GEOMETRÍA

POR

D. JUAN B. PUIG

GRADO ELEMENTAL

Geometría intuitiva
Cuestionarios -:- Repertorios
Ejercicios prácticos
Síntesis dialogada
400 grabados

DALMAU CARLES, PLA, S. A.—EDITORES
1930

GEOMETRÍA

POR

D. JUAN B. PUIG

Director de las Escuelas de la Beneficencia de Zaragoza

GRADO ELEMENTAL

GEOMETRÍA INTUITIVA

---

400 GRABADOS

14.ª EDICIÓN

De texto por R. O. de 24 de mayo de 1909

DALMÁU CARLES, PLA, S. A.—EDITORES

1930

Talleres Dalmáu Carles, Pla. S. A. — Gerona

PROLOGO

A los Sres. Maestros:

El presente libro, que encomendamos a la benevolencia de nuestros comprofesores, no es una obrita aislada, sino el **primer grado** *de los tres que constituyen un plan detenidamente pensado.*

La Geometría, **primero** *es de una naturaleza abstracta, y el niño no puede llegar a comprenderla sino mediante las formas sensibles en que se encarna y que se dirigen a los sentidos;* **después,** *porque consta de un encadenamiento de verdades especulativas, es forzoso exponerla siguiendo el natural enlace y dependencia y con la peculiar nomenclatura, y,* **por último,** *dado el fin de toda ciencia positiva, ha de convertírsela en abundosa fuente de aplicaciones a las necesidades de la vida.*

De ahí nuestro proyecto de tres grados, con carácter y denominaciones de **Geometría intuitiva,** *o de introducción (1.^{er} grado),* **Geometría didáctica,** *o académica (2.^{o} grado), y* **Geometría profesional,** *o aplicada (3.^{er} grado). Es decir, que, según nosotros concebimos la enseñanza de esta asignatura, el primer paso ha de tender a que, mediante el ropaje y por los sentidos, adquiera el niño, por la inteligencia, la noción abstracta de la materia; el segundo paso debe aspirar a que los niños, así iniciados, aprendan Geometría con el rigor científico y con la técnica que le son propias, y el tercer grado ha de perseguir una* *finalidad eminentemente práctica, derivando de la especulación aplicaciones aprovechables.*

Según lo cual, en un primer grado, a la abstracción del **ancho y grueso** *de la línea hay que llegar mediante ejemplos sugestivos de líneas* **gruesas y anchas**; *en un segundo grado, conviene dar, por ejemplo, con rigorismo técnico y de derivación, toda la fecunda especulación de las propiedades del triángulo rectángulo, y en un tercer grado, ha de pensarse ya en el destino ulterior de los niños, que serán los artistas, los profesionales, los artesanos de mañana.*

En este primer grado, destinado a niños de poca edad, hemos diluído la materia **groso modo** *y dejando el rigor científico como entre penumbras. El estilo, el plan, la disposición, los ejemplos y las ilustraciones, nos han absorbido gran atención, que hemos encaminado, sobre todo, a que el libro* **guste a los niños porque sea como ellos son, como lo comprenden y como lo quieren.**

Creemos haber dado con innovaciones radicales en el plan, y aún con originalidades que no hemos visto en ninguna parte. Si son un acierto o no, ello han de juzgarlo los entrañables comprofesores. Nosotros, sin embargo, creemos que, aun siéndolo, el acierto no vendría del mérito, sino del buen deseo que nos sugieren intensos amores por la enseñanza. Y que nos pagaría con creces la benevolencia que pedimos para este trabajo que, de todo corazón, diputamos de modesto.

J. B. P.

Orientación Didáctica

Nuestro libro se separa, por completo, de todos sus similares, en lo que respecta a la manera de desarrollar la doctrina científica que nos ocupa. De consiguiente, no creemos por demás dedicar breves líneas a las instrucciones que conceptuamos necesarias para transmitir, con acierto, las ideas; aunque las reglas que vamos a exponer sean, en su esencia, las que sigue siempre el buen Maestro, conocedor del uso que debe hacerse del libro de texto, para que éste resulte un auxiliar insustituíble de la viva voz y, por ende, instrumento de enseñanza de valor inapreciable.

Proceder de otra manera, conduce a la enseñanza *libresca*, memorista, que nada dice al conocimiento y cuyas fatales consecuencias ha condenado ya la Pedagogía racional.

Permítannos, pues, nuestros estimados compañeros, que nos atrevamos a exponer las siguientes observaciones, pertinentes a la manera de emplear el librito que les ofrecemos:

1.ª — *Los niños, todos a la vez, deben leer un apartado. El Maestro lo explica, amplía y aclara. Seguidamente, debe hacer que aquéllos se fijen en los grabados correspondientes, y proponer objetos y ejemplos varios para llevar al conocimiento las ideas que lo leído tenga por objeto enseñar.*

2.ª — *Los asuntos tratados en cada* CUESTIONARIO *deben promover conversaciones y trabajos colectivos, interesantes y sugestivos, procurando que los niños* *discurran y laboren con libertad, recordando lo aprendido anteriormente conversando con el Maestro.*

3.ª —*Los* REPERTORIOS *tienen por objeto acabar de conseguir, por medio de ejemplos y razonamientos continuados, que el niño se imponga bien en lo que haya sido objeto de lección, y, a la vez, ofrecer al Maestro medios prácticos de enseñanza, ahorrándole, así, el trabajo de inventarlos y ordenarlos.*

4.ª —*Por último, los* DIÁLOGOS *contienen la esencia de lo que el niño debe recordar, y habrán de ser objeto de lecciones de memoria, después de haber sido tratado cada capítulo mediante las* LECTURAS, *las* CONVERSACIONES *y los* RAZONAMIENTOS *correspondientes.*

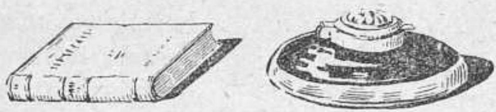
PRIMERA PARTE

Longimetría

PRELIMINARES

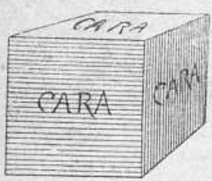
NOMENCLATURA — conjunto de voces

1. Un libro, un tintero, el bastidor de bordar y *cualquier objeto que ocupe lugar en el espacio* y que se aprecie por los sentidos, se llama *cuerpo geométrico.*



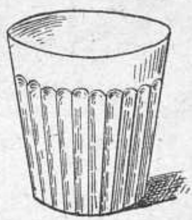
El libro y el tintero son *cuerpos*

2. *Las caras de los cuerpos,* lo que llamaríamos su piel o su forro, *se llaman superficies.*



Cada cara de este cuerpo es una *superficie*, y la reunión de ellas forma la *superficie* del cuerpo

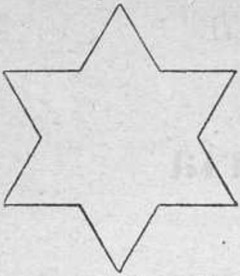
3. *Los límites de las superficies,* lo que las separa unas de otras, o sea donde acaban, se llaman *líneas.*



La curva que forman la boca y la *base* del vaso, sus estrías y sus lados, derecho e izquierdo, son *líneas*

4. El punto donde dos líneas se encuentran, se llama *punto geométrico.*

Cuestionario. — Cítense cuerpos geométricos. — Señálense las superficies, las líneas y los puntos geométricos del encerado o pizarra. — Con un libro como ejemplo, hágase discurrir y exteriorizar por qué el libro es un cuerpo; por qué sus caras son superficies; por qué los bordes son líneas, y por qué las puntas son puntos geométricos. — De qué son ejemplos y por qué, la badana de una pelota, la piel de una naranja o el forro de papel de un libro. — Qué representa o a qué pueden compararse y por qué, los dobleces del forro de los libros o las junturas de las piezas o tablas en una caja de madera. — De qué dan idea las puntas del libro, el punto donde se juntan varios dobleces o el sitio donde se cortan los hilos de la malla o red.

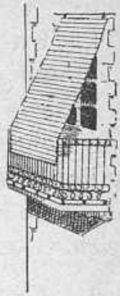


Las puntas de la estrella son *puntos geométricos*

5. De otro modo: si observáis la ruta o camino de las hormigas marchando hacia su hormiguero, veréis *una serie de puntos* negros, que *forman una línea.*

Las líneas pueden suponerse formadas por una *continuación de puntos*

6. Si tiráis una persiana, si abrís un abanico, notaréis que las varillas, que son como *una serie de líneas*, poniéndose unas junto a otras, *forman una superficie.*



Las *superficies* pueden suponerse formadas por una *serie de líneas que se toquen*

7. Y si dejáis vuestras planas de escritura, que

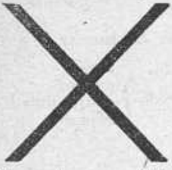
son como *una serie de superficies*, unas encima de otras, *formaréis un cuerpo*.

Cuestionario. — A qué pueden compararse: el conjunto de los granos que forman los rosarios; los rastros luminosos de los cohetes voladores corriendo en el espacio; las ruedas luminosas en los fuegos artificiales; los surcos de las ruedas en la nieve o en el barro; el hilo de un ovillo desarrollándose; una bola de billar untada de tiza y moviéndose sobre un paño o tapete.

Los *cuerpos* pueden considerarse formados por *montones de superficies*

De qué dan idea los hilos o trama en el tejido de la ropa; las telas metálicas muy espesas; las apisonadoras de las calles; los rodillos de tintar en las máquinas de imprimir; las cañas de un cañizo.

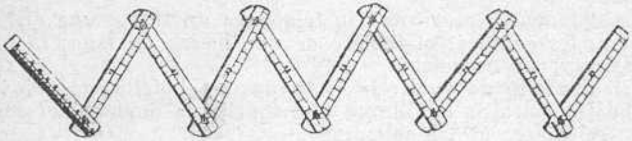
De qué son ejemplos las hojas de los libros, puestas unas sobre otras; un pañuelo plegándolo sucesivamente muchas veces; las tapas de suela en los tacones del calzado; las capas de cal del blanqueo de paredes; las ronchas de las patatas; las telas o capas de la cebolla.



El *punto geométrico* se representa por el *corte de dos líneas*

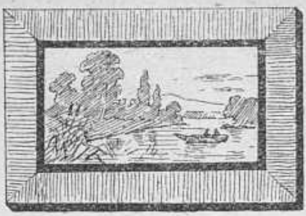
8. El punto geométrico no puede ser largo, *porque sería una línea;* ni largo ni ancho, *porque sería una superficie;* ni largo y ancho y grueso, *porque ocuparía espacio y sería cuerpo. No tiene, por tanto, extensión.* Se representa por una crucecita.

9. Cuando se habla de lo largo de un camino, de



Metro de carpintero *(longitud)*

lo alto que es un niño o de lo hondo de un pozo, no se cuenta ni la anchura, ni lo grueso; sino la *línea* que va de extremo a extremo, y que *es la extensión en un sentido* (largo).



Un cuadro *(longitud y latitud)*

10. No puede decirse que una plaza, un papel o un pañuelo son grandes o pequeños, sin reparar en su largo y en su ancho. Esa grandor se llama *superficie, que es la extensión en dos sentidos* (largo y ancho).

11. Ninguno de vosotros podrá asegurar que en una barra hay más o menos turrón que en otra, si no comparáis lo largo, lo ancho y lo grueso de cada una de ellas. *El cuerpo es, pues, la extensión en tres sentidos* (largo, ancho y grueso).

Una barra de turrón

(Longitud, latitud y { *altura* / *grueso* / *profundidad* / *espesor)* }

Cuestionario. — A cuántos sentidos o direcciones hay que atender para apreciar el grandor de los objetos siguientes, y cómo se llamarán sus dimensiones:

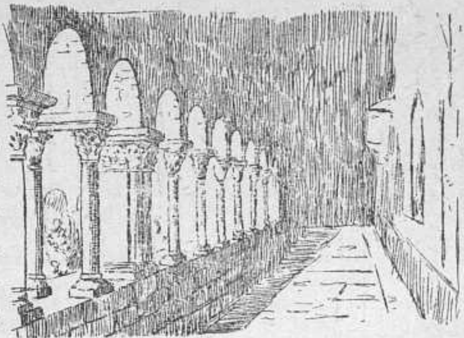
Los cordeles; las varillas de un paraguas; las torres o campanarios; los túneles; el alcance de los cañones; la distancia de un pueblo a otro; el alcance de la vista; la existencia del sonido.

Las planas de escritura; la tela para un traje; una era de trillar; los campos; el tablero de una mesa; un lago; la plataforma de la escuela.

Un depósito de agua; la tinta de una botella; el tajo de jabón; la bolsa de los libros; el armario; la madera del encerado; el hierro de las columnas.

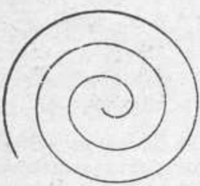
12. Para saber cuántas vueltas debería dar la rue-

da de una bicicleta para recorrer tal o cual camino; cuántos metros cuadrados tiene de superficie un jardín; cuánta agua hay en una botella; cuánto dista el Sol de nosotros o cómo se dibuja la fachada de un palacio o los claustros de un convento, hay que estudiar *Geometría, que es la ciencia que trata de la extensión.*

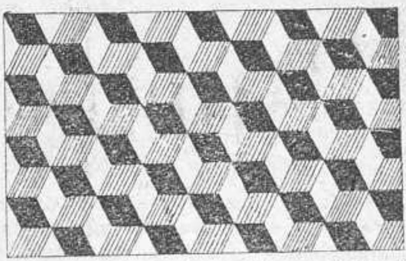


Claustros de un convento. *(Lo enseña a dibujar la Geometría)*

13. Las cuestiones geométricas que tienen por objeto determinar, medir o trazar líneas o, por ejemplo,

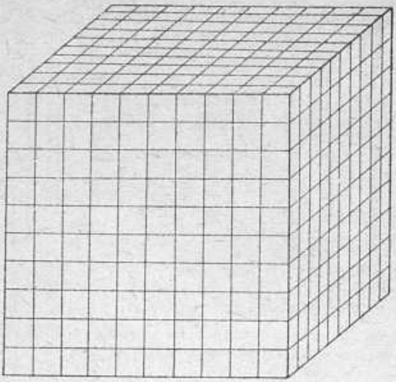


La *Longimetría* nos enseña la manera de trazar esta línea



La *Planimetría* nos enseña a calcular la superficie de este mosaico

averiguar con cuánta cuerda podrá rodearse el tronco de un árbol, se estudian en la primera parte de la Geometría, llamada *Longimetría,* que es la que *trata de las líneas o longitudes.* Las cuestiones que enseñan a medir, dibujar o conocer una superficie o plano, como, por ejemplo, querer saber los ladrillos que se necesitarán para enladrillar el piso de un salón, han de estudiarse en la segunda parte, llamada *Planimetría*, que *trata de las superficies.* Y los problemas geométricos en que se busque el volumen o la forma de un cuerpo, como, por ejemplo, con qué medidas hará un carpintero una caja que pueda contener exactamente un millar de libros, los enseña la *Estereometría,* o tercera parte de la Geometría, que *trata de los cuerpos* o volúmenes.



La *Estereometría* nos enseña a calcular el volumen de este cuerpo

REPERTORIO:

Generación de líneas, superficies y cuerpos

Dan idea y son ejemplos de formación de *líneas* por medio de *series de puntos*: los puntos suspensivos de la escritura; los eslabones de una cadena; las letras formadas por cabezas de clavo, que suelen haber en los aparejos de las caballerías; una guirnalda de flores; un rosario; el collar de perlas; el surco de los granos de trigo en la siembra; una hilera de soldados; la punta de la pluma escribiendo; el diamante cortando el cristal.

Dan idea y son ejemplos de formación de *superficies,* por medio de *series de líneas*: el riego de las calles por medio de cubas; las persianas; la tela del cedazo; el desarrollo de una alfombra; un puente de tablas; las barbillas de una pluma de ave; el encaje de bolillos; los mimbres de los cestos; los cañizos de cañas; el tejido de la ropa.

Dan idea de *cuerpos*, y son ejemplos de cómo se forman por medio de *series de superficies*: las hojas del libro; un periódico en muchos dobles; un paquete de sobres; una baraja de naipes; un talonario; un fajo de billetes; un paquete de fototipias; la suela de los tacones; las pilas de ladrillos; los trapos de una pelota; las telas o películas de la cebolla.

Cuestionario.—A qué parte de la Geometría pertenecen los siguientes ejemplos o problemas: dibujar una cruz; probar si una regla está o no bien recta; dibujar una escalera de mano; saber cuánto alambre hay en un mazo, sin medirlo; trazar dos líneas que no se encuentren aunque se alarguen; dividir una línea en tres partes iguales; dibujar una reja igual a otra.

Averiguar con cuántos sellos de carta se cubrirá del todo la tapa de un libro; dibujar una estrella o un pavimento de mosaicos; cuánto papel o cuánta alfombra entrará en las paredes o en el suelo de una habitación; cómo podrá dividirse una moneda en cinco partes iguales; dibujar una esfera de reloj.

Saber cuánto puesto ocuparán cien libros; dibujar un campanario; saber cuánta agua cabe en un embudo; cuánto pesa una columna de hierro; dibujar un dado; averiguar cuántos fardos iguales podrá contener un vagón, etc., etc.

DIÁLOGO

Cuerpo geométrico. — Es todo lo que ocupa un lugar en el espacio.

Superficie. — Es toda cara de un cuerpo.

Línea. — Es la intersección de dos superficies.

Punto geométrico. — Es la intersección de dos líneas.

Dimensiones. — La línea tiene una que se llama longitud *(largo)*.

La superficie, dos: longitud y latitud *(largo y ancho)*.

El cuerpo, tres: longitud, latitud y profundidad *(largo, ancho y grueso)*.

Geometría. — Es la ciencia que trata de la extensión.

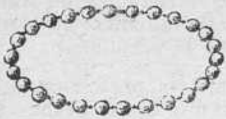
Su división. — La Geometría se divide en:

Longimetría, que es la parte que trata de las líneas.

Planimetría, que es la parte que estudia las superficies.

Estereometría, que es la parte que se ocupa de los cuerpos.

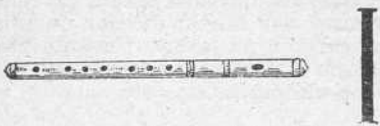
LÍNEAS. NOMENCLATURA



La sucesión continuada de granos del collar, determinan una *línea*

1. Las ovejas de un rebaño pasando una tras otra por un camino estrecho; los granos de un rosario; las gotas de agua que caen sucesivamente al suelo, saliendo de una regadera, son *series de puntos que forman líneas.*

2. *Las series de puntos* formadas por una hilera de soldados, por los hierros de una verja o por los árboles de una calle, mirados como se mira el cañón de una escopeta, apuntando, *se ocultan todos* uno detrás de otro, porque están todos en *una misma dirección.* Esas líneas se llaman *rectas.*



Los agujeros continuados de la flauta y la letra I, son ejemplos de *líneas rectas*

Línea recta

3. *La serie de puntos* que forman los dientes de la hoja de una hoz, el arco de una ballesta, el ojo de una llave, la coma, no pueden ocultársenos todos porque *no están en una misma dirección,* y forman *líneas curvas.*

El arco iris, la letra S, son ejemplos de *líneas curvas*

Línea curva

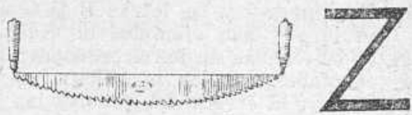
4. La llave, la hoz y la ballesta tienen *series de*

puntos que están en la misma dirección, y *series de puntos que no lo están*. Forman, por tanto, líneas *mixtas*, porque *se componen de rectas y de curvas*.

La hoz y el número 5, son ejemplos *de líneas mixtas*

Línea mixta

5. En un metro de bolsillo a medio plegar; en las rayas de luz que forman el relámpago, y en los pasamanos de las escaleras de varios rellanos, no se suceden rectas y curvas, sino *rectas en distintas direcciones*. Estas líneas se llaman *quebradas*.

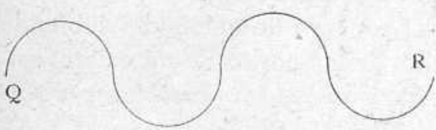


Los dientes de la sierra y la letra Z, son ejemplos de *líneas quebradas*

Línea quebrada

6. Las serpientes culebreando, los bucles rizados de una niña y las ondas del mar, foran *líneas* llamadas *sinuosas*, *porque se componen de varias curvas en distintas direcciones*.

La serpiente forma una *línea sinuosa*



Línea sinuosa

REPERTORIO:

Líneas por su naturaleza. — Dan idea y son ejemplos de *líneas rectas:* las chimeneas de las fábricas; las columnas; los tacos de billar; el cañón de las escopetas; el tubo del termómetro; las picas; las puntas de París; los cantos de las reglas; las cuerdas tirantes; las pautas del papel de escribir; las letras A E F H K L M N T V X Z.

Dan idea y son ejemplos de *líneas curvas:* el arco iris; los cabellos rizados; el pico de los loros; la comba cuando se salta; las líneas de la oreja; la lira musical; la cadena del reloj, puesta; la boca abierta; los alfanjes; las alas de la mariposa; los números 3, 6, 9, y las letras C O S.

Dan idea y son ejemplos de *líneas mixtas:* la hoz; el ganchillo; el pasabotas; la llave inglesa; el báculo de los obispos; la guadaña; las hojas de las tijeras; la ballesta; la media luna; el número 5 y las letras B D G J Q R U.

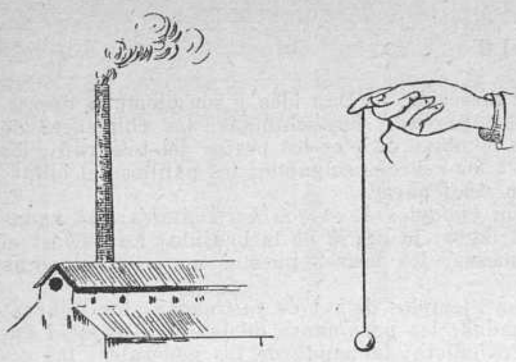
Dan idea y son ejemplos de *líneas quebradas:* los *paravants;* los fuelles de los acordeones; las escaleras; los abanicos entreabiertos; los tornillos; las tuercas; los dientes de una sierra; la cresta del gallo, y las letras M N Z.

Dan idea y son ejemplos de *líneas sinuosas:* los surcos de los campos labrados y de los tejados; los roquetes de los curas; las arrugas de los cortinajes; el hilo de las costuras; el mimbre de las cestas; la palma de los capazos; el entrelazado de los trabajos manuales; la letra S.

Cuestionario. — Suponed que vuestro bastón de paseo es de junco delgado y que está bien construído: ¿Qué clase de línea formará y por qué? — Y si hiciérais con él ademán de doblarlo, ¿qué línea formaría y por qué? — ¿Qué línea se hará con él si lo pasáis, alternativamente, por encima y por debajo de los hierros de una reja? — ¿Y si lo rompierais, sin desunirlo, por dos o tres partes?

Dígase qué clase de líneas forman: los hilvanes de una tela; los bordes de una media luna; la letra Z; el palillero de escribir; las arrugas de un traje de lana; la alfombra de una escalera; el lomo de los libros.

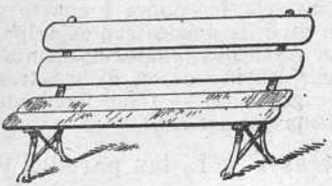
7. La *serie de puntos* que forman las gotas del chorro de lluvia, o del reguero de hormigas subiendo el tronco de un árbol, o de las perlas de un collar, colgando, *caen o van de arriba abajo sin inclinarse a ningún lado,* y forman *líneas verticales.*



La chimenea y la plomada forman *líneas verticales*

Línea vertical

8. La superficie de las aguas mansas; la palma de la mano cuando sostenéis el trompo; el tablero de la mesa de billar; el signo *menos*, forman líneas *que van de izquierda a derecha o viceversa sin inclinarse a ningún lado*, y se llaman *horizontales*.

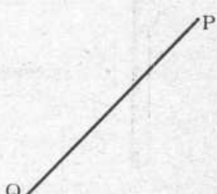


Los listones o maderas del banco son *líneas horizontales*

Línea horizontal

9. Los cantos laterales del tablero de vuestro pupitre y de los tejados de las casas y las dos piernas muy abiertas, porque *no son ni verticales ni horizontales*, se llaman *líneas inclinadas*.

Los remos de la barca y los trazos de la letra K son *líneas inclinadas*



Línea inclinada

REPERTORIO:

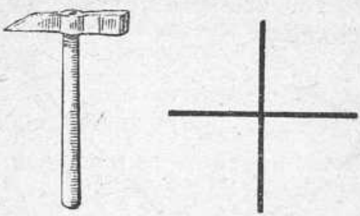
Líneas, por su dirección. — Dan idea y son ejemplos de *rectas verticales:* las paredes; las columnas; las chimeneas de las fábricas; los hombres de pie; los postes del telégrafo; los cirios en el altar; las cuerdas colgando; los palillos del billar; el péndulo de un reloj parado.

Dan idea y son ejemplos de *rectas horizontales:* las aguas del mar o de los lagos; la aguja de la brújula; los suelos; el tablero de las mesas; los brazos puestos en cruz; el signo menos.

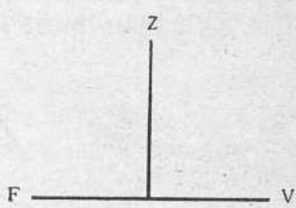
Dan idea y son ejemplos de *rectas inclinadas:* los tejados; las calles empinadas; los pasamanos de las escaleras; el encerado sobre el caballete; la banda de los generales; las correas de la guardia civil; el palillero escribiendo; la escopeta al hombro; los trazos de la derecha en la letra K.

Cuestionario. — ¿Qué clase de rectas forma el cuerpo de un perrillo en posición natural, sostenido sobre sus patas traseras o subiendo por una escalera? — ¿Qué rectas forman las saetas del reloj cuando marcan las seis, las nueve y cuarto y las ocho y diez? — Examinar un atril de músico con su trípode, y decir qué líneas son o están verticales; cuáles horizontales, y cuáles inclinadas. — Poner los brazos en dichas tres posiciones: vertical, horizontal e inclinada. — ¿Qué líneas de la cara están en cada una de dichas posiciones?

10. Los trazos de las letras F y L, las paredes y los suelos, los bordes inmediatos de los sobres de carta, forman líneas que, *al encontrarse una con otra, no se inclinan a un lado más que a otro.* Esas líneas se llaman *perpendiculares.*

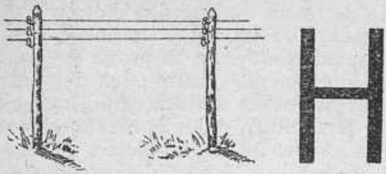


El martillo y su mango y el signo más son ejemplos de *líneas perpendiculares*

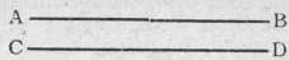


Líneas perpendiculares

11. Los dos bordes opuestos de una regla; los surcos que traza el arado; los callejones que dejan las mesas de escritura, y la letra H sin la raya de en medio, forman líneas *que, por más que se prolonguen, nunca podrán encontrarse*, y se llaman *paralelas*.

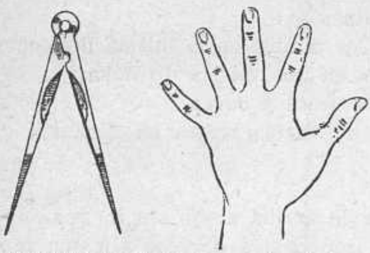


Los hilos del telégrafo y la letra H nos ofrecen *líneas paralelas*

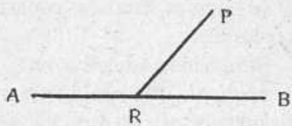


Líneas paralelas

12. Las tapas de un libro entreabierto; un compás abierto, y las letras A y V, forman líneas *que no son perpendiculares ni paralelas* y que se llaman *oblicuas*.



Los lados del compás y los dedos de la mano abierta son *líneas oblicuas* entre sí



Rectas oblicuas

REPERTORIO:

Líneas en comparación. — Dan idea y son ejemplos de *rectas perpendiculares:* la pared y el suelo; la pared y el techo; la pierna y el pie; los brazos de las cruces; dos lados de los tres de una escuadra; los martillos; las esquinas de los sobres y postales; el signo +, y las letras L T F E.

Dan idea y son ejemplos de *rectas paralelas:* las teclas del piano, las cuerdas de la guitarra; los alambres del telégrafo; las líneas del pentágrama; las púas del peine y del tenedor; las escaleras de mano; las calles alineadas; el signo =, y dos de los tres trazos que tienen las letras F H E.

Dan idea y son ejemplos de *rectas oblicuas:* las piernas abiertas; las pinzas; el rompe-nueces; los pies del trípode; los radios de una rueda; las varillas del paraguas; los tirantes de la cometa; los dedos de la mano, abierta; el signo de multiplicar, y las letras A K V.

Cuestionario. — Qué clase de líneas forman las de una cruz; las púas de un peine; las saetas de un reloj cuando señalan las tres; las varillas de un abanico abierto; la pared y el suelo; los dedos crispados; las dos piernas juntas; las dos cuerdas del trapecio de gimnasio; las casas de una calle, bien alineada; dos bordes contiguos de un libro y dos bordes opuestos; la línea de la nariz y la de la boca; la de la nariz y la de la frente; los renglones de escritura. — Tomar dos palilleros o portaplumas y ponerlos: verticales, horizontales, inclinados, perpendiculares, paralelos y oblicuos.

DIÁLOGO

¿Qué es la línea? — Es una serie de puntos.

¿Cómo se divide? — La línea es:

recta, cuando tiene todos los puntos en la misma dirección;

curva, cuando no los tiene en una misma dirección;

mixta, cuando se forma de recta y curva;

quebrada, cuando consta de varias rectas en distintas direcciones.

Se divide, además, en:

vertical, que es la que va de arriba abajo sin inclinarse;

horizontal, la que va de izquierda a derecha sin que tampoco se incline;

inclinada, la que no es vertical ni horizontal.

Las rectas, comparadas, pueden ser:

perpendiculares, las que, al encontrarse, no se inclinan más a un lado que a otro;

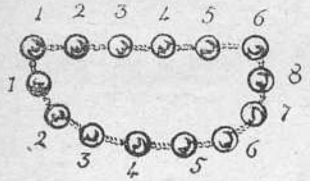
paralelas, las que no se juntan nunca por mucho que se prolonguen;

oblicuas, las que no son perpendiculares ni paralelas.

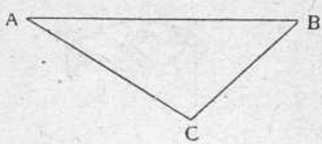
PROPIEDADES DE LAS LÍNEAS

1.ª *Para ir de un punto a otro, el camino más corto es la línea recta.*

Comprobaciones. — Por los atajos, que son caminos más rectos, o con menos curvas, se llega más pronto que por la carretera. — Cuando un niño teme un castigo, no se presenta al maestro o no va a casa en línea recta. — La cuerda de una ballesta es más corta que el arco. — En la letra D, la línea recta es más corta que la curva.

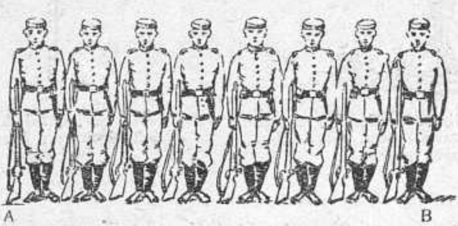


En la *línea recta* hay *menos* granos que en la curva; luego la recta *es la más corta*



Para ir desde el punto A al punto B, la distancia más corta es la recta A B

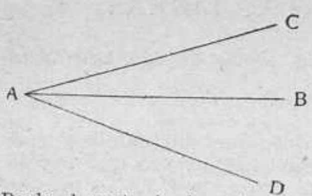
2.ª *Desde un punto a otro, no puede trazarse más que una sola recta.*



Del punto A al punto B, nc cabe más que *una línea recta de soldados*

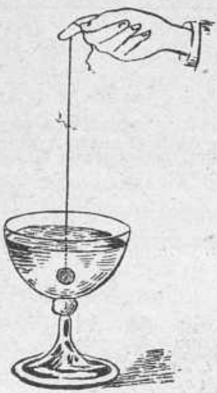
Comprobaciones. — Para construír un túnel, se señalan la entrada y salida; se acomete la obra desde los dos extremos, y los obreros se encuentran. — Con dos soldados de guía, fijos en los extremos, se alinean los batallones. — El punto de mira de la escopeta y el punto del blanco, determinan la línea recta que recorrerá la bala.

