntos próximos á éste, es decir, los puntos que satisfacen á la condición $|z - z| \leqq \rho$, donde $\rho$ es una cantidad tan pequeña como se quiera.

Por ser $\lim_{c=\infty} a_c = \infty$, es siempre posible dar á $c_1$ un valor suficientemente grande para que la desigualdad $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon$ quede satisfecha por todos los valores de $c$ mayores que $c_1$, y por todos los valores que satisfagan á la condición $|z - z_0| \leqq \rho$.

Además, por ser convergente la serie $\sum_1^\infty \varepsilon_c$, siempre es posible dar á $c_2$ un valor suficientemente grande y á $\delta$ un valor suficientemente pequeño para que la desigualdad

$$\sum_{t=c}^{c+p} \varepsilon_t < \delta$$

quede satisfecha para todos los valores de $c$ superiores á $c_2$, cualquiera que sea $p$.

Luego las dos desigualdades precedentes quedan satisfechas al mismo tiempo por los valores de $c$ mayores que la mayor de las cantidades $c_1$ y $c_2$ en la región del plano determinada por la condición $|z - z_0| \leqq \rho$.

De las desigualdades precedentes y de la (5) resulta que la desigualdad

$$\sum_{t=c}^{c+p} |n_t S_t(m_t + 1, \infty)| < \delta \qquad (6)$$

queda satisfecha para todos los valores superiores á $c_1$ y $c_2$, en la región del plano determinada por la condición $|z - z_0| \leqq \rho$.

Además la fórmula (4) da

$$\prod_{t=c}^{c+p} \mathrm{E}_t = e^{-\sum_{t=c}^{c+p} n_t \mathrm{S}_t(m_t+1,\,\infty)}$$

de la que resulta

$$\sum_{t=c}^{c+p} \log \mathrm{E}_t = -\sum_{t=c}^{c+p} n_t \mathrm{S}_t(m_t+1,\,\infty),$$

y en virtud de la desigualdad (6),

$$\left|\sum_{t=c}^{c+p} \log \mathrm{E}_t\right| < \delta\,;$$

luego la serie $\sum_{t=c}^{\infty} \log \mathrm{E}_t$ es uniformemente convergente en la región considerada del plano.

Esto sentado, supongamos primero que $z_0$ es diferente de $a_c$, y que á $\rho$ se dé un valor tan pequeño que sea $|z-z_0| < |z-a_c|$. El segundo miembro de la igualdad

$$\log \mathrm{E}_c = n_c \log\left(1-\frac{z}{a_c}\right) + n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

$$= n_c \log\left(1+\frac{z-z_0}{z_0-a_c}\right) + n_c \log\left(1-\frac{z_0}{a_c}\right)$$

$$+ n_c \sum_{k=1}^{m_c} \frac{1}{k}\left(\frac{z_0+z-z_0}{a_c}\right)^k$$

es susceptible de ser desarrollado en serie ordenada según las potencias de $z-z_0$, y tenemos $\log \mathrm{E}_c = \mathrm{P}(z-z_0)$, indicando la notación $\mathrm{P}(z-z_0)$ de Weierstrass una serie ordenada según las potencias enteras de $z-z_0$.

Si aplicamos el teorema del núm. 64, tendremos que

$$\sum_{c=1}^{\infty} \log \mathrm{E}_c = \mathrm{P}_1(z-z_0),$$

y por consiguiente

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = e^{P_1(z-z_0)}.$$

De esta fórmula resulta enseguida

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = 1 + P_1(z - z_0) + \ldots\ldots + \frac{P_1^n (z - z_0)}{n!} + \ldots\ldots$$

ó

$$\prod_{c=1}^{\infty} E_c = P_2(z - z_0),$$

lo que prueba que la función $\prod_{1}^{\infty} E_c$ es regular en el punto $z_0$, según se quería demostrar.

Supongamos ahora que $z_0$ representa una raíz $a_j$ de la función que queremos formar. Dando, en este caso, á $\rho$ un valor suficientemente pequeño para que en el área plana determinada por la condición $|z - a_j| \leqq \rho$ no exista otra raíz de la función considerada, tendremos

$$\frac{\prod_{1}^{\infty} E_c}{\left(1 - \frac{z}{a_j}\right)^{n_j}} = e^{P_3(z-a_j)}$$

ya que el primer miembro no tiene la raíz $a_j$ y por tanto,

$$\prod_{1}^{\infty} E_c = \frac{(-1)^{n_j}}{aj} (z - aj)^{a_j} e^{P_2(z-a_j)}$$

de donde resulta, como en el caso anterior, que la función $\prod_{1}^{\infty} E_c$ es regular en el punto $a_j$.

Las raíces $a_1, a_2, \ldots\ldots$ de la función que vamos á formar, son todas diferentes de cero.

Para que la función tenga también la raíz o, basta multiplicar

$\prod_1^\infty E_c$ por $z^{n_0}$. En efecto, tenemos

$$z^{n_0} \prod_1^\infty E_c = (z_0 + z - z_0)^{n_0} P_2 (z - z_0) = P_4 (z - z_0),$$

y por tanto, la nueva función que se obtiene es también regular en todo el plano.

De todo lo que precede se concluye la primera parte del teorema de Weierstrass, esto es, que se puede construir, mediante la fórmula (1) una función que sea regular en todo el plano y que se anule en los puntos o, $a_1$, $a_2$, .....

Para demostrar la segunda parte del teorema, basta notar que el cociente de la función $f_1(z)$ dada por la función $f(z)$, que acabamos de formar, no puede ser nulo ni infinito en ningún punto del plano. Luego este cociente representa una función $F(z)$ regular en todo el plano, que no se anula en ningún punto.

Por ser, en la proximidad del punto $z_0$,

$$F(z) = b_0 + b_1 (z - z_0) + b_2 (z - z_0)^2 + \ldots\ldots, \quad \left(b_0 \lesseqgtr 0\right),$$

tendremos

$$lF(z) = lb_0 + l\left[1 + \frac{(z - z_0)[b_1 + b_2 (z - z_0) + \ldots\ldots]}{b_0}\right];$$

luego si se dan á $|z - z_0|$ valores suficientemente pequeños para que sea

$$\frac{|z - z_0|\,|b_1 + b_2 (z - z_0) + \ldots\ldots|}{|b_0|} < 1,$$

tendremos en virtud del teorema núm. 64 que

$$\log F(z) = P(z - z_0);$$

luego la función $F(x)$ es entera. Representando esta función por $\varphi(z)$, será $F(z) = e^{\varphi(z)}$ y

$$f_1(z) = e^{\varphi(z)} f(z)$$

según se quería demostrar.

## 67. Factores primarios de las funciones enteras.

Weierstrass designa con el nombre de *factores primarios* á cada uno de los factores

$$\left(1 - \frac{z}{a_c}\right) e^{n_c S}$$

que figuran en las fórmulas (1) y (2) del número anterior.

Lo mismo para descomponer una función entera dada en factores primarios que para hallar una función entera que tenga raíces dadas, es necesario conocer, para cada valor de $c$ un valor de $m_c$ que satisfaga á la desigualdad

$$n_c \left| S_c (m_c + 1, \infty) \right| < \varepsilon_0,$$

y para ello basta, como vamos á ver, el dar á $m_c$ valores tales, que sea convergente la serie

$$\sum_{c=1}^{\infty} \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|. \tag{6}$$

En efecto, si esta serie es convergente, podemos dar á $\varepsilon_c$ el valor

$$\varepsilon_c = \lambda \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right|, \tag{7}$$

designando $\lambda$ una cantidad independiente de $z$ y de $c$.

Pero, por ser

$$n_c \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{z}{a_c} \right)^k \right| < \sum_{k=m+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k$$

y

$$\sum_{k=m_c+1}^{\infty} n_c \left| \frac{z}{a_c} \right|^k = \left| \frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}} \right| \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{a_c} \right|},$$

la desigualdad (5) puede ser sustituída por la siguiente:

$$\left|\frac{n_c z^{m_c+1}}{a_c^{m_c+1}}\right| \frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_c}\right|} < \varepsilon_c,$$

la cual queda satisfecha, puesto que se puede dar á $\lambda$ el valor máximo $\frac{1}{1-\varepsilon}$ que adquiere $\frac{1}{1-\left|\frac{z}{a_c}\right|}$ cuando se verifica que $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$.

*Ejemplo.* Hallar la forma general de las funciones enteras cuyas raíces son 0, 1, $-1$, 2, $-2$, ....., $c$, $-c$, .....

Puesto que la serie $\sum_{c=1}^{\infty}\left|\frac{z^2}{a_c^2}\right| = \sum_{c=1}^{\infty}\frac{|z|^2}{c^2}$ es convergente, cualquiera que sea $z$, podemos hacer $m_c = 1$, y tendremos

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{c}\right)e^{\frac{z}{c}}\left(1+\frac{z}{c}\right)e^{-\frac{z}{c}}\right],$$

ó

$$f(z) = e^{\varphi(z)} z \prod_{c=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

donde $\varphi(z)$ representa una función entera de $z$.

## 68. Desarrollo en serie de $\frac{f_1'(z)}{f_1(z)}$.

Derivando los logaritmos de los dos miembros de la fórmula (2) (63) tendremos

$$\frac{f_1'(z)}{f_1(z)} = \varphi'(z) + \frac{n_0}{z} + \sum_{c=1}^{\infty}\frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c}(z-a_c)}, \qquad (8)$$

puesto que

$$\frac{1}{z - a_c} = -\frac{1}{a_c}\left[1 + \frac{z}{a_c} + \ldots\ldots + \left(\frac{z}{z_c}\right)^{m_c - 1}\right] + \frac{z^{m_c}}{a_c^{m_c}(z - a)}.$$

Para completar la demostración de la fórmula (8) vamos á demostrar que la serie que entra en el segundo miembro es uniformemente convergente, cuando la serie (6) lo es.

En efecto, por ser esta serie uniformemente convergente y por tender $|a_t|$ hacia el infinito con $t$, á cada valor de $\delta$, por pequeño que sea, corresponderá un valor $t_1$ tal, que las desigualdades

$$\lambda \sum_{c=t}^{t+p} \left| \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c+1}} \right| < \delta, \quad \left| \frac{z}{a_t} \right| < \varepsilon$$

quedará satisfecha, cuando $t > t_1$ y $|z| < \delta$, expresando $p$ una cantidad tan grande como se quiera. Luego *a fortiori* tenemos

$$\sum_{c=t}^{t+p} \left| \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c+1}} \right| \left| \frac{1}{1 - \frac{z}{a_c}} \right| < \delta,$$

y finalmente

$$\sum_{c=t}^{t+p} \left| \frac{n_c z^{m_c}}{a_c^{m_c}(z - a_c)} \right| < \delta,$$

de donde se concluye que la serie que entra en el segundo miembro de (8) es uniformemente convergente en cualquier área, por grande que sea.

**69.** POLOS Y PUNTOS ESENCIALES. Vamos á considerar las funciones uniformes no enteras, regulares en todo el plano, excepto en los puntos aislados $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_c, \ldots\ldots$ tales que

sea $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, en la proximidad de los cuales tenemos que

$$f(z) = P(z - a_c) + G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right), \qquad (1)$$

donde

$$G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = \sum_{t=1}^{m} A_t \left(\frac{1}{z - a_c}\right)^t. \qquad (2)$$

Estos puntos fueron llamados por Weierstrass *polos*, cuando $m$ es finito y puntos *singulares esenciales*, cuando $m$ es infinito.

Las funciones consideradas resultan de la generalización de las funciones racionales.

Una función racional $f(z)$ se descompone en fracciones simples bajo la forma

$$f(z) = \Sigma \frac{A^a}{(z - a_1)^a} + \Sigma \frac{B^b}{(z - a_2)^b} + \ldots\ldots$$

Si ahora representamos por $z_0$ un punto diferente de $a_1, a_2, \ldots$, tenemos

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z - a_1)^a}\left(1 - \frac{z - a_0}{z_0 - a_1}\right)^{-a} + \ldots\ldots$$

de donde resulta (6o),

$$f(z) = P(z - z_0),$$

siendo $f(z)$ una función regular en la proximidad de $z_0$; si pues $z_0$ representa uno de los puntos $a_1, a_2, \ldots\ldots a_1$, por ejemplo, aplicando la descomposición anterior sólo á los entornos correspondientes á $a_2, a_3, \ldots\ldots$, tendremos

$$f(z) = \Sigma \frac{A_a}{(z - a_1)^a} + P_1(z - a_1)$$

y el punto $a_1$ es un polo.

La fórmula

$$\operatorname{sen} \pi z = \pi z \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

que da la descomposición de la función seno en factores, da

$$\log \operatorname{sen} z = \log z + \sum_{c=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{z^2}{c^2\pi^2}\right)$$

y derivando respecto á $z$,

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - c^2\pi^2},$$

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - c\pi} + \frac{1}{z + c\pi}\right)$$

que da la descomposición de *cot z* en fracciones simples, que hacen explícitos los polos $0, c\pi, -c\pi$ de la función.

Desarrollando el binomio que entra en el segundo miembro de la penúltima fórmula, tenemos

$$\cot z = \frac{1}{z} - 2z \sum_{c=1}^{\infty} \left(\frac{1}{c^2\pi^2} + \frac{z^2}{c^4\pi^4} + \ldots\ldots\right)$$

cuando $|z| < \pi$, en virtud de 60 se tiene que

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{2z}{\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{c^2} - \frac{2z^3}{\pi^4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{c^4} - \frac{2z^5}{\pi^6}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{c^6} - \ldots\ldots$$

70. Teorema de Mittag-Leffler. *Dadas las cantidades* $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_c, \ldots\ldots$ *colocadas en el orden creciente de sus módulos, que satisfacen á la condición* $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$, *y dadas las funciones*

$$G_1\left(\frac{1}{z - a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{z - a_2}\right), \ldots\ldots, \quad G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right), \ldots\ldots$$

*que son de la forma* (2), (pág. 153) *siempre es posible formar una función* f(z) *de la forma*

$$f(z) = \sum_{c=1}^{\infty}\left[G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) + P_c(z)\right]$$

*que sea regular en todos los puntos del plano, diferentes de* $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_c\ldots\ldots$ *de la cual estos pnntos sean polos ó puntos singulares esenciales.*

RECÍPROCAMENTE: *Toda función* $f_1(z)$ *regular en todo el plano, excepto en los puntos* $a_1, a_2, \ldots, a_c, \ldots$ *que son polos ó puntos singulares esenciales, puede reducirse á la forma*

$$f_1(z) = \varphi(z) + \sum_{c=1}^{\infty} \left[ G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) + P_c(z) \right],$$

*donde* $\varphi(z)$ *representa una función entera de* z.

En efecto, por ser uniformemente convergente la serie

$$G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = -\frac{A_1}{a_c}\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{-1} + \frac{A_2}{a_c^2}\left(1 - \frac{z}{a_c}\right)^{-2} - \ldots$$

cuando $z$ es diferente de $a_c$, y por ser cada término de esta serie susceptible de desarrollarse en serie ordenada según las potencias de $z$, cuando $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, tendremos en virtud del teorema 60

$$G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k. \qquad (3)$$

Consideremos ahora una serie de cantidades positivas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_c, \ldots$ tales que la suma $\sum_1^{\infty} \varepsilon_c$ sea convergente; y dése á $m_c$ un valor tan grande que tengamos

$$\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k \right| < \varepsilon_c, \qquad (4)$$

para cualquier valor atribuído á $z$ que satisfaga la condición $\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon < 1$, lo que es siempre posible, por ser uniformemente convergente la serie (3) en la región del plano determinada por la condición $\left|\frac{z}{a_c}\right| < 1$. La suma

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z), \quad F_c(z) = G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) - \sum_{k=0}^{m_c} A_k^{(c)} \left(\frac{z}{a_c}\right)^k$$

satisface á las condiciones del teorema, pues si $z_0$ es un punto diferente de los puntos $a_1, a_2, \ldots$ y $\rho$ una cantidad positiva tan pequeña como se quiera, por ser $\lim_{c=\infty} |a_c| = \infty$ y convergente la serie $\sum_1^\infty \varepsilon_c$, es siempre posible dar á $c_1$ un valor tan grande, que las desigualdades

$$\left|\frac{z}{a_c}\right| < \varepsilon, \quad \sum_{t=c}^{c+p} \varepsilon_t < \delta$$

queden satisfechas, al mismo tiempo por todos los valores de $c$ superiores á $c_1$, en la región determinada por la condición $|z - z_0| \leqq \rho$, para cualquier valor de $p$; y se concluirá de estas desigualdades y de la (4) que

$$\sum_{t=c}^{c+p} \left| \sum_{k=m_c+1} A_k^{(t)} \left(\frac{z}{a_t}\right)^k \right| < \delta$$

ó

$$\sum_{t=c}^{c+p} |Ft(z)| < \delta$$

quedan satisfechas por los valores de $c$ superiores á $c_1$, en la región del plano determinada por la condición $|z - z_0| \leqq \rho$; luego la serie $\sum_{c=1}^\infty F_c(z)$ es uniformemente convergente en la región definida por la condición $|z - z_0| \leqq \rho$.

Esto sentado, como $z_0$ es diferente de $a_c$, supongamos que se da á $\rho$ un valor suficientemente pequeño para que sea $|z - z_0| < |z - a_c|$.

El segundo miembro de la igualdad

$$G_c\left(\frac{1}{z - a_c}\right) = \sum_{t=1}^{m} \frac{A_t}{z_0 - a_c}\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0 - a_c}\right)^{-1}$$

es susceptible (60) de ser desarrollado en serie ordenada según las potencias de $z - z_0$ en la región del plano determinada por

la condición $|z - z_0| \leqq \rho$; luego lo mismo sucede á la función $F_c(z)$, y tenemos (60),

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = P(z - z_0).$$

La función $\sum_{1}^{\infty} F_c(z)$ es pues regular en el punto $z_0$. Consideremos ahora un punto singular $a_j$ de la función que queremos formar. Dando en este caso á $\rho$ un valor suficientemente pequeño para que en la región determinada por la condición $|z - a_j| \leqq \rho$ no exista otro punto singular de la función considerada, tenemos que

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) - F_j(z) = P_1(z - a_j),$$

puesto que el primer miembro no tiene el punto singular $a_j$, y por tanto que

$$\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z) = G_j\left(\frac{1}{z - a_j}\right) + P_3(z - a_j);$$

luego $a_j$ es un polo ó un punto singular esencial de la función $\Sigma F_c(z)$.

Los puntos singulares $a_1, a_2, \ldots\ldots$ de la función que hemos formado, son diferentes de cero.

Para que o sea un punto singular de esta función, de modo que en su entorno tengamos

$$f(z) = P_2(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right), \quad G_0\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{c=1}^{m}\left(\frac{1}{z}\right)^c,$$

basta hacer

$$f(z) = \sum_{c=1}^{m} F_c(z) + G_0\left(\frac{1}{z}\right).$$

En efecto, la función

$$G_0\left(\frac{1}{z}\right) = G_0\left(\frac{1}{z\left(1 + \dfrac{z - z_0}{z_0}\right)}\right)$$

es (60) regular en la proximidad de cualquier punto $z_0$ diferente de 0; y en la proximidad del punto 0, la función $\sum_{c=1}^{\infty} F_c(z)$ es regular.

Para demostrar la 2.ª parte del teorema, basta notar que la diferencia entre $f(z)$ y $F_c(z)$ no tiene puntos singulares, y por tanto es igual á una función entera $\varphi(z)$ (*).

## § 5.° Algunas series.

**71.** Polinomios de Legendre. En la pág. 63 se desarrolló en serie la función

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2zx + z^2}}$$

cuyo desarrollo podemos escribir así:

$$y = 1 + \frac{1}{2}z(2x - z) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}z^2(2x - z)^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n}z^n(2x - z)^n + \ldots\ldots$$

que puede deducirse del desarrollo

$$\frac{1}{\sqrt{1 + x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2n}x^n + \ldots\ldots$$

haciendo $1 - 2zx + z^2 = 1 - z(2x - z)$.

(*) Gomes Teixeira *Curso de Analyse infinitesimal.*

Sean $r$ el valor absoluto de $z$ y $\rho$ el de $x$. Cuando se desarrollan las expresiones entre paréntesis y se efectúan las multiplicaciones, la serie de los valores absolutos de los términos así obtenidos, se reduce á

$$1 + \frac{1}{2} r(2\rho + r) + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} r^2 (2\rho + r)^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n} r^n (2\rho + r)^n + \ldots\ldots$$

que es el desarrollo de $[1 - r(2\rho + r)]^{-\frac{1}{2}}$; siendo convergente para

$$r^2 + 2\rho r - 1 < 0 \quad \text{ó} \quad r < -\rho + \sqrt{\rho^2 + 1}.$$

La serie considerada es pues absolutamente convergente para

$$|z| < -|x| + \sqrt{x^2 + 1},$$

y su suma no cambia, cuando se invierte el orden de sus términos. Pero si se ordena con arreglo á las potencias ascendentes de $z$, la expresión del coeficiente de $z^n$ será

$$X_n = \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n} x^n - \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-3)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (n-2)} \frac{x^{n-2}}{2}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-5)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (n-4)} \frac{x^{n-4}}{2 \cdot 4}$$

$$+ (-1)^p \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-2p-1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (n-2p)} \frac{x^{n-2p}}{2 \cdot 4 \ldots\ldots 2p} + \ldots\ldots$$

El desarrollo de $y$ puede por tanto escribirse bajo la forma

$$y = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots\ldots + X_n z^n + \ldots\ldots$$

Los coeficientes de las potencias sucesivas de $z$ son los *polinomios de Legendre*. Estas funciones se presentan en la teoría

de la atracción de los cuerpos esféricos, por lo que Gauss las llamó *funciones esféricas.*

El polinomio $X_n$ puede escribirse bajo la forma

$$X_n = \frac{1 \cdot 3 \ldots\ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n} \left[ x^n - \frac{n(n-1)}{2n-1} \frac{x^{n-2}}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-1)(2n-3)} \frac{x^{n-4}}{2 \cdot 4} - \ldots\ldots \right.$$

$$\left. + (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2p+1)} \frac{x^{n-2p}}{2 \cdot 4 \ldots 2p} + \ldots \right].$$

Pero $$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} = \frac{2n(2n-1)\ldots\ldots(n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2n},$$

pues supuesto que esta identidad se verifica, se demuestra que subsiste cuando se sustituye $n$ por $n+1$. Pero se verifica para $n = 1$, $n = 2, \ldots\ldots$; luego la expresión del término en $x^{n-2p}$ del producto $2 \cdot 4 \ldots 2nX_n$ es

$$(-1)^p \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{(2n-1)(2n-3)\ldots\ldots(2n-2p+1)} \frac{x^{n-2p}}{2 \cdot 4 \ldots 2p},$$

es decir,

$$(-1)^p \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots p} (2n-2p)(2n-2p-1)\ldots\ldots (n-2p+1)\, x^{n-2p},$$

ó también

$$(-1)^p \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots p} \frac{d^n x^{2n-2p}}{dx^n},$$

concluyéndose que el producto $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots\ldots 2nX_n$ es la derivada $n^{\text{sima}}$ del polinomio

$$(x^2-1)^n = x^{2n} - \frac{n}{1} x^{2n-2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{2n-4} - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^p \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots p} x^{2n-2p} + \ldots\ldots;$$

luego $$X_n = \frac{1}{2 \cdot 6 \ldots . 2n} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n},$$

fórmula debida á Olinde Rodrigues.

Los polinomios $X_n$ tienen propiedades análogas á las funciones de Sturm.

72. SERIE HIPERGEOMÉTRICA. Se llama *serie hipergeométrica* á la serie entera

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots .$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1) \ldots (\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1) \ldots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \ldots n \cdot \gamma(\gamma+1) \ldots (\gamma+n-1)} x^n + \ldots .$$

no siendo los enteros $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, ..... negativos.

La relación del término $n^2$ de lugar $n+2$ al precedente es

$$\frac{n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta}{n^2 + (\gamma+1)n + \gamma} x ;$$

su límite, para $n = \infty$ es igual á $x$. El radio de convergencia de la serie hipergeométrica es pues 1.

Si $x = 1$, los términos acaban por hacerse del mismo signo.

Apliquemos la *regla de convergencia de Gauss:*

*Si en una serie positiva se tiene*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + an^{p-1} + a_1 n^{p-2} + \ldots . + a_{p-1}}{n^p + bnx^{p-1} + b_1 n^{p-2} + \ldots . + b_{p-1}},$$

*los términos decrecen á partir de cierto lugar, y tienden hacia cero para* $b - a > 0$, *terminando por aumentar indefinidamente para* $b - a < 0$, *y tienen un límite que no es nulo para* $b - a = 0$. *La serie es convergente para* $b - a > 1$, *en los demás casos es divergente.*

La aplicación de dicha regla ó *criterio* da los resultados siguientes:

1.° $\alpha + \beta - \gamma + 1 > 0$. Los términos aumentan indefinidamente en valor absoluto.

2.° $\alpha+\beta-\gamma-1=0$. Los términos tienen un límite que no es nulo.

3.° $\alpha+\beta+\gamma-1<0$. Los términos tienden hacia cero.

La serie es convergente tan sólo cuando $\alpha, \beta, \gamma$ verifican á la desigualdad $\alpha+\beta-\gamma<0$.

Si $x=-1$, se ve que la relación de un término al precedente termina por hacerse negativa cuando $n$ es suficientemente grande. Los términos son pues, á partir de cierto lugar, alternativamente positivos y negativos. Según lo que precede, no tienden hacia cero más que cuando se tiene $\alpha+\beta-\gamma-1<0$, y en este caso, sus valores absolutos van decreciendo. La serie sólo es pues convergente para

$$\alpha+\beta-\gamma-1<0;$$

y, por otra parte, solo es absolutamente convergente cuando $\alpha+\beta-\gamma<0$.

La serie hipergeométrica es un caso particular de la serie

$$1+\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\beta})}{(1-q)(1-q^{\gamma})}x$$
$$+\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})(1-q^{\beta})(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^{2})(1-q^{\gamma})(1-q^{\gamma+1})}x^{2}+\ldots\ldots$$

llamada *serie de Heine* que se reduce á aquélla haciendo $q=1$.

Cuando la serie hipergométrica es convergente, su suma se representa por $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ y se llama *función de Gauss.*

**73.** Polinomios de Hermite. La derivada $n^{\text{sima}}$ de $y=e^{-x^2}$ es de la forma

$$\frac{d^n y}{dx^n}=P_n e^{-x^2},$$

expresando $P_n$ un polinomio entero en $x$ de grado $n$. Estos polinomios se llaman *polinomios de Hermite.*

Tres polinomios consecutivos verifican la relación recurrente

$$P_{n+1}+2xP_n+2nP_{n-1}=0, \qquad (1)$$

porque derivando $n$ veces la ecuación

$$y' + 2xy = 0,$$

se obtiene $y^{(n+1)} + 2xy^{(n)} + 2ny^{(n-1)} = 0;$

y si se divide por $e^{-x^2}$, se obtiene la ecuación (1).

## § 6.° Funciones analíticas

74. Definiciones. *Función analítica* es toda función de un número cualquiera de variables $x, y, z$ ..... que en la proximidad de un sistema de valores $x_0, y_0, z_0, \ldots\ldots$ puede desarrollarse en serie entera ordenada según las potencias de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0, \ldots\ldots$ y convergente mientras que los valores absolutos de estas diferencias no excedan de ciertos límites. Estas funciones resultan unas de otras. Dadas una ó varias funciones analíticas, la integración ó la diferenciación y las operaciones algebráicas, tales como la multiplicación, división, combinación por sustitución, etc., conducen á nuevas funciones analíticas. Pero siendo analíticas las funciones más simples, tales como los polinomios, la exponencial y las funciones circulares, las primeras funciones estudiadas por los geómetras han sido necesariamente analíticas. Además, á pesar del papel fundamental de las funciones analíticas, no debe olvidarse que sólo forman un grupo particular en el conjunto de las funciones continuas (*).

Según Weierstrass, *función analítica* es el conjunto de todos los elementos $P(x - a)$ que se deducen unos de otros por el método de *prolongación*, y *expresión analítica* es toda expresión que se sabe calcular por medio de operaciones analíticas cualesquiera conocidas. (Adición, multiplicación, división. . . . .)

75. Prolongación analítica. Sea

$$P_0(x - x_0) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \quad (1)$$

(*) Goursat *Cours d' Analyse mathématique* t. I p. 456.

una serie entera con relación á $x - x_0$, cuyo círculo de convergencia tiene el radio $R_0$ y el centro $x_0$. La suma de esta serie define una función de $x$ para todos los valores de $x$ tales, que $|x - x_0| < R_0$.

La serie (1) según Weierstrass es un *elemento de función analítica.*

Sea $x_1$ un punto interior al círculo $C_0$. Si se hace

$$x - x_0 = x_1 - x_0 + h, \quad h = x - x_1,$$

existirá (57 y 63) una serie ordenada según las potencias de $h$ cuya suma será la de la propuesta y convergente siempre que se tenga

$$|x - x_1| < R_0 - |x_1 - x_0|,$$

es decir, mientras que el punto $x$ sea interior al círculo descrito desde $x_1$ como centro, tangente interiormente al círculo $C_0$. Expresamos esta serie por

$$P_1(x - x_1) = b_0 + b_1(x - x_1) + \ldots\ldots + b_n(x - x_n)^n + \ldots\ldots$$

Los coeficientes $b_0, b_1, \ldots\ldots, b_n, \ldots\ldots$ son los valores, para $x = x_1$, de las funciones

$$P_0(x - x_0), \frac{d}{dx} P_0(x - x_0), \ldots, \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{d^n}{dx^n} P_0(x - x_0), \ldots$$

Sea $R_1$ el radio del círculo de convergencia $C_1$ de la serie $P_1(x - x_0)$.

Dos casos pueden presentarse: ó bien se tendrá, cualquiera que sea el punto $x_1$ situado en el interior del círculo $C_0$,

$$R_1 = R_0 - |x_1 - x_0|;$$

ó bien para ciertos puntos, por lo menos, se tendrá

$$R_1 > R_0 - |x_1 - x_0|.$$

En el primer caso, la función definida por la primera serie $P(x - x_0)$ se halla realmente contenida en el círculo de con-

vergencia $C_0$; no pudiendo continuarse ó prolongarse más allá. Un ejemplo de este caso ofrece la serie presentada por Herr Lerch *(Acta Mathematica* t. X, p, 87.)

$$P(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} x^{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n},$$

cuyo círculo de convergencia tiene por radio 1. Si se hace $x = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ siendo $r < 1$, y si se supone $\varphi = \frac{p}{q} 2\pi$, siendo $p$ y $q$ enteros, se verá que, para este valor de la variable

$$P(x) = \sum_{n=1}^{n=q-1} x^{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n} + \sum_{n=q}^{n=\infty} r^{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}.$$

La segunda parte de la serie del segundo miembro es real, y el valor absoluto de la primera es menor que $q - 1$. La segunda parte, además crece indefinidamente cuando $r$ tiende hacia 1 por valores crecientes; luego lo mismo sucede á $|P(x)|$ cuando el punto $x$ se aproxima á la circunferencia del círculo $C_0$, permaneciendo en el radio que termina en el punto cuya afija es

$$\cos \frac{p}{q} 2\pi + i \operatorname{sen} \frac{p}{q} 2\pi,$$

concluyéndose de esto que dicho punto no puede hallarse en el interior del círculo de convergencia de una serie $P_1(x - x_1)$ deducida de $P(x)$ como se ha indicado anteriormente. Además, en todo el arco de la circunferencia del círculo $C_0$ se halla una infinidad de puntos cuya afija tiene la forma indicada. Todos los círculos de convergencia de las series tales como $P(x - x_1)$ son pues tangentes interiormente al círculo $C_0$. Lo mismo sucederá á la serie $\sum_{n=1}^{n=\infty} x^{n^2}$ y á otras series análogas.

El segundo caso es el que se presenta con más frecuencia. En este caso, los dos círculos $C_0$ y $C_1$ tienen una parte común $[C_0, C_1]$, y podemos enunciar el siguiente

TEOREMA *En todo punto* $\xi$ *interior á la vez á los dos círculos* $C_0$ *y* $C_1$ *las dos series* $P_0(x - x)$ y $P_1(x - x_1)$ *representan la misma función.*

En efecto, para todo punto $x'$ situado en el interior del círculo $C'_1$ descrito desde el punto $x_0$ como centro y tangente interiormente á $C_0$, las dos funciones $P_0(x - x_0)$ y $P_1(x - x_1)$ son iguales, así como sus derivadas. Esto es evidente para las derivadas, si se considera á éstas como los límites del incremento de la función al de la variable, y resulta evidente también, si se comparan los dos desarrollos

$$P_0(x' - x_0) + \frac{h}{1} P'_0(x' - x_0) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} P_0^{(n)}(x' - x_0) + \ldots$$

$$P_1(x' - x_1) + \frac{h}{1} P'_1(x' - x_1) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} P_1^{(n)}(x' - x_1) + \ldots$$

desarrollos en los que $P_0^{(n)}(x' - x_0)$ y $P_1^{(n)}(x' - x_1)$ expresan los valores para $x = x'$ de las $n^{\text{simas}}$ derivadas con relación á $x$ de $P_0(x - x_0)$ y $P_1(x - x_1)$, que se obtienen sustituyendo, en estas últimas funciones, $x$ por $x' + h$ y desarrollando después según las potencias de $h$. Estas dos series enteras en $h$ deben tener valores iguales para valores suficientemente pequeños de $h$, y por consiguiente, deben tener sus coeficientes correspondientes iguales (21). Si pues $\xi$ es interior al círculo $C'_1$, las dos series $P_0(x - x_0)$ y $P(x - x_1)$ tienen el mismo valor en este punto, así como todas sus derivadas.

Si pues se consideran, en general, dos puntos cualesquiera, se les puede suponer ligados de la manera siguiente. Imaginemos una serie formada por un número finito de puntos, tan próximos como se quiera,

$$x_1, \xi, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n, \xi, \qquad (1)$$

de los cuales $x_1$ y $\xi$ sean respectivamente el primero y el último y una serie correspondiente de círculos

$$C_1, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots\ldots, \Gamma_n, \Gamma,$$

tales que el centro de cada uno sea el punto correspondiente de la serie (1) y que cada círculo contenga en su interior el centro del círculo siguiente. Llamaremos á la figura formada por estos círculos, *cadena de círculos* entre $x_1$ y $\xi$. (Es con frecuencia cómodo suponer que cada círculo contenga también el centro del círculo precedente, con el fin de que pueda *descender* la cadena yendo de $\xi$ y $x_1$ como se *asciende* yendo de $x_1$ á $\xi$(*)).

Siendo los puntos $x_1$ y $\xi$ interiores al espacio $[C_0, C_1]$, supondremos formada la cadena por círculos que sean todos interiores á este espacio y que no sean tangentes al límite. Se podrán tomar, por ejemplo, los puntos $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_n$ en el segmento de recta que une $x_1$ á $\xi$.

Esto sentado, en todo el punto del círculo $c_1$, las dos series $P_0(x - x_0)$ y $P_1(x - x_1)$ tienen los mismos valores, así como todas sus derivadas y diremos que en este círculo *coinciden* éstas. El punto $\xi_1$ es interior á los círculos $c_1$, $C_0$, $C_1$. Si en cualquiera de las dos series se sustituye $x$ por $\xi_1 + x - \xi_1$ y se ordena con relación á $x - \xi_1$, se formarán dos series idénticas enteras en $x - \xi$, pudiéndose representar cualquiera de ellas por $\omega_1(x - \xi_1)$. Esta última serie converge seguramente en el círculo $\Gamma_1$, interior á los círculos $C_0$ y $C_1$, y coincide, tanto con $P_0(x - x_0)$ como con $P_1(x - x_1)$. El punto $\xi_2$ es interior á los círculos $C_0$, $C_1$, $\Gamma_1$. Bi en las series $P_0(x - x_0)$, $P_1(x - x_1)$, $\omega_1(x - x_1)$ se sustituye $x$ por $\xi_2 + x - \xi_2$ y se ordena con relación $x - \xi_2$, se formarán tres series idénticas enteras en $x - \xi_2$ de las que una cualquiera puede representarse por $\omega(x = \xi_2)$. Esta última converge en todo el círculo $\Gamma_2$ interior á $C_0$ y á $C_1$ y coincide con $P_0(x - x_0)$ y $P_1(x - x_1)$. Se continuará del mismo modo, y se llegará así por un número *finito* de operaciones á una serie entera en $x - \xi$,

$$\omega(x = \xi),$$

convergente en el círculo $\Gamma$ de centro $\xi$, interior á los círculos

(*) *Elements de la théorie des fonctions elliptiques*, par J. Tannery et J. Molk p. 78.

$C_0$ y $C_1$ y que coinciden, en este círculo, tanto con $P_0(x = x_0)$ como son $P_1(x = x_1)$, quedando demostrado el teorema

EJEMPLO. Sea

$$P(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = \ldots\ldots$$

en la que el radio del círculo de convergencia es 1. En un punto interior $x$ de este círculo, las derivadas sucesivas son

$$P'(x) = 1 - x + x^2 = \ldots\ldots = \frac{1}{1+x},$$

$$P''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \ldots\ldots, P^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1.2\ldots\ldots(n-1}{(1+x)^n}.$$

Por consiguiente, siendo $x_1$ un punto interior á C,

$$P(x) = P(x_1) + \frac{x - x_1}{1+x_1} - \frac{1}{2}\frac{(x-x_1)^2}{(1+x_1)^2} + \frac{1}{3}\frac{(x-x_1)^3}{(1+x_1)^3} - \ldots\ldots$$

$$= P(x_1) + P\left(\frac{x-x_1}{1+x_1}\right).$$

Se ve por otra parte que la serie

$$P\left(\frac{x-x_1}{1+x_1}\right),$$

entera en $x - x_1$, es convergente mientras se tenga

$$|x - x_1| < |1 + x_1|,$$

es decir, mientras que el punto $x$ se halle situado en el interior de $c_1$, descrito desde el punto $x_1$ como centro y que pasa por el punto — 1. Así, el círculo de convergencia de la serie

$$P(x_1) + P\left(\frac{x-x_0}{1+x_1}\right)$$

es en general parcialmente exterior al círculo C, y se tiene de este modo un primer medio de continuar la función $P(x)$ fuera del círculo C, que podrá emplearse sucesivamente.

Por otra parte, si $x'$ es un punto cualquiera exterior ó interior al círculo C, pero cuya afija no es real negativa y menor que $-1$ (ó $=-1$), la serie

$$P\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)=\frac{x-x'}{1+x'}-\frac{1}{2}\frac{(x-x')^2}{(1+x')^2}+\frac{1}{3}\frac{(x-x')^3}{(1+x')^3}-\cdots$$

entera en $x-x'$, es convergente mientras que $x$ satisfaga á la condición

$$|x-x'|<|1+x'|,$$

es decir, mientras que $x$ se halle en el interior del círculo C' descrito desde $x'$ como centro y que pasa por el punto $-1$; y como la derivada con relación á $x$ de $P\left(\frac{x-x'}{1+x}\right)$ es igual á

$$\frac{1}{1+\frac{x-x'}{1+x'}}\,\frac{1}{1+x'}=\frac{1}{1+x},$$

las funciones $P(x)$ y $P\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)$

tienen en $x$ todas sus derivadas iguales, concluyéndose que, si se designa por $a$ un valor de $x$ que satisfaga simultáneamente á las condiciones

$$|a|<1, \quad |a-x'|<|1+x'|,$$

las dos funciones

$$P(x), \quad P\left(\frac{x-x'}{1+x'}\right)-P\left(\frac{a-x'}{1+x'}\right)+P(a)$$

coinciden, así como sus derivadas en el punto $a$, y coincidirán por consiguiente, en toda la región común á los dos círculos respectivamente concéntricos con los dos círculos C y C' y de radios un poco menores y por consiguiente, en un punto cualquiera de la región común á los dos círculos C y C', que con-

tiene el punto $a$. Si se suprimen las porciones de las dos circunferencias C y C′, tales que cada una es interior al círculo de que no forme parte, se define en el área ((C, C′)) una función única $(fx)$, holoforma en el área, pero no en el contorno (*).

El dominio de existencia de una función analítica puede extenderse sucesivamente, mientras sea posible su prolongación analítica. De esto resultan obstáculos que impiden dicha prolongación analítica, los cuales son los *puntos singulares*.

Sea L una línea arbitraria que parte del punto inicial $a$. Todos los puntos de L, interiores al círculo de convergencia $C_a$, pueden ser alcanzados por medio de un número *finito* de elementos. No sucede lo mismo respecto á un punto $\alpha$ de la circunferencia $C_a$ ó exterior á ésta, ocurriendo dos casos posibles:

1.° Existe una serie de potencias $P(x|\alpha)$ que coincide con $P(x|a)$ en la región común á los dominios $C_a$ y $C_\alpha$. La función analítica es entonces holomorfa ó *regular* en $\alpha$. El punto $\alpha$ es un punto ordinario.

2.° Si es imposible formar dicha serie, el punto $\alpha$ es un *punto singular*, el cual es punto frontera que sirve de separación entre los puntos de la línea L que se pueden alcanzar por la prolongación, siguiendo la línea L á partir de $a$ y los otros puntos de dicha línea. El conjunto de los puntos de este tipo, relativos á todos los elementos, constituye la *frontera* del dominio de existencia de esta función. El conjunto de los puntos singulares es el conjunto de los puntos en que la función no es regular, es siempre *cerrado*, porque un punto ordinario es el centro de un círculo cuyos puntos no son ninguno singular.

Respecto á las singularidades citaremos el caso de la serie

$$1 + ax^c + \ldots\ldots + a^n x^{c^n} + \ldots\ldots \qquad (a \text{ const} > 0;\ c \text{ entero} > 0)$$

cuyo círculo de convergencia tiene por radio la unidad, porque la relación de un término al precedente tiende hacia cero ó al

(*) Tannery et Molk. *Elements de la Théorie des fonctions elliptiques* p. 85-87.

infinito según $|x|$ es $< 1$ ó $> 1$. *Dicho círculo es una línea singular para la función definida por la serie.* (*)

Citaremos que el profesor M. Pringsheim demostró que: *La función definida por una serie entera* tiene en general *como cortadura (coupure) su círculo de convergencia.* Resultando de estas consideraciones la existencia de funciones analíticas que cesan de existir en toda una región del plano, es decir, *teniendo espacios lagunares.*

Respecto á la expresión, *por medio de integrales ó de series*, de las funciones analíticas que tienen líneas singulares ó espacios lagunares, citaremos con M. Fouet el ejemplo presentado por M. Poincaré, con la serie

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x - b_n},$$

siendo C un contorno (que tiene en cada punto una tangente y un radio de curvatura) que divide el plano en dos regiones, una interior y otra exterior á dicho contorno. Se supone que la serie $\Sigma a_n$ converge absolutamente, que todos los puntos $b_n$ se hallan en el interior de C ó en C y forman un conjunto denso en cualquier arco de C. En estas condiciones, *en el exterior* de C, la serie $\varphi(x)$ tiene sus elementos holomorfos y converge uniformemente, siendo, por tanto, holomorfa. Además, se obtiene que el círculo de convergencia relativo á cada uno de los puntos de todo dominio exterior á C, es tangente exteriormente á C. La función analítica $\varphi(x)$ tiene pues la región interior á C como espacio lagunar.

---

(*) Omitimos la demostración expuesta en la obra *Leçons élem sur la théor. des. fonc. analytiques par Edouard. A. Fouet*, pag. 308.

# CAPÍTULO II

## Integrales

### § 1.° Representación de una función de variable compleja

**76.** Fórmula fundamental. Sean $z$ una variable imaginaria, $r$ su módulo y $p$ su argumento. Se tendrá

$$z = r(\cos p + i \operatorname{sen} p) = re^{pi}$$

Supongamos que $f(z)$ sea finita, así como su derivada para todo valor de $z$ cuyo módulo $r$ es menor que cierto límite R, y que permaneciendo el módulo constante, cuando el ángulo $p$ varíe de una manera contínua desde $\alpha$ hasta $\alpha + 2\pi$, la función vuelva á adquirir el mismo valor para $p = \alpha + 2\pi$ que para $p = \alpha$; *tendremos que*

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(z)dp \qquad (1)$$

*para todo módulo* r *menor que* R.

En efecto, derivando respecto á $r$ y $p$, resulta que

$$\frac{\partial f(z)}{\partial r} = f'(z)\frac{dz}{dr} = f'(z)e^{pi}, \quad \frac{\partial f(z)}{\partial p} = f'(z)\frac{\partial z}{\partial p} = f'(z)rie^{pi};$$

luego

$$\frac{\partial f(z)}{\partial r} = \frac{1}{ri}\frac{\partial f(z)}{\partial p}.$$

Pero, como por hipótesis $f'(z)$ permanece finita y contínua para todo valor de $z$ cuyo módulo es menor que R, lo mismo

sucederá á los dos miembros de esta ecuación. Así pues, multiplicándolos por $dr \,.\, dp$ é integrándolos con relación á $r$ desde o hasta $r$, y con relación á $p$ desde $\alpha$ hasta $\alpha + 2\pi$, tendremos

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} dp \int_{0}^{r} \frac{\partial f(z)}{\partial r}\, dr = \int_{0}^{r} \frac{dr}{ri} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\partial f(z)}{\partial p}\, dp;$$

pero

$$\int_{0}^{r} \frac{\partial f(z)}{\partial r}\, dr = f(z) - f(0), \quad \int \frac{\partial f(z)}{\partial p}\, dp = f(z) = f\left(re^{pi}\right);$$

luego

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\partial f(z)}{\partial p}\, dp = f\left[re^{(\alpha+2\pi)i}\right] - f\left(re^{\alpha i}\right).$$

Por hipótesis el segundo miembro de esta ecuación es nulo; luego

$$\int_{0}^{r} \frac{dr}{ri} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{\partial f(z)}{\partial p}\, dp = 0 \quad \text{é} \quad \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} [f(z) - f(0)]\, dp = 0;$$

luego

$$f(0) \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} dp = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(z)\, dp, \; f_{\backslash}0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(z)\, dp. \quad (1)$$

Si se hace en (1) $\alpha = 0$, resulta

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} f\left(re^{pi}\right) dp \qquad (2)$$

que para $\alpha = -2\pi$ es, cambiando $p$ en $-p$,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{-2\pi} f\left(re^{-pi}\right) dp.$$

Sustituyendo $f(z)$ por $F(x + z)$ en (1), resulta

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F\left(x + re^{pi}\right) dp. \qquad (3)$$

Así, una función $F(x)$ de una variable $x$, real ó imaginaria, puede hallarse representada por una integral definida, siempre que $f(x + re^{pi})$ permanezca finita y contínua, así como su derivada, para el valor atribuído á $r$ y para todo valor menor, y siempre que dicha función vuelva á obtener el mismo valor, cuando $p$ aumenta en $2\pi$.

