ORIO Y RUBIO

LIBRO DE PROBLEMAS

PRIMERA PARTE

A la Excma. Diputación provincial de Palencia, en testimonio de profundo respeto y distinguida consideración,

El Autor

LIBRO DE PROBLEMAS

LIBRO DE PROBLEMAS

aritméticos, algebraicos y geométricos,

ordenados y razonada y detalladamente resueltos

POR

DON MILLAN ORIO Y RUBIO,

Director de la Escuela Normal de Maestros

DE

PALENCIA

Parte primera

Problemas aritméticos y algebraicos

PALENCIA:
Imp. y Lib. de Abundio Z. Menéndez
Mayor pral., 70.

PROLOGO

Con la publicación de este LIBRO DE PROBLEMAS nos hemos propuesto: 1.º, dar á los opositores á escuelas la norma de cómo debe hacerse, *á nuestro entender*, la resolución razonada del problema que se dicta en los actos de oposiciones; 2.º, proporcionar á nuestros comprofesores, y singularmente á los recién salidos de las Escuelas Normales, un medio eficaz de imprimir carácter de permanencia á los conocimientos teóricos matemáticos que adquirieron durante la carrera; conocimientos que, en especial los algebraicos y geométricos, suelen debilitarse y áun olvidarse muy pronto por falta de los convenientes ejercicios prácticos; y 3.º, conseguir que los Sres. Maestros y aspirantes á serlo que se dediquen á resolver nuestra vasta serie de problemas, ó á estudiar su ya hecha resolución, adquieran soltura en la práctica material de las operaciones del cálculo y flexibilidad de raciocinio para investigar, deducir y connotar las relaciones que en ellos, como en otros cualesquiera, ligan á los datos con la incógnita ó incógnitas. A la realización de este último doble fin obedece la idea de haber resuelto de diferentes maneras (algunos, hasta de 6) aquellos problemas que á tal variedad de resoluciones se prestaban.

Para facilitar la adquisición de la Obra, la hemos dividido en dos partes, formando volúmenes distintos, que muy bien podrán encuadernarse en uno solo. La parte 1.ª comprende

230 variados problemas aritméticos y algebraicos, enlazados entre sí los de cada clase de modo que forman verdadera cadena, y combinados unos con otros los de las dos clases de manera que, sin menoscabo de la unidad, resulte la variedad que tánto deleita y tan plácido reposo proporciona al ánimo fatigado. Únicamente hemos prescindido de esta alternativa de problemas en aquellas series, ya de los aritméticos, ya de los algebraicos, que, por referirse á un mismo orden de conocimientos, exigen imperiosamente que se mantenga concentrada en ellos la atención.—La 2.ª parte consta de 235 problemas geométricos, perfectamente eslabonados de menor á mayor dificultad y acompañados de figuras gráficas aquéllos que las reclaman para la mejor inteligencia de su resolución.

Tánto los problemas de la 1.ª parte como los de la 2.ª van seguidos de profusión de notas y de citas que ilustran sobremanera el asunto á que se refieren.

En resumen, el *Libro de Problemas* que hoy ofrecemos á nuestros comprofesores, dada su particular contextura, es un verdadero tratado teorico-práctico, y más práctico que teórico, de Aritmética, Algebra y Geometría: viene á ser *la Aritmética, el Algebra y la Geometría elementales, en problemas.*

A pesar del esmero puesto para lograrlo, no abrigamos en manera alguna la necia presunción de que esta nuestra nueva Obra sea un trabajo perfecto; por el contrario, la consideramos susceptible de provechosas reformas, que iremos estudiando é introduciremos en tiradas ulteriores. Por supuesto que, como diría el famoso Espronceda,

esto, carísimo lector, se entiende,
si el Libro gusta y la edición se vende;

que, en otro caso, la presente tirada será la primera y también la última; pues, á decir verdad, no estamos por ni para *tirar* libros.

Millán Orío.

LIBRO DE PROBLEMAS

ARITMÉTICOS, ALGEBRAICOS Y GEOMÈTRICOS.

PARTE PRIMERA

Problemas aritméticos y algebraicos.

PROBLEMA 1.º

Un padre, al morir, benefició al menor de sus hijos con el quinto y tercio del capital que dejaba, consistente en 180.000 pesetas; por cuya razón, este hijo percibió en total 112.800 pesetas. ¿Cuántos eran los otros hermanos y cuánto percibió cada uno de ellos?

Resolución.

Es evidente que, si del capital total se restan su quinto y su tercio, el resto será la cantidad distribuida á partes iguales entre los hijos del testador. Igualmente es palmario que, si de la herencia total del hijo menor se deducen dichos quinto y tercio, el resto expresará la cantidad que este hijo percibió, igual á la percibida por cada uno de sus hermanos. Luego, si se divide el 1.^{er} resto por el 2.º, el cociente será el número de herederos. Tendremos, pues,

Capital total.		180.000 pts.
Quinto de íd.. . . .	36.000	96.000 »
Tercio de íd.	60.000	
Resto.		84.000 »
Herencia total del hijo menor. .		112.800 »
Quinto y tercio del capital total. .		96.000 »
Resto. . . .		16.800 »

84.000 : 16.800 = 5, número de hijos del testador.

Resulta, pues, que el hijo menor tenía 4 hermanos y que cada uno de éstos heredó 16.800 pesetas.

PROBLEMA 2.º

En un corral hay 43 animales domésticos, de los cuales parte son gallinas y parte conejos: entre todos ellos suman 122 patas. ¿Cuántos de los citados 43 animales son conejos y cuántos son gallinas?

Resoluciones.

1.ª– Sea X el número de conejos: el de gallinas será 43 — X. El número de patas de los primeros será 4 X y el de íd. de las segundas (43 — X) × 2. Luego la ecuación será

$$4\ X + (43 - X) \times 2 = 122.$$

Resolviendo el paréntesis, se tendrá

$$4\ X + 86 - 2\ X = 122;$$

y, transponiendo el término 86 y reduciendo los semejantes, resultará 2 X = 36;

$x+y=43$ $\}$ x gall.
$2x+4y=122$ $\}$ y conej.

de donde

$$X = \frac{36}{2} = 18 \text{ conejos,}$$

Luego las gallinas serán 43 — 18 = 25.

2.ª—Como cada conejo tiene 4 patas y cada gallina sólo tiene 2, si suponemos que los 43 animales domésticos sean todos conejos, al calcular el número de sus patas resultará que cada gallina, convertida por la suposición en conejo, producirá 2 patas de aumento: luego cada 2 patas de aumento representan 1 gallina. En el supuesto de que los 43 animales sean conejos, éstos sumarán 4 × 43 = 172 patas; y, como, según el enunciado, éstas no son más que 122, resulta un aumento de patas de 172 — 122 = 50. Luego 50 : 2 = 25 es el número de gallinas : luego el de conejos será 43 — 25 = 18

3.ª—De igual manera, si suponemos que los 43 animales son gallinas, al calcular el número de sus patas, resultará que cada conejo, convertido por la suposición en gallina, producirá 2 patas de menos: luego cada 2 patas que resulten de menos representarán 1 conejo. Siendo gallinas los 43 animales, suman 2 × 43 = 86 patas; y, como se nos dice que éstas son 122, hay un defecto de 122 — 86 = 36. Luego 36 : 2 = 18 es el número de conejos: luego el de gallinás será 43 — 18 = 25.

4.ª—Si suponemos que las 122 patas citadas en el enunciado son de conejo, al calcular el número de conejos que representan, resultará que cada 4 patas de gallina, *que representan 2 gallinas*, convertidas por la suposición en patas de conejo, representan 1 solo conejo: representan, pués, un animal de menos: luego por cada animal que resulte de menos tendremos 2 gallinas. Consideremos, pues, como de conejo las 122 patas. Estas representarán 122 : 4 = 30'5 conejos; mas, como, según el enunciado, los animales son 43, resulta una diferencia, *por defecto,* de 43 — 30'5 = 12'5 animales. Luego, según lo expuesto, 12'5 × 2 = 25 es el número de gallinas.

5.ª—Si suponemos que las mencionadas 122 patas sean de gallina, cada 4 patas de conejo, *que representan 1 solo conejo*, convertidas por la suposición en patas de gallina, representan 2 gallinas: representan, pues, 1 animal de más. Luego por cada animal que resulte de más, tendremos 1 conejo. En el supuesto hecho de que las 122 patas sean de gallina, representan 122 : 2 = 61 gallinas; mas, como los animales del problema no son más que 43, resulta un exceso de 61 — 43 = 18 animales. Luego, según el razonamiento hecho, este número 18 es el de conejos.

NOTA: Este problema puede resolverse algebraicamente por medio de dos incognitas; mas, como el valor de una de ellas se deduce inmediatamente del valor de la otra, es preferible, en honor á la sencillez, servirse de una sola incógnita. Así lo haremos también en adelante.

PROBLEMA 3.º

Un despacho telegráfico transmitido desde Manila á las 2 de la mañana del día 1.º de Enero de 1894 se recibió en Madrid á las 11 ½ de la noche del día 31 de Diciembre de 1893. ¿Cuánto tiempo medió entre la transmisión y la recepción del referido despacho, teniendo presente que Manila cuenta 125 grados de longitud oriental con relación á Madrid?

Resolución.

El problema quedará resuelto en el momento en que determinemos la hora que era en Manila cuando se recibió el despacho en Madrid, ó la que era en Madrid cuando se transmitió desde Manila. Al efecto consideraremos que cada 15 grados de longitud geográfica representan 1 hora de diferencia en la medida del tiempo (1), hora que será adelantada para Manila por hallarse esta población al Este de Madrid. Ahora, si cada 15 grados representan 1 hora, los 125 grados representarán 125 : 15 = 8'33.... horas = 8 horas y 2 minutos. Luego, cuando en Madrid al recibirse el despacho eran las 11 $^1/_2$ = 11 horas y 30 minutos de la noche del 31 de Diciembre de 1893, en Manila eran 8 horas y 2 minutos más tarde: serían, pues, las 7 y 32 minutos de la mañana del 1.° de Enero de 1894; y, como dicho despacho había sido transmitido á las 2 de la mañana, resulta que entre la transmisión y la recepción mediaron 5 horas y 32 minutos.

Igualmente podía decirse: cuando en Manila al transmitirse el despacho eran las 2 de la mañana del 1.° de Enero de 1894, en Madrid eran 8 horas y 2 minutos menos : eran. pues, las 5 y 58 minutos de la noche del 31 de Diciembre inmediato anterior; y, como el referido despacho se recibió á las 11 $^1/_2$ de la misma noche, resulta que entre su transmisión y recepción mediaron 11 horas y 30 minutos, menos 5 horas y 58 minutos = 5 horas y 32 minutos.

---

(1) Claro está que esta hora de diferencia es el tiempo que el sol tarda en recorrer 15 grados en su movimiento *aparente* de revolución en torno de la tierra, de E. á O.; ó bien, el que en su movimiento *real y efectivo* de rotación de O. á *E* emplea la tierra en poner bajo el sol dos meridianos que distan entre sí 15 grados.

PROBLEMA 4.º

Una mujer compró 16 gallinas á cierto precio: si éste hubiese sido 2 reales menos, la mujer hubiera comprado 5 gallinas más y áun le hubieran sobrado 2 reales. ¿De qué dinero disponía la compradora?

Resoluciones.

1.ª—Sea x los reales de que la compradora disponía. El precio de las 16 gallinas compradas será $\frac{x}{16}$. Ahora, como según el enunciado, si este precio hubiera sido 2 reales menos, es decir, $\frac{x}{16} - 2$, la mujer hubiese comprado 5 gallinas más; esto es, $16 + 5 = 21$, y áun le hubieran sobrado 2 reales, la ecuación será

$$\left(\frac{x}{16} - 2\right) \times 21 + 2 = x.$$

Resolviendo el paréntesis, se tendrá

$$\frac{21\ x}{16} - 42 + 2 = x;$$

y, quitando el denominador, resultará

$$21\ x - 672 + 32 = 16\ x;$$

y, haciendo la transposición de términos y la reducción de los semejantes, será

$$5\ x = 640;$$

de donde

$$x = \frac{640}{5} = 128.$$

Resulta que la compradora disponía de 128 reales.

2.ª—Si las 16 gallinas compradas le hubiesen costado á 2 reales menos, la mujer se hubiese economizado 32 reales; y, como con estos 32 reales, menos los dos que le hubieran sobrado, esto es, con 30 de estos reales habría comprado otras 5 gallinas, resulta que el precio de estas 5 gallinas hubiera sido 30 : 5 = 6 reales. Luego el precio de las 16 gallinas fué 6 + 2 = 8 reales. Luego importaron 8 × 16 = 128 reales. Luego éste es el dinero de que la compradora disponía.

PROBLEMA 5.º

Un telegrama expedido desde Barcelona á Colombo (capital de la isla de Ceilán) **á las 7 de la tarde del día 30 de Abril de 1893 tardó en llegar á su destino 4 ½ horas. ¿Cuál sería la en que el telegrama se recibió en Colombo, sabiendo que esta población cuenta 78 grados y 10 minutos de longitud Este con relación á Barcelona?** Esteban

Resolución.

Si el telegrama se expidió en Barcelona á las 7 de la tarde del 30 de Abril y tardó en llegar á Colombo 4 ¹/₂ horas, llegaría cuando en Barcelona eran las 11 ¹/₂ de la noche del citado día. Ahora, como entre Colombo y Barcelona media una longitud geográfica de 78 grados y 10 minutos = 78‘17 grados y cada 15 grados representan 1 hora de diferencia en la medida del tiempo, el número de horas de diferencia será 78‘17 : 15 = 5 horas, 12 minutos y 38 segundos, que son adelantados para Colombo por encontrarse esta población al E. de Barcelona, y atrasados para Barcelona por hallarse Barcelona al O. de Colombo. Resulta, pues, que, cuando en Barcelona, al recibirse el telegrama en Colombo, eran, las 11 ¹/₂ de la noche del 30 de Abril, en Colombo hacía ya 5 horas, 12 minutos y 38 segundos que habían sido: eran, pues, las 4, 42 minutos y 38 segundos de la mañana del día 1.º de Mayo inmediato.

Lo mismo puede decirse: cuando en Barcelona, al expedir el telegrama, eran las 7 de la tarde del 30 de Abril, en Colombo, por lo antes dicho, eran 5 horas, 12 minutos y 38 segundos más tarde: eran, pues, las 12, 12 minutos y 38 segundos de la noche del día 30 de Abril al 1.º de Mayo; y, como desde la expedición hasta la recepción del telegrama pasaron 4 $^1/_2$ horas = 4 horas y 30 minutos, resulta que dicho telegrama se recibió en Colombo á los 12 minutos y 38 segundos, mas 5 horas y 30 minutos = á las 5 horas, 42 minutos y 38 segundos de la mañana del día 1.º de Mayo.

PROBLEMA 6.º

Varios músicos dieron serenata á un personaje, quien, para gratificarlos, sacó del bolsillo todo el dinero que en él tenía y dió al primer músico 2 pesetas y $\frac{1}{6}$ del resto; al segundo, 4 pesetas y $\frac{1}{6}$ del resto, y así sucesivamente aumentando en 2 pesetas la parte entera, habiendo resultado que todos los músicos recibieron igual cantidad ¿Cuántas eran las pesetas que el personaje distribuyó, cuántos los músicos y cuánto lo recibido por cada uno de ellos?

Resoluciones.

1.ª—Sea x el número de pesetas que tenía el personaje. Si éste dió al 1.^{er} músico primeramente 2 pesetas, le quedarían x — 2; y, si de éstas le dió $\frac{1}{6}$, le daría $\frac{x-2}{6} = \frac{x}{6} - \frac{2}{6}$: luego en definitiva le dió $2 + \frac{x}{6} - \frac{2}{6} = \frac{12}{6} + \frac{x}{6} - \frac{2}{6} = \frac{10}{6} + \frac{x}{6}$ pesetas. Si esta cantidad dió al 1.^{er} músico, le quedaría $x - \left(\frac{10}{6} + \frac{x}{6}\right) = x - \frac{10}{6} - \frac{x}{6} = \frac{6x}{6} - \frac{10}{6} - \frac{x}{6} = \frac{5x}{6} - \frac{10}{6}$. Si de esto dió 4 pesetas al 2.º músico, le quedaría $\frac{5x}{6} - \frac{10}{6} - 4$; y, si de esto le dió la sexta parte, le daría $\frac{5x}{36} - \frac{10}{36} - \frac{4}{6}$: luego en total le dió $4 + \frac{5x}{36} - \frac{10}{36} - \frac{4}{6}$ pesetas. Y, como dió la misma cantidad al 2.º músico que al 1.º, la ecuación será

$$\frac{10}{6} + \frac{x}{6} = 4 + \frac{5x}{36} - \frac{10}{36} - \frac{4}{6}.$$

Quitando denominadores, se tendrá

$$60 + 6x = 144 + 5x - 10 - 24$$

Transponiendo y reduciendo términos semejantes, resultará

$$x = 50 \text{ pesetas.}$$

Ahora, si las pesetas distribuidas fueron 50 y al 1.er músico le dió, como arriba se dice, $\frac{10}{6} + \frac{x}{6} = \frac{10}{6} + \frac{50}{6} = \frac{60}{6} = 10$ pesetas, el número de músicos será $50 : 10 = 5$.

2.ª—Sea x el número de pesetas distribuidas. Si el 1.er músico percibió 2 pesetas y $\frac{1}{6}$ del resto, como este resto es x menos las 2 pesetas, percibiría las 2 pesetas, mas $\frac{1}{6}$ de x, menos $\frac{1}{6}$ de dichas 2 pesetas: percibiría, pues, $\frac{1}{6}$ de x y 2 pesetas disminuidas en su sexta parte, ó sea, $\frac{1}{6}$ de x y $\frac{10}{6}$ de peseta. Y, como todos los músicos percibieron igual cantidad,

si el 1er músico percibió.	$\frac{1}{6}$ de x y $\frac{10}{6}$ de peseta,
el 2.º percibiría.	$\frac{1}{6}$ de x y $\frac{10}{6}$ de id.
el 3.º.	$\frac{1}{6}$ de x y $\frac{10}{6}$ de id.
el 4.º.	$\frac{1}{6}$ de x y $\frac{10}{6}$ de id.
y el 5.º.	$\frac{1}{6}$ de x y $\frac{10}{6}$ de id.
Luego entre los 5 músicos percibieron.	$\frac{5}{6}$ de x y $\frac{50}{6}$ de peseta.

No cabe, pues, que hubiese un sexto músico, porque, de admitirle, éste hubiera percibido también $\frac{1}{6}$ de x y $\frac{10}{6}$ de peseta, en cuyo caso resultaría que entre los 6 músicos habrían percibido $\frac{6}{6}$ de x, ó sea todo el valor de x, y además $\frac{60}{6} = 10$ pesetas, lo cual es absurdo. Resulta, pues, que los músicos fueron 5 y que los $\frac{50}{6}$ de peseta que entre todos percibieron, además de los $\frac{5}{6}$ de x, es el otro sexto que falta para completar el valor de x, puesto que, hecha la distribución en la forma dicha, ni falta ni sobra cantidad alguna. Luego si $\frac{50}{6}$ es $\frac{1}{6}$ de x, $\frac{50}{6} \times 6 = 50$ será todo el valor de x. Luego las pesetas distribuidas fueron 50; y, como, según hemos visto, los músicos fueron 5, es evidente que lo percibido por cada uno de ellos fué 50 : 5 = 10 pesetas.

3.ª—*Por falsa posición.*—Supongamos que fuesen 74 las pesetas distribuidas. Dando de ellas 2 al 1.er músico, quedarían 72. Dándole además la 6.ª parte de 72, que es 12, se le habrían dado en total 14 pesetas. Quedan, pues, para los demás músicos 74 — 14 = 60 pesetas. Si de estas 60 pesetas se dan 4 al 2.º músico, quedarán 56 y, si de estas 56 pesetas se le dá la 6.ª parte, que es 9 $^1/_3$, se le habrán dado en total 13 $^1/_3$ pesetas. Mas. como se nos dice que todos los músicos percibieron la misma cantidad y el 1.º percibió 14 pesetas, resulta un error de $^2/_3$ de peseta; error que, como es por defecto, anotamos con el signo *menos.*

Hagamos una 2.ª suposición. Imaginemos que las pesetas distribuidas sean 86. Repitiendo el razonamiento anterior, resultará que el 1.er músico percibió 16 pesetas y el segundo 15. Hay, pues, un error, por defecto, de 1 peseta.

De todo lo expuesto tenemos:

	Supuestos	Errores.
1.º.	74.	—$^{2}/_{3}$
2.º.	86.	—1

Multiplicando ahora cada supuesto por el error del otro, los productos serán:

1.º $74 \times 1 = 74$
2.º $86 \times {^{2}/_{3}} = 57\ {^{2}/_{3}}$

Como los errores tienen el mismo signo, dividiremos la diferencia de los productos, que es $74 - 57\ {^{2}/_{3}} = 16\ {^{1}/_{3}}$, por la diferencia de los errores, que es $1 - {^{2}/_{3}} = {^{1}/_{3}}$, y el cociente $16\ {^{1}/_{3}} : {^{1}/_{3}} = 50$ será el número de pesetas distribuidas (1). Si éste es el número de pesetas distribuidas, las entregadas al 1.^{er} músico (las mismas que percibió cada uno de los demás) serán 2 y la 6.ª parte de $50 - 2 = 48$, que es 8: serán, pues, $2 + 8 = 10$. Luego el número de músicos será $50 : 10 = 5$.

Nota.—Todos los problemas que en Algebra se resuelven por medio de una ecuación de 1.^{er} grado pueden resolverse por la regla de falsa posición, ya simple, ya doble. Nosotros no volveremos á emplear esta regla por lo que tiene de mecánica para quienes, que son los más, no conozcan los fundamentos en que se apoya.

---

(1) Si los errores hubiesen tenido signos contrarios, hubiéramos dividido la suma de los productos por la suma de los errores.

Cuando se tiene en cuenta la ley algebraica de dichos signos, cualesquiera que sean éstos, se divide *siempre* la diferencia algebraica de los productos por la diferencia algebraica de los errores.

PROBLEMA 7.º

Un sujeto nació el 5 de Agosto de 1796 á las $4 \frac{1}{2}$ de la tarde y falleció el 19 de Febrero de 1868 á las 11 y 12 minutos de la mañana. ¿Qué edad contaba este individuo á su fallecimiento?

Resolución.

La edad que este individuo contaba á su fallecimiento es indudablemente el tiempo que medió entre su nacimiento y su defunción, y este tiempo es la diferencia del transcurrido desde el principio de la era cristiana hasta el fallecimiento del sujeto en cuestión al transcurrido desde dicho punto de partida al nacimiento del mencionado sujeto. De estos dos últimos tiempos

	años.	meses.	días.	horas.	minut.
el 1.º es.	1867	1	18	11	12
y el 2.º.	1795	7	4	16	30.
Diferencia. . . .	71	6	13	18	42,

que constituyen la edad que el sujeto de que se trata tenía á su fallecimiento.