3.ª *Una recta vertical y otra horizontal, son siempre perpendiculares entre sí.*

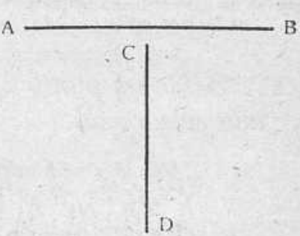


Desde el punto A al punto B no puede trazarse más que la recta A B

Comprobaciones. — Los suelos, horizontales, y las paredes, verticales, son perpendiculares entre sí. — Cuando la cabeza de un martillo se pone horizontal, el mango resulta vertical. — La cuerda del pozo y la superficie del agua, son siempre perpendiculares entre sí.



La plomada (línea vertical) y el agua (línea horizontal) *son perpendiculares entre sí*

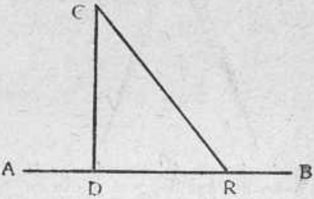


La recta horizontal A B y la vertical C D son perpendiculares entre si

4.ª *La perpendicular bajada desde un punto a una recta, es más corta que las oblicuas que van desde dicho punto, a la recta.*

Comprobaciones. — Levantando una pierna, se pone ésta oblicua con el suelo, y ya no toca en tierra. — Los dos lados perpendiculares de una escuadra, son más cortos que el otro que no lo es. — En los tirantes de la cometa, el de enmedio, que es perpendicular a la cometa, es también más corto que los de los extremos, que son oblicuos.

La pierna derecha (perpendicular) *es más corta* que la línea formada por la pierna izquierda y los puntos que la unen al suelo



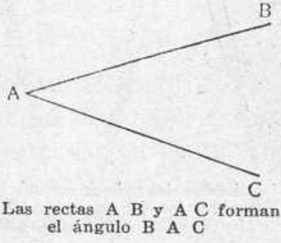
La recta C D, perpendicuar a la A B, es más corta que la oblicua C R

ÁNGULOS

NOMENCLATURA

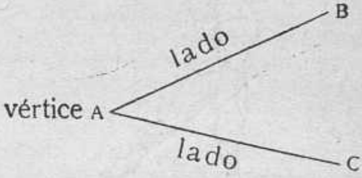
1. Dos casas formando un rincón; el mango de la azada y su hoja juntándose en la contera; el brazo

La *abertura* que forman los brazos del compás es un *ángulo*



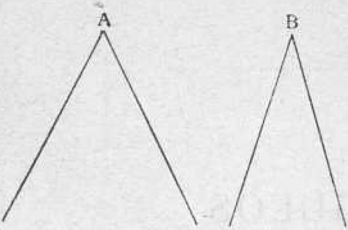
Las rectas A B y A C forman el ángulo B A C doblado por el codo; las dos ramas de un compás; la letra V, son *dos líneas que se juntan en un punto*, y forman un *ángulo*.

Los dos brazos del compás son los *lados* del ángulo, y el punto en que se juntan es el vértice



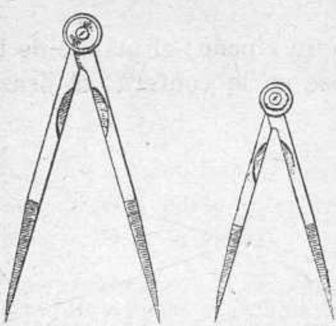
En el ángulo B A C, las rectas A B y A C son los lados, y el punto A en que se unen, es el vértice

2. Las dos casas, el mango y la hoja, el brazo y el antebrazo, etc., se llaman *lados del ángulo*, y el rincón, la contera, el codo, etc., se llaman *vértices*.

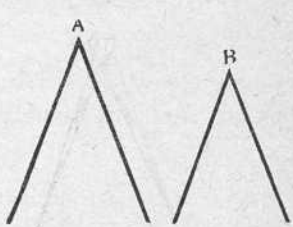


El ángulo A es mayor que el B, porque es mayor la abertura de sus lados

3. *Cuánto más se abran* las piernas, o el compás, o las tije-

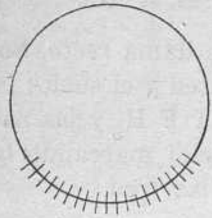


Los brazos del primer compás son más largos que los del segundo; sin embargo, los ángulos que forman *son iguales*



Los ángulos A y B, son iguales, aunque sean desiguales sus lados ras, o un libro, *mayor ángulo forman,* porque *el ángulo es la abertura.*

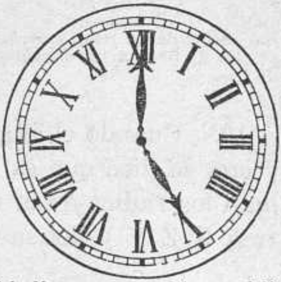
4. En cambio, las saetas de todos los relojes, grandes y pequeños, puestos en la misma hora, formarán *ángulos iguales,* porque *el ángulo nada tiene que ver con la longitud de los lados.*



Los grados son como esos *trocitos* de línea *curva*

5. El dinero se cuenta por pesetas, el pan se pesa por kgs.; el agua se evalúa por litros, y *los ángulos se miden por grados.*

6. Un grado es como un *trocito de anilla,* o como una *tira de rollo,* o como una *porción* muy pequeña *del aro* que tenéis para jugar.



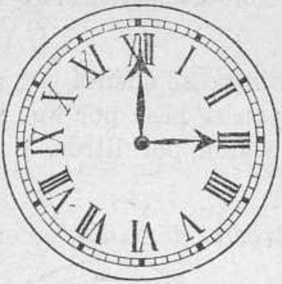
Si la línea curva que forma el límite o borde de la esfera del reloj se dividiese en 360 partes iguales, cada una de esas partes sería *un grado*

7. Dividid el borde de la esfera de un reloj en 360 partes iguales, y en cada parte que resulte, trazad una rayita como las que sirven *para señalar los minutos* del reloj. El *trozo de borde* que habrá de *rayita a rayita es un grado,* cuya palabra se representa así: °.

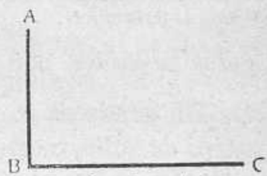
8. Como todo el borde de la esfera del reloj tiene 360°, a los pedacitos de borde iguales que hay entre cada dos de las 12 horas, les corresponderán los 360° repartidos entre 12 horas, o sean 30°. Por lo tanto, cuando las saetas de un reloj señalen, exactamente:

la *una*,	formarán	un	ángulo	de	30°;
las *dos*,	"	"	"	"	60°;
las tres,	"	"	"	"	**90°;**
las *cuatro*,	"	"	"	"	120°;
las *cinco*,	"	"	"	"	150°;

9. Cuando el ángulo vale *90°*, se llama *recto*. Son rectos los ángulos que forman la pared y el suelo; las letras L T F H, y las saetas del reloj marcando las *nueve* y las *tres*.

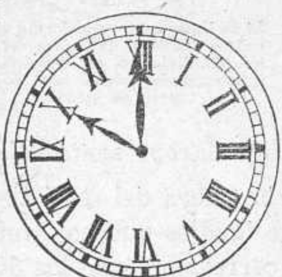


Las saetas de un reloj, cuando señalan las 3, forman un *ángulo recto*

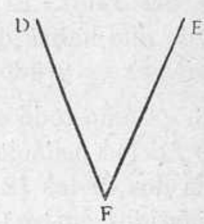


Ángulo recto

10. Cuando el ángulo *tiene menos abertura que el recto*, se dice que es *agudo*. Son *agudos* los que forman los radios de la rueda, los dedos abiertos, las letras K Z V y las saetas del reloj marcando las dos.

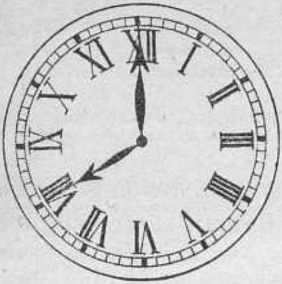


Las saetas de un reloj que señalan las 10, forman un *ángulo agudo*

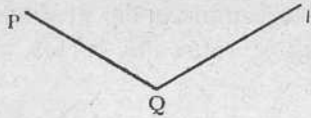


Ángulo agudo

11. Cuando los ángulos *tienen más abertura que el recto,* se llaman *obtusos.* Son, por tanto, *obtusos,* los que forman las tijeras muy abiertas; los de las saetas del reloj señalando las siete o las ocho.

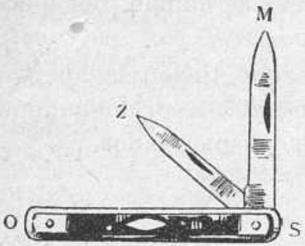


Las saetas de un reloj que señalen las 8, forman un *ángulo obtuso*

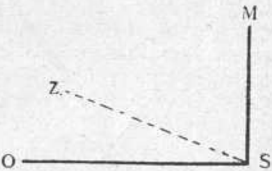


Ángulo obtuso

12. Observad el reverso de un sobre de carta, cerrado, y veréis, en cada extremo, dos ángulos que, *juntos, valen* como *toda* la esquina. Esos dos ángulos, como se completan, son *complemento* uno de otro, y se llaman *complementarios.*

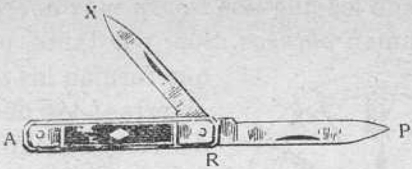


El ángulo formado por el mango O S del cortaplumas y la hoja Z S y el formado por la hoja Z S y la hoja M S, *complementan* el ángulo recto formado por el mango y la hoja M S



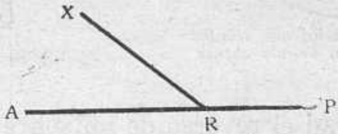
El ángulo O S Z y el Z S M, juntos, forman o completan el ángulo recto O S M; son, pues, ángulos complementarios

13. Observad una balanza que no esté en el fiel o



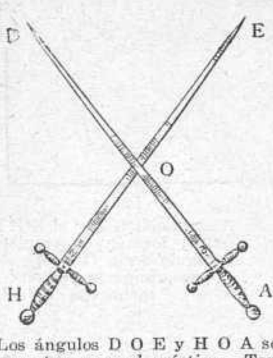
El ángulo formado por el mango A R y la hoja R X y el formado por la hoja R X y la hoja R P, son *suplementarios* y valen *dos rectos*

el cortaplumas del grabado, y veréis dos ángulos que, *juntos, valen dos rectos,* y se llaman *suplementarios.*

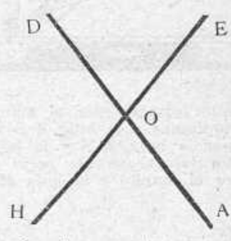


Ángulos suplementarios

14. Abrid unas tijeras o mirad una cruz cualquiera; reparad el correaje de la espalda de un guardia civil o el signo de multiplicar. Veréis cuatro ángulos, dos enfrente de otros dos, y que se llaman (dos a dos) *opuestos por el vértice,* porque tienen la abertura *opuesta,* prolongándoles los mismos lados.



Los ángulos D O E y H O A son *opuestos por el vértice.* También lo son el D O H y E O A



Ángulos opuestos por el vértice

REPERTORIO:

Ángulos. — Dan idea y son ejemplos de *ángulos:* la azada; los martillos; el compás; las pinzas; la cola de los pescados; las puntas de las estrellas; los cuernos del ciervo; los nervios de las hojas de los árboles; la paleta del albañil; las manivelas de los pianos; los números 4 y 7, y las letras A V Z.

Dan idea de que el *ángulo depende de la abertura y no, de la longitud de los lados:* que los ángulos de los sobres de cartas de todos tamaños son rectos; que todos los relojes grandes y pequeños marcando las 4, forman ángulos (sus saetas) de 120°; que en todas las sombrillas, de igual número de varillas, formarán, cada dos de éstas, ángulos iguales; que por mucho que prolonguemos las dos rectas de una letra V, no haremos variar el ángulo.

Dan idea y son ejemplos de *ángulos rectos:* las paredes con el suelo y con el techo; las esquinas de los libros, cuadernos y postales; el martillo; la balanza y la romana en el fiel; las veletas; dos bordes de la escuadra; el signo más; el de dividir, y las letras D E F H L.

Dan idea y son ejemplos de *ángulos agudos:* los dedos de la mano, abierta; el varillaje de los paraguas; los radios de las ruedas; las pinzas; el compás poco abierto; el brazo muy doblado, y las letras V y Z.

Dan idea y son ejemplos de *ángulos obtusos:* el brazo poco doblado; las saetas de los relojes marcando las 4, las 5, las 7 y las 8; los compases muy abiertos, y la pierna doblada un poco hacia atrás.

Dan idea y son ejemplos de *ángulos complementarios:* el reverso de un sobre de cartas; el de una cometa cuadrada (por sus cañas); el encerado con una recta de punta a punta.

Dan idea y son ejemplos de *ángulos suplementarios:* el brazo extendido con el tronco y la cabeza; un cortaplumas de dos hojas, una bien abierta y la otra a medio abrir; la varilla del reloj de sol con la pared; el portaplumas escribiendo, con el papel, y las letras K F T.

Dan idea y son ejemplos de *ángulos opuestos por el vértice:* las tijeras, los catres, las cruces, las tenazas, la letra X y el signo +.

Cuestionario. — Con los dedos de las dos manos o con el metro de bolsillo, hacer formar toda clase de ángulos. Ante un abecedario vertical y poligráfico, si es posible, hacer apreciar qué clase de ángulos forman los trazos de las diferentes letras. En presencia de un reloj, hacer que los niños aprecien, intuitiva y mentalmente, la clase, abertura y valor de los ángulos en las diferentes horas.

DIÁLOGO

Ángulo. — Es la abertura o separación de dos líneas que se cortan en un punto.

Vértice. — Es el punto donde se cortan las dos líneas.

Lados. — Son las dos líneas que forman el ángulo.

Clases de ángulos. — Los ángulos pueden ser:

Rectos, si valen justamente 90 grados;

Agudos, si valen menos de 90 grados;

Obtusos, si pasan de 90 grados;

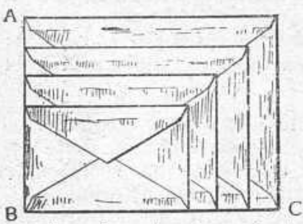
Complementarios, si, sumados sus valores, dan 90 grados (un recto).

Suplementarios, si juntos, valen 180 grados (dos rectos).

Opuestos por el vértice, cuando uno de los ángulos se forma prolongando los lados del otro.

Lectura de ángulos. — Si un ángulo está *solo* o *separado de otros*, para nombrarle, bastará leer la letra de su vértice. Pero si hay más de un ángulo y tienen su vértice en un mismo punto, habrá que leer las tres letras, nombrando, en segundo lugar, la del vértice.

PROPIEDADES DE LOS ÁNGULOS



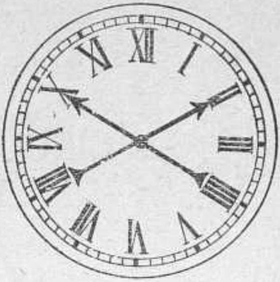
Los sobres de cartas de varios tamaños *coinciden* en un mismo ángulo recto, A B C

1.ª *Todos los ángulos rectos son iguales.*

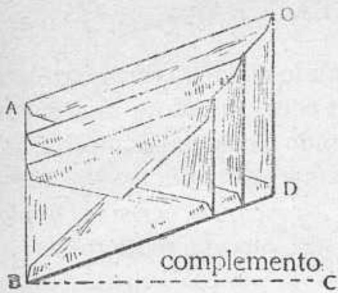
Comprobaciones. — Porque cada uno de ellos vale 90 grados, ni más ni menos. — Los sobres de cartas de diferentes fábricas, clases y tamaños, coinciden en las esquinas.

2.ª *Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

Comprobaciones. — Los cuatro ángulos de esta cruz + son iguales, porque son rectos. — Prolongando por el vértice las dos saetas de un reloj, las doble-saetas abarcarían de punta a punta igual número de minutos. — El signo de multiplicar tiene cuatro aberturas iguales dos a dos. — Las tijeras se abren igualmente por arriba que por abajo.



Las saetas de doble largo de este reloj abrazan, de punta a punta, así a la derecha como a la izquierda, *igual número de minutos*



Estos sobres tienen ángulos agudos iguales en las puntas B y O.ª A cada uno de los ángulos agudos que forman los bordes contiguos en la punta B, les falta el ángulo D B C para completar el ángulo recto A B C

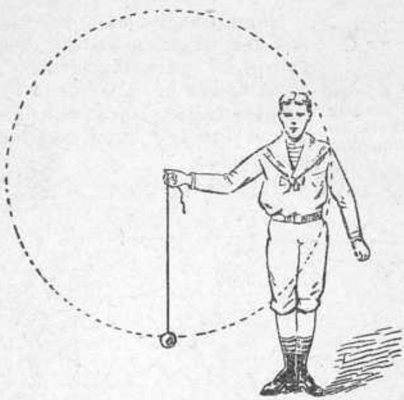
3.ª *Todos los ángulos iguales tienen igual complemento e igual suplemento.*

Comprobaciones. — A todos los ángulos de 80°, les faltan 10° para llegar a 90°. — A todas las aberturas de 80°, les faltan 100°, para llegar a los 180°, que son los dos rectos.

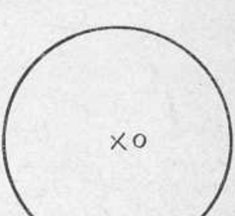
CIRCUNFERENCIA

NOMENCLATURA

1. El monaguillo aventando el fuego de la cazoleta del incensario; la luz de un cohete atado a una rueda giratoria, y un niño haciendo rodar una mecha encendida, trazan una *circunferencia*, que es *una línea curva cerrada y plana que tiene todos sus puntos a igual distancia de uno interior llamado centro.*



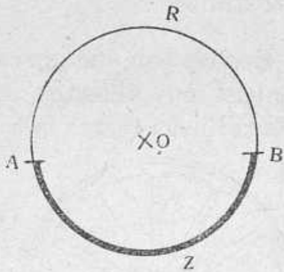
La línea curva que describe, en el aire, la pelota cada vez que da una vuelta completa, es una *circunferencia*, cuyo *centro* es la mano del niño que sostiene el extremo del cordel



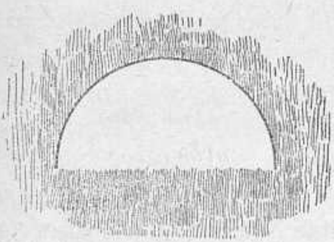
Circunferencia. Su centro es el punto O

2. Un trozo de anilla, un pedazo de salvavidas, una parte del aro de saltar, *cualquiera porción* de la circunferencia, se llama *arco*.

Cada una de las dos porciones de esta arracada es un *arco*

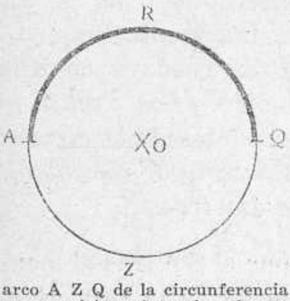


La porción A R B de la circunferencia O, es un arco; la porción A Z B es otro arco

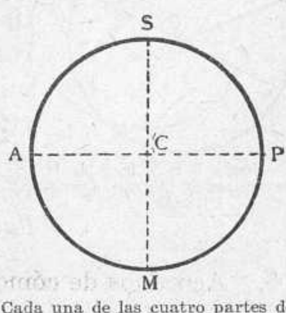


El borde curvo de esta media luna es una *semicircunferencia*

Cuando el arco es:
una media circunferencia, se llama *semicircunferencia*,
una cuarta parte, se llama *cuadrante;*
una sexta parte, se llama *sextante.*



El arco A Z Q de la circunferencia es una *semicircunferencia*: el arco A R Q es otra *semicircunferencia*

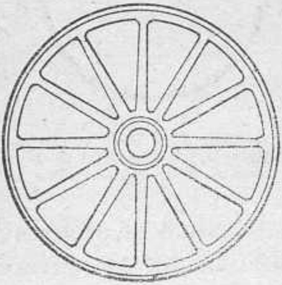


Cada una de las cuatro partes de la circunferencia C, o sean A S, S P, P M, M A, es un *cuadrante*

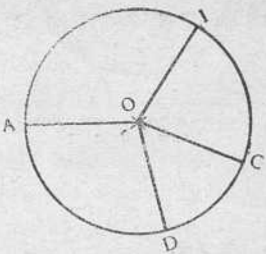
La circunferencia mide 360°.
La semicircunferencia " 180° (la mitad).
El cuadrante " 90° (la cuarta parte).
El sextante " 60° (la sexta parte).

3. Reparad en una gorra de muchas piezas, o en los abanicos muy abiertos, o en las ruedas de los carros:

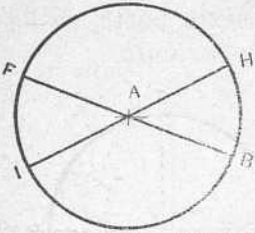
Esas líneas *rectas que van del centro a la circunferencia*, se llaman *radios*.



Cada uno de los barrotes que van del centro de la rueda a la curva de la misma rueda, es un *radio*



Las rectas A O, I O, C O, D O son *radios*

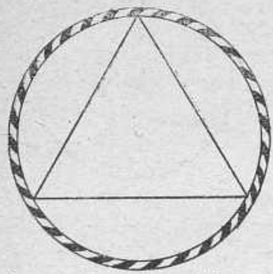


Las líneas I H y F B de la circunferencia A, son *diámetros*

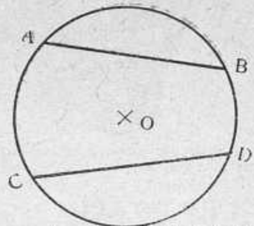
4. Fijaos en esas ventanas redondas que tienen dos hierros en cruz, o en cómo parte la hostia el sacerdote, o en la línea recta de una media luna, o en un radio de rueda a continuación de otro. *Las rectas que unen dos puntos de la circunferencia y pasan por el centro, se llaman diámetros.*

5. Acordaos de cómo se pone el Sol tras el monte; imaginad que metéis una moneda en la raja de una

hucha, o que cortáis la esquina de una tortada. *Las rectas* que se forman entre el Sol y el monte, entre la hucha y la moneda y *que unen dos puntos de la circunferencia sin pasar por el centro, son cuerdas.*

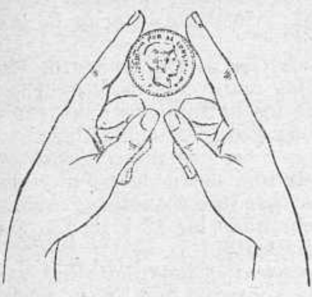


Cada uno de los tres hilos que veis atados en ese aro con que jugáis a velocípedos, es una *cuerda*

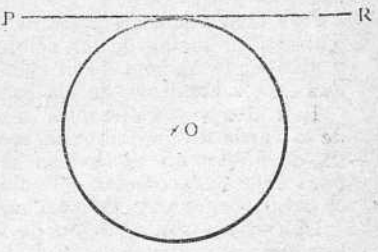


Las rectas A B y C D de la circunferencia O, son *cuerdas* de esta circunferencia

6. Ved rodar vuestro aro por el suelo, o la locomotora por los rieles; el suelo y los rieles, *que tocan a la circunferencia en un punto,* serán rectas *tangentes.*



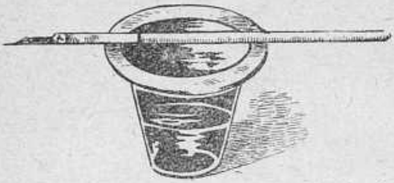
El dedo índice de cada mano viene a representar una *tangente* a la circunferencia que forma la moneda



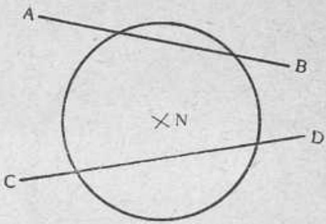
La recta P R exterior a la circunferencia O y que la toca en un soo punto, es una *tangente*

7. Si ponéis el cuchillo encima del platillo del postre, o vuestro portaplumas tendido sobre el borde del

tintero, esas líneas más largas que la cuerda, *que cortan en dos puntos a la circunferencia,* se llaman *secantes.*



El portaplumas es una recta *secante* a la circunferencia que forma la boca del tintero



Las rectas A B y C D son *secantes* a la circunferencia

REPERTORIO:

Circunferencia y sus rectas. — Dan idea y son ejemplos de *circunferencias:* los bordes de los platos; los bordes de las muelas de molino; de las piedras de afilar; de las hostias; de las rodajas de salchichón; de las monedas; de la luna llena; de la boca del pozo; de las poleas; de los botones; de las anillas del gimnasio.

Dan idea y son ejemplos de *arcos:* las cejas; la media luna; la cola abierta del pavo real; la ballesta; el asa de la cesta; la boca del horno; la abertura de los puentes; la de las capillas; la boca de los túneles; la coma, y la parte inferior de las letras J y U.

Dan idea y son ejemplos de *radios:* los de las ruedas de los coches; las saetas de los relojes; las manivelas de los tornos y pianos; la ballena de la rueda de los barquilleros; las varillas de los abanicos, de los paraguas y de las sombrillas.

Dan idea y son ejemplos de *diámetros:* dos radios opuestos de la rueda de un carro; la recta de una media luna; la varilla de hierro que atraviesa la boca de las medidas grandes para áridos; las saetas del reloj marcando las 12 y media, las 6, las 9 y cuarto y las tres menos cuarto.

Dan idea y son ejemplos de *tangentes:* la bola del billar sobre la mesa; un queso de Holanda sobre un plato; un sillar de piedra sobre los cilindros que le hacen de carro; el suelo y las ruedas de los coches; los rieles y la rueda de la locomotora; una moneda puesta de canto sobre un plano.

Dan idea y son ejemplos de *secantes:* la galga en los carros; el tenedor atravesando una naranja entera; una naranja atravesada por un alambre; el cuchillo descansando sobre el plato; el portapluma echado sobre el tintero; un cigarrillo puesto sobre una moneda.

Cuestionario. — Trasladar, mentalmente, al niño ante un piano de manubrio; a una puerta con aldabón giratorio; ante una caballería en la noria o en la trilla; etc., y hacerle distinguir y expresar qué son y dónde están los centros, las circunferencias, los radios, los diámetros y las cuerdas. De qué son ejemplo: una moneda puesta en el mismo borde, justamente, de la mesa; una caña o bastón sobre la boca de un pozo; un plato puesto de canto en el suelo; una rueda hundida en el barro; un trozo de la letra O; el contorno de la media luna o el borde de esfera del reloj comprendido entre las 12 y las 3.

DIÁLOGO

Circunferencia. — Es una curva cerrada y plana que tiene todos sus puntos a igual distancia de otro punto interior llamado *centro*.

Arco. — Es una porción de circunferencia.

Radio. — Es la recta que va del centro a la circunferencia.

Diámetro. — Es la recta que une dos puntos de la circunferencia y *pasa por el centro.*

Cuerda. — Es la recta que une dos puntos de la circunferencia y *no pasa por el centro.*

Tangente. — Es la recta *exterior* que toca sólo en un punto de la circunferencia.

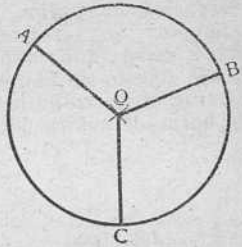
Secante. — Es la línea que *corta* a la circunferencia en dos puntos.

PROPIEDADES DE LA CIRCUNFERENCIA

1.ª *Todos los radios de una misma circunferencia son iguales.*

Comprobaciones. — Todos los radios de una misma rueda de coche, todas las varillas de un mismo paraguas, todas las de un mismo abanico son iguales. — Trazando una circunferencia con un cordel, el cordel, que es siempre el radio, es siempre, también, de igual longitud. Trazándola con un compás, la abertura de éste, que es el radio, permanece siempre igual. Los diámetros de una misma circunferencia, también, son siempre iguales: equivalen a dos radios.

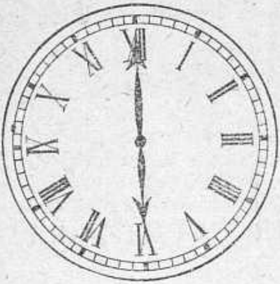
Cada vuelta completa que dé la mano producirá, en el suelo, una circunferencia *igual* a las que anteriormente haya trazado



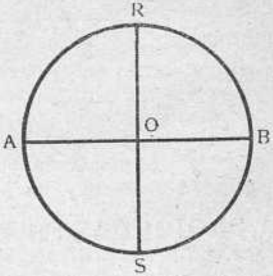
Los radios A O, O B y O C y cuantos se tracen en esta circunferencia, tendrán *igual longitud*

2.ª *El diámetro divide a la circunferencia en dos partes iguales.*

Comprobaciones. — Si dos niños se parten, como buenos hermanos, una torta circular, la partirán por el diámetro. Cuando las saetas del reloj se ponen como diámetro, dejan



De las 12 a las 6, *hay el mismo número de horas* que de las 6 a las 12 por el otro lado o borde

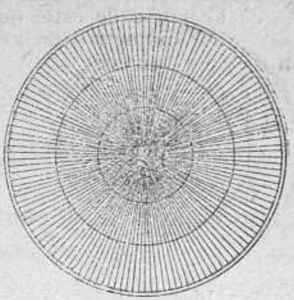


Los diámetros A B y R S y cuantos se tracen en una circunferencia, comprenderán *igual arco* en cada parte

igual numero de horas en cada parte. — Doblando una hostia por un diámetro, los bordes de las dos mitades coinciden.

3.ª *En una circunferencia, se pueden trazar tantos radios como se quieran.*

Comprobaciones. — Cada posición de las saetas de un reloj es un radio. — El trocito de ballena de la rueda de un barquillero, marca radios por donde va pasando. — Un paraguas puede tener muchas varillas que son otros tantos radios.



Cada alambre de esta criba es *un radio;* cuanto más delgados fuesen estos radios, más cabrían

---

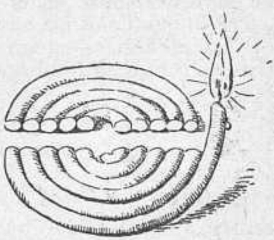
ESPIRAL

NOMENCLATURA

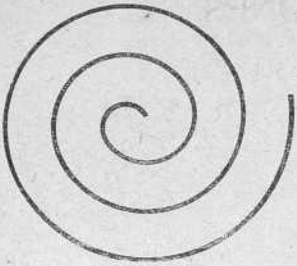
1. Observad las charreteras de un guardia civil, y veréis que forman una línea *curva, abierta, sin fin,* en figura de caracol, *que se aleja del centro a medida que aumentan sus vueltas.* Esta línea curva se llama *espiral.*

La línea que forma el cordel de este trompo, es una *espiral*

2. Si tomáis un *rollo de cerilla* de los que quemáis en las iglesias en la festividad de Todos los Santos y *lo cortáis en dos por un diámetro,* os resultarán *varias semicir-*



El rollo de cerilla queda dividido en *medias circunferencias* desiguales. Los extremos de cada dos que estén contiguas, *no coinciden* *cunferencias todas desiguales*, en las cuales, *el final de cada una acaba donde arranca el principio de la siguiente.*



Línea *espiral*

3. Por eso, cuando arrolláis el cordel al trompo y *formáis un espiral*, vais haciendo *medias circunferencias*, cada vez de mayor radio, y que enlazan por un cabo o extremo con la anterior, y por el otro, con la que sigue.