*Ejemplo 1.°* Sea $f(z) = \frac{1}{1 - z}$. Esta función y su derivada se hacen infinitas para $z = 1$, valor cuyo módulo $r = 1$; pero son finitas y continuas para cualquier valor del módulo menor que 1. Se puede pues, aplicar la fórmula (2) que será, para $r < 1$:

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dp}{1 - z};$$

y tendremos que

$$2\pi = \int_0^{2\pi} \frac{dp}{1 - r\cos p - ir \operatorname{sen} p}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r\cos p + ir \operatorname{sen} p)}{1 - 2r\cos p + r^2}\, dp;$$

y separando las partes reales y las imaginarias:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - r\cos p}{1 - 2r\cos p + r^2} = 2\pi, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} p\, dp}{1 - 2r\cos p + r^2} = 0.$$

2.° Sea $f(z) = e^{az}$, función finita y contínua, lo mismo que su derivada, para cualquier valor de $z$. Se tendrá para cualquier valor del módulo $r$,

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ar\cos p + i\,.\,ar \operatorname{sen} p}\, dp;$$

haciendo $ar = b$; y separando las cantidades reales y las imaginarias, resulta

$$\int_0^{2\pi} e^{b\cos p}\cos(b\operatorname{sen} p)dp = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{b\cos p}\operatorname{sen}(b\operatorname{sen} p)dp = 0.$$

3.° Sea $f(z) = \log(1 - z)$, de donde $f'(z) = -\frac{1}{1-z}$.

La función y su derivada se hacen infinitas para $z = 1$, cuyo módulo es 1. Es preciso pues, suponer en la fórmula (2) $r < 1$. Entonces, haciendo crecer á $p$ de una manera contínua desde un valor $\alpha$ hasta otro $\alpha + 2\pi$, la función $\log(1 - z)$ tomará, para $p = \alpha + 2\pi$, el mismo valor que para $p = \alpha$.

En efecto, hagamos

$$1 - z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta);$$

$\rho$ y $\theta$ estarán determinadas por las ecuaciones

$$\rho\cos\theta = 1 - r\cos p, \qquad \rho\operatorname{sen}\theta = -r\operatorname{sen} p;$$

de las que resulta $\rho = +\sqrt{1 - 2r\cos p + r^2}$,

$$\cos\theta = \frac{1 - r\cos p}{\sqrt{1 - 2r\cos p + r^2}}, \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{-r\operatorname{sen} p}{\sqrt{1 - 2r\cos p + r^2}}.$$

Se conocen pues los valores de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ en función de $p$. Si pues se da á $p$ un primer valor arbitrario $\alpha$, se obtienen por estas fórmulas los valores de $\cos\theta$ y de $\operatorname{sen}\theta$ á los que corresponden una infinidad de valores del arco $\theta$. Elijamos uno de estos valores, que representaremos por $6$.

Haciendo crecer $p$ de una manera contínua desde $\alpha$ hasta $\alpha + 2\pi$, los valores de $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$ variarán también de una manera contínua, á partir del valor inicial $6$ que corresponde á $p = \alpha$; y cuando $p$ llegue al límite superior $\alpha + 2\pi$, $\theta$ habrá

vuelto al valor inicial $\theta$, ó bien diferirá de él en una ó varias circunferencias.

Pero si se supone $r < 1$, se tendrá $\theta = \theta$ para $p = \alpha + 2\pi$, lo mismo que para $p = \alpha$, pues por la fórmula

$$\cos\theta = \frac{1 - r\cos p}{\sqrt{1 - 2r\cos p + r^2}}$$

vemos, que si se tiene $r < 1$, $\cos\theta$ permanece positivo para todos los valores de $p$; luego el extremo móvil del arco variable $\theta$, medido á partir de un punto fijo de la circunferencia, se hallará siempre en el primero ó en el cuarto cuadrante; y puesto que su seno y su coseno vuelven á tomar para $p = \alpha + 2\pi$, los mismos valores que para $p = \alpha$, el arco $\theta$ volverá también á tomar el valor $\theta$ que se le había asignado para $p = \alpha$.

Habiendo hecho

$$1 - z = \rho(\cos\theta + i \text{ sén } \theta) = \rho e^{\theta i},$$

la fórmula (2) da $0 = \int_0^{2\pi} (\log\rho + \theta i)\,dp$ de la que se deducen

$$\int_0^{2\pi} \log\left(\sqrt{1 - 2r\cos p + r^2}\right) dp = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \text{arc tg}\,\frac{-r \text{ sen } p}{1 - r\cos p} = 0.$$

77. Indices. Cuando una función primitiva $F(x)$ admite varias determinaciones, se elije uno de los valores iniciales $F(a)$ y se sigue la variación continua de esta determinación, cuando $x$ varía en el mismo sentido desde $a$ hasta $b$. Por ejemplo, sea la integral

$$\int_a^b \frac{P'Q - PQ'}{P^2 + Q^2}\,dx = \int_a^b \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\,dx, \quad \left(f(x) = \frac{P}{Q}\right)$$

siendo P y Q dos funciones continuas en el intervalo $(ab)$, que no se anulan al mismo tiempo. Una función primitiva es *arc tg* $f(x)$.

Si Q no se anula entre $a$ y $b$, $f(x)$ no se hace infinita y arc tg $f(x)$ permanece comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$; pero no sucede lo mismo, en general, si la ecuación Q = o tiene raíces en este intervalo. Para ver cómo debe modificarse la fórmula, conservaremos siempre la notación arc tg $x$ para el arco comprendido entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$, y supondremos que Q se anula una sola vez entre $a$ y $b$ para un valor de $c$ de $x$. Tendremos

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} = \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'} + \int_{c+\varepsilon'}^b,$$

siendo $\varepsilon$ y $\varepsilon'$ números positivos muy pequeños, y no haciéndose $f(x)$ infinita entre $a$ y $c-\varepsilon$ ni entre $c+\varepsilon'$ y $b$; tendremos pues

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{1+f^2} = \text{arc tg } f(c-\varepsilon) - \text{arc tg } f(a)$$

$$+ \text{arc tg } f(b) - \text{arc tg } f(c+\varepsilon') + \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}.$$

Se pueden presentar varios casos. Supongamos, para fijar las ideas, que $f(x)$ se haga infinita al pasar de $+\infty$ á $-\infty$; $f(c-\varepsilon)$ será positiva y muy grande, arc tg $f(c-\varepsilon)$ se hallará muy próximo á $\frac{\pi}{2}$, $f(c+\varepsilon')$ será negativa y muy grande, arc tg $f(c+\varepsilon')$ muy próximo á $-\frac{\pi}{2}$. En cuanto á la integral $\int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon'}$, su valor será muy pequeño. Pasando al límite, resulta

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} = \pi + \text{arc tg } f(b) - \text{arc tg } f(a).$$

Se vería de igual manera que sería preciso restar $\pi$ si $f(x)$ pasase de $-\infty$ á $+\infty$. En el caso general, se dividirá el inter-

valo $(a, b)$ en intervalos parciales bastante pequeños para que, en cada uno de ellos, $f(x)$ solo se haga infinita una vez, y razonando para uno de los intervalos como acaba de hacerse, resulta

$$\int_a^b \frac{f'(x)dx}{1 + f^2(x)} = \text{arc tg } f(b) - \text{arc tg } f(a) + (N - N')\pi,$$

expresando N el número de veces que $f(x)$ se hace infinito pasando de $+\infty$ á $-\infty$ y N' el número de veces que $f(x)$ pasa de $-\infty$ á $+\infty$. Este número N — N' se llama *índice* de la función $f(x)$ entre $a$ y $b$.

OBSERVACIÓN RESPECTO AL DESARROLLO DE LAS FUNCIONES. Cauchy empleó la fórmula (1) para el desarrollo de las funciones en series, habiendo llegado á la conclusión de que se tratará más adelante:

*Una función* F(x) *de una variable* x *real ó imaginaria, puede desarrollarse en serie convergente según las potencias enteras y positivas de* x *mientras el módulo de* x *sea menor que aquél para el cual la función ó su derivada primera se hacen infinitas ó discontinuas.* Así, no cesando de ser finitas y continuas las funciones

$$e^x, \quad \text{sen } x, \quad e^{x^2}, \quad \cos(1 - x^2),$$

serán siempre desarrollables según las potencias ascendentes de $x$. Pero dejando de ser finitas y continuas para el caso en el que el módulo de $x$ es 1, las funciones

$$\frac{1}{1 - x}, \quad \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}, \quad \log(1 - x), \quad \text{arc tg } x,$$

así como sus derivadas, sólo serán desarrollables cuando el módulo de $x$ sea menor que la unidad.

En fin, las funciones $lx$, $e^{\frac{1}{x}}$, $\cos\frac{1}{x}$ son discontinuas, así como sus derivadas para $x = 0$; por tanto no son desarrollables en serie según las potencias ascendentes de $x$.

## § 2.° Integrales dobles.

**78.** Nociones generales. Sea $f(x, y)$ una función de dos variables $x$ é $y$. Hagamos variar á $x$ entre $x_0$ y X y á $y$ entre $y_0$ é Y. Supongamos además que $f(x, y)$ sea contínua para todos los valores de $x$ é $y$ considerados. Para pasar de una suma simple á una suma doble, dividiremos los intervalos $(x_0, X)$ é $(y_0, Y)$ en otros intervalos, de modo que tendremos la series de puntos

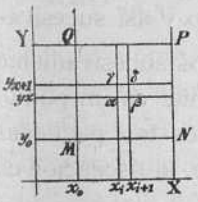
$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots\ x_{n-1},\ X,\quad y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots,\ y_{p-1},\ Y.$$

Podremos pues, considerar la doble suma

$$S = \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{k=0}^{k=p-1} f(x_i, y_k)\ (x_{i+1} - x_i)\ (y_{k+1} - y_k), \quad (1)$$

que se extiende á todos los valores de $i$ y de $k$, respectivamente desde o hasta $n - 1$ y desde o hasta $p - 1$; y vamos á demostrar que:

*Siendo* $x_0$ *y* X, $y_0$ *é* Y *valores fijos, si todos los intervalos* $x_{i+1} - x_i$ *é* $y_{k+1} - y_k$ *tienden hacia cero según una ley cualquiera, á medida que su número aumenta indefinidamente, la expresión considerada tiene un límite determinado.*




Formemos el rectángulo MNPQ con las rectas $x = x_0$, $x = X$, $y = y$, é $y = Y$. Este rectángulo quedará dividido por las rectas correspondientes á las subdivisiones

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ldots,\ x_{n-1} \text{ é } y_1, y_2,\ \ldots\ldots,\ y_{p-1}.$$

Para formar la suma S, consideremos todos los puntos $(x_i, y_k)$ y el valor de la función en dichos puntos, que multiplicaremos por el área del rectángulo correspondiente; y efectuaremos la suma.

Esto sentado, principiaremos por demostrar el siguiente

Lema. *Dado un número* $\varepsilon$ *tan pequeño como se quiera, se*

*puede hallar una cantidad* $\delta$ *tal, que en el interior de todo rectángulo cuyos lados son paralelos á los ejes de coordenadas, contenido en el rectángulo* MNPQ, *y cuyos lados son menores que* $\delta$, *la oscilación de la función* f(x, y) *sea menor que* $\varepsilon$, *siendo* $\varepsilon$ *tal que*

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon$$

*para todo punto* (x', y') *cuyas coordenadas satisfacen á las desigualdades*

$$|x' - x| < \delta, \quad |y' - y| < \delta.$$

Sabemos que la función considerada es contínua cuando dado un número positivo $\varepsilon$ tan pequeño como se quiera, se puede determinar una cantidad positiva $\delta$ conforme expresa el enunciado, y entendemos por oscilación de la función en una área la diferencia entre el máximo y el mínimo de la función en dicha área.

Dividamos MN y PQ en cierto número de partes iguales, y hagamos lo mismo con cada una de las partes obtenidas, continuando así indefinidamente. Habremos descompuesto, con este procedimiento, el rectángulo MNPQ en una red de rectángulos iguales cada vez más pequeños, y se llegará al momento en que la oscilación de la función en cada uno de dichos rectángulos sea menor que $\frac{\varepsilon}{2}$; porque si así no sucediese, se tendría necesariamente un primer rectángulo en el cual la oscilación sería mayor que $\frac{\varepsilon}{2}$, luego en un segundo rectángulo y así sucesivamente. Estos rectángulos hallándose contenidos sucesivamente unos en otros, tienden hacia cero; luego su límite es un punto; y en el interior de un rectángulo de dimensiones tan pequeñas como se quiera, alrededor de dicho punto límite, la oscilación de la función sería superior á $\frac{\varepsilon}{2}$, lo que es contradictorio con la hipótesis de la continuidad de la función. Basta pues tomar para valor de $\delta$ la menor de las dimensiones de los rectángulos, cuando la oscilación en todos ellos se ha hecho inferior á $\frac{\varepsilon}{2}$.

Demostración del teorema. Adoptemos una ley particular de subdivisión por la cual se pase de un modo de subdivisión al siguiente, conservando siempre las rectas de la subdivisión anterior. Bajo estas condiciones, designemos por $M_{i,k}$ el máximo de la función $f$ en el rectángulo correspondiente al punto $(x_i, y_k)$, y formemos la suma

$$\Sigma\Sigma\, M_{i,k}\,(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k),$$

que tendrá un límite cuando los rectángulos tiendan hacia cero, según la ley indicada, pues dicha suma no puede más que disminuir cuando se pasa de un modo de subdivisión al siguiente, y además permanece superior á

$$m(X - x_0)\,(Y - y_0),$$

designando por $m$ el mínimo de $f(x, y)$ en el rectángulo MNPQ; y si $\mu$ es el límite de (2), la suma S tendrá en las mismas condiciones el mismo límite, pues podemos llegar á un modo de subdivisión bastante lejano en la serie, para que en todo rectángulo $(i, k)$, se tenga

$$|M_{i,k} - f(x_i, y_k)| < \varepsilon,$$

para lo que bastará que los lados de todos los rectángulos sean inferiores á $\delta$ (según el lema); luego las sumas (1) y (2) diferirán en menos de

$$\varepsilon\,\Sigma\Sigma(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k) \quad \text{ó} \quad \varepsilon(X - x_0)\,(Y - y_0),$$

y por ser $\varepsilon$ tan pequeño como se quiera, S tendrá á $\mu$ por límite.

Además el límite será siempre $\mu$, cualquiera que sea la ley de subdivisión adoptada. Para verlo, nos basta comparar la suma S correspondiente á un modo de subdivisión $(x, y)$ según la ley adoptada con la suma S′ correspondiente á otro modo cualquiera de subdivisión, que expresaremos por $(z, t)$. Si pues damos previamente un número $\varepsilon$ tan pequeño como se quiera, y tomamos un modo de subdivisión $(x, y)$ bastante lejano en la serie, para que cada uno de los intervalos $x_{i+1} - x_i$ é $y_{k+1} - y_k$ sea me-

nor que $\delta$, suponiendo además que los intervalos $(z, t)$ sean bastante pequeños para que entre dos $x$ y dos $y$ consecutivas haya por lo menos una $z$ y una $t$; al rectángulo $(i, k)$ corresponderá en la suma S el término

$$f(x_i, y_k)\ (x_{i+1} - x_i)\ (y_{k+1} - y_k).$$

Si además en S′ descomponemos cada rectángulo $(z, t)$ que se solapa *(empiète)* con varios rectángulos $(x, y)$, en una suma de rectángulos contenido cada uno completamente en uno solo de éstos rectángulos, podremos comparar la parte de la suma S′ que proviene del rectángulo $(i, k)$, con la parte de la suma S que proviene del mismo rectángulo; y como el valor de la función $f$ que se asocia á cada uno de los rectángulos parciales que forman el rectángulo $(i, k)$ es el valor de esta función para un punto situado en un rectángulo $(x, y)$ limítrofe del punto $(i, k)$, resulta que este valor diferirá de $(fx_i, y_k)$ en menos de $\varepsilon$. Por consiguiente, la diferencia de las dos partes consideradas S y S′ será menor que $\varepsilon$ multiplicada por la suma de las áreas de los rectángulos parciales, es decir

$$\varepsilon(x_{i+1} - x_i)\ (y_{k+1} - y_k);$$

luego $$|S' - S| < \varepsilon\ (X - x_0)\ (Y - y_0).$$

Pero S tiene por límite $\mu$; luego S′, en virtud de la desigualdad precedente, tendrá el mismo límite que se expresa por

$$\int\int f(x, y)dxdy.$$

Esta expresión recuerda que el límite representado por ella es la suma de los elementos $f(x, y)dxdy$, en los que $dx$ y $dy$ son positivos, y se dice que esta integral doble se extiende al área del rectángulo MNPQ.

Cálculo de la integral. Consiste en el cálculo sucesivo de dos integrales definidas, pues si escribimos la suma

$$\Sigma\Sigma f(x_i, y_k)\ (x_{i+1} - x_i)\ (y_{k+1} - y_k)$$

bajo la forma

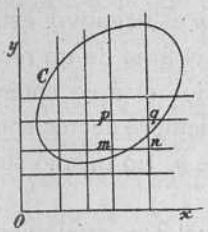
$$\sum_k \left[ (y_{k+1} - y_k) \sum_i f(x_i, y_k) \ (x_{i+1} - x_i) \right],$$

y hacemos tender todos los intervalos $(x_{i+1} - x_i)$ hacia cero, dejando constantes las $y$, la suma última se reducirá á

$$\int_{x_0}^{X} f(x, y_k) dx;$$

si sustituimos y hacemos aproximarse hacia cero los intervalos $(y_{k+1} - y_k)$, tendremos

$$\int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y) dx.$$




GENERALIZACIÓN. Sea una área plana cualquiera limitada por una curva C. Tracemos una serie de paralelas á los ejes coordenados, y coloquemos por orden creciente las abscisas de las paralelas á $Oy$ y de las ordenadas de las $Ox$. Tendremos una red de rectángulos. El rectángulo $(i, k)$ corresponderá al punto $(x_i, y_k)$, siendo sus lados $x_{i+1} - x_i$ é $y_{k+1} - y_k$.

Formemos la suma

$$\Sigma\Sigma f(x_i, y_k) \ (x_{i+1} - x_i) \ (y_{k+1} - y_k), \qquad (3)$$

extendida á todos los puntos $(x_i, y_k)$ contenidos en el interior ó en el perímetro del área. Algunos rectángulos *irregulares* tales como *mnpq*, podrán salir en parte del área limitada por C, y figuran en la suma. Vamos á demostrar que *la suma anterior tiende hacia un límite cuando todos los rectángulos tienden hacia cero, según una ley cualquiera.*

Adoptemos, para comenzar, una ley particular de subdivisión, por la que se pasará á la siguiente conservando las rectas de la

subdivisión precedente. Sea $M_{i,k}$ el máximo de la función $f$ en el rectángulo $(i, k)$, y consideremos la suma

$$\Sigma\Sigma M_{i,k}(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k). \qquad (4)$$

Se ve inmediatamente que esta suma tiene un límite, cuando los rectángulos tienden hacia cero según la ley indicada, pues no puede más que disminuir, cuando se pasa de un modo de subdivisión al siguiente; y también para los rectángulos irregulares la disminución de la suma podrá provenir de que el área que debe tenerse en cuenta se halla reducida. Además estas sumas son superiores á

$$m\Sigma\Sigma(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k),$$

expresando $m$ el mínimo de $f(x, y)$ en el interior de una curva fija exterior á C, y aproximándose á ella tanto como se quiera. Si $m$ es positivo, la suma (4) será positiva; si $m$ es negativo, esta suma será superior á $m$ R, expresando por R el área de un rectángulo cualquiera que contenga en su interior el área entera limitada por C. En ambos casos la suma (4), siempre decreciente y superior á una cantidad fija, tendrá un límite $\mu$. Lo mismo sucederá á la suma (3).

Por último, se tendrá siempre un límite igual á $\mu$, cualquiera que sea la ley de subdivisión adoptada.

Vamos á hallar un límite superior de $|S' = S|$. Con este objeto, observemos desde luego que los rectángulos regulares dan para esta diferencia una parte igual á lo más á

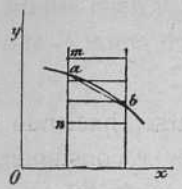
$$\varepsilon\Sigma\Sigma(x_{i+1} - x_i)(y_{k+1} - y_k),$$

no comprendiendo más que rectángulos regulares. Esta expresión es menor que $\varepsilon$R. Sea M el máximo de $f$. Los rectángulos irregulares dan en S y en S' una parte inferior al producto de M por la suma de los rectángulos irregulares $s$, y tendremos

$$|S' - S| < \varepsilon R - 2Ms.$$

Para demostrar que $s$ tiende hacia cero, consideremos dos paralelas consecutivas al eje de las $y$, y sea además $ab$ uno de

los arcos que limitan en C. Varios rectángulos irregulares pueden hallarse atravesados por $ab$, en el caso de la figura. La suma de los arcos de estos rectángulos será igual á su altura común $h$ por la suma $mn$ de sus bases. Supondremos además que los lados de estos rectángulos sean menores que $\delta$; luego $mn$ será menor que $2\delta$ aumentado en la proyección de la cuerda $ab$ sobre $Oy$, cualquiera que sea el número de los rectángulos. La suma de los rectángulos considerada será pues menor que $h(2\delta + \overline{ab})$; luego




$$s < 2\delta\Sigma h + \Sigma h\overline{ab}, \quad \text{ó por ser} \quad h < \delta, \quad s < 2\delta\Sigma h + \delta\Sigma\overline{ab}.$$

Pero $\Sigma h$ es finita, porque designando con $\lambda$ el número máximo de veces que una paralela á $Oy$ encuentra á la curva C y con $l$ la distancia de las paralelas extremas á $Oy$ que encuentran á la curva, se tiene $\Sigma h < l\lambda$.

Además la suma de las cuerdas $ab$ es finita, pues la suma de sus proyecciones sobre $Ox$ es menor que $l\lambda$, y la suma de sus proyecciones sobre $Oy$ menor que $l'\lambda'$, expresando $\lambda'$ el número máximo de veces que una paralela á $Ox$ encuentra á C y por $l'$ la distancia de las paralelas extremas á $Ox$ que encuentran á la curva; luego

$$\Sigma\,\overline{ab} < l\lambda + l'\lambda',$$

siendo $s$ el producto de $\delta$ por un factor que permanece finito, tiende hacia cero, cuando todos los rectángulos tienden hacia cero. Queda demostrada la existencia de la suma (3).

De un modo más general podemos considerar la suma

$$\Sigma\Sigma f(x'_i, y'_k)\,(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k)$$

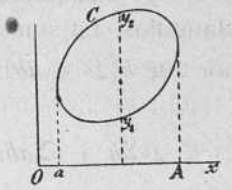
en la que $x'_i$ é $y'_k$ expresan las coordenadas de un punto cualquiera situado en el rectángulo $(i, k)$, pues el límite es el mismo. En efecto, $f(x'_i, y'_k)$ difiere de $f(x_i, y_k)$ en menos de $\varepsilon$ si las di-

mensiones de los rectángulos son menores que $\delta$, y porque las dos sumas difieren en menos de

$$\varepsilon \Sigma\Sigma (x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k),$$

tienen el mismo límite.

El cálculo de esta integral podrá efectuarse, haciendo la suma en la hipótesis de ser $x$ constante, y tendremos para cada incremento $dx$




$$dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy,$$

designando $y_1$ é $y_2$ $(y_1 > y_2)$ las ordenadas de los puntos de intersección de C con una paralela á $Oy$ cuya abscisa es $x$.

Sumando enseguida con relación á $x$, resultará

$$\int_a^A dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\,dy.$$

$a$ y A son dos constantes que representan las abscisas de las paralelas extremas á $Oy$ que encuentran á la curva.

Los límites $y_1$ é $y_2$ de la primera integral son funciones de $x$.

En el caso de ser $f(x, y) = 1$, el valor de la integral doble $\iint dxdy$ estará dado por

$$\int_a^A dx \int_{y_1}^{y_2} dy = \int_a^A (y_2 - y_1)\,dx.$$

79. INTEGRALES TRIPLES. De una suma doble se pasa á una suma triple. Supongamos el caso de tres variables $x$, $y$, $z$ que consideraremos como las coordenadas de un punto en el espacio, y tracemos tres sistemas de planos respectivamente paralelos á los de coordenadas que dividirá el espacio en una red de paralelepípedos rectángulos. A cada punto $(x_i, y_i, z_i)$ aso-

ciaremos el paralelepípedo cuyos lados son las expresiones positivas $(x_{i+1} - x_i)$, $(_{k+1} - y_k)$, $(z_{l+1} - z_l)$. Sean además V un volumen y $f(x, y, z)$ una función contínua de $x$, $y$, $z$. Si se forma la suma triple

$$\Sigma\Sigma\Sigma f(x_i, y_k, z_l)\,(x_{i+1} - x_i)\,(y_{k+1} - y_k)\,(z_{l+1} - z_t),$$

extendida á todos los puntos $(x_i, y_k, z_l)$ situados en el interior del volumen, se demostrará, como en el caso de dos dimensiones, que esta suma tiene un límite que es siempre el mismo, cualquiera que sea la ley según la cual los paralelepípedos tiendan á cero. Entre estos habrá algunos *irregulares*, es decir, que salen parcialmente del volumen V. La suma de estos paralelepípedos irregulares tiende hacia cero, como se puede demostrar repitiendo y extendiendo la demostración á que nos referimos, pues si suponemos la superficie S comprendida en el volumen limitado por dos superficies poliedrales variables, la una exterior y la otra interior á S, siendo superficies tales, que el volumen comprendido pueda hacerse inferior á una cantidad $\varepsilon$ previamente dada; en estas condiciones, los paralelepípedos irregulares, á partir de cierto momento, se hallarán todos comprendidos entre las superficies poliedrales y, por consiguiente, la suma de los volúmenes de estos paralelepípedos tiende hacia cero. El límite se representará por

$$\int\int\int f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \qquad (1)$$

y se dirá que esta integral triple se halla extendida al volumen V.

80. Integrales múltiples Cuando se pasa á considerar $n$ dimensiones, no es posible la representación geométrica, pero puede extenderse el razonamiento, considerando en una *multiplicidad* ó *variedad* de $n$ dimensiones el conjunto continuo de los valores de $n$ magnitudes $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ que satisfagan á una ó varias desigualdades de la forma

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) > 0, \qquad (2)$$

y supondremos que los valores de $x$ que satisfacen á estas desigualdades, permanecen inferiores en valor absoluto á un número fijo; por ejemplo, la variedad que satisface á la desigualdad

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 < R^2.$$

Sea ahora una sucesión de valores crecientes de $x_1$, de $x_2$, ..., de $x_n$. Formaremos la suma múltiple

$$\Sigma\Sigma \ldots\ldots \Sigma f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\, \Delta x_1 \Delta x_2 \ldots\ldots \Delta x_n,$$

expresando $\Delta x_1$, $\Delta x_2$, ..... los incrementos positivos de $x_1$, $x_2$, al pasar de un valor al siguiente, extendiéndose esta suma á los valores considerados de $x_1$, $x_2$, ....., $x_n$ que satisfacen á las desigualdades (2). Dicha suma tiene un límite que se representa por

$$\int\int \ldots\ldots \int f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots\ldots dx_n,$$

y es una integral múltiple de orden $n$, extendida al *continuum* definido por las desigualdades (2).

81. INTEGRALES DE DIFERENTES ÓRDENES. Se llama *integral primera* de una función $f(x)$ la función cuya derivada es $f(x)$, y de igual manera llamaremos *integral de orden n* de una función $f(x)$ una función $y$ tal, que se tenga

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x); \tag{1}$$

integrando una, dos, ....., $n$ veces, y designando por $x_0$, $C_0$, $C_1$, ....., $C_{n-1}$ constantes, se tendrá sucesivamente

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx + C_0,$$

$$\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} = \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx^2 + C_0 x + C_1$$

. . . . . .

$$y = \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} \ldots\ldots f(x)dx^n + C_0 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$+ \ldots\ldots + C_{n-2}x + C_{n-1}.$$

Como $C_0$, $C_1$, ..... son arbitrarias, llamando $P(x)$ á un polinomio arbitrario de grado $n - 1$, se podrá escribir

$$y = \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} \ldots\ldots f(x)dx^n + P(x). \qquad (2)$$

La solución más general de la ecuación (1) contiene pues el polinomio arbitrario $P(x)$ de grado $n$. *Las diversas soluciones de* (1) *sólo podrán diferir entre sí por un polinomio arbitrario de grado* n — 1.

Vamos ahora á demostrar que las integraciones sucesivas que concurren á formar la solución $y$, pueden sustituirse por una sola. En efecto, la integral de primer orden será, despreciando la constante,

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx; \qquad (3)$$

la de segundo orden, será

$$\int_{x_0}^{x} dx \left[ \int_{x_0}^{x} f(x)dx \right],$$

ó integrando por partes, y despreciando las constantes,

$$x \int_{x_0}^{x} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} xf(x)dx; \qquad (4)$$

la integral de tercer orden será

$$\int_{x_0}^{x} x \left[ \int_{x_0}^{x} f(x)dx \right] dx - \int_{x_0}^{x} dx \int xf(x)dx$$

ó, integrando por partes, y despreciando las constantes,

$$\frac{x^2}{2}\int_{x_0}^{x} f(x)dx - x\int_{x_0}^{x} xf(x)dx + \int_{x_0}^{x}\frac{x^2}{2}f(x,dx. \quad (5)$$

Los resultados (3), (4) y (5) pueden escribirse así:

$$\int_{x_0}^{x} f(z)dz$$

$$x\int_{x_0}^{x} f(z)dz - \int_{x_0}^{x} zf(z)\,dz \quad \text{ó} \quad \int_{x_0}^{x}\frac{x-z}{1}f(z)\,dz,$$

$$\frac{x^2}{2}\int_{x_0}^{x} f(z)dz - x\int_{x_0}^{x} zf(z)dz - \int_{x_0}^{x}\frac{z^2}{2}f(z)dz$$

$$\text{ó} \quad \int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^2}{1\,.\,2}f(z)dz. \quad (6)$$

Para la integral de orden $n$ se induce la fórmula

$$y = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}f(z)dz \quad (6)$$

Y en efecto, podemos verificar que esta función: 1.º tiene á $f(x)$ por derivada $n^{\text{sima}}$; 2.º que se anula, así como sus $n-1$ primeras derivadas para $x = x_0$, pues tenemos, aplicando las reglas de diferenciación bajo el signo $\int$,

$$\frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-2}}{(n-2)!}f(z)dz + \left[\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}f(x)\right]_{z=x};$$

pero el término en el que se hace $z = x$ es nulo; luego

$$\frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^{n-2}}{(n-2)!}f(z)dz$$

y sucesivamente

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-3}}{(n-3)!} f(z)\,dz,$$

. . . . . .

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} (x-z)^0 f(z)\,dz = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz.$$

Las $n-1$ primeras derivadas de $y$ son pues nulas para $x - x_0$, y diferenciando todavía, resulta

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

La fórmula (6) es una solución de (1), y se obtendrá, agregando un polinomio arbitrario $P(x)$ de grado $n-1$, la solución más general,

$$y = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f(z)\,dz + P(x). \qquad (7)$$

Una integral de orden $n$ se calcula pues por una integración única.

**82.** Fórmula de Taylor. En efecto, la solución más general $y$ de

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x) \qquad (1)$$

es $$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f(z)\,dz + P(x);$$

y designando por $f^n(x)$ la derivada $n^{\text{sima}}$ de $f(x)$, la solución más general de $\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$

será $$y = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(z)\,dz + P(x) \qquad (2)$$

Pero $f(x)$ es una solución de (1). Se tendrá pues,

$$f(x) = P(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(z)\,dz. \qquad (8)$$

Para determinar la forma de $P(x)$, observaremos que la integral así como sus $n - 1$ primeras derivadas son nulas para $x = x_0$; luego $f(x) - P(x)$ deberá ser nula, así como sus $n - 1$ primeras derivadas para $x = x_0$; luego

$$f(x_0) - P(x_0) = 0, \quad f'(x_0) - P'(x_0) = 0, \ldots\ldots$$
$$f^{n-1}(x_0) - P^{n-1}(x_0) = 0.$$

Se conoce $P(x)$ así como sus $n - 1$ primeras derivadas para $x = x_0$; luego

$$P(x) = P(x_0) + \frac{x - x_0}{1} P'(x_0) + \ldots\ldots$$

$$P(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0),$$

La ecuación (3) se reduce pues, á

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x)\,dz$$

que es la fórmula de Taylor, en la que el resto tiene la forma

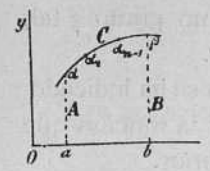
$$R = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - z)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(z)\,dz.$$

## § 3.º Integrales curvilíneas

**83.** Definición. Vamos á generalizar la noción de suma de elementos de la forma $f(x_i)\,dx_i$.

Consideremos una función $P(x, y)$ de las dos variables $x$ é $y$; y tomemos en el plano de las $x$, $y$ dos puntos $\alpha$ y $\beta$ cuyas coor-

denadas son $(a, A)$ y $(b, B)$, que uniremos por una curva C. Si dividimos el arco $\alpha\beta$ en cierto número de intervalos, mediante los puntos de subdivisión $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{n-1}$ cuyas coordenadas son respectivamente $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})$, formaremos la suma




$$P(a, A)(x_1 - a) + P(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + \ldots + P(x_{n-1}, y_{n-1})(b - x_{n-1}),$$

análoga á la que conduce á la integral definida, con la diferencia de que P depende además de $y$.

Cuando todos los intervalos $(\alpha_i, \alpha_{i+1})$ tienden hacia cero, su número aumenta indefinidamente, y esta suma tiende hacia un límite. Para demostrarlo, consideraremos el caso más sencillo en el que la curva $\alpha\beta$ es tal, que á cada valor de $x$ corresponde un sólo valor de $y$. Sea $y = \varphi(x)$ la ecuación de la curva $\alpha\beta$, y supongamos que $\varphi(x)$ es contínua desde $a$ hasta $b$. Haciendo $P[(x, \varphi x)] = F(x)$, la suma anterior se reduce á

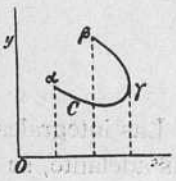
$$F(a)(x_1 - a) + F(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + F(x_{n-1})(b - x_{n-1});$$

luego tiene por límite la integral definida

$$\int_a^b P[(x, \varphi(x)]dx$$

que se representa por $\int_C P(x, y)dx$;

Este símbolo se dice que es *una integral curvilínea* tomada á lo largo de la curva C desde $\alpha$ hasla $\beta$. Para que esta integral tenga un sentido, no basta dar sus puntos extremos, es necesario indicar además el camino seguido entre $\alpha$ y $\beta$.




Puede suceder que la curva $\alpha\beta$ quede cortada por una paralela al eje $Oy$ en más de un punto. En este caso, dividire-

mos la curva en cierto número de partes para las que á cada valor de $x$ sólo corresponde un valor de $y$. Los extremos de estos arcos serán los puntos en que la tangente á la curva es paralela á $Oy$. En la figura, el arco $\alpha\beta$ contiene un punto $\gamma$ tal, que la tangente correspondiente es paralela á $Oy$.

La integral desde $\alpha$ hasta $\beta$ se calculará como se ha indicado, y lo mismo desde $\gamma$ hasta $\beta$; pero en este caso, la función que sustituye á P no es la misma que en el caso anterior.

Lo mismo se definirá la integral curvilínea

$$\int_C Q(x, y)dy,$$

tomada á lo largo de C, en la que la variable es $y$, la cual es el límite de

$$Q(a, A)\,(y_1 - A) + Q(x_1, y_1)\,(y_2 - y_1) + \ldots\ldots$$
$$\ldots + Q(x_{n-1}, y_{n-1})\,(B - y_{n-1}).$$

Por último podremos también considerar las coordenadas $x$ é $y$ en el caso de ser funciones de un parámetro $t$, de manera que

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t)$$

Estas dos funciones se considerarán como continuas cuando $t$ varía desde $t_0$ hasta $t_1$. Entonces la integral curvilínea $\int_C P\,dx$, se expresará por

$$\int_{t_0}^{t_1} P(f, \varphi)f'(t)dt.$$

Las integrales curvilíneas más importantes de que se tratará más adelante, se presentan bajo la forma

$$\int_C P(x, y)dx + Q(xy)dy \quad \text{ó} \quad \int_{t_0}^{t_1} [P(f, \varphi)f' + Q(f, \varphi)\varphi']dt.$$

*Ejemplo 1.º Integrar* $z^2 dz$ *á lo largo de una recta de longitud* 1 *que pase por el origen y que forme un ángulo de* 45° *con el eje de las* x.

Se tiene

$$z^2 dz = (x + yi)^2 (dx + i dy).$$

Las ecuaciones de la recta son

$$x = r\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = r\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Expresando $r$ la distancia al origen del punto $(x, y)$, se tendrá

$$dx = dr\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad dy = dr\frac{\sqrt{2}}{2};$$

luego

$$z^2 dz = \frac{r^2}{4}(1 + i)^3 dr\sqrt{2}.$$

La integral buscada será:

$$\frac{(1 + i)^3}{4}\sqrt{2}\int_0^1 r^2 dr = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)^3.$$

2.º *Integrar la función* $\sqrt{z}\,dz$ *á lo largo de la elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Las ecuaciones de la elipse pueden escribirse así:

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\,\text{sen}\,\varphi;$$

se tendrá pues,

$$\sqrt{z}\,dz = \sqrt{a\cos\varphi + ib\,\text{sen}\,\varphi}\,(ib\cos\varphi - a\,\text{sen}\,\varphi)d\varphi.$$

Al recorrer la elipse el punto $z$ ó $(x, y)$, $\varphi$ varía de o á $2\pi$; luego

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a\cos\varphi + ib\,\text{sen}\,\varphi}\,(ib\cos\varphi - a\,\text{sen}\,\varphi)d\varphi$$

3.º *Integrar* $dz$ *á lo largo de la circunferencia de radio* R *descrita desde el origen como centro.*

Tenemos $x = R\cos\theta$, $y = R\operatorname{sen}\theta$,

$$z = x + iy = R(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = Re^{\theta i}, \quad dz = iRe^{\theta i}\,d\theta.$$

Cuando el punto $z$ describe la circunferencia, $\theta$ varía desde o hasta $2\pi$; luego

$$\int_0^{2\pi} Rie^{\theta i}\,d\theta - iR\int_0^{2\pi} e^{\theta i}\,d\theta = 0.$$

Teorema. *Si* M *representa el módulo máximo de la función* f(z) *sobre el contorno* $z_0zZ$ *y* s *la longitud del mismo, la integral* $\int f z(dz)$ *tomada á lo largo de dicho contorno tendrá un módulo menor que* Ms.

En efecto, llamando $\sigma$ la longitud de la parte $z_0z$ del contorno, á partir de $z_0$, é I al valor de la integral, se tendrá

$$I = \int_0^s f(x+iy)\left(\frac{dx}{d\sigma} + i\,\frac{dy}{d\sigma}\right)d\sigma.$$

Y si R y $\omega$ son el módulo y el argumento de $f(x+iy)$, siendo I el módulo de $\dfrac{dx+idy}{d\sigma}$ y $\alpha$ su argumento, resultará

$$I = \int_0^s Re^{(\omega+\alpha)i}\,d\sigma.$$

Pero la integral I es el límite de una suma de términos de la forma $\Delta\sigma Re^{(\omega+\alpha)i}$, cuyo módulo es menor que la suma $\Sigma R\Delta\sigma$ de los módulos de los dos sumandos, y por consiguiente menor que $\Sigma M\Delta\sigma = M\Sigma\Delta\sigma = Ms$; luego el módulo del límite es $\leq Ms$.

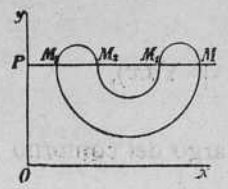
Definición. Se llama *contorno cerrado simple* una línea continua cerrada que no se atraviesa.

Teorema de Riemann. I. *La integral doble*

$$\int\int\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy$$

*tomada para todos los puntos de una área limitada por un contorno cerrado simple* C, *es igual á la integral*

$$\int (X\,dy + Y\,dx)$$




*tomada á lo largo del contorno* C, *considerado como descrito por un observador que deja siempre á su izquierda al área, es decir, marchando en sentido directo.*

En efecto, integrando primero el término $\int\int \frac{\partial X}{\partial x}\,dx dy$ con relación á $x$, dejando $y$ constante, tendremos por expresión la integral indefinida $\int X dy$.

Sea OP el valor constante dado á $y$ en la integración parcial efectuada respecto á $x$; y llamemos $X_k$ el valor de X en un punto K del plano. El valor de la integral definida que buscamos es la suma de los elementos, tales como $\frac{\partial X}{\partial x}\,dx dy$, obtenidos haciendo variar $x$ en el área C. Si entonces la recta $y = OP$ encuentra al contorno C en los puntos consecutivos M, $M_1$, $M_2$, $M_3$, ....., la integral buscada se obtendrá haciendo variar á $x$ desde $PM_3$ hasta $PM_2$, desde $PM_1$ hasta PM, ....., de modo que esta integral será

$$\int (X_M - X_{M_1} + X_{M_2} - X_{M_3} + .....)\,dy \quad \text{ó} \quad \int_C X dy;$$

porque para calcular $\int (X_M + .....) dy$, será preciso hacer variar á $y$ desde el valor que toma en el punto más bajo hasta el punto más elevado del contorno C, y entonces los puntos M, $M_1$, ..... se mueven en sentido directo, de manera que la integral $\int\int \frac{\partial X}{\partial x}\,dx\,dy$ es igual á la integral simple $\int X dy$ tomada á lo largo del contorno C en sentido directo.

Análogamente se ve que la integral $\int \frac{\partial Y}{\partial y}\,dx dy$, extendida á todos los puntos del área, comprendida en el interior del

contorno C, es igual á la integral simple $\int Y dx$ tomada á lo largo del contorno C, pero en sentido retrógrado, ó á la integral $\int -Y dx$ tomada en sentido directo; luego

$$\iint \left( \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy = \int (X dy + Y dx),$$

hallándose tomada en sentido directo á lo largo del contorno la integral del segundo miembro.

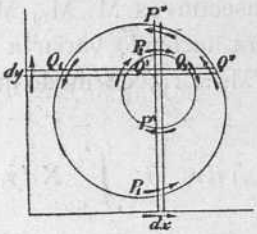
TEOREMA II. *La integral doble*

$$\iint \left( \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy$$

*tomada para todos los puntos de una área limitada por el contorno cerrado* C, *es igual á la integral simple*

$$\int (Y dy - X dx)$$

*tomada á lo largo del contorno en sentido directo.*




Este teorema se demuestra como el anterior.

Tambien pueden verse estas conclusiones en la figura adjunta, en la que la dirección de las flechas marca el sentido en que ha de tomarse la integral.

CONCLUSIÓN. Observaremos que *la condición necesaria y suficiente para que* $X dy + Y dx$ *sea una diferencial exacta es que* $\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}$ pues si por ejemplo,

$du = X dy + Y dx$, será $\frac{\partial u}{\partial x} = Y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = X$; luego $\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial x}$.

Si pues $X dy + Y dx$ es una diferencial exacta, $\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}$ es nulo; luego en virtud del primer teorema de Riemann: *la in-*

*tegral tomada á lo largo de un contorno cerrado* C *de una diferencial exacta es nula*, ó lo que es lo mismo: *Las integrales de una diferencial exacta tomadas á lo largo de dos contornos que tienen las mismas extremidades son iguales*, siempre que entre estos dos contornos la diferencial sea finita, bien determinada y continua, así como sus derivadas parciales.