PROBLEMA 8.º

Un zapatero tomó á su servicio un dependiente á quien ajustó en 1500 reales de salario y un par de botas al año. Muerto el dependiente á los 5 meses y liquidada la cuenta con el padre del difunto, el heredero de éste recibió por saldo de ella 593‘50 reales y el par de botas. ¿En cuánto fueron evaluadas éstas?

Resoluciones.

1.ª—Sea x reales el valor fijado al par de botas. Si el dependiente hubiese servido todo el año, habría recibido los

1500 reales y el par de botas, estipulados; mas, como sólo sirvió 5 meses, y cada mes es $\frac{1}{12}$ del año, es claro que su heredero sólo pudo recibir $\frac{5}{12}$ de los 1500 reales y otros $\frac{5}{12}$ del valor del par de botas. Recibió, pues, $1500 \times \frac{5}{12} + \frac{5}{12}$ x. Luego la ecuación será

$$1500 \times \frac{5}{12} + \frac{5}{12}\,x = 593\text{‘}50 + x.$$

Despejando á x, resultarán sucesivamente las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned} 1500 \times 5 + 5\,x &= 593\text{‘}50 \times 12 + 12\,x, \\ 5\,x - 12\,x &= 593\text{‘}50 \times 12 - 1500 \times 5, \\ -\,7\,x &= -\,378 \\ 7\,x &= 378; \end{aligned}$$

de donde

$$x = \frac{378}{7} = 54 \text{ reales.}$$

Para comprobar este valor, póngasele en lugar de la incógnita en cualquiera de las ecuaciones anteriores y se verá que la convierte en identidad. Luego satisface.

2.ª—Si el dependiente hubiera servido los 12 meses del año, él ó su padre hubieran recibido los $\frac{12}{12}$ del salario y los $\frac{12}{12}$ del par de botas; es decir, todo el salario y el par de botas; mas, como sólo sirvió 5 meses, el padre únicamente tenía derecho á recibir $\frac{5}{12}$ del salario y otros $\frac{5}{12}$ del valor asignado á las botas. Los $\frac{5}{12}$ del salario 1500 reales valen $1500 \times \frac{5}{12} = 625$; y, como sólo recibió 593‘50, indudablemente la diferencia 625 — 593‘50 = 31‘50 reales, recibidos de menos, representan los $\frac{7}{12}$ del par de botas, recibidos de más. Ahora, si $\frac{7}{12}$ del par de botas valen 31‘50 reales, $\frac{1}{1}$

valdrá 7 veces menos. Valdrá, pués, 31'50 : 7 = 4'50; y, si esto vale $\frac{1}{12}$, los $\frac{12}{12}$, ó sea el par de botas, valdrán

$$4'50 \times 12 = 54 \text{ reales.}$$

3.ª—Si el dependiente hubiese servido 1 solo mes, hubiera recibido $\frac{1}{12}$ de los 1500 reales y otro del valor del par de botas; es decir que de los 1500 reales hubiera recibido 1500 : 12 = 125. Si esto le correspondía percibir por 1 mes, por los 5 que sirvió le correspondería percibir 5 veces más, ó sea 125 × 5 = 625 reales y $\frac{5}{12}$ del valor del par de botas; y, como, según los datos, el heredero recibió 593'50 reales y el par de botas, resulta que, en cuanto á la parte pecuniaria, recibió de menos 625 — 593'50 = 31'50 reales. y, en cuanto al valor del par de botas, recibió de más $\frac{7}{12}$. Luego los 31'50 reales y los $\frac{7}{12}$ del valor del par de botas se complementan ó son cantidades iguales. Ahora, si 31'50 reales representan $\frac{7}{12}$ del valor del par de botas, 31'50 : 7 = 4'50 representarán $\frac{1}{12}$ del valor del citado par, y 4'50 × 12 = 54 reales representarán el valor total de dicho par de botas.

PROBLEMA 9.º

Un sujeto nació el día 15 de Julio de 1817 á las 9 $\frac{1}{4}$ de la noche y vivió 61 años, 9 meses, 4 días, 6 horas y 20 minutos. ¿En qué año, mes, día, hora y minuto falleció este sujeto?

Resolución.

Es evidente que, si consignamos el tiempo transcurrido desde el principio de la era cristiana hasta el momento en que nació el sujeto en cuestión y á este tiempo agregamos la edad que éste sujeto contaba á su fallecimiento, la suma será el tiempo que medió entre dicho punto de partida y el instante en que el referido sujeto falleció; ó sea la fecha de su fallecimiento, que es la incógnita del problema. El 1.º de los tiempos citados es

	1816 años,	6 meses,	14 días,	21 horas	y 15'
Edad del sujeto.	61	, 9	, 4	, 6	y 20'
Suma.	1878	, 3	, 19	, 3	y 35'

Resulta que el sujeto de que se trata falleció el año 1878, en su 3.er mes (el de Marzo), en su día 19, en la 3.ª hora de éste y 35 minutos de la 4.ª; ó sea, el día 19 de Marzo de 1878 á las 3 y 35 minutos de la mañana.

PROBLEMA 10

Un zapatero tomó á su servicio un dependiente á quien ajustó en 360 pesetas y un par de botas al año. Muerto el dependiente á los 7 meses y liquidada la cuenta con el padre del difunto, el heredero de éste recibió por las botas y el salario 218'75 pesetas. ¿En cuánto fué justipreciado el par de botas?

Resoluciones.

1.ª—Sea x pesetas la cantidad en que fué justipreciado el par de botas. Si el dependiente hubiese servido todo el año, hubiera recibido las 360 pesetas y el par de botas convenidos; mas, como falleció á los 7 meses y cada mes es $\frac{1}{12}$ del año, su heredero sólo pudo recibir $\frac{7}{12}$ de las 360 pesetas y otros $\frac{7}{12}$ del valor fijado al par de botas; y, como por este doble concepto percibió 218'75 pesetas, la ecuación será

$$360 \times \frac{7}{12} + \frac{7}{12} x = 218'75$$

Despejando á x, resultarán sucesivamente las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 360 \times 7 + 7\,x &= 218‘75 \times 12, \\ 7\,x &= 218‘75 \times 12 - 360 \times 7, \\ 7\,x &= 2625 - 2520 \\ \text{y} \qquad 7\,x &= 105; \\ \text{de donde} \qquad x &= \frac{105}{7} = 15 \text{ pesetas.} \end{aligned}$$

Puede comprobarse este valor poniéndole en lugar de la incógnita en cualquiera de las ecuaciones anteriores y se verá que la transforma en identidad: luego satisface.

2.ª—Si el dependiente hubiese servido los 12 meses del año, él ó su padre hubieran recibido los $\frac{12}{12}$ del salario y los $\frac{12}{12}$ del par de botas; es decir, todo el salario y el par de botas; mas, como sólo sirvió 7 meses, el padre únicamente pudo recibir $\frac{7}{12}$ del salario y otros $\frac{7}{12}$ del valor asignado al par de botas. Luego, si de las 218‘75 pesetas percibidas por los dos conceptos se restan los $\frac{7}{12}$ del salario 360 pesetas $= 360 \times \frac{7}{12} = 210$, el resto $218‘75 - 210 = 8‘75$ serán los $\frac{7}{12}$ del valor de las botas. Luego 1 dozavo será $8‘75 : 7 = 1‘25$, y los $\frac{12}{12}$, ó el valor total, será $1‘25 \times 12 = 15$.

3.ª—Si al dependiente le correspondía percibir al año, ó sea á los 12 meses, 360 pesetas y un par de botas, al mes le correspondería recibir 12 veces menos, ó sea $\frac{360}{12} = 30$ pesetas, mas $\frac{1}{12}$ del valor del par de botas; y, si esto le correspondía recibir al mes, es claro que á los 7 meses le correspondería recibir 7 veces más, ó sea $30 \times 7 = 210$ pesetas, mas $\frac{1}{12} \times 7 = \frac{7}{12}$ del valor de las botas; y, como, según los datos, por defunción del dependiente el padre de éste percibió por los dos conceptos 218'75 pesetas, resulta que en la parte pecuniaria recibió 218'75 — 210 = 8'75 pesetas de más. Luego estas 8'75 pesetas representan el valor de los $\frac{7}{12}$ del par de botas, que separadamente no recibió Ahora, si $\frac{7}{12}$ del par de botas valen 8'75 pesetas, 1 dozavo valdrá 7 veces menos. Valdrá, pues, 8'75 : 7 = 1'25; y, si esto vale $\frac{1}{12}$, los $\frac{12}{12}$, ó el par de botas entero, valdrán 12 veces más, ó bien 1'25 × 12 = 15 pesetas.

PROBLEMA 11

Un sujeto falleció el día 1.º de Abril de 1892 á las 10 y 25 minutos de la mañana á la edad de 74 años, 7 meses, 28 días, 15 horas y 35 minutos. ¿En qué año, mes, día, hora y minuto había nacido este individuo?

Resolución.

Es evidente que, si consignamos el tiempo transcurrido desde el principio de la era cristiana hasta el momento en que falleció el sujeto de que se trata, y de ese tiempo deducimos el que este sujeto contaba á su fallecimiento, el resto será el que medió entre dicho punto de partida y el instante en que el referido sujeto nació; ó sea la fecha de su nacimiento, que es lo que en el problema se pide. El 1.º de los tres tiempos citados es

	1891 años,	3 meses,	0 días,	10 horas	y 25 min.
la edad del sujeto.	74	, 7	, 28	, 15	y 35
Resto. . . .	1816	, 7	, 1	, 18	y 50

Resulta que este sujeto había nacido el año 1816, en su

7.º mes (el de Julio), en su 1.er día, á sus 18 horas (las 6 de la tarde) y 50 minutos; ó bien, el 1.º de Julio de 1816 á las 6 y 50 minutos de la tarde.

PROBLEMA 12

Un chico entró en un huerto ajeno y de un peral que había en él se llevó la mitad de las peras que tenía y media más: entró luego otro chico y se llevó la mitad de las peras que habían quedado y media más; y entró, por último, otro tercer chico que se llevó la mitad de las peras que restaban y media más, no habiendo quedado ya ninguna. ¿Cuántas peras tenía el peral á la entrada del primer chico?

Resoluciones.

1.ª—Sea x el número de peras que tenía el peral. Si el primer chico se llevó la mitad de estas peras y media más, dejaría la otra mitad menos media. Dejaría, pues, $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Si de estas peras, $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$, se llevó el segundo chico la mitad y media más, dejaría la otra mitad menos media. Dejaría, pues,

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) : 2 - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{3}{4}.$$

Si de estas peras, $\frac{x}{4} - \frac{3}{4}$, se llevó el tercer chico la mitad y media más, dejaría la otra mitad menos media. Dejaría, pues,

$$\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{4}\right) : 2 - \frac{1}{2} = \frac{x}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{2} = \frac{x}{8} - \frac{7}{8};$$

y, como no dejó ninguna pera, será

$$\frac{x}{8} - \frac{7}{8} = 0.$$

Luego $x = 7$

Hecha la comprobación, resulta que

el 1.er chico se llevó $\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$ peras,
el 2.º. . . . . . . $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$ id.
y el 3.º. . . . . . $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ id.
Total. . . . 7 id.

2.ª—Si el tercer chico se llevó la mitad de las peras que el peral tenía y media más, dejaría la otra mitad menos media. Luego, agregando media pera á las que dejó, se tendrá la mitad cabal; y, como no dejó ninguna, resulta que la mitad cabal es *media* pera. Luego el total será $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Si el segúndo chico se llevó la mitad de las peras que encontró en el árbol y media más, dejaría la otra mitad menos media. Luego, agregando $\frac{1}{2}$ pera á las que dejó, se tendrá la mitad cabal; y, como dejó 1, $1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ será la mitad cabal. Luego el total será $1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 3$ peras.

Si el primer chico se llevó la mitad de las peras que el peral tenía y media más, dejaría la otra mitad menos media. Luego, agregando media pera á las que dejó, se tendrá la mitad cabal; y, como dejó 3, $3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ será la mitad cabal. Luego el total será $3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 7$, número de peras que el peral tenía á la entrada del primer chico.

NOTA.—Como en este problema y sus similares los números que constituyen la solución van siendo sucesivamente, ya duplos, ya subduplos, según que se proceda de menor á mayor, ó viceversa, averiguado uno cualquiera de ellos, sin más discurrir lo están los otros.

PROBLEMA 13.

Al morir un padre, dejó tres hijos y un capital de 80000 reales, habiendo consignado en su testamento que el hijo menor percibiese 17000 reales más que el mediano y éste 12000 más que el mayor. ¿Cuánto debe percibir cada uno de los tres hijos?

Resoluciones.

1.ª—Sea x la cuota que debe percibir el hijo mayor: la del mediano será x + 12000, y la del menor x + 12000 + 17000. Luego la ecuación será

$$x + (x + 12000) + (x + 12000 + 17000) = 80000;$$

ó sea

$$x + x + 12000 + x + 12000 + 17000 = 80000.$$

Transpasando los términos numéricos del 1^{er} miembro al 2.º y haciendo luégo la simplificación en los dos miembros, se tendrá

$$3\ x = 39000;$$

de donde

$$x = \frac{39000}{3} = 13000 \text{ reales.}$$

Siendo la cuota del hijo mayor reales. 13.000,
la del mediano será. . . . . 13000 + 12000 = 25.000
y la del menor, ... 25000 + 17000 = 42.000
Total. 80.000

2.ª—Como el mediano de los tres hijos ha de percibir 12000 reales más que el mayor y el menor 17000 más que el mediano, es evidente que el hermano menor ha de percibir 17000 + 12000 = 29000 reales más que el mayor. Luego entre los dos hermanos menor y mediano han de recibir 29000 + 12000 = 41000 reales más que el mayor.

Luego, si de la herencia total se deducen estos 41000 reales, el resto 80000 — 41000 = 39000 será la cantidad que ha de distribuirse entre los tres hermanos á partes iguales. Será, pues, 39000 : 3 = 13000 reales la cuota que de dichos 39000 reales habrá de corresponder á cada uno de los tres hermanos y la única que ha de percibir el mayor de ellos. La del mediano será 13000 + 12000 = 25000, y la del menor, 25000 + 17000 = 42000 reales.

PROBLEMA 14.

Una mujer compró en la plaza un canasto de huevos á 5 reales la docena: al transportarlos á casa se le cayó el canasto y los huevos se rompieron. Preguntándole luego cuántos huevos había comprado, contestó que no lo sabía; pero que recordaba que, sumando los huevos con los reales que le habían costado, resultaba el número 246'5. ¿Cuántos eran los huevos y cuántos los reales?

Resoluciones.

1.ª—Sea x el número de huevos comprados: el de docenas de ellos será $\frac{x}{12}$, y el de los reales que estas docenas importaron $\frac{5x}{12}$. Luego la ecuación será

$$x + \frac{5x}{12} = 246'5.$$

Quitando el denominador 12, tendremos

$$12x + 5x = 246'5 \times 12;$$

y, simplificando en el primer miembro y efectuando la multiplicación en el segundo, se tendrá

$$17x = 2958;$$

de donde,

$$x = \frac{2958}{17} = 174 \text{ huevos.}$$

Si éste es el número de huevos, el de docenas será $\frac{174}{12} = 14'5$, y el de reales, importe de ellas, $14'5 \times 5 = 72'5$.

2.ª – Si, conocido el número de huevos, le dividiéramos por 12, el cociente expresaría el número de docenas que componen; y si, conocido el número de reales que los huevos importan, le dividiéramos por 5 reales, importe de la docena, el cociente expresaría tambien el número de docenas. Luego, si dividimos la suma del número de huevos y del de reales por $12 + 5 = 17$, el cociente expresará el número de docenas de los primeros. Tendremos, pues,

$$246'5 : 17 = 14'5 \text{ docenas.}$$

Por consiguiente, el número de huevos será $14'5 \times 12 = 174$; y el de reales, ó $246'5 - 174 = 72'5$, ó bien $14'5 \times 5 = 72'5$.

La exactitud de este razonamiento se ve confirmada por la siguiente resolución.

3.ª—Sea d el número de docenas de huevos, h el de éstos y r el de reales, importe de ellos, Tendremos.

$$d \times 12 = h$$

y

$$d \times 5 = r.$$

Sumando ordenadamente estas dos ecuaciones, resulta esta otra.

$$d \times 12 + d \times 5 = h + r;$$

ó bien, separando en el 1.^{er} miembro el factor común d,

$$d \times (12 + 5) = h + r;$$

y, como es $h + r = 246'5$, sustituyendo, se tendrá

$$d \times (12 + 5) = 246'5;$$

de donde

$$d = \frac{246'5}{12 + 5} = 14'5.$$

Averiguado ya el número de docenas de huevos, el de éstos y el de reales se determinan como en la resolución anterior.

PROBLEMA 15.

Con el importe de un número de hectolitros de trigo igual al cuádruplo del máximo común divisor de 288, 360, 432 y 540 y vendido á un número de reales expresado por la raíz cuadrada de $8649\frac{1}{9}$ se ha comprado un número de arrobas de lana igual al tercio del cuadrado de la raíz cúbica del mínimo común múltiplo de los números 2, 3, 4, 5, 9, 12, 20, 28, 30, 42 y 96. ¿Cuál es el precio de la arroba?

Resolución.

Para poder averiguar el precio de la arroba de lana, necesitamos determinar previamente cuántas son las arrobas compradas y cuál es su importe en reales. Como el número de arrobas lo da el tercio del cuadrado de la raíz cúbica del mínimo común múltiplo de los números 2, 3, 4, &. &., para precisar aquel número hay que empezar por hallar este mínimo común múltiplo, que es 10.080 (a). Siendo éste el

---

(a) El mínimo común múltiplo de varios números dados se halla de dos maneras: 1.ª, *que es la más breve*, se prescinde de los que sean divisores de otros y los restantes se descomponen en sus factores primos: el producto de las mayores potencias de todos los factores primos *diferentes* es el mínimo múltiplo; y 2.ª, se halla el mínimo múltiplo de los dos primeros números (para lo cual se multiplica uno cualquiera de ellos por el cociente que resulta de dividir al otro por el máximo común divisor de ambos); después se halla el mínimo múltiplo del mínimo múltiplo hallado y del tercer número; y así sucesivamente: el último mínimo múltiplo es el de todos los números propuestos.

mínimo común múltiplo, su raíz cúbica sera 21'60; el cuadrado de esta raíz, 21'60 × 21'60 = 466'56, y el tercio de este cuadrado, 466'56 : 3 = 155'52. Este, pues, es el número de arrobas de lana que se han comprado. En cuanto á su importe, como es el de los hectolitros de trigo que se han vendido, determinado éste, quedará determinado aquél.

Para determinar el importe de los hectolitros de trigo, fuerza es averiguar antes cuántos son ellos y cuál es su precio. Como el número de hectolitros está expresado por el cuádruplo del máximo común divisor de 288, 360, 432 y 540, hay que empezar por hallar este máximo común divisor, que es 36 (b). Siendo éste el máximo común divisor, su cuádruplo será 36 × 4 = 144. En cuanto al precio de estos hectolitros, lo tendremos extrayendo la raíz cuadrada de $8649\frac{1}{9}$ que es

$$\sqrt{8649\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{77849}{9}} = \frac{\sqrt{77849}}{\sqrt{9}} = \frac{279}{3} = 93.$$

Si los hectolitros de trigo vendidos son 144 y su precio 93 reales, su importe será 93 × 144 = 13392 reales. Este, pues, es también el importe de las 155'52 arrobas de lana compradas. Luego el valor de una de ellas, ó sea su precio, será
13392 : 155'52 = 86'11 reales.

(b) El máximo común divisor de varios números dados puede hallarse de dos maneras: 1.ª, *que es la más breve,* se halla el máximo común divisor de los dos primeros números, *que conviene sean los menores;* después se halla el del máximo común divisor hallado y del tercer número, y así sucesivamente: el último máximo común divisor hallado es el de todos los números propuestos.—2.ª Los números dados se descomponen en sus factores primos: el producto de las menores potencias de todos los factores primos *comunes* á todos los números dados es el máximo común divisor de éstos.

PROBLEMA 16.

407

Quiero hacer un pago de 12 pesetas con sellos de comunicaciones de 75, 25 y 15 céntimos: quiero que de los segundos sellos éntre una mitad más que de los primeros, y de los terceros $\frac{2}{3}$ más que de los segundos. ¿Cuántos sellos debo tomar de cada una de las tres clases citadas?

Resolución.

Sea x los sellos que debo tomar de los de 75 céntimos: los de 25 serán $x + \frac{x}{2}$; y los de 15, $x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{6}$. Luego la ecuación será

$$x + x + \frac{x}{2} + x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{6} = 40.$$

Quitando denominadores, se tendrá

$$6x + 6x + 3x + 6x + 3x + 4x + 2x = 240,$$

y, simplificando en el 1.^{er} miembro, resultará

$$30x = 240;$$

de donde $\quad x = \frac{240}{30} = 8.$

Si los sellos de 75 céntimos son 8,

los de 25 serán. . $\quad 8 + \frac{8}{2} = 12$

y los de 15,. . . $12 + 12 \times \frac{2}{3} = 20$

Total. . . . 40 sellos.

PROBLEMA 17.

El mínimo común múltiplo de dos números es 720 y su máximo común divisor 12.: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución,

El mínimo común múltiplo de dos números es el producto de las mayores potencias de los factores primos, *diferentes* de dichos números, y el máximo común divisor es el producto de las menores potencias de los factores primos comunes á las dos números. Luego, si al mínimo común múltiplo 720 y al máximo común divisor 12 los descomponemos en sus factores primos, esta doble descomposición nos dará todos los factores primos de los dos números que se piden. Hecha esta descomposición, resulta:

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

y

$$12 = 2^2 \times 3.$$

Ahora la cuestión está reducida á combinar convenientemente entre sí estos factores primos para rehacer ó formar los dos números que se buscan. Para ello hay que tener en cuenta que las potencias de un mismo factor, 2^4 y 2^2, por ejemplo, no pueden pertenecer á un mismo número, porque, si pertenecieran, la potencia no sería la que expresa ninguno de los dos factores, sinó la expresada por el producto de ellos; es decir que no sería ni 2^4 ni 2^2, sinó 2^6. Esto presente, háganse con los expresados factores primos las posibles combinaciones diferentes, que serán éstas cuatro:

$$1.^{a} \left\{ \begin{array}{l} 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720 \\ 2^2 \times 3 = 12 \end{array} \right.$$

$$2.^{a} \left\{ \begin{array}{l} 2^4 \times 3^2 = 144 \\ 2^2 \times 3 \times 5 = 60 \end{array} \right.$$

$$3.^{a} \left\{ \begin{array}{l} 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180 \\ 2^4 \times 3 = 48 \end{array} \right.$$

$$\text{y } 4.^{a} \left\{ \begin{array}{l} 2^2 \times 3^2 = 36 \\ 2^4 \times 3 \times 5 = 240 \end{array} \right.$$

En cada una de estas cuatro combinaciones el mínimo común múltiplo será siempre $2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$, y el máximo común divisor, $2^2 \times 3 = 12$. El problema, como se ve, tiene cuatro soluciones: es, pues, indeterminado. Cabe hacerle determinado, agregando á sus actuales condiciones alguna otra que haga que tenga una solución única, como sucedería enunciándole en esta forma:

«*El mínimo común múltiplo de dos números,* EL MENOR DE LOS CUALES TERMINA EN CERO, es *720, y su máximo común divisor, 12: ¿cuáles son estos dos números?*»

Ya, de las cuatro soluciones obtenidas la única que satisfaría las condiciones del problema, así enunciado, sería la 2.ª; esto es, la que constituyen los números 144 y 60.