REPERTORIO:

Espiral. — Dan idea y son ejemplos de *espirales:* las charreteras de los militares; las ruedas de churros; los rollos de cerilla; el cordel arrollado al trompo; la cáscara del caracol; las vendas arrolladas; los muelles de los relojes, etc.

Cuestionario. — Hacer que el niño diga cuál es o dónde está la espiral en los ejemplos siguientes: en los trajes de los guardias civiles; en el caracol; en un reloj; en una carpintería; en las estererías; en el acto de empañar a un niño de teta; entre lo que usan los sastres; entre lo que llevan, en el bolsillo, los albañiles; en un gramófono; en cierta posición de los transparentes, alfombras, mapas y diplomas.

DIÁLOGO

Espiral. — Es una curva abierta, sin fin, que se aleja del centro a medida que aumentan sus vueltas.

De qué se compone. — Se compone de arcos de circunferencia, desiguales, cada vez más grandes.

Unión de las partes de que se compone una espiral. — Cada arco se une por un extremo con el anterior, y por el otro extremo, con el siguiente.

APLICACIONES

PRELIMINARES

Regla. — Cualquier tira de bordes bien rectos, es una regla.

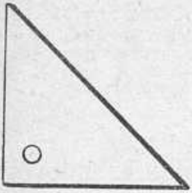
Substitución de la regla.—Cuando no tengáis a mano una regla, servíos de un papel doblado a lo largo.

Comprobación de la regla.—Si ponéis la regla como indican las figuras, resultará como si vieseis el error con cristal de aumento, y sabréis si hay error o no.

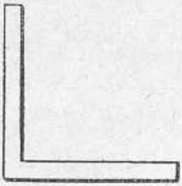
Regla buena

Regla mala

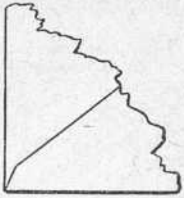
Escuadra.—Cualquier cartón, madera o metal que tenga dos bordes perpendiculares o un ángulo recto, es una escuadra.



Escuadra



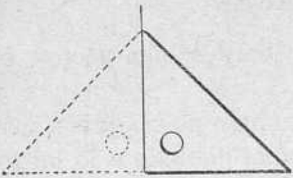
Escuadra



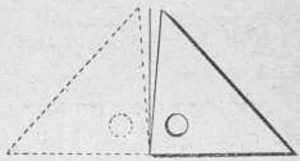
Una esquina de sobre (escuadra)

Substitución de la escuadra.—Cuando no tengáis escuadra, doblad un papel cualquiera a lo largo, y doblad luego el doblez o borde de modo que monte bien una parte sobre otra.

Comprobación de la escuadra. — Poned dos escuadras como veis en las figuras, veréis el error agrandado y notaréis mejor si hay error o no.



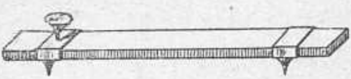
Escuadra buena



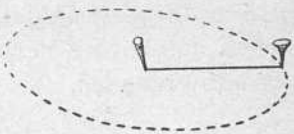
Escuadra mala

Compás.—Dos palillos formando ángulo movible, son un compás.

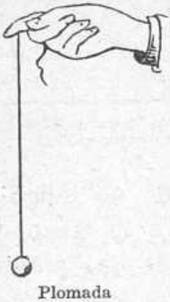
Substitución del compás. — Se substituye por un cordel o por el instrumento que indica la figura.



Instrumento para substituir el compás en el trazado de circunferencias



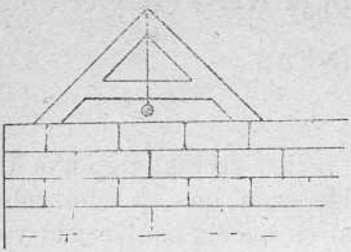
La revolución completa del cordel, hará que el clavo sujeto en el extremo A describa una circunferencia



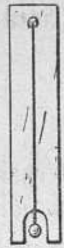
Plomada

Plomada. — Cualquier hilo con un peso colgante, sirve de plomada. Marca la dirección vertical.

Nivel.—Consta de un triángulo y de una plomada, y marca la dirección horizontal cuando el hilo pasa por el centro.

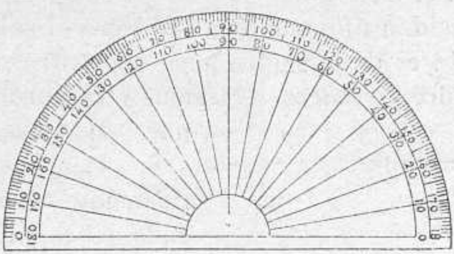


Nivel de albañil

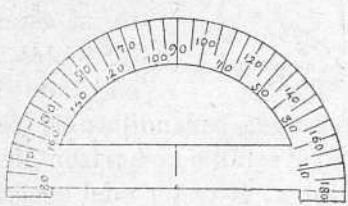


Nivel sencillo

Transportador o semicírculo graduado. — Es como media esfera de reloj; tiene su borde circular dividido en 180°, y sirve, entre otras cosas, para medir los ángulos.



Semicírculo (de celuloide)



Semicírculo (de metal)

EJERCICIOS PRÁCTICOS

LÍNEAS

I

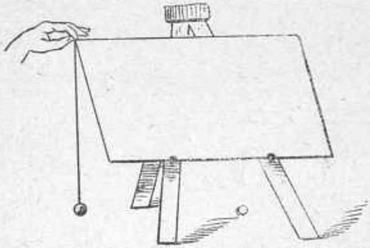
1. Trazad, a pulso, varias rectas; decid, a ojo, cuántos centímetros mide cada una, y comprobad, después, con el metro, si os habéis equivocado y en cuánto.

2. Trazad a pulso, una recta de 12 centímetros y otra de 36, y comprobadlas, después, con el metro.

3. Trazad, con el metro, una recta de 25 centímetros de longitud; otra, doble, y otra, triple.

4. Improvisad una regla y trazad, con ella, varias rectas en el encerado.

5. Decid, a ojo, qué longitud tiene el salón de clase; cuánto es de largo un paso vuestro; con cuántos pasos podréis recorrer el salón, y comprobadlo después, todo, exactamente.



¿Por qué el encerado no está en posición vertical?

6. Demostrad, prácticamente, que el encerado del caballete no está en posición vertical.

7. Ved, prácticamente, si están o no verticales los costados del encerado; los de los mapas; los hierros de la barandilla; etc.; etc.

8. Averiguad si están o no horizontales, el suelo; las mesas de escritura; el testero del encerado; etc., etc.

9. Trazad, a ojo y a pulso, en el encerado, líneas

horizontales y verticales, y comprobad, después, su exactitud, con la plomada y con el nivel.

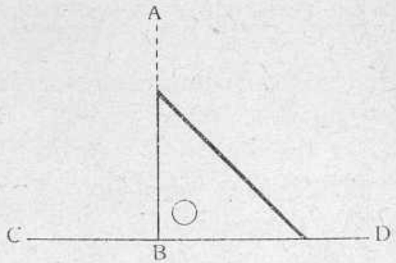
10. No teniendo plomada, ¿podríais trazar una recta vertical? (Con el nivel. La vertical y la horizontal son perpendiculares entre sí).

11. Sin nivel, ¿es posible trazar una recta horizontal? (Con la plomada. Lo contrario del caso anterior).

II

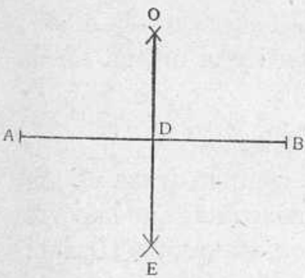
12. *Trazar, con la escuadra, perpendiculares a una recta.*

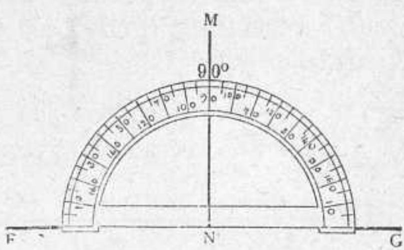
(Poned uno de los dos lados perpendiculares de la escuadra sobre la recta, y trazad una recta que pase por el otro lado: será perpendicular a la recta dada).



La recta A B es perpendicular a la C D

13. *Trazar perpendiculares con el compás.* (Hágase lo que indica la figura).



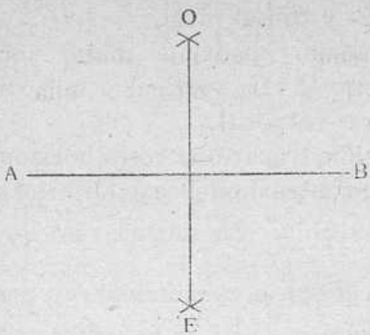


La recta O E es perpendicular a la A B. La recta M N es perpendicular a la F G

14. *Trazar perpendiculares con el transportador.* (Pon su diámetro sobre la recta, y haz pasar otra recta por su centro y por el grado 90).

15. *Dividir una recta en dos partes iguales.*

(Haz lo que indica la figura).



La recta O E divide a la A B en dos partes iguales

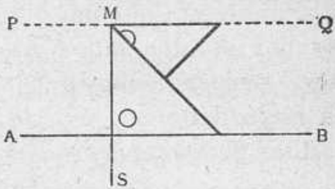
16. *Dividir una recta en cualquier número de partes iguales.*

(Mide la recta con el metro; divide los centímetros que tenga por el número de partes, y traza divisiones de tantos centímetros cada una como correspondan a cada parte).

III

17. *Trazar paralelas con la escuadra.*

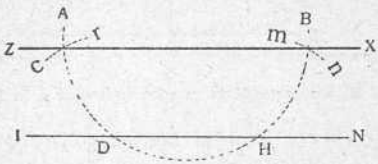
(Traza una recta (A B); después, una perpendicular a ésta (MS), y luego, una perpendicular a la última (PQ). La primera y la última serán paralelas).



Las rectas A B y P Q son *paralelas*

18. *Trazar paralelas con el compás.*

(Traza una recta (I N); con el compás, traza un arco grande que la corte en dos puntos (D, H); desde D, marca, con el compás, un punto en dicho arco por medio del arco pequeño (c r), y desde H, traza otro arquito (m n) con la mis-

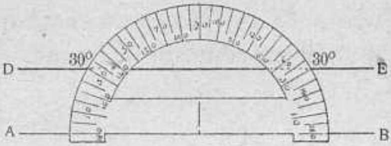


Las rectas I N y Z X son paralelas

ma abertura de compás. La recta Z X, que pasa por la intersección de los arcos, es paralela a la I N).

19. *Trazar paralelas con el transportador.*

(Traza una recta (A B); haz coincidir con ella el diámetro del transportador; cuenta, a cada lado de éste, igual número de grados, 30 por ejemplo. La recta D E, que pasa por dicho número de grados, es paralela a la A B).

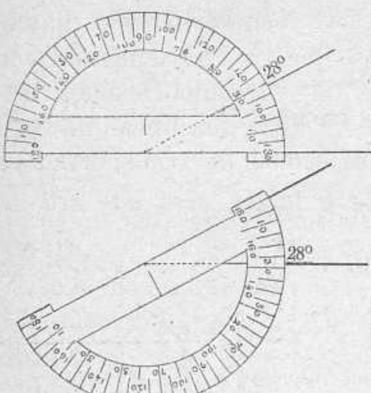


Las rectas A B y D E son paralelas

ÁNGULOS

IV

20. *Trazar, a ojo y a pulso, ángulos con el vértice hacia arriba, hacia abajo, hacia la derecha y hacia la izquierda.*



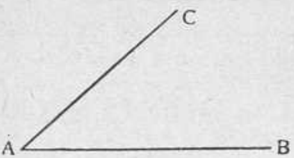
21. *Medir un ángulo.* (Fíjate en las dos maneras como podrás poner el transportador).

22. *Trazar, a pulso, varios ángulos; decir, a ojo, los grados que mide cada uno, y comprobarlo con el transportador.*

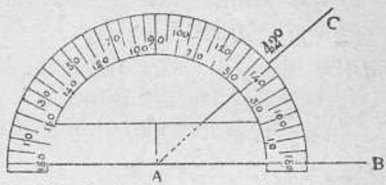
23. *Trazar, a ojo y a pulso, un ángulo de 30° y otro de 45°; y ver, después, el error que se haya cometido.*

24. *Trazar un ángulo igual a otro.*

(Mide, primero, los grados que tiene dicho ángulo, por ejemplo, 42º; traza, luego, una recta. Pon el transportador de modo que su centro coincida con un extremo de la recta y el diámetro de aquél, con ella. Cuenta 42º, y traza una recta que pase por este punto y por el extremo de la otra).



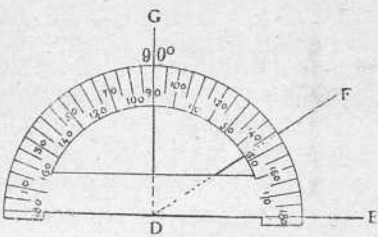
Ángulo de 42 grados



La recta A B y la A C forman un ángulo de 42º

25. *Trazar un ángulo y luego otro, que sea su complemento.*

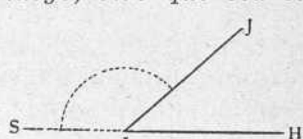
(Trazado ya el ángulo, pon el centro del transportador en su vértice y el diámetro, coincidiendo con un lado. Después, traza una línea que vaya del vértice del ángulo al número 90º del transportador)



El ángulo G D F es complemento del F D E

26. *Trazar un ángulo y luego, otro que sea su suplemento.*

(Trazado ya el ángulo, prolonga, por el vértice, cualquiera de sus dos lados. Dará otro ángulo que será el suplementario).



El ángulo S I J es suplemento del H I J

27. *Trazar un ángulo que valga tanto como otros dos.*

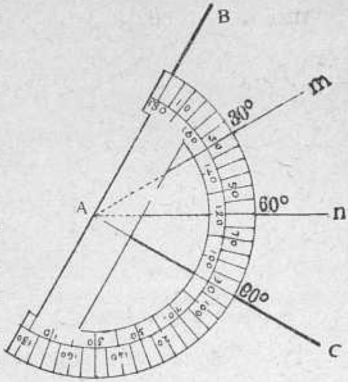
(Mide, antes, dichos ángulos; suma el número de grados de uno y otro, y traza luego un ángulo de tantos grados como tienen entre los dos).

28. *Trazar un ángulo cuya medida sea la diferencia entre* las *medidas de otros dos.*

(Haz lo mismo que antes; pero restando los grados de los dos ángulos, en vez de sumarlos).

29. *Dividir un ángulo en dos o más partes iguales.*

(Averigua, primero, los grados de dicho ángulo; divídelos por 2, por 3, por 4, etcétera; y ve trazando ángulos de los grados que diga el resultado).



Los tres ángulos que ves son terceras partes iguales del ángulo B A C

CIRCUNFERENCIA

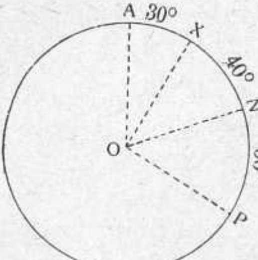
V

30. *Trazar una circunferencia de 25 centímetros de radio.*

(Toma una abertura de compás de dicha medida o un cordel de la mencionada longitud, y traza la circunferencia).

31. *Trazar una circunferencia de 30 centímetros de diámetro.*

(Abre el compás o toma un cordel de la mitad de dicha medida, y traza la circunferencia).



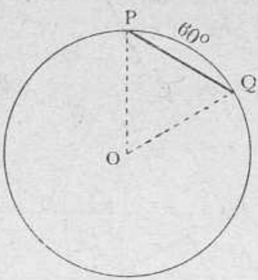
El arco A X mide 30°, el X N mide 40°, y el N P mide 50°

32. *Señalar un arco de circunferencia de 30°, 40°, 50°.*

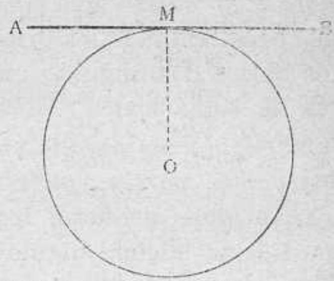
(Traza dos radios que formen ángulo de 30°, 40°, 50°, etc., y el arco que abracen será el arco pedido).

33. *Trazar una cuerda que abrace un arco de 60°.*

(Haz lo del ejemplo anterior y, cuando conozcas el arco, traza la cuerda).



El arco P Q mide 60°, luego la cuerda P Q es la pedida



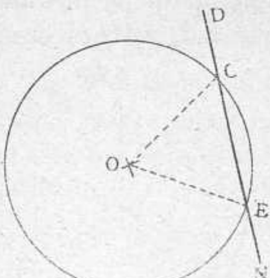
La recta A B, perpendicular al radio, es tangente a la circunferencia

34. *Trazar una tangente a una circunferencia.*

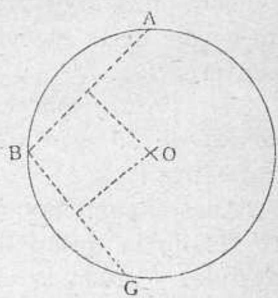
(Traza un radio que vaya a parar al punto donde quieras la tangente, y, en el extremo del radio, trázale una perpendicular).

35. *Trazar una secante que corte un arco de 65°.*

(Traza dos radios que formen dicho ángulo, y haz que por sus extremos pase una recta prolongada).



La recta D N corta un arco de 65°



Esta circunferencia se ha trazado con el radio O B

36. *Hallar el centro de una circunferencia.*

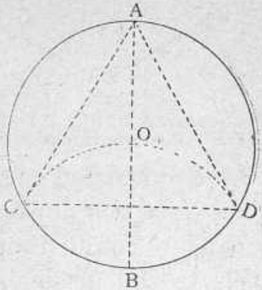
(Traza dos cuerdas que formen un ángulo cualquiera; levanta dos perpendiculares en el punto medio de ellas, y esas perpendiculares se encontrarán en el centro de la circunferencia).

47. *Hallar la longitud de una circunferencia.* (Mide el diámetro y multiplícalo por el número 3'14).

(Para rodear el tronco de un árbol que tenga 1 metro de diámetro, se necesitan 3'14 metros de cordel).

38. *Dividir una circunferencia en tres partes iguales.*

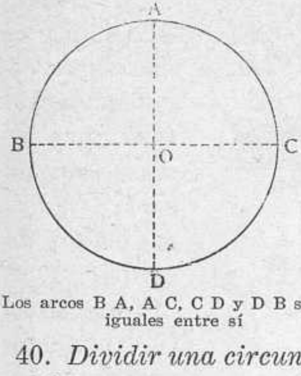
(Traza un diámetro (AB). Desde un extremo del (B) y con una abertura de compás igual al radio, describe un arco que corte a la circunferencia en ambos lados (CD).--Los extremos del arco y el otro extremo del diámetro, marcan tres porciones iguales de la circunferencia).



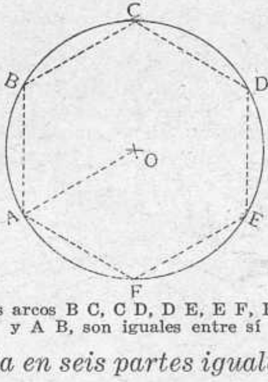
Los arcos C A, A D y D B C son iguales entre sí

39. *Dividir una circunferencia en cuatro partes iguales.*

(Trázale dos diámetros perpendiculares entre sí).



Los arcos B A, A C, C D y D B son iguales entre sí

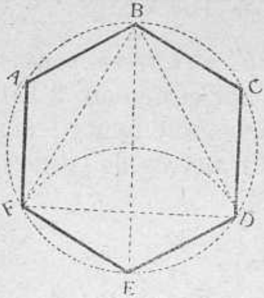


Los arcos B C, C D, D E, E F, F A y A B, son iguales entre sí

40. *Dividir una circunferencia en seis partes iguales.*

(Coge, con el compás, la longitud del radio, y llévala seis veces sobre la circunferencia).

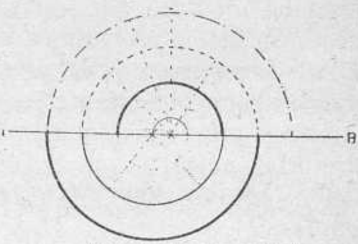
41. *Dividir una circunferencia en un número de partes dobles o triples de 3, 4, 6.* (Cada arco de los que te resulten, divídelo en 2 o en 3 partes, y resultará lo que desees).



Los arcos A B, B C, C D, D E, E F y F A, son iguales entre sí

ESPIRAL, ELIPSE, ÓVALO, OVOIDE
VI

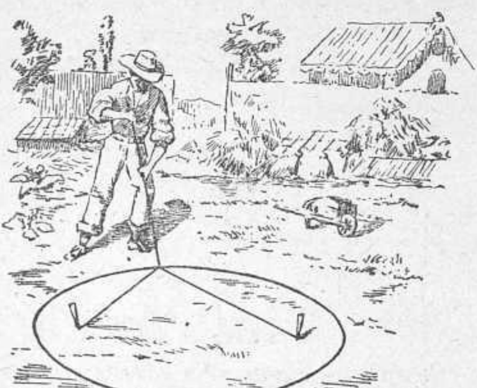
42. *Trazar espirales de dos puntos.* — (Trazad una recta (A B); señalad su punto medio y dos puntos cercanos y equidistantes de él; trazad, después, con el compás, medias circunferencias, cambiando cada vez de centro el compás).



Trazado de una espiral

43. **Elipse.** --La elipse es *una curva cerrada y achatada*, que se traza *con un solo movimiento de cordel.*

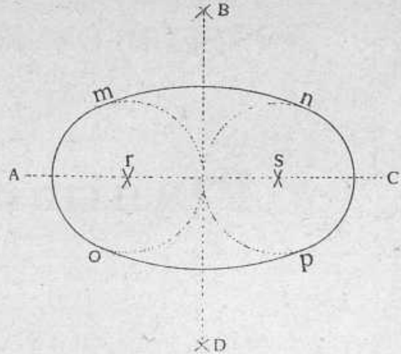
Fíjate en la figura y comprenderás cómo se hace).



Trazado de una elipse

44. **óvalo.**—El óvalo, es, como la elipse, *una curva cerrada y achatada.*

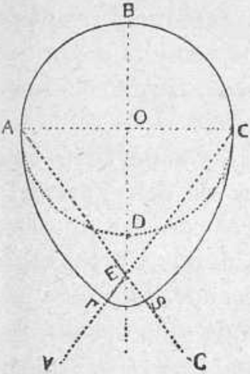
(Lo harás bien y pronto, así: traza una recta A C; sobre ella, sirviendo de doble diámetro, describe las dos circunferencias tangentes *r*, *s*, que ves. Por el punto de tangencia, haz pasar una perpendicular, B D, a la A C. Con una punta del compás en D, traza el arco *m*, *n*, y luego con la punta en B, describe el arco *o p*).



La curva cerrada da A B C es un *óvalo*

45. **Ovoide.** — *El ovoide,* o huevo, es otra *curva cerrada y achatada.*

(Podrás trazarlo así: describe primero la circunferencia O. Traza, después, los dos diámetros perpendiculares A C y B D, prolongando este último un poco, hasta E. — Traza luego las rectas A *s* y C *r*. — Con centro en A, describe el arco C *s*, y con centro en C, el arco A *r*. Por último, con la punta del compás en E, cierra la curva con el arquito *r s*).



La curva cerrada A B C *s r* es un *ovoide*

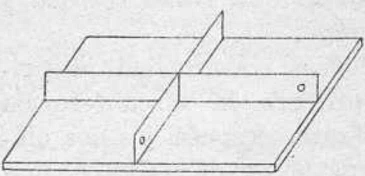
SEGUNDA PARTE

Planimetría

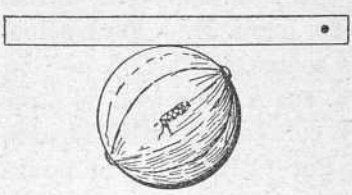
PRELIMINARES

NOMENCLATURA

1. Si corréis una cortina o bajáis una persiana; si desarrolláis una estera o abrís un abanico, resultará que, con la *reunión de líneas*, formaréis *una superficie.*



Superficie *plana*

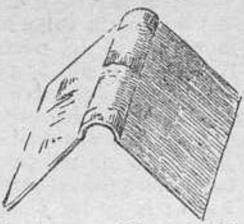


Superficie *curva*

2. Hay superficies como la de las paredes, tableros de las mesas, tapas de los libros, etc., *que se adaptan bien al canto de una regla;* se llaman *superficies planas.*

3. Hay otras, en cambio, como las de las campanas, las de las pelotas, las de las hojas de la rosa, que *no se adaptan bien al borde de una regla;* se las llama *superficies curvas.*

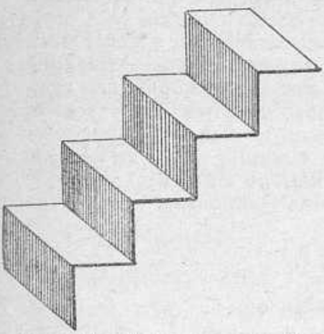
4. Cuando la superficie está formada de parte *plana y* parte *curva*, se llama *mixta;* como sucede con un mapa la mitad arrollado, con las tapas del libro y su lomo, y con el mango y la hoja de la hoz.



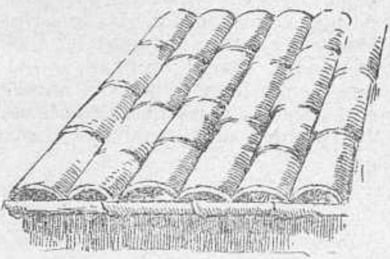
Las tapas y el lomo del libro forman una superficie *mixta*

5. Haced varios pliegues en un papel; abrid un libro o fijaos en una escalera, y tendréis una *superficie* llamada *quebrada*, porque *se compone de varias superficies planas, que se quiebran en distintas direcciones.*

6. Observad, ahora, los tejados; las puertas de hierro, corredizas, que cierran los comercios, y los rizados de un roquete. *Esas superficies, compuestas de varias curvas en distintas direcciones, se llaman sinuosas.*



La escalera forma una superficie *quebrada*



El tejado forma una superficie *sinuosa*

REPERTORIO:

Dan idea y son ejemplos de *superficies planas:* los cepillos de los carpinteros; los espejos; la superficie de las aguas tranquilas; los encerados; las mesas de escritura; los ladrillos; las postales, etc.

Dan idea y son ejemplos de *superficies curvas:* la cáscara de nuez; la piel de la naranja; el forro de la pelota; la cáscara del huevo; la superficie de las botellas; las tejas; los vasos y jarrones; la del portaplumas; etc.

Dan idea y son ejemplos de *superficies mixtas:* la de un cuadrado con su marco convexo; la de una hoz con su mango; la de un mapa de relieve; la de un sombrero de paja; la de una alfombra arrugada; la de una persiana a medio correr; la de un ros de militar; etc.

Dan idea y son ejemplos de *superficies quebradas:* la de una escalera; la de los *paravants;* la del fuelle de los acordeones; la de un papel a pliegues; la de un libro abierto; la de los tornillos; la de una lima de tres caras; etc.

Dan idea y son ejemplos de *superficies sinuosas:* la del mar agitado; la de las arrugas de la ropa; la de las tejas de los tejados; la de una alfombra al sacudirla; la de las telas rizadas; etc.

Cuestionario. — Nombrar cuerpos u objetos que se tengan a la vista, y decir qué clase de superficies forman. — Considerar un ladrillo; un libro grueso, cerrado; una pelota, y un tejado, y decir: 1.º Cuántas caras o superficies tiene cada uno de dichos cuerpos; 2.º De qué clase son dichas superficies consideradas de una en una; 3.º Qué clase de superficie forma la de todo el cuerpo humano. — Al citar la clase de superficies que tienen los cuerpos del anterior ejemplo, que diga el niño (ateniéndose a las definiciones del *diálogo* siguiente), por qué son planas, curvas, mixtas, quebradas o sinuosas.

DIÁLOGO

Superficie. — Es un conjunto de líneas.

Su división. — Las superficies pueden ser:

Planas, si *se adaptan* bien al borde de una regla.

Curvas, las que *no se adaptan* bien a dicho borde.

Mixtas, las que constan de superficie plana y superficie curva.

Quebradas, las que tienen varias superficies planas en distintas direcciones.

Sinuosas, las que se componen de varias superficies curvas en diferentes direcciones.

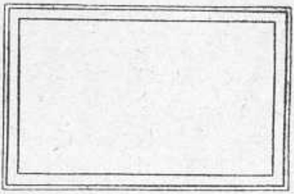
Polígonos en general

NOMENCLATURA

1. El terreno de un huerto cercado de tapias; el suelo de una plaza rodeada de casas; la superficie de un espejo con marco, forman *polígonos*, que son *superficies cerradas por varias rectas.*

Un cuadro al óleo *(polígono)*

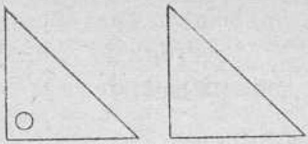
2. Las tapias del huerto, las paredes de las casas y el marco del espejo, que son *las rectas que cierran el polígono, se llaman lados;* y las esquinas o *puntos, donde cada dos lados forman* un *ángulo,* se llaman *vértices.*



El marco del cuadro anterior (lados del *polígono)*

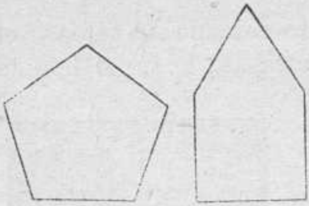
3. El polígono que forma una cuña se llama *triángulo, porque tiene tres lados;* un caramelo forma un *cuadrilátero,* porque tiene *cuatro;* el testero de las estufas de *cinco* caras, un *pentágono;* los birretes de los magistrados, *exágonos,* porque tienen *seis* lados.

Se llaman	*eptágonos*	si tienen	*siete*	lados.	
" "	*octógonos*	" "	*ocho*	"	
" "	*endecágonos*	" "	*nueve*	"	
" "	*decágonos*	" "	*diez*	"	
" "	*eneágonos*	" "	*once*	"	
" "	*dodecágonos*	" "	*doce*	"	

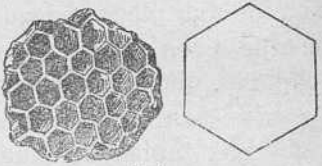


Triángulos

Cuadriláteros



Pentágonos

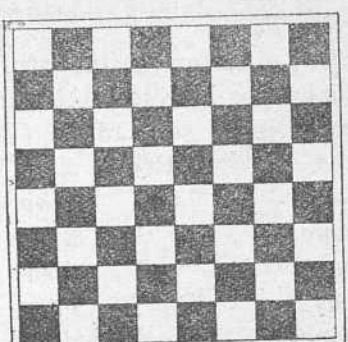


Exágonos

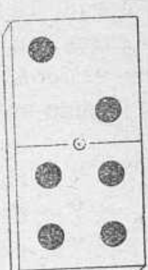
4. Si el polígono es como las monedas o las hostias, *de infinitos lados*, se llama *círculo*, que es la *superficie encerrada dentro de la circunferencia.*

La superficie de la moneda se llama *círculo*

5. Los polígonos que tienen sus lados y ángulos iguales, se llaman *regulares;* los que no los tienen, *irregulares.*

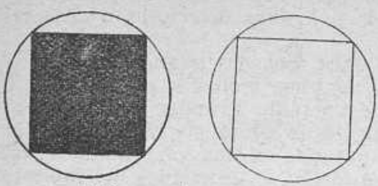


Polígonos *regulares*

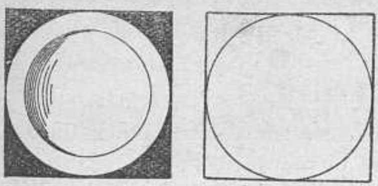


Polígono *irregular*

6. Si un polígono *está dentro de una circunferencia y sus lados son cuerdas de ella*, como un sello de carta encima de una moneda de a dos pesetas, el sello representa un *polígono inscrito.*



Polígonos *circunscriptos*



Polígonos *inscriptos*

7. Pero, al revés, estando el polígono fuera de la circunferencia y *siendo sus lados tangentes* a ella, como un sello de carta debajo de un doble céntimo, el sello es, entonces, un *polígono circunscripto.*

REPERTORIO:

Dan idea y son ejemplos de *triángulos:* las cuñas; la paleta del albañil; la reja del arado; las orejas de las caballerías; las escuadras de dibujo; las gorras de papel; las velas de los faluchos; los puntos de un cuello alto, de camisa; la parte de encima de la letra A.