Teorema de Cauchy. 1.° *Si entre dos contornos* $zz_0Z$ *y* $z_0z'Z$, *terminados en las mismas extremidades, que forman reunidos un contorno simple, no existe ningún punto para el que la función* f(z) *cese de ser sinéctica, las integrales de* f(z) *tomadas entre los mismos límites* $z_0$ *y* Z *á lo largo de los dos contornos* $z_0zZ$ *y* $z_0z'Z$ *son iguales.*

Para demostrar este teorema, demostraremos su equivalente, á saber:

*La integral de* f(z)dz, *tomada á lo largo de un contorno cerrado simple* C *en el interior del que* f(z) *permanece sinéctica, es nula.*

En efecto, si $X + Yi$ es una función sinéctica de $x + iy$ en el interior de C, se tiene que

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x},$$

las fórmulas del teorema de Riemann

$$\iint\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dxdy = \int(Xdy + Ydx)$$

$$\iint\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right) dxdy = \int(Ydy - Xdx)$$

se reducen á

$$0 = \int(Xdy + Ydx), \quad 0 = \int(Xdx - Ydy):$$

Sumándolas después de multiplicar la primera por $i$, resulta

$$0 = \int(X + iY)\,(dx + idy) \quad \text{ó} \quad 0 = \int(fx)dz,$$

que se expresa por el segundo enunciado. Si ahora observando

que á lo largo del contorno cerrado $z_0 z Z z' z_0$ la integral de $f(z)$ es nula, y se compone de la integral á lo largo de $z_0 z Z$ y de la integral á lo largo de $Z z' z_0$; por ser esta segunda igual y de signo contrario á la integral tomada á lo largo del contorno $z_0 z' Z$, queda demostrado el primer enunciado del teorema.

TEOREMA DE CAUCHY. *El valor de la integral* $\int f(z)dz$ *no cambia, si se deforma el contorno de la integración de una manera contínua, pero arbitraria, siempre que no pase por ningún punto en el que la función* f(z) *deje de ser sinéctica y no alteren los extremos de la integral.*

En efecto, consideremos un contorno de integración A cuyas extremidades son $z_0 y Z$ y el que se obtiene deformándolo, sin hacerle pasar por ningún punto en el que $f(z)$ cese de ser sinéctica. Sea B este segundo contorno. Si los dos contornos forman por su reunión un contorno simple, el teorema queda demostrado. Pero si se cortan en puntos $\zeta_1, \zeta_2, \ldots\ldots \zeta_n$, las integrales de $f(z)$ tomadas entre $z_0$ y $\zeta_1$, $\zeta_1$ y $\zeta_2$, ....., $\zeta_n$ y Z son iguales, según se ha demostrado; luego las integrales tomadas á lo largo de A y B son iguales.

TEOREMA. *Si la función* f(z) *es sinéctica en todos puntos de una área* C *limitada por un contorno cerrado simple, la integral*

$$V = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$$

*tomada á lo largo de un contorno contenido en el área* C, *es una función sinéctica del límite superior, cuya derivada es* f(z).

En efecto, esta integral es finita, por hallarse tomada á lo largo de un contorno finito, es monodroma porque, cualquiera que sea el camino interior á C para volverse de Z á Z, la integral adquiere un incremento nulo, que es el valor de $\int f(z)dz$ tomado á lo largo del contorno cerrado que pasa por Z y es interior á C. Pero la derivada de la integral con relación á Z es $f(Z)$; luego es única y está bien determinada, por lo que la integral es una función contínua de su límite superior, pues si se

hace $z = \varphi(\sigma) + i\psi(\sigma)$, siendo $\sigma$ el arco del contorno de integración, contado á partir de $z_0$, y $s$ es el arco total, tendremos

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \int_{0}^{s} f(\varphi + i\psi)\ (\varphi' + i\psi')d\sigma = V;$$

luego $\frac{dV}{dZ} = \frac{dV}{ds} : \frac{dZ}{ds}$ ó $\frac{dV}{dZ} = [f(\varphi + i\psi)\ (\varphi' + i\psi')]_{\sigma=s} : \frac{dZ}{ds}$ :

pero $\frac{dZ}{ds}$ es el valor de $\frac{dz}{d\sigma}$ ó $\varphi' + i\psi'$ para $\sigma = s$; luego

$$\frac{dV}{dZ} = [f\varphi + i\psi)]_{\sigma=s} = [f(z)]_{\sigma=s} = f(Z).$$

Corolario. *La integral de una función sinéctica es sinéctica.*

84. Hemos visto (53) que si P y Q satisfacen á las ecuaciones

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y} \tag{1}$$

la función $f(z) = P + Qi$ tiene una derivada única, llamándose según Cauchy, monógena. Se puede decir también que representa *una función analítica de* x + iy. Representando por $f'(z)$ dicha derivada, tendremos que

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} + i\frac{\partial Q}{\partial y}}{i}.$$

y que siendo $f(z)$ y $f'(x)$ continuas y hallándose bien determinadas para todo punto $(x, y)$ situado en una región del plano contenida en un *contorno simple*, se entiende por integral definida

$$\int_c f(z)dz,$$

tomada á lo largo de una curva situada en esta región y que va del punto $z_0$ al Z, la integral curvilínea tomada según esta curva

$$\int_c (P + iQ)\,(dx + idy),$$

es decir, $$\int_c (P\,dx - Q\,dy) + i(Q\,dx + P\,dy),$$

resultando, como se ha visto, el teorema de Cauchy: *La integral considerada es independiente del camino seguido para ir de* $z_0$ á Z. Observaremos ahora que de las ecuaciones (1) se deducen las siguientes:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial y\,\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y},$$

y por tanto, $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ y también $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$. (2)

Recíprocamente, sea una función $P(x, y)$ que satisfaga á la ecuación (2).

Se podrá determinar una función Q tal, que $P + iQ$ sea una función analítica de $x + iy$. La función Q está dada por la integral curvilínea

$$Q = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx + \frac{\partial P}{\partial x}\,dy,$$

integral en la que la condición de integrabilidad (*) se halla satisfecha, puesto que se supone verificada la ecuación (2). Este

---

(*) Para que la expresión $M dx + N dy$ sea la diferencial exacta de $du$ de una función $u$, es necesario y suficiente que se verifique la ecuación $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, en virtud de ser $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$.

resultado manifiesta que el estudio de las funciones de una variable compleja se reduce al de la ecuación

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0,$$

que se llama *ecuación de Laplace*, así como *función armónica* á toda función que verifica á esta ecuación.

De las propiedades de las funciones armónicas puede deducirse el teorema de Cauchy, ya demostrado: *Si una función analítica* f(z) *es uniforme y continua en el interior de un círculo cuyo centro sea el origen, se puede representar por una serie ordenada según las potencias enteras y crecientes de las variable* z *en el interior de dicho círculo.*

85. Factor de Darboux. Vamos á extender al caso de las funciones de variables imaginarias la fórmula demostrada para el caso de las funciones de variables reales,

$$\int_a^b F(x) f(x)\, dx = f(\xi) \int_a^b F(x)\, dx,$$

en la que $\xi$ expresa un número comprendido entre $a$ y $b$.

Consideremos en primer lugar la igualdad

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) f(\xi).$$

La extensión más natural consiste en escribir

$$\int_a^b [\varphi x) + i\psi(x)]\, dx = (b - a)\, [\varphi(\xi) + i\psi(\xi')],$$

siendo $\xi$ y $\xi'$ números comprendidos entre $a$ y $b$. Fundándonos en el teorema: *El módulo de una suma de cantidades imaginarias es menor que la suma de los módulos de estas cantidades*, consideremos la expresión

$$\text{mod}\,(a + a' + \ldots\ldots) = \theta\,(\text{mod}\, a + \text{mod}\, a' + \ldots\ldots),$$

hallándose $\theta$ comprendido entre 0 y 1. (*), y sea

$$J = \int_a^b f(x)dx, \quad \text{donde} \quad f(x) = \varphi(x) + i\psi(x),$$

hallándose expresada J por medio de la suma de los valores que toma su diferencial cuando $x$ varía por grados iguales á $dx$. Entonces, por el teorema precedente, se tendrá

$$|J| = \theta \Sigma |f(x)dx|,$$

ó, según la definición de la integral definida,

$$|J| = \theta \int_a^b |f(x)dx|,$$

es decir, expresando $\xi$ un número comprendido entre $a$ y $b$, y aplicando el teorema citado respecto á las funciones reales,

$$|J| = \theta(b - a)|f(\xi)|.$$

Sean $\xi$ y $\omega$ los argumentos de J y $f(\xi)$; tendremos

$$J = e^{i\xi}|J|, \quad f(\xi) = e^{i\omega}|f(\xi)|.$$

La fórmula precedente se reduce á

$$J = \theta e^{i(\xi - \omega)} f(\xi)\ (b - a),$$

El factor $\theta e^{i(\xi - \omega)}$ es una cantidad imaginaria cuyo módulo es $< 1$. Este factor, llamado por Hermite, factor de Darboux, lo designa por la letra $\lambda$, de manera que se tiene

$$J = \lambda(b - a)f(\xi).$$

**86.** Fórmula de Darboux. Supongamos ahora que la función bajo el signo $\int$ sea un producto de dos funciones reales $F(x)$ y $f(x)$, siendo una de ellas constantemente positiva entre los límites de la integración; se tendrá la igualdad

$$\int_a^b F(x)f(x)dx = f(\xi) \int_a^b F(x)dx,$$

hallándose $\xi$ comprendido entre $a$ y $b$.

---

(*) *Cours d' Hermite* p. 44.

Si expresamos por $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ cantidades reales y por A, B, C, ..... cantidades positivas, se demuestra esta fórmula observando que la fracción

$$\frac{A\alpha + B\beta + C\gamma + \ldots\ldots}{\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots}$$

es una media entre las cantidades $\alpha, \beta, \gamma$.

Supongamos que A, B, C, ..... sean los valores de $F(x)dx$ cuando $x$ crece desde $a$ hasta $b$, por grados iguales á $dx$, y que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots$ sean los valores correspondientes de $f(x)$. La fracción considerada se reducirá á

$$\int_a^b f(x)F(x)dx \ : \ \int_a^b F(x)dx.$$

M. Darboux ha generalizado esta fórmula, suponiendo $f(x) = \varphi(x) + i\psi(x)$. Sea

$$J = \int_a^b f(x)F(x)dx.$$

Se tendrá

$$|J| = \theta \int_a^b |f(x)F(x)dx|$$

y aplicando la fórmula correspondiente á las cantidades reales

$$|J| = \theta \left| f(\xi) \int_a^b F(x)dx \right|.$$

deduciéndose que

$$J = \lambda f(\xi) \int_a^b F(x)dx.$$

M. Darboux ha deducido, como sigue, de esta fórmula la extensión del teorema de Taylor á las funciones imaginarias.

Sea $t$ una variable auxiliar y $f(x)$ una función imaginaria

cuyas derivadas se representan por $f'(x)$, $f''(x)$, ..... Sea la integral

$$J = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n} (t-a)^{n+1} f^{n+1}[tx + (1-x)a]dx$$

en la que $(t-a)^{n+1} f^{n+1}[tx + (1-x)a]$ es la derivada de orden $n+1$, con relación á $x$, de $f[tx + (1-x)a]$.

Obtendremos el valor de dicha integral, mediante la fórmula

$$\int UV^{n+1}dx = \Theta - (-1)^n \int VU^{n+1}dx,$$

en la que V y U expresan dos funciones cualesquiera y $V^{n+1}$, $U^{n+1}$ sus derivadas de orden $n+1$ respecto á $x$, siendo

$$\Theta = UV^n - U'V^{n-1} + \ldots\ldots + (-1)^n U^n V.$$

En efecto, supongamos $U = \frac{(1-x)^n}{n!}$, entonces $U^{n+1} = 0$, y resulta:

$$\int \frac{(1-x)^n}{n!} V^{n+1}dx = V + \frac{1-x}{1} V' + \ldots + \frac{(1-x)^n}{n!} V^n.$$

Sea ahora $V = f[tx + (t-x)a]$,

y por consiguiente

$$V^i = (t-a)^i f^i[tx + (1-x)a].$$

Haciendo $x = 1$, $x = 0$ y restando, se obtiene el valor de la integral definida

$$J = f(t) - f(a) - \frac{t-a}{1} f'(a) \ldots\ldots \frac{(t-a)^n}{n!} f^n(a).$$

La integral considerada es pues el resto en la serie de Taylor, y la fórmula de M. Darboux lo da bajo la forma siguiente:

$$J = \frac{\lambda(1-\theta)^n}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n} f^{n+1}(\xi),$$

si se hace $\xi = \theta x + (1-\theta)a$, siendo $(0 < \theta < 1)$.

## § 4.° Cálculo de los residuos

87. Definiciones. Cauchy llamó *residuo* de una función monódroma y y monógena $f(z)$ para un valor de $c$ de $z$ que hace $f(x) = \infty$, á la integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz$$

tomada á lo largo de un contorno circular infinitamente pequeño, descrito desde el punto $c$ como centro y recorrido en sentido directo.

El *residuo integral* de una función, relativo á un contorno cerrado simple, es la suma de los residuos de esta función relativos á todos los infinitos situados en el interior del contorno.

Cuando la función de la que se ha de obtener el residuo es un producto $\varphi(z)\psi(z)$, y dicho residuo se ha de tomar con relación á un contorno que solo contiene los infinitos de $\varphi(z)$, se le representa por la notación

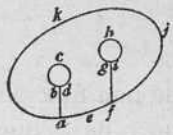
$$\mathfrak{R}((\varphi(z)))\psi(z).$$

Si, por ejemplo, se quiere representar el residuo de la función $f(z)$ relativo á un infinito $c$, y se sabe que $f(z)\ (z - c)$ no es ya nulo ni infinito para $z = c$, se podrá escribir así dicho residuo:

$$\mathfrak{R}\,\frac{(z - c)f(z)}{((z - c))}\,.$$

Teorema 1. *La integral de una función monódroma y monógena, tomada á lo largo de un contorno cerrado simple es igual al residuo integral de esta función relativo á dicho contorno, ó si se quiere, á la suma de los residuos de esta función relativos á cada uno de los infinitos contenidos en el contorno, multiplicada por i.*

Supongamos que haya dos infinitos $\alpha$ y $\beta$ de $f(z)$ en el interior del contorno cerrado simple *aefjka*. Describamos una circunferencia alrededor de cada infinito, *bcd* y *ghi*, y unamos un punto de cada una de estas circunferencias con otro punto del contorno dado; formaremos así un nuevo contorno *abcdaefghifjka* que constituye un contorno cerrado en el que no están contenidos los infinitos de $f(z)$; se tiene pues,




$$(abcdaefghifjka) = 0,$$

designando, para abreviar, por (ABC.....) la integral de $f(z)dz$ tomada á lo largo del contorno ABC..... Además, se tiene

$$(abcdaefghijka) = (ab) + (bcd) + (da) + (aef) + (fg) + (ghi) + (if) + (fjka).$$

pero $(ab)$ y $(da)$ son dos integrales cuyos límites se hallan invertidos, y lo mismo $(fg)$ é $(if)$, además $(abcdafghifjka) = 0$; luego

$$0 = (bcd) + (ghi) + (aef) + (fjka)$$
$$= (bcd) + (ghi) + (aefjka).$$

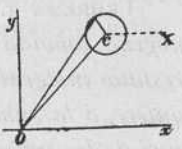
Pero $(bcd) = -(dcb)$, $(aefjka)$ y $(dcb)$ son las integrales de $f(z)dz$ á lo largo de dichos contornos; luego

$$(bcd) = -2\pi i \mathfrak{R}_\alpha f(z), \quad (ghi) = -2\pi i \mathfrak{R}_\beta f(z),$$

$$\int f(z)dz = 2\pi i \left[\mathfrak{R}_\alpha f(z) + \mathfrak{R}_\beta f(z)\right]$$

$$\int f(z)dz = 2\pi i \mathfrak{R} f(z).$$

Teorema II. *El residuo de la función* $\frac{f(z)}{z-c}$, *en la que* $f(z)$ *representa una función monódroma y monógena que no es ni nula ni infinita para* $z = c$, *es igual á* $f(c)$.



En efecto, por definición, se tiene

$$\Re \frac{f(z)}{z-c} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{z-c},$$

hallándose tomada la integral á lo largo de un contorno circular infinitamente pequeño descrito alrededor de $c$ como centro, y siendo $\varepsilon$ el radio y $zc$ un vector, tendremos $z = c + \overline{cz}$; y si $\theta$ es el ángulo de $\overline{cz}$ con el eje $Ox$, resulta

$$z = c + \varepsilon e^{\theta i}. \qquad dz = \varepsilon e^{\theta i} \cdot id\theta;$$

$$\int \frac{f(z)}{z-c}\,dz = \int_0^{2\pi} f\left(c + \varepsilon e^{\theta i}\right) id\theta.$$

Siendo $\varepsilon$ tan pequeño como se quiera, para $\varepsilon = 0$ se tendrá

$$\int \frac{f(z)}{z-c}\,dz = \int_0^{2\pi} if(c)d\theta = 2\pi i f(c)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{z-c} = \Re \frac{f(z)}{z-c} = f(c). \qquad (2)$$

Teorema III. *El residuo de la función* $\frac{f(z)}{(z-c)^m}$ *en la que* m *es un exponente entero, positivo, mayor que* 1, *y en la que* f(z) *es una función finita diferente de cero para* $z = c$, *está dado por la fórmula*

$$\Re \frac{f(z)}{(z-c)^m} = \frac{d^{m-1}f(c)}{dc^{m-1}} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)}$$

En efecto, diferenciando $m - 1$ veces con respecto á $c$, resulta

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{(z-c)^2} = 1 \cdot \Re \frac{f(z)}{(z-c)^2} = \frac{df(c)}{dc}$$

$$\frac{1 \cdot 2}{2\pi i}\int \frac{f(z)dz}{(z-c)^3} = 1 \cdot 2 \cdot \Re \frac{f(z)}{(z-c)^3} = \frac{d^2 f(c)}{dc^2}$$

. . . . . .

$$\frac{1 \cdot 2 \ldots\ldots (m-1)}{2\pi i} \int \frac{f(z)dz}{(z-c)^m}$$

$$= (m-1)!\, \Re \frac{f(z)}{(z-c)^m} = \frac{d^{m-1} f(c)}{dc^{m-1}}.$$

TEOREMA IV. *Si* f(z) *representa una función tal, que* zf(z) *es nula para* $z = \infty$, *la integral de* f(z) *tomada á lo largo de un contorno circular de radio infinito será nula, y se tendrá* $\Re f(z) = 0$.

En efecto, $\Re f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int f(z)dz.$

Para valuar esta integral, se hará

$$z = re^{\theta i}, \quad dz = re^{\theta i} i d\theta, \quad \text{de donde} \quad dz = iz d\theta;$$

y se obtendrá, haciendo $r = \infty$,

$$\Re f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z f(z) d\theta = 0;$$

porque $zf(z) = 0$ para $r = \infty$.

TEOREMA V. *Si el módulo de* z *es infinito y su argumento se halla comprendido entre* $\theta_0$ *y* $\theta_1$, *la integral* ∫f(z)dz, *tomada á lo largo de un arco de círculo de radio infinito, descrito desde el origen como centro y cuyos extremos tienen por ángulos polares* $\theta_0$ *y* $\theta_1$, *es nula.*

En efecto, el valor de la integral es

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(re^{\theta i}) re^{\theta i} i d\theta \quad \text{ó} \quad i \int_{\theta_0}^{\theta_1} f(z) z d\theta;$$

si pues, al variar θ desde $\theta_0$ hasta $\theta_1$, $zf(z)$ es igual á 0 para $r = \infty$, la integral será nula.

TEOREMA VI. *La diferencia de las integrales de* fz(dz) *tomadas entre los mismos límites, pero á lo largo de dos caminos diferentes, que no se cortan,* $z_0 z' Z$ y $z_0 z'' Z$, *es igual al residuo de* f(z) *relativo al contorno cerrado* $z_0 z' Z z'' z_0$, *limitado por los dos contornos, multiplicado por* 2πi.

En efecto, según el teorema I, se tiene

$$(z_0 z' Z z'' z_0) = (z_0 z' Z) + (Z z'' z_0) = 2\pi \Re i$$

ó

$$(z_0 z' Z) = (z_0 z'' Z) + 2\pi \Re i.$$

*Ejemplo 1.°* Sea

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z - 1)(z + 1)}.$$

Esta función se hace infinita para $z = 1$; pero el producto

$$(z - 1) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + 1} = F(z)$$

conserva un valor finito. El residuo de $f(z)$ correspondiente á $z = 1$ será pues $F(1) = \frac{1 + 1}{1 + 1} = 1$. El residuo de esta misma función, correspondiente á $z = -1$, se obtendrá formando el producto

$$(z + 1) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 1}; \text{ y para } z = -1, \frac{2}{-2} = -1.$$

*Ejemplo 2.°* $f(z) = \frac{1}{\cos z}$, que se hace infinita para $z = \frac{\pi}{2}$; pero el cociente $\frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z} = \frac{0}{0}$ para $z = \frac{\pi}{2}$, es 1, valor del residuo de $\frac{1}{\cos z}$ para $z = \frac{\pi}{2}$.

*Ejemplo 3.°* $f(z) = \frac{z^2 - 1}{(z + 1)^2}$. Se tiene

$$(z + 1)^2 f(z) = z^2 - 1 = F(z), \quad F'(z) = 2z, \quad F'(-1) = -2.$$

El residuo de dicha función, relativo á $x = -1$ es $-2$.

88. Aplicación. Vamos á obtener la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx = 2\pi i \Sigma \Re \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}}, \qquad m < n.$$

El residuo es relativo á todas las raices de $1 + x^{2n} = 0$, situadas sobre el eje de las $x$: $\alpha, \alpha^3, \ldots\ldots, \alpha^{2n-1}$, siendo

$$\alpha = \cos \frac{\pi}{2n} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n}.$$

El residuo de $\dfrac{x^{2m}}{1 + x^{2n}}$ con relación á $\alpha^{2k+1}$ es

$$\alpha^{(2k+1)2m} \lim \frac{x - \alpha^{2k+1}}{1 + x^{2n}} \quad \text{para} \quad x = \alpha^{2k+1}$$

ó

$$\frac{\alpha^{(2k+1)2m}}{2n\alpha^{(2k+1)(2n-1)}} = -\frac{\alpha^{(2k+1)(2m+1)}}{2n};$$

luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx = -\frac{2\pi i}{2n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \alpha^{(2k+1)(2m+1)}$$

$$= \frac{2\pi i}{2n} \frac{\alpha^{2m+n} + \alpha^{2m+1}}{\alpha^{2m+1} - 1}.$$

Y sustituyendo $\alpha$ por su valor,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m} dx}{1 + x^{2n}} = \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \dfrac{2m+1}{2n} \pi}$$

ó

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m} dx}{1 + x^{2n}} = \frac{\pi}{2n \operatorname{sen} \dfrac{m+1}{2n} \pi}.$$

Y en fin, haciendo $x^{2n} = z$ y $\dfrac{2m+1}{2n} = a$,

resulta

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}}{1 + z} dz = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

# LIBRO CUARTO

# FUNCIONES

## CAPÍTULO I

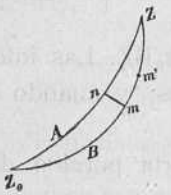
### Desarrollo en serie de las funciones sinécticas

#### § 1.° Teoremas de Cauchy y de Laurent

**89.** Desarrollo de una función sinéctica. Siendo $f(z)$ una función sinéctica en cierta porción del plano, consideremos la integral definida

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$$

cuando se va del punto $z_0$ al Z por dos caminos $z_0CZ$ y $z_0DC$ muy próximos el uno del otro y situados en la parte del plano de que se trata. A cada punto $m$ de la primera curva hagamos corresponder un punto $n$ de la segunda, de manera que el punto $z_0$ se corresponde á sí mismo, como el punto Z. Expresemos por $d$ un cambio infinitamente pequeño en una de las curvas y por $\delta$ el cambio de $m$ en $n$.




Si se va de un punto $m$ de la primera curva á un punto próximo $m'$ de la misma, la función experimenta un cambio expresado por $df(z)$; y siendo monódroma la función, adquirirá el mismo valor, cuando siga el camino $z_0 m n$ en vez del camino $z_0 Dn$. Resulta pues, que el valor de la función en el punto $n$, en la segunda integral, difiere del valor de la función

en el punto $m$ en la primera, en una cantidad igual á la variación de esta función correspondiente al cambio $mn$, que se designa con $\delta f(z)$.

Además, siendo la función monógena, es decir, admitiendo la misma derivada para los dos cambios $mm'$ y $mn$, se tiene

$$df(z) = f'(z)dz, \qquad \delta f(z) = f'(z)\delta z; \tag{1}$$

luego

$$\delta f(z) \,.\, dz = df(z) \,.\, \delta z.$$

Esto sentado, calculemos la variación de la integral definida, cuando se sustituye el camino $z_0$CZ por el infinitamente próximo $z_0$DZ. Se tiene

$$\delta \int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \int_{z_0}^{Z} [\delta f(z)dz + f(z) \,.\, d\delta]z,$$

pero, en virtud de (1), esta expresión se reduce á

$$\int_{z_0}^{Z} [df(z)_0 \,\delta z + f(z) \,.\, d\delta z],$$

ó

$$\int_{z_0}^{Z} d[f(z)\delta z] = [f(z)\delta z]_{z_0}^{Z}$$

Hallándose fijos los extremos, $\delta z_0$ y $\delta Z$ son nulas; luego la variación de la integral es nula.

Sean ahora dos líneas cualesquiera $z_0$AZ, $z_0$BZ. Las integrales á lo largo de los dos contornos son iguales; y cuando el punto vuelve á $z_0$, la integral es nula.

Cuando la función $f(z)$ es sinéctica en cierta porción del plano, la integral

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

es también una función sinéctica, pues desde luego es monódromo, porque todos los caminos que van de $z_0$ á $z$ conducen al

mismo valor. Además es monógena, porque llamando $F(z)$ á la integral, tenemos que

$$F(z+h) - F(z) = \int_z^{z+h} f(z)dz = [f(z) + \varepsilon]h,$$

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z) + \varepsilon, \quad \lim \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Así, $F(z)$ tiene una derivada única $f(z)$, cualquiera que sea el camino seguido.

Sea $f(z)$ una función sinéctica en el interior del círculo descrito desde el origen como centro con el radio R. Vamos á ver que es desarrollable en serie según las potencias de $z$ y convergente en dicho círculo.

Tenemos que la integral definida

$$\int \frac{f(z) - f(t)}{z - t} dz$$

obtenida recorriendo una circunferencia $r$ de radio mayor que la distancia $Ot$ de un punto $t$, situado en el interior del círculo R, al centro O, es nula; luego

$$\int \frac{f(t)dz}{z - t} = \int \frac{f(z)dz}{z - t};$$

hallándose tomadas las integrales á lo largo de la misma circunferencia, y

$$f(t) \int \frac{dz}{z - t} = \int \frac{f(z)}{z - t} dz.$$

No haciéndose infinita la función $\frac{1}{z - t}$ mas que para $z = t$, podremos sustituir á la circunferencia $r$, la circunferencia infinitamente pequeña de radio $\rho$; y tendremos

$$z - t = \rho e^{\theta i} \qquad dz = i\rho e^{\theta i} d\theta$$

$$i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i, \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{z - t} dz;$$

y desarrollando $\frac{1}{z-t}$, tendremos finalmente

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int \frac{f(z)}{z}\,dz + t\int \frac{f(z)}{z^2}\,dz + \ldots\ldots\right].$$

Llamando $u_0, u_1, \ldots\ldots$ á los coeficientes de la serie, resulta

$$f(t) = u_0 + u_1 t + u_2 t^2 + \ldots\ldots$$

Y si se hace $z = re^{\theta i}$, un coeficiente cualquiera está dado por la fórmula

$$u_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})\, e^{-n\theta i}\, d\theta,$$

en la que $r$ expresa un radio arbitrario menor que el radio R del círculo de convergencia.

Teorema de Cauchy. *Para que una función sea desarrollable en una serie ordenada según las potencias enteras, positivas y crecientes de la variable y convergente en un círculo descrito desde el origen como centro, es necesario y suficiente que la función sea sinéctica en el mismo círculo.*

Estas condiciones son necesarias, porque una serie ordenada según las potencias crecientes de la variable es sinéctica en el círculo de convergencia. Dichas condiciones son también suficientes, porque se ha demostrado que cuando una función es sinéctica en un círculo de radio R, es desarrollable en una serie ordenada según las potencias crecientes de la variable y convergente en el mismo círculo.

Establecida la posibilidad del desarrollo, vamos á determinar los coeficientes. Consideremos la serie

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots\ldots$$

Tendremos derivando,

$$f'(z) = u_1 + 2u_2 z = 3u_3 z^2, + \ldots, \quad f''(z) = 1 \cdot 2u_2 + 2 \cdot 3u_3 z + \ldots$$

Estas series son convergentes en el círculo R y continuas. Si se hace en ellas $z = 0$, se tiene

$$u_0 = f(0), \quad u_1 = f'(0), \quad 1 \cdot 2\, u_2 = f''(0), \ldots\ldots$$

y obtenemos la serie de Mac-Laurin

$$f(z) = f(0) + f'(0)\frac{z}{1} + f''(0)\frac{z^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots$$

en la que

$$f^n(0) = \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta i}\right) e^{-\theta n i}\, d\theta. \qquad (a)$$

Se obtiene inmediatamente la serie de Taylor:

*Si la función* f(z) *es sinéctica en un círculo descrito alrededor del punto* $z_0$ *como centro, se desarrolla en una serie ordenada según las potencias crecientes de* $z - z_0$, *convergente en el mismo círculo, y se tiene*

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)\frac{z - z_0}{1} + f''(z_0)\frac{(z - z_0)^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots;$$

ó $$f(z + h) = f(z) + f'(z)\frac{h}{1} + f''(z)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots,$$

y la fórmula (*a*) se reduce á

$$f^n(z) = \frac{n!}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f\left(z + re^{\theta i}\right) e^{-n\theta i}\, d\theta,$$

siendo $r$ un radio arbitrario menor que el radio del círculo de convergencia relativo al punto $z$.

90. Teorema de Laurent. *Si una función es sinéctica en la parte del plano comprendida entre dos círculos cuyo centro es el origen, es desarrollable en una doble serie ordenada según las potencias enteras positivas y negativas de la variable y convergente en esta parte del plano.*

Sea $t$ un punto situado en la corona circular comprendida entre las circunferencias de radios R y $R' < R$. Describamos una

circunferencia con un radio $r < R$ y otra con un radio $r' > R'$ pero menor que $Ot$. La integral

$$\int \frac{f(z) - f(t)}{z - t}\, dz,$$

obtenida recorriendo cada una de las dos circunferencias y en el mismo sentido, tiene el mismo valor; y tendremos

$$\int_r \frac{f(z) - f(t)}{z - t}\, dz = \int_{r'} \frac{f(z) - f(t)}{z - t}\, dz,$$

$$\int_r \frac{f(z)}{z-t}\, dz - f(t) \int_r \frac{dz}{z-t} = \int_{r'} \frac{f(z)}{z-t}\, dz - f(t) \int_{r'} \frac{dz}{z-t};$$

pero $\int_{r'} \frac{dz}{z-t} = 0$, porque la circunferencia de radio $r'$ no comprende al punto $z = t$ que hace infinita á la función bajo el signo $\int$. Además $\int_r \frac{dz}{z-t} = 2\pi i$; luego

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \int_r \frac{f(z)}{z-t}\, dz + \int_{r'} \frac{f(z)}{t-z}\, dz. \right.$$

Siendo en la primera integral el módulo de $z$ mayor que el de $t$, la cantidad $\frac{1}{t-z}$ puede ser desarrollada en serie convergente, según las potencias positivas crecientes de $\frac{t}{z}$. En la segunda, al contrario, por ser el módulo de $z$ menor que el de $t$, la cantidad $\frac{1}{t-z}$ se desarrollará en una serie convergente, según las potencias crecientes de $\frac{z}{t}$; luego

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_r \frac{f(z)}{z}\, dz + t \int_r \frac{f(z)}{z^2}\, dz + \ldots\ldots \\ \displaystyle + t^{-1} \int_r f(z)\, dz + t^{-2} \int_{r'} f(z) z\, dz + \ldots\ldots \end{array} \right.$$

Las integrales definidas tienen valores finitos y determinados. Se las puede tomar á lo largo de una circunferencia arbitraria comprendida entre las circunferencias R y R', girando de derecha á izquierda. Si pues se hace $z = re^{\theta i}$, y se sustituye $t$ por $z$, se tendrá la doble serie

$$f(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots\ldots + u_{-1} z^{-1} + u_{-2} z^{-2} + \ldots\ldots$$

en la cual

$$u_n = \frac{r^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\theta r})\, e^{-n\theta i}\, d\theta,$$

$$u_n = \frac{r^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{\theta i})\, e^{n\theta i}\, dz.$$

Extensión. En el caso de ser $f(x, y, z)$, haciendo

$$u = x + th, \quad v = y + tk, \quad w = z + tl,$$

se obtendrá

$$f(x + h,\ y + k,\ z + l) = f(x, y, z)$$

$$+ \sum_1^{\infty} \frac{(h\mathrm{D}_x f + k\mathrm{D}_y f + l\mathrm{D}_z f)^n}{n!}$$

$$\mathrm{D}_{xyz}^{n+n'+n''} f(x, y, z) = \frac{n!\ n'!\ n''!}{r^n\, r'^{n'}\, r''^{n''}} \frac{1}{(2\pi)^3}$$

$$\times \int\int\int_0^{2\pi} f(x + re^{\theta i},\ y + r' e^{\theta' i},\ \ldots)\, e^{-n\theta i - \cdots}\, d\theta\, d\theta'\, d\theta''.$$

## § 2.° Aplicación á la ecuación de Lagrange

**91.** Determinación de la raíz. La serie de Lagrange tiene por objeto obtener una de las raíces de una ecuación de la forma, $z - a - \alpha f(z) = 0$, pudiendo ser cualquiera la función $f(z)$, con la condición de permanecer holoforma en una parte del

plano. Una cuestión fundamental de Astronomía es la resolución de la célebre ecuación de Kepler $u = nt + e \operatorname{sen} u$, pues las coordenadas de un planeta no se expresan en función uniforme del tiempo, pero se las puede obtener en función uniforme de la anomalía excéntrica $u$, que está dada en función del tiempo por la relación precedente, en la que $n$ es la media del movimiento. Dicha ecuación es un caso particular de la ecuación

$$z = a + \alpha f(z).$$

Aunque hemos demostrado que esta ecuación tiene una sola raíz desarrollable en serie (33), vamos á demostrarlo, apoyándonos en el siguiente

LEMA (*). *Si* $F = 0$ *y* $\Phi = 0$ *son dos funciones holoformas, las ecuaciones*

$$F = 0, \qquad F + \Phi = 0$$

*tienen el mismo número de raíces comprendidas en un contorno cerrado* S, *si se tiene constantemente á lo largo de este contorno* $\left|\frac{\Phi}{F}\right| > 1$. *Los números* $\mu$ *y* $\mu'$ *de las raíces de estas ecuaciones están expresados por las fórmulas*

$$\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(S)} d[\log(F(z))], \quad \mu_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(S)} d[\log(F(z)) + \Phi(z)]$$

*y obtendremos*

$$\mu_1 - \mu = \frac{1}{2\pi i}\int_{(S)} d\left[\log\left(1 + \frac{\Phi}{F}\right)\right].$$

Ahora bien, á lo largo del contorno de integración, el módulo de $\frac{\Phi}{F}$ es, por hipótesis, menor que 1: luego el valor de $\log\left(1 + \frac{\Phi}{F}\right)$ es el mismo á la llegada que á la partida, y la integral que da $\mu_1 - \mu$ es nula; luego $\mu_1 = \mu$.

Apliquemos esto á la ecuación: $z - a - \alpha f(z) = 0$.

(*) *Cours d' Hermite* p. 130.

Suponiendo que $a$ es la afija de un punto situado en el interior del contorno S, y que $\alpha$ se halle determinado por la condición de que se tenga en todos los puntos del contorno $\left|\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right| < 1$, entonces la ecuación propuesta tiene igual número de raíces que la ecuación $z - a = 0$, es decir, una sola.

**92.** DESARROLLO EN SERIE. Acabamos de ver que la ecuación

$$F(z) = z - a - \alpha f(z) = 0$$

tiene una sola raíz en el interior del contorno S, cuando se verifica á lo largo de este contorno la condición $\left|\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right| < 1$. En vez de expresar esta raíz $\zeta$ por medio de una integral curvilínea efectuada á lo largo de S, vamos á desarrollarla en serie convergente, lo que es ventajoso para el cálculo numérico.

Sea $\pi(z)$ una función holomorfa cualquiera de $z$. El residuo de la función $\frac{\pi(z)}{F(z)}$ relativo á la raíz $\zeta$ del denominador tiene por valor $\frac{\pi(\zeta)}{F'(\zeta)}$, y por consiguiente:

$$\frac{\pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(S)} \frac{\pi(z)dz}{F(z)}.$$

Para desarrollar en serie, partiremos de la identidad:

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{1}{z-a-\alpha f(z)} = \frac{1}{z-a} + \alpha\frac{f(z)}{(z-a)^2} + \ldots\ldots$$

$$+ \alpha^n \frac{F^n(z)}{(z-a)^n F(z)}.$$

Sea además

$$J_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{(S)} \frac{f^k(z)\pi(z)}{(z-a)^{k+1}}dz$$

y

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(S)} \frac{\alpha^n F^n(z)\pi(z)}{(z-a)^n F(z)}.$$

Multiplicando los dos miembros por $\pi(z)dz$ é integrando á lo largo del contorno, obtendremos:

$$\frac{\pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = J_0 + \alpha J_1 + \ldots\ldots + \alpha^{n-1} J_{n-1} + R_n.$$

Sean ahora $\sigma$ el perímetro de la curva S, $z_0$ la afija de uno de sus puntos y $\lambda$ el factor de Darboux, podremos escribir:

$$R_n = \frac{\lambda\sigma}{2\pi} \frac{\pi(z_0)}{F(z_0)} \left[\frac{\alpha f(z_0)}{z_0 - a}\right]^n.$$

Mas por verificarse á lo largo del contorno la condición $\operatorname{mod}\left[\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right] < 1$, el resto $R_n$ tiende hacia cero cuando $n$ aumenta más allá de todo límite, y obtendremos

$$\frac{\pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = J_0 + \alpha J_1 + \ldots\ldots + \alpha^n J_n + \ldots\ldots,$$

siendo convergente la serie del segundo miembro. Es fácil de obtener la expresión de los coeficientes J. Hemos visto, en efecto, que se tiene generalmente

$$\frac{1}{1\ 2\ \ldots\ldots\ n} D^n \Phi(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(S)} \frac{\Phi(z)dz}{(z-a)^{n+1}};$$

luego, haciendo $\Phi(z) = f(z)\pi(z)$,

$$J_k = \frac{D_k^a[f^k(a)\pi(a)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots k};$$

y obtenemos la fórmula

$$\frac{\pi(\zeta)}{F'(\zeta)} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} D_a^n[f^n(a)\pi(a)],$$

que es una primera forma analítica de la serie de Lagrange. Hagamos

$$\pi(z) = \Phi(z)F'(z) = \Phi(z)[1 - \alpha f'(a)],$$

que puede escribirse todavía, aislando el primer término de la primera parte correspondiente á $n = 0$, y escribiendo, por brevedad, $\Phi$ y $f$ en vez de $\Phi(a)$ y $f(a)$,

$$\Phi(\zeta) = \Phi + \Sigma \frac{\alpha^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} D_a^{n+1}(\Phi f^{n+1})$$

$$- \Sigma \frac{\alpha^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots n} D_a^n(\Phi f^n f') = \Phi + \Sigma \frac{\alpha^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} D_a^n[(\Phi f^{n+1})' - (n+1)\Phi f^n f'],$$

que se reduce á

$$\Phi(\zeta) = \Phi(a) + \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} D_a^n[\Phi'(a) f^{n+1}(a)],$$

que es la forma analítica más empleada de la serie de Lagrange para las aplicaciones.

Haciendo $nt = a$ en la ecuación de Kepler $z = nt + e \operatorname{sen} z$, y empleando para efectuar las diferenciaciones la expresión de una potencia cualquiera de sen $a$ en función lineal de los senos ó cosenos de los arcos múltiplos, se obtiene:

$$z = a + e \operatorname{sen} a + \frac{e^2}{2 \cdot 2} 2 \operatorname{sen} 2a + \frac{e^3}{2 \cdot 3 \cdot 2^2}(3^2 \operatorname{sen} 3a - 3 \operatorname{sen} a)$$

$$+ \frac{e^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^3}(4^3 \operatorname{sen} 4a - 4 \cdot 2^3 \operatorname{sen} 2a)$$

$$+ \frac{e^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^4}\left(5^4 \operatorname{sen} 5a - 5 \cdot 3^4 \operatorname{sen} 3a + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \operatorname{sen} a\right) + \ldots$$

$$\cos z = \cos a + \frac{e}{2}(\cos 2a - 1) + \frac{e^2}{2 \cdot 2^2}(3 \cos 3a - 3 \cos a)$$

$$+ \frac{e^3}{2 \cdot 3 \cdot 2^3}(4^2 \cos 4a - 4 \cdot 2^2 \cos 2a)$$

$$+ \frac{e^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2^4}\left(5^3 \cos 5a - 5 \cdot 3^3 \cos 3a + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cos a\right)$$

$$+ \frac{e^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2^5}\left(6^4 \cos 6a - 6 \cdot 4^4 \cos 4a + \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} 2^4 \cos 2a\right) + \ldots$$

Para terminar estas consideraciones acerca de la aplicación de la fórmula de Lagrange á la célebre ecuación que relaciona la anomalía excéntrica $z$ á la anomalía media $x$, $z = x + e \operatorname{sen} z$, en la que se supone $e < 0{,}6627434.....$ observaremos que siendo la solución

$$z = x + e \operatorname{sen} x + \frac{e^2}{1 \cdot 2} \operatorname{sen} 2x + \ldots + \frac{e^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \operatorname{sen}^n x + \ldots$$

el módulo de $z - x$ es menor que 1,19867864. El radio vector del planeta, $1 - e \cos z$, se obtiene aplicando la fórmula

$$\varphi(a) = \varphi(x) + \alpha\psi(x)\varphi'(x) + \ldots + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left\{\varphi'(x)[\psi(x)]^n\right\} + \ldots$$

obteniéndose

$$1 - e \cos z = 1 - e \cos x + \frac{e^2}{1} \operatorname{sen}^2 x + \ldots..$$

$$+ \frac{e^n}{(n-1)!} \frac{d^{n-2} \operatorname{sen}^n x}{dx^{n-2}} + \ldots.. \text{ (*)}$$

**93.** APLICACIÓN Á LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE. Cuestiones importantes de Mecánica celeste conducen á obtener el desarrollo en serie ordenada según las potencias de $\alpha$ de la cantidad $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$, siendo como sabemos los coeficientes $X_n$ de las potencias de $\alpha$ los polinomios de Legendre (71), de los cuales se pasa á las funciones llamadas de Laplace, sustituyendo la variable $x$ por la expresión: $\cos\psi \cos\psi + \cos A \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi$, que representa el tercer lado de un triángulo esférico.

Jacobi dió otro origen á los polinomios de Legendre, resultando sus propiedades inmediatamente de la forma de su expresión.

Hagamos $f(z) = \frac{z^2 - 1}{2}$ en la ecuación $z = a + \alpha f(z)$.

(*) Rouché et Levi *Analyse infinitesimal*, t. II, p. 190.

Obtendremos una ecuación de segundo grado $\alpha z^2 - 2z + 2a - \alpha = 0$. cuyas raíces son $\frac{1 \pm \sqrt{1 - 2a^2 + a\alpha}}{\alpha}$.

Debiendo reducirse á $a$ para $\alpha = 0$ la que es desarrollable por la serie de Lagrange, será

$$\zeta = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a\alpha + \alpha^2}}{\alpha}$$

Esto sentado, hagamos en la primera forma de la serie de Lagrange $\pi(z) = 1$. Resultará entonces, por ser $f'(z) = z$:

$$\frac{1}{1 - \alpha\zeta} = \Sigma \frac{\alpha^n}{2^n . 1 . 2 \ldots . n} D^n(\alpha^2 - 1)^n,$$

es decir,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2a\alpha + \alpha^2}} = \Sigma \frac{\alpha^n}{2 . 4 . 6 \ldots . 2n} D^n(a^2 - 1)^n$$

La expresión general de los polinomios de Legendre es pues,

$$X_n = \frac{1}{2 . 4 . 6 \ldots . 2n} D^n(x^2 - 1)^n.$$

*Consecuencias.* 1.ª En primer lugar, la ecuación $X_n = 0$ tiene reales todas sus raíces, que son además distintas y se hallan comprendidas entre $-1$ y $+1$, pues la ecuación $(x^2 - 1)^n = 0$ tiene por raíces $+1$ y $-1$, cada una con el orden de multiplicidad $n$; luego la derivada $D_x(x^2 - 1)^n = 0$ admite á $-1$ y $+1$ como raíces con el grado $n - 1$ de multiplicidad y además, en virtud del teorema de Rolle, una raíz real $x_0$ comprendida entre $-1$ y $+1$. Continuando así, se demuestra la proposición.

2.ª La función $X_n$ satisface á la ecuación diferencial de segundo orden

$$(x^2 - 1)\frac{d^2X_n}{dx^2} + 2x\frac{dX_n}{dx} - n(n + 1)X_n = 0, \qquad (1)$$

pues haciendo $y = (x^2 - 1)^n$, resulta

$$y' = 2nx(x^2 - 1)^{n-1}, \quad 2nxy(x^2 - 1)y' = 0.$$

Derivando $n + 1$ veces seguidas, tenemos

$$n(n + 1)y^{(n)} - 2xy^{(n+1)} - (x^2 - 1)y^{(n+2)} = 0,$$

y multiplicando por $2^n \cdot n!$ resulta la ecuación (1).