PROBLEMA 18.

Habiéndole preguntado á un ganadero cuántas ovejas tenía, contestó que menos de 500 y que, si las distribuía de 2 en 2, quedaba 1; si de 3 en 3, quedaban 2; si de 4 en 4, quedaban 3; si de 5 en 5, quedaban 4, si de 6 en 6, quedaban 5, y, si de 7 en 7, no sobraba ninguna. ¿Cuántas ovejas tenía el ganadero de que se trata?

Resolución.

De las condiciones del enunciado se desprende con perfecta claridad que el número de ovejas que se pide tiene que ser uno de los múltiplos del 2, 3, 4, 5 y 6, *menor que 500*, disminuido en 1 unidad. En efecto, deducida del múltiplo la unidad, el número resultante ya no será divisible por ninguno de dichos cinco números: le faltará para serlo la unidad deducida. Por lo tanto, al dividir ese número sucesivamente por 2, 3, 4, 5 y 6, el residuo en cada caso tiene que ser una unidad menos que el divisor; es decir que será 1, 2, 3, 4 y 5. Ahora, como, según la última de las condiciones del problema, el número de ovejas ha de ser divisible por 7, la cuestión está reducida á determinar todos los múltiplos de 2, 3, 4, 5 y 6 menores que 500, á deducir de cada uno de ellos 1 unidad y á ver cuál entre todos, así disminuido, es divisible por 7.

Los múltiplos de 2, 3, 4, 5 y 6, menores que 500, son 60, 120, 180, 240, 300, 360 y 480, los cuales, disminuidos en 1 unidad, se convierten en 59, 119, 179, 239, 299, 359 y 479. De todos estos 7 últimos números sólo el 2.º reune todas las condiciones del problema; á los demás les falta la de ser divisibles por 7.

Resulta, pues, que el número de ovejas en cuestión es 119.

Nota.—Este problema, tal y como está propuesto, es perfectamente determinado: pero, si se prescindiera de la limitación que establece el dato 500, ya pasaría á ser indeterminado: el número de sus soluciones sería entonces infinito. En efecto (y aparte de que, por ejemplo, el múltiplo 540, disminuido en 1 unidad, daría también solución del problema), si el número 120, múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6, se multiplica por 8 = 7 + 1, el producto 960 es otro múltiplo de dichos cinco números y, por lo mismo, si se le resta una unidad, al dividir el número 959 sucesivamente por 2, 3, 4, 5 y 6, los residuos serán 1, 2, 3, 4 y 5. Por otra parte, como dicho número 120 es un múltiplo de 7, más 1 unidad, si le multiplicamos por 8, el producto 960 será otro múltiplo de 7, más 8 unidades; ó bien un múltiplo de 7, mas 7 + 1 unidades; ó sea un múltiplo de 7, mas otro múltiplo de 7, mas 1 unidad; ó, en definitiva, un múltiplo de 7, mas 1 unidad. Luego, si de este múltiplo 960 se resta esta unidad, el resto 959 será exactamente divisible por 7. El número 959 llena, pues, perfectamente todas los condiciones del problema: es, por lo tanto, otra solución del mismo. Lo propio sucedería multiplicando el 120 por 2 × 7 + 1 = 15, por 3 × 7 + 1 = 22, por 4 × 7 + 1 = 29, &. &. y restando 1 unidad de cada producto resultante. El problema, pues, tiene en este caso un número infinito de soluciones.

PROBLEMA 19

¿Cuál es el número que, aumentado en $\frac{9}{20}$ suyos y disminuido en su mitad, en su tercio, en su cuarto, en su quinto y en su sexto, da por resultado 12 unidades?

Resolución.

Sea x el número que se pide: sus $\frac{9}{20}$ serán $\frac{9x}{20}$; su mitad, su tercio, su cuarto, su quinto y su sexto serán, respectivamente, $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{4}$, $\frac{x}{5}$ y $\frac{x}{6}$. Tendremos la ecuación

$$\left(x+\frac{9x}{20}\right)-\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5}+\frac{x}{6}\right)=12.$$

Quitando los paréntesis, se tendrá

$$x+\frac{9x}{20}-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}-\frac{x}{4}-\frac{x}{5}-\frac{x}{6}=12;$$

y, quitando denominadores haciendo uso del mínimo múltiplo, será

$$60x+27x-30x-20x-15x-12x-10x=720,$$

y, reduciendo términos semejantes en el 1.^{er} miembro, resultará

$$0\times x=12;$$

de donde

$$x=\frac{12}{0}=\infty.$$

Este resultado ∞ = *al infinito* nos dice que el problema es imposible.

En efecto, á poco que se discurra se comprenderá que el enunciado encierra un absurdo. Dícese en él que al número que se pide se le aumentan $\frac{9}{20}$ suyos y que de esta suma se restan luégo la mitad del número, su tercio, su cuarto, su quinto y su sexto, quedando por resultado de esta resta

12 unidades. Ahora bien, al restar del número y sus $\frac{9}{20}$ la mitad de aquél, su tercio y su sexto, se resta todo el número, y, al restar su cuarto y su quinto, se restan sus $\frac{9}{20}$ Luego el resto final no puede ser 12, sinó que tiene que ser cero. Queda, pues, manifiesto el absurdo.

PROBLEMA 20.

Perdiósele á un sujeto un bolsillo con cierto número de pesetas, y habiéndole preguntado cuántas eran éstas, sólo supo decir que no llegaban á 500 y que, si se las tomaba de 2 en 2, ó de 3 en 3, ó de 4, en 4, ó de 5 en 5, ó de 6 en 6, siempre sobraba 1, y que, tomadas de 7 en 7, no sobraba ninguna. ¿Cuántas pesetas contenía el bolsillo perdido?

Resolución.

Si al tomar de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5 y de 6 en 6 las pesetas del bolsillo perdido no hubiera sobrado ninguna, como al tomarlas de 7 en 7, esto demostraría que el número de pesetas era divisible por 2, por 3, por 4, por 5 y por 6; mas, como en todos los casos sobraba 1, esto revela que dicho número de pesetas es un múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6, aumentado en la unidad sobrante. La cuestión, pues, está reducida á determinar un múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6, menor que 500 y que, aumentado en 1 unidad, sea divisible por 7. Los múltiplos de 2, 3, 4, 5 y 6 menores que 500, son 60, 120, 180, 240, 300, 360 y 480, los cuáles, aumentados en 1 unidad, se convierten en 61, 121, 181, 241, 301, 361 y 481. De todos estos siete números sólo el 301 reune todas las condiciones del problema: á los demás les falta la de ser divisibles por 7. Resulta, pues, que el número de pesetas del bolsillo perdido es 301.

Nota.—Si en el enunciado de este problema no se fijara límite al número de pesetas, el problema pasaría á ser indeterminado. En efecto (y prescindiendo de que, p. ej., el múltiplo 720, aumentado en 1 unidad, daría también solución del problema), si el número 300, múltiplo de 2, 3, 4, 5 y 6, que, aumentado en 1 unidad, nos ha dado la solución obtenida, se multiplica por $8 = 7 + 1$, al producto resultante $2400 = 2100 + 300$ le faltará para ser múltiplo de 7 la unidad que al efecto le falta al 2.º sumando 300, toda vez que el primero 2100, como producto de 300×7 es múltiplo de 7: luego, si al $2400 = 2100 + 300$ se le agrega 1 unidad, será divisible por 7: luego el 2401 constituirá otra solución del problema. Lo mismo sucedería si multiplicásemos el número 300 por $2 \times 7 + 1 = 15$, por $3 \times 7 + 1 = 22$, por $4 \times 7 + 1 = 29$, &. &. y adicionásemos 1 unidad á cada producto. El problema, pués, hecha abstración del límite del número de pesetas, tiene un sinnúmero de soluciones.

PROBLEMA 21.

Habiéndole preguntado á una señora cuántos años tenía, contestó: «Si de la edad que tengo se resta la de mi hija, que es $\frac{2}{5}$ de la mía, y al resto se agrega la de mi hijo, que es $\frac{5}{8}$ de la de mi hija, resultarán $\frac{3}{4}$ de la edad que yo tengo, mas 4 años, 9 meses y 18 días.» ¿Qué edad tenían la Señora interrogada, su hija y su hijo?

Resoluciones.

1.ª—Sea x los años de edad de la Señora: los de su hija serán $\frac{2\,X}{5}$, y los de su hijo, $\frac{2\,X}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{10\,X}{40}$. Luego, reducidos á fracción de año los 9 meses y 8 días, la ecuación será

$$x + \frac{2x}{5} + \frac{10x}{40} = \frac{3x}{4} + 24'8.$$

Quitando denominadores haciendo uso del mínimo múltiplo, se tendrá

$$40x - 16x + 10x = 30x + 192;$$

y, transponiendo el 30 x, resultará

$$40x - 16x + 10x - 30x = 192;$$

y, simplificando en el 1.^{er} miembro, será

$$4x = 192;$$

de donde $x = \frac{192}{4} = 48.$

Si la edad de la Señora es 48 años, la de su hija, según los datos, será $48 \times \frac{2}{5} = 19'2$ años $=$ 19 años, 2 meses y 12 días, y la de su hijo, $19'2 \times \frac{5}{8} = 12$ años.

2.ª—Si de la edad de la madre se resta la de la hija, que es $\frac{2}{5}$ de la de la madre, el resto será $\frac{3}{5}$ de la edad de la madre; y si ahora á este resto $\frac{3}{5}$ de la edad de la madre se le agrega la edad del hijo, que es $\frac{5}{8}$ de la de la hija, ó $\frac{5}{8}$ de los $\frac{2}{5}$ de la de la madre, igual á $\frac{10}{40}$ de la de la madre, la suma será $\frac{3}{5}$ de la edad de la madre, mas $\frac{10}{40}$ de la edad de la madre; y como la edad de la madre, como toda cantidad tiene $\frac{40}{40}$ y, por lo mismo, los $\frac{3}{5}$ de la edad de la madre equivalen á $\frac{24}{40}$, dicha suma será igual á $\frac{24}{40} + \frac{10}{40} = \frac{34}{40}$ de la edad de la madre; y, como según los datos, esta cantidad $\frac{34}{40}$ es igual á $\frac{3}{4}$ de la edad de la madre, mas 4 años, 9 meses y 18 días, ó sea igual á $\frac{3}{4}$ de $\frac{40}{40} = \frac{30}{40}$ de la edad de la madre, mas 4'8 años, resulta que estos 4'8 años son la diferencia entre los $\frac{34}{40}$ y los $\frac{30}{40}$ de la edad de la madre. Representan, pues, $\frac{4}{40}$ de dicha edad. Luego, si se dividen por 4, el cociente 4'8 : 4 = 1'2 será $\frac{1}{40}$ de la edad de la madre; y, si este $\frac{1}{40}$, ó sea 1'2 se múltiplica por 40, el producto 1'2 × 40 = 48 expresará los $\frac{40}{40}$ de la edad de la madre, ó bien toda la edad de la madre, que es la que en 1.er término se pide. Ahora, la edad de la hija y la del hijo se determinan como antes.

PROBLEMA 22.

Un potentado tenía cierto número de administradores, cada uno de los cuales administraba tantos pueblos como administradores eran: en cada pueblo había tantas huertas cuantos eran los pueblos á cargo de cada administrador: cada huerta estaba dividida en tantos tablares como huertas había en cada pueblo; en cada tablar había tantos árboles como tablares había en cada huerta: cada árbol tenía tantas ramas como árboles había en cada tablar: cada rama produjo un año tantos kilogramos de fruta como eran las ramas de cada árbol; y cada kilogramo de fruta se vendió á tantas monedas de 5 céntimos como eran los kilogramos de fruta de cada rama, habiendo ascendido el importe total de la venta á 83.980 pesetas y 80 céntimos. ¿Cuántos eran los administradores, cuántas las huertas, cuántos los tablares, cuántos los árboles, cuántas las ramas, cuántos los kilogramos de fruta y cuántas las monedas de 5 céntimos precio de cada kilogramo de fruta?

Resolución.

Sea n el número de administradores: el número de pueblos administrados, según el enunciado del problema, será $n \times n = n^2$; el de huertas, $n^2 \times n = n^3$; el de tablaes, $n^3 \times n = n_4$; el de árboles, $n^4 \times n = n^5$; el de ramas, $n^5 \times n = n^6$; el de kilogramos de fruta, $n^6 \times n = n^7$. y el de monedas de 5 céntimos, $n^7 \times n = n^8$, las cuales monedas, convertidas en pesetas, darán $\frac{n^8}{20}$. Luego la ecuación será

$$\frac{n^8}{20} = 83980\text{‘}80.$$

Quitando el denominador 20, se tendrá

$$n^8 = 83980\text{‘}80 \times 20;$$

ó bien

$$n^8 = 1679616;$$

de donde

$$n = \sqrt[8]{1679616} \quad \text{(a)}$$

Ahora, como para extraer de un número una raíz cuyo índice sea compuesto, se extraen sucesivamente las raíces indicadas por los factores simples de este índice compuesto, y como los factores simples del 8 son $2 \times 2 \times 2$, se tendrá,

$$\sqrt[8]{1679616} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{1679616;}}}$$

y, como

$$\sqrt{1679616} = 1296, \text{ será}$$

$$\sqrt[8]{1679616} = \sqrt{\sqrt{1296;}}$$

y, como

$$\sqrt{1296} = 36, \text{ será}$$

$$\sqrt[8]{1679616} = \sqrt{36 =}\; 6.$$

(a) Puede hallarse el valor de n aplicando los logaritmos; pero suponemos que todavía nos son desconocidos.—*Véase la cita del problema 226.*

Luego $n = 6$.

Resulta, pues, que los administradores eran 6. Luego los pueblos serían 6 × 6 = 36; las huertas, 36 × 6 = 216; los tablares, 216 × 6 = 1296; los árboles, 1296 × 6 = 7776; las ramas, 7776 × 6 = 46656; los kilogramos de fruta, 46656 × 6 = 279936, y las monedas de 5 céntimos, importe total de la venta, 279936 × 6 = 1679616 = 83980'80 pesetas. El número de monedas de 5 céntimos, precio del kilogramo de fruta, lo da $n = 6$, que es el cociente que resulta de dividir el total de esa clase de moneda, 1679616, por el total de kilogramos de fruta, 279936.

PROBLEMA 23.

Cuando en Madrid son las doce del día, en Jerusalén son las 2 y 40 minutos de la tarde: ¿cuál será, en kilómetros, la distancia máxima del meridiano de Jerusalén al de Madrid?

Resolución.

Para determinar en kilómetros la distancia máxima del meridiano de Jerusalén al de Madrid, necesitamos averiguar antes cuántos son los grados de longitud geográfica que median entre dichos dos meridianos, referidos esos grados á los del ecuador, por ser éstos, y no los de ningún paralelo, los que pueden darnos esa distancia máxima.

Para averiguar la longitud geográfica entre Jerusalén y Madrid, observaremos que *(probl. 3.º)* cada hora de diferencia en la medida del tiempo representa 15 grados de longitud geográfica: luego las 2 horas y 40 minutos = 2 $^2/_3$ horas que Jerusalén cuenta adelantadas con relación á Madrid, representarán 15 × 2 $^2/_3$ = 40 grados de longitud, que será oriental, tomando el meridiano de Madrid como punto de partida, y occidental, si se toma el de Jerusalén.

Ahora, como cada grado de ecuador vale 20 leguas, los 40 grados referidos valdrán 20 × 40 = 800 leguas; y como cada legua vale 5‘55555 kilómetros, las 800 leguas valdrán 5‘55555 × 800 = 4444‘440 kilómetros, los cuales constituyen la distancia máxima entre los dos meridianos en cuestión.

PROBLEMA 24.

A dos hermanos que iban á una fiesta les dió su padre la misma cantidad de dinero, de la cual gastó el primero de aquéllos 46 pesetas y el segundo 62. La cantidad que le quedó al 2.º hermano era $^1/_5$ de la que le quedó al primero. ¿Cuántas pesetas había recibido de su padre cada uno de los dos hermanos?

Resoluciones.

1.ª—Sea x las pesetas que el padre dió á cada uno de los dos hijos. Como el primero gastó 46 pesetas y el segundo 62, al primero le quedarían x — 46 pesetas y al segundo x — 62; y, como esta cantidad que le quedó al 2.º es $^1/_5$ de la que le quedó al 1.º, la ecuación será

$$x - 46 = (x - 62) \times 5.$$

Quitando el paréntesis, se tendrá

$$x - 46 = 5x - 310;$$

y, transponiendo y reduciendo, resultará

$$4x = 264;$$

de donde

$$x = \frac{264}{4} = 66 \text{ pesetas.}$$

2.ª—Como el primero de los dos hermanos gastó 46 pesetas y el segundo 62, resulta que el 1.º gastó 62 — 46 = 16 pesetas menos que el 2.º; y, como los dos hermanos habían recibido el mismo dinero, síguese que al 1.º le quedaron 16 pesetas más que al 2.º Luego, si representamos por q lo que le quedó al segundo, $q + 16$ será lo que le quedó al primero; y, como esta cantidad es quíntupla de aquélla, tendremos

$$5\ q = q + 16;$$

y, transponiendo y reduciendo, será

$$4\ q = 16;$$

de donde

$$q = \frac{16}{4} = 4.$$

Ahora, si el 2.º hermano gastó 62 pesetas y le quedaron 4, es que había recibido $62 + 4 = 66$: las mismas que recibió el otro hermano. En efecto, si al 2.º le quedaron 4 pesetas, al 1.º le quedarían $4 \times 5 = 20$; y, como había gastado 46, resulta que había recibido $46 + 20 = 66$.

3.ª—Si de la cantidad igual que el padre entregó á cada uno de sus dos hijos el 1.º gastó 46 pesetas y el segundo 62, el 1.º gastó $62 - 46 = 16$ pesetas menos que el 2.º. Luego al 1.º le quedaron 16 pesetas más que al 2.º; es decir, que al 1.º le quedó lo que al 2.º y 16 pesetas más; y, como se dice que la cantidad que le quedó al 1.º es 5 veces mayor que la que le quedó al 2.º, resulta evidente que el sumando 16 es 4 veces mayor que la cantidad que al 2.º le quedó: luego $16 : 4 = 4$ es la cantidad que le quedó al 2.º de los dos hermanos.

Ahora ya procédase como antes.

PROBLEMA 25.

De una partida de lienzo comprada á 2'50 pesetas metro, se han invertido $\frac{3}{5}$ en sábanas; $\frac{3}{4}$ del resto en camisas; y los 16 metros sobrantes, en almohadones. ¿Cuál es el importe de la partida de lienzo, y el de cada una de las 3 porciones en que se la ha dividido?

Resoluciones.

1.ª—Para determinar cada uno de los cuatro importes que se piden, necesitamos empezar por conocer el número de metros que constituye la longitud de la partida de lienzo de que se trata. Al efecto, llamaremos x á este número. Los metros invertidos en sábanas serán $\frac{3}{5}$ x. Luego han quedado $\frac{2}{5}$ x. De estos $\frac{2}{5}$ x se han invertido en camisas $\frac{3}{4}$: se habrán invertido, pues, $\frac{2}{5} x \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$ x, quedando, según los datos, 16 metros para emplearlos en almohadones. Luego la ecuación será

$$x - \frac{3}{5} x - \frac{6}{20} x = 16.$$

Quitando denominadores por medio del mínimo múltiplo, se tendrá

$$20 x - 12 x - 6 x = 320;$$

y, simplificando en el 1.^{er} miembro, resultará

$$2 x = 320;$$

de donde $x = \frac{320}{2} = 160$ metros.

El importe, pues, de estos 160 metros será 2'50 × 160 = 400 pesetas.

Como en sábanas se han invertido $\frac{3}{5}$ de los 160 metros, ó sea $160 \times \frac{3}{5} = 96$ metros, el importe de ellos será

2'50 × 96 = 240 pesetas; como los metros destinados á camisas son $\frac{6}{20}$ de los 160, ó sea 160 × $\frac{6}{20}$ = 48 metros, su importe será 2'50 × 48 = 120 pesetas; y, por último, como los metros empleados en almohadones son 16, su importe será 2'50 × 16 = 40 pesetas.

2.ª—Como la partida de lienzo, como toda cantidad, tiene $\frac{5}{5}$ y de ellos se han invertido en sábanas $\frac{3}{5}$, han quedado $\frac{2}{5}$. Como de estos $\frac{2}{5}$ se han destinado á camisas $\frac{3}{4}$, se habrán destinado $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$; luego habrán quedado $\frac{2}{5} - \frac{6}{20} = \frac{1}{10}$; y, como lo que ha quedado son 16 metros, estos 16 metros representan $\frac{1}{10}$ de la partida de lienzo; luego 16 × 10 = 160 metros serán los $\frac{10}{10}$ de la partida, ó sea toda ella.—Ahora ya se procede como en el razonamiento anterior.

Nota.—El importe de las sábanas y el de las camisas pueden hallarse prontamente diciendo: si á sábanas se han destinado $\frac{3}{5}$ de los 160 metros, su importe será $\frac{3}{5}$ del valor de los 160 metros: será pues, 400 × $\frac{3}{5}$ = 240 pesetas; y, si en camisas se han invertido $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ de los 160 metros, su importe será $\frac{3}{10}$ del importe de éstos: será pues, 400 × $\frac{3}{10}$ = 120 pesetas. Y, si ahora se quisiera saber cuántos metros se habían destinado, tánto á sábanas como á camisas, nos lo diría el cociente de dividir el importe respectivo por el precio del metro.

PROBLEMA 26.

Con la mitad de 7 cuartas de vara de terciopelo, comprado á 34 $\frac{1}{2}$ reales la tercia, se han hecho 2 chalecos. ¿Cuánto costará la tela de 13 chalecos iguales á los anteriores?

Resolución.