Dan idea y son ejemplos de *cuadriláteros:* los encerados; las baldosas; las fichas del dominó; las mesas; los cuadros; los cartapacios; las postales; los libros; etc.

Dan idea y son ejemplos de *polígonos de más de cuatro lados:* las sombrillas y paraguas abiertos; los birretes de los jueces; los vasos de varias caras; muchas baldosas de los mosaicos; las bases de algunas columnas y pilares; la base de los campanarios; los rosetones de adorno en los techos de las casas, y las celdillas de las colmenas en que las abejas depositan la miel.

Dan idea y son ejemplos de *círculos* o *polígonos de infinitos lados:* el ruedo de una plaza de toros; las tapaderas de las ollas; los tapes de los tinteros; el fondo de los vasos; los cristales de los relojes; los platos; las monedas; las cajas de betún.

Dan idea y son ejemplos de *polígonos regulares:* los trébedes; las baldosas; el terrón de azúcar; y de *irregulares:* el cartabón; la cuña; el sobre de carta; la ficha de dominó; etc.

Dan idea y son ejemplos de *polígonos inscriptos* o *circunscriptos:*

Un caldero pequeño sobre unos trébedes grandes.
Un caldero grande debajo de unos trébedes pequeños.
Una baldosa pequeña sobre un plato grande.
Una baldosa grande debajo de un plato pequeño.
Las anillas de una cortina pasadas en una varilla cuadrada.
El peón de damas puesto en medio de un cuadro del tablero.

Cuestionario. — Con el metro de bolsillo, hacer que los niños formen todas las clases posibles de polígonos regulares e irregulares.

DIÁLOGO

Polígono. — Es una superficie cerrada por tres o más líneas.

Lados. — Son las líneas que cierran el polígono.

Vértices. — Son los puntos donde se cortan dos lados.

División de los polígonos. — Los polígonos pueden ser:

Triángulos, si tienen tres lados;

Cuadriláteros, si tienen cuatro;

Pentágonos, si tienen cinco;

Exágonos, si tienen seis;

Eptágonos, si tienen siete;

Octógonos, si tienen ocho;

Eneágonos, si tienen nueve;

Decágonos, si tienen diez, etc., etc.

Regulares, si tienen iguales todos sus lados y ángulos;

Irregulares, si no los tienen iguales;

Inscriptos, si sus lados son cuerdas de una circunferencia;

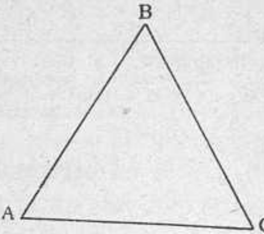
Circunscripto, si sus lados son tangentes a una circunferencia.

TRIÁNGULOS

NOMENCLATURA

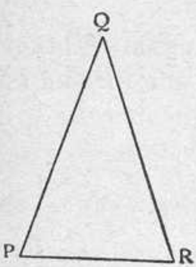
1. Ya se ha dicho que las *superficies limitadas por tres lados*, que forman la cuña y la paleta del albañil, se llaman triángulos.

2. Si con tres portaplumas de igual longitud formáis un triángulo, éste se llamará *equilátero*, porque *tendrá los tres lados iguales*.



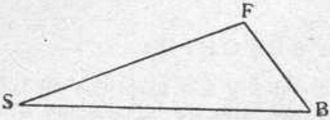
Los lados A B, B C y A C tienen igual longitud; triángulo *equilátero*

3. Si hiciérais lo mismo con dos portaplumas de igual largo y otro más corto, el triángulo sería entonces *isósceles*, porque tendría *dos lados iguales y uno desigual*.



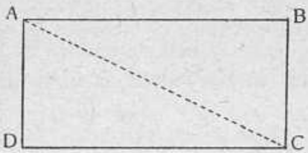
Los lados P Q y Q R tienen igual longitud, y son más largos que el lado P R: triángulo *isósceles*

4. Y si repitierais el ejemplo, pero con tres portaplumas cuyo largo fuera desigual en todos, el triángulo se llamaría *escaleno*, por tener *los tres lados desiguales*.

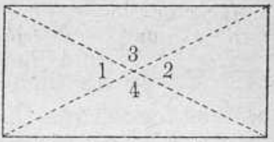


Los tres lados tienen longitudes desiguales: triángulo *escaleno*

5. Tomad, ahora, una postal, y cortándola de punta a punta en dos mitades, los dos triángulos que resultarán se llamarán *rectángulos,* porque *tendrán un ángulo recto.*

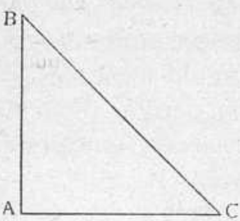


El triángulo A D C tiene recto el ángulo D; triángulo *rectángulo.* El triángulo A B C tiene recio el ángulo B: *rectángulo* también



Los triángulos 1 y 2 tienen sus tres ángulos agudos: triángulos *acutángulos.* Los triángulos 3 y 4 tienen cada uno un ángulo obtuso: triángulos *obtusángulos*

6. Y si en otra postal trazamos las dos líneas de puntos que veis en la figura, resultarán cuatro triángulos. Los de derecha e izquierda son *acutángulos,* por tener *los tres ángulos agudos,* y el de encima y el de abajo, *obtusángulos,* por tener *un ángulo obtuso.*



Triángulo rectángulo
Lado A B y lado A C, *catetos*
Lado B C, *hipotenusa*

7. En el triángulo *rectángulo,* los *dos lados* que forman ángulo *recto* se llaman *catetos,* y el *otro lado, hipotenusa.*

REPERTORIO:

Dan idea y son ejemplos de triángulos, las puntas dobladas del cuello alto de la camisa; la escuadra del dibujo; la tela comprendida entre dos varillas en un paraguas o sombrilla; las cuñas; los trébedes; la paleta del albañil; la reja del arado; las gorras de papel; la cabeza de las pajaritas; las velas de los barquitos de remo; la parte superior de la letra A; etc.

Cuestionario. — Hacer doblar el pañuelo del bolsillo, primero de punta a punta y después, sucesivamente, siempre en triángulos, y hacer que digan los niños qué clase de triángulos van resultando, por los lados y por los ángulos. — Con el metro de bolsillo, hacer que los niños formen todas las clases de triángulos posibles.

Insistir en el triángulo rectángulo, para que distingan bien los catetos y la hipotenusa.

Hacer que los niños dibujen, a ojo y a pulso, en el encerado y en sus cuadernos, triángulos de las diferentes clases, escribiendo el nombre de la clase debajo de cada uno.

DIÁLOGO

Triángulo. — Es el polígono cerrado por tres lados.

División. — Los triángulos pueden ser:

Equiláteros, si tienen los tres lados iguales;

Isósceles, los que tienen dos lados iguales y uno desigual;

Escalenos, cuando tienen los tres lados desiguales;

Rectángulos, si tienen un ángulo recto y dos agudos;

Acutángulos, cuando tienen agudos los tres ángulos;

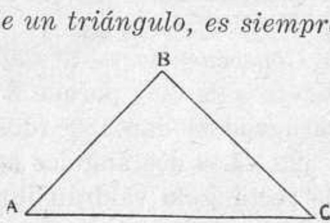
Obtusángulos, los que tienen un ángulo obtuso y dos agudos.

Catetos. — Son los dos lados del triángulo rectángulo que forman el ángulo recto.

Hipotenusa. — Es el lado del triángulo rectángulo opuesto al ángulo recto.

Propiedades de los triángulos

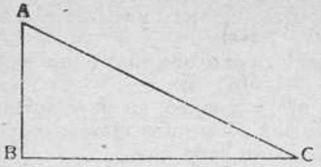
1.ª *Un lado cualquiera de un triángulo, es siempre más corto que la suma de los otros dos.*



Es evidente que el lado A C, por ejemplo, tiene menos longitud que los lados A B y B C juntos

Comprobaciones. — Porque un lado es una línea recta, *que es la distancia más corta entre los dos vértices.* — Porque, para ribetear un pañuelo cuyo borde fuese de puntas, entraría más fleco que si el borde fuera liso. — Porque la línea quebrada de los dientes de una sierra, es más larga que la recta del otro borde. — Porque lo demuestra la figura.

2.ª *El lado mayor de cualquier triángulo, tiene siempre enfrente, u opuesto, el mayor ángulo.*



Triángulo rectángulo
La hipotenusa A C es, a simple vista, mayor que cualquiera de los catetos, y tiene enfrente el ángulo recto B, que es también mayor que cualquiera de los ángulos agudos A o C

Comprobaciones. — Cuanto más se abren las piernas (más ángulo), mayor lado (más suelo), tienen enfrente. — Porque cuanto más se separan las saetas de un reloj, más cuerda de la esfera abarcan; porque en las escuadras de dibujo, el ángulo recto, que es el mayor, tiene enfrente la hipotenusa, que es el lado más largo. — Porque en el dorso de los sobres de cartas, los dos lados mayores están enfrente de los ángulos obtusos.

Consecuencias. — 1.ª Los triángulos equiláteros tienen los tres ángulos también iguales, porque están opuestos a lados iguales.

2.ª Los triángulos isósceles tienen siempre dos ángulos iguales, enfrente de los dos lados también iguales.

3.ª La suma de los tres ángulos de cualquier triángulo vale siempre dos rectos o sea 180°.

Comprobación. — Porque se comprueba midiéndolos con el transportador.

Consecuencias.—1.ª Cada ángulo de triángulo equilátero vale 60°; porque 3 (ángulos) multiplicado por 60 (grados) dan 180° (dos rectos).

2.ª Los dos ángulos agudos de cualquier triángulo rectángulo valdrán juntos 1 recto, porque el otro ángulo ya lo es.

CUADRILATEROS

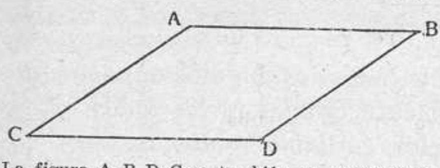
NOMENCLATURA

1. Un ladrillo, un libro, una fototipia, que son polígonos de *cuatro lados*, se llaman *cuadriláteros.*

Este cuadro, tiene la figura de un *cuadrilátero*

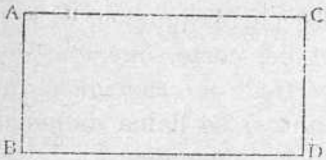
La hoja de esta pala es un cuadrilátero *trapecio*

2. Cuadriláteros son las figuras del margen; cuadrilátero es la hoja de la pala que ves, y cuadrilátero es el terrón de azúcar; pero la figura del margen, que *no tiene ningún lado paralelo,* se llama, además, *trapezoide;* la hoja de la pala, que *tiene dos lados paralelos y otros dos que no lo son,* se llama *trapecio,* y el terrón de azúcar, que tiene *los cuatro lados paralelos dos a dos,* se llama, además *paralelogramo.*

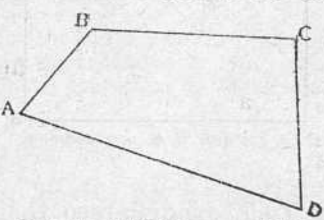


La figura A B D C es también un *cuadrilátero*

3. Paralelogramo es una cara cualquiera de un terrón de azúcar; paralelogramos forman las rayas del papel comercial cua-

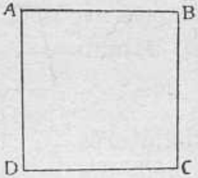


La figura A B C D es un cuadrilátero *paralelogramo*

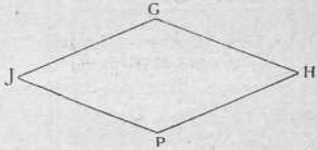


La figura A B C D es un cuadrilátero *trapezoide* driculado, y paralelogramos son las figuras de la cuadrícula en las planas de escritura de letra española.

El cuadrilátero que tiene los lados y los ángulos iguales, se llama cuadrado.



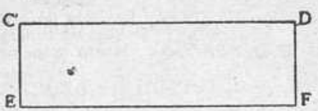
La figura A B C D es un *cuadrado*



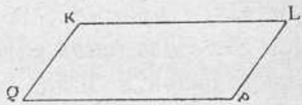
La figura G H P J es un *rombo*

El cuadrilátero que tiene los lados iguales y los ángulos desiguales, se llama rombo.

El cuadrilátero que tiene los lados desiguales y los ángulos rectos, se llama cuadrilongo o rectángulo.

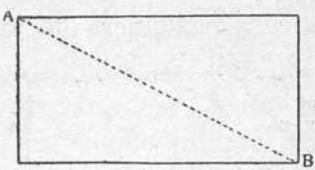


La figura C D F E es un *rectángulo*



La figura K L P Q es un *romboide*

El cuadrilátero que tiene dos ángulos agudos y dos obtusos, respectivamente iguales, y los lados opuestos iguales y paralelos, se llama romboide.



La recta A B es una *diagonal*

4. Cortad un ladrillo, un sello de carta o una postal, de punta a punta, en dos partes iguales: *la recta* del corte, *que une dos vértices no contiguos* (no juntos) se llama *diagonal.*

Todo cuadrilátero tiene dos diagonales:

Las del *cuadrado* son *iguales* y *perpendiculares entre sí.*

Las del *rombo* son *desiguales* y *perpendiculares entre sí.*

Las del *cuadrilongo* o *rectángulo* son *iguales* y *oblicuas.*

REPERTORIO:

Dan la idea y son ejemplos de *cuadrados:* las baldosas; los pañuelos de bolsillo; el terrón de azúcar; las caras de los dados; los cuadros del tablero del juego de damas, y los del tablero del juego de ajedrez.

Dan idea y son ejemplos de *rombos:* dos trébedes unidos por un lado; dos niveles de albañil; dos compases o dos pinzas unidos por sus puntas y abiertos en ángulo agudo.

Dan idea y son ejemplos de *cuadrilongos:* los libros; los sobres; los cuadernos; las postales; los cuadros; las puertas; las ventanas, los tableros de las mesas; etc.

Dan idea y son ejemplos de *romboides:* los palotes con la cuadrícula del papel de escritura; los dados o cuadrados de las telas metálicas cuando son alargados; etc.

Dan idea y son ejemplos de *trapecios:* los testeros de los ataúdes; las caras de tela de las alpargatas, y la sombra que dan en la pared los almireces, los tiestos de flores, los cestos de mimbres, los cálices, etc.

Dan idea y son ejemplos de *trapezoides:* las caras de casi todos los cachos, trozos, recortes o sobrantes de las maderas, telas, papeles, etc., cortados en línea recta.

Cuestionario. — Con el metro de bolsillo, hacer formar a los niños todas las clases de cuadriláteros. — Hacer doblar un papel o el pañuelo del bolsillo, y decir los cuadriláteros que van resultando. — Hacer nombrar cuadriláteros que se tengan a la vista y conducir a los niños de modo que digan, primero, los nombres genéricos y luego los específicos de los cuadriláteros propuestos. Dado un cuadrilátero, decir qué condiciones le faltan o le sobran para convertirse en otro cuadrilátero dado. Hacer que los niños dibujen, en la pizarra o en sus cuadernos, las diferentes clases de cuadriláteros, y que escriban debajo de cada figura el nombre específico de la misma.

DIÁLOGO

Cuadrilátero. — Es un polígono cerrado por cuatro lados.

Su división. — Los cuadriláteros se dividen en *trapezoides, trapecios* y *paralelogramos.*

Trapezoides. — Son los cuadriláteros que no tienen ningún lado paralelo.

Trapecios. — Son los cuadriláteros que tienen dos lados paralelos y otros dos que no lo son.

Paralelogramo. — Son los cuadriláteros que tienen los cuatro lados paralelos, dos a dos.

División de los paralelogramos. — Se divide en:

Cuadrados, los que tienen los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos;

Rombos, los que tienen los cuatro lados iguales y los ángulos desiguales;

Cuadrilongos o *rectángulos*, los que tienen los lados desiguales y los cuatro ángulos rectos.

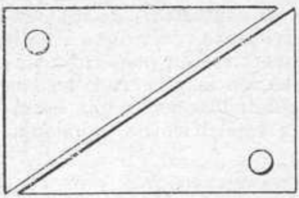
Romboides, los que tienen dos ángulos agudos y dos obtusos, respectivamente, iguales, y los lados opuestos iguales y paralelos.

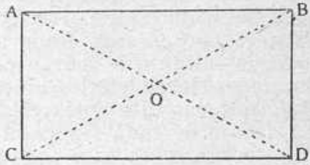
Diagonal de un cuadrilátero. — Es la recta que une dos vértices no contiguos.

Propiedades de los cuadriláteros

1.ª *La diagonal divide a un paralelogramo en dos mitades iguales.*

Comprobaciones. — Toma dos escuadras iguales, únelas por la hipotenusa (que hará de diagonal), y formarás un cua-





Véase, con el compás, A O = O D, y como C O = O B

drilongo. — Corta una postal de punta a punta (esto es, por la diagonal), y tendrás dos mitades que podrán superponerse y que, por lo mismo, son iguales.

2.ª *Las dos diagonales de un paralelogramo se cortan por mitad.*

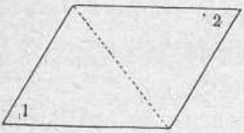
Comprobaciones. — Une las 4 puntas del signo + o de una letra X, y tendrás la prueba. — Observa el dorso de un sobre de carta, y te lo demostrará.

Los lados 1 + 2 igual a los lados 3 + 4. El lado igual al lado 6

3.ª *Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.*

Comprobaciones. — Porque, siendo iguales los lados, los triángulos que resultan trazando las diagonales, están enfrente de ángulos iguales; porque dos tarjetas iguales, puestas juntas, también forman un paralelogramo.

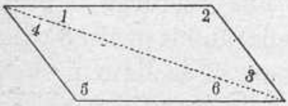
4.ª *Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.*



El ángulo 1 igual al ángulo 2

El ángulo 3 igual al ángulo 4

Comprobaciones. — Porque, en triángulos iguales, están enfrente de un mismo lado, que es la diagonal. — En los cuadrados y cuadrilongos, todos los ángulos son rectos y, por tanto, iguales los opuestos.



Romboide, igual a dos triángulos,
Los ángulos 4 + 5 + 6 igual a 2 rectos;
Los ángulos 1 + 2 + 3 igual a 2 rectos;
Total, 4 rectos

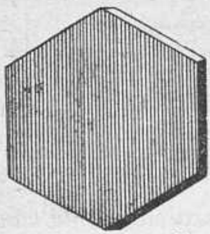
5.ª *Los cuatro ángulos de cualquier paralelogramo valen 4 ángulos rectos.*

Comprobaciones. — Porque todo paralelogramo puede descomponerse en dos triángulos, y los 3 ángulos de un triángulo valen dos rectos. — Porque, midiéndolos con el transportador, se demuestra fácilmente.

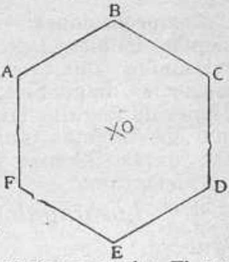
POLÍGONOS REGULARES

NOMENCLATURA

1. Los trébedes, las baldosas, un birrete de magistrado, las bases de muchos pilares y campanarios, *forman polígonos regulares porque tienen todos los lados y ángulos iguales.*

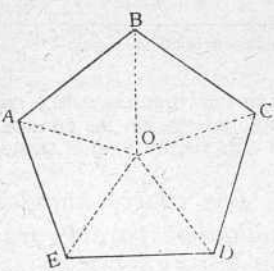


La baldosa es un *polígono regular*



Polígono regular. El punto O es el *centro* del polígono. Los vértices A, B, C, D, etc., de los ángulos que forman los lados, son *vértices del polígono*

2. Observad, por encima, una gorra hecha de piezas iguales, o un globo terrestre mirándolo como si estuviérais colocados encima de él. El botón de la gorra y la anilla del globo, son *el centro del polígono*. Los límites de la vista, en el globo, y los bordes de la gorra son los lados del polígono.

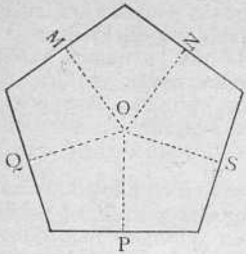


Las líneas A O, B O, C O, D O, E O, son *radios oblicuos* del polígono

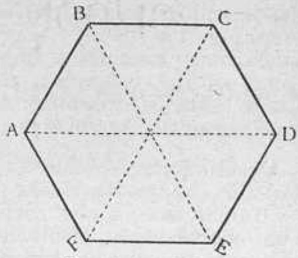
3. Las costuras o rectas que separan los gajos o piezas de la gorra se llaman *radios oblicuos*, porque *van del centro a los vértices del polígono.*

4. Si os imagináis otras costuras o *rectas que vayan, perpendicularmente, del centro del polígono al*

punto medio de los lados de éste, estas rectas son *radios rectos* (o apotemas).



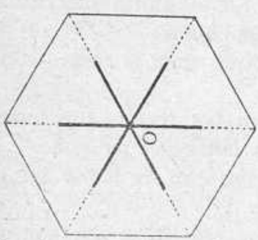
Las rectas O P, O S, O N, O M, O Q, trazadas perpendicularmente desde el centro del polígono al punto medio de cada uno de los lados, son *radios rectos* o *apotemas* del polígono



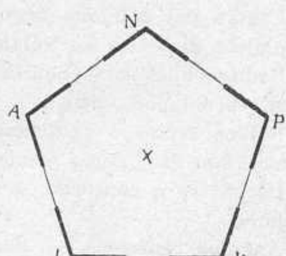
La reunión de los lados, esto es, A B + B C + C D + D E + EF + F A, forma el *contorno* o *perímetro* del polígono

5. *Lo que miden todos los bordes* o *lados* que forman el contorno de la gorra de que ya hemos hablado, se llama *contorno* o *perímetro del polígono.*

7. Los ángulos en el centro del polígono, *formados por cada dos radios oblicuos,* se llaman *ángulos centrales.*



Los ángulos que se forman alrededor del centro O, se llaman *ángulos centrales* del polígono



Los ángulos A, N, P, X, Z, se llaman simplemente, *ángulos del polígono*

7. Los ángulos formados por *cada dos bordes* o *lados,* se llaman, simplemente, *ángulos del polígono.*

REPERTORIO:

Dan idea y son ejemplos de *polígonos regulares:* además del terrón de azúcar, del cuadro del tablero de ajedrez y del birrete de los jueces y magistrados, de que ya hemos hablado, muchísimos muebles y objetos de varias caras iguales, tales como estufas, columnas, pies de mesas, pilares, campanarios, vasos reglados, rosetones de los techos, algunas condecoraciones, paraguas, sombrillas, abanicos, etc.

Cuestionario. — Con el metro de bolsillo, hacer formar a los niños todas las clases de los polígonos regulares posibles. — Tomar dos papeles cortados, uno en triángulo equilátero y otro en cuadrado; doblarles las puntas de modo que uno resulte un exágono y el otro un octógono regulares. — En los dos polígonos del anterior ejemplo, hacer que los niños indiquen, por medio de pliegues, los radios rectos, los oblicuos y las diagonales. — Que los niños dibujen, a ojo y a pulso, en el encerado o en sus cuadernos respectivos, triángulos equiláteros, cuadrados, pentágonos regulares, exágonos regulares, etc., etc.

DIÁLOGO

Polígono regular. — Es el que tiene todos los ángulos y lados iguales.

Polígono irregular. — Es el que no tiene todos los ángulos y lados iguales.

Centro del polígono regular. — Es el punto interior que equidista de todos los vértices del polígono.

Radios oblicuos. — Son las rectas que unen el centro con los vértices del polígono.

Radios rectos o apotemas. — Son las rectas que unen el centro con los puntos medios de los lados del polígono.

Perímetro o contorno. — Es el conjunto de lados del polígono.

Ángulos centrales. — Son los que tienen su vértice en el centro del polígono.

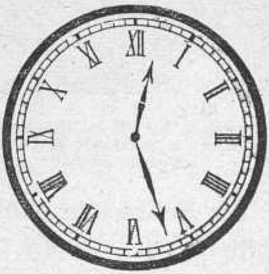
Ángulos del polígono. — Son los formados por cada dos lados del mismo.

CÍRCULO

NOMENCLATURA

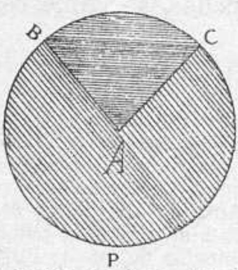
1. Cuando el carpintero quiere hacer una barra cilíndrica o redonda, toma un listón cuadrado; con el cepillo, mata los cuatro vértices, y hace, de cada uno, dos. El polígono, que era antes un cuadrado, pasa a ser octógeno; después, de 16 lados; luego, de 32, y así, sucesivamente. *Cuando los lados son infinitos, el perímetro es una circunferencia, y el polígono que encierra se llama círculo.*

2. No confundáis la circunferencia con el círculo. En una plaza de toros, en una pandereta, en un reloj y en un vaso, son circunferencias la barrera, el aro, el anillo, y el borde, respectivamente; y son círculos, el redondel o arena, la piel de la pandereta, la esfera del reloj y el fondo del vaso.



El anillo de metal, del reloj, es una *circunferencia;* la esfera, es un círculo

El círculo, como la circunferencia, tiene centro, radios, diámetros, cuerdas, arcos, tangentes y secantes. Se divide, también, en partes y grados como la circunferencia.

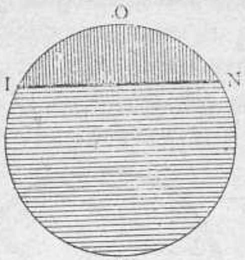


La porción del círculo B A C, es un *sector circular;* la porción B P C, otro *sector circular*

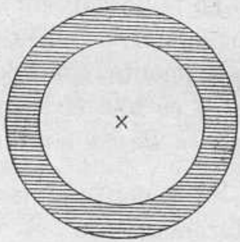
3. Observad un reloj. *La porción de esfera comprendida entre los dos radios*

(saetas) *y el arco* (bordillo de la esfera) se llama *sector circular.*

4. Suponed, ahora, que a una torta circular se le corta una esquina. *Esa porción de círculo comprendida entre un arco y su cuerda es un segmento circular.*



La porción I O N es un *segmento circular;* la porción I M N, otro *segmento circular*



La porción de círculo comprendida entre la circunferencia mayor y la menor, es una *corona circular*

5. Sobre una moneda de plata de a cinco pesetas, suponed que ponéis una peseta. *La porción de duro visible no comprendida entre las dos circunferencias concéntricas* (de igual centro), que limitan las dos monedas, se llama *corona circular.*

REPERTORIO:

Dan idea y son ejemplos de *círculos:* las esferas de los relojes; los tapes de las ollas; las hostias; los tambores; las cribas y tamices; las monedas.

Son ejemplos de *sectores circulares:* los gajos de la naranja mirada por uno de los pezones; las partes de rueda de los molinos de viento; las paletas de los ventiladores; los colores de las ruedas de los barquilleros; los de la gorra del jockey.

Son ejemplo de *segmentos circulares:* el corte dado a una hostia, a una galleta circular, a una rodaja de patata o de salchichón; el sol o la luna saliendo o poniéndose.

Dan idea de *coronas circulares:* un vaso dentro de otro; varios tapes de ollas de diferentes diámetros, puestos en columna; la colección de pesas métricas apiladas; varias monedas diversas puestas unas encima de otras.

Cuestionario. — Distinguir la circunferencia y el círculo en los siguientes objetos: un tambor; una caja de betún; el aro de saltar, forrado de papel; la contera de un bastón; un tintero con tapadera.

Distinguir y señalar el sector, el segmento y la corona circulares en estos ejemplos: dos cuchillos cruzados en el centro de un plato; un cuchillo tendido sobre un plato, y dos platos diferentes puestos uno dentro de otro.

DIÁLOGO

Círculo. — Es un polígono de infinito número de lados.

Sector circular. — Es la porción de círculo comprendida entre dos radios y su arco.

Segmento circular. — Es la porción de círculo comprendida entre una cuerda y su arco.

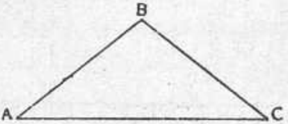
Corona circular. — Es la parte comprendida entre dos circunferencias concéntricas.

ÁREAS DE LOS POLÍGONOS

NOMENCLATURA

1. Base de una figura es el lado sobre el cual se supone que la figura descansa.

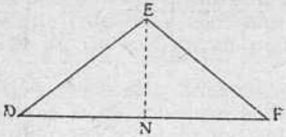
En el triángulo isósceles, se toma por base el lado que no es igual. En los trapecios, se llaman bases (mayor y menor) los dos lados paralelos.



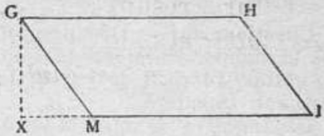
En el triángulo A B C, el lado A C es la base

2. La distancia de pies a cabeza, en un niño, se llama altura. En los polígonos, *es altura, la perpen-*

dicular trazada desde el vértice más distante a la base o a su prolongación.



En el triángulo D E F, la altura es E N



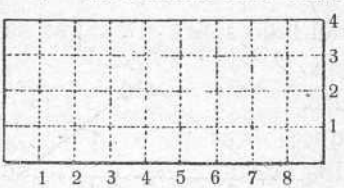
En el paralelogramo G H I M, la altura es G X. Para trazarla con mayor comodidad hemos prolongado hacia la izquierda la base M I

3. La medida del puesto, sitio o lugar que abarcan los lados de un ladrillo, de una pared o de un huerto se llama *área*, que *es la medida de la superficie que encierra un polígono.*

No son necesarias medidas de forma cuadrada para medir las superficies de los polígonos. Es más cómodo medir sus líneas y multiplicarlas o dividirlas, como vamos a ver.

PROPIEDADES

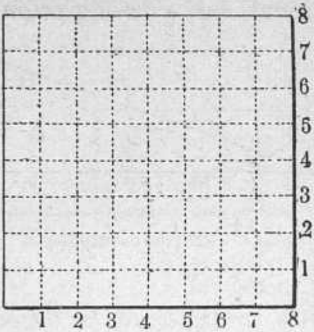
1.ª Si tomáis una tarjeta de visita que tenga, supongamos, 9 centímetros de base y 4 de altura, y trazáis, en ella, las rectas que indica el dibujo, os saldrán 9 veces 4, o sean 36 centímetros cuadrados.



El área de esta tarjeta es $9 \times 4 = 36$ *centímetros cuadrados*

Luego: *Cuando queráis hallar el área de cualquier cuadrilongo o rectángulo, multiplicad la longitud de su base por la de su altura.*

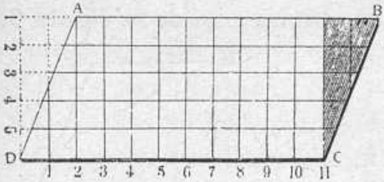
2.ª Si la tarjeta es cuadrada, como la base es igual a la altura, resultará: *que, para hallar el área de cualquier cuadrado, se multiplica la base por sí misma, o el lado por sí mismo.*



El área de este cuadrado es
8 × 8 = 64 *centímetros cuadrados*

3.ª Supongamos, ahora, que la tarjeta cuya área queremos calcular, tiene forma rombal o romboidal. Sea la tarjeta romboidal A B C D.