## § 3.° Propiedades de las funciones

**94.** Teorema I. *Si una función es sinéctica en cierta parte del plano, todas sus derivadas son también funciones sinécticas en la misma extensión.*

Sea $z_0$ un punto cualquiera tomado en esta parte del plano, puesto que la función $f(z)$ es desarrollable en una serie convergente

$$f(z) = u_0 + u_1(z - z_0) + u_2(z - z_0)^2 + \ldots\ldots$$

en un círculo de centro $z_0$ con un radio conveniente, se deduce que

$$f'(z) = u_1 + 2u_2(z - z_0) + 3u_3(z - z_0)^2 + \ldots\ldots$$

Siendo convergente esta serie en el mismo círculo, la función $f'(z)$ es sinéctica en el mismo; y, como el punto $z_0$ puede tomarse arbitrariamente en la parte del plano, para la que $f(z)$ es sinéctica, la función $f'(z)$ tiene la misma propiedad para esta extensión. Lo mismo se deduce para las demás derivadas.

Corolario I. *Una función sinéctica no puede ser constante en una parte finita del plano por pequeña que sea.*

Sea $z_0$ un punto de dicha parte del plano. Por ser constante la función en la proximidad de $z_0$, todas sus derivadas son nulas en este punto, y la serie de Taylor se reduce á

$$f(z) = f(z_0);$$

luego la función es constante en el círculo de convergencia descrito desde $z_0$ como centro; y continuando el razonamiento, se verá que la función es constante en toda la extensión del plano para el que es sinéctica. Lo mismo se concluiría si la función fuese constante á lo largo de una línea finita por pequeña que fuera.

Corolario II. *Una función sinéctica no puede tener nulas todas sus derivadas en un punto*, pues si esto sucediera sería constante.

Teorema II. *Si una función sinéctica en cierta parte del plano se anula para un valor* $z = a$ *comprendido en esta región, es divisible por* $(z - a)^n$, *siendo* n *un número entero finito.*

En efecto, desarrollando según la serie de Taylor, se tiene

$$f(z) = f'(a)\frac{z-a}{1} + f''(a)\frac{(z-a)^2}{1\,.\,2} + \ldots\ldots$$

luego:

$$\frac{f(z)}{z-a} = f'(a) + f^n\frac{(z-a)}{1\,.\,2} + \ldots\ldots$$

Siendo el cociente $\frac{f(z)}{z-a}$ desarrollable en serie convergente en un círculo descrito desde $a$ como centro, es una función sinéctica en la proximidad de $a$, y por consiguiente en la misma región del plano que la función propuesta. Sea $\varphi(z)$ esta función. Tendremos

$$f(z) = (z-a)\varphi(z).$$

Si la cantidad $a$ no anula á $f'(z)$, $a$ es una raíz simple de la ecuación $f(z) = 0$. Pero si se anulan por $a$ las $(n-1)$ primeras derivadas, tendremos

$$f(z) = (z-a)^n\left[\frac{f^n(a)}{n!} + \frac{f^{n+1}(a)}{(n+1)!}(z-a)\right] + \ldots\ldots,$$

y el cociente $\frac{f(z)}{(z-a)^n}$ es una función sinéctica en la misma re-

gión del plano que la función $f(z)$. Si se representa por $\varphi(z)$ el cociente, se tiene

$$f(z) = (z - a)^n \varphi(z).$$

Siendo finito el número de las derivadas que se anulan para $z = a$, toda raíz es de un grado entero y finito de multiplicidad.

*Escolio.* En una parte finita del plano, la ecuación $f(z) = 0$ sólo admite un número finito de raíces; porque si admitiese una infinidad de ellas, los puntos correspondientes estarían infinitamente próximos, y la función sería nula en ellos, lo que es imposible. Siendo $a, b, c, \ldots\ldots, l$ las raíces, la función $f(z)$ se escribirá así:

$$f(z) = \left(1 - \frac{z}{a}\right)\left(1 - \frac{z}{b}\right)\left(1 - \frac{z}{c}\right) \ldots\ldots \left(1 - \frac{z}{l}\right) \varphi(z),$$

siendo $\varphi(z)$ una función sinéctica que no se anula en la región considerada del plano.

TEOREMA III. *Si una función* f(z) *monódroma y monógena, se hace infinita para* z = a, *cualquiera que sea el camino seguido para llegar á este punto, se podrá escribir bajo la forma*

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + \psi(z),$$

*siendo* $\psi(z)$ *monódroma y monógena, y no haciéndose infinita para* $z = a$.

En efecto, haciéndose nula la función $\frac{1}{f(z)}$ para $z = a$, y permaneciendo finita y continua, se tiene que

$$\frac{1}{f(z)} = (z - a)^n \varphi(z); \quad \text{luego} \quad f(z) = \frac{\frac{1}{\varphi(z)}}{(z-a)^n} = \frac{\gamma(z)}{(z-a)^n}.$$

El valor $a$ es un infinito de grado finito y entero $n$ de multiplicidad.

Si se desarrolla la función $\chi(z)$ en serie según las potencias crecientes de $(z - a)$, la función propuesta se escribirá así:

$$f(z) = \frac{A_0}{(z-a)^n} + \frac{A_1}{(z-a)^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{z-a} + \psi(z)$$

según el enunciado. Para que la función tenga estas propiedades, es necesario que se haga infinita para $z = a$, cualquiera que sea el camino recorrido para llegar á dicho punto, lo que no se verifica para la función $e^{\frac{1}{z}}$, que cuando $z = 0$ se hace nula, infinita ó indeterminada, según el camino recorrido.

Teorema IV. *Una función monódroma y monógena en toda la extensión del plano, se hace necesariamente infinita para un valor finito ó infinito de la variable.*

En efecto, llamando M al máximo del módulo de la función $f(z)$ en el círculo de radio $r$ descrito alrededor del origen, si en

$$f^n(0) = \frac{n!}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f\left(re^{\theta i}\right) e^{-n\theta i} d\theta,$$

sustituimos cada elemento de la integral definida por su módulo ó por un módulo mayor $M d\theta$, es evidente que el módulo de la integral definida será menor que $\int_0^{2\pi} M d\theta$ ó que $2\pi M$, y tendremos

$$\text{mod } f^n(0) < n! \frac{M}{r^n}.$$

Supongamos ahora que $f(z)$ no se hace infinita para ningún valor finito ni infinito de $z$, es decir, que el módulo de la función permanezca menor que una cantidad finita M en toda la extensión del plano. En este caso se podría tomar el radio $r$ infinitamente grande, y se tendría, en virtud de la fórmula precedente, $f^n(0) = 0$; y teniendo la función todas sus derivadas nulas, sería una constante. Si pues, la función no es una constante,

debe hacerse infinita, sea para un valor finito, sea para un valor infinito de $z$.

COROLARIO I. *Una función monódroma y monógena en toda la extensión del plano, se hace necesariamente nula para un valor finito ó infinito de la variable*, pues si la función $f(z)$ no se hiciese nula, la función $\frac{1}{f(z)}$ no se haría infinita, lo que es imposible.

Puede suceder que el mismo valor de $z$ haga á una función, á la vez, nula é infinita. Así, la función $e^{\frac{1}{z}}$ se hace infinita cuando el punto $z$ viene al origen por un camino situado á la derecha del eje de las $y$, haciéndose nula cuando viene por un camino situado á la izquierda del eje de las $y$. De igual manera $e^z$ se hace nula ó infinita para valores infinitos de $z$.

COROLARIO II. *Una función monódroma y monógena en toda la extensión del plano, adquiere todos los valores posibles.*

La función $f(z)$ adquiere necesariamente el valor A, porque la función $f(z) - A$ toma el valor cero.

TEOREMA V. *Dos funciones monódromas y monógenas que admiten los mismos ceros y los mismos infinitos, cada uno del mismo grado de multiplicidad, son iguales, salvo un factor constante.*

En efecto, sean $f(z)$ y $F(z)$ las dos funciones propuestas. No haciéndose el cociente $\frac{F(z)}{f(z)}$ de estas dos funciones ni infinito ni nulo, es una constante A; y tendremos $F(z) = Af(z)$.

*Escolio.* Una función queda completamente definida salvo un factor constante, cuando se conocen sus ceros y sus infinitos, distinguiéndose las funciones unas de otras por la distribución de sus ceros y de sus infinitos en el plano.

TEOREMA VI. *Toda función monódroma y monógena, que no se hace infinita más que para* $z = \infty$, *sin hacerse indeterminada, es una función entera.*

Sea $u = f(z)$ la función propuesta, y hagamos $z = \frac{1}{t}$; tendremos $u = f\left(\frac{1}{t}\right)$ ó $u = \varphi(t)$, que se hace infinita para $t = 0$, sin hacerse indeterminada; luego, en virtud del teorema III, podrá escribirse bajo la forma

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{t^n} + \frac{A_1}{t^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{t} + \psi(t).$$

No haciéndose $\psi(t)$ infinita para ningún valor de $t$, es una constante $A_n$; luego

$$\varphi(t) = \frac{A_0}{t^n} + \frac{A_1}{t^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{n-1}}{t} + A_n$$

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + A_{n-1} z + A_n;$$

de modo que $f(z)$ es una función entera de grado $n$.

Teorema VII. *Toda función monódroma y monógena que sólo admite un número limitado de infinitos, es una fracción racional.*

Consideremos desde luego la función $f(z)$, que sólo admite $n$ infinitos simples $a, b, c, \ldots\ldots, l$, y que toma un valor finito y determinado P para $z = \infty$.

Haciéndose infinita la función para $z = a$, tendremos

$$f(z) = \frac{A}{z - a} + \varphi(z),$$

no haciéndose ya infinita $\varphi(z)$ para $z = a$. Haciéndose $\varphi(z)$ infinita para $z = b$, tendremos

$$\varphi(z) = \frac{B}{z - b} + \chi(z)$$

Y continuando de esta manera, llegaremos á una función que no tendrá infinito, que será por consiguiente una constante P, y resultará

$$u = f(z) = \frac{A}{z - a} + \frac{B}{z - b} + \ldots\ldots + \frac{L}{z - l} + P.$$

Cuando los infinitos sean múltiples, tendremos

$$u = \frac{A_0}{(z-a)^p} + \frac{A_1}{(z-a)^{p-1}} + \ldots\ldots + \frac{A_{p-1}}{z-a}$$

$$+ \frac{B_0}{(z-b)^q} + \frac{B_1}{(z-b)^{q-1}} + \ldots\ldots + \varphi(z),$$

haciéndose $\varphi(z)$ infinita, tan sólo para $z = \infty$, por lo que será entera.

Si se reducen las fracciones simples al mismo denominador, la función $u$ será una fracción racional cuyo término más elevado es del grado $n$, si $n$ es el número de infinitos. A cada valor de $u$ corresponden $n$ valores de $z$, es decir, que la función adquiere el mismo valor en $n$ puntos del plano. Esta función admite también $n$ ceros. Así, el número de ceros es también igual al de los infinitos.

TEOREMA VIII. *Toda función monógena que admite* m *valores para cada valor de* z, *se hace necesariamente infinita.*

Sean $u_0, u_1, \ldots\ldots, u_{m-1}$ los $m$ valores que adquiere la función $u$ para un mismo valor de $z$; y consideremos una función simétrica de estas $m$ cantidades, por ejemplo su suma

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_{m-1}.$$

Cuando la variable $z$ describe un contorno cerrado, estos valores de la función se permutan entre sí, según cierta ley; pero la función simétrica no cambia, y por consiguiente es monódroma; y como debe hacerse infinita, es necesario que uno de los términos de la suma se haga infinito.

TEOREMA IX. *Toda función monógena que tiene* m *valores para cada valor de* z *y que sólo admite un número limitado de infinitos es raíz de una ecuación algebráica.*

Consideremos las funciones simétricas

$$u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_{m-1}, \quad u_0u_1 + u_1u_2 + \ldots\ldots,$$

$$u_0u_1u_2 + \ldots\ldots, \quad \ldots\ldots, u_0u_1u_2 \ldots\ldots u_{m-1}.$$

Cada una de estas funciones simétricas es una fracción racional, porque es monódroma y no tiene más que un número limitado de infinitos. Luego la función $u$ satisface á una ecuación algebráica de grado $m$, cuyos coeficientes son fracciones racionales en $z$. Además es irreducible, porque si $u$ satisficiese á una ecuación de grado menor, no tendría $m$ valores.

Corolario. *Una función definida por una ecuación algebráica irreducible de grado* m *toma* m *valores para cada valor de la variable.*

Si partimos de $z = z_0$ con cierto valor inicial $u = u_0$, y se sigue un camino cualquiera del plano, estos caminos darán $m$ valores de la función, porque si adquiriese un número menor, satisfaría á una ecuación de grado menor (*).

**95.** Propiedades de los puntos singulares esenciales. Se dirá que un punto O que no es para una función monótropa $f(z)$ ni un polo (infinito), ni un punto ordinario (**) es *un punto singular esencial aislado* para dicha función, si en el interior de un círculo cuyo centro es O, la función es monótropa y si fuera de O, no tiene en dicho círculo más puntos singulares que polos.

Por ejemplo, la función $e^{\frac{1}{z}}$ tiene en el punto $z = 0$ un punto singular esencial aislado, punto que ni es un polo, ni un punto ordinario. Vamos á ver que la función es indeterminada en la proximidad de un punto singular esencial. En efecto, sea la ecuación

$$e^{\frac{1}{z}} = A,$$

siendo A una constante distinta de cero. Para obtener sus raíces, hagamos $A = Re^{\alpha i}$ y $\frac{1}{z} = p + qi$. Tendremos $e^{p+qi} = Re^{\alpha i}$,

(*) *Briot et Bouquet.* Théor. des fonct. doubl. périodiques.

(**) Punto *ordinario* es aquél en cuyo entorno puede desarrollarse la función por la fórmula de Taylor.

siendo el módulo del primer miembro $e^p$ y su argumento igual á $q$. Se tiene pues

$$e^p = R \quad \text{ó} \quad p = \log R,$$

y $q = \alpha + 2k\pi$; luego

$$z = \frac{1}{\log R + (\alpha + 2k\pi)i},$$

expresando $k$ un entero arbitrario positivo ó negativo.

Cuando $k$ aumenta indefinidamente, estos valores de $z$ tienden hacia cero; por consiguiente la ecuación (1) tiene una infinidad de raíces en la proximidad de $z = 0$, es decir, que *por pequeño que sea el radio de un círculo descrito desde el origen como centro, habrá siempre una infinidad de raíces de dicha ecuación contenidas en el interior de este círculo.*

Weierstrass demostró que en la proximidad de un punto singular esencial, *la función* f(z) *se aproxima tanto como se quiera á cualquier valor dado*, es decir, que dado un numero $\varepsilon$, tan pequeño como se quiera, existirán siempre, en el centro de un círculo de centro $a$ y un radio arbitrariamente pequeño, puntos $z$ para los cuales

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

El Sr. Picard demuestra este teorema como sigue (*).

Ante todo observaremos que la función puede admitir una infinidad de polos. Así la función

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}$$

tiene $z = 0$ por punto singular esencial, y admite los polos $z = \frac{1}{k\pi}$ ($k$ entero) en número infinito. Para demostrar el teorema, consideremos la función

$$\frac{1}{f(z) - A}. \qquad (2)$$

(*) *Traité d' Analyse* t II p. 120.

Pueden presentarse dos casos: Ó esta función tiene una infinidad de polos en la proximidad del punto singular esencial $a$, y entonces la ecuación $f(z) - A = 0$ tiene una infinidad de raíces en la proximidad de $a$, siendo el teorema evidente, pues la función no sólo se aproxima tanto como se quiera á A, sino que llega á ser exactamente igual, ó la función (2) no tiene una infinidad de polos en la proximidad de $a$. Si esto se verifica, podremos emplear la fórmula de Laurent, ó sea el desarrollo

$$\frac{1}{f(z) - A} = A_0 + A_1(z - a) + \ldots + \frac{B_1}{z - a} + \frac{B_2}{(z - a)^2} + \ldots$$

en el interior de cierto círculo C. La primera serie será convergente en el interior de C, la segunda en todo el plano, excepto en $a$. Pero si se hace $\frac{1}{z - a} = x$, se podrá elegir $x$ de manera que su módulo sea superior á cualquier número dado R, de modo que el módulo de

$$B_1 x + B_2 x^2 + \ldots\ldots$$

sea superior á cualquier cantidad dada previamente. A este valor de $x$ corresponde un punto $z$ tan próximo como se quiera de $a$, para el cual sea él el módulo de $f(z) - A$ inferior á cualquier número $\varepsilon$, tan pequeño como se quiera, lo que demuestra el teorema.

*Observación.* Una función monótropa ó uniforme puede hallarse en tres casos con respecto á los puntos singulares aislados.

1.° La función $f(z)$ puede tomar todos los valores que se quiera en la proximidad de $a$. Este el caso general.

2.° Puede tener un valor excepcional que no pueda adquirir la función en el entorno del punto $a$. Por ejemplo, la función $1 : \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$ no puede hacerse nula en el entorno del punto $z = 0$. Tenemos pues el valor excepcional A.

3.° Pueden hallarse dos valores excepcionales. Por ejemplo,

la ecuación $e^{\frac{1}{z}} = A$ no tendrá raíces en la proximidad del origen, si $A = 0$ y si $A = \infty$.

**96.** TEOREMA DE CAUCHY SOBRE LOS CEROS Y LOS INFINITOS. *Sea* f(z) *una función monódroma y monógena, sin puntos esenciales en el interior de un contorno cerrado simple* C, *que tiene en el mismo los ceros* $a_1, a_2, \ldots$ *con los grados de multiplicidad respectivos* $m_1, m_2, \ldots$ *y los infinitos* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ *con los grados de multiplicidad respectivos* $\mu_1, \mu_2, \ldots$, *Sea* F(z) *una función sinéctica en el interior de dicho contorno,* C; *se tendrá*

$$m_1 F(a_1) + m_2 F(a_2) + \ldots - \mu_1 F(\alpha_1) - \mu_2 F(\alpha_2) - \ldots$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int F(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

*tomándose la integral á lo largo del contorno* C, *ó más exactamente, á lo largo de un contorno infinitamente poco distinto de* C *é interior á él.*

En efecto, se tiene

$$f(z) = \frac{(z - a_1)^{m_1} (z - a_2)^{m_2} \ldots}{(z - \alpha_1)^{\mu_1} (z - \alpha_2)^{\mu_2} \ldots} \vartheta(z),$$

no siendo $\vartheta(z)$ ni nulo ni infinito para $z = a_1, a_2, \ldots \alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Tomemos las derivadas logarítmicas de los dos miembros de esta fórmula, y tendremos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum \frac{m_i}{z - a_i} - \sum \frac{\mu_j}{z - \alpha_j} + \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}.$$

Multipliquemos los dos miembros por $F(z) \frac{dz}{2\pi\sqrt{-1}}$ é integremos á lo largo del contorno C, observando que la integral $\int \frac{dz}{z - a} F(z)$ tomada á lo largo de un contorno cerrado que

contiene el punto $a$, es igual á $2\pi\sqrt{-1}\,F(a)$ y que $\phi'(z)$ es finito, tendremos

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \Sigma m_i F(a_i) - \Sigma \mu_j F(\alpha_j) \quad (1)$$

Corolario I. Si el contorno C contuviese un sólo cero, sin infinito alguno de $f(z)$, se tendría

$$F(a) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int F(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

y en particular $$a = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz,$$

que permite sustituir el cálculo de una raíz por el cálculo de una integral definida, cuando esta raíz se halla separada.

Corolario II. Supongamos que en la fórmula (1) se haga $F(z) = 1$, se reducirá á la

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f'(z)dz}{f(z)} = \Sigma m_i - \Sigma m_j,$$

Luego: *El número de los ceros disminuído en el número de los infinitos de una función monódroma y monógena, sin puntos esenciales en el interior del contorno* C, *es igual á la integral*

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \quad (2)$$

*tomada á lo largo de este contorno, siempre que un cero ó un infinito de orden de multiplicidad* k *se cuente por* k *ceros ó infinitos.*

Puede valuarse la integral (2) como sigue: Siendo la integral indefinida $\frac{1}{2\pi i}\log f(z)$, para obtener la integral definida (2) es necesario sustituir $z$ por su valor inicial, cuando se le hace describir el contorno de integración, después por el valor final, y obtener la diferencia de los dos resultados; pero aunque los va-

lores inicial y final son los mismos, no sucede lo mismo á los valores correspondientes de $\frac{1}{2\pi i} \log f(z)$, pues

$$\frac{1}{2\pi i} \log f(z) = \frac{1}{2\pi i} [\log \text{mod } f(z) - i \arg f(z)].$$

Aunque el logaritmo del módulo adquiere el valor inicial, cuando $z$ ha terminado su revolución en el contorno de la integración, el argumento se ha modificado, de manera que la integral (2) es igual á la alteración sufrida por el argumento de $f(z)$ dividida por $2\pi$, luego:

COROLARIO III. *El número de los ceros de* f(z) *contenidos en el contorno* C, *disminuído en el número de infinitos es igual á la variación del argumento de la función cuando la variable recorre el contorno* C, *dividida por* $2\pi$.

Si escribimos la función bajo la forma $X + Y\sqrt{-1}$ y su argumento es uno de los valores de arc tg $\frac{Y}{X}$, $\frac{Y}{X}$ se hará infinito varias veces. Sean N y $n$ los números de veces que, cuando camina $z$ á lo largo de C, se hace infinita, pasando del negativo al positivo ó del positivo al negativo, respectivamente; la variación del argumento de $f(z)$ ó de arc tg $\frac{X}{Y}$ será igual á $\frac{N - n}{2}\pi$; cuando por ejemplo, arc tg $\frac{Y}{X}$ ha pasado dos veces, pasando del negativo al positivo, ha crecido en $\pi$; luego:

COROLARIO IV. *El número de ceros de* f(z) *contenidos en el contorno* C, *disminuído en el número de infinitos contenidos en el mismo contorno, es igual al número* $\frac{N - n}{2}$, *expresando* N *el número de veces que* $\frac{Y}{X}$ *pasa del negativo al positivo y* n *el número de veces que pasa del positivo al negativo, haciéndose infinita.*

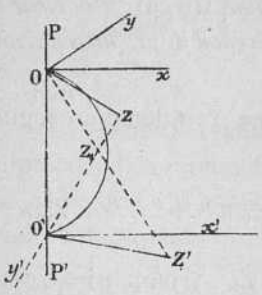
# CAPÍTULO II

## Funciones algebráicas

### § 1.° Principios generales

**97.** Ya hemos dicho que si una función es continua, monótropa y tiene una derivada determinada, cuando la variable se mueve en una parte del plano, es *holomorfa* en esta región y que los valores de la variable para los que la función se hace nula son las *raíces* ó los *ceros* de la función.

Cuando una función $u$ es holomorfa, excepto en algún punto $z$, en el que se hace infinita, de manera que la función $\frac{1}{u}$ quede holomorfa en la proximidad de este punto, este punto se llama un *polo* ó un *infinito* de dicha función, por ejemplo una fracción racional. En este caso se dice que dicha función es *meromorfa* en dicha región del plano, es decir semejante á las fracciones racionales.




Empleo de la esfera. Para estudiar la variación de una función, cuando la variable $z$ se hace muy grande, se hace $z = \frac{1}{z'}$, y se dan á la nueva variable valores muy pequeños. Esta transformación se representa considerando una esfera de radio igual á la unidad, tomado los extremos O y O′ de diámetro como orígenes, en los dos planos tangentes en dichos puntos de las dos variables $z$ y cuyos radios vectores están ligados por la relación

$$\frac{O'z'}{1} = \frac{1}{Oz} \quad \text{ó} \quad zz' = 1$$

A una curva descrita por $z$ corresponde otra curva descrita por $z'$; si la primera curva es cerrada y se halla descrita en sentido positivo, sin comprender el origen, lo mismo sucede á la segunda curva; pero si la primera descrita en sentido positivo comprende el origen, la segunda que comprende también el origen se halla descrita en sentido negativo, si el radio de la primera aumenta indefinidamente, el de la segunda tiende hacia cero.

En Álgebra se demuestra que: *La variación del argumento de un polinomio entero, según el contorno de una área positiva recorrida en sentido positivo, es igual al producto por* $2\pi$ *del número de las raíces comprendidas en esta área* (CAUCHY).

**98.** CONTINUIDAD DE LAS RAÍCES. Sea $f(z, u) = 0$ una ecuación cuyo primer miembro es un polinomio entero irreducible. Si para un valor atribuído á $z$, la ecuación en $u$ tiene $m$ raíces, al variar $z$ de una manera continua, estas $m$ raíces varían también de una manera continua. Esta propiedad resulta del siguiente

TEOREMA. *Si para* $z = a$, *la ecuación* $f(u, a) = 0$ *tiene* n *raíces iguales á* b, *para un valor de* z *próximo de* a, *la ecuación tiene* n *raíces próximas á* b.

Sustituyendo $z$ y $u$ por $a + z'$ y $b + u'$ y ordenando según las potencias de $u'$ se tiene

$$f(a + z', b + u') = Z_0 + Z_1 u' + \ldots\ldots + Z_n u'^n + \ldots\ldots + Z_m u'^m,$$

anulándose los polinomios $Z_0, Z_1, \ldots\ldots, Z_{n-1}$ para $z = 0$, sin anularse $Z_n$

Tracemos, tomando $a$ como centro, una circunferencia de radio $\rho$ suficientemente pequeño para que no comprenda ninguna raíz de $Z_n$, y sea A el menor módulo de $Z_n$ en el círculo $\rho$ y B el mayor módulo de cada uno de los polinomios $Z_{n+1}, \ldots\ldots, Z_m$ en el mismo círculo. Tendremos

$$f(a + z', b + u') = Z_n u'^n (1 + P + Q)$$

haciendo por brevedad

$$P = \frac{Z_{n+1}}{Z_n} u' + \ldots\ldots + \frac{Z_m}{Z_n} u'^{m-n},$$

$$Q = \frac{Z_0}{Z_n} \frac{1}{u'^n} + \ldots\ldots + \frac{Z_{n-1}}{Z_n} \frac{u'}{1}.$$

Si se hace mover á $u'$ en la circunferencia de un círculo de centro $b$ y un radio $r < 1$, se tendrá

$$|P| < \frac{B}{A} (r + r^2 + \ldots\ldots) = \frac{B}{A} \frac{r}{1 - r},$$

tomándose $r$ de modo que

$$\frac{B}{A} \frac{r}{1 - r} \leq \frac{1}{2} \quad \text{es decir,} \quad r \leq \frac{A}{A + 2B};$$

entonces el módulo de P será menor que $\frac{1}{2}$, y al moverse $u'$ en esta circunferencia, se tendrá

$$|Q| < \frac{1}{A} \left( \frac{|z_0|}{r^n} + \frac{|Z_1|}{r^{n-1}} + \ldots\ldots + \frac{|Z^{n-1}|}{r} \right)$$

Siendo $Z_0, Z_1, \ldots\ldots$ funciones continuas que se anulan para $z' = 0$, podremos hallar un radio $\rho' < \rho$ tal, que al moverse el punto $z$ en la circunferencia de centro $a$ y radio $\rho'$, el módulo de cada uno de estos polinomios sea menor que un número dado C tal, que

$$\frac{C}{A} \left( \frac{1}{r^n} + \frac{1}{r^{n-1}} + \ldots\ldots \right) \leq \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{C}{A} \frac{1 - r^n}{r^n (1 - r)} \leq \frac{1}{2},$$

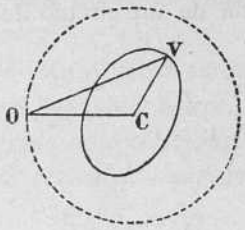
para lo que basta hacer $C \leq \frac{A r^n (1 - r)}{2 (1 - r^n)}$.

Esto hecho, el módulo de Q será menor que $\frac{1}{2}$ para todos los valores de $z'$ situados en $\rho'$ y de $u'$ situados en $r$, con el mismo módulo que P.

Concibamos que permaneciendo el punto $z'$ fijo en el interior del círculo $\rho'$, la variable $u'$ describa la circunferencia $r$ en sentido positivo, tendremos

$$f(a+z',\ b+u') = Z_n n'_n (1 + P + Q)$$

que es un polinomio entero en $u'$. El argumento de $u'^n$ aumenta en $2\pi n$. El factor $1 + P + Q$ es una función monótropa de $u'$, que designaremos por $v$. Indiquemos con C el punto que corresponde á $v = 1$. La distancia $Cv$ es igual al módulo de $P + Q$, menor que la unidad.




Cuando la variable $u'$ describe la circunferencia $r$, el punto $v$ describe una curva cerrada situada en el círculo cuyo centro es C y el radio es igual á 1; luego el argumento vuelve á adquirir su valor primitivo, y el argumento del polinomio $f(a+z',\ b+u')$ sólo aumenta en $2\pi n$; luego este polinomio admite $n$ raíces en el interior del círculo $r$.

**99.** DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN ALGEBRÁICA. Los puntos en que una raíz se hace infinita son las raíces del coeficiente de la mayor potencia de $u$ en la ecuación. Su número es á lo más igual á $m' - m$, siendo $m$ el grado de la ecuación con relación á $u$ y $m'$ el grado con relación á $z$ y $u$.

Se obtienen los puntos en los que la ecuación admite raíces finitas iguales entre sí, eliminando $u$ entre las ecuaciones

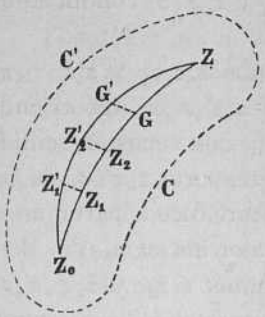
$$f(z,\ u) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

cuyo número es á lo más igual á $m'(m' - 1)$.

Los *polos* y los *puntos múltiplos* son las dos clases de puntos singulares de las funciones algebráicas.

TEOREMA. *Cuando por deformaciones sucesivas, se puede conducir la curva* A *que va de un punto* $z_0$ *á un punto* Z, *á la curva* B, *que une los mismos puntos sin atravesar ningún punto*

*por el que la raíz considerada se haga infinita ni igual á otra, estas dos curvas conducen en Z al mismo valor de la función.*




Supongamos que las dos curvas A y B envuelven una área que no tiene ningún punto singular. Sea M el menor módulo de las diferencias de las raíces, tomadas dos á dos, para un punto cualquiera $z$ de esta área.

Según el último teorema se puede asignar un radio $\rho$ tal, que si $z$ se mueve en un círculo de radio $\rho$ cuyo centro sea un punto cualquiera del área, cada una de las raíces experimentará una variación cuyo módulo sea menor que $\frac{M}{2}$.

Imaginemos que el centro del círculo $\rho$ describa una curva G, intermedia entre A y B; la envolvente de este círculo se compondrá de otras dos curvas C y C′ situadas á uno y otro lado de G. Esto sentado, consideremos una curva G′ próxima á G y situada entre las curvas C y C′. Señalemos sobre G y G′ dos sistemas de puntos correspondientes

$$z_0, z_1, z_2, \ldots\ldots, Z; \quad z_0, z'_1, z'_2, \ldots\ldots, Z$$

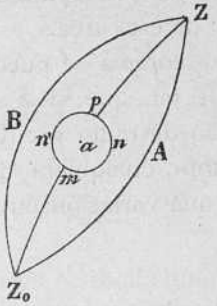
tales, que el área $z_0 z_1 z_1' z_0$ esté comprendida en el círculo descrito desde el punto $z_0$ como centro, con el radio $\rho$, que el área $z_1 z_2 z'_2 z'_1 z_1$ está comprendida en el círculo descrito desde $z_1$ como centro con el mismo radio $\rho$, etc.

Bastará para esto el tomar por $z_1$ y $z'_1$ los puntos en que la primera circunferencia corta á las curvas G y G′, para $z_2$ y $z'_2$ los en que la segunda circunferencia corta á las mismas curvas, y así sucesivamente.

Si partimos de $z_0$ con el valor inicial de $u_0$, los dos caminos $z_0 z_1$, $z_0 z'_1 z_1$ conducen en $z_1$ á valores que difieren cada uno de $u_0$ en una cantidad menor que $\frac{M}{2}$, y que por consiguiente, di-

fieren entre sí en menos que M; siendo la diferencia entre dos raíces en el punto $z_1$ mayor que M, los valores de éstas tienen que ser iguales. Así los dos caminos $z_0 z_1$ y $z_0 z'_1 z_1$ conducen en $z_1$ al mismo valor $u_1$.

Considerando enseguida los dos caminos $z_0 z_1 z_2$ y $z_0 z'_1 z'_2 z_2$, se puede sustituir el segundo por $z_0 z'_1 z_1 + z_1 z'_2 z'_2 z_2$, recorriendo la transversal $z_1 z'_1$ dos veces en sentido contrario; la primera parte $z_0 z'_1 z_1$ da $u_1$, como $z_0 z_1$. Esto se reduce á partir en el punto $z_1$ con el valor inicial $u_1$ y á describir los dos caminos $z_1 z_2$, y $z_1 z'_1 z'_2 z_2$.

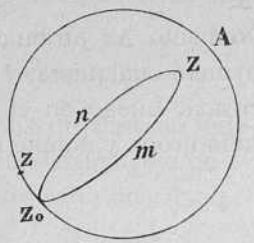



Hallándose comprendidos estos caminos en el círculo de radio $\rho$ descrito desde el punto $z_1$ como centro, conducen en $z_2$ al mismo valor $u_2$, y así sucesivamente.

TEOREMA. *Una función algebráica es holomorfa en toda parte del plano limitada por una curva* A *que puede reducirse á un punto, sin franquear ningún punto en que la raíz considerada se haga infinita ó igual á otra.*

Supongamos que entre las dos curvas A y B haya un punto singular $a$ en el cual la ecuación admite una raíz infinita ó una raíz múltiple $b$, pero tal, que cuando la curva A, al deformarse pase por este punto, la función $u$ conserve un valor finito ó permanezca raíz simple, y por consiguiente difiera de la raíz múltiple $b$. Este punto $a$ se presentará en la cuestión actual como un punto ordinario. En efecto, las curvas A y B pueden sustituirse por las líneas $z_0 mnpZ$ y $z_0 mn' pZ$ formadas por dos partes comunes y las dos mitades de un círculo muy pequeño cuyo centro es el punto $a$. Sobre estos dos nuevos caminos se recorre primero la parte $z_0 m$ con el mismo valor inicial $u_0$, lo que conduce en $m$ al mismo valor $u_1$, que por hipótesis es finito ó difiere de la raíz múltiple $b$ en una cantidad finita. Las dos semi-circunferencias conducen en $p$ al mismo valor $u_2$; porque si los valores obtenidos fuesen distintos, diferirían poco entre sí, y diferirían de $b$ en cantidades finitas; pero en la proximidad de $a$ las raíces

que difieren entre sí poco son las que difieren muy poco de $b$. En fin, la última parte $pZ$ conducirá en Z al mismo valor de la función.




Tomemos en la curva un punto Z próximo al $z_0$. La curva $z_0AZ$ puede reducirse por hipótesis, á la línea infinitamente pequeña $z_0Z$ sin franquear ningún punto singular, en el que la raíz se haga infinita ó igual á otra; de lo que resulta que, si la variable describe la curva $z_0AZ$, la función cuyo valor inicial es $u_0$, adquiere en Z el mismo valor que si la variable hubiese descrito la línea infinitamente pequeña $z_0Z$. La curva cerrada A conduce pues, en $z_0$, al valor inicial $u_0$.

Supongamos ahora que la variable vaya desde el punto $z_0$ á un punto cualquiera situado en la parte del plano considerada, por dos caminos $z_0mz$ y $z_0nz$ situados en esta parte del plano. Pudiéndose reducir la curva cerrada $z_0Az_0$ á la curva cerrada $z_0mznz_0$, sin franquear ningún punto singular, ésta conducirá, como la primera al valor inicial $u_0$, concluyéndose que los dos caminos $z_0mz$ y $z_0nz$ conducen en $z$ al mismo valor de la función. Así la función $u$ tiene un valor único en cada uno de los puntos situados en la parte del plano limitada por la curva A, es pues una función monótropa en esta parte del plano. A un incremento $\Delta z$ corresponde un incremento $\Delta u$, y tendremos que

$$(f'_z\Delta z + f'_u\Delta u) + \frac{1}{2}(f''_{zz}\Delta z^2 + f''_{zu}\Delta z\Delta u + f''_{uu}\Delta u^2) + \ldots = 0.$$

Si hacemos $\Delta u = v\Delta z$, y dividimos por $\Delta z$, tendremos

$$(f'_z + vf'_u) + \frac{1}{2}\Delta z\,(f''_{zz} + 2vf''_{zu} + v^2f''_{uu}) + \ldots\ldots = 0$$

Por ser $u$ raíz simple de la ecuación $f(z, u) = 0$, la cantidad $f'_u = 0$ es diferente de cero. Para $\Delta z = 0$ la ecuación precedente tiene una raíz simple finita $\lambda = -\frac{f'_z}{f'_u}$. Según el teorema

de la continuidad, á un valor muy pequeño de $\Delta z$ corresponde un valor de $v$ muy próximo á $\lambda$ y uno sólo; luego la relación $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ tiende hacia un límite finito y determinado $\lambda$, cuando el incremento $\Delta z$ atribuído á la variable tiende hacia cero de una manera cualquiera; y por consiguiente la función admite una derivada. Luego en el área A, la función algebráica es continua, monótropa y admite una derivada, es pues holomorfa.

## § 2.º Ley de la permutación de las raíces

Supongamos que en el punto $a$, la ecuación admite una raíz $b$ de orden $n$; en un punto $z_1$ próximo á $a$, tendrá $n$ raíces $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n$ próximas á $b$.

Si la variable $z$ parte de $z_1$, teniendo la función el valor inicial $u_1$, y describe un círculo muy pequeño alrededor de $a$, en sentido positivo, la función vuelve á adquirir su valor $u_1$, ó bien como su variación sólo puede ser muy pequeña, se cambia en otra de las $n$ raices precedentes, por ejemplo en $u_2$. En el primer caso, al reproducirse, es una función monótropa de $z$ en la proximidad de $a$; en el segundo caso, si se describe la circunferencia otra vez, con el valor inicial $u_2$, es imposible que se vuelva á obtener $u_2$, porque el movimiento inverso conduciría á $u_1$; se llegará pues á $u_1$ ó á una nueva raíz $u_3$. En el primer caso, las raíces $u_1$ y $u_2$ se permutan entre sí, cuando la variable $z$ gira alrededor de $a$; en el segundo caso, si se describe la circunferencia por tercera vez con el valor inicial $u_3$ obtenido á la segunda vuelta, es imposible volver á hallar $u_3$ ó $u_2$, porque el movimiento inverso conduciría á $u_2$ ó $u_1$. Se llegará pues á $u_1$ ó á una nueva raíz $u_4$. En el primer caso, las tres raíces $u_1$, $u_2$, $u_3$, forman un *sistema circular*, es decir, cada una de ellas se cambia en la inmediata, cuando el punto $z$ gira alrededor de $a$. Si continuando así se llega á la última raíz $u_n$, las $n$ raíces próximas á $b$ formarán un sólo sistema circular. Así:

TEOREMA. *Cuando en el punto* a *la ecuación admite una raíz* b *de orden* n, *las* n *raíces próximas de* b *para un valor de* $z$ *próximo de* a *forman uno ó varios sistemas circulares.*

**100.** OBTENCIÓN DE LOS SISTEMAS CIRCULARES. Si se hace $z = a + z'$, $u = b + u'$, tendremos

$$f(a + z', b + u') = \Sigma A_{\alpha\beta} u'^{\alpha} z'^{\beta} = 0. \qquad (1)$$

En el primer miembro habrá por lo menos un término independiente de $u'$ y un término por lo menos independiente de $z'$, sin lo que el primer miembro de la ecuación sería divisible por una potencia de $u'$ ó por una potencia de $z'$.

Entre los términos independientes de $z'$, el que contiene $u'$ con menor grado, es del grado $n$, porque la ecuación admite $n$ raíces iguales á cero, para $z' = 0$.

Consideremos primero el caso particular en que, entre los términos independientes de $u'$ haya uno que contenga $z'$ en la primera potencia. Agrupando los dos términos citados, la ecuación tendrá la forma

$$(Az' + Bu'^{n}) + \varphi(z', u') = 0, \qquad (2)$$

siendo todos los términos de $\varphi(z', u')$ infinitamente pequeños respecto al uno ó al otro de los primeros. Si se hace

$$z' = z''^{n}, \qquad u' = vz'',$$

los dos primeros términos contendrán $z''^{n}$ como factor, y cada uno de los términos siguientes una potencia de $z''$ superior á $n$. Se podrán pues dividir por $z''^{n}$ todos los términos, y tendremos

$$(A + Bv^{n}) + z''\psi(z'', v) = 0, \qquad (3)$$

siendo $\psi(z'', v)$ un polinomio entero en $z''$ y $v$.

Para $z'' = 0$, la ecuación (3) se reduce á la ecuación binomia

$$A + Bv^{n} = 0 \quad \text{ó} \quad v^{n} = -\frac{A}{B} \qquad (4)$$

que admite $n$ raíces simples, finitas y diferentes de cero, $v_1, v_2, \ldots, v_n$, que suponemos colocadas de modo que sus argumentos estén en progresión aritmética cuya razón sea $\frac{2\pi}{n}$.

Según el teorema de la continuidad, para un valor muy pequeño de $z''$, la ecuación (3) admite $n$ raíces simples respectivamente próximas á las precedentes, siendo cada una de ellas una función holomorfa de $z''$ en la proximidad de $z'' = 0$. Las representaremos por

$$v_1 + \varepsilon_1, \quad v_2 + \varepsilon_2, \ldots\ldots, \quad v_n + \varepsilon_n,$$

siendo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ cantidades muy pequeñas que se anulan con $z''$. Se obtienen así las $n$ raíces de la ecuación (1), próximas á cero

$$u'_1 = (v_1 + \varepsilon_1) z'^{\frac{1}{n}}, \quad u'_2 = (v_2 + \varepsilon_2) z'^{\frac{1}{n}}, \ldots, \quad u'_n = (v_n + \varepsilon_n) z'^{\frac{1}{n}},$$

dando á $z'^{\frac{1}{n}}$ uno cualquiera de sus $n$ valores.

Cada una de estas raíces se compone de dos partes, una infinitamente pequeña de orden $\frac{1}{n}$ y otra de orden superior. La ley de permutación de los valores aproximados

$$v_1 z'^{\frac{1}{n}}, \quad v_2 z'^{\frac{1}{n}}, \quad \ldots\ldots, \quad v^n z'^{\frac{1}{n}}$$

es fácil de percibir. Cuando $z$ describe un círculo muy pequeño alrededor de $a$, el argumento de $z'^{\frac{1}{n}}$ aumenta en $\frac{2\pi}{n}$, lo que se reduce á sustituir $v_1$ por $v_2$, $v_2$ por $v_3$, ..... $v_n$ por $v_1$ Los $n$ valores aproximados forman pues un sistema circular.

Los valores exactos tienen la misma propiedad. En efecto, reduciéndose el valor aproximado de la primera raíz á $v_2 z''^{\frac{1}{n}}$, el valor exacto adquiere la forma $(v_1 + \varepsilon'_1) z'^{\frac{1}{n}}$.

Es imposible que sea igual á una raíz distinta de la segunda; porque si se tuviese por ejemplo

$$(v_2 + \varepsilon'_1) z'^{\frac{1}{n}} = (v_3 + \varepsilon_3) z'^{\frac{1}{n}},$$

se deduciría $v_2 - v_1 = \varepsilon_3 - \varepsilon'_1$, y la cantidad infinitamente pequeña $\varepsilon_3 - \varepsilon'_1$ sería igual á la cantidad finita $v_2 - v_3$. Se tiene

pues $\varepsilon'_1 = \varepsilon_2$, y la raíz $u'_1$ se cambia en la raíz $u'_2$. Igualmente $u'_2$ se cambia en $u'_3$, etc.

La fórmula $u = v'^{\frac{1}{n}}$, en la que $v$ designa una de las raíces de la ecuación (3), representa el sistema circular de las $n$ raíces de la ecuación (2), cuando se hace girar á la variable $z$ alrededor del punto a.

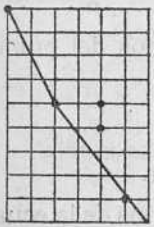
TEOREMA. *El grupo de las* n *raíces próximas á cero se descompone en sub-grupos tales, que la relación de cada una de las raíces de un mismo sub-grupo á una misma potencia conmensurable de* z' *tenga un mismo límite determinado, finito y distinto de cero.*

Tracemos en un plano (*) dos ejes rectangulares $O\alpha, O\beta$, y señalemos los puntos cuyas coordenadas son los exponentes $\alpha$ y $\beta$ en los diferentes términos de la ecuación

$$\Sigma A_{\alpha\beta} u'^{\alpha} z'^{\beta} = 0.$$

A los términos independientes de $z'$ corresponden puntos situados en el eje $O\alpha$. El primero de entre ellos tiene una abscisa igual á $n$. A los términos independientes de $u'$ corresponden puntos situados en el eje $O\beta$. El primero de ellos tiene una ordenada igual á $l$.

Concibamos una recta móvil aplicada al principio al eje $O\alpha$. Hagámosla girar alrededor del punto $n$ de izquierda á derecha, hasta que encuentre á uno ó varios de los otros puntos. Hagámosla girar enseguida alrededor del último de estos puntos, siempre en el mismo sentido, hasta que encuentre otro ú otros puntos; y continuando de este modo, la recta llegará á una última posición en que pase por el punto $l$, situado en el eje $O\beta$. Habremos formado, procediendo así, una línea quebrada convexa entre los puntos $n$ y $l$ tal, que prolongando cada uno



(*) *Puiseux, Mémoire sur les fonctions algébriques.* (Jour de Math. pures et app. t. XV; 1850.)

de sus lados, deje sobre ellas los demás puntos. Vamos á ver que cada uno de los lados de dicha línea da un sub-grupo de raíces.