Si 1 tercia de vara de terciopelo ha costado 34‘5 reales, las tres tercias que tiene la vara costarán 3 veces más: costarán, pues, 34‘5 × 3 = 103‘5 reales. Si estos reales cuesta 1 vara = 4 cuartas, 1 cuarta costará 4 veces menos; ó sea $\frac{103'5}{4}$; y si esto cuesta 1 cuarta, las 7 compradas costarán 7 veces más, esto es, $\frac{103'5 \cdot 7}{4}$ reales. Si estos reales cuestan las 7 cuartas compradas, la mitad de ellas, que es la tela empleada en la hechura de los dos chalecos, costará la mitad del importe de las 7 cuartas: costará, pues, $\frac{103'5 \cdot 7}{4 \cdot 2}$ reales; y, si esta cantidad cuesta la tela de los 2 chalecos, la de 1 de ellos costará la mitad; ó sea, $\frac{103'5 \cdot 7}{4 \cdot 2 \cdot 2}$; y la de los 13 chalecos costará 13 veces más; esto es, $\frac{103'5 \cdot 7 \cdot 13}{4 \cdot 2 \cdot 2} = 588'66$ reales.

PROBLEMA 27.

Un sujeto, al morir, ordenó en su testamento que de las 76.800 pesetas que constituían su capital se destinase la 6.ª parte á sufragios para su alma, la 4.ª parte á determinado establecimiento benéfico, la mitad á la construcción de un edificio para escuelas y el resto al socorro por igual de los pobres de su pueblo. Al hacer esta última distribución se observó que á cada pobre correspondían tan-

tas pesetas cuantos eran los pobres. ¿Cuál es la cantidad destinada á cada uno de los fines expresados por el testador y cuántos eran los pobres y cuántas las pesetas que cada uno de ellos recibió?

Resolución.

La cantidad destinada á sufragios es 76800 : 6 = 12800 pts.
La destinada al establecimiento benéfico. 76800 : 4 = 19200 »
La destinada á construcción de escuelas. 76800 : 2 = 38400 »
Suma, 70400 »

La cantidad destinada á los pobres es 76800 — 70400= 6400.

Ahora, como, según los datos, cada pobre recibió tantas pesetas como pobres había, resulta que 6400 es el cuadrado del número de pobres y el del número de pesetas que cada uno recibió. Luego la $\sqrt{6400} = 80$ (a) expresa á la vez estos dos números, el de pobres y el de pesetas recibidas por cada uno de ellos.

PROBLEMA 28.

¿Cuál es el número que, disminuido en su mitad y aumentado en su tercio y en su quinto, da por resultado el mismo número?

Resolución.

Sea n el número que se pide: su mitad será $\frac{n}{2}$; su tercio, $\frac{n}{3}$: y su quinto $\frac{n}{5}$: luego la ecuación será

$$n - \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{5} = n.$$

(a) La raíz cuadrada de 6400 puede extraerse de memoria. En efecto, 6400 es igual á 64×100; y, como una raíz, *cualquiera*, de un producto es igual al producto de las raices del mismo grado de sus factores, será $\sqrt{6400} = \sqrt{64} \times \sqrt{100} = 8 \times 10 = 80$.

Quitando denominadores, tendremos

$$30\,n - 15\,n + 10\,n + 6\,n = 30\,n;$$

y reduciendo términos semejantes en el 1.^{er} miembro de la ecuación, resultará esta otra

$$31\,n = 30\,n. \text{ (1).}$$

Pasando el 2.° miembro al 1.° se tendrá

$$31\,n - 30\,n = 0;$$

de donde

$$n = 0.$$

Este particular resultado nos dice que no hay ningún número que llene las condiciones del problema.

En efecto, si á un número *cualquiera* se le disminuye en su mitad, quedará reducido á su otra mitad. Si ahora á esta mitad se le agregan el tercio y el quinto del mismo número, como el tercio es igual á $\frac{5}{15}$ y el quinto lo es á $\frac{3}{15}$ y, por consiguiente, la suma del tercio y del quinto es igual á $\frac{8}{15}$, resulta que á la 2.ª mitad se le agrega más de otra mitad: luego la agregación no puede dar el número propuesto, sinó otro que excederá al propuesto en la mitad de $\frac{1}{15}$, ó sea en $\frac{1}{80}$ de dicho número.

---

(1) Esta ecuación $31\,n = 30\,n$ nos dice ya con toda evidencia que el problema propuesto es absurdo.

PROBLEMA 29.

Un negociante en vinos compró una partida, que luégo pudo vender, y no lo hizo, á 4'25 pesetas decalitro, obteniendo una ganancia de 1400 pesetas, y que más tarde, por depreciación del género, tuvo que vender á 3 pesetas decalitro, sufriendo una pérdida de 2500 pesetas. ¿A cuántos decalitros ascendió la partida de vino comprada por el negociante y á qué precio la adquirió éste?

Resoluciones.

1.ª—Sea x el número de decalitros de vino comprado poı el negociante y p el número de pesetas que le costaron. La venta que el negociante pudo hacer nos da la ecuación

$$4'25\ x = p + 1400,$$

y la venta que hizo nos da esta otra

$$3\ x = p - 2100.$$

Restando ordenadamente estas dos ecuaciones, resulta esta tercera

$$4'25\ x - 3\ x = p + 1400 - p + 2100;$$

ó bien, simplificando,

$$1'25\ x = 3500;$$

de donde

$$x = \frac{3500}{1'25} = 2800 \text{ decalitros}$$

Ahora, fijándonos en cualquiera de los dos precios de venta, en el 1.º, por ejemplo, tendremos que los 2800 decalitros, vendidos á 4'25 pesetas, importan $4'25 \times 2800 = 11900$ pesetas; y, como este importe se compone de las p pesetas desembolsadas por el negociante y de las 1400 de ganancia, es evidente que, si de las 11900 restamos estas 1400, el resto $11900 - 1400 = 10500$ pesetas serán el valor de p, ó sea las que al negociante le costaron los 2800 decalitros de vino: luego el valor de uno de ellos será 10500 : 2800 = 3'75 pesetas.

2.ª—De ganar el negociante en la 1.ª venta, si la hubiese hecho, 1400 pesetas, á perder en la segunda 2100, la diferencia para él es 1400 + 2100 = 3500 pesetas; y, como esta diferencia en los valores de todos los decalitros proviene de multiplicar por el número de éstos la diferencia 4'25 — 3 = 1'25 de los precios, ó sea la diferencia de los valores de un decalitro, es palmario que, si dividimos la 1.ª diferencia por la 2.ª, el cociente 3500 : 1'25 = 2800 será el número de decalitros comprados por el negociante.

Determinemos ahora el precio del decalitro.

Si los 2800 decalitros vendidos á 4'25 pesetas, hubieran producido en la 1.ª venta 1400 de ganancia, 1 solo de ellos hubiera producido 1400 : 2800 = 0'50: luego 4'25 — 0'50 = 3'75 pesetas es el precio que se busca.

Lo mismo puede decirse: si en la venta hecha por el negociante á 3 pesetas decalitro los 2800 produjeron 2100 pesetas de pérdida, 1 solo de ellos la produciría de 2100 : 2800 = 0'75: luego 3 + 0'75 = 3'75 pesetas es el precio que se pide.

PROBLEMA 30.

¿Qué número es aquél del cual, si se restan sus $\frac{5}{9}$ quedan de resto $\frac{3}{5}$ de 2800?

Resoluciones.

1.ª—Sea x el número que se pide: sus $\frac{5}{9}$ serán $\frac{5x}{9}$. Luego la ecuación será.

$$x - \frac{5x}{9} = 2800 \times \frac{3}{5}.$$

Quitando los denominadores, tendremos

$$45\ x - 25\ x = 2800 \times 27;$$

y, simplificando, se tendrá

$$20\ x = 75600;$$

de donde

$$x = \frac{75600}{20} = 3780.$$

2.ª—Como todo número tiene $\frac{9}{9}$, si del que nos piden se restan $\frac{5}{9}$ suyos, quedarán los otros $\frac{4}{9}$, los cuales valen tanto como $\frac{3}{5}$ de 2800. Hallemos estos $\frac{3}{5}$. Es evidente que $2800 : 5 = 560$ representa $\frac{1}{5}$ de 2800. Luego $560 \times 3 = 1680$ serán sus $\frac{3}{5} = \frac{4}{9}$ del número pedido. Puesto que el número 1680 representa $\frac{4}{9}$ del que se pide, $1680 : 4 = 420$ representará $\frac{1}{9}$, y $420 \times 9 = 3780$ representará los $\frac{9}{9}$ del número pedido, ó todo este número.

PROBLEMA 31

Dadas la suma y la diferencia de dos números, cualesquiera, determinar estos dos números.

Resoluciones.

1.ª—Puesto que hay diferencia entre los dos números de que se trata, el uno será mayor que el otro. Sea, pues, M el número mayor y m el menor y sean S la suma y D la diferencia de estos dos números. Según los datos, tendremos

$$M + m = S$$

y

$$M - m = D.$$

Despejando á m en la 1.ª ecuación y sustituyendo su valor S — M en la 2.ª, ésta se transformará en

$$M - (S - M) = D;$$

ó bien en

$$M - S + M = D;$$

y, transponiendo á $-S$ y sumando á $M + M$, se tendrá

$$2\,M = S + D;$$

de donde

$$M = \frac{S + D}{2}$$

Si en la 1.ª ecuación despejáramos, en vez de m, á M, deduciríamos que es

$$m = \frac{S - D}{2}.$$

Estas dos fórmulas $\left\{ \begin{array}{l} M = \dfrac{S + D}{2} \\ \text{y } m = \dfrac{S - D}{2} \end{array} \right\}$ nos dicen que *el número mayor es igual á la semisuma de la suma* y *diferencia dadas* y que *el número menor es igual á la semidiferencia de dichas suma y diferencia.*

Si en las fórmulas $M = \dfrac{S + D}{2}$ y $m = \dfrac{S - D}{2}$ efectuamos la división indicada en el segundo miembro, se convertirán en estas otras

$$M = \frac{S}{2} + \frac{D}{2}$$

$$\text{y } m = \frac{S}{2} - \frac{D}{2},$$

las cuales dicen que *el número mayor es igual á la mitad de la suma, mas la mitad de la diferencia*, y que *el número menor es igual á la mitad de la suma, menos la mitad de la diferencia.*

2.ª—Sea M el número mayor: el menor será $S - M$. Luego la ecuación será,

$$M - (S - M) = D;$$

de donde, despejando á M, va resultando

$$M - S + M = D,$$
$$2\ M - S = D,$$
$$2\ M = S + D$$

y $$M = \frac{S + D}{2}$$ (a), como antes

3.ª—Si á la suma S de los dos números M y *m* agregamos la diferencia D de los mismos, la nueva suma será S + D. El sumando S de esta nueva suma se compone del número mayor M y del menor *m* y, como el otro sumando D representa la diferencia entre M y *m*, ó, lo que es igual, constituye lo que le falta á *m* para ser igual á M, resulta que la suma S + D es el duplo del número mayor M. Luego, si se la divide por 2, el cociente $\frac{S + D}{2}$ será el número mayor. Luego $M = \frac{S + D}{2}$.

(a) Hallado uno cualquiera de los dos números, está *ipso facto* determinado el otro, pues que éste será la diferencia entre la suma dada *S* y el número conocido. Así pues, si, como hemos averiguado, es el número mayor $M = \frac{S + D}{2}$, será el menor

$$m = S - \frac{S + D}{2} = \frac{2\ S}{2} - \frac{S + D}{2} = \frac{2\ S - (S + D)}{2} = \frac{2\ S - S - D}{2} = \frac{S - D}{2}.$$

De la misma manera, si es el número menor $m = \frac{S - D}{2}$, será el mayor

$$M = S - \frac{S - D}{2} = \frac{2\ S}{2} - \frac{S - D}{2} = \frac{2\ S - (S - D)}{2} = \frac{2\ S - S + D}{2} = \frac{S + D}{2}.$$

De la misma manera: si de la suma S que representa á M + m, restamos la diferencia D, es como si la restáramos de M, en cuyo caso la nueva diferencia S — D contendrá 2 veces á m, ó bien, será dupla de m. Luego, si la dividimos por 2, el cociente $\frac{S-D}{2}$ será igual á m. Luego $m = \frac{S-D}{2}$.

4.ª – La suma S contiene al número mayor y al menor: luego su mitad $\frac{S}{2}$ contendrá á la mitad de cada uno de estos dos números. Si ahora á la mitad de la suma, $\frac{S}{2}$, agregamos la mitad de la diferencia, la nueva suma $\frac{S}{2} + \frac{D}{2}$ contendrá á la mitad del número mayor, mas la mitad del número menor, mas la mitad de la diferencia entre mayor y menor; y, como la mitad del número menor más la mitad de la diferencia entre mayor y menor constituyen la mitad del número mayor, resulta que la expresada suma $\frac{S}{2} + \frac{D}{2}$ contiene 2 veces á la mitad del número mayor, ó una á todo él. Luego $M = \frac{S}{2} + \frac{D}{2}$.

De igual manera: la mitad de S, ó sea $\frac{S}{2}$, representa la mitad del número mayor mas la mitad del menor. Si ahora de $\frac{S}{2}$ se resta la mitad de la diferencia entre los números mayor y menor, ó sea $\frac{D}{2}$, como cabe restarla de la mitad del número mayor, esta mitad quedará reducida é igualada á la mitad del número menor. Luego la diferencia $\frac{S}{2} - \frac{D}{2}$

contiene 2 veces á la mitad del número menor, ó una vez á todo él. Luego

$$m = \frac{S}{2} - \frac{D}{2}\ (1).$$

Nota 1.ª—Cuando los números que se piden se diferencian solo en 1 unidad, pueden determinarse por las fórmulas que acabamos de deducir; pero su determinación se hace aún más prontamente considerando que en este caso *la suma es igual al duplo del número menor, mas 1,* ó *al duplo del mayor, menos 1.* Y, aun cuando esto puede deducirse de las expresadas fórmulas, lo demostraremos directamente. En efecto, sea m el número menor: el mayor será $m + 1$. Luego la suma, S, será

$$S = m + (m + 1) = m + m + 1 = 2\ m + 1.$$

De la misma manera, si llamamos M al número mayor, el menor será M — 1. La suma en este caso será

$$S = M + (M - 1) = M + M - 1 = 2\ M - 1.$$

Nota 2.ª—De los razonamientos anteriores se deducen naturalmente las siguientes igualdades, de algunas de las cuales haremos uso en problemas ulteriores:

$$S = M + m \qquad M = S - m$$

$$S = 2m + D \qquad M = m + D$$

$$S = 2M - D \qquad M = \frac{S}{2} + \frac{D}{2}$$

$$D = M - m \qquad m = S - M$$

$$D = S - 2m \qquad m = M - D$$

$$D = 2M - S \qquad m = \frac{S}{2} - \frac{D}{2}$$

---

(1) Los razonamientos de esta clase constituyen verdadera gimnasia intelectual; sin embargo, por breves y concisos que se los quiera hacer, á causa de las inevitables repeticiones tienen siempre que resentirse de difusos y pesados y de expuestos á equivocaciones. Todo esto viene á constituir en gran parte las desventajas que sobre el lenguaje algebráico ofrece el vulgar ú ordinario.

PROBLEMA 32

La suma de dos números es 64 y su producto 1008. ¿Cuáles son estos dos números?

Res luciones.

1.ª—Si cuadramos la suma 64 de los dos números pedidos, su cuadrado $64^2 = 4096$ contendrá la suma de los cuadrados de los dos números, mas el doble producto de los mismos números; y si ahora de esta cantidad 4096 restamos el cuádruple producto de los dos números, que es $1008 \times 4 = 4032$, el resto $4096 - 4032 = 64$ contendrá la suma de los cuadrados de los dos números, menos el doble producto de éstos: es decir que dicho resto 64 representa el cuadrado de la diferencia de los dos números. Luego la $\sqrt{64} = 8$ será ésta diferencia. Ahora, siendo 64 la suma de los dos números y 8 su diferencia, los números *(problema 31)* serán

$$\text{M, el mayor, } = \frac{64}{2} + \frac{8}{2} = 36$$

$$\text{y } m\text{, el menor, } = \frac{64}{2} - \frac{8}{2} = 28.$$

2.ª—Sea x uno cualquiera de los dos números; el otro será $64 - x$. El producto de estos dos números habrá de ser $x \times (64 - x) = 64\,x - x^2$; y, como se nos dice que este producto es igual á 1008, la ecuación será

$$64\,x - x^2 = 1008;$$

ó bien, cambiando los signos,

$$x^2 - 64\,x = -1008 \qquad \text{(A)}$$

Y, pasando el 2.º miembro á servir de término al 1.º, se tendrá

$$x^2 - 64\,x + 1008 = 0. \qquad \text{(B)}$$

Tenemos aquí una ecuación completa de 2.º grado, cuyo primer término no está afectado de coeficiente: *la incógnita, según la fórmula general correspondiente, es igual á la mitad del coeficiente del 2.º término, mudado el signo, mas menos la raíz cuadrada del cuadrado de dicha mitad, sumado con el 3.er término, mudado el signo.* Será, pues,

$$x = 32 \pm \sqrt{32^2 - 1008}$$

ó bien

$$x = 32 \pm \sqrt{16};$$

ó sea

$$x = 32 \pm 4 = \begin{cases} 32 + 4 = 36 \\ 32 - 4 = 28. \end{cases}$$

Resulta, pues, que los dos números pedidos son 36 y 28.

Nota 1.ª—Si en este problema, como en todos los de su clase, se quiere prescindir de la ecuación de 2.º grado, ya porque se desconoce su teoría, ya porque no se recuerda su fórmula, puede muy bien hacerse. Al llegar á la ecuación (A), $x^2 - 64\ x = -1008$, diríamos: considerando al coeficiente del 2.º término, — 64, como lo que es, y le sucede á todo número, como el duplo de su mitad, — 32, si elevamos al cuadrado el binomio $x - 32$, resultará

$$(x - 32)^2 = x^2 - 2 \cdot 32\ x + 32^2;$$

ó bien

$$(x - 32)^2 = x^2 - 64\ x + 1024.$$

Comparando este resultado $x^2 - 64\,x + 1024$ con $x^2 - 64\ x$, primer miembro de dicha ecuación (A), se ve que, para que este primer miembro sea cuadrado perfecto, le falta el término 1024. Luego, si se lo agregamos, lo convertiremos en el cuadrado de $x - 32$, Agreguémoselo y tambien al 2.º miembro, para que subsista la ecuación. Hecha la agregación, la ecuación (A) se habrá transformado en esta otra

$$x^2 - 64\ x + 1024 = -1008 + 1024;$$

ó bien

$$x^2 - 64\ x + 1024 = 16.$$

Como los dos miembros de esta ecuación son iguales, sus raices cuadradas lo son también. La raíz cuadrada del 1.º es, como ya sabemos, x — 32 y la del 2.º es 4; luego

$$x - 32 = 4;$$

de donde

$$x = 4 + 32 = 36.$$

Si, como se ve, uno de los dos números pedidos es 36, el otro será, ó 64 — 36 = 28, ó 1008 : 36 = 28.

Nota 2.ª—Si fijamos la consideración en la ecuación (B), *ya preparada*, observaremos que el coeficiente — 64 del 2.º término es la suma de las raices de la ecuación, ó sea de los dos valores de la incógnita, *cambiado el signo*, y que el 3.er término 1008 es el producto de dichas dos raices ó valores. Esto, que es general á todos los problemas de la clase del que consideramos, nos dice que siempre que conozcamos la suma s y el producto p de dos cantidades y queramos determinar cuáles son éstas, lo podemos conseguir directa é inmediatamente formando desde luego y resolviendo la ecuación

$$x^2 - s\ x + p = 0:$$

las 2 raices de esta ecuación, ó los 2 valores que resulten para la incógnita x, son las 2 cantidades que se buscan.

PROBLEMA 33.

La suma de dos números es 368 y su cociente 7, ¿Cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Como de los dos números que se piden el uno contiene al otro 7 veces, estos dos números no pueden ser iguales, sinó desiguales. Sea, pués, x el número menor: el mayor será 7 x; y la suma de ambos tendrá que ser $x + 7x = 8x$; y, como, según los datos, esta suma es 368, se tendrá la ecuación

$$8x = 368;$$

de donde

$$x = \frac{368}{8} = 46.$$

Si el número menor es 46, el mayor será, ó $368 - 46 = 322$, ó $46 \times 7 = 322$.

Resulta, pues, que los números pedidos son 46 y 322.

2.ª—La suma 368 contiene una vez al número mayor y otra al número menor; y, como el mayor, según el dato que se refiere al cociente, contiene 7 veces al número menor, resulta que la suma se compone de 8 veces el número menor: luego, dividiéndola por 8, el cociente 46 será el número menor.

El número mayor se determina como antes.

PROBLEMA 34.

La suma de dos números es 523, su cociente entero 12 y el residuo de su división 29. ¿Cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Sea x el número menor, ó que hace de divisor: el mayor, ó que hace de dividendo, será $12x + 29$, pues en toda división inexacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente entero, mas el residuo. La suma de estos dos numeros tendrá que ser $x + 12x + 29 = 13x + 29$; y, como, según los datos, esta suma es 523, la ecuación será

$$13x + 29 = 523.$$

Pasando el 29 al 2.º miembro, se tendra

$$13x = 523 - 29;$$

ó bien $13\ x = 494;$

de donde

$$x = \frac{494}{13} = 38.$$

Si el número menor es 38, el mayor será $38 \times 12 + 29 = 485$, como es facil comprobar.

2.ª—La suma 523 contiene una vez al número mayor y otra al número menor; mas, como el número mayor equivale á 12 veces el número menor, mas el residuo, resulta que dicha suma contiene 13 veces al número menor y una al residuo: luego, si le restamos el residuo, el resto $523 - 29 = 494$ contendrá 13 veces al número menor: luego, si á este resto 494 le dividimos por 13, el cociente $494 : 13 = 38$ será el número menor.

El número mayor se determina como antes.

PROBLEMA 35.

La diferencia de dos números es 16 y su producto 2337, ¿Cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Si cuadramos la diferencia 16 de los dos números que se nos piden, su cuadrado $16^2 = 256$ se compondrá de la suma de los cuadrados de los dos números, menos el doble producto de éstos; y si ahora agregamos á esta cantidad 256 el cuádruple producto de dichos números, que es $2337 \times 4 = 9348$, la suma $256 + 9348 = 9604$ se compondrá de la suma de los cuadrados de los dos números y del doble producto de éstos: es decir que representará el cuadrado de la suma de los dos números. Luego la $\sqrt{9604} = 98$ será la suma. Ahora, siendo 98 la suma de los dos números y 16 su diferencia, los números *(problema 31)* serán

$$M\text{, el mayor, } = \frac{98}{2} + \frac{16}{2} = 57$$
$$y\ m\text{, el menor, } = \frac{98}{2} - \frac{16}{2} = 41.$$

2.ª—Sea x el número menor: el mayor será $x + 16$. Siendo x el número menor y $x + 16$ el mayor, su producto será $x \times (x + 16) = x^2 + 16\,x$: luego la ecuación será

$$x^2 + 16\,x = 2337.$$

Trasladando el 2.º miembro al 1.º, se tendrá

$$x^2 + 16\,x - 2337 = 0; \qquad (A)$$

ecuación completa de 2.º grado en su forma general. Aplicando ahora los procedimientos seguidos en la 2.ª resolución del problema 32, resultará lo que en la 1.ª resolución se ha obtenido.