Cortándole el triángulo rectángulo obscuro de la derecha y poniéndolo a la izquierda, la tarjeta se convertirá en un cuadrilongo de la misma base e igual altura que antes.



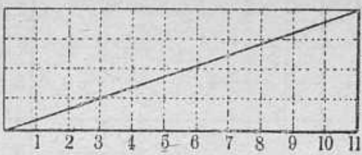
El área del romboide es, como la del rectángulo, 11 × 5 = 55 centímetros cuadrados

Resulta, pues, que el romboide y el cuadrilongo tienen igual área, porque la parte que hemos quitado de la derecha la hemos añadido a la izquierda.

Luego: *si queréis hallar el área de cualquier rombo o romboide, multiplicad la longitud de su base por la de su altura.*

4.ª Y como el *cuadrilongo*, el *cuadrado*, el *rombo* y el *romboide* son *paralelogramos*, digamos, de una vez, todo lo explicado, así: *para calcular el área de cualquier paralelogramo, multipliquemos lo largo de la base por lo largo de su altura.*

5.ª Si una tarjeta de visita la cortamos por la diagonal, salen de ella dos triángulos iguales con la misma base y altura que el cuadrilongo.



El área del triángulo es:

$\frac{11 \times 4}{2} = 22$ cm. cuadrados; o

$11 \times 2 = 22$ » » o

$4 \times 5'50 = 22$ » »

Luego, si un triángulo es la mitad de un cuadrilongo, *para hallar el área de un triángulo, multiplicad la base por la altura y dividid por 2: o multiplicad la base por la mitad de la altura, o multiplicad la altura por la mitad de la base.*

6.ª Observad el trapecio de la figura 1.ª; dadle el corte que indica en la figura 2.ª; haced girar el pedazo de arriba como veis en las figuras 3.ª, 4.ª y 5.ª, y se habrá *convertido* todo en el triángulo de la figura 6.ª,

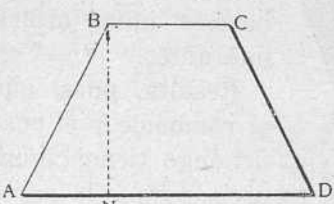


Fig. 1

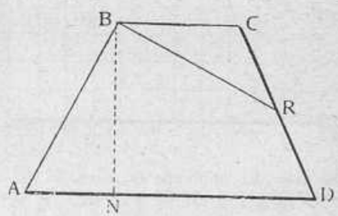


Fig. 2

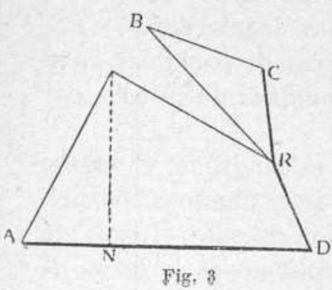


Fig. 3

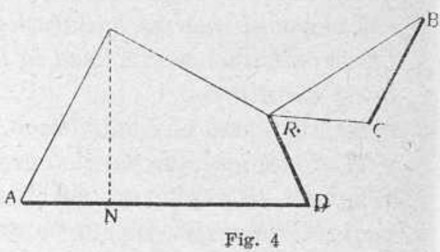


Fig. 4

que tiene por base las dos bases juntas del trapecio y, por altura, la que tenía el trapecio mismo. Por lo tanto, cuando queráis hallar el área de un trapecio:

multiplicad la suma de sus dos bases por la altura y dividid por 2;

o multiplicad sus dos bases por la mitad de su altura;

o multiplicad la mitad de sus dos bases por la altura.

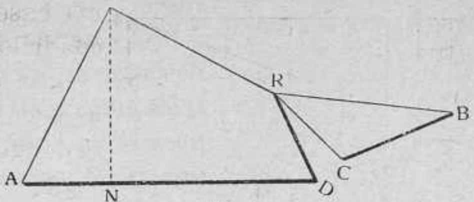


Fig. 5

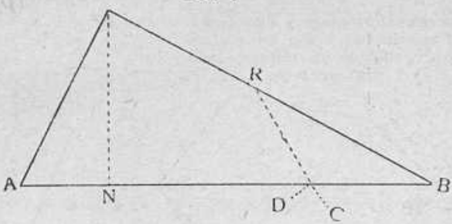
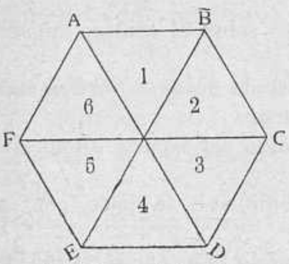


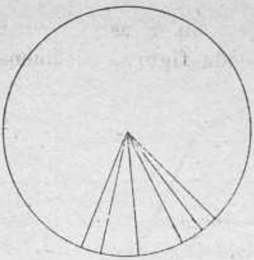
Fig. 6

7.ª Fijaos en las seis baldosas de esta figura, que forman un *polígono regular*. Y en vez de hallar, uno a uno, el área de cada triángulo, *multiplicad el perímetro* (que son todas las bases juntas), *por la mitad de la apotema* (que es la altura de cada uno de los triángulos).



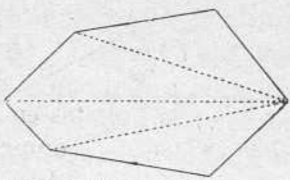
Las 6 baldosas triangulares e iguales, juntas, forman el exágono regular A B C D E F. La altura de uno de estos triángulos es, naturalmente, la apotema del polígono

8.ª Si en vez de seis azulejos, como antes, hubiera un número *infinito*, el *perímetro* sería una *circunferencia*, y la *apotema* se llamaría *radio*. Cambiad, pues las palabras, y sabed que: *para hallar* *el área de un círculo, se multiplica la longitud de la circunferencia por la mitad del radio.*

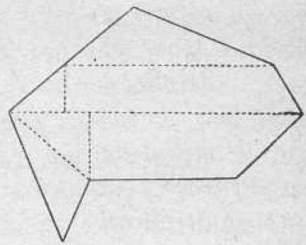


La circunferencia y su círculo se consideran como un polígono regular de un número infinito de lados

9.ª Cuando los *polígonos* son *irregulares, se descomponen en triángulos o en triángulos y trapecios; se halla el área de cada uno, y la suma de todos es la del polígono.*



Polígono irregular descompuesto en triángulos



Polígono irregular descompuesto en triángulos y trapecios

DIÁLOGO

Base de un polígono. — Es el lado sobre el cual se supone que descansa la figura.

Altura. — Es la perpendicular trazada desde el vértice más distante, a la base o a su prolongación.

Área de un polígono. — Es la medida del espacio o superficie que encierra su perímetro.

Área del paralelogramo. — Multiplíquese la base por la altura.

Área del triángulo. — Multiplíquese la base por la mitad de la altura.

Área del trapecio. — Multiplíquese la mitad de la suma de las dos bases por la altura.

Área del polígono regular. — Multiplíquese el perímetro por la mitad de la apotema.

Área del círculo. — Multiplíquese la longitud de la circunferencia por la mitad del radio.

Área de un polígono irregular. — Descompóngase en triángulos y trapecios; hállese el área de cada figura, y súmense estas áreas.

APLICACIONES

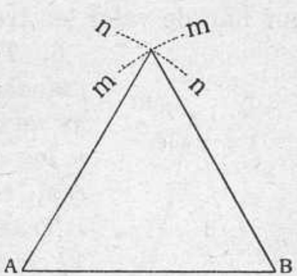
TRIANGULOS

I

1. Trazar, a ojo y a pulso, varios triángulos equiláteros, varios isósceles y varios escalenos y comprobar, después, los errores que se hayan cometido.

2. Trazar, a ojo y a pulso, varios triángulos rectángulos, varios acutángulos y varios obtusángulos, y comprobar, después, los errores que se hayan cometido en los rectángulos.

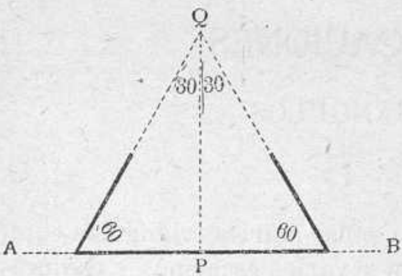
3. *Trazar un triángulo equilátero, cuyo lado mida 20 centímetros.*



(Traza una recta de 20 centímetros (A B) ; abre el compás con dicha medida, y haciendo centro en cada extremo de la recta (en A y en B), traza encima dos arcos que se corten *(n n* y *m)*. Une, después, el punto de intersección de los arcos con los extremos de la recta).

4. *Trazar un triángulo equilátero que tenga 45 centímetros de perímetro.*

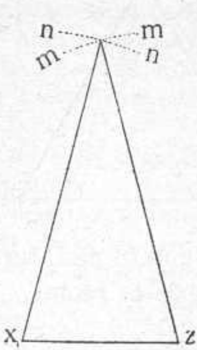
(Como el perímetro (que es la suma de los tres lados) mide 45 centímetros, un lado medirá la tercera parte, o sean 15 centímetros. Haz, pues, lo que en el problema anterior; pero tomando una recta de 15 centímetros de longitud.



5. *Trazar un triángulo equilátero que tenga 25 centímetros de altura.*

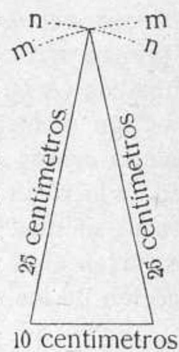
(Traza una recta cualquiera (A B); levántale, en un punto cualquiera, una perpendicular de 25 centímetros (P Q); trázale a ella, arriba, un ángulo de 30º a cada parte, y prolonga los lados de esos ángulos hasta que corten a la primera recta).

(Si el ángulo de arriba vale 30 + 30 = 60º, los de abajo valdrán lo mismo; porque 60+60+60=180º, que han de valer los tres ángulos del triángulo).



6. *Trazar un triángulo isósceles que tenga un lado de 12 cm., y los otros lados, 24 cem. cada uno.*

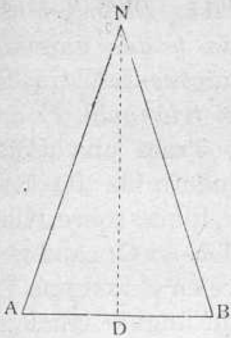
Traza una recta de 12 centímetros (X Z); abre el compás 24 centímetros, y haz lo mismo que en el problema número 3).



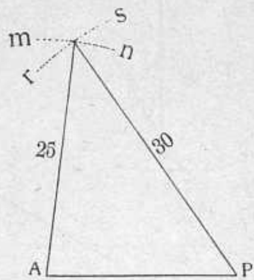
7. *Trazar un triángulo isósceles que tenga 60 centímetros de perímetro.*

(Si dejas, por ejemplo, 10 centímetros para el lado desigual, te quedarán 50 para los otros dos, o sea 25 para cada uno. Haz con estas medidas lo mismo que en el problema anterior).

8. *Trazar un triángulo isósceles que tenga 20 centímetros de base y 30 centímetros de altura.*

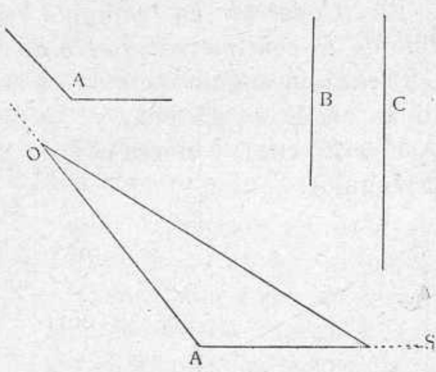


(Traza una recta de 20 cm. (A B); levanta, en su mitad, una perpendicular de 30 centímetros (D N); y une, con sus dos rectas, tres extremos (A N y N B).



9. *Trazar un triángulo escaleno cuyos lados tengan 20, 25 ó 30 cm., respectivamente.*

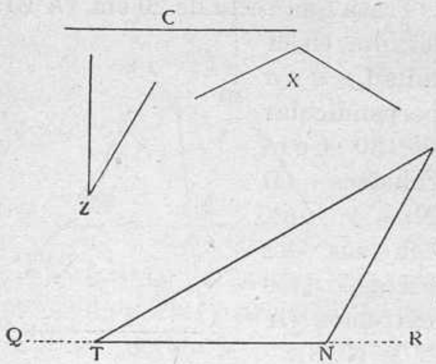
Traza una recta de 20 centímetros (AP); abre el compás 25 centímetros, y, haciendo centro en A o en P, en A, por ejemplo, traza un arco *(m n)*; ábrelo, después, 30 centímetros, y, haciendo centro en P, trazar el arco



r s. Une, después, el punto en que se corten los dos arcos con los extremos de la recta).

10. *Dados dos lados y el ángulo comprendido, trazar el triángulo.*

(Traza un ángulo igual al que te den (A); toma, sobre sus lados, respectivamente, las longitudes de los lados dados (A S = B y A O = C), y une, con un tercer lado, los extremos de los dos lados primeros).

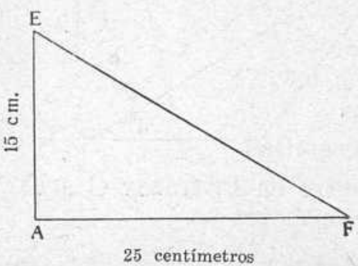


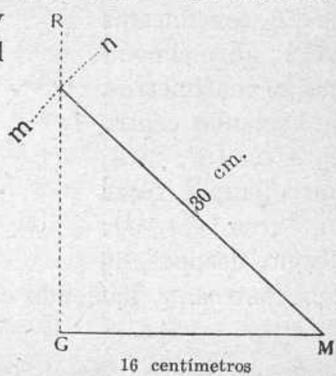
11. *Dados un lado y dos ángulos adyacentes, trazar el triángulo.*

Traza una recta indefinida (Q R), y toma, sobre ella, T N = C; construye en el extremo T, un ángulo igual al dado Z, y en el extremo N, un ángulo igual al dado X).

12. *Construír un triángulo rectángulo con un cateto de 15 centímetros y otro de 25.*

(Traza un ángulo recto cuyos lados tengan esas medidas (A E = 15 cm., y A F = 25 cm.), y cierra el triángulo).



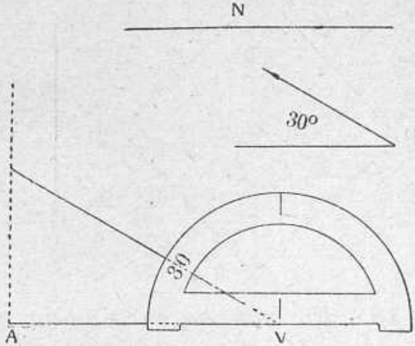


13. *Construír un triángulo rectángulo, con un cateto de 16 centímetros y una hipotenusa de 30.*

(Traza un ángulo recto (G), que tenga un lado de 16 centímetros (G M), y el otro (G R), de longitud indefinida. Abre el compás 30 centímetros, y haciendo centro en M, traza el arco *m n*. El punto de intersección te dirá dónde acaba el otro cateto.

14. *Dados un cateto y uno de los dos ángulos agudos, contiguos, construír el triángulo rectángulo.*

(Haz lo que en el caso anterior; pero, en vez del compás, toma el transportador (A V = N).



CUADRILÁTEROS

II

15. Traza, a ojo y a pulso, varios cuadrados; varios cuadrilongos, rombos y romboides, y comprueba, después, los errores que hayas cometido.

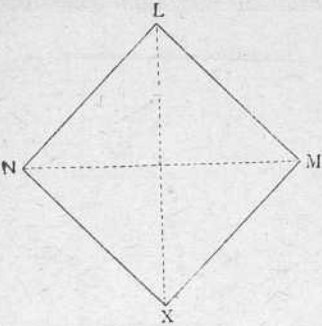
16. *Construír un cuadrado que tenga 18 cm. de lado.*

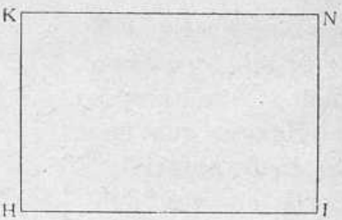
(Traza una recta de dicha medida (A B); levanta, en sus extremos dos perpendiculares de igual longitud (A P y B R), y únelas por medio de otra recta (P R).

17. *Construír un cuadrado que tenga 16 centímetros de diagonal.*

(Traza dos rectas de 16 centímetros, perpendiculares entre sí y que se corten por mitad (N M y L X), y une los cuatro extremos de las mismas).

Las diagonales del cuadrado son perpendiculares e iguales.

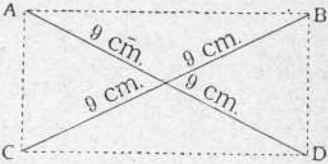




18. *Formar un rectángulo que tenga dos lados de 12 centímetros y los otros de 8 cm.*

(Traza una recta de 12 centímetros (H I); levanta, en cada uno de sus extremos, una perpendicular de 8 cm. (H K e I N), y une estas perpendiculares con otra recta (K N).

19. *Construír un cuadrilongo o rectángulo que tenga 18 cm. de diagonal.*

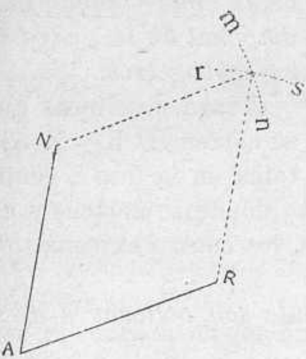


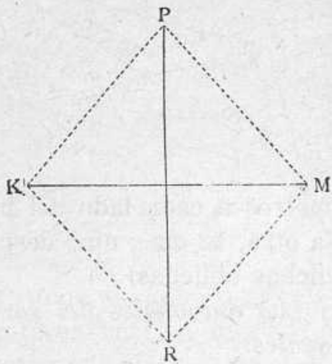
(Traza dos líneas oblicuas, y toma, en cada una, 9 cm. a derecha e izquierda del punto donde se crucen.—Traza, luego, cuatro rectas que unan los extremos de dichas oblicuas.

Las diagonales del cuadrilongo son oblicuas e iguales.

20. *Construír un rombo que tenga 15 cm. de lado.*

(Traza un ángulo agudo u obtuso que tenga sus lados (A N y A R) de dicha medida, por ejemplo, el ángulo agudo N A R; con la misma medida en el compás y haciendo centro en los extremos de los lados del ángulo (N R), traza dos arcos *(m n y r s)*, y une, después el punto en que se cortan los arcos con los lados extremos de los lados del ángulo.





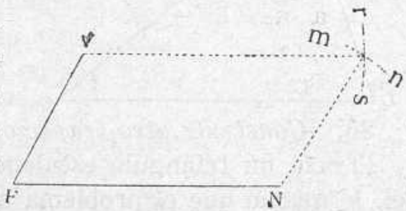
21. *Construír un rombo que tenga una diagonal de 20 centímetros y otra de 26 cm.*

(Traza una recta de 20 centímetros (K M), y haz que la corte por el medio una perpendicular de 13 centímetros a un lado y 13 a otro (P R). Une, después, los cuatro extremos de dichas perpendiculares).

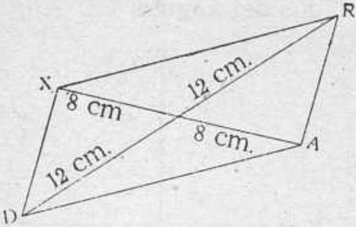
Las diagonales del rombo son perpendiculares y desiguales.

22. *Trazar un romboide que tenga dos lados de 12 centímetros y dos de 20 cm.*

(Traza un ángulo agudo u obtuso, el



agudo VFN, por ejemplo, que tenga un lado de 12 centímetros (V F) y otro de 20 centímetros (F N); desde el extremo V, con una abertura de compás de 20 centímetros, traza un arco *(r s)*, y desde el extremo N, con una abertura de 12 cm., traza el arco *m n*. Une, después, el punto en que se corten los arcos con los lados del ángulo formado).



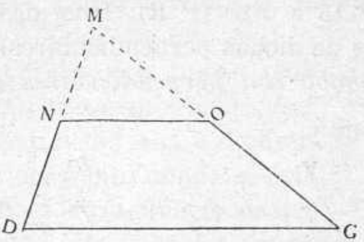
23. *Construír un romboide que tenga una diagonal de 16 y otra de 24 centímetros.*

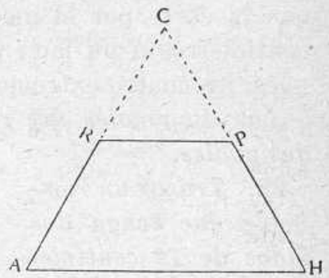
(Traza dos líneas que se corten (D R y X A); toma en la una 8 centímetros a cada lado del punto donde se corten, y en la otra, 12 cm.; une, después, los cuatro extremos de dichas oblicuas).

Las diagonales del romboide son oblicuas y desiguales.

24. *Construír un trapecio.*

(Construye un triángulo equilátero o isósceles, (A H C); trázale una paralela (R P) a la base, y borra lo que te quede encima).





25. *Construír otro trapecio.*

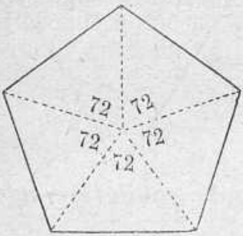
(Traza un triángulo escaleno (D G M), y haz, en él, lo mismo que el problema anterior).

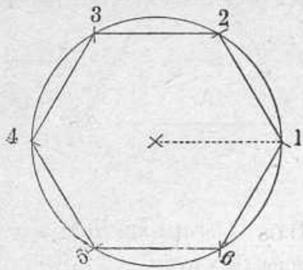
POLÍGONOS REGULARES

III

26. *Construír un pentágono regular.*

(Traza un ángulo de 72°; junto al vértice, otro; después, otro, hasta cinco ángulos. Toma partes iguales en los lados que formes, y únelos por medio de rectas).



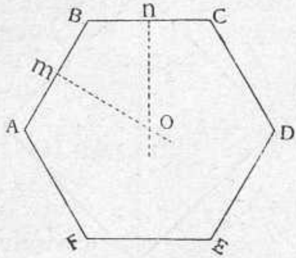


27. *Construír un exágono regular.*

(Traza una circunferencia; toma el radio, y llévalo 6 veces sobre la misma circunferencia. Une, luego, los puntos en que los arquitos corten a la circunferencia).

28. *Trazar un pentágono regular igual a otro.*

(Procede como se explica en el problema 26 anterior; pero da a los radios o a los lados, la longitud que te den).

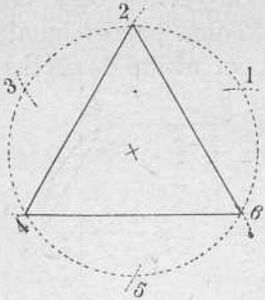


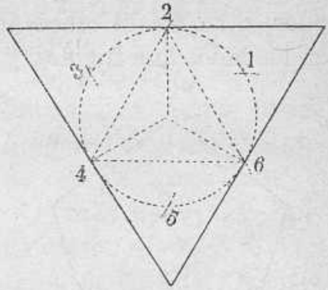
29. *Hallar el centro de un polígono regular.*

(Escoge dos lados contiguos cualesquiera, por ejemplo, AB y BC; levanta una perpendicular a cada lado en su punto medio (O *m* y O *n*), y ambas perpendiculares se encontrarán en el centro del polígono).

30. *Inscribir un triángulo equilátero en una circunferencia.*

(Toma, con el compás, la longitud del radio; llévalo seis veces sobre la circunferencia marcando seis puntos, y une estos puntos con cuerdas, de dos en dos).

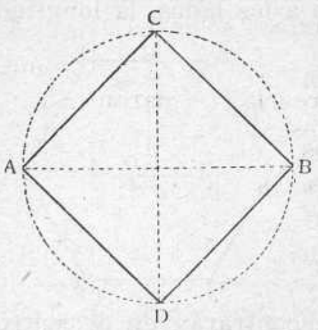


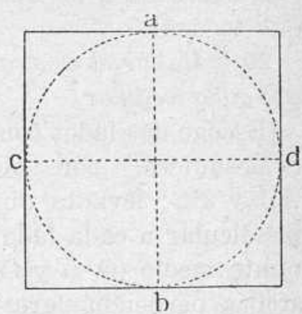


31. *Circunscribir un triángulo equilátero a una circunferencia.*

(Procediendo como en el problema anterior, inscribe, primero, un triángulo equilátero; traza sus radios oblicuos, y las tangentes a la circunferencia en los puntos que la toquen estos radios, formarán el triángulo circunscripto).

32. *Inscribir un cuadrado en un círculo.*





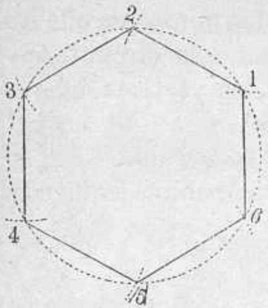
(Traza en la circunferencia dos diámetros perpendiculares entre sí (A B y C D), y une sus extremos por medio de cuerdas).

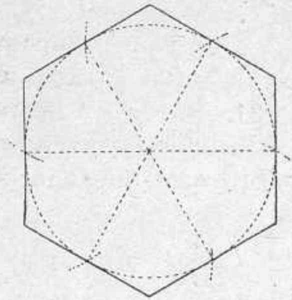
33. *Circunscribir un cuadrado en una circunferencia.*

(Traza, ante todo, en la circunferencia, dos diámetros perpendiculares entre sí *(a b* y *c d)*, y las tangentes a la circunferencia en los puntos que la toquen dichos diámetros, formarán el cuadrado circunscripto que se desea).

34. *Inscribir un exágono regular a una circunferencia.*

(Procede como se ha explicado en el problema número 27 anterior).





35. *Circunscribir, a un círculo, un exágono regular.*

(Procediendo como en el problema anterior, inscribe, primero, un exágono; trázale sus radios oblicuos, y las perpendiculares a estos radios en los puntos que tocan a la circunferencia, formarán el exágono circunscripto que se desea).

COMBINACIÓN DE POLÍGONOS

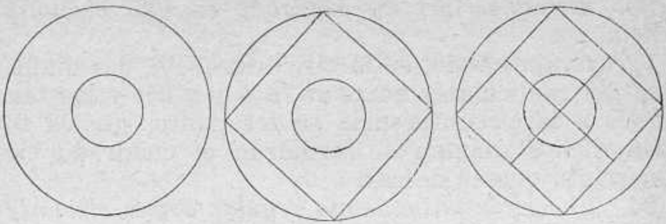
IV

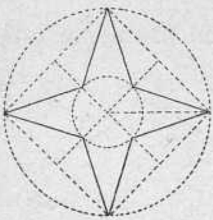
36. *Trazar una estrella poligonal.*

(Fíjate cómo se hace:

1.º Traza dos circunferencias concéntricas.

2.º Inscribe, en la mayor, un polígono de tantos lados como puntas tendrá la estrella, 4 en este caso.





3.º Traza las apotemas o radios del polígono inscripto.

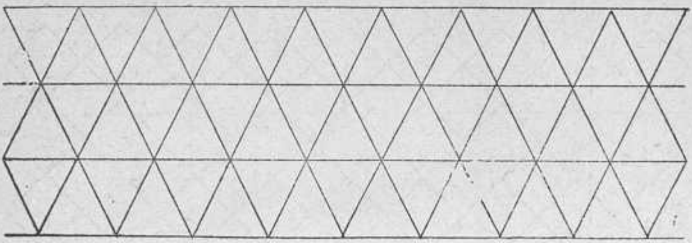
4.º Uno de los puntos en que las apotemas cortan a la circunferencia menor con los vértices del polígono inscripto).