Hagamos $u' = vz'^{\mu}$, siendo $v$ una cantidad finita que no se anula con $z'$. El grado del término $A_{\alpha\beta}u'^{\alpha}z'^{\beta}$ con relación á $z'$ es $\alpha\mu + \beta$. Además la recta $y - \beta = -\mu(x - \alpha)$, trazada por el punto $(\alpha, \beta)$, cuyo coeficiente angular es $-\mu$, corta al eje $O\beta$ en un punto cuya ordenada $\alpha\mu + \beta$ es igual al grado de dicho término. Resulta pues, que los términos de igual grado están en línea recta y que la recta se aleja del origen paralelamente á sí misma, á medida que aumenta el grado del término.

Consideremos desde luego el primer lado de la línea convexa, que parte del punto $(\alpha = n, \beta = 0)$. En este lado se hallan varios puntos á los que corresponden términos de igual grado

$$Au'^{n} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, u'^{\alpha}z'^{\beta} + A_{\alpha_1\beta_1}u'^{\alpha_1}z'^{\beta_1},$$

que supondremos ordenados según las potencias decrecientes de $u'$. Siendo estos términos de igual grado, tendremos

$$n\mu = \alpha\mu + \beta = \alpha_1\mu + \beta_1,$$

$$\mu = \frac{\beta}{n - \alpha} = \frac{\beta_1}{n - \alpha_1}.$$

Así el exponente $\mu$ es un número conmensurable $\frac{q}{p}$. Hagamos $z' = z''_p$, de donde $u' = vz''_q$. Los términos del primer grupo serán del grado

$$nq = \alpha q + \beta p = \alpha_1 q + \beta_1 q$$

con relación á $z''$ y los otros de un grado superior.

Se podrá pues, dividir por $z''^{nq}$ todos los términos de la ecuación (1), y resultará

$$\left(Av^{n} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, v^{\alpha} + A_{\alpha_1\beta_1}v^{\alpha_1}\right) + z''\varphi(v, z'') = 0$$

$$v^{\alpha_1}\left(Av^{n-\alpha_1} + \Sigma A_{\alpha\beta}\, v^{\alpha - \alpha_1} + A_{\alpha_1\beta_1}\right) + z''\varphi(v, z'') = 0,$$

siendo $\varphi(v, z'')$ un polinomio entero en $v$ y $z''$. La ecuación

$$A v^{n-\alpha_1} + \Sigma A_{\alpha\beta} v^{\alpha-\alpha_1} + A_{\alpha_1\beta_1} = 0 \qquad (6)$$

admite $n - \alpha_1$ raíces finitas y diferentes de cero, por consiguiente, para un valor muy pequeño de $z''$, la ecuación (5) admite $n - \alpha_1$ raíces próximas respectivamente de las anteriores, lo que da para la ecuación (1) un primer sub-grupo de $n - \alpha_1$ raíces de la forma $vz'^{\frac{q}{p}}$ tales, que la relación de cada una de ellas á $z'^{\frac{p}{q}}$ tiende hacia un límite finito distinto de cero.

Consideremos ahora el segundo lado de la línea convexa que da una nueva manera de formar un grupo de términos

$$A_{\alpha_1\beta_1} u'^{\alpha_1} z'^{\beta_1} + \Sigma A_{\alpha\beta} u'^{\alpha} z'^{\beta} + A_{\alpha_2\beta_2} u'^{\alpha_2} z'^{\beta_2}$$

de grado menor que los demás. Se tiene

$$\alpha_1\mu + \beta_1 = \alpha\mu + \beta = \alpha_2\mu + \beta_2$$

$$\mu = \frac{\beta - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha} = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

El exponente $\mu$ es todavía un número conmensurable $\frac{q}{p}$; pero de valor mayor que el precedente, porque á medida que el lado gira en sentido indicado, el valor de $\mu$ aumenta. Se hará, como anteriormente $z' = z''^p$, de donde $u' = vz''^q$. Todos los términos de la ecuación son divisibles por $z''^{\alpha_1 q + \beta_1 p}$, y ésta se reduce á

$$v^{\alpha_2}\left(A_{\alpha_1\beta_1} v^{\alpha_1-\alpha_2} + \Sigma A_{\alpha\beta} v^{\alpha-\alpha_2} + A_{\alpha_2\beta_2}\right) + z''\varphi(v, z'') = 0. \quad (7)$$

Admitiendo la ecuación

$$A_{\alpha_1\beta_1} v^{\alpha_1-\alpha_2} + \Sigma A_{\alpha\beta} v^{\alpha-\alpha_2} + A_{\alpha_2\beta_2} = 0 \qquad (8)$$

$\alpha_1 - \alpha_2$ raíces finitas y diferentes de cero, se concluye que, para un valor muy pequeño de $z''$, la ecuación (7) admite $\alpha_1 - \alpha_2$ raíces próximas respectivamente de las anteriores, lo que da para la ecuación (1) un segundo sub-grupo $\alpha_1 - \alpha_2$ raíces de la forma

$vz'^{\frac{q}{p}}$ tales que, la relación de cada una de ellas á $z'^{\frac{q}{p}}$ tiende hacia un límite finito distinto de cero. Se continuará de este modo, hasta ver que el último lado dará un sub-grupo de $\alpha_h - o$ raíces.

Puesto que

$$(n - \alpha_1) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \ldots\ldots + (\alpha_h - o) = n,$$

se han obtenido las $n$ raíces de la ecuación (1) próximas á cero.

Teorema. *Cada sub-grupo se descompone en sistemas circulares.*

Sea por ejemplo, el primer sub-grupo. Se tiene

$$\mu = \frac{\beta}{n - \alpha} = \frac{\beta_1}{n - \alpha_1} = \frac{q}{p};$$

suponiéndose irreducible la fracción $\frac{q}{p}$, los denominadores $n - \alpha$ y $n - \alpha_1$ son múltiplos de $p$, que designaremos por $kp$ y $k_1 p$. La ecuación (6) se reduce á

$$A v^{k_1 p} + \Sigma A_{\alpha\beta} v^{(k_1 - k)p} + A_{\alpha_1 \beta_1} = o.$$

Si se hace $v^p = \lambda$, esta ecuación se reduce á

$$A\lambda^{k_1} + A_{\alpha\beta}\lambda^{k_1 - k} + A_{\alpha_1\beta_1} = o. \qquad (10)$$

A una raíz simple de esta ecuación corresponden $p$ raíces simples de la ecuación (9), dadas por la ecuación binomia $v^p = \lambda$. Estas raíces $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_p$ tienen el mismo módulo, y las suponemos colocadas en un orden tal, qne sus argumentos estén en progresión aritmética cuya razón es $\frac{2q\pi}{p}$. La ecuación (5) admite $p$ raíces simples respectivamente próximas de las anteriores

$$v_1 + \varepsilon_1, \quad v_2 + \varepsilon_2, \ldots\ldots, \quad v_p + \varepsilon_p$$

y cada una de ellas es una función holomorfa de $z''$ en la proximidad de $z'' = 0$. La ecuación (1) admite las $p$ raíces

$$u'_1 = (v + \varepsilon_1) z'^{\frac{q}{p}}, \ldots\ldots, u'_p = (v_p + \varepsilon_p) z'^{\frac{q}{p}}.$$

Los valores aproximados

$$v_1 z'^{\frac{q}{p}}, \quad v_2 z'^{\frac{q}{p}}, \ldots\ldots, v_p z'^{\frac{q}{p}}$$

forman un sistema circular; porque, cuando la variable $z$ gira alrededor del punto $a$, el argumento de $z'^{\frac{q}{p}}$ aumenta en $\frac{2q\pi}{p}$; lo que se reduce á sustituir $v_1$ por $v_2$, $v_2$ por $v_3$, ..... $v_p$ por $v_1$. Se verá, como anteriormente que los valores exactos tienen la misma propiedad. Este sistema circular de $p$ raíces puede representarse por la fórmula $u' = v z'^{\frac{q}{p}}$, siendo $v$ una cualquiera de las raíces de la ecuación (5) que, para $z' = 0$, se reducen á una raíz de la ecuación binomia $v^p = \lambda$, que es una función holomorfa de $z''$.

Así cada una de las raíces simples de la ecuación (10) da un sistema circular de $p$ raíces.

Supongamos ahora que la ecuación (10) tenga una raíz múltiple de $\lambda$ de orden $n'$. Cada una de las raíces $v_1, v_2, \ldots, v_p$ de la ecuación binomia $v^p = \lambda$ será una raíz de orden $n'$ de la ecuación (9). Para un valor muy peqneño de $z''$, la ecuación (5) admite $n'$ raíces próximas á $v_1$, $n'$ próximas á $v_2$, ....., $n'$ próximas á $v_p$. De esto se concluye que la ecuación (1) admite $n'$ raíces que tienen el mismo valor aproximado $v_1 z'^{\frac{q}{p}}$, otras $n'$ con el mismo valor aproximado $v_2 z'^{\frac{q}{p}}$, etc. Los valores aproximados de estas $pn'$ raíces están representados por la fórmula $v_1 z'^{\frac{p}{p}}$, al girar la variable $z'$ alrededor de $a$. De esto resulta que sus valores exactos podrán representarse por la fórmula

$u' = (v_1 + v')z'^{\frac{q}{p}}$, en la que $v'$ es una cantidad infinitamente pequeña. Esto se reduce á sustituir $v$ por $v_1 + v'$ en la ecuación (5) que toma la forma

$$\Sigma A'_{\alpha\beta}\, v'^{\alpha}\, z''^{\beta} = 0. \qquad (11)$$

Siendo $v_1$ raíz de orden $n'$ del paréntesis, el primer término será $A'v'^{n'}$. Para un valor muy pequeño de $z''$ la ecuación (11) admitirá pues $n'$ raíces muy pequeñas. Si las ecuaciomes análogas á la ecuación (10) no admiten más que raíces simples, estas $n'$ raíces se dispondrán en sistemas circulares de $p'$ raíces, representados cada uno por una fórmula tal, como $v' = wz''^{\frac{q}{p}}$, siendo $w$ una función holomorfa de $z''' = z''^{\frac{1}{p}} = z'^{\frac{1}{pp'}}$ que no se anula para $z''' = 0$.

La ecuación (1) admitirá pues la solución

$$u' = \left(v_1 + wz'^{\frac{q'}{pp'}}\right) z'^{\frac{q}{p}} = v_1 z'^{\frac{q}{p}} + wz'^{\frac{q_1}{pp'}}$$

designando $q_1$ el número entero $q' + qp'$ primo con $p'$. Es fácil ver que esta fórmula da un sistema circular de $pp'$ raíces. Continuando el procedimiento se llegará á obtener expresiones aproximadas distintas para los $n$ valores infinitamente pequeños de $u$.

*Ejemplo 1.°* Sea la ecuación de grado $n$ en $s$ y $m$ en $z$.

$$F\binom{n}{s}\binom{m}{z} = a(s - s_0)^6 + b(s - s_0)^4(z - z_0)^3 + c(s - s_0)^3 + d(z - z_0)^7 = 0$$

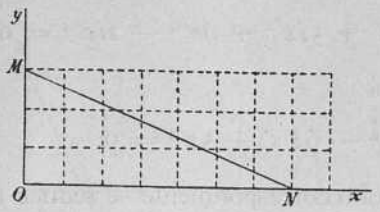
que para $z = z_0$ tiene tres raíces desiguales

$$s_0 - \sqrt[3]{\frac{c}{a}},\quad s_0 - \alpha\sqrt[3]{\frac{c}{a}},\quad s_0 - \alpha^2\sqrt[3]{\frac{c}{a}},\quad \left(\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$$

y tres raíces iguales con el mismo valor $s = s_0$.

Haciendo $s - s_0 = s'$, $z - z_0 = z'$, resulta

$$as'^6 + bs'^4 z'^3 + cs'^3 + dz'^7 = 0.$$




Para obtener el primer término del desarrollo en serie de las tres raíces iguales, haremos

$$cs'^3 + dz'^7 = 0$$

Los dos términos de esta ecuación estarán representados por los puntos M y N de la figura, reduciéndose el polígono correspondiente á un solo lado.

Haciendo $s' = c_1 z'^{\mu}$, será $\mu = \frac{7}{3}$.

La ecuación $c \cdot c_1^3 z'^7 + dz'^7 = 0$ ó $cc_1^3 + d = 0$ dará los tres valores de $c_1$,

$$-\sqrt[3]{\frac{d}{c}}, \quad -\alpha\sqrt[3]{\frac{d}{c}}, \quad -\alpha^2\sqrt[3]{\frac{d}{c}}, \quad \left(\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right)$$

siendo el desarrollo de $s$,

$$s = s_0 + c_1(z - z_0)^{\frac{7}{3}} + \ldots\ldots$$

*Ejemplo* 2.º

$$s^3 - 3z^2 s + 2z^3 - 2iz^2(z - i)^2 = 0,$$

su discriminante es

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3z^2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3z^2 \\ 0 & -6z^2 & 3[2z^3 - 2iz^2(z-i)^2] & 0 \\ 0 & 0 & -6z^2 & 3[2z^3 - 2iz^2(z-i)^2] \end{vmatrix}$$

ó $$D = -324z^4(z - i)^2(z^2 - 1).$$

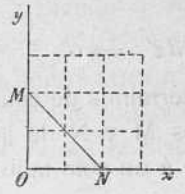
La ecuación propuesta tiene raíces iguales para $z = \infty$, 0, 1, $i - 1$.

Consideremos la raíz $z = i$, para la que $s_1 = s_2 = i$, $s_3 = -2i$, y hagamos, $s = i + s'$, $z = i + z'$ en la ecuación propuesta, que se transformará en

$$s'^3 + 3i \cdot s'^2 - 3z'^2 s' - 6iz's' + 5iz'^2 + 6z'^3 - 2iz'^4 = 0.$$

La ecuación aproximada será

$$3s'^2 - 6z's' + 5z'^2 = 0.$$




El polígono correspondiente se reduce á la recta MPN; el ángulo $\varphi$ que da el coeficiente angular de esta recta está dado por

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{2} = 1.$$

Haciendo $s_1 = c_1 z' \mu_1 = c_1 z'$, para determinar $c_1$ tendremos la ecuación

$$c_1^2 z'^2 - 2z' \cdot c_1 z' + \frac{5}{3} z'^2 = 0,$$

ó

$$c_1^2 - 2c_1 = -\frac{5}{3}, \quad c_1 = 1 \pm i\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Las dos raíces $s_1$ y $s_2$ iguales para $z = i$, no forman ciclo, siendo $z = i$ un punto doble sin ramificación; sus desarrollos son respectivamente

$$s_1 = i + \left(1 + i\sqrt{\frac{2}{3}}\right)(z - i) + \ldots\ldots$$

$$s_2 = i + \left(1 - i\sqrt{\frac{2}{3}}\right)(z - i) + \ldots\ldots$$

Para la raíz $s_3$, que tiene en $z = i$ el valor $s_3 = -2i$, el desarrollo es

$$s_3 = -2i - 2(z - i) + \ldots\ldots$$

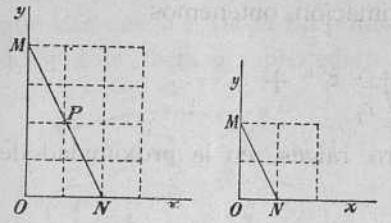
*Ejemplo 3.º* Harkness, Morley y Landfriet. *(Theorie der algebraischen Functionen).* Sea

$$(s^2 - z^2)^2 - sz^2 - z^4 = 0.$$

Para $z = 0$ tiene cuatro raíces iguales $s = 0$.

Haciendo $s = s'$, $z = z'$, la ecuación aproximada es

$$s'^4 - 2z's'^2 + z'^2 = 0;$$




y tendremos $\mu_1 = \text{tg } \varphi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, y haciendo en dicha ecuación $s' = c_1 z'^{\frac{1}{2}}$, resulta después de suprimir el factor común $z'^2$,

$$(c_1^2 - 1) = 0 \quad \text{que dá} \quad c_1^2 = 1.$$

Las cuatro raíces $s_1$, $s_2$, $s_3$, $s_4$ de la ecuación propuesta forman en el punto $z = 0$ dos ciclos, cuyo primer término es

$$c_1 z'^{\frac{1}{2}} (c_1 = \pm 1).$$

Para separar estos ciclos, calcularemos un nuevo término del desarrollo. Con este objeto, hagamos en la ecuación propuesta

$$s' = (c_1 + \zeta_1) z'^{\mu_1} = (c_1 + \zeta_1) z'^{\frac{1}{2}}; \quad (\zeta_1 = 0 \text{ para } z' = 0)$$

y tendremos, después de dividir por $z'^2$,

$$\zeta_1^4 + 4c_1\zeta_1^3 + 4\zeta_1^2 - z'\zeta_1 - c_1 z'^{\frac{1}{2}} - z'^2 = 0,$$

y haciendo $z' = z_1^2$,

$$\zeta_1^4 - 4c_1\zeta_1^3 + 4\zeta_1^2 - z_1^2\zeta_1 - c_1 z_1 - z_1^4 = 0.$$

La ecuación aproximada es

$$4\zeta_1^2 - c_1 z_1 = 0.$$

Tendremos, procediendo como en los anteriores ejemplos,

$$\zeta_1 = c_2 z'^{\mu_2} = c_2 z_1^{2\mu_2} \qquad 2\mu_2 = \text{tg } \varphi = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{1}{4}$$

y para determinar $c_2$ se tiene

$$4c_2^2 - c_1 = 0, \quad 4c_1c_2^2 = c_1^2 = 1, \quad c_2 = \frac{1}{2\sqrt{c_1}}.$$

Luego, por la segunda aproximación, obtenemos

$$s' = c_1 z'^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{c_1}} z'^{\frac{3}{4}} + \ldots\ldots;$$

y los desarrollos de las cuatro raíces, en la proximidad de $z = 0$, son

$$s_1 = z^{\frac{2}{4}} + \frac{1}{2} z^{\frac{3}{4}} + \ldots\ldots, \qquad s_2 = -z^{\frac{2}{4}} - \frac{1}{2} iz^{\frac{3}{4}} + \ldots\ldots,$$

$$s_3 = z^{\frac{2}{4}} - \frac{1}{2} z^{\frac{3}{4}} + \ldots\ldots, \qquad s_4 = -z^{\frac{2}{4}} + \frac{1}{2} iz^{\frac{3}{4}} + \ldots\ldots$$

Uno de las ciclos contiene las raíces $s_1$ y $s_2$, el otro las $s_3$ y $s_4$.

**101.** POLOS DE UNA FUNCIÓN ALGEBRÁICA. Sea

$$Zu^m + Z_1 u^{m-1} + \ldots\ldots + Z_m = 0$$

la ecuación, ordenada según las potencias decrecientes de $u$.

Haremos $z = a + z'$, $u = \frac{1}{u'}$, y se buscarán las raíces infinitamente pequeñas de la ecuación transformada

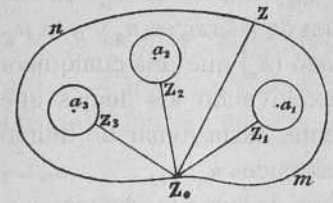
$$Z_0 + Z_1 u' + \ldots\ldots + Z_m u'^m = 0 \quad \text{ó} \quad \Sigma A_{\alpha\beta} u'^{\alpha} z'^{\beta} = 0.$$

Para estudiar las raíces, cuando $z$ es muy grande, se hace $z = \frac{1}{z'}$, y se dan á $z'$ valores muy pequeños. La ecuación propuesta se transforma en una ecuación algebráica entre $z'$ y $u$.

## § 3.° SISTEMAS DE LAZOS FUNDAMENTALES

**102.** Sea $f(u, z) = 0$ una ecuación irreducible cuyo primer miembro es un polinomio entero en $z$ y $u$ de grado $m$ respecto á $u$.

Sean $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..... los puntos críticos de la región considerada. Desde el punto $z_0$ trácense rectas hasta la proximidad de cada punto crítico y después una circunferencia muy pequeña cuyo centro sea cada uno de dichos puntos. Todos los caminos que van desde $z_0$ hasta un punto $z$ de la región, se pueden reducir á la recta $z_0 z$ precedido de los lazos formados por cada una de las rectas que van á cada uno de los puntos críticos, por la circunferencia y después por la distancia de $z_0$ á esta recorrida en sentido inverso. Así el camino $z_0 mz$ se reduce al lazo $(a_1)$ descrito en sentido positivo, seguido de la recta $z_0 z$. El camino $Z_0 nz$ se reduce á los dos lazos $(a_3)$, $(a_2)$ descritos en sentido negativo, seguidos de la recta $z_0 z$.




Esto sentado, supongamos que la variable $z$ parte del punto $z_0$, teniendo la función el valor inicial $u_0$ y que describe la recta $z_0 z_1$. La función adquirirá en $z_1$ cierto valor. Supongamos que esta raíz pertenece á un sistema circular de $p$ raíces que se permutan alrededor del punto crítico $a_1$. Cuando la variable haya descrito la circunferencia que rodea á $a_1$, en sentido positivo, se obtendrá en $z_1$ otra raíz. Si se vuelve enseguida á $z_0$ por la recta $z_1 z_0$, la función tendrá en $z_0$ un valor $u_1$ distinto del primero. Si se describe por segunda vez el lazo, con el valor $u_1$, se llegará á $z_1$ con la raíz precedente, una segunda vuelta conducirá á otra raíz y así sucesivamente hasta llegar al valor inicial. Tendremos pues el sistema de $p$ lazos binarios

$$(a)_0^1,\ (a)_1^2,\ \ldots\ldots,\ (a)_{p-2}^{p-1},\ (a)_{p-1}^0.$$

Un lazo relativo á otro punto crítico, unirá otras raíces entre sí, ó una de las raíces anteriores, y así sucesivamente.

Definición. Sean $u_0$, $u_1$, ....., $u_{m-1}$ las $m$ raíces de la ecuación $f(z_0, u) = 0$. Se llaman *lazos fundamentales* á los sis-

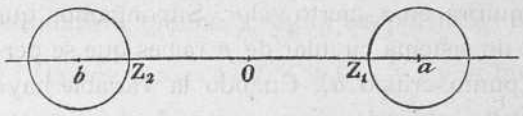
temas de $m - 1$ lazos binarios que permiten pasar de la raíz $u_0$ á las demás.

Para formar un sistema de esta clase, después de haber descompuesto los lazos complejos en lazos simples, se tomará un lazo $(a_1)$ que une la raíz $u_0$ á otra $u_1$, excluyendo los demás lazos que unen $u_0$ á $u_1$. Entre los que quedan, se tomará otro lazo $(a_2)$ que una cualquiera de las raíces $u_0$ y $u_1$, á otra $u_2$, excluyéndose los demás lazos que unen una de las raíces $u_0$ y $u_1$ á $u_2$. Entre los que quedan se tomará un lazo $(a_3)$ que una cualquiera de las raíces $u_0$, $u_1$, $u_2$ á otra $u_3$, excluyendo los demás que unen $u_0$, $u_1$, $u_2$ á $u_3$ y así sucesivamente, hasta tomar un último lazo $(a_{m-1})$ que una cualquiera de las raíces $u_0, u_1, \ldots, u_{m-2}$ á otra raíz $u_{m-1}$, y este será un sistema de lazos fundamentales.

*Ejemplo.* Sea la ecuación

$$w^3 - 3u + 2z = 0.$$

Hay dos puntos críticos $a$ y $b$ situados en el eje $Ox$, el uno $z = 1$, para el que la ecuación admite la raíz doble $u = 1$ y la raíz simple $u = -2$; el otro $z = -1$, para el que la ecuación admite la raíz doble $u = -1$ y la raíz simple $u = 2$. Las tres raíces de la ecuación son reales para todo valor real de $z$ tal, que se tenga $z^2 < 1$, es decir, en todos los puntos de la recta finita $ab$.




Para estudiar las dos raíces próximas á la unidad alrededor del punto crítico $a$, haremos

$$z = 1 + z', \qquad u = 1 + u'.$$

La ecuación se reduce á

$$(2z' + 3u'^2) + u'^3 = 0.$$

Los dos valores infinitamente pequeños de $u'$, cuyos valores aproximados son

$$u' = \pm \sqrt{-\frac{2}{3}} z'^{\frac{1}{2}}$$

se permutan cuando $z$ gira alrededor del punto crítico $a$. Siendo en $z_1$ reales y próximos en valor á la unidad, son positivos.

Cuando se cambia el signo de $z$, los tres valores de $u$ cambian de signo. Resulta pues, que dos raíces se permutan también alrededor del punto $b$, y que estas dos raíces tienen en $z_2$ valores reales y negativos próximos á $-1$.

Tomaremos como origen de los lazos el punto $z = 0$. Para $z = 0$, las tres raíces de la ecuación son $u_0 = 0$, $u_1 = \sqrt{3}$. $u_2 = -\sqrt{3}$. Cuando la variable $z$ describe la recta $Oz_1$, teniendo la función el valor inicial $u_0 = 0$, la ecuación

$$-u(3 - u^2) + 2z = 0$$

muestra que $u$ conserva un valor positivo, y por consiguiente adquiere en $z_1$ un valor próximo á 1. Quando la variable gira enseguida alrededor del punto $a$, esta raíz se cambia en otra raíz positiva próxima á 1. Volviendo la variable de $z_1$ á O, esta nueva raíz, diferente de la primera, queda positiva; y por consiguiente adquiere en el punto O el valor $u_1 = \sqrt{3}$. Así pues el lazo $(a)$ une las dos raíces $u_0$ y $u_1$. De igual manera el lazo $(b)$ une las dos raíces $u_0$ y $u_2$. Los dos lazos binarios $(a)_0^1$, $(b)_0^2$ forman un sistema de lazos fundamentales.

Si se hace $z = \frac{1}{z'}$, $u = \frac{1}{u'}$, la ecuación se reduce á

$$(z + 2u'^3) - 3z'u'^2 = 0.$$

Para los valores infinitamente pequeños de $z'$, los tres valores de $u'$ son infinitamente pequeños y sus valores aproximados son

$$u' = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\, z'^{\frac{1}{3}},$$

que se permutan circularmente, cuando la variable gira alrededor del punto $z' = 0$. Así, sobre la esfera, el punto O' es un nuevo punto crítico. El lazo que parte del origen O y envuelve al punto O', une las tres raíces $u_0$, $u_1$ y $u_2$.

Para ver en qué orden se efectúa la permutación, consideremos el circuito que en el plano corresponde al lazo (O'), y supongamos que el radio del circuito tenga un argumento comprendido entre $\pi$ y $2\pi$. El circuito, descrito en sentido positivo, puede sustituirse por la serie de los dos lazos $(a)$ y $(b)$. Si se parte del punto O con el valor inicial $u_0$, cambiando $u_0$ en $u_1$ el lazo $(a)$, y siendo neutro el lazo $(b)$ con respecto á esta raíz, se vuelve á O con la raíz $u_1$.

Describiendo la circunferencia, por segunda vez, como el lazo $(a)$ cambia $u_1$ en $u_0$, y enseguida el lazo $(b')$ $u_0$ en $u_2$, se vuelve á O con la raiz $u_2$.

Describiendo el circuito por tercera vez, se vuelve al valor inicial.

Tenemos pues los tres lazos binarios $(O')_0^1$, $(O')_1^2$, $(O')_2^0$, descritos en el sentido del movimiento positivo.

Se podría formar un sistema de lazos fundamentales con los dos lazos $(O')_0^1$ y $(O')_1^2$ ó con los dos lazos $(a)_0^1$ y $(O')_1^2$.

*Ejemplo* 2.º Sea la ecuación

$$u^3 - 3u^2 + z^6 = 0.$$

Para $z = 0$ se tiene la raíz simple $u = 3$ y dos raíces nulas. Si se hace $u = vz^3$, la ecuación propuesta se reduce á

$$3v^2 - 1 - v^2 z^3 = 0;$$

para $z = 0$ admite las raíces simples $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{-1}{\sqrt{3}}$. Los valores de $u$ que tienden hacia cero con $z$ son regulares en el dominio del origen, y los primeros términos de su desarrollo son

$$u_1 = \frac{z^3}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots, \qquad u_2 = -\frac{z^3}{\sqrt{3}} + \ldots\ldots$$

Representemos por $u_0$ la raíz que se reduce á 3 cuando $z=0$. Para cada uno de los seis valores de $z$ dados por la ecuación $z^6 = 4$, se tiene una raíz simple $u = -1$ y una raíz doble

$u = 2$; y las dos raíces que tienden hacia 2, se permutan alrededor del punto crítico. A partir de cada uno de los puntos de ramificación, tracemos la sección indefinida según la prolongación del radio que une este punto con el origen. Las tres raíces se hacen funciones uniformes en toda la extensión del plano.

Para estudiar las raíces, cuando se atraviesan las secciones, basta construir la curva que representa el conjunto de las solusoluciones reales de la ecuación

$$u^3 - 3u^2 + t^2 = 0;$$

se ve enseguida que cuando $t$ crece desde 0 hasta 2 por valores reales, los tres valores de $u$ van respectivamente de los valores iniciales de $u_0$, $u_1$, $u_2$ á los valores finales 2, 2, — 1; luego, cuando $z$ describe una de las líneas $Oa_1$, $Oa_3$, $Oa_5$, las tres raíces $u_0$, $u_1$, $u_2$ tienden hacia los valores 2, 2, — 1. Por consiguiente, cuando se atraviesa una sección de índice impar, se va de la raíz $u_0$ á la raíz $u_1$, de $u_1$ á $u_0$, y $u_2$ no cambia.

Igualmente, cuando $z$ describe uno de los radios $Oa_2$, $Oa_4$, $Oa_6$, $t$ va de 0 á 2 por valores reales, y las raíces $u_0$, $u_1$, $u_2$ tienden respectivamente hacia 2, — 1, 2, de modo que, atravesando una sección de índice par, se pasa de $u_0$ á $u_2$, de $u_2$ á $u_0$; pero no cambia $u_1$. Los lazos $(a_2)$, $(a_4)$, $(a_6)$ unen pues las raíces $u_0$ y $u_2$, siendo neutros para la raíz $u_1$; mientras que los lazos $(a_1)$, $(a_3)$, $(a_5)$ unen $u_0$ y $u_1$, y son neutros para la raíz $u_2$. Si se describe una circunferencia con el origen como centro, que contenga los seis puntos de ramificación, este camino equivale á seis lazos, y cada raíz vuelve á su valor inicial. El método general, en efecto, demuestra que el punto en el infinito es neutro para cada una de las raíces.

*Ejemplo 3.°* Sea la ecuación

$$u^3 + 3z^2u^2 - (z^2 - 1)^2 - 4z^6 = 0.$$

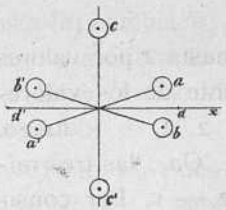
La derivada del primer miembro con relación á $u$ es $3u(u + 2z^2)$, y se anula para $u = -2z^2$ y $u = 0$. La primera solución da $(z^2 - 1)^2 = 0$; pero los puntos $d$ y $d'$ que corres-

ponden á $z = \pm 1$ son neutros; porque las raíces permanecen monótropas alrededor de cada uno de ellos.

Para $u = 0$, se tiene $(z^2 - 1)^2 + 4z^6 = 0$; por consiguiente

$$z = \pm i, \qquad z = \pm \frac{\sqrt{7} \pm i}{4};$$

resultando seis puntos críticos alrededor de cada uno de los cuales se permutan las raíces; $c$ y $c'$ están situados en el eje de las $y$; los otros cuatro $a$, $a'$, $b$, $b'$ son simétricos, dos á dos, con relación al origen, y se hallan en los vértices de un rectángulo.




Para $z = 0$, la ecuación propuesta se reduce á $u^3 - 1 = 0$, y admite las tres raíces $u_0 = 1$, $u_1 = j$, $u_2 = j^2$, expresando $j$ una de las raíces imaginarias de $j^3 - 1 = 0$. La ecuación tiene una raíz real $u_0$ en la recta finita $cc'$ y dos imaginarias conjugadas $u_1$ y $u_2$. Estas son las que se hacen iguales en $c$ y $c'$, permutándose alrededor de estos dos puntos. Así, cada uno de los lazos $(c)$ y $(c')$ une las dos raíces $u_1$ y $u_2$. Observaremos además que, si en el lazo $(a)$ se tiene $z = x + yi$, se tendrá $z = x - yi$ en el lazo $(b)$, y por consiguiente, los tres valores de $u$ sobre $(b)$ son respectivamente conjugados con los que se obtienen sobre el lazo $(a)$, concluyéndose que cada uno de ellos une la raíz $u_0$ con una de las raíces $u_1$ y $u_2$. Si el lazo $(a)$ une $u_0$ y $u_1$, el lazo $(b)$ unirá $u_0$ y $u_2$. Se formará un sistema de lazos fundamentales tomando, sea $(a)_0^1$ y $(b)_1^2$, sea $(a)_0^1$ y $(c)_1^2$, sea $(b)_0^2$ y $(c)_1^2$.

El punto O', en la esfera, es polo para cada una de las raíces.

# LIBRO QUINTO

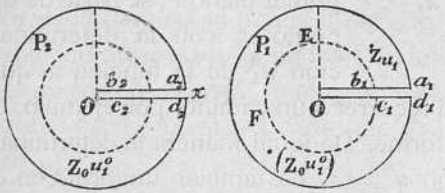
# ANALYSIS SITUS

## CAPÍTULO I

### Superficie de Riemann

§ 1.° Definición de la superficie de Riemann

**103.** Definición. 1.° *Superficie de dos hojas.* Supongamos la función algebráica $u^2 = z$ de dos determinaciones $u_1$ y $u_2$. Podemos reducir esta función á una función uniforme, haciendo que en vez de moverse $z$ en un plano simple se mueva en una superficie de dos hojas superpuestas cuyo conjunto se llama una *superficie de Riemann* de dos hojas. Para construirla, consideremos dos planos $P_1$ y $P_2$ limitados cada uno por una circunferencia de radio R, hagamos en cada uno á lo largo del radio una sección $a_1 b_1 Oc_1 d_1$, $a_2 b_2 Oc_2 d_2$. Coloquemos la hoja $P_1$ sobre la $P_2$ y unamos por un plano los dos bordes $a_1 b_1$ y $c_2 d_2$ y por otro los bordes $a_2 b_2$ y $d_1 c_1$ que se cortan en una línea doble $O_1 L_1$.



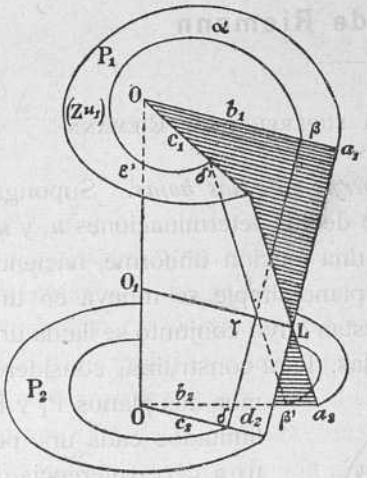

En esta figura se puede pasar de un punto $(z, u_1)$ de la hoja superior al punto correspondiente (su proyección ortogonal sobre el segundo plano) $(z, u_2)$ (*), siguiendo el camino continuo

(*) Se llama *punto analítico* $(z, u)$ el conjunto de un valor de $z$ y de un valor de $u$ que verifican la relación $F(z, u) = 0$.

$(z, u_1)$ $(\alpha\beta\gamma\delta)$ $(z, u_2)$ que da una vuelta al eje $OO_1O$, é inversamente, se puede subir desde el punto $(z, u_2)$ hasta el $(z, u_1)$ por el camino $(z, u_2)$ $(\alpha'\beta\gamma'\delta'\varepsilon')$ $(zu_1)$, de manera que el camino total que hace volver del punto $(z, u_1)$ al mismo, es

$$(z, u_1)\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon(z, u_2)\alpha'\beta'\gamma\delta'\varepsilon'(z, u_1)$$

La continuidad de $u$ queda establecida por el hecho de que el valor de $u_1$ según el orden $Ob_1a_1$ en $P_1$, es igual al valor de $u_2$ en el borde opuesto $Oc_2d_2$ de $P_2$, bordes que se suponen reunidos, lo mismo que los $Oc_1d_1$ y $Ob_2a_2$ que constituyen en camino cerrado.




Que la función $u$ vuelve al punto de partida con el mismo valor con que partió, después de haber recorrido la superficie de Riemann de dos hojas así formada, se puede ver observando que: Si en el primer plano $P_1$ se parte de un punto $z_0$ con la determinación $u_1^0$ de la función $u$, que variando con continuidad al recorrer $z$ un camino, por ejemplo, el $b_1EFc_1$, es una función uniforme. De igual manera la determinación $u_2$ dada por la ecuación $u^2 = z$, es también uniforme en el plano $P_2$, en virtud de que los dos bordes de la sección hecha impiden que la variable describa una circunferencia completa alrededor del punto O. Pero los valores de la determinación $u_1$ en los puntos $b_1$ y $c_1$ son iguales y de signo contrario. En efecto, llamando $u_1(b_1)$ y $u_1(c_1)$ á los valores de $u_1$ en los puntos $b_1$ y $c_1$; si partimos de $b_1$ con la determinación $u_1(b_1)$, y la variable $z$ da una vuelta completa hasta volver á $b_1$, el valor de la función habrá cambiado de signo, y será $-u_1(b_1)$; pero á consecuencia de existir el borde, el punto $z$ se ha detenido en $c_1$. El valor $u_1(c_1)$

difiere infinitamente poco del que adquiriría la función completando la vuelta en $b_1$; luego

$$u_1(c_1) = -u_1(b_1).$$

De igual manera, en el plano $P_2$ se tendrá

$$u_2(c_2) = -u_2(b_2).$$

Si ahora suponemos que en cada punto del plano $P_1$ y del $P_2$ se inscriben el valor de la determinación de $u_1$ y de $u_2$ respectivamente; y suponemos superpuestos estos planos ó mejor colocados paralelamente, de modo que el uno sea la proyección ortogonal del otro, los valores de $u_1$ y $u_2$ correspondientes al mismo valor de $z$ serán iguales y de signo contrario, así

$$u_1(c_1) = -u_2(c_2) = u_2(b_2)$$
$$u_1(b_1) = -u_2(b_2) = u_2(c_2).$$

Podremos pues en la representación que hemos hecho de la superficie de Riemann, establecer la continuidad de la función pasando del punto $\beta$ del borde superior de la derecha al punto $\delta$ del borde inferior de la izquierda y del punto $\beta'$ del borde inferior de la derecha al punto $\delta'$ del borde superior de la izquierda, habiendo atravesado el punto $\gamma$ de la línea $O_1L$ que se llama *línea de paso* ó de *cruce*, punto que debe considerarse como dos puntos pertenecientes á cada una de las hojas.

Consideremos la función $u = (z - c)^{\frac{1}{n}}$ de $n$ determinaciones. El punto $c$ en el que la función $u$ adquiere $n$ determinaciones se llama *punto de ramificación.*

Tomemos dicho punto de ramificación como el pie del eje vertical de un elicoide alabeado, cuya generatriz es el radio vector del punto $z$ y cuya directriz es una hélice de paso infinitamente pequeño. Los puntos $z$ de igual módulo, cuyos argumentos difieran en un múltiplo de $2\pi$, se proyectarán en una misma vertical, y corresponderán á valores iguales de la cantidad compleja $z = x + iy$.

La función $u = (z - c)^{\frac{1}{n}}$ adquiere todos los valores de que es capaz, cuando se hace variar á $z$ en la extensión de $n$ hojas sucesivas del helicoide, reproduciéndose la misma serie de valores en cada conjunto de $n$ hojas. Se puede pues reducir el helicoide á $n$ hojas sucesivas, cortándolo, á partir del eje, por dos secciones, la una en la primera hoja, la otra en la $n^{sima}$ y tales, que las dos tengan por proyección común sobre el plano horizontal una línea cualquiera trazada por el punto $c$.

Para conservar la continuidad de la variación de $c$, procederemos análogamente á como procedimos cuando sólo se trataba de una superficie de dos hojas, solo que en vez de los dos planos, podemos imaginar una serie de tubos de comunicación infinitamente delgados y próximos que unan, dos á dos, los puntos de las secciones $S_1$ y $S_n$ situados sobre la misma vertical, que atravesando las hojas intermedias no establezan con ellas comunicación alguna, como si fuesen hilos conductores aislados que transmitieran la electricidad á través de un medio, sin poderse distribuir en este medio. La variable, después de haber llegado á un punto de $S_n$ por la superficie, continuará su marcha según uno de los tubos para cerrar el circuito.

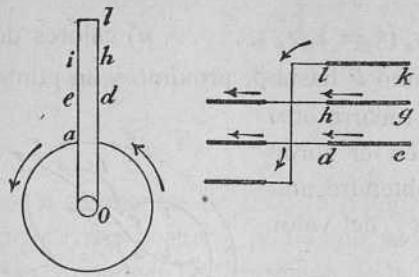
Si se supone el paso de la hélice infinitamente pequeño, la superficie se reducirá á un *plano múltiple*, compuesto de $n$ hojas superpuestas que se comunican entre sí por el único punto $c$ y de la que la $n^{sima}$ y la primera se reunen á través de las demás según la línea de paso, de modo que la primera hoja forma la prolongación de la $n^{sima}$.

Una curva que contiene el punto $c$ en su interior, no puede ser cerrada sino después de haber recorrido las $n$ hojas del helicoide.

Supongamos que se haya practicado en todas las hojas intermedias un corte, cuyos bordes se comuniquen análogamente como se ha hecho en el caso de dos hojas.

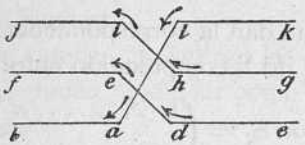
Un punto que parte de $a$ en la sección $S_1$, y caminando hacia la izquierda según $ab$, llega, después de haber girado alrededor

del eje á la parte *cd* en que la primera hoja se termina en el corte y pasa el puente *de* (hilo de comunicación) que le conduce á la segunda hoja. Recorriendo *efgh*, vuelve al corte, que atraviesa por el puente *hi*, para pasar á la tercera hoja *ijkl*. Después de llegar á la tercera hoja en *l*, desciende por el puente vertical á la primera hoja.




En vez de dejar los diversos puentes *de*, *hi* horizontales, podemos aplanar cada hoja, sin cambiar la sección inicial, de manera que todas las hojas se conviertan en planos paralelos; entonces los puentes resultarán inclinados, y el corte de la sección tendrá el aspecto de la figura representada abajo. De esta manera se llega al *plano múltiple* ó *superficie de Riemann*. La continuidad entre las diversas hojas de este plano se establece por la línea de paso, que en la figura pone en comunicación la 1.ª hoja con la 2.ª, la 2.ª con la 3.ª y la 3.ª con la 1.ª

Análogas representaciones se hacen en el caso de existir más de un punto de ramificación.

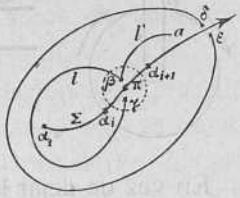



La superficie de Riemann reduce al estudio de una función multiforme al de una función uniforme. A cada punto $z$ de esta superficie se halla asociado un *solo valor* $u$ de la función, que es el valor correspondiente á la hoja en que se encuentra el punto considerado.

Supongamos que la función algebráica $s$ de $z$ se halle definida por la ecuación irreducible $F\binom{n\,m}{s\,z} = 0$; y sea $\Sigma$ la línea que une los puntos de ramificación, que no se corta á sí misma, y se prolonga hasta el infinito, ó la *línea de parada (ligne d' arrêt* según Cauchy), cuyos dos bordes distinguimos mediante los

signos + y —; de manera que toda raíz de $F = 0$ es de una sola determinación en el plano $z$, modificado por $\Sigma$. A cada punto $z = a$ corresponde un solo valor $s_\chi$.

Si con cada uno de los $s_\chi (\chi = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n)$ valores de la función, se recorre un camino $l'$ hasta $\beta$, próximo á un punto singular, y á continuación se recorre otro camino $l$ hasta el punto $\gamma$ en el borde opuesto y próximo á $\varepsilon$, se obtendrá una permutación $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots\ldots s_{i_n}$ del valor original $s_\chi(\varepsilon)$. Si representamos por $\overset{-}{s}_\chi$ el valor de $s_\chi$ en $\beta$ y por $\overset{+}{s}_\chi$ el valor final de $s_\chi$, obtenido por variación continua desde $\beta$ hasta $\gamma$, tendremos en general $\overset{+}{s}_\chi = \overset{-}{s}_{\chi_i}$, de manera que á lo largo de $\Sigma$, cada valor de una raíz $\overset{-}{s}_\chi$ está coordinado con otro valor $\overset{+}{s}_\chi$. Las ecuaciones




$$\overset{+}{s}_1 = \overset{-}{s}_{i_1}, \quad \overset{+}{s}_1 = \overset{-}{s}_{i_2}, \quad \ldots\ldots, \quad \overset{+}{s}_n = \overset{-}{s}_{i_n}$$

que dan la correspondencia de las raíces á lo largo del segmento $\Sigma_i$ de $\Sigma$ comprendido entre $a_i$ y $a_{i+1}$, se define por la sustitución $S_i = \begin{pmatrix} 1, & 2, \ldots\ldots & n \\ i_1, & i_2, & i_n \end{pmatrix}$, que expresa la transformación de las raíces $s_1, s_2, \ldots\ldots$ en $s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots\ldots$

Expresando por $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots\ldots$, las divisiones hechas en $\Sigma$ y por $S_1, S_2, \ldots\ldots$ las sustituciones correspondientes, $S_i\, S_{i-1}^{-1}$ expresa la sustitución $S'_i$ obtenida cuando la variable $z$ gira en sentido positivo alrededor del punto de ramificación $a_i$. Para cada una de las $n$ raíces $s_1, \ldots\ldots, s_n$ se introduce un plano, á saber $P_1$ para $s_1$, $P_2$ para $s_2, \ldots\ldots$, $P_n$ para $s_n$, para formar el plano de $n$ hojas, como ya se ha explicado. Si la corresponden-

cia ó coordinación de las raíces se halla expresada por la sustitución

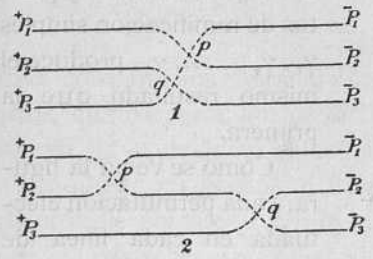
$$S_i = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots\ldots, & n \\ i_1, & i_2, & \ldots\ldots, & i_n \end{pmatrix};$$

y expresando por

$$\overset{-}{P}_1, \overset{-}{P}_2, \ldots\ldots, \overset{-}{P}_n \qquad \overset{+}{P}_1, \overset{+}{P}_2, \ldots\ldots, \overset{+}{P}_n$$

los $n$ segmentos de $\Sigma$ correspondientes respectivamente al borde negativo y positivo, podremos presentar algunos ejemplos que den á conocer la disposición de la superficie de Riemann en diversos casos.