Nota 1.ª—Si fijamos la atención en la ecuación (A), *ya preparada*, observaremos que el coeficiente, $+ 16$, del 2.º término es la diferencia de las raices de la ecuación, ó sea de los dos valores de la incógnita, y que el tercer término, $- 2337$, es el producto de dichas dos raices ó valores, *cambiado el signo*. Esto, que es general á todos los problemas de la clase del que consideramos, nos dice que, siempre que conozcamos la diferencia d y el producto p de dos cantidades y queramos determinar cuáles son éstas, lo podemos conseguir directa é inmediatamente formando desde luego y resolviendo la ecuación.

$$x^2 + d\,x - p = 0:$$

las dos raices de esta ecuación, ó los dos valores que resulten para la incógnita x son las dos cantidades que se buscan.

Nota 2.ª—Cuando los números que se piden se diferencian en una sola unidad pueden determinarse por cualquiera de los dos procedimientos que dejamos expuestos; pero su determinación se hace más prontamente considerando que en este caso *el producto es igual al cuadrado del número menor, mas el número menor*. Por manera que el número menor nos lo da la raiz cuadrada entera del producto y también el residuo de esta raíz.

Igualmente, *el producto es igual al cuadrado del número mayor, menos este número.*

Estas dos proposiciones subrayadas se demuestran directamente con suma facilidad. En efecto, sea m el número menor: el mayor será $m + 1$. Llamando p al producto de ambos, se tendrá

$$p = m \times (m + 1) = m^2 + m.$$

Si llamamos M al número mayor, el menor será M — 1. El producto entonces será

$$p = M \times (M - 1) = M^2 - M.$$

PROBLEMA 36.

La diferencia de dos números es 455 y su cociente 8. ¿Cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Sea x el número menor: el mayor será 8 x; y, como la diferencia de estos dos números es 455, la ecuación será

$$8\ x - x = 455;$$

ó bien

$$7\ x = 455;$$

de donde

$$x = \frac{455}{7} = 65.$$

Si el número menor es 65, el mayor será, ó 455 + 65 = 520, ó 65 × 8 = 520.

2.ª—Según el enunciado, el número mayor contiene 8 veces al número menor; y, como también contiene una vez al número menor y otra á la diferencia 455, resulta que esta diferencia 455 tiene que contener 7 veces al número menor: luego el cociente de 455 : 7 = 65 tiene que ser el número menor.

El mayor se determina como antes.

PROBLEMA 37.

La diferencia de dos números es 1126, su cociente entero 14 y el residuo de su división 8. ¿Cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª – Sea x el número menor: el mayor será, 14 x + 8: luego la ecuación será

$$14\ x + 8 - x = 1126;$$

ó bien

$$13\ x + 8 = 1126;$$

y pasando el término 8 al 2.° miembro, se tendrá

$$13\ x = 1126 - 8 = 1118:$$

de donde

$$x = \frac{1118}{13} = 86.$$

Siendo 86 el número menor, el mayor será, bien 1126 + 86 = 1212, bien 86 × 14 + 8 = 1212.

2.ª—Según los términos del enunciado, el número mayor contiene 14 veces al número menor y una vez al residuo 8, y ese mismo número mayor contiene una vez al número menor y otra á la diferencia 1126: luego esta diferencia contiene 13 veces al número menor y otra al residuo 8: luego, si de la diferencia se resta el residuo, el resto 1126 – 8 = 1118 contendrá 13 veces al número menor: luego, si á este resto lo dividimos por 13, el cociente 1118 : 13 = 86 será el número menor.

El mayor se determina como antes.

PROBLEMA 38.

El producto de dos números es 9216 y su cociente 9. ¿Cuáles son estos dos números?

Resolución.

Sea x el número menor: el mayor será 9 x, y el producto de ambos $x \times 9x = 9x^2$: luego la ecuación será

$$9x^2 = 9216.$$

Quitando el coeficiente 9, se tendrá

$$x^2 = \frac{9216}{9} = 1024;$$

de donde

$$x = \sqrt{1024} = 32.$$

Siendo 32 el número menor, el mayor será, ó $9216 : 32 = 288$, ó $32 \times 9 = 288$.

PROBLEMA 39.

El producto de dos números es 840, su cociente entero 5 y el residuo de su división 10 ¿Cuáles son estos dos números?

Resolución.

Sea x el número menor: el mayor será $5x + 10$, y su producto $x \times (5x + 10)$: luego la ecuación será

$$x \times (5x + 10) = 840.$$

Quitando el paréntesis del 1.er miembro, se tendrá

$$5x^2 + 10x = 840;$$

y, suprimiendo el coeficiente 5 del 1.er término, resultará

$$x^2 + 2x = 168; \qquad (A)$$

y pasando el 2.º miembro al 1.º, tendremos

$$x^2 + 2x - 168 = 0;$$

ecuación completa de 2.º grado en la forma general, que, resuelta como la del problema 32, dará por resultado

$$x = -1 \begin{array}{c} + 13 = \quad 12 \\ - 13 = -14, \end{array}$$

Como el valor negativo, — 14, no tiene aplicación en este caso, resulta en definitiva que es x = 12.

Siendo 12 el número menor, el mayor será, bien 840 : 12 = 70, bien 12 × 5 + 10 = 70.

Nota. Obtenida la ecuación (A), $x^2 + 2x = 168$, si no quiere hacerse uso de la fórmula de la ecuación completa de 2.º grado, se puede aplicar el procedimiento seguido en la nota 1.ª del problema 32.

PROBLEMA 40.

Hallar dos números cuya suma sea 84 y cuya diferencia sea 16.

Resolución.

Este problema es un caso particular del problema general número 31. Aplicando á la resolución de este caso las primeras fórmulas generales $M = \frac{S + D}{2}$ y $m = \frac{S - D}{2}$ se tendrá:

$$\left.\begin{array}{rl} & M = \frac{84 + 16}{2} = \frac{100}{2} = 50 \\ \text{y} & m = \frac{84 - 16}{2} = \frac{68}{2} = 34 \end{array}\right\} \text{84, suma.}$$

$$\overline{16}\text{, diferencia.}$$

Si aplicamos las segundas fórmulas generales $M = \frac{S}{2} + \frac{D}{2}$ y $m = \frac{S}{2} - \frac{D}{2}$, tendremos:

$$M = \frac{84}{2} + \frac{16}{2} = 42 + 8 = 50$$

y $$m = \frac{84}{2} - \frac{16}{2} = 42 - 8 = 34$$

Haciendo la comprobación, se verá que los números 50 y 34 llenan las condiciones del enunciado: son, pues, los verdaderos.

Nota.—Si en la resolución de este problema particular se prescinde de las fórmulas del general á que corresponde, para resolverle hay que hacer los mismos razonamientos que en el general se hicieron para la deducción de las expresadas fórmulas.

PROBLEMA 41.

Un caballero salió de casa y sucesivamente se encontró con tres pobres que le demandaron limosna: al primero de ellos le dió la tercera parte de las monedas de 5 céntimos que llevaba y $\frac{2}{3}$ de otra; al segundo, la tercera parte de las que le habían quedado y $\frac{2}{3}$ de otra; y al tercero, la tercera parte de las que le restaban y $\frac{2}{3}$ de otra, habiéndole quedado 6 monedas. ¿Con cuántas salió de casa?

Resoluciones.

1.ª—Sea x las monedas de 5 céntimos con que salió de casa el caballero. Si al 1.^{er} pobre le dió la 3.ª parte de estas monedas y $\frac{2}{3}$ de otra, le daría $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Luego le quedarían $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ Si de estas monedas dió al 2.º pobre la 3.ª parte y $\frac{2}{3}$ de otra, le daría

$$\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right) : 3 + \frac{2}{3} = \frac{2}{9}x - \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{2}{9}x + \frac{4}{9}.$$

Luego le quedaría la diferencia entre lo que tenía y lo que dió; esto es,

$(\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}) - (\frac{2}{9}x + \frac{4}{9}) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} - \frac{2}{9}x - \frac{4}{9} = \frac{6}{9}x - \frac{6}{9} - \frac{2}{9}x - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}x - \frac{10}{9}$.
Si de estas monedas dió al 3.$^{\text{er}}$ pobre la 3,ª parte y $\frac{2}{3}$ de otra, le daría.
$(\frac{4}{9}x - \frac{10}{9}) : 3 + \frac{2}{3} = \frac{4}{27}x - \frac{10}{27} + \frac{2}{3} = \frac{4}{27}x + \frac{8}{27}$.
Luego le quedaría la diferencia entre lo que tenía y lo que dió; esto es, $(\frac{4}{9}x - \frac{10}{9}) - (\frac{4}{27}x + \frac{8}{27}) = \frac{4}{9}x - \frac{10}{9} - \frac{4}{27}x - \frac{8}{27} = \frac{12}{27}x - \frac{30}{27} - \frac{4}{27}x - \frac{8}{27} = \frac{8}{27}x - \frac{38}{27}$. Y, como le quedaron 6 monedas, la ecuación será

$$\frac{8}{27}x - \frac{38}{27} = 6;$$

y, quitando el denominador, se tendrá

$$8x - 38 = 162;$$

y, transponiendo el -38, resultará

$$8x = 200;$$

de donde

$$x = \frac{200}{8} = 25 \text{ monedas},$$

de las cuales dió:

al 1$^{\text{er}}$ pobre.	$\frac{25}{3} + \frac{2}{3} = \frac{27}{3} = 9$
al 2.º id.	$\frac{16}{3} + \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$
y al 3.º id.	$\frac{10}{3} + \frac{2}{3} = \frac{12}{3} = 4$
Sobrantes.	6
Total.	25

2.ª—Si el caballero dió al 3.$^{\text{er}}$ pobre $^1/_3$ de las monedas que tenía y $^2/_3$ de otra moneda, le quedarían $^2/_3$ de dichas monedas, menos $^2/_3$ de una de ellas; y, pues le quedaron 6 monedas, 6 $^2/_3$ serán los $^2/_3$ cabales de las monedas que el caballero tenía al acercársele el 3.$^{\text{er}}$ pobre. Luego, si á 6 $^2/_3$

le agregamos su mitad 3 $^1/_3$, la suma 6 $^2/_3$ + 3 $^1/_3$ = 10 será el número de monedas que en aquel entonces tenía.

Si al 2.º pobre le dió $^1/_3$ de las monedas que tenía y $^2/_3$ de otra, le quedarían los otros $^2/_3$ de dichas monedas menos $^2/_3$ de una de ellas; y, pues le quedaron 10 monedas, 10 $^2/_3$ serán los $^2/_3$ cabales de las expresadas monedas. Luego, si á 10 $^2/_3$ le agregamos su mitad 5 $^1/_3$, la suma 10 $^2/_3$ + 5 $^1/_3$ = 16 será el número de monedas que el caballero tenía al acercársele el 2.º pobre.

Si al 1.^{er} pobre le dió el caballero $^1/_3$ de las monedas con que salió de casa y $^2/_3$ de otra moneda, le quedarían los otros $^2/_3$ de dichas monedas, menos los $^2/_3$ de una de ellas; y, pues le quedaron 16 monedas, 16 $^2/_3$ serán los $^2/_3$ cabales de las referidas monedas. Luego, si á 16 $^2/_3$ le agregamos su mitad 8 $^1/_3$, la suma 16 $^2/_3$ + 8 $^1/_3$ = 25 será el total de monedas con que salió de casa el caballero.

PROBLEMA 42.

En un saco hay 90 monedas de plata, que en total representan 280 pesetas: de dichas 90 monedas, unas son de peseta, otras de dos y otras de 5, estando las segundas con las primeras en la relación de 3 es á 2. ¿Cuántas monedas hay de cada una de las tres clases?

Resoluciones.

1.ª—Sean x las monedas de peseta, y las de 2 y z las de 5. Tendremos

$$x + y + z = 90 \text{ monedas.}$$

También tendremos

$$x + 2y + 5z = 280 \text{ pesetas.}$$

Y, como se nos dice que por cada 3 monedas de 2 pesetas hay 2 de peseta, tendremos también

$$y : x : : 3 : 2;$$

de donde
$$2\,y = 3\,x \qquad \text{(A)}$$

Tenemos, pues, un sistema de tres ecuaciones de 1.^{er} grado con igual número de incógnitas. Despejando la incógnita x en la 1.^{a} ecuación y sustituyendo, para eliminarla, su valor en las otras dos, resultarán, *después de simplificadas*, las dos siguientes:

$$y + 4\,z = 190$$
$$5\,y + 3\,z = 270$$

Despejando ahora á y en la 1.^{a} de estas dos ecuaciones y sustituyendo su valor en la 2.^{a}, se tendrá, *simplificada yá*, esta 3.^{a}

$$17\,z = 680;$$

de donde
$$z = \frac{680}{17} = 40.$$

Sustituyendo ahora el valor 40 de z en cualquiera de las dos ecuaciones inmediatamente anteriores y despejando en ella á y, tendremos

$$y = 30.$$

Por consiguiente, el valor de x (que podríamos determinar sustituyendo á y con su valor 30 en la ecuación (A), $3\,y = 2\,x$, ó los valores de z y de y en la 1.^{a} ecuación) será

$$90 - (40 + 30) = 90 - 70 = 20.$$

2.^{a}—Sean x las monedas de peseta: las de 2 pesetas serán $\frac{3\,x}{2}$, y las de 5 pesetas, $90 - x - \frac{3\,x}{2}$. El valor, en pesetas, de las 1.^{as} monedas es x; el de las segundas, $\frac{3\,x}{2} \times 2 = 3\,x$; y el de las terceras, $\left(90 - x - \frac{3\,x}{2}\right) \times 5 = 450 - 5\,x - 7\text{‘}5\,x$. Luego la ecuación será

$$x + 3\,x + 450 - 5\,x - 7\text{‘}5\,x = 280 \text{ pesetas}$$

ó bien, trasponiendo el término 450 y simplificando,

$$-8'5\ x = -170;$$

ó sea, cambiando los signos,

$$8'5\ x = 170;$$

de donde $x = \frac{170}{8'5} = 20.$

Ahora, si de las 90 monedas son 20 de peseta, las de 2 pesetas, según los datos, serán $\frac{20 \cdot 3}{2} = 30$, y las de 5 serán las restantes, esto es $90 - (20 + 30) = 90 - 50 = 40$.

PROBLEMA 43.

En un saco hay 90 monedas de plata, que en total representan 280 pesetas: de dichas 90 monedas unas son de peseta, otras de 2 y otras de 5. ¿Cuántas monedas hay de cada una de las tres clases?

Resolución.

Sean x las monedas de peseta, y las de 2 y z las de 5. Tendremos

$$x + y + z = 90 \text{ monedas}$$

y

$$x + 2\,y + 5\,z = 280 \text{ pesetas.}$$

Tenemos, pues, un sistema de dos ecuaciones de 1.^{er} grado con TRES incógnitas. Como el valor de dos, *cualesquiera,* de ellas depende del que se le dé á la otra, el problema es indeterminado.

Dése, por ejemplo, á y el valor 30, y procediendo como en la 1.ª resolución del problema anterior, resultará la solución de este anterior problema. Démosle sucesivamente los valores 34, 38, 42, &., 26, 22, 18 &., y, como cada 4 monedas de 2 pesetas pueden reemplazar á 1 de 5 y 3 de 1 y tambien ser reemplazadas por ellas, el número de monedas resultante será siempre 90 y el de pesetas 280, y siempre habrá solución.

El problema propuesto tiene las 14 soluciones siguientes:

Soluciones		MONEDAS			TOTALES
		de peseta.	de 2 idem.	de 5 idem	
1.ª	Número de monedas	2	54	34	90
	Su valor en pesetas.	2	108	170	280
2.ª	Número de monedas.	5	50	35	90
	Su valor en pesetas.	5	100	175	280
3.ª	Número de monedas.	8	46	36	90
	Su valor en pesetas.	8	92	180	280
4.ª	Número de monedas.	11	42	37	90
	Su valor en pesetas.	11	84	185	280
5.ª	Número de monedas.	14	38	38	90
	Su valor en pesetas.	14	76	190	280
6.ª	Número de monedas.	17	34	39	90
	Su valor en pesetas.	17	68	195	280
7.ª	Número de monedas.	20	30	40	90
	Su valor en pesetas.	20	60	200	280
8.ª	Número de monedas.	23	26	41	90
	Su valor en pesetas	23	52	205	280
9.ª	Número de monedas.	26	22	42	90
	Su valor en pesetas.	26	44	210	280
10.ª	Número de monedas.	29	18	43	90
	Su valor en pesetas.	29	36	215	280
11.ª	Número de monedas.	32	14	44	90
	Su valor en pesetas.	32	28	220	280
12.ª	Número de monedas.	35	10	45	90
	Su valor en pesetas.	35	20	225	280
13.ª	Número de monedas.	38	6	46	90
	Su valor en pesetas.	38	12	230	280
14.ª	Número de monedas.	41	2	47	90
	Su valor en pesetas.	41	4	235	280

PROBLEMA 44.

En una población asisten á las escuelas de 1.ª enseñanza 4579 alumnos, entre niños y niñas: el número de éstas excede al de niños en 287: ¿cuántos son los niños y cuántas las niñas?

Resoluciones.

1.ª—Si la suma de los niños y niñas concurrentes á las escuelas de que se trata es 4579 y la diferencia entre el número de niñas y el de niños es 287, tendremos que *(problema 31)*, llamando N al número de niñas y n al de niños, será

$$N = \frac{4579}{2} + \frac{287}{2} = 2433 \text{ niñas}$$

y

$$n = \frac{4579}{2} - \frac{287}{2} = 2146 \text{ niños.}$$

2.ª—Si de 4579, número total de niños y niñas, restamos 287, exceso del número de niñas sobre el de niños, el resto 4579 — 287 = 4292 será un número compuesto por igual de niños y niñas: luego 4292 : 2 = 2146 será el número de niños: luego 2146 + 287 = 2433 será el de niñas.

3.ª—Si á 4579, número total de niños y niñas, agregamos 287, exceso del número de niñas sobre el de niños, y para mayor claridad suponemos que esas 287 unidades agregadas son niños, la suma 4579 + 287 = 4866 será un número compuesto por igual de niños y niñas: luego, si le dividimos por 2, el cociente 4866 : 2 = 2433 será el número de niñas: luego el de niños será 2433 — 287 = 2146.

Nota.—Conviene observar que en este problema, como en todos sus similares, la suma y la diferencia dadas tienen que ser números pares las dos, ó las dos números impares, nó la una par y la otra impar, pues en este último caso el problema sería imposible, porque, siendo indivisible por su naturaleza la unidad respectiva, en el resultado aparecería fraccionada. En efecto, supongámos que en el problema propuesto el número total de alumnos, en vez de 4579, sea, por ejemplo, 4580. En este caso, llamando, como antes, N al número de niñas y n al de niños, tendríamos que sería

$$N = \frac{4580}{2} + \frac{287}{2} = 2433 \tfrac{1}{2} \text{ niñas}$$

y

$$n = \frac{4580}{2} - \frac{287}{2} = 2146 \tfrac{1}{2} \text{ niños,}$$

lo cual es soberanamente absurdo,

PROBLEMA 45.

Dos trenes salen á las 12 del día, en direcciones opuestas, de la Coruña y Cádiz, poblaciones distantes entre sí 204 leguas: el 1.º recorre 4 $^3/_4$ leguas por hora, y el 2.º 5 $\frac{1}{2}$ id. id. ¿Cuándo y á qué distancia de los puntos de partida se encontrarán dichos dos trenes?

Resoluciones.

1.ª—Sea x las horas que los dos trenes están en movimiento hasta encontrarse. Si el primero recorre 4 $^3/_4$ = 4'75 leguas en 1 hora y el segundo 5 $\frac{1}{2}$ = 5'5 id. id., en las x horas el 1.º recorrerá 4'75 x leguas y el segundo 5'5 x idem; y, como la distancia recorrida por los dos trenes constituye la que media entre las dos poblaciones citadas, será

$$4'75\,x + 5'5\,x = 204.$$

Reduciendo en el 1.^{er} miembro los términos semejantes, se tendrá

$$10'25\,x = 204:$$

de donde

$$x = \frac{204}{10'25} = 19'90 \text{ horas,}$$

ó sea, 19 horas, 54 minutos y 8 segundos; tiempo que están en movimiento los dos trenes hasta su encuentro, el cual, por lo mismo, se verifica á las 7 horas, 54 minutos y 8 segundos de la mañana del día siguiente al de su partida.

Para determinar ahora á qué distancia de las citadas poblaciones se encontrarán los trenes, diremos: si el 1.^{er} tren recorre en cada hora 4,75 leguas, en las 19'90 horas que ha estado en movimiento hasta encontrarse con el 2.° habrá recorrido 4'75 × 19'90 = 94'53 leguas. Luego el 2.° tren habrá recorrido 204 — 94'53 = 109'47. Resulta, pues, que los trenes se encontrarán á 94'53 leguas de la Coruña y á 109'47 de Cádiz.

2.ª—Como los dos trenes parten á la misma hora *en direcciones opuestas* y están el mismo tiempo en movimiento hasta encontrarse, si el 1.° recorre en 1 hora 4'75 leguas y el 2.°, en la misma hora 5'50, entre los dos recorrerán en cada hora 4'75 + 5'50 = 10'25 leguas. Ahora bien, si en recorrer 10'25 leguas invierten 1 hora, en recorrer entre los dos la distancia total 204 leguas invertirán 204 : 10'25 = 19'90 horas.

Determinado el tiempo de marcha, las distancias se calculan como antes.

3.ª—Como los dos trenes parten á la misma hora en direcciones opuestas y están el mismo tiempo en movimiento hasta encontrarse, es claro que en este tiempo cada uno de ellos recorrerá de la distancia total una parte proporcional á la velocidad con que camine. La cuestión, pues, por lo que respecta á las distancias recorridas, se reduce á dividir la distancia total 204 leguas en 2 partes proporcionales á las velocidades 4'75 y 5'50 leguas. Tendremos, pues, *(probl. 148)* distancia recorrida por el 1.^er^ tren, $\frac{204}{4,75 + 5'50} \times 4'75 = 94'53$ leg.

id. id. por el 2.º. . . . $\frac{204}{4'75 + 5'50} \times 5'50 = 109'47$ »

Total. . . . 204 » »

Halladas las distancias parciales recorridas por los dos trenes, nada más fácil que averiguar las horas invertidas en recorrerlas. En efecto, si, por ejemplo, el 1.^er^ tren invierte 1 hora en recorrer 4'75 leguas, en recorrer 94'53 invertirá 94'53 : 4'75 = 19'90 horas.