37. *Dibujar un pavimento de triángulos.*

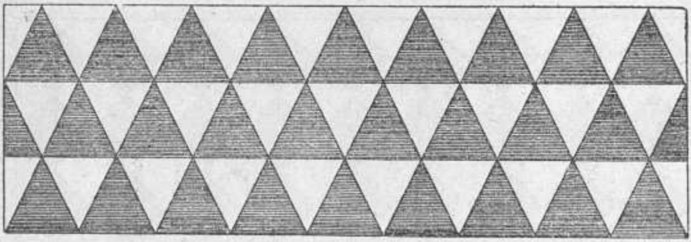
(Si trazas líneas inclinadas de derecha a izquierda, así:

y otras de izquierda a derecha, así:

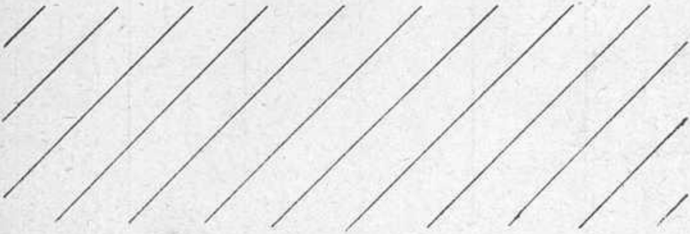
y otras que no se inclinen, así:



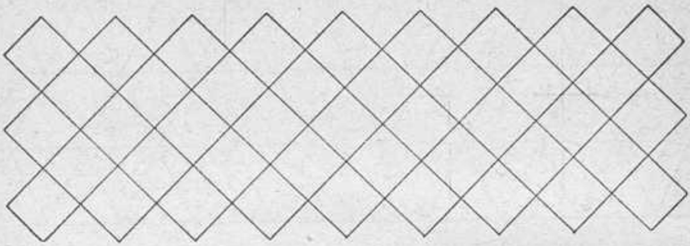
habrás formado, cuando lo sombrees, uno sí y otro no, la siguiente combinación de triángulos):



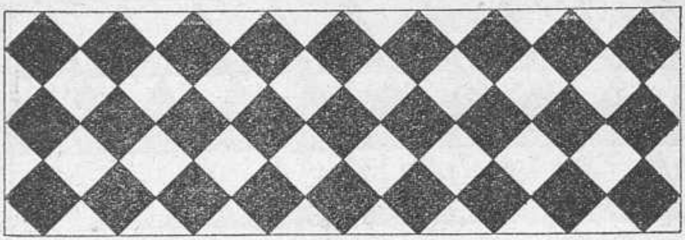
38. *Dibujar un embaldosado de cuadrados.* (Si trazas rectas de derecha a izquierda, así:



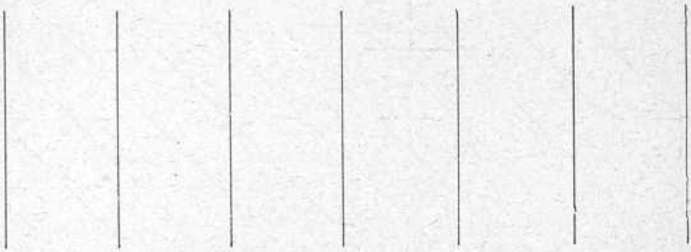
y otras de izquierda a derecha, *pero que sean perpendiculares* a las primeras, así:



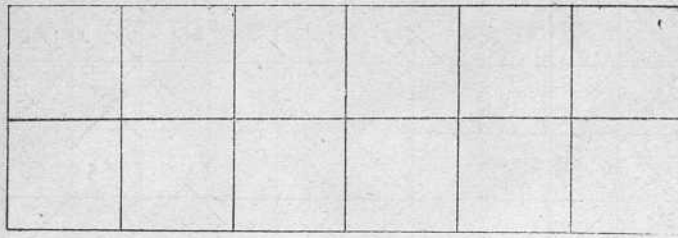
y pones sombra a un cuadro sí y otro no, formarás la siguiente combinación de cuadrados):



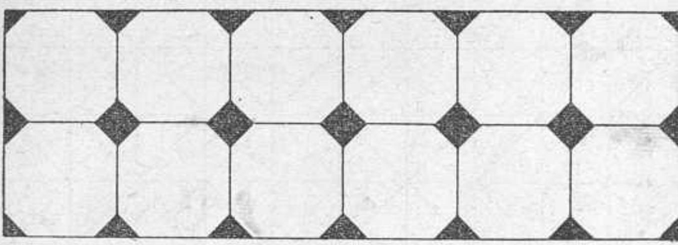
39. *Dibujar un mosaico de octógonos y cuadrados.* (Si trazas líneas verticales, así:



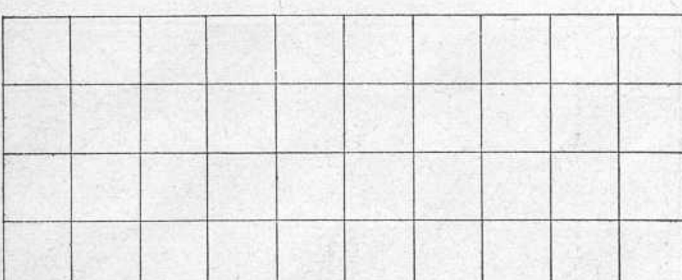
otras horizontales, de este modo:



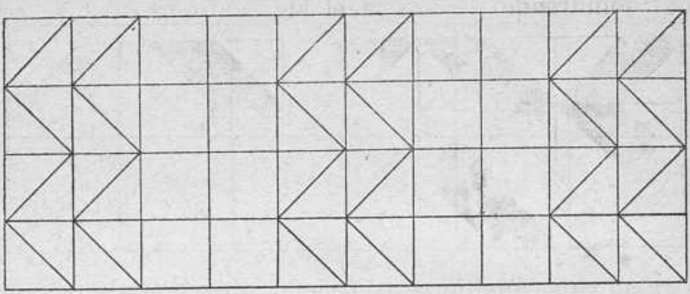
y en cada ángulo recto formas un triángulo pequeño trazando, sólo, la hipotenusa, y sombreas después los cuadraditos que resulten, habrás formado la siguiente combinación de octógonos con cuadrados):



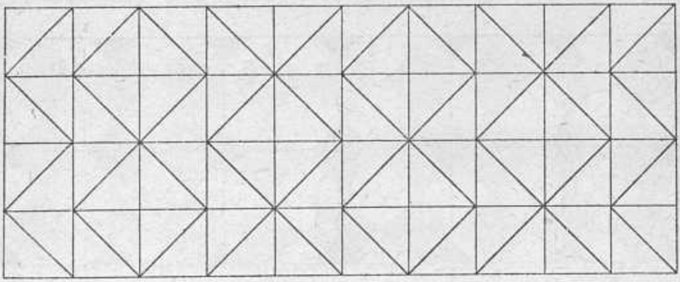
40. *Dibujar un pavimento representando exaedros o cubos.* (Traza la siguiente faja de cuadrados:



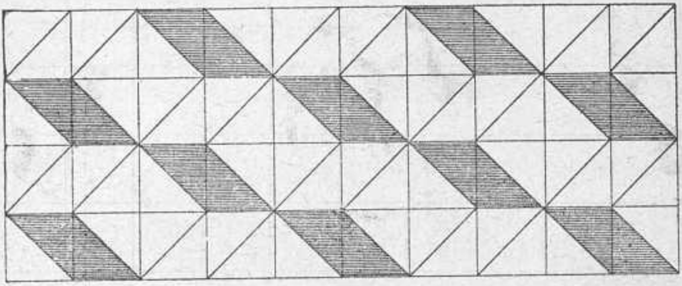
Añádele las rectas que ves, en forma de escalera:



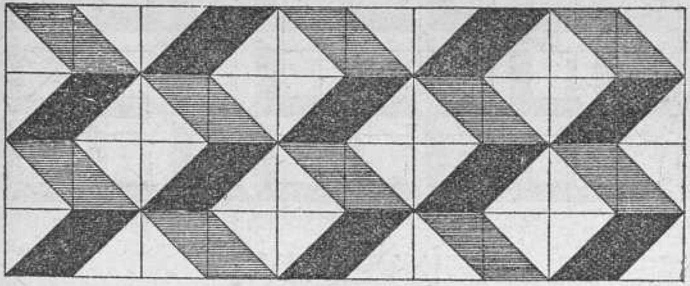
Pon, entre escalera y escalera, otras rectas en direcciones contrarias, así:



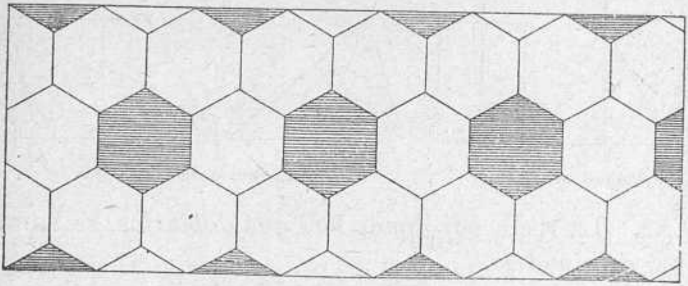
Sombrea un cuadro sí y otro no, con rayitas, de este modo:



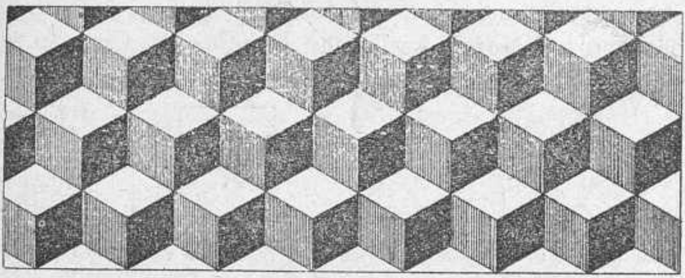
y si después llenas de tinta los romboides que no has sombreado, te saldrá el siguiente mosaico):



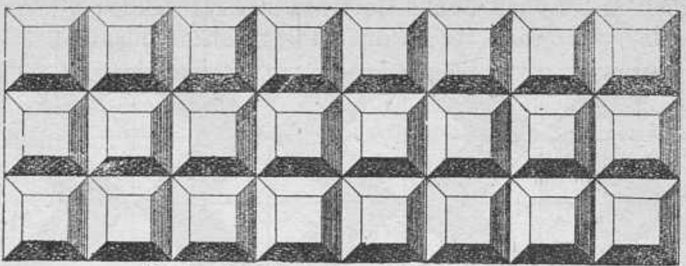
41. Las combinaciones de polígonos que pueden formarse, no acaban nunca. Repara en los dibujos que siguen, y, para saber trazarlos, *no lo mires todo de una vez; ve hallando, en ellos, cosas; poco a poco haz lo que vayas viendo,* y los dibujarás con facilidad.



Mosaico formado por exágonos



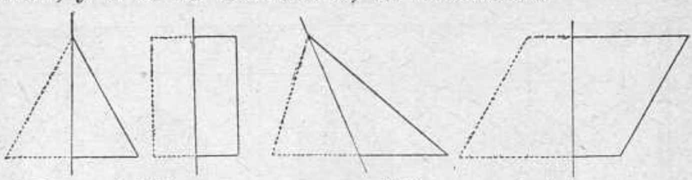
Mosaico formado por exágonos y rombos



Mosaico formado por cuadrados y trapecios

INVENTIVA

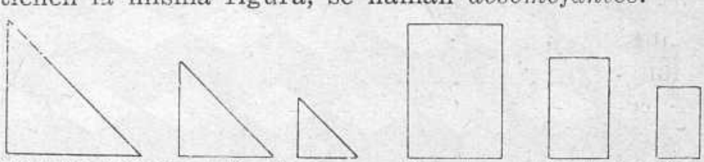
1. Los polígonos que, *doblados por una recta*, dan *dos mitades iguales, que se confunden* puestas una sobre otra, se llaman *simétricos con respecto a esa recta*, y si no se confunden, *no simétricos*.



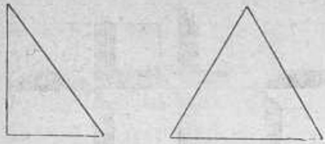
Polígonos *simétricos* Polígonos *no simétricos*

2. La recta *por donde hay que doblarlos*, se llama *eje de simetría*.

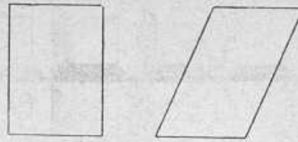
3. Los polígonos de *una misma figura, clase o grupo, aunque tengan diferentes tamaños*, porque se parecen o *semejan*, se llaman *semejantes*. Cuando no tienen la misma figura, se llaman *desemejantes*.



Estos tres triángulos *rectángulos* son *semejantes* Estos tres *rectángulos* también son *semejantes*



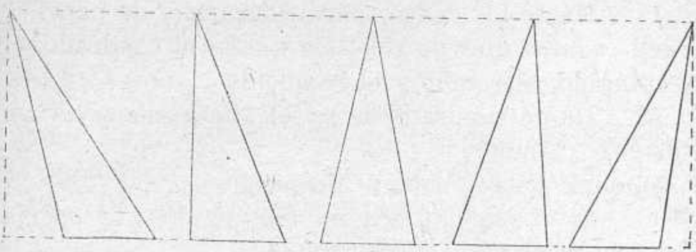
Un triángulo *rectángulo* y un *equilátero* son *desemejantes*



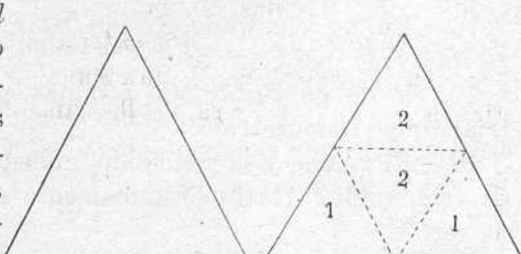
Un *rectángulo* y un *romboide* son también *desemejantes*

4. Toma papel; córtate un triángulo equilátero, uno isósceles y otro escaleno, y averigua, prácticamente, cuáles y cuántos son los ejes de simetría de cada uno.

5. Los triángulos que ves aquí, tienen *bases iguales* en una misma paralela y *los vértices opuestos en la otra. ¿Qué tienen de particular en cuanto a sus áreas? ¿Por qué?*

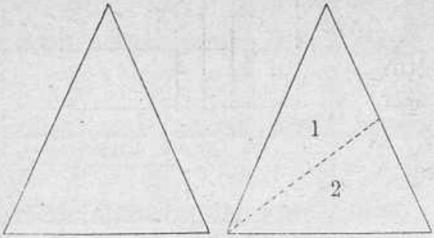


6. *Un triángulo equilátero se puede dividir en dos partes de igual área, pero no semejantes.* (No mires antes la solución que sigue, y prueba de resolverlo tú).



7. *Con un triángulo isósceles, se puede hacer lo*

mismo que en el caso anterior. (Procura resolverlo sin mirar antes la figura que sigue).



8. ¿Es posible construír o trazar un triángulo equilátero con un lado que mida 1 metro y que los otros dos lados midan en junto 3 metros? ¿Por qué?

9. ¿Podrías trazar un triángulo isósceles cuya base midiese 1 metro y entre los otros dos 2 metros? ¿Por qué?

10. Toma un papel de bordes irregulares y *forma un cuadrado.*

11. Hazte los cuatro paralelogramos, de papel, y dime *cuántos ejes de simetría tienen* el cuadrado, el rectángulo, el rombo y el romboide.

12. De un cuadrado de papel, *¿se puede sacar un rombo?* ¿Cómo?

13. ¿Y un romboide? Veámoslo.

14. Si el papel fuera un rectángulo, ¿te podría salir un rombo? ¿De qué modo?

15. ¿Y un romboide? Veámoslo.

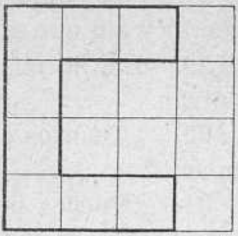
16. De un cuadrado, puede salir un triángulo. ¿Cómo y de qué clase será?

17. Y de un rectángulo también puede salir un triángulo. Demuéstralo.

18. El rombo y el romboide, ¿pueden convertirse en triángulos? Hazlo prácticamente si es que puede ser.

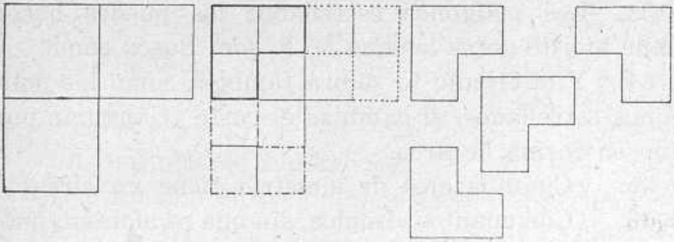
19. Un cuadrado y un rombo se pueden dividir de

muchos modos en cuatro partes iguales. ¿De cuántos modos sabrías hacerlo tú?



20. Es preciso dividir un cuadrado o un rectángulo en dos mitades que valgan igual y que no se parezcan.

21. Hay que partir estas 3 pastillas de chocolate entre cuatro niños, de modo que tengan todos igual y que lo parezca.



22. Hay que convertir un trapecio en triángulo de igual superficie. ¿Cómo lo harás?

23. De un triángulo equilátero, doblándole las puntas, sale una figura regular. ¿Cuál es?

24. ¿Qué saldrá haciendo lo mismo con un cuadrado?

25. Los polígonos regulares de 4-8-16, etc., lados, se hacen antes con dobleces y más dobleces y un corte nada más. Averigua cómo.

26. Ve, prácticamente, cuántos ejes de simetría tienen los polígonos regulares de un número par de lados.

27. El pentágono, que no es polígono de número par de lados, ¿tiene ejes de simetría? ¿Cuántos?

28. Construye varios triángulos equiláteros e iguales; ve poniéndolos alrededor de un punto hasta cerrar y sin que se monten. ¿Cuántos has necesitado?

29. Haz lo mismo con cuadrados, y dime los que entran.

30. ¿Cuántos exágonos necesitarías para hacer lo mismo?

31. ¿Puedes hacerlo igual con pentágonos?

32. A cada lado de un cuadrado, ponle, junto, un triángulo equilátero o uno isósceles. ¿Qué figura te resulta?

33. Los polígonos estrellados los puedes hacer como hiciste antes los que no lo son. Busca cómo.

34. Y el círculo te saldrá también como los polígonos estrellados, si cambias el corte triangular por uno en forma de arco.

35. ¿Cuántos ejes de simetría tiene un círculo?

36. ¿Con cuántos círculos, sin que se monten, puedes cubrir los alrededores de un punto?

37. Y con sectores circulares, ¿cuántos se necesitan?

38. Construye un sector y un segmento circulares; divídelos en varias partes iguales y en partes unas dobles que otras.

TERCERA PARTE

Estereometría

PRELIMINARES

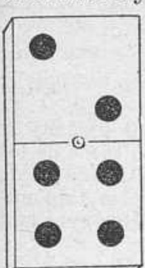
NOMENCLATURA

1. Recordad que *cuerpo es todo lo que ocupa un lugar en el espacio;*

o un conjunto de superficies;

o la extensión en tres dimensiones (largo, ancho y grueso).

2. Observad un sillar labrado por el cantero y otro sin labrar: *el primero es un cuerpo poliedro, porque termina en caras o superficies planas, y el otro no es poliedro, porque no termina en caras planas.*

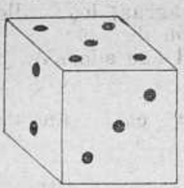


Cuerpo poliedro

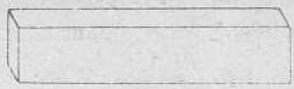
Cuerpo no poliedro

3. Pero la ficha del dominó, *que no tiene todas las caras iguales, es un poliedro irregular*, y el dado de los juegos, *que tiene iguales todas las caras y todos los ángulos, es poliedro regular.*

4. Cada *dos caras* de un poliedro forman una *abertura* que se llama *ángulo diedro,* y

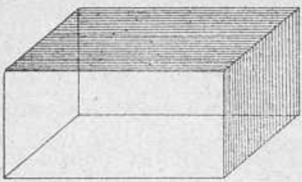


Poliedro *regular*

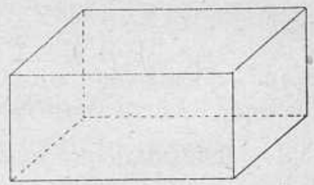


Poliedro *irregular*

se juntan o cortan en una *recta* que se llama *arista.*



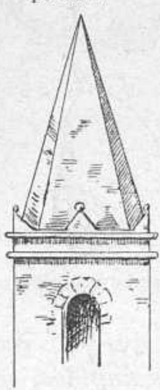
Son ángulos *diedros* las aberturas que dejan cada dos caras contiguas



Las líneas representan las *aristas* de los ángulos diedros

5. Cuando las caras que se juntan son *más de dos,* el ángulo que forman se llama *ángulo poliedro,* y la arista se convierte entonces en *un punto,* que se llama *vértice poliédrico.*

Vértice del ángulo poliedro



REPERTORIO:

Son ejemplos de poliedros: las piedras de cantería, labradas; los bloques o tacos de los calendarios; los tajos de jabón; las cajas de cartón; las barras de turrón; los tablones de madera; los ladrillos; las reglas gruesas; las resmas de papel.

Dan idea de cuerpos no poliedros: los vasos; las manzanas, las piedras de la calle; un montón de tierra; un trozo de carne; una bujía; un tambor.

Son ejemplos de aristas: las esquinas de las casas; el filo de los cuchillos; los cantos de las limas; los rincones de las paredes; el lomo de los tejados.

Dan idea de ángulos diedros y poliedros: un libro abierto; la hoja del cortaplumas; las pinzas; las visagras; los fuelles de los acordeones; las esquinas de un terrón de azúcar; las puntas de un diamante; las perlas de cristal que adornan las lámparas de los quinqués.

Cuestionario. — ¿Cuántos vértices, aristas, caras, ángulos diedros y poliedros hay en un dado? Las aristas, ¿cómo son por su clase y su posición? Y las superficies, ¿de qué clase son y cómo resultan por su posición y comparándolas entre sí? Tomar un dado y una regla o barra, y decir lo que tienen de igual y de diferente. — Indicar cuerpos poliedros que se tengan a la vista y señalar en ellos los vértices, aristas, caras, etcétera.

DIÁLOGO

Cuerpo. — Es todo lo que ocupa un lugar en el espacio.

División de los cuerpos. — En *poliedros* y *no poliedros.*

Cuerpos poliedros. — Son los limitados por caras o superficies planas.

Cuerpos no poliedros. — Son aquéllos cuya superficie no está formada por caras planas.

División de los poliedros. — En *regulares*, si tienen todas las caras y todos los ángulos iguales, e *irregulares*, si los tienen desiguales.

Ángulo diedro. — Es el espacio comprendido entre dos planos que se cortan o encuentran.

Arista. — Es la recta que une las dos caras de un diedro.

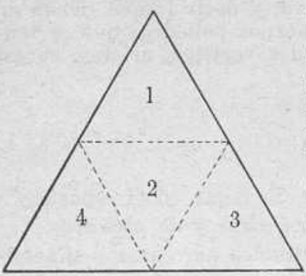
Ángulo poliedro (o poliédrico). — Es el espacio comprendido entre tres o más planos que se reúnen en un punto.

Vértice poliédrico. — Es el punto donde se reúnen varias caras de un poliedro.

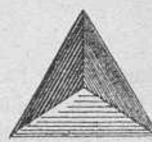
POLIEDROS REGULARES

NOMENCLATURA

1. Hazte, de cartón, un triángulo equilátero; córtalo (sin atravesar el cartón) por las líneas de puntos, como indica la figura; dóblalo por los cortes, y te saldrá un *tetraedro*, que consta de *cuatro caras iguales, formadas por triángulos equiláteros.*

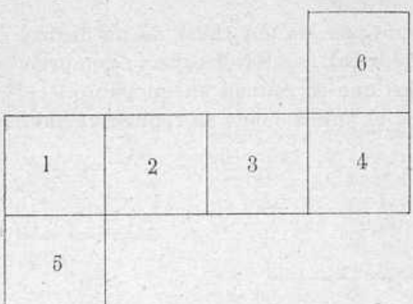


Desarrollo del *tetraedro*

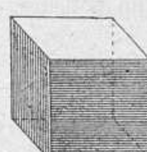


Tetraedro

2. Haz que el cartón sea ahora una Z (como en la figura); córtalo, sin atravesarlo, en los seis cuadrados que ves. Si los pliegas, te saldrá el *exaedro* o *cubo*, que consta de *seis caras iguales, formadas por cuadrados.*



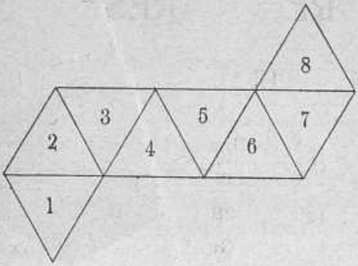
Desarrollo del *exaedro o cubo*



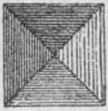
Exaedro o cubo

3. De un cartón cortado en 8 triángulos equiláte-

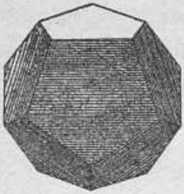
ros e iguales (como en la figura siguiente), te saldrá el *octaedro*, que consta de *ocho caras iguales formadas por triángulos equiláteros.*



Desarrollo del *octaedro*

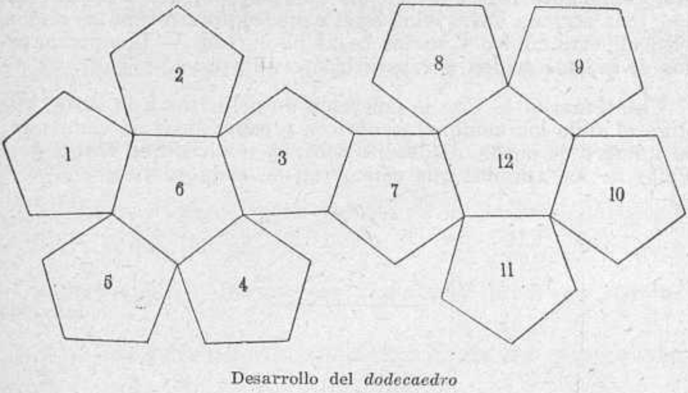


Octaedro



Dodecaedro

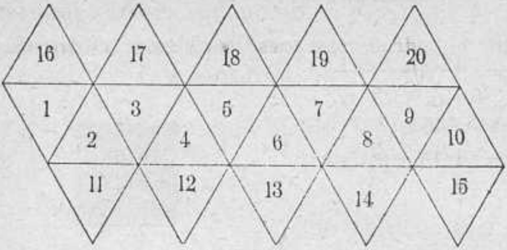
4. Si cortaras los doce pentágonos regulares e iguales que ves en la figura siguiente, doblándolos, te saldría un *dodecaedro*, que consta de *doce caras iguales formadas por pentágonos.*



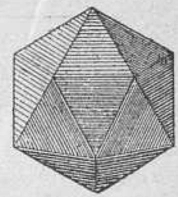
Desarrollo del *dodecaedro*

5. Y si el cartón tuviera 20 triángulos equiláteros e iguales como en la figura que ves ahí, te saldría el

icosaedro, que se forma de *veinte caras iguales,* que son, también, *triángulos equiláteros.*



Desarrollo del *icosaedro*



Icosaedro

6. *Ya no podrás formar más poliedros regulares,* porque *no hay otras combinaciones* posibles con caras que sean polígonos regulares iguales entre sí.

REPERTORIO:

Los cinco poliedros regulares escasean mucho, porque existen raramente formados en los cuerpos, objetos o cosas. El que más abunda entre ellos es el *exaedro*, que forma los dados, el decímetro cúbico y varias cajas de cartón. — Los pisapapeles de cristal suelen ser poliedros regulares.

Cuestionario. — Con la colección de poliedros a la vista, que diga el niño los nombres genéricos y específicos de cada uno; el número de caras, diedros, aristas y vértices que forma y el valor de los ángulos que concurren en cada vértice.

DIÁLOGO

¿Cuántos son los poliedros regulares? — *Cinco:* el *tetraedro*, el *octaedro*, el *icosaedro*, el *exaedro* o *cubo* y el *dodecaedro*.

Tetraedro. — Es el poliedro de cuatro caras, formadas por triángulos equiláteros iguales.

Octaedro. — Es el poliedro de ocho caras, formadas por triángulos equiláteros iguales.

Icosaedro. — Es el poliedro de veinte caras, formadas por triángulos equiláteros iguales.

Exaedro o cubo. — Es el poliedro de seis caras, formadas por cuadrados iguales.

Dodecaedro. — Es el poliedro de doce caras, formadas por pentágonos regulares iguales.

Propiedades de los poliedros regulares

1.ª *Todas las aristas de un mismo poliedro regular, son iguales.*

Comprobación. — Porque son lados de polígonos regulares iguales.

2.ª *Todos los ángulos planos de un mismo poliedro regular, son iguales.*

Comprobación. — Porque son ángulos de polígonos regulares iguales.

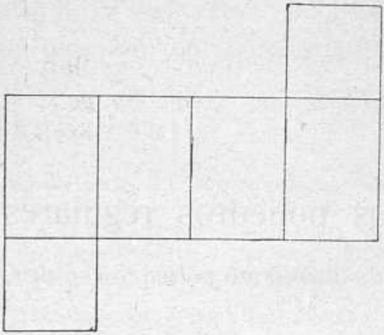
3.ª *Todos los ángulos poliédricos de un mismo poliedro regular, son, también, iguales.*

Comprobación. — Porque se componen de iguales ángulos planos que son los de los polígonos, y de igual número de ellos.

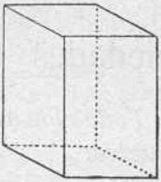
POLIEDROS IRREGULARES

NOMENCLATURA

1. Corta (sin separar el cartón) tres, cuatro, cinco *paralelogramos*, añadiéndoles *dos polígonos iguales cualesquiera*, uno encima y otro debajo, como se ve en la figura siguiente; dóblalos, después, por los cortes, y te saldrá un *prisma que es un poliedro irregular que tiene por bases dos polígonos cualesquiera iguales y paralelos, y por caras laterales, siempre, paralelogramos.*

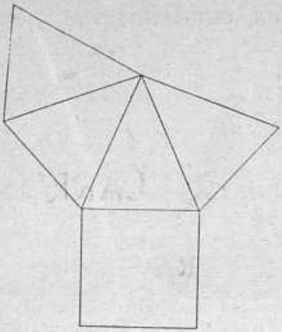


Desarrollo del *prisma*

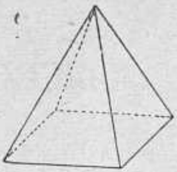


Un *prisma*

2. Corta, ahora, varios triángulos, y ponles sólo una base en vez de dos, como ves en la figura siguiente; pliega por los cortes, y obtendrás otro poliedro irregular llamado *pirámide, que tiene por base un polígono cualquiera y, por caras laterales, triángulos.*

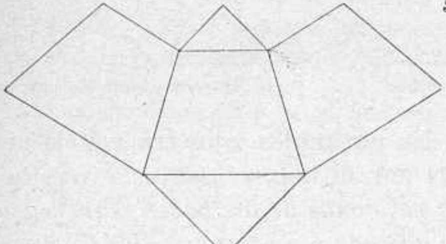


Desarrollo de la *pirámide*

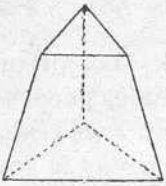


Una *pirámide*

3. Dibuja, ahora, trapecios, en vez de triángulos; añádeles, para bases, dos polígonos semejantes, como en la figura, y formarás un poliedro irregular llamado *tronco de pirámide, que tiene por bases dos polígonos semejantes cualesquiera, y por caras laterales, siempre trapecios.*



Desarrollo del *tronco de pirámide*

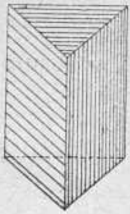


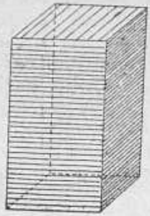
Un *tronco de pirámide*

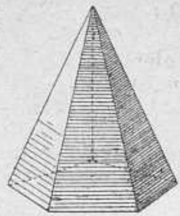
Lo que le falta a un tronco de pirámide para completarse, se llama *pirámide deficiente.*

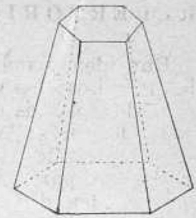
4. Los *prismas,* las *pirámides* y los *troncos de pirámide* (o pirámides truncadas) pueden ser *triangulares, cuadrangulares, pentagonales,* etc., según que

tengan por bases *triángulos, cuadriláteros, pentágonos*, etc., etc.

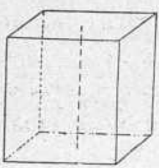

Prisma triangular

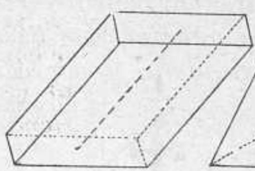

Prisma cuadrangular

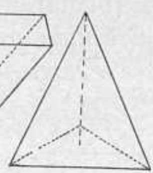

Pirámide pentagonal

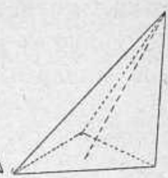

Tronco de pirámide exagonal

5. Los prismas y las pirámides pueden ser *rectos* u *oblicuos, según que no se inclinen o se inclinen más a un lado que a otro con respecto las bases.*

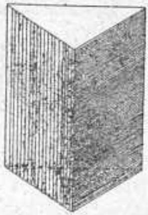

Prisma *recto*

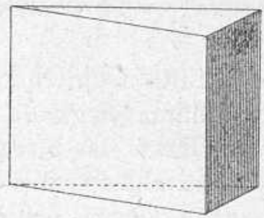

Prisma *oblicuo*


Pirámide *recta*


Pirámide *oblicua*

6. Los prismas, las pirámides y los troncos de pirámide, pueden ser, por último, *regulares* o *irregulares, según que los polígonos de las bases sean regulares o no lo sean y además sean o no, rectos.*


Pirámide *regular*


Pirámide *irregular*

REPERTORIO:

Dan idea y son ejemplos de prismas: las cajas de cerillas; los ladrillos; los cuadradillos de rayar; las casas; los pilares no redondos; los campanarios sin el remate; las pizarras; las pilas de libros; las resmas de papel; etc.

Las pirámides no abundan; suele haberlas en los remates de los campanarios, de los torreones, de los miradores, etc.

Dan idea de pirámides truncadas: las pesas métricas de hierro fundido; algunos taburetes; ciertos tinteros de cristal.

Cuestionario. — Con la colección de cuerpos geométricos a la vista del niño, hacerle distinguir cuáles son prismas, pirámides, pirámides truncadas, etc. — Después de esta distinción, hacer que singularicen más hasta concretar la nomenclatura, según las bases, la regularidad de éstas y la dirección de los ejes y aristas. Nombres que admiten, además, o qué son, también, el *tetraedro* y el *exaedro*.

DIÁLOGO

Prisma. — Es un poliedro que tiene *por bases* dos polígonos cualesquiera, iguales y paralelos, y por caras laterales, *siempre, paralelogramos.*

Pirámide. — Es un poliedro que tiene *por base*, un polígono cualquiera, y por caras laterales, *siempre, triángulos.*

Pirámide truncada. — Es un poliedro que tiene *por bases* dos polígonos cualesquiera, semejantes y paralelos, y por caras laterales, *siempre, trapecios.*

División de los prismas, pirámides y troncos de pirámides.— En triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc., según que sus bases sean triángulos, cuadriláteros, etc.

Además, pueden ser: Rectos, si no se inclinan más a un lado que a otro con respecto a la base;

Oblicuos, si se inclinan más a un lado que a otro.

Y, por último, pueden ser: Regulares, si son regulares los polígonos de sus bases y, además, son rectos;

Irregulares, si no son regulares sus bases o son oblicuos.

Propiedades de los poliedros irregulares

1.ª *Las aristas laterales del prisma son todas iguales y paralelas.*

Comprobación. — Son iguales, porque van de base a base, y las bases son paralelas; son paralelas, porque cada una de ellas es lado común de dos paralelogramos.

2.ª *Las aristas laterales de una pirámide son iguales en las pirámides rectas, y desiguales, en las oblicuas.*

Comprobación. — Porque en las pirámides rectas, la cúspide está a igual distancia de los vértices de la base, y esas distancias son las mismas aristas; en las oblicuas, no lo está.