Supongamos que la coordinación de las raíces esté dada por la sustitución




$$S_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots & n \\ 3 & 3 & 1 & 4 & \ldots\ldots & n \end{pmatrix}.$$

Se hallan ligados $\overset{+}{P}_1$ á $\overset{-}{P}_2$, $\overset{+}{P}_2$ á $\overset{-}{P}_3$, $\overset{+}{P}_3$ á $\overset{-}{P}_1$, como expresa la figura, que representa una sección normal á la superficie de Riemann.

La posición de los puntos $p$ y $q$ en que se encuentran las líneas de paso ó puentes *(Brüeken)*, se puede modificar como se ve en la segunda disposición de la figura.

En vez de la línea $\Sigma$, podemos considerar un sistema de lazos que, partiendo del punto origen $z_0$, llega á la proximidad de cada punto de ramificación para volver á $z_0$, después de haber girado alrededor de cada uno; y

$$\overset{-}{l}_1 \overset{+}{l}_1 \overset{-}{l}_2 \overset{+}{l}_2 \ldots\ldots \overset{-}{l}_\nu \overset{+}{l}_\nu$$

representa la coordinación de las raíces hallándose, en general, $l_i$ caracterizada por la sustitución $S'_i = S_i S^{-1}_1$, de modo que $S'_1 S'_2 \ldots\ldots S'_\nu = 1$.

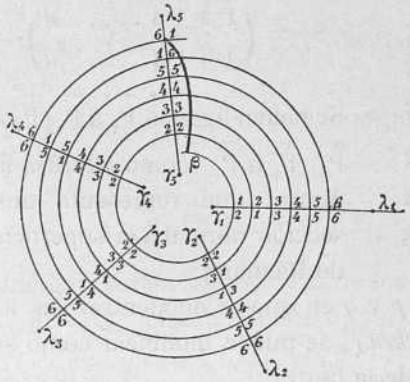
Se puede establecer fácilmente que: *Todo punto de ramificación de orden* $\mu$ *es equivalente á* $\mu - 1$ *puntos de ramificación simples*, es decir, que si

$$S'_i = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ \ldots\ldots\ n \\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1\ 7\ \ldots\ldots\ n \end{pmatrix}$$

es la sustitución correspondiente á la sección $l_i$ de la superficie de Riemann, las sustituciones

$$S''_1 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ \ldots\ldots\ n \\ 2\ 1\ 3\ \ldots\ldots\ n \end{pmatrix},$$

$$S''_2 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ \ldots\ldots\ n \\ 3\ 2\ 1\ 4\ \ldots\ldots\ n \end{pmatrix}, \ldots\ldots \quad S''_5 = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ \ldots\ldots\ n \\ 6\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 7\ \ldots\ldots\ n \end{pmatrix}$$



correspondientes á 5 puntos de ramificación simples $\gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_5$, produce el mismo resultado que la primera.

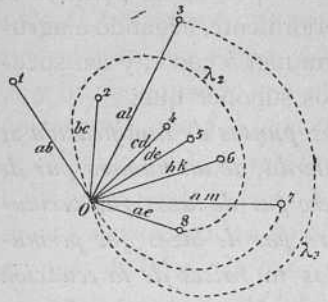
Como se ve en la figura, cada permutación efectuada en cada línea de paso, correspondiente á cada punto, hace pasar á $z$ de una hoja á la inmediata hasta llegar á la posición primitiva $\beta$, después de haber recorrido las 6 hojas.

## § 2.° Reducción á la forma normal

**104.** Forma normal. Cuando la superficie de Riemann tiene tan solo puntos simples de ramificación, puede reducirse á una forma más sencilla que se llama *forma normal*, según estableció Herr Lüroth en el tomo IV de *Mathematische Annalen*.

Para mayor sencillez, cada lazo se representa en la figura por las raíces que permuta, por ejemplo $(a, b)$.

Vamos á sustituir el lazo 8, que suponemos es el primero que conduce al origen O con el valor de la raíz $a$, por otro lazo $\lambda_2$ que, partiendo de O se halle situado entre 1 y 2, y que corte á los lazos que permutan la raíz $a$.




El nuevo lazo $\lambda_2$ equivale á un camino formado primero por los lazos 2, 4, 5 y 6 sucesivamente recorridos, que conducen á O con la raíz $a$, si se ha partido con este valor, y seguido del camino formado por los lazos 8, 6, 5, 4 y 2, que conduce á O con la raíz $b$.

Análogamente, podremos hacer pasar á los lazos 3 y 7 que permutan $a$, colocándolos detrás del lazo 8, según indican las líneas de trazos, que no permutan ya la raíz $a$, pues el nuevo lazo 7, por ejemplo, es equivalente al lazo $ae$ seguido de los lazos $am$ y $ae$, en los que $m \neq e$ porque si fuese $m = e$, el lazo 8 no sería el primero que conduce á la raíz $a$. El nuevo lazo 7 es pues equivalente al lazo $ae$ recorrido dos veces es decir, que no permuta la raíz $a$ con ninguna otra raíz.

Hemos sustituído pues, á los lazos primitivos una nueva serie de lazos tales, que los *dos* primeros $\lambda_1$ y $\lambda_2$ permutan $a$ con $b$, sin cambiar los demás, excepto algunos que se han sustituído por otros lazos que no permutan la raíz $a$.

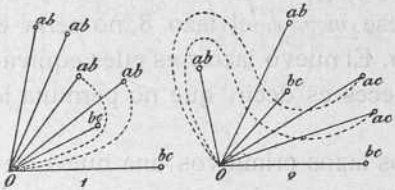
Repitiendo la operación, pero comenzando por el segundo lazo de la nueva serie, obtendremos una nueva serie tal, que los tres primeros lazos permuten las raíces $a$ y $b$, mientras que los demás no permuten la raíz $a$. Procediendo así llegaremos á obtener una serie de lazos tal, que *todos los lazos que permutan* a *con* b *se hallarán en primer lugar, no permutando ninguno de los que siguen, la raíz* a; pero el número de lazos obtenidos, que permutan $a$ y $b$, es necesariamente *par*, pues de lo contrario un

contorno trazado desde O, con el valor inicial *a*, no podría conducir la raíz *a* otra vez al origen, después de haber envuelto á todos los puntos de ramificación; porque, fuera de los lazos que permutan *a* y *b*, no hay ningún otro lazo que permute *a* con otra raíz.

Consideremos agrupados en un ángulo todos los lazos obtenidos; y supongamos que el primer lazo que sigue, permuta la raíz *b* con la *e;* operaremos como anteriormente, llegando á agrupar de igual manera los lazos que permutan *b* con *c*, y así sucesivamente. Por consiguiente, podremos suponer que:

*Los lazos que unen* O *á todos los puntos de ramificación se componen, partiendo de derecha á izquierda, de un número par de lazos que permutan* a *y* b, *de un número par de lazos que permutan* b *con* c, *etc., y en fin, de un número par de lazos que permutan* k *y* l, *siendo* a, b, ....., k, l *las* m *raíces de la ecuación* f(u, z) = o, *cuando* z *está en* O.

Podemos ahora definir la superficie de Riemann correspondiente á la función algebráica que consideraremos.




Supongamos que sean en número de 6 los lazos A, $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_6$ que permutan las raíces *a* y *b*. Unámoslos por $a_1a_2$, $a_3a_4$, $a_5a_6$, de modo que las áreas $Oa_1a_2$, $Oa_3a_4$, $Oa_5a_6$ no contengan en su interior ningún punto crítico.

Si se supone que la variable *z* no atraviesa las líneas precedentes, la raíz *u* de la ecuación $f(u, z) = o$, teniendo en O el valor *a*, será una función de *z de un solo valor* en cualquier punto del plano; pues todo camino que no envuelve á ninguna de las líneas trazadas, conduce en O al mismo valor, puesto que sólo los lazos A permutan *a;* y cualquier camino que rodea á $a_1a_2$, por ejemplo, equivaldría á los lazos $a_1$ y $a_2$ sucesivamente recorridos, y conducirá también al valor *a*.

Consideraremos pues, un primer plano en el que están traza-

das las secciones $a_1a_2$, $a_3a_4$, $a_5a_6$ que llamaremos secciones A; y en dicho *plano a* la función $u$ que adquiere en O el valor $a$, sólo tiene un valor cuando la variable $z$ no pasa por ninguna de las secciones.

Análogamente consideraremos un plano $b$, correspondiente á las secciones B, donde se tracen las mismas secciones que en el plano $a$ y además las secciones B correspondientes á los extremos de los lazos $b$ que permutan $b$ y $c$. La función $u$ sólo tendrá un valor en este plano, si la variable no atraviesa las secciones A y B; continuando así obtendremos la superficie de Riemann correspondiente á la ecuación algebráica $f(u, z) = 0$.

Vamos ahora á transformar esta superficie de modo que sólo exista una línea de paso A, una línea de paso B, y así sucesivamente, existiendo tan solo entre la penúltima y la última cierto número de líneas de paso, generalmente superior á *uno*.

Sean seis lazos de los cuales los cuatro primeros permutan $a$ y $b$ y los dos últimos $b$ y $c$. La figura 1 indica con las líneas de puntos, que los dos últimos lazos que permutan $a$ y $b$ han pasado al cuarto y quinto lugar, como indica la figura 2. Y si en ésta, como se halla indicado por las líneas de puntos, llevamos los lazos $ac$ al primero y segundo lugar, permutando las raíces $b$ y $c$.

Procediendo de igual manera podremos ordenar definitivamente los lazos, en grupos de modo tal: que *á excepción del último, los lazos de cada grupo permuten dos raíces, sin que dos grupos permuten las mismas dos raíces, y que cada raíz pertenezca á una permutación de dos grupos.*

Tendremos pues que en la superficie de Riemann construída como se ha indicado, la primera hoja estará unida á la segunda por *una sola* línea de paso, y lo mismo sucederá para la segunda y tercera, etc. Las dos últimas tendrán entre sí cierto número de líneas de paso. Esta idea de unir cada dos hojas por una sola línea de paso, se debe á Clebsch. (Mathem. Annal. t. VI.)

*Ejemplo 1.º de una superficie de Riemann.* Sea la relación $u^m = z$.

A cada valor de $z$ corresponden $m$ valores de $u$, que se permutan circularmente, cuando la variable gira alrededor del origen. Sea

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$u_1 = \rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\theta}{m} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{m}\right),$$

$$u_2 = \rho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{m} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+2\pi}{m}\right), \ldots\ldots$$

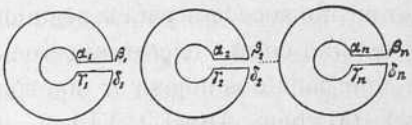
$$u^m = \rho^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{\theta+2(m-1)\pi}{m} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta+2(m-1)\pi}{m}\right].$$

Tomemos $m$ hojas planas limitadas por una circunferencia cuyo centro sea O y el radio R infinitamente grande; y tracemos en cada una de estas hojas una cortadura según el eje real. Si á un punto $z$ de la hoja $P_k$ se hace corresponder el valor

$$u_k = \rho^{\frac{1}{m}}\left\{\cos\left[\frac{\theta+2(k-1)\pi}{m}\right] + i\,\mathrm{sen}\left[\frac{\theta+2(k-1)\pi}{m}\right]\right\},$$

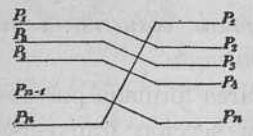
se tendrá sobre estas $m$ hojas la representación completa de todos los valores de $u$ y de $z$ que satisfacen á la relación dada $u^m = z$. Coloquemos estas $m$ hojas, las unas sobre las otras, de modo que sus índices se sucedan en su orden natural, hallándose la hoja $P_1$ la más alta, después unamos el borde $\gamma_1\delta_1$ de $P_1$ al borde $\alpha_2\beta_2$ de $P_2$, el borde $\gamma_2\delta_2$ de $P_2$ al borde $\alpha_3\beta_3$ de $P_3$, ... el borde $\gamma_m\delta_m$ de $P_m$ al $\alpha_1\beta_1$ de $P_1$ por pequeñas bandas de superficie, y se tendrá una superficie de $m$ hojas.

Conviene representar á la superficie por su proyección sobre un plano con la línea de paso o $-\infty$ ——— $+\infty$.




*Ejemplo 2.º* Sea la ecuación $u^3 - 3u^2 + 2z = 0$, que admite los dos puntos críticos $z = \pm 1$. Consideremos tres hojas en las que trazamos dos secciones que parten de los puntos $+1$ y $-1$. Llamemos $u_0$, $u_1$, $u_2$ á los tres valores de $u$ que se reducen res-

pectivamente á o, $+\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ para $z = 0$; y en cada punto de la hoja $P_i$ señalemos el valor correspondiente de $u_i$. Para formar la superficie de Riemann, supondremos las tres hojas, nos referimos á este problema (pág. 271).




Cuando se atraviesa la sección L, $u_0$ se cambia en $u_1$, y $u_1$ en $u_0$, pero $u_2$ no cambia. Uniremos pues $\alpha_0\beta_0$ y $\gamma_1\delta_1$, $\alpha_1\beta_1$ y $\gamma_0\delta_0$, $\alpha_2\beta_2$ y $\gamma_2\delta_2$. De igual manera se unirán, á lo largo de la segunda sección ó cortadura $\lambda_0\mu_0$ y $\nu_2\rho_2$, $\lambda_2\mu_2$ $\nu_0\rho_0$, $\lambda_1\mu_1$ y $\nu_1\rho_1$. La figura representa la proyección de una curva cerrada situada en la superficie.

## § 3.° Principios relativos al orden de conexión

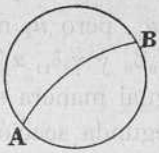
**105.** Orden de conexión de las superficies. Un área es *conexa (Zusammenhängend)*, cuando se puede pasar de un punto cualquiera del área á otro punto según un camino continuo, sin encontrar el contorno del área, es decir, que un área es conexa, cuando forma un *continuo* tal, que se puede pasar de uno cualquiera de sus puntos á otro también cualquiera, porque se puede pasar de un lazo á otro, ascendiendo ó descendiendo en el encadenamiento que forman sus hojas sucesivas.

La superficie de Riemann es una superficie conexa, para la cual, á cada punto corresponde un sólo punto de la curva algebráica expresada por la ecuación $f(x, y) = 0$.

Si el área es una superficie cerrada, como la de una esfera ó un toro, supondremos siempre que en un punto de la misma, elegido arbitrariamente, se ha hecho una abertura infinitamente pequeña, cuyo borde se considerará como un contorno que limita el área.

Una superficie simplemente conexa se divide en dos distintas que no tendrán ya ninguna adherencia, por una sección hecha desde un punto de su contorno á otro punto del mismo, la cual se llama *sección transversa. (Querschnitt)*.

Esto se aplica á la esfera, considerada como un casquete con una base infinitamente pequeña, formada por la abertura que se considera hecha en ella, según se ha indicado. Los dos bordes de la sección se unen al contorno.

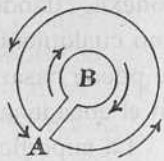



*Toda línea cerrada trazada en una superficie simplemente conexa, puede reducirse á un punto, por deformación continua.*

Si consideramos una área formada por dos contornos separados, una sección transversa hecha desde un punto de un contorno á un punto del otro, reducirá al área á ser simplemente conexa. Tendremos una superficie doblemente conexa.

Una sección transversa puede tener una de sus extremidades, ó las dos, en secciones transversas efectuadas anteriormente, y aún podemos considerar una sección como avanzando en cierta dirección, según la cual el contorno del área se prolonga sucesivamente á los dos lados, para venir á terminar en un punto de su propio recorrido, que ya es un punto del nuevo contorno.

Se dice que una sección es *reentrante*, cuando, partiendo de un punto interior del área vuelve al mismo, sin haber tocado ni atravesado el contorno del área.




Si los contornos de una superficie son tres, podrá reducirse á ser simplemente conexa, mediante dos secciones transversas; y será una superficie *triplemente conexa*.

Una área plana con $n$ contornos, ó en cuyo interior existen $n - 1$ agujeros, que no forman parte del área, se puede cambiar, mediante $n - 1$ secciones transversas. Se dirá en este caso que es *n-uplemente conexa*.

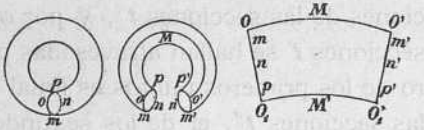
Una parte de superficie que puede cambiarse por deformación continua en un área plana de $n$ contornos, se dirá *n-uplemente conexa*. Así una zona esférica con dos bases y la superficie conexa de un tronco de cono con superficies doblemente conexas.

Un cilindro ramificado (que tiene la figura de un pantalón), es una superficie triplemente conexa.




Pero existen superficies que no pueden transformarse en una área plana por simple deformación continua, por ejemplo la superficie de un anillo ó toro *en un sistema dado de superficies, un conjunto cualquiera de secciones transversas, que divide al mismo en segmentos desprendidos de los cuales cada uno es simplemente conexo, la diferencia entre el número de estas secciones y el número de los segmentos desprendidos del sistema es constante, cualquiera que sea el conjunto de secciones hechas.*

Para demostrar este teorema, consideremos un sistema S compuesto de un número cualquiera de porciones de superficies distribuídas de una manera cualquiera en el espacio, cuyas configuraciones son arbitrarias; y supongamos que este sistema se halle cortado por un conjunto $t'$ de $n'$ secciones transversas, transformándose en otro sistema S′ compuesto de $\nu'$ porciones de superficie.




Supongamos además que se halle cortado el mismo sistema S por otro conjunto $t''$ de $n''$ secciones transversas, transformándose ahora en un tercer sistema S″ compuesto de $\nu''$ porciones de superficie; y consideremos que cada una de estas porciones de superficie que forman los sistemas S′ y S″ sean simplemente conexas.

Esto sentado, supongamos que se introduzcan *simultáneamente* los dos sistemas de secciones transversas $t'$ y $t''$. Estos dos sistemas se cruzarán en puntos que supondremos, por sencillez, que no coinciden con ninguna de las terminaciones de las secciones de uno ú otro sistema $t'$ y $t''$; lo que se puede conseguir siempre aprovechando la arbitrariedad, según la que podemos alterar las extremidades de las secciones ó los puntos de

intersección. De esta manera todo punto de encuentro dividirá cada sección que pase por él en dos segmentos. Sea $k$ el número de puntos de intersección.

Supongamos ahora que, después de haber trazado las secciones $t'$ y transformado S en S', se trace una de las secciones $t''$. Esta no será una sección transversa para el sistema S', mientras no toque ni atraviese ninguna de las secciones $t'$ ya existentes; de otro modo representaría un conjunto de *varias* secciones transversas.

Veamos cuántas son las secciones transversas T'' que se introducen en el sistema S', después de haberse trazado todas las secciones $t''$.

Desde luego vemos que la totalidad de las terminaciones de las secciones T'' se compondrá, por una parte, de las terminaciones de las secciones $t''$, y por otra, de los puntos en que las secciones $t'$ se hallan atravesadas por las secciones $t''$. El número de los primeros puntos es igual al doble $2n''$ del número de las secciones $t''$, el de los segundos es igual á $2k$; porque cada punto de intersección representa dos terminaciones de las secciones T''. Luego el número total de las terminaciones de T'' será $2n'' + 2k$, y por consiguiente, el número de las secciones T'' será $n'' + k$.

Si se hubiera comenzado, al contrario, por transformar S en S'' mediante secciones $t''$, y se hubieran trazado enseguida las secciones $t'$, se vería que el número de las secciones transversas se habría aumentado en $n' + k$.

Sea ahora N el número de las porciones de superficie, separadas entre sí, en las que se descompone S, después de haberse trazado simultáneamente los dos sistemas de secciones transversas $t'$ y $t''$. Este número N puede considerarse evidentemente como el número de segmentos en los que se cambia S' por la introducción de las secciones T''.

Ahora bien, S' se compone por hipótesis, de $\nu'$ segmentos, de los cuales cada uno es *simplemente conexo*. Luego al aumen-

tar cada sección en una unidad el número de los segmentos, las $n'' + k$ secciones darán el número

$$N = \nu' + n'' + h.$$

Se verá de igual manera, partiendo del sistema S″, que este número puede expresarse por

$$N = \nu'' + n' + k.$$

Igualando las dos expresiones de N, resulta

$$n' - \nu' = n'' - \nu''.$$

TEOREMA.—*El orden de un sistema de superficies disminuye en una unidad cada vez que se traza una sección transversa, y disminuye en* n *unidades, si se trazan* n *secciones transversas,* pues si consideramos un área simplemente conexa, y se traza una sección transversa, dividirá al área en dos segmentos separados, obteniéndose que

$$n' - \nu' = 1 - 2 = -1.$$

Este número aumentado en 2 da el orden 1 de conexión del área.

Podemos pues tomar como definición del *orden de conexión* de un sistema al valor constante, para este sistema, de la expresión

$$N = n' - \nu' + 2.$$

El tipo de las superficies cerradas simplemente conexas es la esfera; después de la esfera la más sencilla es el toro, que es triplemente conexa; pero no existe ninguna superficie cerrada doblemente conexa, y en general: *El orden de conexión de una superficie cerrada es un número impar.*

Sea $N = 2p + 1$ el orden de conexión de una superficie cerrada. El número entero $p$ se llama *género* de la superficie. La esfera es de género cero, el toro de género uno. El tipo de las superficies cerradas de género $p$ es la esfera con $p$ agujeros, ó el sistema de $p$ anillos soldados entre sí formando una cadena sin

cerrar. La superficie de Riemann de dos hojas y $2p + 2$ puntos de ramificación es del género $p$.

Sea, finalmente, $n$ el número de las secciones $t_1, t_1, \ldots\ldots t_n$ necesarias para transformar el sistema S en un sistema de $\nu$ segmentos simplemente conexos. Sea $S_1$ el sistema que se obtendría trazando solamente la primera $t_1$ de dichas secciones. $S_1$ se habrá transformado en $\nu$ segmentos simplemente conexos por medio de $n - 1$ secciones $t_2, \ldots\ldots, t_n$. Los órdenes de estos dos sistemas serán pues por la definición anterior

$$\sigma = n - \nu + 2, \qquad \sigma_1 = (n - 1) - \nu + 2 = \sigma - 1$$

Así, el orden de conexión de un área está dado por el número de las secciones transversas que es preciso hacer para dividir el área en dos partes separadas (*).

Consideremos ahora una sección reentrante $r$, y sea S′ el sistema en el cual cambia esta sección al sistema S.

Desde un punto cualquiera de esta sección $r$ tracemos una sección transversa cualquiera $t$ al contorno del área. El orden $\sigma'$ del sistema S′ se hallará disminuído en una unidad. Pero puede considerarse que el conjunto de las secciones $r$ y $t$ forme una sola sección transversa; y por consiguiente el conjunto $r + t$ disminuye en una unidad el orden del sistema S; luego los dos sistemas S y S′ son de igual orden.

Sea $n$ el número de las secciones transversas necesarias para transformar el sistema S, que suponemos reducido á un área única, simplemente conexa. Se hará entonces $\nu = 1$, y resultará

$$\sigma = n - 1 + 2 = n + 1;$$

luego: *El orden de conexión de la superficie* S, *disminuído en una unidad, indica el número de secciones transversas que deben efectuarse en dicha superficie, para transformarla en un área simplemente conexa.*

Así, el orden de conexión solo depende de la configuración

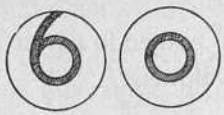
(*) Hoüel. *Théorie élémentaire des quantités complexes*, p.ˢ 252-54.

de la superficie y de ningún modo de cómo se han trazado las secciones transversas.

### § 4.° Número de los contornos de una superficie cuyo orden de conexión se da. Determinación del orden de conexión de una esfera múltiple

**106.** Sea S un sistema de superficies ó una superficie única cualquiera. Si se traza una sección transversa, puede ocurrir uno de estos tres casos.

1.° La sección va de una parte del contorno á otra parte aislada de la primera. Entonces, como los dos bordes de la sección se cuentan cada uno como una porción del contorno, los dos puntos aislados primitivamente se hallan reunidos en un solo contorno; lucgo, en este caso, la sección transversa *disminuye en una unidad* el número de contornos distintos.



2.° La sección va de un punto de uno de los contornos á otro punto del mismo contorno. Entonces desprende una parte del área rodeada de una curva cerrada. En este caso el número de los contornos *aumenta en una unidad.*

3.° La sección transversa que parte de un punto de uno de los contornos, termina en un punto de su propio trayecto. Se la puede considerar como compuesta de una sección reentrante que aumenta en dos unidades el número de los contornos y de una sección transversa que une uno de estos contornos al contorno primitivo, y que disminuye en una unidad el número de los contornos; luego, el número de los contornos *ha aumentado en una unidad;* luego *el número de los contornos de un sistema de superficies ó de una superficie aumenta ó disminuye en una unidad por una sección transversa.*

Si pues $\mathfrak{A}$ es una área dada cuyo orden de conexión es $\sigma$,

podremos reducirla á otra área $\mathfrak{A}'$ mediante $\sigma - 1$ secciones transversas. El área $\mathfrak{A}'$ no tiene más que un sólo contorno.

Sea $\varkappa$ el número primitivo de los contornos de $\mathfrak{A}$. Cada sección transversa aumenta en $\varepsilon = \pm 1$ el número de los contornos; y si expresamos por $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \sigma - 1$ números iguales á la unidad positiva ó negativa, tendremos para el número de los contornos de $\mathfrak{A}'$.

$$\varkappa + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots\ldots + \varepsilon_{\sigma-1} = 1$$

Si pues $s$ expresa el número de las secciones transversas correspondientes á $\varepsilon = +1$, y por consecuencia $\sigma - 1 - s$ el número de las correspondientes á $\varepsilon = -1$, resultará

$$\varkappa + s - (\sigma - 1 - s) = 1, \qquad \text{ó} \qquad \varkappa = \sigma - 2s;$$

y pudiendo variar $s$ desde o hasta $\sigma - 1$, se podrán tomar los valores

$$\sigma, \sigma - 2, \ldots\ldots, 2 - \sigma,$$

excluyéndose los valores negativos; luego el número $\varkappa$ de los contornos es igual al orden de conexión del área ó inferior á $\sigma$ en un número *par*. Si pues un área tiene $\varkappa$ contornos, su orden de conexión será $\varkappa$, $\varkappa + 2$, $\varkappa + 4$, .....

*Observación 1.ª* Para aplicar esta regla á las superficies cerradas, se debe practicar ante todo una abertura infinitamente pequeña; en este caso tendrán un solo contorno; luego el número de conexión de una superficie cerrada es uno de los números 1, 3, 5, ..... y por consiguiente es simplemente conexa, pues de lo contrario para reducirla á un área simplemente conexa, sería preciso efectuar secciones transversas en número par.

107. Esfera múltiple. Sean $\Sigma$ una esfera múltiple, formada por N hojas, $\rho$ el número de sus puntos de ramificación y $n_1, n_2, \ldots\ldots n_\rho$ los números respectivos de las hojas que reunen estos $\rho$ puntos, ó sus órdenes respectivos de multiplicidad. Vamos á determinar el orden de conexión de la superficie.

Observaremos desde luego, según se ha visto, que al practi-

carse un número cualquiera de secciones transversas en una superficie, puede ésta someterse á una deformación continua, sin alterar en nada ni los enlaces, ni el número de secciones, ni el de contornos, ni el de conexiones. El resultado sería el mismo que si se hubiese efectuado la deformación antes de efectuar las secciones transversas. Podemos pues suponer que se ha deformado, si es necesario, la esfera de N hojas, de manera que no quede un punto de ramificación sobre otro.

Cortemos ahora la esfera por dos secciones que penetran á través de todas las hojas, desprendiendo dos casquetes A y B que no contengan ningún punto de ramificación, que se hallarán todos en la zona media C; y cortemos ésta mediante $\rho$ secciones á través también de todas las hojas, en $\rho$ segmentos, de los que cada uno contiene uno de los $\rho$ puntos de ramificación.

Los dos casquetes formarán cada uno, N porciones separadas, es decir, en total 2N. Una porción de zona que contiene un punto de ramificación que reune $n$ hojas, se compondrá de $N - n + 1$ partes separadas, á saber: la que contiene el punto de ramificación, formada por $n$ hojas, más las otras $N - n$, formadas cada una por una sola hoja; luego el número de partes separadas, que constituirán el sistema, después de introducirse las secciones, será

$$2N + (N - n_1 + 1) + (N - n_2 + 1) + \ldots\ldots (N - n_\rho + 1)$$
$$= (\rho + 2)N - (n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_\rho) + \rho.$$

Veamos ahora cuántas secciones transversas y reentrantes forman las $\rho + 2$ secciones.

Las secciones reentrantes no alteran, según se ha visto, el orden de conexión de la superficie; de manera que sólo debemos tener en cuenta las $N\rho + 1$ secciones transversas; y como sabemos que si un sistema se descompone, por $\tau$ secciones transversas, en $\nu$ segmentos separados simplemente conexos, se halla expresado el orden de conexión del sistema por $\tau - \nu + 2$,

el orden de conexión de la esfera múltiple estará expresado por

$$N\rho + 1 - (\rho + 2)N + (n_1 + n_2 + \ldots\ldots n_\rho) - \rho + 2$$
$$= 3 - 2N - \rho + \Sigma n,$$

de donde $\Sigma n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots + n_\rho$.

Luego la esfera se cambia en un área simplemente conexa mediante $2 + \Sigma n - 2N - \rho$ secciones transversas.

*Ejemplo 1.°* En la esfera correspondiente á la función

$$\sqrt{(z - a)\ (z - b)},$$

se tiene $N = 2$, $\rho = 2$; y por reunir cada uno de los puntos $a$ y $b$ las dos hojas, $\Sigma n = 2 + 2 = 4$; luego el orden de conexión es

$$\sigma = 3 + 4 - 2 \cdot 2 - 2 = 1.$$

Esta esfera es pues *simplemente conexa.*

2.° Sea la esfera correspondiente á la función

$$\sqrt{(z - a)\ (z - b)\ (z - c)\ (z - d)}.$$

Se tiene $N = 2$, $\rho = 4$, $n_1 = n_2 = \ldots\ldots = 2$;

luego $\sigma = 3 + (2 + 2 + 2 + 2) - 2 \cdot 2 - 4 = 3$,

es pues *triplemente conexa.*

## § 3.° Reducción á una superficie simplemente conexa

En la teoría de las conexiones tiene, como se ve, gran importancia el procedimiento de la deformación, en el sentido de la geometría de situación ó *analysis situs;* de manera que la deformación continua permite pasar de una superficie á otra, estableciendo una correspondencia bien determinada entre los puntos de las dos superficies.

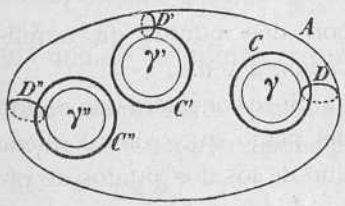
Así, una modificación que no afecta al carácter de la super-

ficie de Riemann, consiste en efectuar con relación á un punto arbitrario del espacio, una transformación por radios vectores recíprocos del plano en que se consideran las $m$ hojas. En vez de $m$ hojas planas, tendremos $m$ hojas esféricas superpuestas, ligadas sucesivamente cada dos por una línea de cruce, exceptuando las últimas, que se hallan ligadas entre sí por $p + 1$ líneas de esta clase.

La superficie de una esfera puede considerarse como compuesta de dos lados, interior ó exterior, pasándose del uno al otro, cuando se encuentra la línea de cruce, que puede imaginarse como una sección hecha en la superficie.

Se puede agrandar el *agujero* hecho en la superficie por la sección hasta considerarlo como una curva cerrada, una circunferencia, por ejemplo, y la superficie se compondrá entonces de los lados interno y externo de un casquete esférico. Este doble casquete puede deformarse en dicho plano que se considerará como formado por dos caras, verificándose el tránsito de la una á la otra por el perímetro del contorno. Se podría pasar del doble casquete á la esfera, reduciendo de una manera continua la cara interna del casquete á la zona que falta en la esfera.

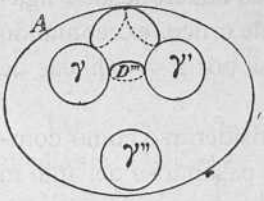
Podemos tomar como esquema de la superficie de Riemann un disco plano con dos lados y $p$ agujeros. Llamaremos *circuito* toda curva cerrada trazada sobre la superficie. Hay que distinguir especialmente los circuítos que giran alrededor de un agujero y los que pasan á través del mismo.




Sea el disco A de tres agujeros $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ (*). Un circuito alrededor de $\gamma$ será una línea cerrada C que rodea una vez el agujero $\gamma$. Este circuito C, señalado con trazo continuo, puede considerarse situado en el lado superior del disco. Un circuíto á

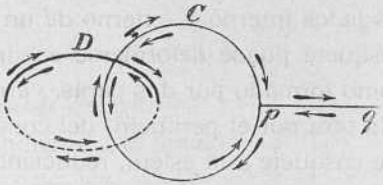
(*) *Picard*. Traité d' Analyse, t. II, pág. 377.

través del agujero $\gamma$ será un circuito tal como D, que corta una vez á A y $\gamma$, cerrándose al lado interior del disco por la línea de trazos. Podremos hacer la misma operación en los otros agujeros $\gamma'$ y $\gamma''$, y tendremos seis circuitos que se llaman *fundamentales;* porque cualquier otro circuito, trazado sobre la superficie, puede reducirse por una deformación continua á coincidir con un camino formado por uno ó varios de estos circuitos y por arcos recorridos dos veces en sentidos opuestos.




Estas consideraciones conducen al resultado de reducir un contorno cualquiera á otro simplemente conexo.

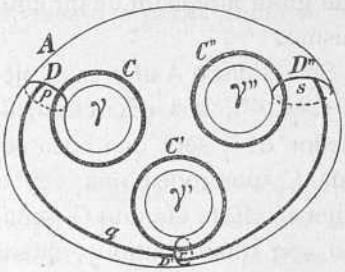
Sean las dos curvas C y D. Si se hace un corte según cada una de estas líneas, se podrá considerar cada una de ellas como compuesta de dos bordes; y el conjunto de las dos líneas dobles C y D formará una curva única, que se puede recorrer de una manera continua, sin franquear la sección. Se designa con el nombre de *retrosección (rückerschnitt)* al contorno único, formado con los bordes de las dos secciones.




*Ejemplo 1.°* Sea la función

$$w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$$

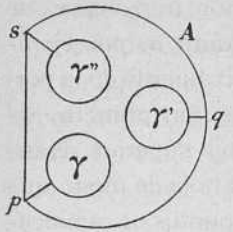
con dos puntos de ramificación $a$ y $b$.




Si se considera una región del plano que solo contiene uno de los dos puntos de ramificación, el $a$ por ejemplo, tendremos

$$u = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ip}{2}} \sqrt{re^{ip} + a - b} \quad \text{escribiendo} \quad z - a = re^{ip}.$$

Si hacemos describir al punto $z$ alrededor del punto $a$ un contorno que deja al exterior al punto $b$, el factor radical tiene dos determinaciones de signo contrario, que sólo pueden confundirse anulándose; porque sólo así se puede pasar de la una á la otra por variación continua. Pero este factor no se anula en el interior del contorno descrito; luego conserva en toda la extensión limitada de un contorno su determinación inicial, y vuelve á tomar el mismo valor, cuando $z$ vuelve á la misma posición $x + iy$. El factor $r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ip}{2}}$, al contrario, toma un valor opuesto




$$r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ip}{2} + \pi i} = r^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{ip}{2}},$$

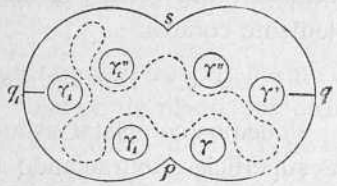
cuando $z$ da una vuelta alrededor de $a$; luego $u$ pasa de una de sus determinaciones á la otra, cuando $z$ da una vuelta alrededor de $a$.

El mismo razonamiento se hará respecto á $b$. En fin, $w$ adquirirá su determinación inicial, cuando $z$ describa un contorno que contenga en su interior á los dos puntos $a$ y $b$. Hagamos

$$z - a = re^{ip}, \qquad z - b = r' e^{ip}$$

tendremos que

$$u = (rr')^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{p+p'}{2}}.$$



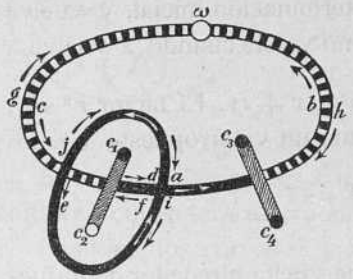

Pero si $z$ da una vuelta alrededor de los puntos $a$ y $b$, cada uno de los argumentos $p$ y $p'$ variará en $2\pi$; luego $\frac{p+p'}{2}$ variará también en $2\pi$, y $w$ adquirirá su valor primitivo.

Sea la esfera correspondiente á la función

$$\sqrt{(z - c_1)(z - c_2)(z - c_3)(z - c_4)}.$$

Tiene 2 hojas y dos líneas de parada $c_1c_2$, $c_3c_4$. Efectuemos en la hoja inferior, por ejemplo, una abertura $\omega$; y desde los bor-

des de ésta hagamos partir una sección transversa que encuentra á las dos líneas de paso, cuya porción, indicada con trazos llenos se halla en la parte superior, mientras que la otra, indicada con trazos de puntos, se halla en la inferior, de manera que ninguna de las hojas queda dividida.




Para establecer la comunicación entre los dos bordes, tracemos una sección transversa que parta de un punto $a$, por ejemplo, del borde izquierdo de la porción de la sección primera, situada en la hoja superior, avanzando en esta hoja de modo que rodee los dos puntos de ramificación $c_1$ y $c_2$, volviendo al punto $i$ situado frente al $a$ en el otro borde de la sección $a_\omega$. Los bordes de estas dos secciones formarán ahora un contorno continuo *abcdefghija* que, recorriendo en el sentido indicado por las letras, rodea completamente al área total de las dos hojas de la esfera, dejando á esta área á la izquierda; luego con auxilio de las dos secciones transversas, se ha cambiado la esfera en un área simplemente conexa.

### § 5.° Diferentes órdenes de conexiones

Podemos completar esta exposición relativa á la conexión de las superficies, extractando la síntesis hecha por el Sr. E. Pascal (*), hecha según los trabajos de Neumann, Betti, Dyck, etc.

Definiciones. Una superficie es *abierta* ó *cerrada*. Es *abierta* cuando tiene bordes, es decir, líneas en cuyos puntos termina, y *cerrada* en el caso contrario.

Un área infinitesimal alrededor de un punto de una superficie puede considerarse por sus dos lados ó caras opuestas que corresponden á las direcciones de la normal á la superficie en dicho punto, y con relación á éste, todo punto puede conside-

(*) *Repertorio de Matematiche superiori. (II Geometria)*

rarse como doble, según que se la suponga como perteneciente á la una ó á la otra dirección. Diremos en este caso, que los dos puntos en los cuales un mismo punto se considera desdoblado, *son conjugados* respectivamente.

Una superficie es *bilátera* cuando, á partir de un punto de misma y siguiendo caminos continuos en ella, sin atravesar los bordes ó contornos, no se puede unir nunca al conjugado del punto de partida.—*Ejemplos:* La esfera, una porción de plano.

Consideremos ahora una superficie analítica en el espacio de tres dimensiones. Sea un rectángulo ABCD, el que después de haber unido AB con CD, se hace girar AB alrededor del punto medio común, hasta que D coincida con A y B con C. Tendremos una superficie limitada por un contorno ó frontera, que se superpone á sí misma y que constituye una *variedad doble,* según la denominación del Sr. Picard, ó una variedad analítica ó de una cara, según el Sr. Poincaré, es además *abierta, de un sólo borde.*

Se puede formar también una superficie *unilátera, cerrada,* del siguiente modo. (Möbius).

Si A, B, C, D, E son cinco puntos, cuatro de los cuales no se hallan en plano, los cinco triángulos ABC, BCD, CDE, DEA, EAB constituyen una *superficie unilátera, abierta,* cuyo contorno es el pentágono ACEBD.

Pero si se toma un punto P que junto con tres cualesquiera de los cinco puntos dados, no se halle en un plano, los otros cinco PAC, PCE, PEB, PBD y PDA son caras de un poliedro que constituye una *superficie unilátera cerrada.*

También, si imaginamos una *esfera* con dos *agujeros,* y desde el uno hacemos partir un tubo exteriormente, haciéndolo después entrar en la esfera, formando un lazo y terminando en el otro agujero, pero encontrando á la esfera en el interior, tendremos una superficie *cerrada unilátera.* (Dyck. Math. An. XXXII).

108. Cortes en las superficies. Un corte *(sección)* puede ser *abierto* ó *cerrado.* Los cortes abiertos cuyos extremos sean dos puntos del mismo borde, son de *primera especie,* y aquéllos en los que son puntos de borde distinto, son de *segunda especie.*

Un corte cerrado ó abierto de primera ó segunda especie no puede dividir una superficie en más de dos partes.

Si una superficie es bilátera, un *corte abierto* de primera especie *aumenta* en 1 el número de los bordes; si una superficie es unilátera, un corte análogo *no cambia* el número de contornos *ó lo aumenta* en 1.

Un corte de 1.ª especie, será de 1.ª ó 2.ª *clase*, según que *aumente ó no*, en la superficie unilátera el número de bordes.

El corte de 1.ª *especie* y de 2.ª *clase* no divide nunca una superficie unilátera. Un corte de 2.ª especie *disminuye* en 1 el número de sus bordes, y no puede nunca dividirla.

Un corte efectuado á lo largo de una línea abierta, cuyos extremos se hallan, el uno en un punto de un borde y el otro en el interior de la superficie, no aumenta el número de los bordes ni divide la superficie.

Si una superficie es *bilátera*, un corte cerrado *aumenta* en 2 el número de los bordes; y si es *unilátera*, un corte cerrado aumenta en 2 ó en 1 el número de los bordes. Diremos que el *corte cerrado* en una superficie *unilátera* es de 1.ª ó 2.ª clase, según que se verifica lo uno ó lo otro.

Un corte cerrado de 2.ª *clase* no divide nunca una superficie unilátera.

Una superficie *simplemente conexa* es siempre *bilátera*.

Se pueden siempre efectuar en una superficie *bilátera* cortes cerrados ó abiertos de *primera ó de segunda especie*, que la reduzcan á una superficie *simplemente conexa*.

Con cortes *abiertos* de 1.ª *especie* y de 2.ª *clase* ó *cerrados de 2.ª clase*, puede siempre reducirse á *bilátera* una superficie *unilátera*.

Consideremos una superficie dividida en un número finito $\alpha$ de partes, cada una simplemente conexa; y supongamos que para conseguir esto, hemos efectuado: cierto número de cortes cerrados y cortes abiertos, de los cuales un solo extremo pertenezca á un borde, y después $\tau_1$ cortes abiertos de 1.ª especie, $\tau_2$ cortes abiertos de 2.ª, $\tau_3$ cortes abiertos interiores á la superficie, siendo también interiores sus extremos, se tendrá que:

*El número* $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 - \alpha$ *es constante de cualquier modo que se efectúen los cortes*, según se ha visto ya (pág. 290).

Este número aumentado en 2, suele llamarse el *número fundamental* de la superficie.

Si en vez de una superficie se tiene un grupo de $s$ de las mismas, se podrá enunciar el siguiente teorema:

*El número fundamental* K *del grupo, se expresa mediante los números fundamentales* $K_i$ *de cada una de las superficies, por la fórmula*

$$K = \sum_{i=1}^{s} K_i - 2s + 2.$$

Para terminar este resumen que hace el Sr. Pascal acerca de la conexión de las superficies, indicando que se entiende por *género* de una superficie el *máximo* número de cortes cerrados ó abiertos de 1.ª especie que pueden ejecutarse en ella sin dividirla, citaremos las siguientes proposiciones:

*Si* p *es el género de una superficie bilátera, abierta ó cerrada, el número fundamental* K, *se halla dado por*

$$K = 2p + \omega,$$

siendo $\omega \geqq$ o el número de bordes.

*Género* de una superficie unilátera es el número representado por la suma del número de cortes cerrados de 2.ª clase ó abiertos de 1.ª especie y de 2.ª clase, que se necesitan para reducirla á bilátera y de doble género que el de esta superficie.