El mismo resultado hubiéramos obtenido fijándonos en el 2.º tren.

PROBLEMA 46.

Dos trenes salen en direcciones opuestas de la Coruña y Cádiz, poblaciones distantes entre sí 204 leguas: el 1.º parte á las 12 del día con una velocidad constante de 4 $\frac{1}{2}$ leguas por hora, y el 2.º á las 5 de la tarde, recorriendo 6 $^1/_4$ leguas en la misma unidad de tiempo. ¿A qué hora y á qué distancia de dichas poblaciones se encontrarán estos dos trenes?

Resolución.

Sea x las horas que el 1.^er^ tren está en movimiento hasta encontrar al 2.º: las que estará el 2.º hasta encontrar al 1.º serán x — 5. Según los datos, el 1.^er^ tren en las x horas recorrerá 4'50 x leguas, y el 2.º en las x — 5 horas recorrerá (x — 5) × 6'25; y, como lo recorrido por los dos trenes constituye la distancia total, se tendrá

$$4'50\,x + (x - 5) \times 6'25 = 204. \qquad \text{(A)}$$

Quitando el paréntesis, será

$$4'50\,x + 6'25\,x - 31'25 = 204;$$

y, haciendo la transposición de términos y la reducción de los semejantes, resultará

$$10'75\,x = 235'25;$$

de donde

$$x = \frac{235'25}{10'75} = 21'88.$$

Dichos dos trenes se encuentran, pues, á las 21'88 horas de la partida del primero, ó bien á las 21 horas, 52 minutos y 48 segundos, ó sea á las 9 horas, 52 minutos y 48 segundos de la mañana del día siguiente al de la partida.

Si en la ecuación (A) sustituimos á x con su valor 21'88 horas y efectuamos las operaciones indicadas, los dos términos del 1.er miembro de la igualdad resultante, $4'50 \times 21'88 = 98'46$ y $(21'88 - 5) \times 6'25 = 105'54$ leguas, representarán evidentemente las distancias respectivas desde el punto de encuentro de los trenes á la Coruña y Cádiz: y, sumándo en dicho 1.er miembro estos dos términos, la identidad que resulta, 204 = 204, nos dará la comprobación del exacto valor de la incógnita.

Nota.—Como el tren de la Coruña sale 5 horas antes que el de Cádiz, cuando éste se pone en movimiento, aquél lleva ya recorridas $4'50 \times 5 = 22'50$ leguas. Si de la distancia total 204 leguas deducimos estas 22'50, quedarán $204 - 22'50 = 181'50$, que han de recorrer los trenes partiendo á la misma hora. Hecha, pues, esta deducción, el problema queda reducido al anterior. Resuelto aplicando los procedimientos resolutivos allí empleados, hay que agregar á las 181'50 leguas que resulten recorridas por el 1.er tren las 22'50 que recorrió antes de la partida del 2.º, y á las 16'88 horas invertidas en recorrer las 181'50 leguas las 5 que invirtió en recorrer las 22'50.

PROBLEMA 47.

Dos trenes salen á las 7 en punto de la mañana, en dirección á Cádiz, de la Coruña y de León, poblaciones estas dos que distan entre sí 190 kilómetros, y cada una de ellas de la primera, 1140 y 950, respectivamente: el primer tren recorre 30 kilómetros por hora y el 2.º 25 $^{1}/_{4}$ id. id. ¿Cuándo y á qué distancia de la estación de término alcanzará el primer tren al segundo?

Resoluciones.

1.ª—Sea x las horas que los dos trenes están en marcha hasta que el 1.º alcanza al 2.º. En este tiempo el 1.º recorrerá 30 x kilómetros y el segundo 25'25 x id.; y, como, según los datos, el 1.º ha recorrido 190 kilómetros más que el 2.º, que son los que median entre León y la Coruña, tendremos la ecuación

$$30x - 25'25x = 190;$$

y, reduciendo términos semejantes, será

$$4'75x = 190;$$

de donde

$$x = \frac{190}{4'75} = 40.$$

Alcanza, pues, el 1.er tren al 2.º á las 40 horas de haberse puesto ambos en movimiento, ó sea á las 11 de la noche del día subsiguiente al de partida.

La distancia recorrida por el 1.er tren será 30 × 40 = 1200 kilómetros; y, como la que separa á la Coruña de Cádiz sólo es de 1140, resulta que, *á continuar en su marcha los trenes,* el 1.º alcanzaría al 2.º á 1200 — 1140 = 60 km. *más allá* de Cádiz.

La distancia recorrida por el 2.º tren, 25'25 × 40 = 1010 kilómetros, nos dará el mismo resultado. En efecto, como Cádiz sólo dista de León 950 km. y el 2.º tren recorre 1010 hasta ser alcanzado por el 1.º, resulta que este alcance se verifica á 1010 — 950 = 60 km. *más allá* de Cádiz.

Esta identidad de resultados sirve de comprobación del valor de la incógnita.

2.ª—Como los dos trenes parten á la misma hora, los dos tienen que estar el mismo tiempo en movimiento hasta encontrarse; mas, como marchan en la misma dirección y el punto de partida no es común, no tienen que recorrer la misma distancia: el 1.º tiene que recorrer más que el 2.º los 190 km. que median entre la Coruña y León. Ahora bien, estos 190 km. los *gana* el 1.^{er} tren con los 4'75 idem que en cada hora recorre más que el 2.º. Luego, si para ganar 4,75 km. necesita 1 hora, para ganar los 190 necesitará 190 : 4'75 = 40 horas.

Determinadas las horas, las distancias se calculan como antes.

PROBLEMA 48.

Dos trenes salen de Cádiz en dirección á la Coruña, poblaciones distantes entre sí 1140 kilómetros, el uno á las 9 $\frac{1}{2}$ de la mañana y el otro á las 3 $^1/_4$ de la tarde: la velocidad del 1.º es de 24 kilómetros por hora y la del 2.º, 30 id. id. ¿A qué hora y á qué distancia de cada una de las estaciones de partida y de término alcanzará el 2.º tren al 1.º?

Resoluciones.

1.ª—Sea x las horas que el 1.^{er} tren tarda en ser alcanzado por el 2.º: las que éste habrá estado en movimiento hasta dar alcance al 1.º serán x — 5'75. La distancia recorrida por el 1.^{er} tren en las x horas serán 24 x kilómetros, y la recorrida por el 2.º en las x — 5'75 horas, (x — 5'75) $\times$ 30 id.; y, como los dos trenes recorren la misma distancia, la ecuación será

$$24\ x = (x - 5'75) \times 30;$$

y, quitando el paréntesis, se tendrá

$$24\ x = 30\ x - 172'50;$$

y, transponiendo el 30 x y reduciendo términos semejantes, resultará

$$-\ 6\ x = -\ 172,50;$$

ó bien, cambiando los signos,

$$6\ x = 172'50;$$

de donde

$$x = \frac{172'50}{6} = 28'75.$$

Resulta, pues, que el 2.º tren alcanza al 1.º á las 28'75 horas de la partida de éste, ó sea, á las 2 y media de la tarde del día subsiguiente al de dicha partida.

Determinemos ahora las distancias á que los trenes se encuentran. La recorrida por el 1.º es evidentemente $24 \times 28'75 = 690$ km. Como se ve, este tren es alcanzado por el 2.º á los 690 km. de Cádiz y, por consiguiente, á los 1140 — 690 = 450 de la Coruña.

Igual resultado obtendremos si nos fijamos en el 2.º tren. En efecto, la distancia recorrida por éste en las 28'75 — 5'75 = 23 horas que tardó en alcanzar al 1.º es $30 \times 23 = 690$ km.

Esta identidad de resultados demuestra la exactitud del valor hallado para la incógnita.

2.ª—Si el 2.º tren, en vez de partir á las 3 y $^1/_4$ de la tarde, hubiera partido, como el 1.º, á las 9 y $\frac{1}{2}$ de la mañana, para las 3 y $^1/_4$ de la tarde habría recorrido ya $30 \times 5'75 = 172'50$ km.; distancia que luégo tiene que ganar con los 6 km. que en cada hora recorre más que el 1.^{er} tren. Luego, si para ganar 6 km. necesita 1 hora, para ganar los 172'50 necesitará 172'50 : 6 = 28'75 horas.

Determinadas las horas, lo están las distancias, como antes se ha visto.

PROBLEMA 49.

Dos trenes salen de la Coruña y de León en dirección á Cádiz, población distante de cada una de las anteriores 204 y 170 leguas, respectivamente, el 1.º á las 7 de la mañana caminando 5 leguas por hora, y el 2.º á las 3 de la tarde recorriendo 4 $^3/_4$ en igual tiempo. ¿A qué hora y á qué distancia de las estaciones de partida y de la de término se encontrarán estos dos trenes?

Resolución.

Sea x las horas que el tren de la Coruña está en movimiento hasta alcanzar al de León: las que estará en marcha el de León hasta ser alcanzado por el de la Coruña serán x — 8. Este, en las x horas de marcha recorrerá, 5 x leguas; y aquél, en las x — 8 horas, recorrerá 4'75 × (x — 8) leguas. Evidentemente la distancia recorrida por el 1.^{er} tren excede á la recorrida por el 2.º en la que media entre la Coruña y León, que según los datos, es 204 — 170 = 34 leguas. Luego la ecuación será

$$5\ x = 4'75 \times (x - 8) + 34;$$

y, quitando el paréntesis, se tendrá

$$5\ x = 4'75\ x - 38 + 34;$$

y, transponiendo el término 4'75 x, resultará

$$5\ x - 4'75\ x = - 38 + 34;$$

y, simplificando en los dos miembros, tendremos

$$0{,}25\ x = -\ 4;$$

de donde

$$x = \frac{-4}{0{,}25} = -\ 16.$$

Resulta, pues, que el tren de la Coruña alcanza al de León á las *menos* 16 horas de haber partido aquél.

Este resultado negativo no dice en manera alguna que el problema esté mal resuelto (1), sinó que, tal y como se halla presentado, es imposible por existir incompatibilidad entre los datos. En efecto, si el tren de la Coruña sale á las 7 de la mañana y el de León á las 3 de la tarde y, si el 1.º recorre 5 leguas por hora, en las 8 que median desde su partida hasta la del 2.º recorrerá 40 leguas; y, como de la Coruña á León solamente hay 34, resulta que, cuando parta el tren de León, el de la Coruña ya está 6 leguas más acá de aquella ciudad. Luego es imposible *de toda imposibilidad* que el tren de la Coruña alcance al de León; como es igualmente imposible que el de León alcance al de la Coruña, toda vez que, ya en movimiento los dos, el de la Coruña marcha delante del de León y con una velocidad mayor que la de éste.

---

(1) Esto puede comprobarse sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones, en la primera, por ejemplo, la incógnita x con su valor — 16, y se verá que, hechas las operaciones indicadas, dicha ecuación se transforma en la identidad — 80 = — 80.

PROBLEMA 50.

Dos trenes salen á las 5 de la mañana, uno de la Coruña y otro de León, en dirección á Cádiz, población que dista de cada una de las anteriores 1140 y 950 kilómetros, respectivamente: el primer tren recorre 34 kilómetros en cada hora. ¿Cuántos deberá recorrer en igual tiempo el 2.º para que el 1.º le alcance precisamente 52 kilómetros antes de llegar á Cádiz?

Resolución.

Si el primer tren ha de alcanzar al segundo 52 kilómetros antes de llegar á Cádiz, tendrá que recorrer hasta el alcance 1140 — 52 = 1088 km.; y, como se dice que en cada hora recorre 34, las horas invertidas en recorrer los 1088 km. serán 1088 : 34 = 32 horas.

La distancia recorrida por el 2.º tren hasta ser alcanzado por el 1.º será 950 — 52 = 898 km.; y, como estos kilómetros ha de recorrerlos en las 32 horas que el 1.er tren tarda en darle alcance, es evidente que en cada hora tendrá que recorrer 898 : 32 = 28'0625 km., que es la velocidad que se pide.

PROBLEMA 51.

Suponiendo que el ecuador terrestre estuviese constituido por una doble vía férrea y que á las 9 de la mañana del día 1.º de Mayo saliesen por ella de San Francisco de Quito dos trenes, A y B, el primero hácia el Oriente con una velocidad de 6 leguas por hora y el segundo hácia Occidente caminando 4 $^3/_4$ leguas en la misma unidad de tiempo,

¿cuándo, á qué distancia de San Francisco de Quito y á qué grado de longitud, E. ú O., se cruzarían dichos dos trenes, qué tiempo tardaría cada uno de ellos en volver al punto de partida y en qué mes y día y á qué hora verificaría la entrada de regreso en él?

Resolución.

Sea x las horas que los dos trenes están en movimiento hasta cruzarse. Como en cada hora recorre el primero 6 leguas y el segundo 4'75, en las x horas el 1.º habrá recorrido 6 x leguas y el 2.º 4'75 x id.; y, como, en el acto de cruzarse, entre los dos trenes han recorrido toda la longitud del ecuador, que *(problema 147 de los geométricos)* es 7200 leguas, la ecuación será

$$6\,x + 4\text{'}75\,x = 7200.$$

Despejando á x, se tendrá

$$10\text{'}75\,x = 7200;$$

de donde

$$x = \frac{7200}{10\text{'}75} = 669\text{'}77 \text{ horas}$$

= 27 días, 22 horas, 50 minutos y 24 segundos (1).

Al cabo de este tiempo, á contar desde el momento de la partida, se encontrarán los trenes A y B.

Como el tren A camina 6 leguas por hora y el tren B recorre 4'75, en las 669'77 horas de movimiento hasta cruzarse, el 1.º habra recorrido

---

(1) A este resultado podíamos haber llegado diciendo: si para recorrer el primer tren 6 leguas y el segundo 4'75, ó sea, entre los dos 6 + 4'75 = 10'75 leguas, emplean ambos 1 hora, para recorrer entre ambos las 7200 del ecuador emplearán 7200 : 10'75 = 669'77 horas = 27 días, 22 horas, 50 minutos y 24 segundos.

6 × 669'77 = 4018'6 leguas

y el 2.º,

4 × 669'77 = 3181'4 id.

Estas son, pues, las distancias de Quito á que los dos trenes se habrán cruzado, contadas la 1.ª hácia el E. y la 2.ª hácia el O.

Como cada 20 leguas sobre el ecuador representan 1 grado de longitud, si dividimos por 20 la distancia menor, el cociente 3181'4 : 20 = 159'07 grados nos dará la longitud geográfica pedida, la cual es occidental por haberse cruzado los trenes en el hemisferio de este nombre.

Si hubiésemos dividido la distancia mayor, el cociente hubiera sido: 4018'6 : 20 = 200'93 grados; y, como la mayor longitud que puede haber es de 180 grados, para determinar la verdadera, habría que restar de los 360 grados que tiene el ecuador los 200'93 recorridos por el tren A, y el resto 360 — 200'93 = 159'07 grados = 159 grados, 4 minutos y 12 segundos sería, como ya se ha visto, la longitud pedida.

El tiempo que cada uno de los dos trenes tardaría en volver al punto de partida sería evidentemente el que empleara en recorrer las 7200 leguas que tiene de longitud el ecuador. Para calcular este tiempo diremos: si para recorrer 6 leguas emplea el tren A 1 hora; para recorrer la distancia total 7200 leguas empleará 7200 : 6 = 1200 horas = 50 días.

El tren B por igual consideración empleará
7200 : 4'75 = 1515'79 horas = 63 días, 3 horas, 50 minutos y 24 segundos.

Resulta, como consecuencia de todo esto, que el tren A entraría de regreso en San Francisco de Quito á las 9 de la mañana del día quincuagésimo *(á contar desde las 9 de la mañana del 1.º de Mayo),* día que, para los que permanecieron en Quito, sería el 20 de Junio inmediato, y para los viajeros el 21, en razón á que éstos por cada 15 grados de longitud que avanzaban hácia el E., tuvieron el mediodía 1 hora antes que aquéllos: luego, recorridos los 360 grados, le tendrían anticipado 360 : 15 = 24 horas = 1 día.

El tren B haría su entrada en Quito á los 63 días, 3 horas, 50 minutos y 24 segundos de haber partido de allí, á contar siempre desde la hora de partida, las 9 de la mañana: entraría, pues, para los residentes en Quito, el 3 de Julio á las 12 horas, 50 minutos y 24 segundos del día, y, para los viajeros de dicho tren, el 2 del citado mes á las mismas horas, minutos y segundos, por cuanto estos viajeros por cada 15 grados que avanzaban hácia el O. se fueron atrasando 1 hora en la medida del tiempo con relación á los habitantes de Quito; luego en los 360 grados se atrasarían 24 horas = 1 día.

PROBLEMA 52.

Un andarín salió de Madrid para Toledo, poblaciones distantes entre sí 12 leguas, á las 6 de la mañana de un día de primavera y llegó á su destino á las 2 de la tarde del mismo día. Al inmediato siguiente salió de Toledo para Madrid á las 6 de la madrugada y llegó á la Corte á la 1 y 12 minutos de la tarde. ¿Cuál es el punto del camino á que el andarín llegó en los dos días á la misma hora y cuál es la hora á que llegó á dicho punto?

Resoluciones.

1.ª - Sea x las horas que el andarín estuvo en marcha el 1.er día hasta llegar al punto de que se trata. Como las 12 leguas que separan á Madrid de Toledo las recorrió en

8 horas, en cada 1 de ellas anduvo 12 : 8 = 1‘5. Luego en las x horas andaría 1‘5 x.

Como el 2.º dia el andarín emprendió el viaje á la misma hora que el día anterior y á la misma hora que el día anterior llegó al punto de que se trata, hasta llegar á este punto tuvo que estar en movimiento las mismas x horas; y, como en cada una de ellas recorrió 12 : 7‘2 = 1‘66 leguas (1), en las x horas recorrería 1‘66 x leguas. Ahora, como lo recorrido el 1.^{er} día desde Madrid al punto en cuestión y lo recorrido hasta este mismo punto desde Toledo el día 2.º componen las 12 leguas que separan á Toledo de Madrid, resulta que la ecuación es

$$1\text{‘}5\,x + 1\text{‘}66\,x = 12;$$

ó bien

$$3\text{‘}16\,x = 12;$$

de donde

$$x = \frac{12}{3{\cdot}16} = 3\text{‘}80.$$

Resulta, pues, que el andarín llegó los dos días de marcha al punto de que se trata 3‘80 horas = 3 horas y 48 minutos después del momento de su partida, ó sea, á las 9 y 48 minutos de la mañana.

En cuanto á la distancia del punto que nos ocupa, tenemos que, si para llegar á él el andarín invirtió 3‘80 horas y en cada 1 de ellas recorrió el 1.^{er} día 1‘5 leguas, y el segundo 1‘66 id., en las 3‘80 horas recorrería el día primero 1‘5 × 3‘80 = 5‘70 leguas, y el segundo 1‘66 × 3‘80 = 6‘30, que son lo que el expresado punto dista de Madrid y Toledo, respectivamente. En efecto, 5‘70 + 6‘30 = 12 leguas.

2.ª—Averiguado que la velocidad del andarín es en el 1.^{er} día 1‘5 leguas por hora, y en el segundo 1‘66 id. id., tendremos que, como lo recorrido en cada uno de los dos días

---

(1) El divisor 7‘2 representa las horas en que el andarín hizo el viaje de Toledo á Madrid.

hasta llegar al punto en cuestión constituye las 12 leguas que median entre Madrid y Toledo, y que, como hasta llegar á ese punto anduvo en cada día las mismas horas, si dividimos las 12 leguas por las 1'5 + 1'66 = 3'16 que recorrió en los dos días en cada hora, el número de horas será 12 : 3'16 = 3'80.

Las distancias se determinan como antes.

3.a—Lo recorrido el 1.er día por el andarín desde Madrid al punto de que se trata y lo recorrido el 2.o desde Toledo al mismo punto componen las 12 leguas que median entre Toledo y Madrid. Si la velocidad del andarín hubiera sido la misma en los dos días, puesto que en ellos partió á la misma hora, en los dos hubiese recorrido el mismo trayecto, y el punto en cuestión equidistaría de las dos citadas poblaciones; mas, como la velocidad en el 1.er día fué de 1'5 leguas por hora y en el 2.o de 1'66 id. id., resulta que las distancias recorridas hasta llegar al mencionado punto tienen que ser proporcionales á las velocidades. Aplicando; pues, el problema 148, se tendrá

distancia del 1.er día. . . $\dfrac{12}{1,5 + 1'66} \times 1'5 = 5'70$ leg.

id. del 2.o . . . . . $\dfrac{12}{1'5 + 1'66} \times 1'66 = 6'30$ »

Total. . . . 12 » »

Respecto de la hora á que el andarín llegó los dos días al punto en cuestión, tendremos que, si en recorrer 1'5 leguas invirtió 1 hora, en recorrer las 5'70 invertiría 5'70 : 1'5 = 3'80 horas (1).

---

(1) Este problema es, *en esencia*, igual al señalado con el número 45.

PROBLEMA 53.

Un andarín salió de Madrid para Toledo, poblaciones distantes entre sí 12 leguas, á las 6 de la mañana de un día de primavera y llegó á su destino á las 2 de la tarde del mismo día. Al inmediato siguiente salió de Toledo para Madrid á las 4 de la madrugada y llegó á la Corte al mediodía. ¿Cuál es el punto del camino á que el andarín llegó en los dos días á la misma hora y cuál es la hora á que llegó á dicho punto?

Resolución.

Sea x las horas que el andarín estuvo en marcha el 1.^{er} día hasta llegar al punto en cuestión: las que estuvo el 2.º hasta llegar á dicho punto serán x + 2, por haber partido en el 2.º día 2 horas antes que en el 1.º. Como en cada 1 de los dos dias el andarín empleó 8 horas en recorrer las 12 leguas que separan á Toledo de Madrid, la velocidad en cada 1 de ellos fué 12 : 8 = 1'5 leguas por hora. Si esta distancia recorrió en 1 hora, en las x del día 1.º recorrería 1'5 x, y en las x + 2 del día 2.º recorrería 1'5 × (x + 2) = 1'5 x + 3 leguas; y, como la suma de lo recorrido en los 2 días hasta llegar al punto de que se trata constituye la distancia total, 12 leguas, la ecuación será

$$1'5\ x + 1'5\ x + 3 = 12;$$

y, transponiendo y simplificando, se tendrá

$$3\ x = 9;$$

de donde

$$x = \frac{9}{3} = 3.$$

Resulta que el andarín llegó los 2 días al punto en cuestión 3 horas después de la en que hizo su salida el día 1.º, ó 3 + 2 = 5 después de la en que lo verificó el día 2.º: en uno y en otro caso á las 9 de la mañana.