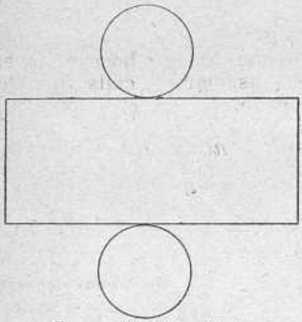
3.ª *Las caras laterales de un tronco de pirámide recto, son trapecios isósceles; en los oblicuos no lo son.*

Comprobación. — Porque en los troncos rectos, dichas caras, prolongadas hasta la cúspide, dan triángulos isósceles, de los cuales salen los trapecios isósceles.

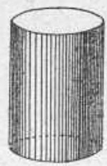
CUERPOS REDONDOS

NOMENCLATURA

1. Toma un rectángulo de cartón; ponle *dos círculos,* uno encima y otro debajo; *arrolla* el rectángulo alrededor de los círculos, y te saldrá un *cilindro, que es un cuerpo poliedro que tiene por bases dos círculos iguales y paralelos y, por superficie lateral, una superficie curva convexa.*



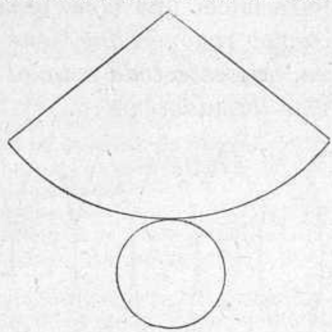
Desarrollo del *cilindro*



Un *cilindro*

2. Toma, ahora, un *triángulo* de cartón que tenga por base un arco, y ponle *un círculo* en vez de dos. Arrolla el triángulo alrededor del círculo, y te saldrá un *cono, que es un cuerpo no poliedro que tiene por base un círculo y, por superficie lateral, una superficie curva convexa.*

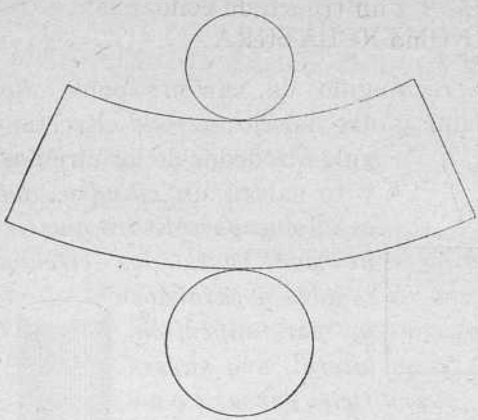
Un *cono*



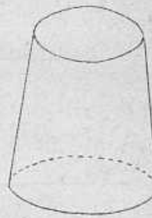
Desarrollo del *cono*

3. Si en vez de un triángulo, tomaras un *trapecio* curvilíneo, y, si en vez de un círculo, hubiera *dos* y arrollaras el trapecio alrededor de los círculos, te sal-

dría un *tronco de cono, que es un cuerpo redondo que tiene por bases dos círculos paralelos y, por superficie lateral, una superficie curva convexa.*

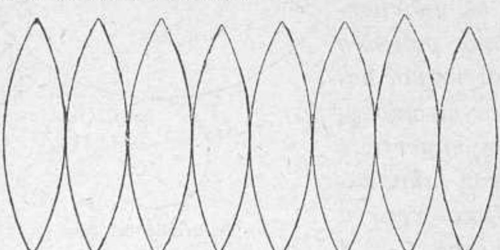


Desarrollo del *tronco de cono*

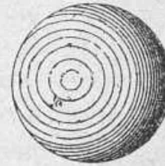


Un tronco de *cono*

4. Y si cortaras un cartón en *muchos gajos* (husos esféricos), y los redondearas plegándolos como para hacer una bola, te saldría una *esfera, que es un cuerpo redondo que tiene una superficie curva convexa, que está toda a igual distancia de un punto interior llamado centro.*



Desarrollo de la *esfera*

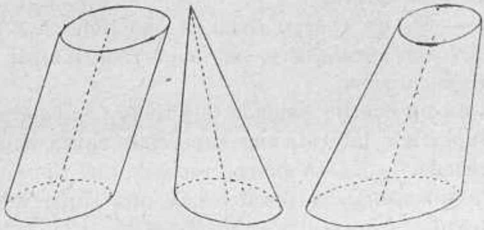


Una *esfera*

5. Hay cilindros, conos y conos truncados que son *rectos,* porque *su eje es perpendicular a las bases,* y

otros que son *oblicuos, porque su eje es oblicuo a las bases.*

La parte que falta a un tronco de cono, hasta completarlo, se llama cono deficiente.



Cilindro *oblicuo* Cono *oblicuo* Tronco de cono *oblicuo*

REPERTORIO:

Son ejemplos de cilindros: las columnas; las canales; los tubos de las estufas; los portaplumas; los cantos de las cañas; una pila de monedas; una moneda; los peones del juego de damas.

Dan idea de conos: los pilones de azúcar; los remates de algunas torres o campanarios; los embudos; las cabezas y puntas de los clavos; la punta de un lápiz afilado; el extremo de un portaplumas; el sombrero de los *clowns;* etc.

Representan troncos de cono: las chimeneas de las fábricas; las columnas más gruesas de abajo; las dos mitades de un tonel; las pesas de hierro del sistema métrico.

Son ejemplos de esferas: las bolas de queso; las balas de cañón; las bolas de billar; las albóndigas; las píldoras; los perdigones; ciertos pomos de escalera; los cañamones; etc.

Cuestionario. — Con la colección de cuerpos redondos, hacer que el niño los distinga unos de otros y, aún, que señale la variante por la verticalidad o inclinación del eje. — Presentarle objetos o ejemplos que tengan algunos de los cuerpos redondos, y que los distinga y defina. — Hacer que, con trozos de papel cortados exprofeso, simulen el cilindro, el cono y el tronco de cono.

DIÁLOGO

Cuerpos redondos. — Son cuatro: el cilindro, el cono, el cono truncado y la esfera.

Cilindro. — Es un cuerpo redondo que tiene *por base* dos círculos *iguales* y paralelos y, por superficie lateral, una superficie curva convexa.

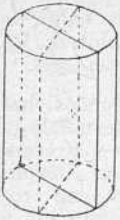
Cono. — Es un cuerpo redondo que tiene *por base* un círculo y, por superficie lateral, una superficie curva convexa.

Cono truncado. — Es un cuerpo redondo que tiene por *bases* dos círculos *semejantes* y paralelos, y una superficie lateral curva convexa.

Esfera. — Es un cuerpo redondo que tiene su superficie convexa, toda a igual distancia de un punto interior llamado centro.

Propiedades de los cuerpos redondos

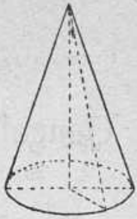
1.ª *El cilindro recto se forma por la rotación de un cuadrado o de un rectángulo que gira alrededor de su eje o de uno de sus lados.*



Generación del cilindro

Comprobación. — Pon muchos libros entreabiertos, plantados o verticales, unidos por sus lomos y las hojas algo separadas, y figurarán un cilindro. — Hunde un trozo de regla en el barro; hazle dar una rotación, y dejará el hueco de un cilindro.

2.ª *El cono recto se forma por la rotación de un* *triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos.*

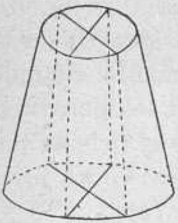


Generación del cono

Comprobación. — Toma muchas escuadras iguales; ponlas verticalmente, tocándose por un mismo cateto, y juntas figurarán un cono. — Introduce en el barro una paleta de albañil; hazla rodar, y dejará el hueco de un cono.

Haciendo rodar un triángulo equilátero o uno isósceles alrededor de sus alturas, saldría también un cono.

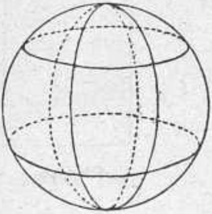
3.ª *El tronco de cono recto se forma por la rotación de un trapecio isósceles que gira alrededor de su eje o altura.*



Generación del tronco de cono

Comprobación. — Coge muchos trapecios isósceles e iguales, de papel; dóblalos por su eje, ponlos verticalmente unidos por dicho eje, y te resultará un tronco de cono. — Coge una laya o pala cuya hoja sea trapecial; húndela en el barro; hazla rodar, y dejará el hueco de un tronco de cono.

4.ª *La esfera se forma por la rotación de un semicírculo que gira alrededor del diámetro.*



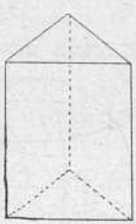
Generación de la esfera

Comprobación. — Suponte muchísimas medias hostias, pegadas a lo largo del diámetro, a una aguja de hacer media, y te representarán una esfera. — Hunde una moneda en el barro, hazla girar alrededor de su diámetro, y dejará el hueco de una esfera.

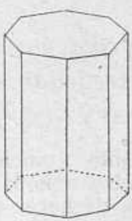
Genealogía de los cuerpos geométricos

NOMENCLATURA

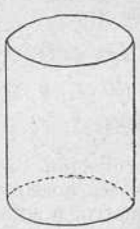
1. Cuando el carpintero quiere hacer un cilindro (una barra redonda), toma un prisma (un listón), mata las cuatro aristas (cantos) y le salen 8; de 8, hace 16; de 16, hace 32, y así sucesivamente. Cuando el número de caras y aristas es infinito, los polígonos de las bases se convierten en círculos, y el prisma pasa a ser un cilindro. Luego, *todo cilindro es un prisma de infinito número de caras*. Repáralo.



Prisma



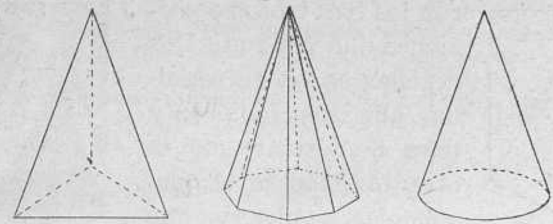
Prisma



Cilindro

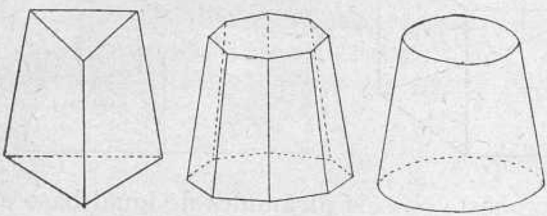
2. Cuando el carpintero quiera hacer un cono, tomará una cuña, que es una pirámide. Irá matando las aristas, sacando cada vez doble número de caras y, por tanto, más pequeñas. Cuando las caras sean infinitas, y, por pequeñas, no se vean, del polígono de la base saldrá un círculo, y la pirámide se habrá

transformado en cono. Luego: *todo cono es una pirámide de infinito número de caras.* Helo aquí:



Pirámide Pirámide Cono

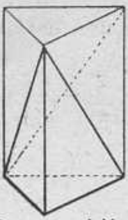
3. Los carpinteros que quieren hacer un tronco de cono, toman un tronco de pirámide, y sacando cada vez doble número de caras, matando las aristas, cuando éstas no llegan a verse, la pirámide truncada se convierte en un tronco de cono. Luego: *todo cono truncado es un tronco de pirámide de infinito número de lados.*



Tronco de pirámide Tronco de pirámide Tronco de cono

4. Ningún carpintero podrá hacer una esfera (una bola), si no coge un poliedro; va matando ángulos poliédricos, y va sacando, cada vez, más caras, hasta que, por pequeñas, no se vean. Luego: *toda esfera es un infinitoedro o poliedro de infinito número de caras.*

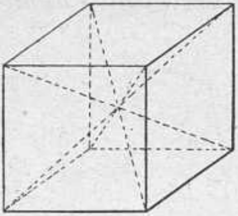
5. Si tomas una pirámide cualquiera y le das dos cortes, como se ve en las figuras siguientes, te resultarán los tres trozos o porciones que ves aquí. Dos de ellas se ve, en seguida, que son iguales, y para demostrar que la otra también lo es, pesándolas, se observa que tienen igual cantidad de madera. Luego: *cualquier pirámide es la tercera parte de un prisma que tenga la misma base e igual altura.*

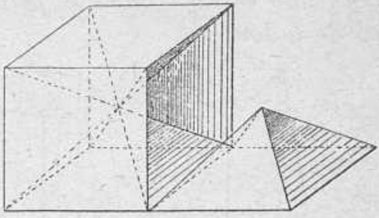


Descomposición del prisma en pirámides

El prisma descompuesto en pirámides

6. Fíjate en este exaedro o cubo y verás que, si le damos los cortes que representan las líneas de puntos, como se hacen las catas de las sandías, aparecerá





descompuesto en seis pirámides de igual base e igual altura. Luego: *todo poliedro regular consta de tantas pirámides iguales como caras tiene el poliedro.*

REPERTORIO:

Dan idea de conversión o cambio de unos cuerpos geométricos en otros, los siguientes ejemplos: los torneros, cuando de las barras cuadradas sacan barrones o palos cilíndricos; cuando redondeamos una astilla para que sirva de tapón; cuando hacemos punta a los lápices, matando aristas y caras; cuando se hacen píldoras o albóndigas; cuando se quiere mondar, muy en redondo, una patata; cuando se hacen muchas catas a una sandía; etc.

Cuestionario. — ¿Qué cuerpo podrá sacarse de una barrita prismática de clarión, y cómo? ¿Qué otro cuerpo han sido antes los tapones de corcho, y qué cosas han perdido? ¿Qué poliedro regular se aproxima más a la esfera? ¿En qué se descomponen cada uno de los poliedros regulares? ¿Qué saldría, teóricamente, de una esfera?

DIÁLOGO

¿Qué es un cilindro? — Es un prisma de infinito número de caras.

¿Y un cono? — Es una pirámide de infinito número de lados.

¿Un tronco de cono? — Equivale a un tronco de pirámide de infinito número de aristas.

¿A qué puede compararse la esfera? — Puede compararse a un poliedro de infinito número de caras.

Descomponiendo el prisma, salen tres pirámides de igual base e igual altura que el prisma.

Descomponiendo un poliedro regular, resultan tantas pirámides iguales como caras tiene el poliedro.

Descomponiendo la esfera, saldría un número infinito de pirámides iguales.

Áreas y volúmenes de los cuerpos

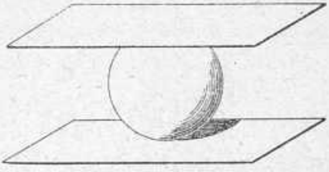
NOMENCLATURA

1. Si supones un cuerpo geométrico cualquiera encima de una mesa, a *esa cara sobre la que descansa el cuerpo se la llama base.*

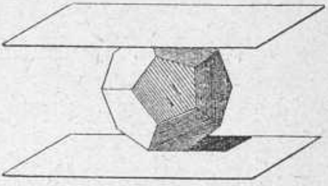
En los prismas, se llaman bases las dos caras iguales y paralelas.
Las pirámides tienen por base la cara opuesta al vértice o cúspide.
Las pirámides truncadas tienen dos bases, llamadas mayor y menor.
En el cilindro, son siempre bases los dos círculos.
En el cono truncado, hay dos bases, mayor y menor, que son los círculos.
En los poliedros regulares, cualquier cara es base.
La esfera no tiene bases.

2. En todo poliedro irregular, la *distancia* que hay, perpendicularmente, *desde la base hasta la cara o vértice más distantes,* se llama *altura.*

En los prismas rectos, es altura cualquier arista lateral; en los oblicuos, no.
En las pirámides rectas, es altura el eje; en las oblicuas, no lo es.



El radio de la esfera, es la mitad de la distancia que media entre ambos planos



La apotema del dodecaedro, es la mitad de la distancia que media entre ambos planos

En los cilindros, conos y troncos de cono rectos, es altura el eje; en los oblicuos, no.

En los poliedros regulares *no hay altura, sino apotema*, que es la distancia del punto medio de las caras al centro.

En la esfera, la apotema se llama radio.

La apotema de un poliedro o el radio de una esfera, se hallan poniendo estos cuerpos entre dos planos paralelos, hallando la distancia que los separa y dividiendo por 2.

3. En un membrillo, por ejemplo, *lo extenso de su piel es la superficie, y la cantidad de materia comestible y hueso que contiene es el volumen.*

4. *Área o medida de la superficie de un cuerpo, es el número de metros, decímetros,* etc., *cuadrados, que miden sus caras.*

5. *Volumen de un cuerpo, es el número de metros, decímetros,* etc., *cúbicos que mide dicho cuerpo.*

El forro de los libros, la piel de las pelotas, la cáscara de una nuez, son ejemplos de superficies. El vino de un vaso, el agua de una botella, el chocolate de un bollo, etc., son ejemplos de volumen.

El área de un cuerpo se llama lateral cuando sólo se cuenta la de las caras laterales, y total, cuando se cuenta toda, esto es, la de las caras laterales y la de las que forman las bases. Los poliedros regulares y la esfera sólo tienen área total.

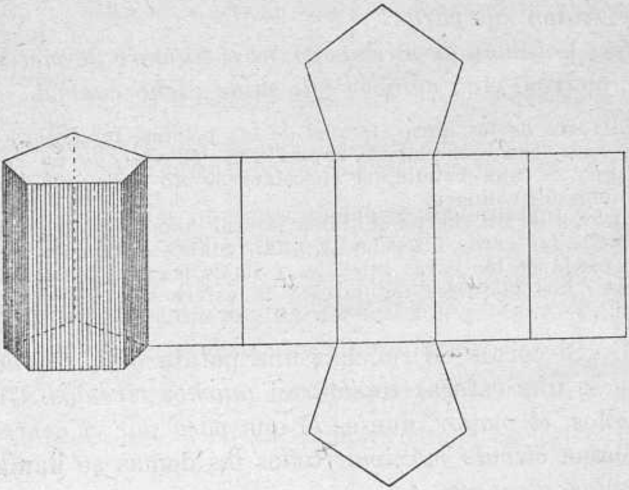
6. Si cortas en ronchas una patata *bien redonda* (que es una esfera) te saldrán *muchos círculos*. Uno de ellos, *el mayor*, que es el que *pasa por el centro*, se llama *círculo máximo;* todos los demás se llaman *círculos menores.*

El coger un centímetro cuadrado y ver las veces que cabe o se contiene en el forro de un libro, sería muy costoso; verlo en una pelota sería imposible. Llenar una esfera de centímetros cúbicos para saber su volumen no daría resultado, porque habría huecos. Sabiendo las medidas o dimensiones lineales de los cuerpos, podrás saber su área y su volumen si aprendes lo que sigue.

PROPIEDADES

ÁREAS

1. Fíjate en el dibujo, y verás que, para forrar lateralmente cualquier prisma recto, se necesita un *cuadrilongo* de papel que tenga por base la longitud del perímetro de la base del prisma, y por altura, la

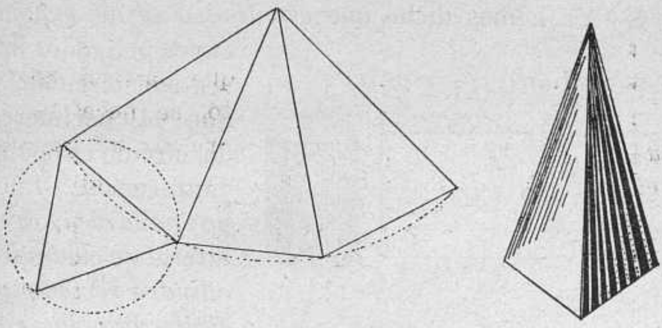


del prisma mismo. Luego: *cuando quieras hallar el área lateral de un prisma recto, averigua el perímetro de una base y multiplícalo por la altura del prisma.*

Tendrás el área total, hallando, además, la de las dos bases y sumando ambas áreas.

2. Mira este grabado. Él demuestra que el forro

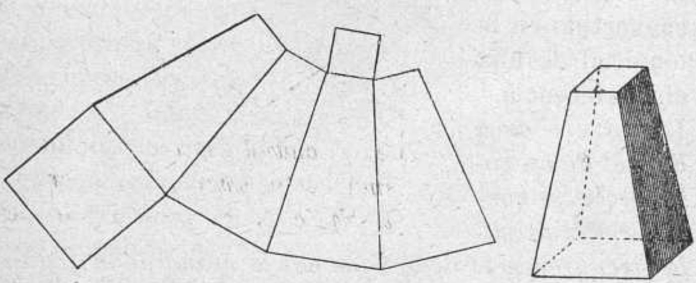
lateral de una pirámide recta, es como un *triángulo* que tiene por base el perímetro del polígono que forma la base de la pirámide, y por altura, la altura de la cara (no la altura de la pirámide). Luego: *para*



hallar el área lateral de cualquier pirámide recta, tendrás que multiplicar el perímetro de la base por la mitad de la altura de una cara.

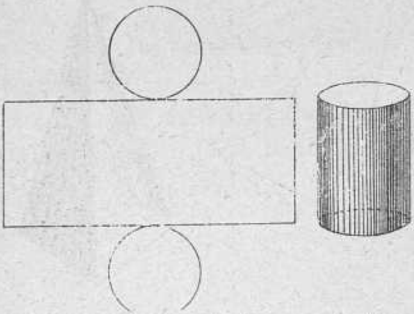
Para obtener el área total, halla la del polígono base y súmala con la lateral.

3. Observa que las caras laterales de un tronco de pirámide, puestas planas, forman como un *trape-*



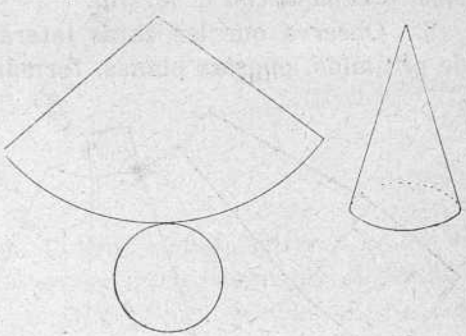
cio que tiene por bases los perímetros de las dos bases del tronco, y por altura, la de las caras (no la del tronco). Luego: *si quieres hallar el área lateral de una pirámide truncada, recta, multiplica la mitad de la suma de los perímetros de las dos bases por la altura de una cara.*

4. Ya hemos dicho que *el cilindro es un prisma* cuyos polígonos bases son círculos, y que el perímetro del círculo es la circunferencia. Luego: *hallarás el área lateral de cualquier cilindro recto, multiplicando la circunferencia de la base por la altura del cilindro.*

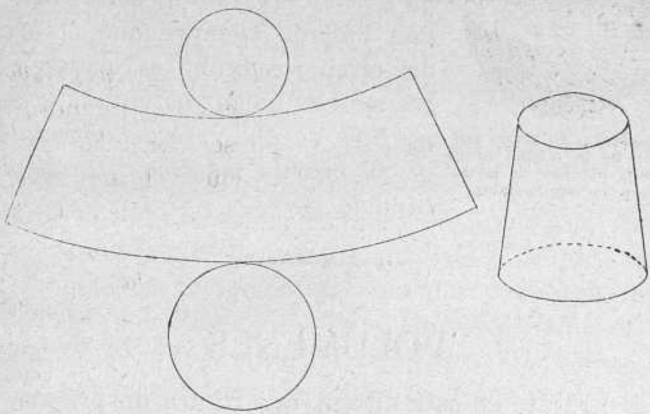


Para tener el área total, añade la de los dos círculos.

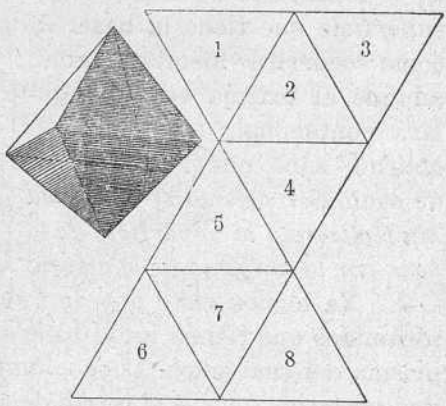
5. Ya recordarás que *el cono es una pirámide*, y que el perímetro del polígono de la base se ha convertido en la longitud de una circunferencia. Luego: *el área lateral de un cono recto, se consigue multipli- la circunferencia de la base por la mitad de la distancia que existe entre la cúspide y un punto cualquiera de la circunferencia de la base.*



6. También sabes que *el tronco de cono es un tronco de pirámide;* por consiguiente: *el área lateral de un*

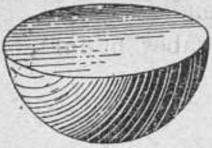


tronco de cono recto se averigua multiplicando la mitad de la suma de las dos circunferencias por la altura de la cara lateral.



7. La superficie de un poliedro regular es la de una cara cualquiera repetida tantas veces como caras tiene el poliedro. Luego: *para hallar el área de un poliedro regular, averigua el área de una cara y multiplícala por el número de caras que el poliedro tenga.*

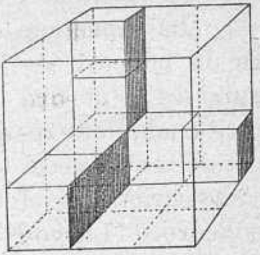
8. Los hombres han comparado muchas veces *la superficie de una esfera con la de un círculo máximo de la misma,* y han hallado siempre que el área del círculo máximo es *cuatro veces menor;* luego: *obtendrás la superficie de una esfera hallando la de su círculo máximo y multiplicándola por 4.*



Semiesfera. El plano circular de la misma es el *círculo máximo* de la esfera correspondiente

VOLÚMENES

1. Fíjate en este dibujo, que figura un prisma, y verás que en la base caben nueve decímetros cúbicos y que en todo él cogen 3 veces 9, o sean 27, que son los 3 decímetros de altura multiplicados por los 9 de superficie que tiene la base. Y como ocurrirá siempre igual, aunque el prisma sea triangular, pentagonal, etc., recto u oblicuo, sabe que: *el volumen de cualquier prisma se averigua multiplicando la superficie de la base por la longitud de la altura.*



2. Ya hemos visto que de todo prisma salen tres pirámides que tienen igual base e igual altura que el prisma del cual salen. Luego: *hallarás el volumen de una pirámide* (que es el tercio de un prisma) *si multiplicas el área de su base por el tercio de su altura.*

3. Si a una pirámide *le quitas* la porción que se llama *pirámide deficiente, te quedará el tronco de pi-*

rámide. Haz eso mismo, pero no con la pirámide, sino con los números que indican los volúmenes de la pirámide total y de la deficiente, y tendrás que: *si al volumen de una pirámide* (que ya sabes hallar), *le quitas el volumen de la pirámide deficiente* (que es otra pirámide más pequeña) *te quedará el volumen del tronco de pirámide.*

4. Te repito aquí lo que ya sabes:

que el cilindro es un prisma;

que el cono es una pirámide,

y que el tronco de cono es un tronco de pirámide.

Cambia los *polígonos* por *círculos* y tendrás que:

El volumen de un cilindro se halla multiplicando el área de su círculo base por la altura del cilindro.

El volumen del cono se halla multiplicando el área de su círculo por el tercio de la altura.

El volumen de un tronco de cono se obtiene hallando el volumen del cono total y restándole el del cono deficiente.

5. Recuerda que todo poliedro regular consta de tantas pirámides iguales como caras tiene; que las caras del poliedro son las bases de las pirámide, y que la altura de todas es la apotema del poliedro. En vez de hallar el volumen de cada pirámide y sumar luego estos volúmenes, suma primero todas las bases, que forman *la superficie del poliedro,* y *multiplícala por la tercera parte de la apotema* (que es la altura que tienen todas las pirámides).

6. También recordarás que la esfera es un *infinitoedro,* o poliedro de infinitas caras. Haz como en los poliedros, y hallarás su volumen *multiplicando el área de la esfera por la tercera parte del radio,* o sea, el área del círculo máximo por 4, y luego, por el tercio del radio.

REPERTORIO:

Son ejemplos de averiguación de superficies, los siguientes casos: cuando a un hojalatero le preguntan cuánto costará un depósito o vasija, y averigua la hojalata que entra para poder contestar; para calcular la chapa de nogal que entrará en un mueble; para saber el coste de pintar la escuela, que es un prisma; o el de enlucir una columna, que es un cilindro; o la tela para hacer un globo, que es casi una esfera.

Son ejemplos de averiguación de volúmenes los siguientes casos: en los picapedreros, que compran y trabajan las piedras *a metros cúbicos;* en los toneleros, que han de construír los toneles (dos troncos de cono), para cantidades fijas de vino; cuando se averigua el agua que hay en una balsa o pozo, botella, embudo, etc.; cuando se paga a metros cúbicos el abrir una zanja.

Cuestionario. — ¿Con cuántos metros cuadrados de papel podrás empapelar tu escuela? ¿Cuánto aire cabe en tu escuela? ¿Cuánta tinta cabe en tu tintero, o en la botella, o en el embudo? ¿Cómo dirías más pronto el modo de hallar el volumen del exaedro? Yo conozco dos maneras de hallar el volumen del exaedro, del tetraedro y del octaedro; tú, ¿cuántas? Una pila de agua bendita es, generalmente, una media esfera; ¿cuánta agua cabe en la de tu iglesia, si tiene 60 centímetros de diámetro? ¿Cuánto chocolate cabe en una jícara llena? ¿Qué superficie tiene la piel de tu pelota, y qué volumen, los trapos que encierra? ¿Cuánto cartón entra en un dodecaedro que tiene 8 centímetros de arista y 10 de apotema?

DIÁLOGO

Base de un cuerpo. — Es la cara sobre que descansa.

Altura. — Es la distancia desde la cara o vértice más distante a la base.

Área de un cuerpo. — Es el número de unidades cuadradas que miden todas sus caras.

Volumen. — Es el número de unidades cúbicas que mide el cuerpo.

Círculo máximo de una esfera. — Es el círculo mayor, que se obtiene cortándola por el centro.

Área lateral de un prisma recto. — Se multiplica el *perímetro* de la base por la altura.

Volumen de un prisma. — Se multiplica el *área* de la base por la altura.

Área lateral de una pirámide recta. — Multiplicando el *perímetro* de la base por *la mitad* de la altura de una cara.

Volumen de la pirámide. — Multiplíquese el *área* de la base por *el tercio* de la altura.

Área lateral de un tronco de pirámide recta. — Multipliquemos la mitad de la suma de los perímetros de las bases por la altura de una cara.

Volumen de la pirámide truncada. — Hállese el volumen de la pirámide total; después, el de la pirámide deficiente, y réstense uno de otro.

Área lateral del cilindro recto. — Se multiplica *la circunferencia* de la base por la altura.

Volumen del cilindro. — Multiplicando el *área* del círculo de la base por la altura

Área lateral de un cono recto. — Multiplíquese la *circunferencia* de la base por *la mitad* de la distancia entre la *cúspide* y la circunferencia de la base.

Volumen del cono. — Multipliquemos el *área* del círculo de la base por *el tercio* de la altura.

Área lateral de un tronco de cono recto. — Se multiplica la mitad de la suma de las dos circunferencias por la longitud del lado, o línea recta que una las dos circunferencias.

Volumen del cono truncado. — Hallemos el volumen del cono total; después, el del deficiente, y restemos un volumen de otro.

Área de un poliedro regular. — Se halla el área de una cara, y se multiplica por el número de las que tenga.

Volumen de un poliedro regular. — Multiplíquese su área por el tercio de su apotema.

Área de una esfera. — Multiplicando el área de su círculo máximo por 4.

Volumen de una esfera. — Multiplíquese el área de ella por el tercio del radio.