*Si* $\pi$ *es el género de la superficie unilátera abierta ó cerrada, con* $\omega \geqq$ o *bordes y* K *es el número fundamental, se tiene*

$$K = \pi + \omega.$$

Se llama *orden de conexión* ó *conexión* de una superficie cualquiera, el número K + 2 *si es cerrada, ó el* K *si es abierta.*

*Un agujero aumenta en* 1 *la conexión de una superficie abierta y disminuye en* 1 *la conexión de una superficie cerrada, aumentando siempre en* 1 *el número fundamental* (*).

(*) *Repertorio di Matem. sup. II Geometría.*

# CAPÍTULO II

## Variedades ó espacios

### § 1.º Algunas definiciones relativas al hiperespacio

**109.** La Geometría ó su lenguaje facilita la exposición de ciertas teorías puramente algebráicas; pero no pudiendo extenderse las consideraciones geométricas á más de tres variables, se ha creado una geometría ficticia, llamada *teoría del hiperespacio* ó *geometría* de *n dimensiones*.

Un conjunto de $n$ variables $x_1, x_2, \ldots . x_n$ constituye un punto. En la geometría de $n$ dimensiones, una ecuación representa una *superficie* ó una variedad de $n - 1$ dimensiones, una ecuación de primer grado representa un *plano*, la ecuación

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots . + (x_n - a_n)^2 = R^2$$

representa una *hiperesfera* de centro $(a_1, a_2, \ldots . , a_n)$ y de radio R.

La distancia de dos puntos $(x_1, x_2, \ldots .)$ y $(x'_1, x'_2, \ldots .)$ se expresa por

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \ldots .}$$

La recta que une dichos dos puntos se representa por las ecuaciones

$$\frac{X_1 - x_1}{x_1 - x'_1} = \frac{X_2 - x_2}{x_2 - x'_2} = \ldots . = \frac{R}{r},$$

expresando R la distancia de los puntos $(X_1, X_2, \ldots .)$ y $(x_1, x_2, \ldots .)$ y $r$ la de los puntos $(x_1, x_2, \ldots .)$ y $(x'_1, x'_2, \ldots .)$

«La Geometría de $n$ dimensiones, dice M. Poincaré, tiene un

objeto real. Los seres del hiperespacio son susceptibles de definiciones precisas, como los del espacio ordinario; y si no nos los podemos representar, podemos concebirlos y estudiarlos. La analogía del nuevo lenguaje geométrico con el de la Geometría ordinaria, puede crear asociaciones de ideas fecundas y sugerir generalizaciones útiles».

Las figuras suplen la debilidad de nuestro espíritu, llamando á nuestros sentidos en su auxilio.»

«El empleo de las figuras tiene ante todo por objeto permitirnos conocer ciertas relaciones entre los objetos de nuestros estudios, y estas relaciones son aquéllas de las que se ocupa la rama de la Geometría llamada *Analysis Situs*, que describe la situación relativa de los puntos, de las líneas y de las superficies, sin considerar en absoluto su magnitud.» (*).

## § 2.° Variedades

**110.** Definición. Sean $n$ variables $x_1, x_2 \ldots, x_n$ que podemos considerar como las coordenadas de un punto en el espacio de $n$ dimensiones, que consideraremos como reales.

Un sistema cualquiera de $n$ variables se llama *un punto*.

Sea el sistema de $p$ igualdades y de $q$ desigualdades

$$\left.\begin{array}{ll} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 & \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 & \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ F_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 & \varphi_q(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

(*) El creador de esta teoría fué Riemann, que ya la dió á conocer con el nombre de *Analysis Situs*, en *Fragment aus der Analysis Situs*, y especialmente en sus aplicaciones á las funciones abelianas. La teoría de su célebre superficie es un capítulo del *Analysis Situs;* pero el origen de este concepto se halla en su célebre memoria *Ueber die Hypotesen, welche der Geometrie zu grunde liegen*, ó sea la teoría del *hiperespacio*.

Posteriormente Betti publicó una memoria fundamental en el t. IV de *Annali di Matematica* que el Sr. Poincaré ha completado en el *Journal de l' Ecole Polytechnique* y en *Rendiconti del Circolo matematico de Palermo*. Á estas investigaciones podemos agregar las hechas por el Sr. Picard en su *Théorie des fonctions algébriques*.

Supongamos que las funciones F y $\varphi$ son uniformes y continuas con derivadas continuas, y que los determinantes formados, tomando $p$ columnas cualesquiera del siguiente cuadro

$$\left.\begin{array}{llll} \dfrac{dF_1}{dx_2}, & \dfrac{dF_1}{dx_2}, & \ldots\ldots, & \dfrac{dF_1}{dx_n} \\ \dfrac{dF_2}{dx_1}, & \dfrac{dF_2}{dx_2}, & \ldots\ldots, & \dfrac{dF_2}{dx_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \dfrac{dF_p}{dx_1}, & \dfrac{dF_p}{dx_2}, & \ldots\ldots & \dfrac{dF_p}{dx_n} \end{array}\right\},$$

no sean nulos á la vez. El conjunto de los puntos que satisfacen á las condiciones (1) forma una *variedad de* n — p *dimensiones*. Si en particular $p = 0$, de modo que solo haya desigualdades, resultará una porción del espacio de $n$ dimensiones, que se llama *dominio*.

Si $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n)$ son dos puntos que satisfacen á las condiciones (1), y se puede hacer variar á $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ de una manera continua desde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ hasta $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_n$, sin que las relaciones (1) cesen de quedar satisfechas, se dirá en este caso, que la variedad definida por las condiciones (1) es continua.

Las variedades discontinuas se pueden descomponer en un número finito ó infinito de variedades continuas. Así, la variedad

$$x_2^2 + x_1^4 - 4x_1^2 + 1 = 0,$$

que es una curva de 4.° grado, puede descomponerse en las dos:

$$x_2^2 + x_1^4 - 4x_1^2 + 1 = 0, \qquad x_1 > 0,$$

$$x_2^2 + x_1^3 - 4x_1^2 + 1 = 0, \qquad x_1 < 0.$$

Se dirá que una variedad es *finita*, si todos sus puntos satisfacen á la condición

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 < K^2.$$

siendo K una constante dada. Consideremos ahora el sistema de relaciones

$$\left.\begin{array}{ll} F_\alpha = 0, & (\alpha = 1, 2, \ldots\ldots, p), \\ \varphi_\beta = 0, & \\ \varphi_\gamma > 0 & \left(\gamma \gtrless \beta\right) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

que se compone de $p + 1$ igualdades y de $q - 1$ desigualdades.

Puede suceder, ó que no exista ningún punto que satisfaga á dichas condiciones, ó que existan, en cuyo caso formarán una variedad continua ó no, que tenga, por lo menos, $n - p$ dimensiones.

Se llama *frontera completa* de la variedad definida por las condiciones (1), al conjunto de puntos que satisfacen á uno de los $q$ sistemas de relaciones

$$\left.\begin{array}{llll} F_\alpha = 0, & \varphi_1 = 0, & \varphi_\gamma > 0, & \left(\gamma \gtrless 1\right), \\ F_\alpha = 0, & \varphi_2 = 0, & \varphi_\gamma > 0, & \left(\gamma \gtrless 2\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ F_\alpha = 0, & \varphi_q = 0, & \varphi_\gamma > 0, & \left(\gamma \gtrless q\right) \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Una frontera de una variedad, multiplicidad ó espacio $S_{n-p}$ es una variedad de orden $n - p - 1$ que impide la continuación de $S_{n-p}$.

Una frontera está formada por el conjunto de los puntos correspondientes á una de las desigualdades relativas á los parámetros, cuando se ha transformado en igualdad. Siendo, por ejemplo, para cierta representación paramétrica

$$P(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_{n-p}) > 0$$

una desigualdad á que deben satisfacer los parámetros $u$, la relación

$$P(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_{n-p}) = 0$$

definirá una parte de la frontera, en el dominio correspondiente. La función, es susceptible de anularse cambiando de signo.

En el caso de no existir ninguna variedad de $n - p - 1$ dimensiones que satisfagan á uno de los $q$ sistemas (3), se dice que la variedad definida por las condiciones (1) es *ilimitada*. En el caso contrario es limitada.

Se dice que una variedad es *cerrada* cuando es á la vez finita continua é ilimitada. Una variedad que *no tiene frontera* es *cerrada*.

Para abreviar el lenguaje, se llaman *superficies* á las variedades de $n - 1$ dimensiones excepto para $u$ -- $z$ y *curvas* á las de una (*).

111. HOMEOMORFISMO. El Sr. Poincaré considera el sistema de funciones

$$x'_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (4)$$

que en cierto dominio son uniformes finitas y continuas, sin anularse su determinante funcional, y las ecuaciones que resultan de resolver las ecuaciones (4) con relación á $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$x_k = \varphi'_k(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

satisfaciendo las funciones $\varphi'_k$ á las mismas condiciones que las $\varphi_i$, y define el *Analysis situs* como la ciencia cuyo objeto es el estudio del grupo que forma el conjunto de las sustituciones que cambian $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, según dichas condiciones, y de otros grupos análogos.

Una sustitución del grupo considerado transforma una variedad de $m$ dimensiones en otra de $m$ dimensiones, siendo la variedad transformada continua, ó finita ó limitada cuando lo sea la que se da; y para definir la propiedad de homeomorfismo, el Sr. Poincaré considera dos variedades V y V′ de igual número de dimensiones definidas respectivamente por las condiciones

$$\left.\begin{aligned} F_\alpha &= 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p), \\ \varphi_\beta &> 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, q), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(*) H. Poincaré. *Analysis situs*. (Journ. d. l' Ecole Politech. II serie, 1.er Cahier).

$$\text{y} \qquad \left.\begin{aligned} F'_\alpha &= 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, p), \\ \varphi'_\beta &> 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, q), \end{aligned}\right\} \qquad (5 \text{ bis.})$$

suponiendo que se puede hacer corresponder á un punto $x_1, x_2, \ldots x_n$ de la variedad V, un punto $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ de la variedad V', de modo que se tenga

$$x'_k = \psi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (6)$$

Esto sentado, si tenemos el dominio D definido por las desigualdades

$$F_\alpha > -\varepsilon, \qquad F_\alpha < \varepsilon, \qquad \varphi_\beta > 0,$$

la variedad V se halla por completo contenida en el dominio D, suponiéndose que *en el dominio* D las funciones $\varphi_k$ son finitas, continuas y uniformes, sin ser en ningún caso nulo su determinante funcional.

Si ahora resolvemos las ecuaciones (6), hallaremos

$$x_k = \psi'_k(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (7)$$

Consideremos enseguida el dominio D' definido por las desigualdades

$$F'_\alpha > -\varepsilon, \qquad F'_\alpha < \varepsilon, \qquad \varphi'_\beta > 0,$$

en el qne las funciones $\psi'_k$ son también finitas, continuas y uniformes, con derivadas continuas, no siendo nulo su determinante funcional. Entonces á todo punto de V corresponde uno y sólo un punto de V' é inversamente. A toda variedad de W contenida en V corresponderá una variedad W' de igual número de dimensiones, contenida en V'. Si W es continua, finita ó ilimitada, también lo será W' é inversamente.

Cuando todas estas condiciones se verifican, se dice que las dos variedades son equivalentes, y se llaman *homeomorfas*, es decir, de igual forma.

## § 3.° Nueva definición de las variedades

**112.** Continuación analítica. Sean las $n$ ecuaciones

$$x_1 = \theta_1(y_1, \ldots\ldots, y_m), \quad x_2 = \theta_2(y_1, \ldots\ldots, y_m), \ldots\ldots,$$
$$x_n = \theta_n(y_1, \ldots\ldots, y_m), \tag{8}$$

que pueden representar una variedad de $m$ dimensiones, si las $y$ se consideran como independientes.

También se tendrá una variedad de $m$ dimensiones, si se adjuntan á las ecuaciones (8) cierto número de desigualdades de de la forma

$$\psi(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_m) > 0,$$

que limitan el campo de variación de las $y$.

Supongamos que las funciones $\theta$ son finitas y continuas; pero sin restringir la generalidad, puede suponerse que las funciones sean analíticas; pues si las funciones $\theta$ son finitas y continuas, se podrán obtener funciones analíticas $\theta'$ que difieran de las $\theta$ en tan poco como queramos.

Supondremos además que no se anulan simultáneamente los determinantes funcionales de $m$ de las funciones $\theta$ con relación á las $y$.

Se obtendrá una variedad que no difiera de la primera sustituyendo las $y$ en las ecuaciones (8) por $m$ funciones analíticas cualesquiera de $m$ variables $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_m$.

El alcance de esta definición se extiende por el procedimiento de la continuación analítica.

Consideremos dos variedades V y V' definidas por ecuaciones análogas á las (8) y sean respectivamente para V y V' las ecuaciones

$$x_i = \theta_i(x_1, y_2, \ldots\ldots, y_m), \quad x_i = \theta'_i(y'_1, y'_2, \ldots\ldots, y'_m).$$

Puede suceder que dichas dos variedades tengan una parte común V'' también de $m$ dimensiones, es decir que todos los puntos de V'' pertenezcan simultáneamente á V y á V'. Entonces las $y$, en el interior de V'', serán funciones analíticas de V y de V' é inversamente: y se dirá que las dos variedades V y V' son *la continuación analítica,* la una de la otra.

Podremos de esta manera formar una cadena continua de variedades

$$V_1, V_2, \ldots\ldots, V_n$$

tales, que cada una sea la continuación analítica de la anterior, existiendo entre dos variedades consecutivas una parte común, á la que llama el Sr. Poincaré una *cadena continua.*

Puede suceder que la cadena sea cerrada, es decir, que $V_n$ no difiera de $V_1$.

Se puede tener también una red de variedades, ó un conjunto de éstas tal, que cada una sea la continuación de otras varias, pudiéndose pasar de una cualquiera de entre ellas á otra también cualquiera por continuación analítica, lo que se llama *una red continua.*

Expuestas estas definiciones, bastará añadir que el Sr. Poincaré demuestra la mayor extensión de esta definición respecto á la primera, de manera que toda variedad que satisface á la primera definición, satisface á la segunda, sin verificarse la recíproca. Nos bastará resumir su razonamiento, diciendo que parte de $n$ ecuaciones de la forma $y_k = F_k(x_1, \ldots\ldots, x_n)$; y por ser las F funciones holomorfas de las $x$, cuyo determinante funcional no se anula, se pueden resolver respecto á las $x$, resultando $x_i = \theta_i(y_1 \ldots\ldots, y_n)$.

Considerando una variedad V que satisface á las condiciones (1) de la primera definición y las $n-p$ funciones $F_{p+1}, F_{p+2}, \ldots,$ $F_n$ holomorfas respecto á las $x$. Las somete á la condición de que si $x_1^0, x_2^0, \ldots\ldots, x_n^0$ es un punto cualquiera $M_0$ de la variedad V, el determinante funcional de las $n$ funciones F no se anula para $x_i = x_i^0$, lo que es posible, y que $F_{p+1}, \ldots\ldots, F_n$

se anulen en dicho punto. Entonces se puede resolver las ecuaciones $y_k = F_k$ con relación á las $x$, que se expresarán por series ordenadas según las potencias de las $y$; y con las ecuaciones $x_i = \theta_i$ y las desigualdades $\lambda_k(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) > 0$, que son las condiciones por satisfacer, para que las series sean convergentes; haciendo enseguida $y_1 = y_2 = \ldots\ldots y_p = 0$, las $p$ primeras ecuaciones propuestas no difieren de las $p$ ecuaciones (1), y las funciones $\theta_i$ sólo dependen de $n - y = m$ variables, y son de la forma (8). Entonces el conjunto de las relaciones

$$x_i = \theta_i, \qquad \varphi_\beta > 0, \qquad \lambda_k(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n) > 0$$

representará una variedad $v$, que quedará definida de la segunda manera, y que no difiriendo de

$$F_\alpha = 0, \qquad \varphi_\beta > 0, \qquad \lambda_k > 0,$$

formará parte de V. El punto $M_0$, que es un punto cualquiera de V, forma parte de $v$; y se podrá construir alrededor de un punto cualquiera de V una variedad análoga á $v$.

113. Variedades opuestas. Definida una variedad V de la primera manera; si dos de las ecuaciones que la definen se permutan, se dirá que el sistema de relaciones no representa ya dicha variedad, sino una *variedad opuesta* á V. Y si la variedad se halla definida de la segunda manera; sustituyendo las $y$ por $m$ funciones analíticas de las $m$ nuevas variables $z_1, z_2, \ldots\ldots z_m$ tales, que se tenga

$$x_i = \theta'_i(z_1, z_2, \ldots\ldots, z_m);$$

estas ecuaciones representarán todavía V ó la variedad opuesta; y supuesto que el determinante funcional $\Delta$ de las $y$ respecto á las $z$ no se anula, este conservará el mismo signo; y se convendrá en decir que si $\Delta$ es positivo ó negativo, las nuevas ecuaciones representarán la variedad V ó la opuesta.

## § 4.° Variedades unilátera y bilátera

Para definir de una manera general una variedad unilátera, consideremos, siguiendo la exposición del Sr. Picard, en su *Traité d' Analyse*, en la proximidad de un punto A, que suponemos no se halle en una frontera, una representación paramétrica. Podremos deducir de esta representación, entre las coordenadas $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ de un punto cualquiera suficiente próximo de A, $m$ relaciones de la forma

$$F_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0, \ldots\ldots,$$
$$F_m(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0,$$

siendo las F holomorfas alrededor de las coordenadas $x_1^0, \ldots\ldots x_n^0$ de A. Consideremos además $n - m - 1$ formas cuadráticas homogéneas en $x_1 - x_1^0, \ldots\ldots, x_n - x_n^0$, definidas y linealmente independientes; las supondremos positivas, designándolas por

$$\lambda_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n), \ldots\ldots, \quad \lambda_{n-m-1}(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n).$$

Esto sentado, adjuntemos las $n - m - 1$ ecuaciones

$$\lambda_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, n - m - 1),$$

en las que $\varepsilon_i$ son cantidades muy pequeñas. Tendremos $n - 1$ ecuaciones que definen una curva cerrada C muy pequeña alrededor del punto A, situada en el espacio $S_{n-m}$, en la cual debe señalarse cierto sentido con una flecha.

Supongamos ahora que A se mueve en $S_{n-m}$. Por medio de prolongaciones paramétricas sucesivas y de las ecuaciones auxiliares $\lambda_i = \varepsilon_1$, en las cuales se sustituyen cada vez $x_1^0, \ldots, x_n^0$ por las coordenadas actuales de A. Podemos considerar que el punto A, durante su movimiento, arrastre con él la curva cerrada C, que se deforma al mismo tiempo, para la cual la dirección de la flecha está señalada sin ambigüedad desde el origen.

En el caso de que vuelva A á su punto de partida, después de haber seguido en $S_{m-n}$, un camino cerrado cualquiera, sin atravesar ninguna frontera, colocándose la curva C en su posición inicial, de manera que *coincidan los dos sentidos* de la flecha, la variedad será *simple*, no recubriéndose. En otro caso, si para ciertos caminos cerrados, descritos por A, se obtiene á la llegada sentido opuesto de la flecha, la variedad es *doble*.

Podríamos también considerar en el espacio $E_n$ una semirecta que pase por A, siendo $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ los parámetros, de modo que sus ecuaciones sean

$$\frac{x_1 - x_1^0}{A_1} = \frac{x_2 - x_2^0}{A_2} = \ldots\ldots = \frac{x_n - x_n^0}{A_n}$$

y con la condición además, de ser

$$A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \ldots\ldots + A_n dx_n = 0.$$

Podremos definir la normal á la variedad $S_{n-1}$, y considerar en ésta dos semi-direcciones. Entonces el espacio $S_{n-1}$ será simple si, partiendo de una semi-normal determinada, se vuelve siempre al mismo tiempo con la misma dirección normal, y será doble en el caso contrario.

## § 5. Diferentes órdenes de conexión de los espacios de *n* dimensiones

Definiciones. Ya hemos visto que si $z_1, z_2, \ldots\ldots, z_n$ son $n$ variables que pueden tomar todos los valores reales desde $-\infty$ hasta $+\infty$, el campo $n$ veces infinito de los sistemas de valores de estas variables se llama *espacio de* n *dimensiones*.

Un sistema de $p$ ecuaciones entre las $z$ determina un espacio de $n-p$ dimensiones *contenido* en el espacio $E_n$.

Se dice que un espacio $E_{n-p}$ contenido en $E_n$ es *linealmente conexo* ó que tiene la conexión de 1.ª *especie*, cuando dos de sus puntos pueden siempre unirse con una línea totalmente contenida

en el mismo, es decir, cuando se puede transportar con continuidad un punto al otro, permaneciendo siempre en $E_{n-p}$.

Si $F(z_1, \ldots, z_n) = 0$ es una relación entre las $z$, siendo F continua y de un sólo valor para todos los sistemas de valores reales de las $z$, el espacio $E_{n-1}$ representado por $F = 0$, separará en general el espacio $E_n$ en dos regiones, para una de las que $F > 0$ y para otra $F < 0$. Si dichas dos regiones son linealmente conexas, se dirá que el espacio $E_{n-1}$ es cerrado.

Se dirá que un espacio $E_{n-p}$ tiene la *conexión superficial* ó de 2.ª *especie*, si cualquier línea cerrada contenida en el mismo puede siempre deformarse continuamente hasta coincidir con otra análoga, permaneciendo siempre en $E_{n-p}$. Diremos que $E_{n-p}$ tiene la conexión de *especie* $r^{\text{sima}}$, si todo espacio cerrado de $r - 1$ dimensiones en él contenido, puede continuamente deformarse en otro análogo, sin cesar de pertenecer en todos los estados de su deformación, á $E_{n-p}$.

Teorema. *Si un espacio* $E_{n-p}$ *no tiene la conexión de* $r^{\text{sima}}$ *especie, se podrán designar en el mismo espacios cerrados de* $r - 1$ *dimensiones tales, que dos de ellos no sean deformables con continuidad el uno en el otro, ni cada uno reducirse á un punto, pero que otro espacio cerrado sea siempre deformable en uno de ellos ó en un punto. El número* $m_r$ *de dichos espacios es constante. El número* $m_r + 1$ *se llama orden de conexión de* $r^{\text{sima}}$ especie.

Para un espacio que tiene la conexión de $r^{\text{sima}}$ especie, el número correspondiente $m_r$ es cero, el orden de la conexión $r^{\text{sima}}$ es 1.

El orden de la conexión lineal es 1 y el de la conexión superficial 2, en la porción del plano comprendida entre dos círculos interior el uno al otro.

Entre dos esferas, el orden de la conexión lineal es 1, el de la conexión superficial 1 y el de la espacial 2.

El espacio comprendido en un anillo ó toro, tiene la conexión lineal simple (de 1.er orden), la superficial doble (de 2.º orden), la espacial simple.

El espacio comprendido entre dos anillos, uno interior al

otro, tiene la conexión lineal simple, la superficial doble y la espacial doble (*).

Los órdenes de conexión de un espacio ó variedad con relación á los espacios ó variedades de

$$1.\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ m-1$$

dimensiones se llaman *números de Betti.*

Los números de Betti para la región comprendida entre dos esferas son $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, para el interior de un toro, $P_1 = 2$, $P_2 = 2$, y para la región comprendida entre dos toros $P_1 = 1$, $P_2 = 2$ (**).

Supongamos que en el espacio ó variedad $E_n$ se puedan obtener $p_n - 1$ variedades cerradas de orden $m$,

$$V_1,\ V_2,\ \ldots\ldots,\ V_{p_m - 1}$$

que tengan las siguientes propiedades: Tomadas separadamente no forman frontera y, por una deformación continua no pueden reducirse una á otra; además, por $k_1$ variedades próximas á $V_2$, por $k_2$ variedades próximas á $V_2$, ..... por $k_{p_m - 1}$ variedades próximas á $V_{p_m - 1}$ no se puede hacer pasar una variedad $S_{m+1}$ completamente contenida en $E_n$, de la cual $k_1 + k_2 + \ldots + k_{p_m - 1}$ formen una *frontera completa*, cualesquiera que sean los números $k_1,\ k_2,\ \ldots\ldots$ (las variedades son de igual sentido).

Esto sentado, diremos que el orden de conexión de $E_n$ con relación á las variedades de $m$ dimensiones contenidas en esta variedad es $p_m$, si, habiéndose obtenido las $p_m - 1$ variedades precedentes, cuyo conjunto no forma una frontera completa en el sentido general según el que se ha definido, se puede siempre, adjuntándola una variedad cerrada $p_m^{\text{ésima}}$ de orden $m$, á saber V, contenida en $E_m$, determinar los enteros $k$ de manera que el conjunto formado por esta variedad sola y por $k_1$ variedades próximas á $V_1$, por $k_2$ variedades próximas á $V_2$, ....., por $k_{p_m - 1}$ variedades próximas á $V_{p_m - 1}$, forme una frontera completa.

(*) Poincaré *Analysis situs*, pág. 21. (**) *G. Loria.* Repert. d. Mat. II p. 794.

Esta definición se halla justificada por el siguiente lema: Si en una variedad $E_n$ un sistema A, juntamente con otro sistema C, formados los dos de variedades cerradas de $m$ dimensiones, forma una frontera completa; y si otro sistema B de variedades cerradas de $m$ dimensiones forma con C una frontera completa, se puede afirmar que el conjunto de las variedades no comunes con A y B forma una frontera completa en $E_n$, es decir, que existe una variedad de orden $m + 1$ contenida en $E_n$ sobre la cual este conjunto forma frontera completa.

Sean, en efecto, $S_{m+1}$ y $S'_{m+1}$ dos variedades de $m + 1$ dimensiones contenidas en $E_n$ y en las cuales A y C por una parte, B y C por otra, formen respectivamente frontera. Unamos un punto de $S_{m+1}$ á un punto de $S'_{m+1}$ por una línea continua, y consideremos una variedad de orden $m + 1$ suficientemente pequeña, moviéndose á lo largo de esta línea. Esta variedad engendrará otra de orden $m + 1$, que reunirá, de una manera continua, las dos variedades $S_{m+1}$ y $S'_{m+1}$, formando una sola $S''_{m+1}$ en la que A y C por una parte, B y C por otra, formarán frontera. Toda curva cerrada perteneciente á $S''_{m+1}$ cortará al conjunto de las variedades no comunes á A y B en un número par de puntos.

Demostrado este lema, el Sr. Picard demuestra que: Si $V_1$, $V_2$, ..... $V_{p_m}$ expresan $p_m$ variedades cerradas, en una variedad $E_n$, cuyo orden de conexión con relación á las variedades de $m$ dimensiones en $p_m$, se podrán obtener $p_m$ números enteros $k_1$, $k_2$, ..... $k_{p_m}$ tales, que el conjunto formado por las variedades $k_1 V_1$, $k_2 V_2$, ..... $k_{p_m} V_{p_m}$ forme frontera completa. (*).

## § 6.° Representaciones de las variedades

**114.** Representación geométrica. Consideremos en el espacio ordinario cierto número de poliedros

$$P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n.$$

(*) *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes*, p. 30-31.

Podemos suponer que existe en un espacio de cuatro dimensiones cierto número de variedades de tres dimensiones

$$Q_1, Q_2, \ldots\ldots, Q_n$$

respectivamente homeomorfas con $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_n$.

Sean $C_1$ una cara del poliedro $P_1$ y $\Phi_1$ el conjunto de puntos de la frontera de $Q_1$ correspondientes á los diversos puntos de $C_1$, y análogamente $C_2$ una cara de $P_2$, $\Phi_2$ la *imagen* de esta cara en la frontera de $Q_2$. Puede suceder que $\Phi_1$ coincida con $\Phi_2$. En este caso, las dos variedades $Q_1$ y $Q_2$ son contiguas, y se pasa del interior de la una al interior de la otra, atravesando $\Phi_1$. En este caso diremos que $C_1$ y $C_2$ son *conjugadas*.

Podrá suceder que $C_1$ y $C_2$ pertenezcan á un *mismo* poliedro $P_1$. Entonces la variedad de dos dimensiones $\Phi_1$, que no difiere de la variedad de dos dimensiones $\Phi_2$, separará entre sí dos partes de la variedad $Q_1$.

Por ejemplo, si consideramos un rectángulo ABCD y un toro, en el que hacemos dos cortes, á saber: una circunferencia meridiana y un paralelo, cuyo punto de intersección es H, la superficie del toro entonces será homeoforma con el rectángulo. Los dos bordes del corte formado por el meridiano, corresponderán á los dos lados AB y CD del rectángulo, y los bordes formados por el paralelo corresponderán á los lados AD y BC. El rectángulo corresponde al poliedro $P_1$ el toro seccionado á la variedad $Q_1$, los lados AB y CD á las caras $C_1$ y $C_2$, los cortes de la sección meridiana á las variedades $\Phi_1$ y $\Phi_2$, que coinciden.

Supongamos ahora que entre las caras de $n$ poliedros $P_i$ existan algunas que sean conjugadas dos á dos y que otras queden libres.

Sea la variedad total V formada por el conjunto de las variedades $Q_i$. Como varias de éstas son contiguas, podrá hacerse que la variedad V sea continua, lo que suponemos. Si entre las caras $P_i$ no hay ninguna *libre*, la variedad V será cerrada. En el caso contrario, los puntos correspondientes á las caras que permanezcan libres formarán la frontera completa de V.

Se ve que el conocimiento de los poliedros $P_i$ y del modo de conjugación de sus caras dan, en el espacio ordinario, una imagen de la variedad V.

A dos caras conjugadas corresponde, por definición, una misma variedad de dos dimensiones interior á V. Puede hacerse que á varias aristas de un poliedro P corresponda una línea interior á V, ó que á varios vértices de estos poliedros corresponda un mismo punto en el interior de V. Diremos entonces que estas aristas ó estos vértices pertenecen á un mismo ciclo.

Veamos cómo se forman estos ciclos.

Sea $A_1$ una arista $C'_1$ una de las dos caras que pasan por $A'_1$, $C_2$ la conjugada de $C'_1$. $A_2$ la arista de $C_2$ que corresponde á $A_1$; $C'_2$ otra cara que pasa por $A_2$; $C_3$ la conjugada de $C'_2$, $A_3$ la arista correspondiente á la arista $A_2$, etc. Se terminará cuando se llegue á una cara libre ó se haya vuelto á la arista $A_1$. Las aristas $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..... forman un ciclo.

Sea con respecto á los vértices $S_1$ un vértice, $C'_1$ una de las caras que pasan por él, $C_2$ la conjugada de $C'_1$; $S_2$ el vértice correspondiente á $S_1$; $C'_2$ una de las caras que pasan por $S_2$, ..... $S_1$, $S_2$, $S_3$, ..... pertenecen á un ciclo. (*Analysis Situs*, páginas (47 y 48).

*Ejemplo.* Consideremos el cubo ABCD'A'B'C'D' en el que existe el siguiente modo de conjugación

$$ABCD \equiv B'D'C'A', \quad ABB'A \equiv DD'C'C, \quad ACC'A' \equiv DD'B'B.$$

Se obtiene: 1.° cuatro ciclos de aristas

$$AB \equiv B'D' \equiv C'C, \qquad AA' \equiv C'D' \equiv DB,$$
$$AC \equiv DD' \equiv B'A', \qquad CD \equiv BB' \equiv A'C,$$

2.°, dos ciclos de vértices

$$A \equiv B' \equiv C' \equiv D, \qquad B \equiv D' \equiv A' \equiv C.$$

Representación por un grupo discontinuo. Sean $(x, y, z,)$

un punto del espacio ordinario y una serie de sustituciones que cambian respectivamente $x, y, z$ en

$$\begin{array}{lll} \varphi_1(x, y, z), & \psi_1(x, y, z), & \chi_1(x, y, z), \\ \varphi_2(x, y, z), & \psi_2(x, y, z), & \chi_2(x, y, z), \\ \cdots\cdots\cdots\

Este grupo $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ es discontinuo. Para demostrarlo, basta ver cómo se hallan distribuídos en el espacio los transformados de un mismo punto

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c.$$

Desde luego, todos los transformados de este punto, se hallarán comprendidos en la fórmula

$$x = a + k, \quad y = b + k_1, \quad z = c, \qquad (2)$$

por una combinación cualquiera de las dos primeras sustituciones, expresando $k$ y $k_1$ dos enteros; y es fácil ver que estas dos sustituciones son permutables.

Transformemos el conjunto de los puntos (2) por la tercera sustitución. Tendremos (3)

$$x = \alpha(a + k) + \beta(b + k_1), \quad y = \gamma(a + k + \delta(b + k_1), \quad c = z + 1.$$

Hagamos para abreviar,

$$\alpha a + \beta b = a_1, \qquad \gamma a + \delta b = b_1;$$

de manera que el punto $(a_1, b_1)$ sea el transformado del $(a, b)$ por la sustitución

$$(x, y; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) \equiv s.$$

Podemos sustituir las ecuaciones (3) por las siguientes:

$$x = a + k', \quad y = b_1 + k'_1, \quad z = c + 1, \qquad (4)$$

siendo $k'$ y $k'_1$ dos nuevos enteros. Aplicando á estos puntos las dos primeras sustituciones, se obtienen nuevamente los mismos puntos.

Apliquémosles la tercera sustitución. Sea

$$a_2 = \alpha a_1 + \beta b_1, \qquad b_2 = \gamma a, + \delta b_1,$$

de manera que el punto $(a_2, b_2)$ sea el transformado por $s$ del $(a_1, b_1)$. Entonces los transformados de los puntos (4) por la tercera sustitución se hallarán comprendidos en la fórmula

$$x = a_2 + k'', \quad y = b_2 + k''_1, \quad z = c + 2,$$

siendo $k''$ y $k''_1$ dos enteros.

En general, supongamos que los transformados sucesivos del punto $(a, b)$ por la sustitución $s$ sean $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$, ..... $(a_n, b_n)$, y de igual manera que los transformados por la sustitución inversa sean $(a_{-1}, b_{-1})$, $(a_{-2}, b_{-2})$, ..... Entonces todos los transformados del punto $(a, b, c)$ por las sustituciones del grupo (1) estarán dados por la fórmula

$$x = a_n + k, \quad y = b_n + k_1, \quad z = c + n,$$

siendo $n$, $k$ y $k_1$ números enteros arbitrarios; y se ve que el grupo derivado de las dos primeras sustituciones es permutable á la tercera.

El dominio fundamental $D_0$ es un cubo cuyo lado es 1 y limitado por los seis planos $x; y; z = 0; 1$.

El caso más sencillo es aquél en el cual $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$, porque entonces las tres sustituciones se reducen á

$$(x, y, z; x + 1, y, z; x, y + 1, z; x, y, z + 1).$$

Cada una de ellas cambia una de las caras del cubo en la opuesta. Pero la manera de subdividirse la superficie del cubo $D_0$ en regiones conjugadas, no es tan sencilla. Sea por ejemplo,

$$\alpha = \beta = \delta = 1, \qquad \gamma = 0.$$

Cada una de las caras paralelas al eje de las $z$ será todavía conjugada con la cara opuesta; pero para las caras $z = 0$, $z = 1$ perpendiculares al eje de las $z$, habrá más complicación.

Supongamos que los puntos A, B, C, D y A′, B′, C′, D′ tengan las coordenadas

| | |
|---|---|
| A 0 0 0 | A′ 0 0 1 |
| B 0 1 0 | B′ 0 1 1 |
| C 1 0 0 | C′ 1 0 1 |
| D 1 1 0 | D′ 1 1 1 |

Cada una de las caras ABCD, A′B′C′D deberá dividirse en dos triángulos, á saber: ABC y BCD por una parte, A′D′C′ y

A'B'D' por otra, hallándose expresada la ley de conjugación de las caras por las relaciones

$$ACC'A' \equiv BDD'A', \quad CDD'C' \equiv ABB'A',$$
$$ABC \equiv A'D'C', \quad BCD \equiv B'A'D'.$$

Más generalmente, las caras paralelas al eje de las $z$ permanecerán conjugadas dos á dos; pero las caras perpendiculares al mismo deberán quedar descompuestas en polígonos más pequeños, tanto más numerosos cuanto más grandes sean los números $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, y que serán conjugadas dos á dos, según una ley más ó menos complicada.

Estas consideraciones conducen inmediatamente al concepto del grupo $g$ formado por *el conjunto de todas las sustituciones que se efectúan en las funciones* $F_1, F_2, \ldots F_\lambda$ *de las coordenadas* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *de un punto* M *de una variedad* V *definida por las relaciones* $f_\alpha = 0$, $\varphi_\beta > 0$, *cuando el punto* M *describe todos los contornos cerrados que pueden trazarse en una variedad* V, *partiendo del punto inicial* $M_0$. De este grupo se pasaría á la consideración del grupo isomorfo holoédrico, con el anterior, que se llama *fundamental*, y á cada una de cuyas sustituciones principales $S_1, S_2, \ldots$ corresponde un *contorno cerrado fundamental* $C_1, C_2, \ldots$, lo que conduce á los grupos fuschianos y á otras numerosas aplicaciones que no son objeto del presente tratado general, y que se hallan desarrolladas en la obra citada del Sr. Poincaré, en particular, y, en general, en los tratados de las funciones que en la actualidad se publican.

FIN DEL TOMO SEGUNDO

# ADICIONES

AL § 1.° DEL CAP. 1, LIBRO 2.° 1. Un método empleado para obtener la suma de una serie consiste en la diferenciación ó integración.

*Ejemplo 1.°* *Sumar la serie*

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots\ldots$$

*Solución.* Si representamos por $f(x)$ la suma que se busca, tendremos

$$f'(x)=1+x+x^2+\ldots\ldots+x^{n-1}+\ldots\ldots$$

ó $f'(x)=\dfrac{1}{1-x}$; luego $f(x)=-\log(1-x)$.

*Ejemplo 2.°* *Sumar la serie*

$$f(x)=1+2x+3x^2+\ldots\ldots+nx^{n-1}+\ldots\ldots$$

*Solución.* Esta ecuación da

$$\int f(x)dx=x+x^2+x^3+\ldots\ldots$$

$$+x^n+\ldots\ldots+C=\frac{1}{1-x}+C.$$

Derivando los dos miembros, se tiene $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$; luego

$$\frac{1}{(1-x^2)}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots+nx^{n-1}+\ldots\ldots$$

*Ejemplo 3.º Sumar la serie*

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{15}}{15} + \ldots\ldots$$

*Solución.* Procediendo como el problema 1.º, se tiene

$$f(x) = \int \frac{x^2}{1 - x^4}\, dx.$$

Además

$$\frac{x^2}{1 - x^4} = \frac{1}{4(1 - x)} + \frac{1}{4(1 + x)} + \frac{1}{2(1 + x^2)},$$

luego

$$f(x) = -\frac{1}{4}\log(1 - x) + \log(1 + x) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$$

ó

$$f(x) = \frac{1}{4}\log\frac{1 + x}{1 - x} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$$

II. Otro método consiste en *obtener una ecuación diferencial que se sepa integrar.*

*Ejemplo 1.º Sumar la serie*

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

*Solución.* Se tiene

$$y' = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\ldots \quad \text{ó} \quad y' = y, \quad \frac{y'}{y} = 1.$$

Esta ecuación da $\log y = x + lC$ ó $y = Ce^x$.

La función $y$ debe reducirse á 1 cuando $x = 0$; luego $y = e^x$.

*Ejemplo 2.º. Sumar*

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots\ldots \qquad (1)$$

*Solución.* Se tiene

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{1 \cdot 3}{2} x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4} x^5 + \ldots\ldots$$

$$\int \frac{1}{x} dy = x + \frac{1}{2} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^7 + \ldots\ldots$$

Y en virtud de (1) será $\int \frac{1}{x} dy = x + xy.$

Diferenciando, tendremos $\frac{1}{x} dy = (1 + y)dx + xdy.$

Y de $$\frac{dy}{1 + y} = \frac{xdx}{1 - x^2}$$

resulta $$\log (1 + y) = -\frac{1}{2} \log (1 - x^2).$$

Por último: $$y = -1 + (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

*Ejemplo 3.º* *Sumar las series*

$$y = z \cos \varphi + \frac{1}{2} x^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{3} x^3 \cos 3\varphi + \ldots\ldots$$

$$z = x \operatorname{sen} \varphi + \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen} 2\varphi + \frac{1}{3} x^3 \operatorname{sen} 3\varphi + \ldots\ldots$$

*Solución.* Según la fórmula de Moivre, se tiene

$$y + zi = xe^{\varphi i} + \frac{1}{2} x^2 e^{2\varphi i} + \frac{1}{3} x^2 e^{3\varphi i} + \ldots\ldots;$$

derivando con relación á $x$, resulta:

$$y' + z'i = e^{\varphi i} + xe^{2\varphi i} + x^2 e^{3\varphi i} + \ldots\ldots = \frac{e^{\varphi i}}{1 - xe^{\varphi i}};$$

luego $y + zi = -\log[1 - x(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)]$

$$e^{-y}(\cos z - i\operatorname{sen} z) = 1 - x(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi),$$

Esta ecuación se divide en dos

$$e^{-y}\cos z = 1 - x\cos\varphi, \qquad e^{-y}\operatorname{sen} z = x\operatorname{sen}\varphi,$$

de donde

$$\operatorname{tg} z = \frac{x\operatorname{sen}\varphi}{1 - x\cos\varphi}, \quad e^{-2y} = 1 - 2x\cos\varphi + x^2;$$

$$z = \operatorname{arc\,tg}\frac{x\operatorname{sen}\varphi}{1 - x\cos\varphi}, \quad y = -\frac{1}{2}\log(1 - 2x\cos\varphi + x^2).$$

*Ejemplo 4.º* *Sumar las series*

$$y_1 = \cos\varphi + x\cos 2\varphi + \ldots\ldots, \qquad z_1 = \operatorname{sen}\varphi + x\operatorname{sen} 2\varphi + \ldots\ldots$$

Si se comparan con las del problema anterior, se tiene $y_1 = y'$, $z_1 = z'$ y, en virtud de las últimas fórmulas

$$y_1 = \frac{\cos\varphi - x}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}, \qquad z_1 = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{1 - 2x\cos\varphi + x^2}.$$

III. Un método muy fecundo para obtener la suma de una serie es el empleo de las integrales definidas. Sea

$$s = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$$

una serie convergente cuya suma se trata de obtener.

Si el término general $u_n$ puede descomponerse en dos factores $v_n$, $w_n$ de los que el uno es igual á una integral definida conocida, de modo que

$$w_n = \int_\alpha^\beta f_n(x)\,dx,$$

se tendrá

$$s = \int_\alpha^\beta dx[u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + \ldots\ldots + u_n f_n(x) + \ldots\ldots].$$

Si pues, se puede valuar

$$\varphi(x) = u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + \ldots\ldots + u_n f_n(x) + \ldots\ldots,$$

se tendrá: $$s = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x)\, dx.$$

*Ejemplo 1.°* *Determinar*

$$s = \cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\cos n\varphi + \ldots\ldots$$

*Solución.* Por ser

$$\int e^{-nx}\, dx = -\frac{1}{n}\, e^{-nx} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{n} = \int_0^{\infty} e^{-nx}\, dx$$

resulta

$$s = \int_0^{\infty} e^{-x} dx\,[\cos\varphi + e^{-x}\cos 2\varphi + e^{-2x}\cos 3\varphi + \ldots\ldots].$$

Pero la suma de la serie, entre paréntesis, es (II *prob. 4.°*)

$$\frac{\cos\varphi - e^{-x}}{1 - 2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x}};$$

luego $$s = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\cos\varphi - e^{-2x}}{1 - 2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x}}\, dx.$$

La integral indefinida es

$$+\frac{1}{2}\log(1 - 2e^{-x}\cos\varphi + e^{-2x});$$

luego:

$$s = \frac{1}{2}\log(2 - 2\cos\varphi) \quad \text{ó} \quad s = -\log(2\,\operatorname{sen}\frac{1}{2}\varphi).$$

ADICIÓN AL CAPÍTULO II, LIBRO 2.° Aunque en el tomo IV se tratará más extensamente de la continuidad y discontinuidad de las funciones, así como de alguno de sus caracteres principales,

conviene enunciar aquí unos preliminares á la par que complemento de lo expuesto en este tomo.

Hasta la época de Lagrange, para los grandes geómetras, una función arbitraria era siempre la función arbitraria susceptible de representarse por un trazo continuo. Pero Dirichlet halló fortuitamente la función

$$\chi(x) = \lim_{m=\infty} \left[ \lim_{h=\infty} (\cos m! \, \pi x)^{2n} \right]$$

cuyos puntos son todos puntos de discontinuidad, puesto que es nula para $x$ irracional é igual á 1 para $x$ racional; y Fourier afirmó, el primero, que una función puede representarse entre o y $2\pi$ por un desarrollo en serie trigonómetrica.

Dirichlet completó la obra de Fourier estableciendo para la convergencia de las series de Fourier sus célebres *condiciones*, á saber:

1.° *La función por desarrollar es finita y uniforme.*

2.° *No tiene un número infinito de discontinuidades; y en los puntos de discontinuidad converge hacia la media de los dos valores límites de la función tomados á uno y otro lado de este punto.*

3.° *No tiene un número infinito de máximos ni de mínimos.*

Riemann demostró con un ejemplo cómo el empleo de las series permite construir funciones cuyos puntos de discontinuidad formen un conjunto por todo denso.