Determinada la hora, nada más fácil que precisar la distancia á que el consabido punto se encuentra de cada una de las dos citadas poblaciones. En efecto, si el andarín recorrió los dos días 1'5 leguas en cada hora, en las 3 del día 1.º recorrería 1'5 × 3 = 4'5 leguas, y en las 5 horas del 2.º recorrería 1'5 × 5 = 7'5 leguas, que son las distancias del referido punto á Madrid y Toledo, respectivamente.

Nota.—Si de las 12 leguas que Toledo dista de Madrid se restan las 3 que el andarín recorrió el 2.º día en las 2 horas que partió antes que el día anterior, quedarán 9, que empezó á recorrer á la misma hora en que el día anterior había partido de Madrid. Hecha la mencionada resta, resulta el problema anterior, cuyos procedimientos resolutivos pueden emplearse aquí, tomando en consideración al final, para agregarlas á su correspondiente resultado, las 2 horas y las 3 leguas correspondientes al 2.º día y de las cuales habíamos prescindido momentáneamente (1).

PROBLEMA 54.

Un andarín salió de Madrid para Toledo, poblaciones distantes entre sí 12 leguas, á las 6 de la mañana de un día de primavera y llegó á su destino á las 2 de la tarde del mismo día. Al inmediato siguiente salió de Toledo para Madrid á las 7 $\frac{1}{2}$ de la mañana y llegó á la Corte á las 3 de la tarde. ¿Cuál es el punto del camino á que el andarín llegó en los dos días á la misma hora y cuál es la hora á que llegó á dicho punto?

Resolución.

Sea x las horas que el andarín tardó el 1.^{er} día en lle-

---

(1) Este problema es, *en esencia,* igual al señalado con el número 46.

gar desde Madrid al punto de que se trata: las que tardó el día 2.º en llegar á él desde Toledo serán x — 1‘5, por haber partido en este día 1 $\frac{1}{2}$ horas más tarde que en el anterior. Como la velocidad del andarín en el día 1.º fué 12 : 8 = 1‘5 leguas por hora, y en el día segundo, 12 : 7‘5 = 1‘6 id. id., lo recorrido el 1.er día en las x horas será 1‘5 x leguas y lo recorrido el día 2.º en las x — 1‘5 horas, será 1‘6 × (x — 1‘5) = 1‘6 x — 2‘40 id. Luego la ecuación será

$$1‘5\,x + 1‘6\,x - 2‘40 = 12;$$

y, transponiendo y simplificando, se tendrá

$$3‘1\,x = 14‘40;$$

de donde

$$x = \frac{14{,}40}{3‘1} = 4‘65.$$

Resulta, pues, que el andarín llegó al punto en cuestión los dos días de viaje 4‘65 horas después de la en que partió de Madrid el día 1.º, ó 4‘65 — 1‘5 = 3‘15 después de la en que partió de Toledo el día 2.º. Llegó por consiguiente, á las 10‘65 horas, ó sea á las 10 y 39 minutos de la mañana.

En cuanto á las distancias de dicho punto á las dos citadas poblaciones, tenemos que, si el andarín recorrió el 1.er día en cada hora 1‘5 leguas, en las 4‘65 que tardó en llegar al punto consabido recorrería 1‘5 × 4‘65 = 6‘96 leguas; y, si en el 2,º recorrió 1‘6 leguas por hora, en las 3‘15 horas recorrería 1‘6 × 3‘15 = 5‘04.

Nota.—Si de las 12 leguas, distancia total, se deducen las 2‘25 que el andarín recorrió el 1.er día en la hora y media que salió antes que el día 2.º, quedarán 9‘75 leguas que en los dos días empezó á recorrer á la misma hora. El problema en este caso queda reducido al señalado con el número 52. Resuelto como éste, se agregarán á la distancia y hora del 1.er día las 2‘25 leguas y la 1 $\frac{1}{2}$ hora de que antes se había prescindido.

Lo mismo sería para la resolución del problema, agregar á las 12 leguas, distancia total, las 2'40 que el andarín habría recorrido el 2.º día desde las 6 (si hubiese salido á esta hora, como el día anterior) hasta las 7 $\frac{1}{2}$ de la mañana, hora en que partió. También en este caso el problema queda reducido al del número 52; y, después de resuelto, habría que deducir de la distancia y horas del 2.º día las 2'40 leguas y la 1 $\frac{1}{2}$ hora, respectivamente, que antes se habían agregado (1).

PROBLEMA 55.

Un padre y un hijo convinieron en que por cada lección que el segundo supiera recibiría del primero 5 reales y por cada una que no supiese le serían descontados 3. Al cabo de 15 lecciones ajustaron cuentas, resultando que el hijo percibió 27 reales. ¿Cuántas son las lecciones que supo y cuántas las que no supo?

Resoluciones.

1.ª—Sea x las lecciones que el hijo supo: las que no supo serán 15 — x. Los reales que debió percibir por las x lecciones sabidas son 5 x y los descontados por las 15 — x lecciones no sabidas, (15 — x) × 3; y, como, ajustada la cuenta, resultó alcanzando 27 reales, la ecuación será

$$5x - (15 - x) \times 3 = 27.$$

Despejando á x, resultarán sucesivamente las siguientes ecuaciones:

$$5x - (45 - 3x) = 27,$$
$$5x - 45 + 3 = 27,$$
$$8x = 27 + 45,$$

---

(1) Este problema, *en su esencia*, es igual al que lleva el número 46.

y

$$8x = 72;$$

de donde

$$x = \frac{72}{8} = 9.$$

Si las lecciones sabidas son 9, las no sabidas serán $15 - 9 = 6$.

2.ª—Si el hijo hubiese sabido las 15 lecciones, hubiera recibido 75 reales; mas, como por causa de las lecciones no sabidas sólo recibió 27, dejó de percibir $75 - 27 = 48$ reales. Ahora, cada lección no sabida representa para él 8 reales de pérdida: de ellos 5 que no recibe y 3 que se le descuentan. Luego, si se divide la pérdida total, 48 reales, por la de cada lección, que es 8, el cociente $48 : 8 = 6$ expresará las lecciones no sabidas. Luego las sabidas son $15 - 6 = 9$.

También puede decirse: si el hijo no hubiese sabido ninguna de las 15 lecciones, hubiera tenido que desembolsar $15 \times 3 = 45$ reales; pero, como, lejos de entregar estos 45 reales, recibió 27, la ganancia para él fué de $45 + 27 = 72$ reales. Ahora bien, cada lección sabida representa para el hijo 8 reales de ganancia: de ellos 5 que recibe y 3 que no desembolsa: luego, si dividimos la ganancia total, 72 reales, por la de cada leción sabida, que es 8, el cociente $72 : 8 = 9$ expresará las lecciones sabidas: luego las no sabidas serán $15 - 9 = 6$.

PROBLEMA 56.

Convinieron un profesor y un discípulo suyo en que por cada lección que éste supiera recibiría de aquél 5 reales y por cada una que no supiera entregaría 3 reales á su profesor. Al cabo de 24 lecciones ajustaron cuentas, resultando que nin-

guno de los dos debía nada al otro, ¿Cuántas fueron las lecciones sabidas y cuántas las no sabidas?

Resoluciones.

Este problema puede resolverse empleando los mismos procedimientos resolutivos empleados en el problema anterior y además el siguiente, que es más breve y sencillo.

Como por cada lección que el discípulo supiera había de recibir 5 reales y por cada una que no supiera había de entregar 3, y, como 5 lecciones × 3 reales es igual á 3 lecciones × 5 reales, resulta que, puesto que lo recibido fué igual á lo entregado, por cada 3 lecciones que supo, no supo 5. La cuestión, pues, está reducida á dividir el total de lecciones, 24, en 2 partes proporcionales á los números 3 y 5. Hecha esta división *(problema 148)*, se tendrá $\frac{24}{8} = 3$; $3 \times 3 = 9$, lecciones que supo, y $3 \times 5 = 15$, lecciones que no supo.

PROBLEMA 57.

El cuadrado de la suma de dos números es 1705'69 y uno de estos dos números es 24'8: ¿cuál es el otro?

Resolución.

Si 1705'69 es el cuadrado de la suma de los dos números, la $\sqrt{1705'69} = 41'3$ será la suma de estos dos números; y, si 41'3 es la suma de los dos números y 24'8 es el uno de ellos, la diferencia $41'3 - 24,8 = 16'5$ será el otro número.

Este razonamiento puede consignarse gráficamente diciendo: sea x el número que se pide. Tendremos

$$(x + 24‘8)^2 = 1705‘69.$$

Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros de esta ecuación, se tendrá esta otra

$$x + 24‘8 = \sqrt{1705‘69} = 41‘3;$$

de donde

$$x = 41‘3 - 24‘8 = 16‘5.$$

Nota.—Como toda cantidad positiva tiene dos raíces cuadradas, iguales en valor absoluto y de signo contrario, tambien es $\sqrt{1705‘60} = -41‘3$; y, como consecuencia, es

$$x = -41‘3 - 24‘8 = -66‘1.$$

Este valor, $-66‘1$, *que, tomado positivamente, representa el número menor, mas el duplo del mayor,* satisface también, como es fácil comprobar. Ahora que, por lo mismo que en el enunciado nada se especifica, debe entenderse que se trata de números positivos.

PROBLEMA 58.

La suma de los cuadrados de dos números es 1711‘97, y uno de estos dos números es 14‘9; ¿cuál es el otro?

Resoluciones.

1.ª—Es evidente que, si de 1711‘97, suma de los cuadrados de los dos números, restamos $14‘9^2 = 222‘01$, cuadrado del número conocido, el resto $1711‘97 - 222‘01 = 1489‘96$ será el cuadrado del número incógnito: luego la $\sqrt{1489‘96} = 38‘6$ será el número desconocido.

Este mismo razonamiento puede consignarse gráficamente así.

Sea x el otro número. Tendremos

$$x^2 + 14‘9^2 = 1711‘97.$$

ó bien,

$$x^2 + 222'01 = 1711'97;$$

de donde

$$x^2 = 1711'97 - 222'01;$$

ó sea

$$x^2 = 1489'96;$$

y de aquí

$$x = \sqrt{1489'96} = 38'6.$$

2.º—Sea x el número incógnito. Este número, ó es mayor ó menor que 14'9 (1). Supongamos que sea mayor. *La suma de los cuadrados de dos números es igual al duplo del cuadrado del menor, mas el duplo del menor multiplicado por la diferencia entre éste y el mayor, mas el cuadrado de la diferencia* (2).

---

(1) Con sólo observar que el cuadrado de 14'9 es menor que la mitad de 1711'97, basta para convencerse de que x es mayor que 14'9.

(2) Demostremos esta proposición. Sea M el número mayor m el menor y d la diferencia entre ellos. Digo que $M^2 + m^2 = 2m^2 + 2md + d^2$.

En efecto, $M = m + d$. Elevando al cuadrado los dos miembros de esta ecuación, resultará esta otra

$$M^2 = m^2 + 2md + d^2;$$

y, agregando m^2 á los dos miembros, se tendrá en definitiva

$$M^2 + m^2 = 2m^2 + 2md + d^2.$$

Lo que se quería demostrar.

La exactitud de dicha proposición se percibe claramente considerando: 1.º que el $2m^2 + 2md + d^2$ puede descomponerse en dos partes, que son: m^2 y $m^2 + 2md + d^2$; y 2.º que el $2md + d^2$ es, como luego demostraremos, la diferencia de los cuadrados de dos números. Agregado el $2md + d^2$ al m^2, como lo está en la 2.ª parte, resulta el cuadrado del número mayor, y, como la 1.ª la constituye el m^2, cuadrado del número menor, Llamando, pues, d á esta diferencia, tendremos

$$2 \,.\, 14{'}9^2 + 2 \,.\, 14{'}9\, d + d^2 = 1711{'}97;$$

ó bien,

$$444{'}02 + 29{'}8\, d + d^2 = 1711{'}97;$$

ó sea,

$$d^2 + 29{'}8\, d + 444{'}02 = 1711{'}97;$$

ecuación completa de 2.º grado. Resuelta, como se resolvió la del problema 32, resultará

$$d = 23{'}7$$

y

$$d = -\, 53{'}5$$

De estos dos valores de d el verdadero es 23'7. El número mayor será, pues, 14'9 + 23'7 = 38'6.

Este mismo resultado nos da el otro valor de d, es decir el — 53'5, pero con carácter negativo; esto es, nos dice que el número mayor es — 38'6.

Supongamos ahora que x sea menor que 14'9. *La suma de los cuadrados de dos números es igual al duplo del cuadrado del mayor, menos del duplo del mayor multiplicado por la diferencia entre éste y el menor, mas el cuadrado de la diferencia* (1). Llamando, pues, d á esta diferencia, tendremos

$$2 \,.\, 14{'}9^2 - 2 \,.\, 14{'}9\, d + d^2 = 1711{,}97.$$

---

de aquí que el $2\,m^2 + 2\,m\,d + d^2$ sea la suma de los cuadrados de los dos números M y m.

Con sólo fijar la atención en la ecuación $M^2 + m^2 = 2\,m^2 + 2\,m\,d + d^2$ se comprende que, cuando $d = 1$, ó, lo que es lo mismo, que, cuando los dos números dados se diferencien en 1 unidad, la suma de los cuadrados de estos dos números será igual al duplo del cuadrado del menor, mas el duplo del menor, mas 1.

(1) Demostremos esta proposición. Sea M el número mayor, m el menor y d la diferencia entre ambos. Digo que

$$M^2 + m^2 = 2\,M^2 - 2\,M\,d + d^2$$

En efecto, $m = M - d$. Elevando al cuadrado los dos miembros de esta ecuación, resultará esta otra

Resolviendo esta ecuación en la misma forma que su correspondiente del supuesto anterior, se hallará que es

$$d = 53'5$$

y

$$d = -23'7$$

Es decir que se obtienen los mismos valores con los signos cambiados. Resulta, pues, en definitiva que en este problema, como en todos los de su clase, es indiferente considerar al número incógnito como mayor ó menor que el que se da conocido.

$$m^2 = M^2 - 2\,M d + d^2;$$

y, agregando M^2 á los dos miembros, se tendrá

$$M^2 + m^2 = 2\,M^2 - 2\,M d + d^2.$$

Lo que se quería demostrar.

La exactitud de la proposición demostrada se percibe claramente considerando: 1.° que el $2\,M^2 - 2\,M d + d^2$ puede descomponerse en dos partes, que son: M^2 y $M^2 - 2\,M d + d^2 = M^2 - (2\,M d - d^2)$; y 2.° que el $2\,M d - d^2$ expresa, como luego se verá, la diferencia de los cuadrados de dos números. Restado del M^2 el $(2\,M d - d^2)$, como lo está en la 2.ª parte, resulta el cuadrado del número menor; y, como la parte 1.ª la constituye M^2, cuadrado del mayor, síguese que $M^2 + M^2 - 2\,M d + d^2 = 2\,M^2 - 2\,M d + d^2$ es la suma de los cuadrados de los números M y m.

La simple inspección de la ecuación $M^2 + m^2 = 2\,M^2 - 2\,M d + d^2$ revela que, cuando sea $d = 1$, ó, lo que es lo mismo, cuando los números dados se diferencien en 1 unidad, la suma de los cuadrados de estos números será igual al duplo del cuadrado del mayor, menos el duplo del mayor, mas uno.

PROBLEMA 59.

El cuadrado de la diferencia de dos números es 882'09 y uno de estos números es 56: ¿Cuál es el otro?

Resoluciones.

1.ª – Siendo 882'09 el cuadrado de la diferencia de los dos números, la $\sqrt{882'09} = 29'7$ será esta diferencia. Siendo 29'7 la diferencia entre el número dado 56 y el otro número, este número, si es mayor que 56, será $56 + 29'7 = 85'7$, porque el minuendo es igual al sustraendo, mas la diferencia; y, si es menor que 56, será $56 - 29'7 = 26'3$, porque el sustraendo es igual al minuendo, menos la diferencia.

Este mismo razonamiento puede consignarse gráficamente diciendo: sea x el número desconocido. Este número será ó mayor ó menor que 56. Supongamos que sea mayor. En este caso tendremos

$$(x - 56)^2 = 882'09$$

Extrayendo la raiz cuadrada de los dos miembros de esta ecuación, resultará esta otra

$$x - 56 = \sqrt{882'09} = \pm\ 29'7;$$

ó sea

$$x - 56 = \pm\ 29'7;$$

de donde

$$x = 56 \pm 29'7$$

ó sea

$$x = 56 + 29'7 = 85'7$$

y

$$x = 56 - 29'7 = 26'3$$

Supongamos ahora que x sea menor que 56. Tendremos

$$(56 - x)^2 = 882'09;$$

y, razonando como antes, será

$$x = 26{'}3.$$

y

$$x = 85{'}7.$$

2.ª—Sea x el número que se pide, el cual puede ser mayor y puede ser menor que 56. Considerémosle mayor. Tendremos

$$(x - 56)^2 = 882{'}09.$$

Como el cuadrado de la diferencia de dos números es igual al cuadrado del primero, menos el duplo del producto del primero por el segundo, mas el cuadrado del segundo, será

$$(x - 56)^2 = x^2 - 2 \,.\, 56\, x + 56^2,$$

y, por consiguiente,

$$x^2 - 2 \,.\, 56\, x + 56^2 = 882{'}09;$$

ó sea

$$x^2 - 112x + 3136 = 882{'}09;$$

ecuación completa de 2.º grado. Resuelta como se resolvió la del problema 32, se tendrá

$$\left.\begin{array}{ll} & x = 56 + 29{'}7 = 85{'}7 \\ \text{y} & x = 56 - 29{'}7 = 26{'}3 \end{array}\right\} \text{que son los dos va-}$$

lores de x: el 1.º, cuando x es mayor que el número dado 56, y el 2.º, cuando es menor.

Si ahora considerásemos á x menor que 56 y repitiésemos el razonamiento anterior, obtendríamos para x los mismos valores que antes, pero en orden inverso; es decir que serían 26'3 y 85'7. Lo cual nos dice que, en la resolución gráfica de los problemas de esta clase, basta una sola suposición.

PROBLEMA 60.

La diferencia de los cuadrados de dos números es 2933'64; uno de estos dos números es el 93: ¿cual es el otro?

Resoluciones.

1.ª—Es evidente que, si al cuadrado del número menor se agrega la diferencia entre este cuadrado y el cuadrado del número mayor, la suma será este segundo cuadrado, porque el resto mas el sustraendo es igual al minuendo. También lo es que, si del cuadrado del número mayor se resta la diferencia entre este cuadrado y el del número menor, el resto será el cuadrado de este segundo número, porque el sustraendo es igual al minuendo menos el resto. Luego, si el número incógnito es mayor que 93, $93^2 + 2933'64 = 8649 + 2933'64 = 11582'64$ será el cuadrado del número mayor; y, por lo tanto la $\sqrt{11582'64} = 107'62$ será el número mayor; y, si dicho número es menor que 93, $93^2 - 2933'64 = 8649 - 2933'64 = 5715'36$ será el cuadrado del número menor, y, por lo mismo, la $\sqrt{5715'36} = 75'6$ será el número menor.

Este mismo razonamiento puede hacerse gráficamente en esta forma. Sea x el número incógnito. O este número es mayor que 93, ó es menor que él. Supongamos que sea mayor. En este caso tendremos

$$x^2 - 93^2 = 2933'64;$$

ó bien

$$x^2 - 8649 = 2933'64;$$

de donde

$$x^2 = 2933'64 + 8649 = 11582'64;$$

y de aquí

$$x = \sqrt{11582'64} = 107'62, \text{ número mayor.}$$

Supongamos ahora que x sea menor que 93. Tendremos

$$93^2 - x^2 = 2933'64;$$

ó bien

$$8649 - x^2 = 2933'64;$$

de donde

$$-x^2 = 2933'64 - 8649 = -5715'36;$$

ó sea, cambiando los signos,

$$x^2 = 5715'36;$$

y de aquí

$$x = \sqrt{5715'36} = 75'6, \text{ número menor.}$$

2.ª—La diferencia de los cuadrados de dos números es igual al duplo del número menor multiplicado por la diferencia entre éste y el mayor, mas el cuadrado de dicha diferencia (1): y también es igual al duplo del número mayor

---

(1) Demostración. Sea M el número mayor, m el menor y d la diferencia entre ellos. Digo que $M^2 - m^2 = 2md + d^2$.

En efecto, $M = m + d$. Cuadrando los dos miembros de esta ecuación, resultará esta otra

$$M^2 = m^2 + 2md + d^2;$$

y, pasando m^2 al primer miembro, se tendrá en definitiva

$$M^2 - m^2 = 2md + d^2.$$

Lo que se quería demostrar,

Corolario. Cuando sea $d = 1$, la última ecuación se convertirá en $M^2 - m^2 = 2m + 1$. Lo que dice que *la diferencia de los cuadrados de dos números que se diferencian en 1 unidad es igual al duplo del número menor, mas 1.* Ahora, como el duplo del número menor, mas 1, es igual al número menor, mas el número menor mas 1, y como el número menor mas 1 constituye el número mayor, resulta también en definitiva, cambiando términos, que *la diferencia de los cuadrados de dos números que se* multiplicado por la diferencia entre éste y el menor, menos el cuadrado de esta diferencia (1). Tendrémos, pues, llamando d á dicha diferencia, que, si el número incógnito es mayor que 93, será

$$2 \,.\, 93\, d + d^2 = 2933‘64;$$

ó bien

$$d^2 + 186\, d = 2933‘64;$$

ecuación completa de 2.º grado, que, resuelta como la del problema 32, da por resultado

$$d = \quad 14‘62$$

y

$$d = -\ 200‘62.$$

Agregando al número menor 93 la diferencia 14,62, que

---

diferencian en 1 unidad es igual á la suma de dichos dos números.

En el problema 31, nota 1.ª, dijimos que era $S = 2m + 1$ y ahora hemos visto que es $M^2 - m^2 = 2m + 1$. Esto confirma una vez más que es $M^2 - m^2 = S$.

(1) Demostración. Sea M el número mayor, m el menor y d la diferencia de ambos. Digo que $M^2 - m^2 = 2\,M\,d - d^2$. En efecto, $M^2 = M^2$; y como $m = M - d$, será

$$m^2 = M^2 - 2\,M d + d^2$$

Restando ordenadamente las dos ecuaciones 1.ª y 3.ª, se tendrá

$$M^2 - m^2 = 2\,M d - d^2$$

Lo que se queria demostrar.

Corolario. Es evidente que, cuando sea $d = 1$, la ecuación ùltima se convertirá en $M^2 - m^2 = 2\,M - 1$. Lo que dice que *la diferencia de los cuadrados de dos números que se diferencian en 1 unidad es igual al duplo del mayor, menos 1*; y, como el duplo del número mayor menos uno es igual al número mayor, mas el número mayor menos 1, y, como el número mayor menos 1 es el número menor, resulta también en definitiva, cambiando términos, que *la diferencia de los cuadrados de dos números que se diferencian en 1 unidad es igual á la suma de estos dos números.*

Esto mismo lo volveremos á demostrar luégo de otra manera.

es la verdadera, la suma $93 + 14'62 = 107'62$ será el número mayor (1)

Si el número desconocido es menor que 93, se tendrá

$$2 . 93\, d - d^2 = 2933'64;$$

ó bien

$$d^2 - 186\, d = - 2933'64;$$

ecuación completa de 2.º grado, que, resuelta como la anterior, da

$$d = 168'6$$

y

$$d = 17'4$$

Restando del número mayor 93 la diferencia 17'4, que es la verdadera (2), el resto $93 - 17'4 = 75'6$ será el número menor.