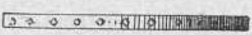
APLICACIONES

PRELIMINARES

Un duro visto de frente

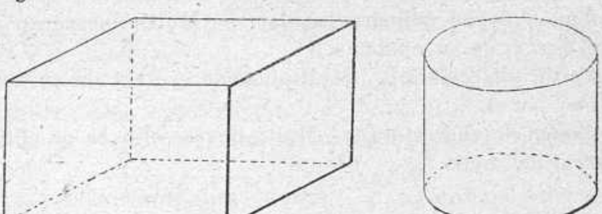
1. Los cuerpos geométricos *no se dibujan como son, sino como aparecen a la vista.* Un duro *siempre es redondo;* pero, puesto encima de la mesa, *parece una elipse,* y, visto de canto, *figura una línea.*

Un duro visto en escorzo



Un duro visto de canto

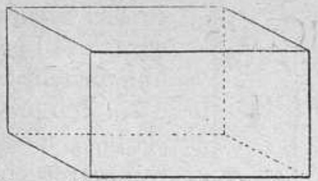
2. A los cuerpos *siempre les da luz.* Las aristas *que reciben más luz* se dibujan *delgadas;* las otras, *más gruesas.*



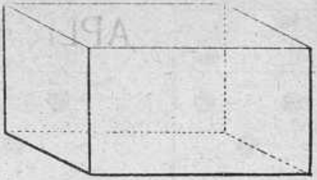
Las aristas delgadas son las que se supone que reciben más luz

3. La luz *puede alumbrar* a los cuerpos *desde cualquier parte;* pero, para los efectos del dibujo, la *más*

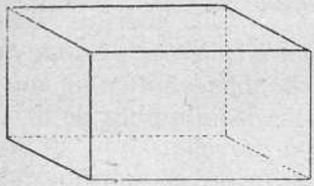
conveniente, es la que se supone que los alumbra de *arriba abajo,* un poco de *izquierda a derecha.*



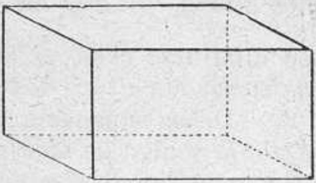
Cuerpo iluminado de arriba abajo por luz incinada



Cuerpo iluminado de arriba abajo por luz vertical

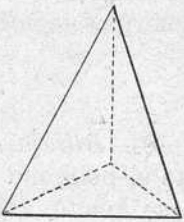


Cuerpo iluminado de abajo arriba por luz inclinada



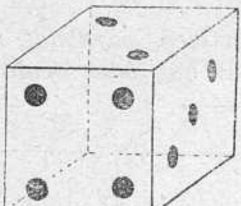
Cuerpo iluminado de abajo arriba por luz perpendicular

4. Las aristas que están *detrás* del cuerpo, *no se ven;* pero, si se quitaran, el dibujo no daría idea del cuerpo. *Supongamos* que los cuerpos *son de cristal,* y *tracemos de puntos* las aristas *ocultas* para que *parezcan veladas.*

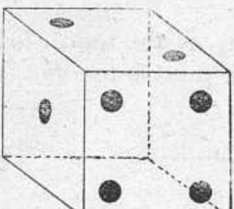


Las líneas de puntos son las que se nos presentan ocultas

5. Según *donde te coloques* para mirar, *así verás el cuerpo.* Le verás *la cara o la cruz.* Mira un mismo dado visto *desde la derecha* y *desde la izquierda:*

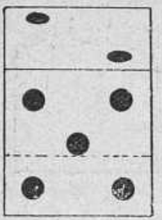


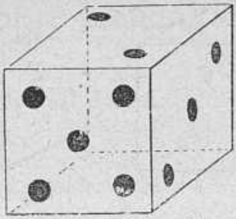
Dado visto desde la derecha



Dado visto desde la izquierda

6. No conviene dibujar los cuerpos como aparecen *si se miran de frente*, porque *se ocultan aristas y se ven menos caras*. Mira una prueba:


Un dado visto de frente


El mismo dado visto desde la derecha

7. Ten presente, pues, estas tres cosas:

1.ª Que los cuerpos deben dibujarse *como si los vieras puestos encima de una mesa, a la altura de tu pecho y puesto tú a un lado.*

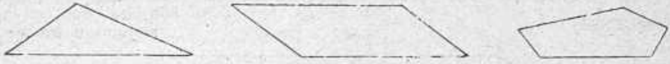
2.ª Debes suponer que la luz los alumbra de *arriba abajo* y algo de *izquierda a derecha.*

3.ª Que las aristas que *ven la luz se dibujan delgadas;* las que *no la ven, gruesas,* y las *ocultas,* de *puntos.*

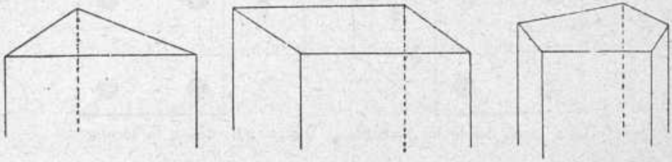
Recordando esto, es muy fácil dibujar todos los cuerpos geométricos. Mira cómo:

PRISMAS

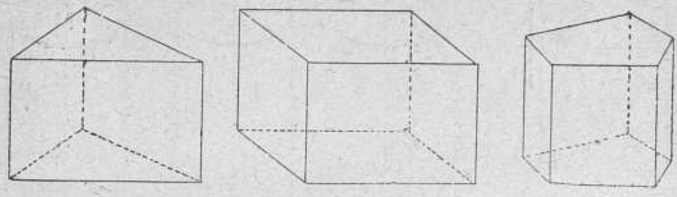
8. *Dibujar un prisma recto cualquiera.* — Trázate el polígono de la base de encima, pero *más ancho que hondo,* así:



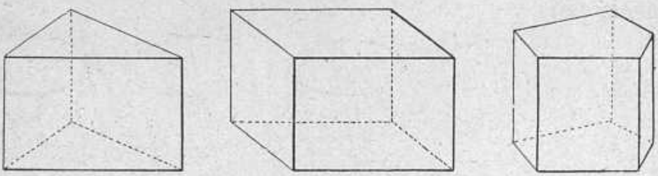
Baja, desde todos los vértices, *paralelas iguales,* pero *de puntos las que tengan que estar ocultas;* así:



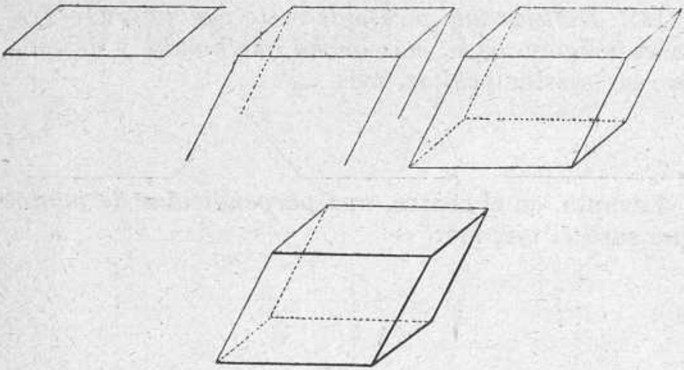
Une los extremos de dichas paralelas, pero de *puntos* las aristas que figuran *estar detrás*, de este modo:



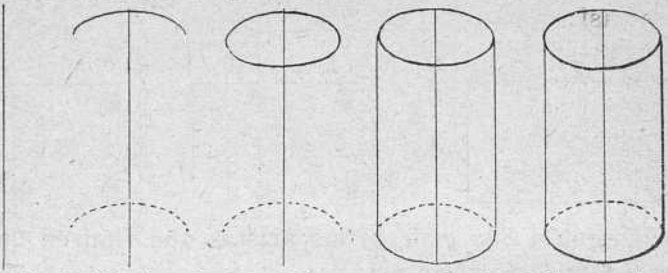
Después, *haz gruesas* las aristas que figuren que *están en la sombra*, así:



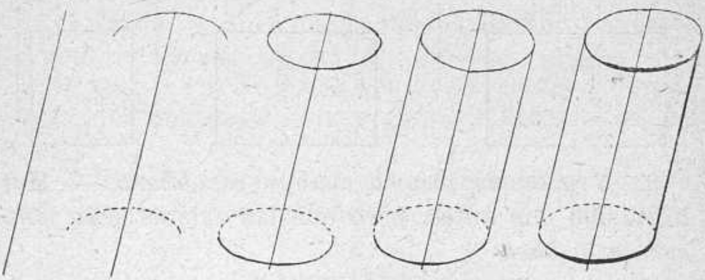
9. *Trazar un prisma cualquiera oblicuo.* — Haz lo mismo que antes, pero que las aristas sean *oblicuas a la base:*



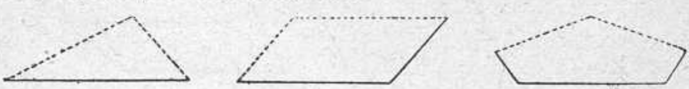
10. *Trazar o dibujar un cilindro.* — Observa cómo se va haciendo poco a poco:



Si el cilindro fuera oblicuo, pon el eje oblicuo a las bases, así:

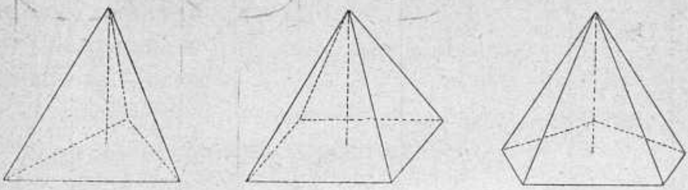


11. *Dibujar una pirámide recta cualquiera.*—Traza el polígono base, *más ancho que hondo*, y *de puntos*, las aristas *ocultas*, así:

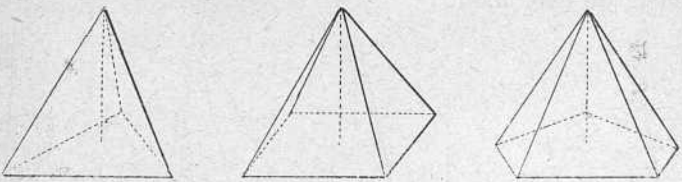


Levanta, en el centro, *una perpendicular de puntos* que será *el eje*, así:

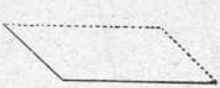
Une, después, *el extremo del eje con todos los vértices del polígono, poniendo de puntos* las líneas ocultas; así:

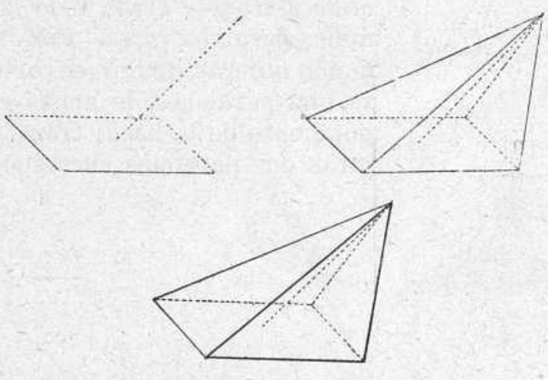


Y, por último, *traza gruesas las aristas de sombra,* de este modo:

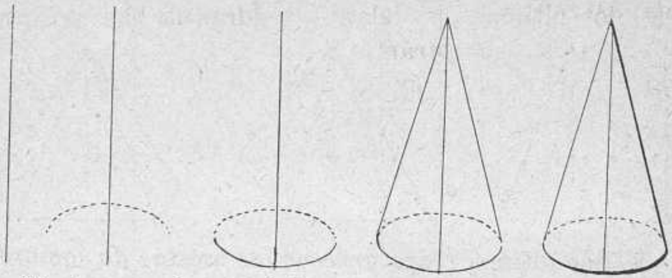


12. *Trazar una pirámide oblicua cualquiera.* — Haz lo mismo que antes, pero que *el eje sea oblicuo a la base.* Repara cómo:

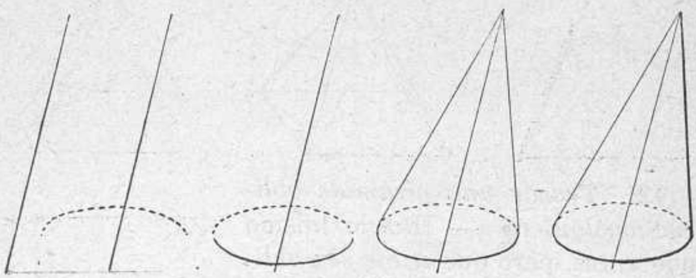


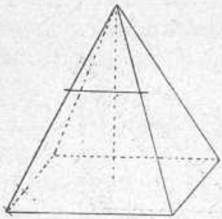


13. *Dibujar un cono recto.* — Mira cómo se ha ido haciendo poco a poco:

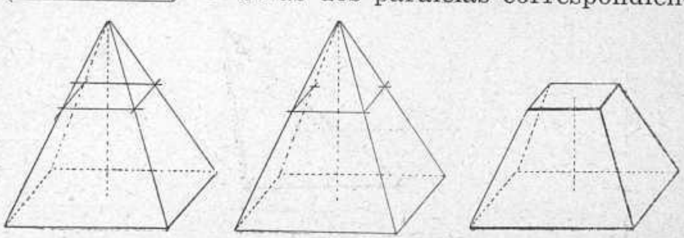


Si el cono fuera oblicuo, pon el eje oblicuo a la base, de este modo:





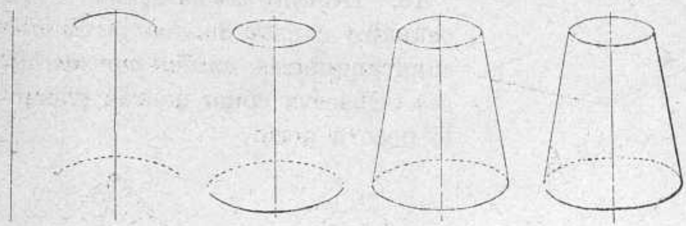
14. *Dibujar un tronco de pirámide recto.* — Traza toda la pirámide, *pero con lápiz.* Por la cara donde quieras dirigir el corte, traza una paralela a la arista correspondiente de la base; traza, luego, otras dos paralelas correspondien-



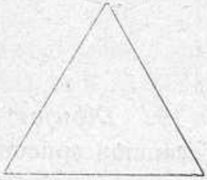
tes, respectivamente, a cada una de las dos aristas de la base contiguas a la primera. Une los extremos de estas dos últimas paralelas, y tendrás la base superior del tronco de pirámide.

Si el tronco de pirámide fuera oblicuo, pon el eje oblicuo a la base.

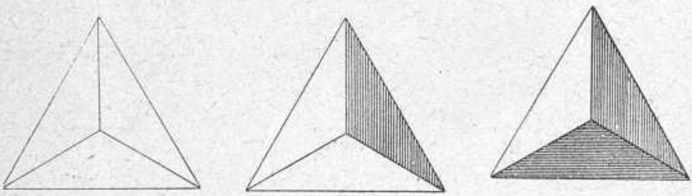
15. *Dibujar un tronco de cono recto.* — Repara cómo se ha ido haciendo poco a poco:



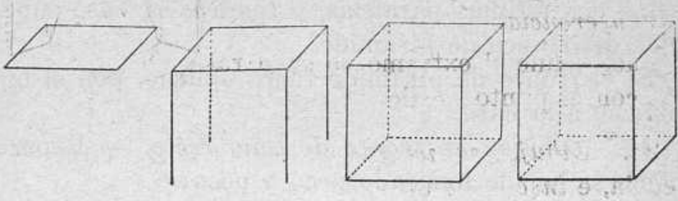
Cuando el cono truncado sea oblicuo, haz lo mismo, pero poniendo el eje oblicuo.

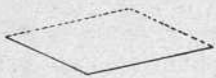


16. *Dibujar un tetraedro.*—Traza un triángulo equilátero; ponle los radios oblicuos; dibuja una de las partes con rayitas *de arriba a abajo* y otra parte, con rayas de *derecha a izquierda.*

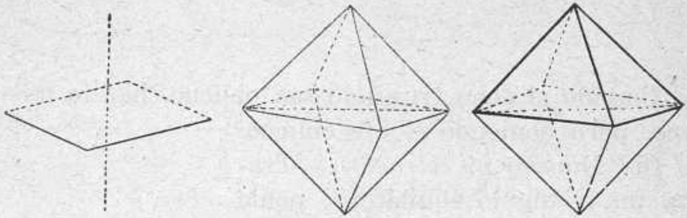


17. *Dibujar un exaedro.* — El cubo es un prisma de caras iguales; mira cómo se hace:

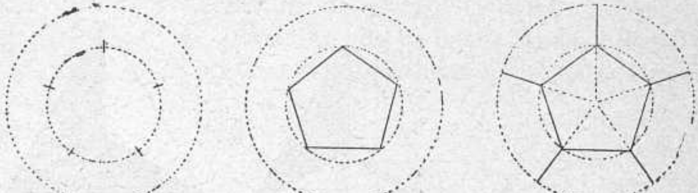




18. *Dibujar un octaedro.* — El octaedro consta de *dos pirámides* cuadrangulares, *unidas por sus bases.* Observa cómo podrás trazarlo poco a poco.



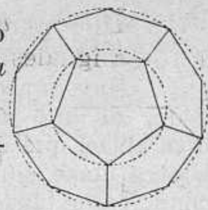
19. *Dibujar un dodecaedro.* — Traza dos circunferencias concéntricas y divide la *interior, tanteando,* en *cinco* partes *iguales,* así:



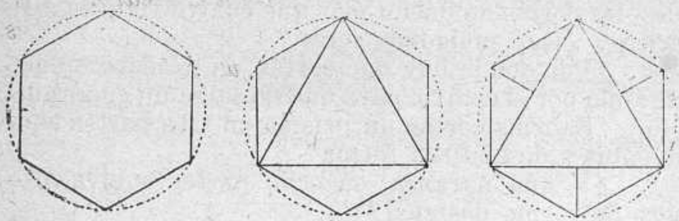
Traza un pentágono en la interior.

Traza los *radios oblicuos* de dicho pentágono, *prolongadas hasta la otra circunferencia.*

Luego, une el extremo de cada radio con el punto medio del arco.



20. *Dibujar un icosaedro.* — Traza una circunferencia, e *inscríbele* un *exágono regular,* así;

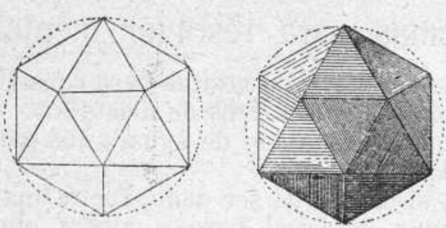


Une los seis vértices de dos en dos.

Levanta perpendiculares en los puntos medios del triángulo equilátero.

Une, después, *los pies de dichas perpendiculares.*

Sombrea, por último, si así lo deseas, con rayitas, como ves en la última figura.



INVENTIVA

1. Hay una clase de triángulos que, girando alrededor de uno de sus lados, engendrarían un cono; otra clase, que engendrarían un cono más otro cono, y otra clase, que engendrarían un cono menos otro cono. ¿Qué clase de triángulos son cada uno?

2. Haz girar un rombo o romboide alrededor de uno de sus lados, y dime qué cuerpos engendrarán.

3. Cortando un cilindro de todos los modos posibles, los cortes no darán más que cuatro figuras diferentes: ¿Qué polígonos serán?

4. ¿Por dónde hay que cortar un exaedro o cubo, pasando por el centro, para que no salga un cuadrado?

5. ¿Sabrías cortar un prisma en tres partes equivalentes y de distinta forma?

6. ¿Y una naranja, en ocho partes equivalentes pero de forma desigual?

7. ¿Qué le falta o qué le sobra:

1.º A un prisma para ser pirámide;
2.º A una pirámide para ser prisma;
3.º A un prisma para ser cilindro;
4.º A una pirámide para ser cono;
5.º A una pirámide truncada para ser tronco de cono;
6.º A un poliedro para ser esfera?

Problemas para resolver mentalmente

8. ¿Cuánto cartón necesitas para construír un dado que tenga 6 centímetros de arista?

9. Llenando ese dado de agua, ¿qué cantidad cabría en él?

10. Y, si en vez de ser dado, fuera una pirámide cuadrangular de igual base y altura que el lado, ¿cuánta agua contendría?

11. Un cuadradillo de rayar papel tiene 20 centímetros de largo y 1 cm. de ancho; ¿qué volumen ocupa?

Suponte que, para hallar la longitud de una circunferencia, hay que multiplicar el diámetro por 3 y no por 3'14, y dime ahora:

12. Un bollo cilíndrico de chocolate, tiene 6 centímetros de largo y 2 de diámetro: ¿cuánto chocolate hay en él?

13. Suponte que el bollo anterior está forrado con papel de plomo: ¿cuánto papel entra en dicho forro?

14. Un clown ha llenado de agua su sombrero de forma de embudo. Tiene el sombrero 10 centímetros de alto y 5 de radio de boca: ¿cuánta agua ha necesitado?

15. Una botella representa un cilindro y un cono encima. Toma una cualquiera, mídela y dime cuánta agua cabe en ella.

16. Las bolas de queso van forradas, generalmente, de papel de estaño. Supone que una es 10 centímetros de alta, y dime cuánto papel y cuánto queso contiene.

17. El trompo con que juegas, está formado por dos cuerpos geométricos que pueden compararse a una semiesfera más un cono. Toma las medidas que necesites y dime la madera que el trompo contiene.

18. Coge, entera, la cáscara de media naranja, y dime cuánta agua cabría en ella y qué extensión tiene la piel.

19. Mide el radio y el grueso de un duro, y dime qué volumen dará una pila de 20 duros.

20. Tu tintero es un tronco de cono. Yo quiero saber la tinta que cabe en él. Necesitas conocer la altura del cono total. Vuélvelo boca abajo, discurre y hallarás el medio.

PROBLEMAS ARITMÉTICO-GEOMÉTRICOS (1)

1. ¿Cuántos grados mide el arco quinta parte de la circunferencia? ¿Y los arcos tercera, sexta, novena y dozava parte de la misma? — Resultado: *1.º, 72 grados; 2.º, 120 grados; 3.º, 60 grados; 4.º, 40 grados,* y *5.º, 30 grados.*

2. ¿Cuántos metros de longitud corresponden a 1 grado de meridiano terrestre? ¿Y a un arco de meridiano de 45 grados? ¿Y a un arco de 60 grados? — Resultado: *1.º, 111,111'111 m.; 2.º, 4.999,999'995 m.; 3.º 6.666,666'666 m.*

3. Determínese el área de un triángulo cuya base mide 28 metros, siendo la longitud de su altura 9'45 m.—R. *132'30 m.²*

4. Se ha comprado un terreno de forma triangular a razón de 273'50 pesetas el área. La longitud de uno de los lados del polígono que afecta el terreno mencionado es 245 metros, midiendo 380 metros la distancia entre dicho lado y el vértice del ángulo opuesto. ¿Cuánto ha entregado el comprador? — R, *127,314'25 pesetas.*

5. El área de un triángulo es 720 m.², siendo 48 metros la longitud de la base. ¿Qué altura tiene? — R. *30 metros.*

6. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden, respectivamente, 0'60 y 0'95 metros. Determínese la longitud de la hipotenusa. — R. *1'123 metros.*

7. La hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo miden, respectivamente, 23'30 y 12 metros. ¿Qué longitud tiene el otro cateto? — R. *19'97 m.*

8. La diagonal de un cuadrado tiene 0'40 metros de longitud. Hállese la longitud del lado. — R. *28'28 centímetros.*

9. La base de un rectángulo mide 5 metros, y su diagonal, 6 metros. ¿Cuánto mide su altura? — R. *3'31 metros.*

10. La base y el lado contiguo de un triángulo isósceles tienen, respectivamente, de longitud, 0'42 metros y 0'80 metros. Determínese el área. — R. *0'1617 m.²*

11. Se ha vendido un solar de forma cuadrada, a razón de

---

(1) Para las soluciones razonadas de estos problemas, véase nuestro libro **Soluciones Analíticas**, *Problemas Aritmético-geométricos.*

0'25 pesetas el decímetro cuadrado. El lado de dicho cuadrado mide 20'35 metros. ¿Cuánto ha entregado el comprador? — R. *10,353'06 pesetas.*

12. El área de un terreno, cuya figura es un cuadrado, es 20 decámetros cuadrados, 70 m.^{2} y 25 dm.^{2} ¿Qué longitud tiene el lado? — R. *45'50 m.*

13. La diagonal de un cuadrado tiene 8 metros de longitud. ¿Cuál es su área? — R. *32 m.*^{2}

14. Hay que enladrillar un salón de forma rectangular que mide 20'40 metros de largo por 14'75 metros de ancho, empleando ladrillos de 0'30 metros de largo por 0'20 metros de ancho. ¿Cuántos ladrillos se necesitarán? — R. *5,015 ladrillos.*

15. El área y la base de un romboide son, respectivamente, 3,200 m.^{2} y 80 metros. ¿Qué altura tiene? — R. *40 metros.*

16. Hay que enladrillar, con ladrillos cuadrados de 1 decímetro de lado, un salón de forma rombal cuyas diagonales son, respectivamente, 7'20 y 4'50 metros. ¿Cuántos ladrillos se necesitarán? — R. *1,620 ladrillos.*

17. Determínese el área de un triángulo equilátero cuyo lado mide 60 cm. — R. *1,558'80 cm.*^{2}

18. Los lados paralelos de un trapecio miden, respectivamente, 0'20 metros y 0'84 metros. Determínese el área de dicha figura, siendo 0'52 m. la distancia entre dichos lados. — Resultado: *27 dm.*^{2}, *4 cm.*^{2}

19. El área de un triángulo equilátero es 173'20 cm.^{2} Siendo 17'32 cm. su altura, ¿cuánto mide el lado? — R. *20 cm.*

20. Siendo 0'58 metros la longitud del radio, determínese cuánto mide la circunferencia correspondiente. — R. *3'644 m.*

21. El radio de la rueda de un coche mide 0'80 m. Averígüese la distancia recorrida por el vehículo, después de haber dado la rueda 1,250 revoluciones. — R. *6,282'50 metros.*

22. Siendo 6'40 m. la longitud de una circunferencia, hállese cuánto mide su diámetro. — R. *2'036 metros.*

23. Cada vez que la rueda de un carruaje da una vuelta completa, el vehículo recorre 5'126 metros. ¿Qué longitud tiene el radio de la rueda mencionada? — R. *0'815 metros.*

24. Determínese la cantidad de paño empleado en la confección de un tapete cuyo perímetro es un octógono regular, siendo 0'38 m. la longitud del lado y 0'917 m. la distancia entre dos lados paralelos. — R. *69 dm.*^{2}, *69 cm.*^{2}, *20 mm.*^{2} *de paño.*

25. El área de un dodecágono regular es 1'7904 m.^{2} midiendo el lado 0'40 m. ¿Qué longitud tiene su apotema? — Razón: *0'746 m.*

26. Un tablero de forma pentagonal regular tiene 1'305 m.^{2}

de área. ¿Cuánto medirá el lado, si su apotema tiene 0'60 m. de longitud? — R. *0'87 m.*

27. Determínese el área de un círculo cuyo radio mide 1'25 metros. — R. *4'90875 m.*^{2}

28. La pista de un circo ecuestre tiene de diámetro 20 metros, 30 cm. ¿Cuál es su área? — R. *323'655486 m.*^{2}

29. Se sabe que el área de un círculo es 28 m.^{2}, 27 dm.^{2}, y 44 cm.^{2}. ¿Cuánto mide su radio? — R. *3 metros.*

30. La superficie de una mesa de forma circular mide 4'523904 m.^{2} Hállese su diámetro. — R. *2'40 m.*

31. Los radios de dos circunferencias concéntricas son, respectivamente, 0'40 y 0'65 m. ¿Qué área tiene la corona circular correspondiente? — R. *0'824670 m.*^{2}

32. La pista de un velódromo circular tiene 12 metros de anchura, y el límite exterior de la misma dista 42 metros del centro del velódromo. Hállese el área de la pista mencionada. — R. *2,714'3424 m.*^{2}

33. Un terreno que afecta la forma de un polígono irregular, se ha descompuesto en 4 triángulos, 2 trapecios y 1 rectángulo. Determínese su área, teniendo los polígonos componentes las siguientes dimensiones: primer triángulo, 8 m. de base y 10 m. de altura; 2.° triángulo, 6 m. de base y 10 m. de altura; tercer triángulo, 16 m. de base y 7 m. de altura; 4.° triángulo, 14 m. de base y 5 m. de altura; primer trapecio: base menor, 20 m.; base mayor, 32 m., y altura, 10 m.; 2.° trapecio: base menor, 9 m.; base mayor 16'40 m., y altura, 8 m.; rectángulo: 25'50 m. de base y 5 m. de altura. — Razón: *6 a, 50 ca. y 10 dm.*^{2}

34. El radio de un sector es 0'80 m., y su arco mide 52°. ¿Qué área tiene? — R. *29 dm.*^{2}, *4 cm.*^{2}

35. Determínese el área de un sector de 120°, cuyo radio tiene 1'20 m. de longitud. — R. *1 m.*^{2}, *50 dm.*^{2} *y 79 cm.*^{2}

36. Un sector de 80 grados tiene 1'0053 metros cuadrados de área. Averigüese el área y el radio del círculo correspondiente. — R. *1.°, 4'523850 m.*^{2}*; 2.°, 1'20 m.*

37. Siendo 2'984547 m.^{2} el área de un sector cuyo radio mide 3 m., ¿cuántos grados tiene su arco? — R. *38 grados.*

38. En un círculo cuyo diámetro mide 1'30 m., hay un segmento cuyo arco tiene 88°. ¿Qué área tendrá dicho segmento, siendo la longitud de la cuerda 0'903 m. y 0'183 m. la de la sagita? — R. *0'113607 m.*^{2}

39. El lado de un cubo mide 1'48 m. ¿Qué área tiene dicho cuerpo? — R. *13'1424 m.*^{2}

40. El área de un cubo o exaedro es 37 m.^{2} Hállese la longitud de la arista. — R. *2'48 m.*

41. Hállese el área de un icosaedro cuyo lado mide 0'40 metros, siendo 0'35 m. la altura de sus triángulos. — R. *1'40 m.*^{2}

42. Determínese el área de un dodecaedro cuyas caras tienen 0'60 m. de lado, midiendo su apotema 0'41 m. — Razón: *7'38 m.*^{2}

43. Determínese el área total de un prisma pentagonal regular, cuyas dimensiones son las siguientes: altura de sus aristas, 1'40 m.; lado de la base, 0'25 m.; apotema, 0'172 m. — R. *1 m.*^{2}, *96 dm.*^{2}, *50 cm.*^{2}

44. ¿Qué cantidad de terciopelo se necesitará para cubrir una columna prismática octogonal regular, siendo 2'40 m. la altura de sus caras y 0'40 m. la longitud del lado de la base? — R. *7 m.*^{2} *y 68 dm.*^{2}

45. El área lateral de una columna prismática exagonal regular es 8'64 m.^{2}, siendo 0'30 m. el lado del polígono de la base. Hállese la altura. — R. *4'80 m.*

46. Para cubrir la hoja de lata las caras laterales de un depósito de madera que afecta la forma de un paralelepípedo cuadrangular regular, se han necesitado 5'3760 m.^{2} de hoja de lata. Siendo 2'24 m. la altura de dicho depósito, ¿cuál es la longitud del lado de la base? — R. *0'60 m.*

47. ¿Cuántos metros de papel de 0'60 m. de ancho se necesitan para empapelar las paredes de una sala cuadrada, de 8'40 metros de lado por 5'25 m. de altura? — R. *294 metros de papel.*

48. Si el salón que se menciona en el problema anterior tuviese una puerta de 3 m. de altura por 1'25 m. de ancho, y una ventana de 1'80 m. de altura por 0'90 m. de ancho, ¿cuántos metros del citado papel se necesitarían? — R. *285'05 metros de papel.*

49. Hállese el área total de una pirámide cuadrangular regular, siendo 0'90 m. la altura de sus triángulos y 0'27 m. la longitud del lado de la base. — *55 dm.*^{2} *y 89 cm.*^{2}

50. Se quiere cubrir con azulejos cuadrados, de color, de 0'08 metros de lado, el tejadillo de una torre mirador. Dicho tejadillo afecta la forma piramidal, y su base es un exágono regular cuyo lado mide 0'70 m. Siendo 2'40 m. la altura de las caras, ¿cuántos azulejos se necesitarán? — R. *788 azulejos.*

FIN

INDICE

PRIMERA PARTE

LONGIMETRÍA

SEGUNDA PARTE

PLANIMETRÍA

TERCERA PARTE

ESTEREOMETRÍA

DALMAU CARLES, PLA, S. A.—EDITORES
GERONA

JUAN B. PUIG

GEOMETRÍA.—G.° Elemtal