Sea $(x)$ la diferencia entre $x$ y el número entero más próximo. Si $x$ es igual á un entero más $\frac{1}{2}$, se hace $(x) = 0$. La función así definida se llama *exceso de x;* es una función que admite un desarrollo de Fourier, según las líneas trigonométricas de los múltiplos de $2\pi x$, que es siempre convergente. Consideremos la función, como lo hace Riemann,

$$f(x) = \frac{(x)}{1^2} + \frac{(2x)}{2^2} + \frac{(3x)}{3^3} + \ldots\ldots = \sum_{1,\infty} \frac{(nx)}{nn}.$$

Se ve que si $x$ no es de la forma $\frac{2p+1}{2n}$ (siendo $n$ y $2p+1$ primos entre sí) que $f(x)$ es continua. Al contrario, si $x$ es de la forma indicada, cuando $x$ tiende, creciendo hacia $\frac{2p+1}{2n}$, $f(x)$ tiende hacia un límite $f\left(\frac{2p+1}{2n} - 0\right)$, que es

$$f\left(\frac{2p+1}{2n} - 0\right) = f\left(\frac{2p+1}{2n}\right) - \frac{\pi^2}{16n^2};$$

cuando $x$ tiende hacia $\frac{2p+1}{2n}$ decreciendo, $f(x)$ tiende hacia

$$f\left(\frac{2p+1}{2n} + 0\right) = f\left(\frac{2p+1}{2n}\right) - \frac{\pi^2}{16n^2}.$$

En todo intervalo $f(x)$ tiene puntos de discontinuidad.

A estas consideraciones podemos añadir que Hankel en su memoria ya citada (pág. 15-19) mediante el método, llamado *principio de la condensación de las singularidades,* dió medios de construir, conociendo funciones $f_n$ que presentan cierta singularidad en puntos aislados $A_n$ una función que presente esta singularidad en todo intervalo.

Distingue en su memoria: I. las funciones continuas con un número finito de oscilaciones, á las que pertenecen todas las algebráicas y la mayor parte de las funciones analíticas, con excepción de algún punto crítico, como por ejemplo $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ que á excepción del punto $x = 0$, tiene una derivada finita y determinada.

Así siendo $\varphi(y) = y^{\frac{2}{3}}$, el desarrollo correspondiente

$$f(x) = \Sigma \frac{(\text{sen } nx\pi)^{\frac{2}{3}}}{n^s}$$

no tiene derivada finita, pues

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = Q + \frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{\varepsilon^{\frac{1}{3}}\mu^{s-\frac{2}{3}}} \Sigma \frac{1}{r^{s-\frac{2}{3}}}$$

siendo $Q = \lim \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$, crece siempre al disminuir $\varepsilon$.

La función $f(x) = \int_a^x \frac{dy}{1+e^{\frac{1}{y}}}$ conduce á

$$\lim \frac{f(\varepsilon - f(0)}{\varepsilon} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

según que la variable se aproxima á cero por la derecha ó por la izquierda. La función bajo el signo $\int$ es finita para todos los valores reales de $y$, excepto para $y = 0$, en cuyo punto es indeterminada.

Respecto á las funciones discontinuas: Una función discontinua en $x = a$, tiene en este punto saltos mayores que una cantidad finita $\sigma$. Distingue la *discontinuidad puntual* de la *discontinuidad lineal*. En el primer caso, las funciones tienen intervalos finitos en que son continuas y en el segundo son discontinuas en infinitos puntos de un segmento finito.

Las dos clases de funciones son: *Las funciones punteadas discontinuas* y *las funciones lineales discontinuas*.

Sea $\varphi(y)$ una funcion continua desde $y = -1$ hasta $y = +1$ exceptuado el punto $y = 0$, en el que toma el valor límite $+1$ ó $-1$, según que se aproxima á dicho punto por la derecha ó la izquierda.

La serie correspondiente

$$f(x) = \Sigma \frac{\varphi(\operatorname{sen} nx\pi)}{n^s}$$

es continua para todos los valores irracionales de $x$, teniendo en

estos puntos una derivada, y es discontinua en los puntos racionales.

Un ejemplo clásico de función discontinua es el siguiente:

$$\log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \ldots\ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \ldots\ldots \quad (1)$$

con las condiciones $|z| \leq 1$, $z \neq -z$. Bajo estas condiciones el primer miembro nos ofrece la representación del logaritmo que, partiendo del valor 0, para $z = 0$, varía de una manera continua en el interior del círculo de convergencia y aún en la circunferencia, evitando el punto $z = -1$.

Hagamos $z = e^{ix}$, suponiendo $x$ real y comprendido entre $-\pi$ y $+\pi$ (con exclusión de estos valores). Se puede escribir

$$z = \cos x + i \operatorname{sen} x; \quad \text{luego} \quad z^n = \cos nx + i \operatorname{sen} nx.$$

El punto que corresponde á $z$, toma todas las posiciones posibles en el círculo de convergencia, excepto la posición $z = -1$; y se tiene

$$\log(1+z) = \Sigma(-1)^{n+1}\frac{\cos nx + i \operatorname{sen} nx}{n}.$$

Además, se puede escribir

$$1 + z = 2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2} + i \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right);$$

y puesto que $x$ se halla comprendida entre $-\pi$ y $+\pi$, $\cos\frac{x}{2}$ es positivo; luego las diferentes determinaciones de $\log(1+z)$ se hallan comprendidas en la fórmula

$$\log(1+z) = \log \text{ real de } \left(2\cos\frac{x}{2}\right) + i\left(\frac{x}{2} + 2k\pi\right),$$

siendo $k$ entero.

Esto sentado, si igualamos los coeficientes de $i$ en los dos

miembros de la ecuación (1), tendremos en la hipótesis, $-\pi < x < \pi$:

$$(2) \qquad \frac{x}{2} + 2k\pi = \frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \ldots\ldots \qquad (-\pi < x < \pi)$$

Todos los términos del segundo miembro de esta serie admiten el periodo $2\pi$, pudiéndose considerar la serie como conocida para los valores de $x$ comprendidos en los intervalos

$$\pi < x < 3\pi, \quad 3\pi < x < 5\pi, \ldots\ldots \text{ y } \quad -\pi > x > -3\pi, \ldots\ldots$$

Los términos de la serie son todos nulos para los valores de $x$ iguales á $\pi$, $3\pi$, $5\pi$, ..... $-\pi$, $-3\pi$, $-5\pi$, ..... Se ve así que la serie $\Sigma(-1)^{n+1}\dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}$ es convergente, cualquiera que sea $x$, pero representa una función discontinua.

P. du Bois Reymond, cuya teoría de las pantaquias es análoga á la de los conjuntos de Cantor, en su obra *Théorie générale des Fonctions*, introduce la denominación de *ortoidía*, para expresar la diferenciabilidad de las funciones, distinguiendo los valores de éstos como directos é indirectos: Así $f(x)$ será simplemente el valor de la función que la fórmula hace corresponder á $x$. Pero á estos hay que agregar otros que deben considerarse como valores, no solamente porque las aplicaciones conducen á ellos, sino porque se les juzga como tales desde un punto de vista abstracto, y aparecen cuando se forma el valor directo de $f(x)$ para un punto $x_1 \gtrless x$; y enseguida se intercala una serie de valores $x_2, x_3, \ldots\ldots$ entre $x_1$ y $x$ que se aproximan indefinidamente á $x$, buscándose á continuación el límite de la serie $f(x_1), f(x_2), \ldots$, y llegándose de un modo indirecto á valores de $f(x)$ que pueden diferir de los que se obtienen directamente, por lo que se les llama valores *indirectos* de función.

Una función racional y entera de $x$, no tiene valores distintos de los directos. No sucede lo mismo á las funciones sen $x$, $e^x$ y otras análogas.

Sean las funciones anortoides: 1.ª $f(x) = 3x$ para los valores $x = 0,3;\ 0,33,\ 0,333$; etc. y $f(x) = 0$ para $x = \frac{1}{3}$.

2.ª $f(x)$, que toma para $x = \frac{z}{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_n^{r_n}}$ los valores $\frac{1}{p_1 \ldots p_n}$ y $f(x) = 0$ para los demás valores de $x$.

3.ª $f(x)$ que toma para $x = \frac{z}{p_1^{r_1} \ldots p_n^{r_n}}$ los valores $\frac{z}{p_1^{r_1} \ldots p_n^{r_n}}$ y $f(x) = 0$ para los demás valores de $x$.

Y sean las funciones ortoides

$$f(x) = \frac{1}{x},\ \operatorname{sen}\frac{1}{x},\ x \operatorname{sen}\frac{1}{x},\ \frac{1}{e^x},\ \frac{e^{1:x} - 1}{e^{1:x} + 1},$$

$$f(x) = \lim_{h=\infty} \frac{1 + hx}{1 + hx^2}, \qquad f(x) = \operatorname{arc\,tg} hx.$$

La primera función tiene el valor directo cero para $x = \frac{1}{3}$; pero el límite de $f(0,3)$, $f(0,33)$, ..... es 1, designándose un valor de función indirecta correspondiente á $x$ por

$$\lim_{\varepsilon=0} f(x + \varepsilon).$$

En la 2.ª y 3.ª funciones anortoides y en todas las ortoides citadas, se presentan valores indirectos distintos de los directos, así como en la función anortoide

$f(x) = 1$, para todos los valores racionales de $x$.

$f(x) = 0$, para todos las valores irracionales de $x$.

En ésta á todo valor de $x$ corresponden á la vez valores indirectos de 0 ó de 1.

Para la función 2.ª los valores indirectos son cero ó $\frac{1}{p_1 \ldots p_n}$, según que $z$ es racional ó irracional.

En la función $f(x) = 1$, $f(x) = 0$ últimamente citada, el salto es 1, en la función 2.ª el salto es $\frac{1}{2}$.

NOTA AL § 4.°, CAP. II, LIBRO 2.° Un ejemplo muy importante de una función que no tiene derivada para infinitos puntos de un segmento finito es el propuesto por Hankel, y que se ha citado.

Sea $\varphi(y)$ una función que, para los valores de $y$ comprendidos entre $-1$ y $+1$ (excepto para $y = 0$) es finita y continua, siempre inferior á un número A, y para $y = 0$ es cero. Haciendo

$$y = \text{sen } (xn\pi) \qquad (n = \textit{entero})$$

para todos los valores de $x$ de forma racional $\frac{m}{n}$ $(m = \textit{entero})$ la $y$ (y por consiguiente la $\varphi$) es cero, y para todas las $x$ de otra forma la $y$ tiene un valor distinto de cero comprendido entre $-1$ y $+1$.

Formemos la serie

$$f(x) = \Sigma \frac{\varphi(\text{sen } n\pi x)}{n^s} \qquad (s > 1)$$

que es uniformemente convergente, por ser sus términos menores que los de $A\Sigma \frac{1}{n^s}$, que es convergente.

La función $f(x)$ es continua de $x$ en todos los puntos $x$, excepto en los que corresponden á $y = 0$, en los cuales la $\varphi$ no se ha supuesto continua, es decir, en los puntos de la forma $\frac{m}{n}$. Si admitimos que $\pi(y)$ es continua también en $y = 0$, entonces $f(x)$ es continua en todos los puntos $x$.

El número $n$ en la expresión de $f(x)$ no es un número fijo, sino que depende del lugar del término que se considera, por lo que serán discontinuos algunos términos de la serie que se con-

sidera, en los puntos $\frac{m}{n}$, á saber, el $n^{\text{simo}}$, el $2n^{\text{simo}}$, etc., y por consiguiente la serie será discontinua. La serie será pues *discontinua en todos los puntos racionales* si se supone que $\varphi(y)$ es discontinua en $y = 0$, y será continua en todos los puntos, si $\varphi(y)$ es continua en $y = 0$.

Consideremos el valor de la serie para el valor $x$ racional de la forma $\frac{\nu}{\mu}$. Todos los términos en cuyo índice es $n$ múltiplo de $\mu$ son cero, por hipótesis, por lo que podemos suprimirlos y escribir

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_{(\mu)} \frac{\varphi\left[\operatorname{sen}\left(n\frac{\nu}{\mu}\pi\right)\right]}{n^s},$$

donde se expresa con $\Sigma_{(\mu)}$ la suma extendida á todos los valores de $n$, excepto para los múltiplos de $\mu$. Dando un incremento $h$, tendremos

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}+h\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_{(\mu)} \frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu}+h\right)\pi\right]}{n^s} + \frac{1}{\mu^s}\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi[\pm \operatorname{sen}(n\mu h\pi)]}{n^s},$$

donde debe considerarse el signo $+$, cuando $n\nu$ es par y el signo $-$, cuando $n\nu$ es impar. La relación incremental será pues,

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+h\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{h} = \sum_{1}^{\infty}{}_{(\mu)}\left\{\frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu}+h\right)\pi\right] - \varphi\left[\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right]}{hn^s}\right\} + \frac{1}{\mu^s}\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi[(-1)^{n\nu}\operatorname{sen}(n\mu h\pi)]}{hn^s},$$

mientras que en un punto $x$ irracional, la expresión de la relación incremental es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi[\operatorname{sen} n(x+h)\pi] - \varphi[\operatorname{sen} nx\pi]}{hn^s}.$$

Pero la existencia de la derivada de $f(x)$ en todos los puntos racionales $x$ depende de la hipótesis hecha sobre la existencia de la derivada de $\varphi(y)$ en el punto $y = 0$.

Si suponemos que la función $\varphi(y)$ tiene derivada finita para todas las $y$ comprendidas entre $-1$ y $+1$, y también para $y = 0$, entonces podremos formar la serie de las derivadas de los términos de la serie dada, y hallamos

$$\pi \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi'[\operatorname{sen} nx\pi]}{n^{s-1}} \cos nx\pi.$$

Para $s > 2$, los términos de ésta son menores que los de la serie convergente $\pi A' \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}}$, en la que $A'$ es el valor máximo que puede tener $\varphi'(y)$; y la serie de las derivadas, para $s > 2$ es una serie uniformemente convergente, y, por las hipótesis hechas, representa la derivada de $f(x)$, siendo una función que admite derivada finita y determinada en todos sus puntos.

*Pero si suponemos que* $\varphi(y)$, *siendo siempre continua y admitiendo derivada para todos sus puntos, no admite derivada en* $y = 0$, *oscilando en dicho punto la relación incremental de* $\varphi(y)$ *entre límites finitos, entonces podemos hacer ver que la* $f(x)$, *siendo siempre continua, como ya sabemos, no tiene derivada determinada en ningún punto racional, teniéndola en los puntos irracionales.*

En efecto, consideremos un punto $x$ irracional y la serie de las relaciones incrementales

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi[\operatorname{sen} n(x+h)\pi] - \varphi[\operatorname{sen} nx\pi]}{hn^s},$$

que podemos escribir así:

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\pi}{n^{s-1}} \frac{\varphi[\operatorname{sen} n(x+h)\pi] - \varphi[\operatorname{sen} nx\pi]}{\operatorname{sen} n(x+h) - \operatorname{sen} nx\pi}$$

$$\times \cos n\left(x + \frac{h}{2}\right)\pi \frac{\operatorname{sen} n\frac{h}{2}\pi}{n\frac{h}{2}\pi}.$$

Pero según la hipótesis hecha sobre la existencia de la derivada finita y determinada para $\varphi(y)$, en el caso de ser $y$ distinta de cero, la cantidad

$$\frac{\varphi(y+k) - \varphi(y)}{k}$$

(que es igual al primer factor de cada término de la suma superior), teniendo por límite una cantidad finita para $y$ distinta de cero, y oscilando entre límites finitos para $y = 0$, se conservará en un entorno conveniente del punto $y$ (es decir para $k$ menor que cierta cantidad determinada) menor que una cantidad A'; por lo que podemos decir que todos los términos de la última serie son menores, en valor absoluto, que los de la serie

$$\pi A' \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}},$$

qne es convergente para $s > 2$. La primera serie es pues uniformemente convergente en un contorno del punto $x$; y esto basta para concluir que el límite de dicha serie para $h = 0$, es igual á la serie de los límites; por lo que, para un valor irracional de $x$ la serie dada tiene derivada finita y determinada.

Por el contrario, para un punto $x$ racional, de la forma $\frac{\nu}{\mu}$, la relación incremental tiene la otra forma arriba escrita. Dicha expresión consta de dos partes: La primera es una $\Sigma_{\mu}$, extendida desde $n = 1$ hasta $n = \infty$, debiéndose entender que se hallan

suprimidos todos los términos correspondientes á los índices $n$ múltiplos de $\mu$, y la segunda parte es

$$\frac{1}{\mu^s} \sum_{1}^{\infty} \frac{\varphi[(-1)^{n\nu} \operatorname{sen}(n\mu h\pi)]}{h\, n^s}.$$

La primera parte puede considerarse como la relación incremental de la función

$$\psi(x) = \sum_{1(\mu)}^{\infty} \frac{\varphi[\operatorname{sen} nx\pi]}{n^s}$$

para $x = \frac{\nu}{\mu}$. Pero todos los términos de esta suma tienen derivada finita y determinada, porque, debiéndose excluir entre los valores de $n$ los que son múltiplos de $\mu$, el valor del argumento de $\varphi$ será cero para algún valor de $n$. Sobre esta función puede repetirse exactamente el razonamiento hecho acerca del límite de la relación incremental de $f(x)$ para un valor irracional de $x$, y se deducirá que $\psi(x)$ tiene derivada determinada y finita. S pues nos ocupamos solo de la segunda parte de la relación incremental de $f(x)$, los términos de la serie pueden escribirse

$$\frac{1}{\mu^s} \left\{ \frac{(-1)^{n\nu}\mu\pi}{n^{s-1}} \frac{\varphi[(-1)^{n\nu} \operatorname{sen} n\mu h\pi]}{(-1)^{n\nu} \operatorname{sen} n\mu h\pi} \frac{\operatorname{sen} n\mu h\pi}{n\mu h\pi} \right\}.$$

El primero de estos términos, es decir, el que corresponde á $n = 1$, es:

$$\frac{1}{\mu^s} \left\{ (-1)^{\nu}\, \mu\pi \frac{\varphi[(-1)^{\nu} \operatorname{sen} \mu h\pi}{[(-1)^{\nu} \operatorname{sen} \mu h\pi} \frac{\operatorname{sen} \mu h\pi}{\mu h\pi} \right\},$$

siendo la cantidad entre paréntesis independiente de $s$.

Supuesto que no existe la derivada de $\varphi(y)$ en el punto cero, pero que la relación incremental $\frac{\varphi(y)}{y}$ pueda oscilar entre dos límites *finitos*, esto es, que se conserve menor que una cantidad

A en valor absoluto, se verificará pues, que uno cualquiera de los términos indicados será siempre menor en valor absoluto que $\frac{\pi A}{\mu^s - 1} \frac{1}{n^s - 1}$; de manera que la suma de todos los términos desde el 2.° en adelante, es decir, que comienza en $n = 2$, es menor que

$$\frac{A\pi}{\mu^s - 1} \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^s - 1},$$

que por ser $s < 2$, es una serie convergente.

Podemos pues decir que la segunda parte de la expresión de la relación incremental de $f(x)$ es igual á

$$\frac{\pi}{\mu^s - 1} \left\{ (-1)^{\nu} \frac{\varphi(y)}{y} \frac{\operatorname{sen} \mu h\pi}{\mu h\pi} + \varepsilon A \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s - 1} \right\},$$

haciendo $y = (-1)^{\nu} \operatorname{sen} \mu h\pi$, y siendo $\varepsilon$ una cantidad comprendida entre $-1$ y $+1$. Pero $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^s - 1}$ disminuye indefinidamente al crecer $s$, y se puede hacer tan pequeña como se quiera, mientras que al disminuir $h$, la cantidad $\frac{\operatorname{sen} \mu h\pi}{\mu h\pi}$ se puede hacer diferente de 1 en tan poco como se quiera.

Se ve pues que podrá elegirse siempre $s$ de manera que el primer término del paréntesis predomine sobre el segundo, es decir, que el signo de todo el paréntesis sea el del primer término, y que el valor de todo el paréntesis difiera en poco del valor del primer término. Y puesto que dicho primer término no tiende á ningún límite, lo mismo sucederá á toda la expresión. Luego en los puntos $x$ racionales, la $f(x)$ no tiene derivada.

*Para construir pues una función* $f(x)$ *sin derivada, basta construir una función* $\varphi(y)$ *continua y finita en el intervalo* $(-1, +1)$, *cero en el punto* $y = 0$, *con una derivada finita en dicho intervalo, excepto en el punto* $y = 0$, *en el cual oscila la relación incremental entre límites finitos.*

Un ejemplo de tal función es $\varphi(y) = y \operatorname{sen} \frac{1}{y}$, á la que se asigna el valor cero para $y = 0$. Se tiene entonces una función siempre finita y continua que admite derivada en todos los puntos, excepto en $y = 0$.

El valor incremental

$$\frac{h \operatorname{sen} \frac{1}{h}}{h} = \operatorname{sen} \frac{1}{h}$$

oscila entre $-1$ y $+1$, suponiendo $\varphi(0) = 0$.

Lo mismo se dirá de $\varphi(y) = y \operatorname{sen} [\log y^2]$.

Otros ejemplos de funciones continuas sin derivadas pueden verse en las obras citadas de los Sres. Darboux, Dini y Pascal.

ADICIÓN AL NÚMERO 75. PROBLEMA. *Hallar la derivada* $n^{\text{sima}}$ de $y = e^{-x^2}$.

Tenemos $y = e^{-x^2}$ (1), $\quad \frac{dy}{dx} = -2xe^{-x^2}$, (2)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}, \ldots\ldots,$$

lo que conduce á hacer

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{-x^2} P_n, \tag{3}$$

siendo $P_n = (-2x)^n + a_2 x^{n-2} + a_4 x^{n-4} + \ldots\ldots$ (4)

Para determinar $a_2, a_4, \ldots\ldots$, dividiremos (2) por (1), y tendremos

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0. \tag{5}$$

Diferenciando $n$ veces, y aplicando la fórmula de Leibnitz, resultará

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + 2x\frac{d^n y}{dx^n} + 2n\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0.$$

Sustituyamos en esta expresión las derivadas de orden $n+1$, $n$, $n-1$ respectivamente por $e^{-x^2}P_{n+1}$, $e^{-x^2}P_n$, $e^{-x^2}P_{n-1}$, y suprimiendo el factor común, será

$$P_{n+1} + 2xP_n + 2nP_{n-1} = 0. \qquad (6)$$

Diferenciemos la ecuación (3), y tendremos

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = e^{-x^2}\left(\frac{dP_n}{dx} - 2xP_n\right).$$

Sustituyendo en esta ecuación la derivada de orden $n+1$ por $e^{-x^2}P_{n+1}$, obtendremos

$$\frac{dP_n}{dx} = P_{n+1} + 2xP_n,$$

que, en virtud de (6), se reduce á

$$\frac{dP_n}{dx} = -2nP_{n-1}, \qquad (7)$$

y por diferenciación se tendrá

$$\frac{d^2P_n}{dx^2} = -2n\frac{dP_{n-1}}{dx}.$$

Pero si se sustituye $n$ por $n-1$ en (7), resulta

$$\frac{dP_{n-1}}{dx} = -2(n-1)P_{n-2};$$

y de estas dos fórmulas se deduce

$$\frac{d^2P_n}{dx^2} = 4n(n-1)P_{n-2}. \qquad (8)$$

Sustituyendo en (6) $n$ por $n - 1$, resulta

$$P_n + 2xP_{n-1} + 2(n-1)P_{n-2} = 0. \qquad (9)$$

Eliminando $P_{n-1}$ y $P_{n-2}$ entre (7), (8) y (9), será

$$\frac{d^2P_n}{dx^2} - 2x\frac{dP_n}{dx} + 2nP_n = 0. \qquad (10)$$

Si sustituimos en esta ecuación $P_n$ por su expresión (4), igualando á cero los coeficientes de las diversas potencias de $x$, resultarán ecuaciones por las que se determinarán los coeficientes $a_2$, $a_4$, ..... Así el coeficiente de $x^{n-2p-2}$ es igual á

$$(n-2p)(n-2p-1)a_{2p} + 4(p+1)a_{2p+2}.$$

Se tiene pues

$$a_{2p+2} = -\frac{(n-2p)(n-2p-1)}{4(p+1)}a_{2p}.$$

Haciendo sucesivamente $p = 0, 1, 2, \ldots\ldots$, tendremos

$$a_2 = -\frac{n(n-1)}{1}\frac{a_0}{2^2},\quad a_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}\frac{a_0}{2^4},\ \ldots$$

La expresión de la derivada $n^{\text{sima}}$ es pues,

$$\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = (-1)^n e^{-x^2}\left[(2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2}\right.$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}(2x)^{n-4} - \ldots\ldots\right].$$

Adición al número 71. Análogamente podremos obtener la derivada de orden $n$ de $y = \text{arc sen } x$. Hagamos

(1) $$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ y será $$\frac{d^{n+1}\,\text{arc sen } x}{dx^{n+1}} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Tendremos sucesivamente

$$(2)\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}},\qquad \frac{d^4y}{dx^4}=\frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}$$

. . . . . .

lo que conduce á escribir

$$(3)\qquad \frac{d^n y}{dx^n}=\frac{P_n}{(1-x)^{n+\frac{1}{2}}},$$

siendo $P_n$ un polinomio de grado $n$, par ó impar, al mismo tiempo que $n$, en el que el coeficiente de $x^n$ es 1, 2, 3. . . . . $n$. Así, este coeficiente es $6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$ en $\frac{d^3y}{dx^3}$, $24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ en $\frac{d^4y}{dx^4}$; y se demuestra fácilmente que si se hace igual á $n!$ en $\frac{d^n y}{dx^4}$, se obtendrá $(n+1)!$ en la derivada siguiente.

Para determinar los demás coeficientes de $P_n$, vamos á obtener una ecuación lineal de la que $P_n$ es una solución. De las ecuaciones (1) y (2) obtendremos

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

Diferenciemos $n$ veces con auxilio de la fórmula de Leibnitz, y será

$$(1-x^2)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-2nx\frac{d^n y}{dx^n}-n(n-1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$$

$$-x\frac{d^n y}{dx^n}-n\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=0.$$

Reduciendo y sustituyendo las derivadas por sus valores sacados de la ecuación (3), en la que se sustituye $n$ por $n+1$, será

$$P_{n+1} - (2n+1)xP_n - n^2(1-x^2)P_{n-1} = 0. \qquad (4)$$

Diferenciando la ecuación (3) y sustituyendo

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} \quad \text{por} \quad \frac{P_{n+1}}{(1-x^2)^{n+\frac{3}{2}}}, \text{ tendremos}$$

$$\frac{P_{n+1} - (2n+1)xP_n}{1-x^2} = \frac{dP_n}{dx},$$

ó, teniendo presente la ecuación (4),

$$(5) \qquad \frac{dP_n}{dx} = n^2 P_{n-1} \quad \text{y} \quad \frac{d^2P_n}{dx^2} = n^2 \frac{dP_{n-1}}{dx}.$$

Pero la ecuación (5) se transforma en

$$\frac{dP_{n-1}}{dx} = (n-1)^2 P_{n-2};$$

luego

$$\frac{d^2P}{dx^2} = n^2(n-1)^2 P_{n-2} \qquad (6)$$

Eliminemos $P_{n-1}$ y $P_{n-2}$ entre (4), (5) y (6), y tendremos

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2} + (2n-1)x\frac{dP_n}{dx} - n^2P_n = 0. \qquad (7)$$

Para determinar los coeficientes de $P_n$ por medio de esta ecuación, hagamos

$$P_n = A_0x^n + A_1x^{n-2} + A_2x^{x-4} + \ldots\ldots$$

Sustituyamos esta expresión en la ecuación (7), y resultará

$$-2^2A_1 + n(n-1)A_0 = 0, \quad -4^2A_2 + (n-2)(n-3)A_1 = 0, \ldots$$

y será $$A_1 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{2} A_0,$$

$$A_2 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A_0,$$

. . . . . .

Y sustituyendo por $A_0$ su valor, será

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots n} \frac{d^{n+1} \operatorname{arc\,sen} x}{dx^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \left[ x^n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{2} x^{n-2} \right.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^{n-4}$$

$$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^{n-6} + \ldots \right]$$

Si en $$\frac{d^n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{dx^n} = \frac{P_n}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

cambiamos $x$ en $x\sqrt{-1}$, tendremos

$$\frac{d^n \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{dx^n} = \frac{Q_n}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}};$$

y la expresión de $Q_n$ será

$$(-1)^n \frac{Q_n}{1 \cdot 2 \ldots\ldots n} = x^n - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{2} x^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^{n-4} - \ldots\ldots$$

*Ejemplo* 4.° *Hallar la expresión* $U_n = d^n \dfrac{x^n (1 - x)^n}{dx^n}$.

Haremos $u = (1 - x)^n$, $v = x^n$, y empleando la fórmula de Leibnitz, será

$$U_n = n! \left[ (1 - x)^n - \left(\frac{n}{1}\right)^2 x(1 - x)^{n-1} + \dots \right].$$

También podemos obtener por la fórmula del binomio

$$x^n (1 - x)^n = (-1)^n \left[ x^{2n} - \frac{n}{1} x^{2n-1} + \dots \right]$$

$$U_n = (-1)^n \left[ 2n(2n - 1) \dots (n + 1) x^n \right.$$

$$\left. - \frac{n}{1} (2n - 1) \dots n x^{n-1} + \dots \right].$$

Comparando las dos expresiones de $U_n$, se tiene

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(-1)^n \left\{ 1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\right]^2 + \dots \right\}$$

$$= (-1)^n 2n(2n - 1) \dots (n + 1)$$

y $$1 + \left(\frac{n}{1}\right)^2 + \dots + 1 = \frac{(n + 1)(n + 2) \dots 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n},$$

que es la expresión de la suma de los cuadrados de los coeficientes del binomio.

Ejemplo.—5.° Sea $u = mx$ é $y = \operatorname{sen} x$. Se tiene

$$\operatorname{sen} mx = u = \operatorname{sen} (m \operatorname{arc\,sen} y);$$

luego $$\frac{du}{dy} = \frac{m \cos (m \operatorname{arc\,sen} y)}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$\frac{du}{dy} = m \frac{\sqrt{1 - u^2}}{\sqrt{1 - y^2}}, \qquad \left(\frac{du}{dy}\right)^2 (1 - y^2) = m^2 (1 - u^2);$$

diferenciando, tenemos que

$$2\frac{du}{dy}\frac{d^2u}{dy^2}(1-y^2)-2\left(\frac{du}{dy}\right)^2 y=-2m^2u\frac{du}{dy},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}(1-y^2)-y\frac{du}{dy}+m^2u=0$$

Aplicando la fórmula de Leibnitz,

$$u^{n+2}(1-y^2)-2nu^{n+1}y-n(n-1)u^n$$

$$-u^{n+1}y-nu^n+m^2u^n=0;$$

para $y=0$, se tiene

$$u^{n+2}-n(n-1)u^n-nu^n+m^2u^n=0,\ u^{n+2}=u^n(n^2-m^2).$$

Llamando $u_0$ y $u'_0$ á los valores de sen $mx$ y de su derivada relativa á sen $x$, suponiendo sen $x=0$, resulta

$$u''=-u_0m^2 \quad u''''=u_0m^2(m^2-2^2),\ \ldots\ldots,$$

$$u'=-u'_0(m^2-1^2),\quad u'''''=u'_0(m^2-1^2)(m^2-3^2),\ \ldots\ldots,$$

Si se *expresan* por $\alpha$ y $\alpha'$ respectivamente el menor arco positivo ó negativo cuyo seno es sen $x$, y el menor arco cuyo coseno es sen $x$, tendremos

$$\cos m\alpha=1-\frac{m^2}{1\cdot2}\operatorname{sen}^2x+\frac{m^2(m^2-2^2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\operatorname{sen}^4x+\ldots\ldots$$

$$\operatorname{sen} m\alpha=m\left[\operatorname{sen}x-\frac{m^2-1^2}{1\cdot2\cdot3}\operatorname{sen}^3x+\ldots\ldots\right]$$

$$\cos m\alpha'=1-\frac{m^2}{1\cdot2}\cos^2x+\frac{m^2(m^2-2^2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cos^4x-\ldots\ldots$$

$$\operatorname{sen} m\alpha'=m\left[\cos x-\frac{m^2-1}{1\cdot2\cdot3}\cos^3x\ldots\ldots\right]$$

# ÍNDICE DEL TOMO SEGUNDO

## LIBRO PRIMERO

### INTRODUCCIÓN Á LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES


PÁGINA

CAPÍTULO I.—*Nociones acerca de los números irracionales y de los límites* ..... 3

CAPÍTULO II.—*Principio de la teoría de las cantidades complejas con* n *unidades principales*..... 17


## LIBRO SEGUNDO

### FUNCIONES DE VARIABLES REALES


CAPÍTULO I.—*Modos generales de expresar una función.*

§ 1.º Integral definida..... 35

§ 2.º Convergencia uniforme..... 40

CAPÍTULO II.—*Continuidad y discontinuidad.*

§ 1.º Funciones uniformemente continuas..... 79

§ 2.º Funciones discontinuas..... 88

§ 3.º Funciones integrables..... 98

§ 4.º Funciones continuas no derivables..... 111

§ 5.º Integrales definidas singulares de Cauchy..... 115

§ 6.º Integrales en las que la función ó los límites se hacen infinitos..... 118

§ 7.º Representación geométrica de las funciones..... 125


## LIBRO TERCERO


CAPÍTULO I.—*Series.*

§ 1.º Definiciones..... 129

§ 2.º Serie de potencias, círculo de convergencia..... 133

PÁGINA

§ 3.º Extensión de la fórmula de Taylor ..... 139
§ 4.º Funciones regulares..... 149
§ 5.º Funciones analíticas..... 171
CAPÍTULO II.—*Integrales.*
§ 1.º Representación de una función de variable compleja..... 180
§ 2.º Integrales dobles ..... 187
§ 3.º Integrales curvilíneas..... 200
§ 4.º Cálculo de los residuos..... 215

## LIBRO CUARTO

CAPÍTULO I.—*Desarrollo en serie de las funciones sinécticas.*
§ 1.º Teoremas de Cauchy y de Laurent ..... 221
§ 2.º Aplicación á la ecuación de Lagrange..... 227
§ 3.º Propiedades de las funciones..... 234
CAPÍTULO II.—*Funciones algebráicas.*
§ 1.º Principios generales..... 247
§ 2.º Ley de la permutación de las raíces..... 254
§ 3.º Sistemas de lazos fundamentales..... 266

## LIBRO QUINTO

CAPÍTULO I.—*Superficie de Riemann.*
§ 1.º Definición de la superficie de Riemann..... 273
§ 2.º Reducción á la formal normal..... 280
§ 3.º Principios relativos al orden de conexión..... 285
§ 4.º Número de los contornos de una superficie, etc... 291
§ 5.º Reducción á una superficie simplemente conexa.. 294
§ 6.º Diferentes órdenes de conexiones ..... 298
CAPÍTULO II.—*Variedades ó espacios.*
§ 1.º Algunas definiciones relativas al hiperespacio .. 302
§ 2.º Variedades..... 303
§ 3.º Nueva definición de las variedades..... 308
§ 4.º Variedades uniláteras y biláteras ..... 311
§ 5.º Diferentes órdenes de conexión en los espacios de *n* dimensiones..... 312
§ 6.º Representación de las variedades..... 315
ADICIONES ..... 322

# ERRATAS DEL TOMO PRIMERO

Pág. 4, línea 31, en vez de *mp* léase $m_p$.

» 18, » 23, » » » AC » AC de orden.

» 40, » 20, » » » se » dicha relación se.

» 54, » 4, » » » $f$ » F; línea 20, en vez de $n$ léase $m$.

» 55, » 9, » » » este » el.

» 55, » 10, » » » consiguiente, léase «otra parte».

» 55 línea 28, en vez de , » ).

» 61 » 14, » » » $x$ » $x_1$.

» 62 » 7, » » » $(x_2)^2$ » $(x_3)^2$.

» 67 » 4, añádase $h$; línea 6, añádase $- f(x, y + k)$.

» 70 » 11, en vez de $f'_x$ léase $\frac{d}{dx}$.

» 81 » 2, » » » $\frac{1}{2}$ » $\frac{3}{2}$; l. 8, en vez de $\frac{2}{3}$ léase $\frac{3}{2}$.

» 82 » 1, 2 y 3, léase: *Hallándose las variables* x *é* y *ligadas por una ecuación, se*

» 84, línea 16, en vez de $\partial z$ léase $\partial x$.

» 84, » 11, » » » $dy^2$. léase $d^2y$.

» 89, » 4 y 11, en vez de $dy^2$, léase $d^2x$, $d^2y$.

» 94, línea 13, » » » $b$, léase $c$; l. 14, las, léase las que.

» 97, » 11, » » » (3) léase (1).

» 114, » 5, póngase 2.°; línea 15, en vez de $ax$ léase $a^x$.

» 139, » 10, en vez de $\frac{x}{1}$ léase $\frac{x^2}{2}$.

» 153, » 9 y 10, en vez de sen $z^2$, léase (sen $z)^2$.

» 162, » 13, » » » $c'x^\gamma$ léase $C'x^{\gamma'}$.

» 163, » 15, » » » $x_2, x_4$ » $x^2, x^4$.

» 166, » 2, » » » $A^n$ » $A_n$.

» 167, » 13, » » » $2^2$ » $z^2$.

» 172, » 10, » » » $T^n +$ » $T^n -$.

» 176, » 5, » » » sen $\vartheta$ » sen $\theta$).

» 179, » última » » » $e^{- - u}$ » $e^{-t-u}$.

» 192, línea 5, » » » $\frac{d\Psi Fz}{dz}$ » $\frac{d\Psi Fz}{dz}x$.

» 192, » 13, » » » $x\Phi n$ léase $x\Phi' u$.

Pág. 193, línea 6, en vez de como se demostrará, *l.* «como se ha demostrado»; l. 14, en vez de $\frac{\partial^n V}{\partial z^n}$ léase $= \frac{\partial^n V}{\partial z^n}$.

» 194, línea 15, en vez de $\frac{x^2}{z}$ léase $\frac{x^2}{2}$.

» 195, » 19, » » » $fz$ » $f(x)$.

» 195, El *ejemplo* 4.º ha de ir á la pág. 199.

» 196, línea 18, » » » $f'z$ » $f(z)$; 19 en vez de $y'z_y$ léase $yz'_y$.

» 197, » 13, » » » $Afx, y,\ A = f(x)$ y.

» 197, » 20, » » » A′ léase $A^3$:

» 199, » 5, en vez de $Px^2$ léase $fx^2$.

» 200, » última, en vez de $a, x,$ léase $x, a$.

» 201, » 12, » » » $x^2 - - x$ léase $x^2 - 1$.

» 202, » penúltima, en vez de $x(x)$ léase $\varphi(x)$.

» 204, » antepenúltima, en vez de $A^{n-1}$ léase $A_{n-1}$.

» 211, » 5, en vez de $u^n$ léase $u_n$.

» 213, » última, en vez de $P^n$ léase $P_n$.

» 216, » 12, » » » sen $x$ léase $m$ sen $x$.

» 227, » 12, » » » $x''(x)$ » $\varphi''(x)$.

» 229, » 4, Añádase: Forma $\frac{\infty}{\infty}$; línea 17 en vez de $f$, $\varphi$; l. 18, en vez «del, del segundo factor del

» 231, » 9, en vez de «invirtiendo» «haciendo pasar $y$ al denominador».

» 250, » 17, » » » $\frac{dz}{dz}$ léase $\frac{dz}{dx}$.

» 260, » 3, 4 y 5, en vez de lo escrito póngase: $\frac{1}{u}$ sen AHL $= \frac{1}{v}$ sen DHB, que determina el índice $\frac{u}{v}$ de refracción.

» 269, » 20 y 21, en los segundos miembros en vez de $\alpha, \alpha$.

## ERRATAS DEL TOMO SEGUNDO

Pág. 5, línea 28, en vez de «pues» léase «Además».

» 35, » 15, » » » $y_n$ » $y_2$.

» 36, » 2, » » » $(fx_n - 1)$ léase $f(x_n - 1)$.

» 36, » 20, » » » $y_3$ léase $y_2$; l. 30, en vez de $\alpha, s$.

» 37, » 13, » » » las, léase á las; l, 18, $f(x)$, léase de $f(x)$;

» 37, » 21, $f(x)$, léase $f(X)$; l. 23, X, léase $f(X)$.

Pág. 39 cámbiese F por G y G por F en la figura.
» 41, línea 5, en vez de (1) léase (2).
» 41 línea 7, en vez de $x$, léase de $x$; l. 20, serie, léase suma $S_N$.
» 42, línea 12, » » » convergente, lèase uniformemente convergente.
» 42, » 18, » » » «menor», léase «menor que».
» 43, » 11, » » » $x$, léase $\varepsilon$.
» 45, » 4, » » » dada, léase tan pequeña como se quiera, y por consiguiente $< 1$.
» 45, línea 26, en vez de $f(x)$ léase $f(x')$ y vice-versa.
» 46, » 19, » » » *serie* » serie de las derivadas.
» 46, » 21, » » » $u_1, u_2$, léase $u'_1, u'_2$.
» 47, » 16, » » » *de* » *de los términos de.*
» 48, » 4, » » » *serie* » *serie entera;* l. 13, estos, léase aquellos; l. 18, $x_n$, $x^n$; l. 23, léase: 2.º
» 49, línea 4, en vez de $\varepsilon$ léase $\Sigma$; l. 13, $\varepsilon_1$ léase $(\varepsilon_1$; l. 22, $\xi$ léase $\varepsilon$.
» 50, » 6, » » » «misma serie S» léase «suma S de la serie».
» 50, » antepenúltima, $x_n$ léase $x^n$.
» 51, » 20, $X_n$ léase $X^n$; l. 25, (3) léase (7).
» 53, » 2, «función» léase «serie».
» 56, » 8, $(fx)$ léase «$f(x)$».
» 58, » última, R léase R'.
» 64, » 6, «$r_m \rho_n$» léase «$r^m \rho^n$».
» 69, » 15, «mismo» » «intervalo de convergencia».
» 70, » 6, $Q_1$ léase «de $Q_1$».
» 71, » 5, $bc'$ » $ba'$.
» 73, » 10, $x$ é $y$ léase $y$, $x$.
» 74, » 10, $a$ » $x$.
» 75, » 5, $X^n$ » $X_n$.
» 76, » 16, X » $x$; $y$ léase y; última 153 léase 473.
» 79, » 6, punto, » punto $a$.
» 81, » 1, por » para.
» 81, » 12, «de los» léase «puntos tales»; l. 27, y se, léase y.
» 84, » 25, «que una» léase «una»; 26, se, léase «que se».
» 85, » 11, «el» léase «en»; «de» léase «que»; 22, «que» léase «que para todos los valores de $x$ mayores que $m$».
» 90, » 1, $x = a$ léase $x = 0$.
» 99, » 12, $a - x_{n-1}$ léase $b - x_{n-1}$.
» 100, » 8, $\delta_1$ léase $\delta'_1$.

Pág. 101, línea penúltima, $y$ léase $y_1$; l. última $x_\nu$ léase $y_\nu$.
» 102, » 9, $<$ léase $<($; l. 25, $\mu$ léase $\mu'$.
» 108, » última «con» lease «con $D^n_{\varphi\,\psi}$,».
» 109, » 9, $D^{(r)}_{\varphi}$ léase $D^{(r)}_{\psi}$.
» 110, » 11, $R_n\,x)$ léase $R_n\,(x)$.
» 111, » 2, $h - \infty$ $h = \infty$.
» 112, » 11, $x^{m+1}$ » $x_{m+1}$; l. 12, $a^n$ léase $a^m$.
» 112, » 21, + léase − 22, $\cos^{m+n}$, léase $\cos a^{m+n}$.
» 113, línea 14 y 15, $\cos^{m+n}$ léase $\cos a^{m+n}$.
» 115, » última, $dx$ léase $\varphi(x)\,dx$.
» 120, » 2, $a\,\varepsilon'$ léase $a - \varepsilon'$; l. 19, $A^{(m)}$, léase $A^{(m)}$ —.
» 122, » 20, » $\varepsilon$ léase $\varepsilon'$.
» 131, » antepenúltima, añádase «monógena».
» 133, » 5, $d_1$ léase $q_1$.
» 142, » 4, «exterior» léase «interior».
» 143, » 1, á $\rho^{n-m}$ añádase $e^{(n-m)i\theta}$.
» 143, » 1, en vez de $e^{n-m}$ léase $\rho^{n-m}$.
» 147, » 8, » » » La, léase «Si la
» 175, » 1, penúltima, en vez de $x = \xi$ léase $x - \xi$.
» 176, » 1 y 2, en vez de $x = x_0$, $x = x_1$, léase $x - x_0$, $x - x_1$.
» 199, » 6, » » » $x - x_0$ léase $x = x_0$.
» 199, » 14, en vez de − léase =; l. 6, añádase «Podemos deducir la fórmula de Taylor».
» 199, » 19, en vez de $f(x)$ léase $f^n\,(x)$; (1) léase (1′).
» 202, » 6, » » » $\beta$ léase $\gamma$.
» 203, » 13, » » » 2 » 12.
» 204, » 7, » » » — » =; 20, suprímase «dos».
» 207, » 7, » » » $zz_0Z$ léase $z_0zZ$; 27, $(fx)$ léase $f(z)$.
» 208, » 12, » » » $y$ léase y.
» 217, » 7, » » » $c$ léase $e$; l. 8, $e$ léase $c$.
» 217, » 17, añádase «la ecuación ec. (2).
» 221, en la figura léase C, D en vez de A, B.
» 222, línea 11, en vez de $|z$ léase $z|$; l. 22, en vez de $z$ léase Z.
» 223, » 22, $\rho$, léase $\rho$ descrita desde $t$ como centro.
» 242, » 1, $ep$ léase $e^p$; 16, en vez de «centrò» léase «interior».
» 247, » antepenúltima, y léase $yz'$.
» 248, » 25, en vez de $z$ léase $z'$.
» 249, » 3, » » » $n$ léase $u$.
» 249, » 11, $z$ léase Zy; $Z^{n-1}$ léase $Z_{n-1}$.
» 250, » 4, » » » $n$ léase $u$.

D-2
694