PROBLEMA 61.

El cuadrado de la suma de dos números que se diferencian en 1 unidad es 55507'36: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Si 55507'36 es el cuadrado de la suma de los dos números en cuestión, la $\sqrt{55507'36} = 235'6$ será la suma de dichos dos números; y, como la suma de dos números es igual al duplo del menor mas la diferencia (3) y aquí la di-

---

(1) El otro valor de d, $- 200'62$, nos da también el nùmero mayor, pero negativo. En efecto, $93 - 200'62 = - 107'62$.

(2) El otro valor de d, $168'6$, nos da también el número menor, pero negativo. En efecto, $93 - 168'6 = - 75'6$

(3) También la suma de dos números es igual al duplo del mayor, menos la diferencia; y al número mayor podíamos igualmente referirnos.

ferencia es 1, resultará que, si del 235‘6 restamos 1, el resto 234‘6 representará al duplo del número menor: luego 234‘6 : 2 = 117‘3 será el número menor. Luego el mayor será 117‘3 + 1 = 118‘3.

Este mismo razonamiento puede consignarse gráficamente diciendo: sea x uno de los dos números: el otro será, ó $x + 1$, ó $x - 1$. Supongamos que sea $x + 1$. Tendremos

$$\left(x + (x + 1) \right)^2 = 55507‘36;$$

ó bien

$$\left(2x + 1 \right)^2 = 55507‘36,$$

Extrayendo de los dos miembros la raiz cuadrada, se tendrá

$$2x + 1 = \sqrt{55507‘36} = 235‘6;$$

ó sea

$$2x + 1 = 285‘6;$$

de donde

$$2x = 234‘6,$$

y de aquí

$$x = \frac{234‘6}{2} = 117‘3$$

Luego el otro número será, ó 117‘3 + 1 = 118,3, ó 117,3 — 1 = 116‘3. Hecha la comprobación, resulta que sólo los números 117‘3 y 118‘3 satisfacen las condiciones del problema: luego sólo ellos forman solución.

2.ª—Siendo 55507‘36 el cuadrado de la suma de los dos números pedidos, la $\sqrt{55507‘36} = 235‘6$ será la suma de dichos dos números; y, siendo 235‘6 la suma y 1 la diferencia de dichos dos números, estos números *(problema 31)* serán

$$M\text{, el mayor, } = \frac{235‘6}{2} + \tfrac{1}{2} = 118‘3$$

y

$$m\text{, el menor, } = \frac{235‘6}{2} - \tfrac{1}{2} = 117‘3.$$

PROBLEMA 62.

La suma de los cuadrados de dos números que se diferencian en una unidad es 18509'38: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Sea x uno de los dos números: el otro será, ó x + 1, ó x — 1. Supongamos que sea x + 1. Tendremos:

$$x^2 + (x + 1)^2 = 18509'38$$

ó bien, quitado el paréntesis,

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 18509'38;$$

ó sea

$$2x^2 + 2x + 1 = 18509'38. \qquad (A)$$

Pasando el 1 al 2.º miembro, será

$$2x^2 + 2x = 18508'38;$$

y, dividiendo toda la ecuación por 2, se tendrá

$$x^2 + x = 9254'19$$

Esta ecuación *(que puede resolverse como lo que es, como completa de 2.º grado)* nos dice *(problema 35, nota 2.ª)* que x es la raíz cuadrada entera de 9254'19 y al propio tiempo el residuo de dicha raíz. Veámoslo prácticamente

$$\sqrt{9254'19} \quad | \; 95'7, \text{ raíz cuadrada entera}$$

1154

. 229'19

. 95'70 residuo de la raíz.

Ahora, si x vale 95'7, el otro número valdrá, ó 95'7 + 1 = 96'7, ó 95'7 — 1 = 94'7. Comprobando, se verá que sólo los números 95·7 y 96'7 forman solución.

2.ª—La suma de los cuadrados de dos números que se diferencian en 1 unidad *(problema 58, cita 2.ª, párrafo final)* es igual al duplo del cuadrado del número menor, mas el duplo del número menor, mas 1; y tambien *(el mismo problema, cita 3.ª, párrafo último)* es igual al duplo del cuadrado del número mayor, menos el duplo del número mayor, mas 1. Será, pues, fijándonos en la 1.ª parte,

$$2x^2 + 2x + 1 = 18509'38.$$

Esta ecuación es la ecuación (A) del razonamiento anterior. Resuélvase como antes.

PROBLEMA 63.

La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 247: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos *(problema 60, cita 1.ª, corolario)* es igual al duplo del número menor, mas 1; y también es igual *(el mismo problema, cita 2.ª, corolario)* al duplo del número mayor, menos 1. Fijémonos en el 1.º de estos dos enunciados, como podíamos fijarnos en el 2.º

Si la diferencia 247 es igual al duplo del número menor mas 1, el 247 — 1 = 246 será el duplo del número menor; y, si 246 es el duplo del número menor, el 246 : 2 = 123 será el número menor. Luego el mayor será 124.

2.ª—Según la parte final de los corolarios de las citas 1.ª y 2.ª del problema 60, el número 247, diferencia de los cuadrados de los dos números pedidos, es la suma de estos dos números; y, como la diferencia de los mismos es 1, se tendrá *(problema 31)*

M, número mayor, $= \frac{247}{2} + \frac{1}{2} = 124$

y

m, número menor, $= \frac{247}{2} - \frac{1}{2} = 123.$

3.ª—Sea x uno de los dos números que se piden: el otro será, ó $x + 1$, ó $x - 1$. Supongamos que sea $x + 1$. Tendremos

$$(x + 1)^2 - x^2 = 247;$$

ó bien, quitando el paréntesis,

$$x^2 + 2x + 1 - x^2 = 247;$$

ó sea

$$2x + 1 = 247.$$

Pasando el 1 al 2.º miembro, será

$$2x = 246;$$

de donde

$$x = \frac{246}{2} = 123.$$

Luego el otro número será, ó $123 + 1 = 124$, ó $123 - 1 = 122$. Los dos que satisfacen son 123 y 124.

PROBLEMA 64.

El cuadrado de la suma de dos números es 2819,61 y la diferencia de los mismos es 23'3: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Si 2819'61 es el cuadrado de la suma de los dos números de que se trata, la suma de estos dos números será la $\sqrt{2819'61} = 53'1$. Ahora, si 53'1 es la suma de estos dos números y su diferencia, según los datos, es 23'3 los números (*problema 31*) serán

M, el mayor, $= \frac{53'1}{2} + \frac{23'3}{2} = 38'2$

y m, el menor, $= \frac{53'1}{2} - \frac{23'3}{2} = 14'9.$

2.ª—La cantidad 2819‘61, cuadrado de la suma de los dos números, se compone de la suma de los cuadrados de estos números y del doble producto de los mismos. Luego, si de esta cantidad restamos $23‘3^2 = 542‘89$, cuadrado de la diferencia de dichos números y que, por lo tanto, se compone de la suma de los cuadrados de los mismos, menos su doble producto, el resto resultante $2819‘61 - 542‘89 = 2276‘72$ será el cuádruplo de dicho producto. Luego $2276‘72 : 4 = 569‘18$ será el producto. Ahora, siendo 23‘3 la diferencia de los números y 569‘18 su producto, los números serán (*problema 35*).

M, el mayor, = 38‘2

y m, el menor, = 14‘9

3.ª=Sea x el número menor: el mayor será x + 23,3. Tendremos, pues, que

$$(x + x + 23‘3)^2 = 2819‘61$$

ó bien

$$(2x + 23‘3)^2 = 2819‘61$$

Extrayendo la raíz cuadrada de los dos miembros de esta ecuación, se tendrá

$$2x + 23‘3 = \sqrt{2819‘61 =} \pm 53‘1 ;$$

ó sea

$$2x + 23‘3 = \pm 53‘1 ;$$

de donde

$$2x = - 23‘3 \pm 53‘1 ;$$

y de aquí

$$x = - \frac{23‘3}{2} \pm \frac{53‘1}{2}$$

ó sea

$$x = - \frac{23‘3}{2} + \frac{53‘1}{2} = 14‘9, \text{ y } x = - \frac{23‘3}{2} - \frac{53‘1}{2} = - 38‘2$$

Resulta, pues, que el número menor es 14‘9. Luego el mayor será $14‘9 + 23‘3 = 38‘2$, que es el valor absoluto de la raíz negativa de la ecuación resuelta.

PROBLEMA 65.

El cuadrado de la suma de dos números es 6226‘7881 y el de su diferencia 185·7769: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución.

Siendo 6226‘7881 el cuadrado de la suma de los dos números en cuestión, la $\sqrt{6226‘7881} = 78‘91$ será la suma de estos dos números; y, siendo 185‘7769 el cuadrado de la diferencia de los mismos números, la $\sqrt{185‘7769} = 13‘63$ será esta diferencia. Ahora, siendo 78‘91 la suma de los dos números y 13‘63 la diferencia de los mismos, éstos *(problema 31)* serán

M, el mayor, $= \frac{78‘91}{2} + \frac{13‘63}{2} = 46‘27$

y

m, el menor, $= \frac{78‘91}{2} - \frac{13‘63}{2} = 32‘64.$

PROBLEMA 66.

El cuadrado de la diferencia de dos números es 295‘84 y la suma de los mismos 52‘8: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Si 295‘84 es el cuadrado de la diferencia de los dos números en cuestión, esta diferencia será la $\sqrt{295‘84} = 17‘2$ y, como según los datos, la suma de dichos dos números es

52‘8, se tendrá que *(problema 31)* los números serán

M, el mayor, $= \frac{52‘8}{2} + \frac{17‘2}{2} = 35$

y

m, el menor, $= \frac{52‘8}{2} - \frac{17‘2}{2} = 17‘8.$

2.ª—Si cuadramos la cantidad 52‘8, suma de los dos números, su cuadrado 52‘8^2 = 2787‘84 contendrá á la suma de los cuadrados de dichos números, mas al doble producto de éstos; y, como la cantidad 295‘84, cuadrado de la diferencia de los expresados números, contiene á la suma de los cuadrados de éstos, menos su doble producto, si de la cantidad 2787‘84 restamos la cantidad 295,84, el resto 2787‘84 -- 295‘84 = 2492 representará el cuádruplo del producto de los dos números. Luego 2942 : 4 = 735‘5 será este producto. Ahora, si la suma de los números es 52‘8 y su producto 735‘5, los números *(problema 32)* serán

M, el mayor, = 35

y m, el menor, = 17‘8.

PROBLEMA 67.

La suma de dos números es 112 y la de sus cuadrados 7424: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Elevando al cuadrado la suma 112 de los dos números, el cuadrado 112^2 = 12544 contendrá á la suma de los cuadrados de dichos números, mas al doble producto de éstos; y, como la cantidad 7424 contiene á la suma de dichos cuadrados, es evidente que, si de 12544 restamos 7424, el resto 12544 — 7424 = 5120, representará el doble producto de los dos números: luego $5120 : 2 = 2560$ será éste producto. Ahora, si la suma de los dos números es 112 y su producto 2560, los números *(problema 32)* serán

$$M, \text{ el mayor, } = 80$$

y

$$m, \text{ el menor, } = 32.$$

2.ª—Deducido por el razonamiento anterior que 5120 es el doble producto de los dos números, diremos ahora: si de la cantidad 7424, cuadrado del 1.er número, mas cuadrado del 2.º, restamos 5120, duplo del producto de dichos números, el resto $7424 - 5120 = 2304$ será el cuadrado de la diferencia de los expresados números: luego la $\sqrt{2304} = 48$ será la diferencia de éstos. Ahora, siendo 112 la suma de los dos números y 48 su diferencia, los números *(problema 31)* serán

$$M, \text{ el mayor, } = \frac{112}{2} + \frac{48}{2} = 80$$

y

$$m, \text{ el menor, } = \frac{112}{2} - \frac{48}{2} = 32.$$

3.ª—La suma de los cuadrados de dos números *(problema 58, cita 2.ª)* es igual al duplo del cuadrado del menor, mas el duplo del menor multiplicado por la diferencia, mas el cuadrado de esta (1). Llamando, pues, m al número menor y d á la diferencia, será

$$2\,m^2 + 2\,m\,d + d^2 = 7424.$$

Ahora, como *(problema 31, nota 2.ª)* $d = s - 2\,m$, sustituyendo en la ecuación anterior cantidades iguales, resultará esta otra

---

(1) Tambien es igual *(cita 2.ª del mismo problema)* al duplo del cuadrado del número mayor, menos el duplo del producto del mayor por la diferencia, mas el cuadrado de ésta; y al número mayor podíamos igualmente habernos referido.

$$2m^2 + 2m(s - 2m) + (s - 2m)^2 = 7424;$$

y, quitando paréntesis, se tendrá

$$2m^2 + 2ms - 4m^2 + s^2 - 4ms + 4m^2 = 7424;$$

y, reduciendo términos semejantes, será

$$2m^2 - 2ms + s^2 = 7424;$$

y, como según los datos, $s = 112$, sustituyendo, se tendrá

$$2m^2 - 2m \,.\, 112 + 112^2 = 7424;$$

ó bien

$$2m^2 - 224m + 12544 = 7424; \qquad \text{(A)}$$

ecuación completa de 2.º grado, que, resuelta como la del problema 32, da los resultados que ya conocemos.

Nota.—Como (*problema 31,*) $m = \frac{s - d}{2}$, en la 1.ª ecuación pudimos haber sustituido á m con su igual $\frac{s - d}{2}$ y entonces hubiéramos obtenido que d era igual á 48. Ahora conocida la suma, 112, de los dos números y la diferencia, 48, de los mismos, estaríamos en pleno problema 31 con datos particulares.

4.ª—Sea M el número mayor y m el menor. Tendremos

$$M^2 + m^2 = 7424;$$

pero, como es $M = 112 - m$, sustituyendo, se tendrá

$$(112 - m)^2 + m^2 = 7424;$$

ó bien, quitado el paréntesis,

$$112^2 - 2 \,.\, 112m + m^2 + m^2 = 7424;$$

ó sea

$$12544 - 224m + 2m^2 = 7424;$$

ó, lo que es lo mismo,

$$2m^2 - 224m + 12544 = 7424,$$

que es la ecuación (A) del razonamiento anterior, el cual se continuará como antes.

PROBLEMA 68.

El cuadrado de la suma de dos números es 24336 y la suma de los cuadrados de los mismos números es 12240: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución.

Siendo 24336 el cuadrado de la suma de los dos números, la $\sqrt{24336} = 156$ será la suma de dichos dos números. Ahora estamos ya en pleno problema 67. Aplicando, pues, los razonamientos empleados en la resolución de este problema, resultará que es

M, número mayor = 84

y m, número menor = 72.

PROBLEMA 69.

La suma de dos números es 113 y la diferencia de sus cuadrados 8701: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—*La diferencia de los cuadrados de dos números es el producto de multiplicar la suma de los mismos por su diferencia* (1). Por consiguiente, si dividimos la cantidad 8701,

---

(1) Demostración. Sea M el número mayor y m el menor: su suma será $M + m$, y su diferencia $M - m$. Digo que

$$M^2 - m^2 = (M + m) \times (M - m).$$

En efecto, ejecutando la multiplicación indicada en el 2.º miembro, se tendrá diferencia de los cuadrados de los dos números en cuestión, por la cantidad 113, suma de estos dos números, el cociente 8701 : 113 = 77 será la diferencia de los mismos. Ahora, siendo 113 la suma de dichos números y 77 su diferencia, estos números serán *(problema 31)*

$$M, \text{ el mayor, } = \frac{113}{2} + \frac{77}{2} = 95$$

y

$$m, \text{ el menor, } = \frac{113}{2} - \frac{77}{2} = 18.$$

2.ª—Sea M el número mayor y m el número menor. Tendremos

$$M^2 - m^2 = 8701;$$

y, como el número mayor es igual á la suma menos el menor, sustituyendo, se tendrá

$$(113 - m)^2 - m^2 = 8701;$$

y, quitando el paréntesis, será

$$113^2 - 2 \,.\, 113\, m + m^2 - m^2 = 8701;$$

ó bien,

$$12769 - 226\, m = 8701:$$

y, pasando el primer término de esta ecuación al 2.º, resultará esta otra

$$- 226\, m = 8701 - 12769 = - 4068;$$

$$(M + m) \times (M - m) = M^2 + m M - m M - m^2;$$

y, simplificando, será

$$(M + m) \times (M - m) = M^2 - m^2;$$

ó bien, invirtiendo los miembros,

$$M^2 - m^2 = (M + m) \times (M - m).$$

Corolario. Es evidente que, cuando sea $M - m = 1$, la ecuación última se convertirá en $M^2 - m^2 = M + m$. Lo cual nos dice lo que ya sabíamos, esto es, que la diferencia de los cuadrados de dos números que se diferencien en 1 unidad es la suma de dichos números.

y, cambiando los signos, será

$$226\,m = 4068;$$

de donde

$$m = \tfrac{4068}{226} = 18.$$

Luego el número mayor será 113 — 18 = 95.

3.ª—La diferencia de los cuadrados de dos números (*problema 60, cita 1.ª*) es igual al duplo del producto del menor por la diferencia, mas el cuadrado de ésta (1). Llamando, pues, M al número mayor, m al menor y d á la diferencia entre ellos, será

$$2\,md + d^2 = 8701;$$

y, como es $d = s - 2\,m$ y $s = 113$, sustituyendo cantidades iguales, se tendrá

$$2\,m \times (113 - 2\,m) + (113 - 2\,m)^2 = 8701$$

Quitando paréntesis, resultará

$$226\,m - 4\,m^2 + 113^2 - 2\,.\,113 \times 2\,m + 4\,m^2 = 8701;$$

ó bien

$$226\,m - 4\,m^2 + 12769 - 452\,m + 4\,m^2 = 8701.$$

Reduciendo términos semejantes, tendremos

$$-\,226\,m = -\,4068;$$

ó sea

$$226\,m = 4068;$$

de donde

$$m = \tfrac{4068}{226} = 18.$$

Luego el número mayor será 113 — 18 = 95.

---

(1) Tambien es igual (*cita 2.ª del mismo problema*) al duplo del producto del número mayor por la diferencia, menos el cuadrado de ésta; y al número mayor podíamos igualmente referirnos.

PROBLEMA 70.

El cuadrado de la suma de dos números es 8649 y la diferencia de los cuadrados de los mismos números es 3441: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución.

Siendo 8649 el cuadrado de la suma de los dos números pedidos, la $\sqrt{8649} = 93$ será la suma de dichos números. Ahora estamos ya en el problema anterior. Aplicando aquí los razonamientos allí empleados, resultará

M, número mayor = 65
y *m*, número menor, = 28.

PROBLEMA 71.

La diferencia de dos números es 33 y la suma de sus cuadrados 2657: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Si cuadramos la cantidad 33, diferencia de los dos números, su cuadrado $33^2 = 1089$ contendrá á la suma de los cuadrados de los dos números, menos el doble producto de éstos; y, como la cantidad 2657, contiene á la suma de dichos cuadrados, si de 2657 restamos 1089, el resto $2657 - 1089 = 1568$ representará el doble producto de los dos números. Luego $1568 : 2 = 784$ será el producto. Ahora, siendo 33 la diferencia de los dos números y 784, su producto, los dos números (*problema 32*) serán

M, el mayor = 49
y *m*, el menor, = 16.

2.ª—Hallado por el razonamiento anterior que 1568 es el doble producto de los dos números, si agregamos esta cantidad á 2657, suma de los cuadrados de dichos números, la suma $2657 + 1568 = 4225$ será el cuadrado de la suma de éstos: luego la $\sqrt{4225} = 65$ será la suma de los dos números. Ahora, siendo 65 la suma de los dos números y 33 su diferencia, los números (*problema 31*) serán

$$\text{M, el mayor,} = \frac{65}{2} + \frac{33}{2} = 49$$

y

$$m\text{, el menor,} = \frac{65}{2} - \frac{33}{2} = 16.$$

3.ª—La suma de los cuadrados de dos números es igual al duplo del cuadrado del menor, mas el doble producto del menor por la diferencia, mas el cuadrado de ésta (1). Llamando, pues, M al número mayor, m el menor y d á su diferencia, tendremos

$$2m^2 + 2md + d^2 = 2657$$

Ahora, como d es igual á 33, sustituyendo, será

$$2m^2 + 66m + 1089 = 2657;$$

ecuación completa de 2.º grado, que, resuelta como la del problema 32, da por resultado

$$m = 16 \text{ (2)}$$

Luego el número mayor será $16 + 33 = 49$.

4.ª—Sea M el número mayor y m el menor. Tendremos

$$M^2 + m^2 = 2657;$$

y, como M es igual á $m + 33$, sustituyendo, será

$$(m + 33)^2 + m^2 = 2657.$$

---

(1) Véase la cita 2.ª del problema 58.

(2) También se obtendrá $m = -49$, que es el valor del otro número, tomado positivamente.

Quitando el paréntesis, se tendrá

$$m^2 + 66\ m + 1089 + m^2 = 2657;$$

ó bien

$$2m^2 + 66\ m + 1089 = 2657,$$

que es la ecuación completa de 2.º grado que resultó en definitiva del razonamiento anterior. *(Resuélvase como allí).*

PROBLEMA 72.

El cuadrado de la diferencia de dos números es 1225 y la suma de los cuadrados de los mismos números es 9273: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución.

Siendo 1225 el cuadrado de la diferencia de los dos números de que se trata, la $\sqrt{1225} = 35$ será la diferencia de dichos números. Ahora ya la cuestión queda reducida al problema 71 con otros datos. Aplicando aquí los razonamientos allí empleados, se obtendrá

M, número mayor, = 87

y m, número menor, = 52.

PROBLEMA 73.

La diferencia de dos números es 38, y la de sus cuadrados 3268: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—La diferencia de los cuadrados de dos números *(problema 69, cita 1.ª)* es el producto de la suma de estos números por la diferencia de los mismos. Así pues, si dividimos la cantidad 3268, diferencia de los cuadrados de los dos números en cuestión, por la cantidad 38, diferencia de estos dos números, el cociente 3268 : 38 = 86 será la suma de los citados números. Ahora, siendo 86 la suma de los dos números y 38 su diferencia, los números *(problema 31)* serán

$$\text{M, el mayor,} = \frac{86}{2} + \frac{38}{2} = 62$$

y
$$m\text{, el menor,} = \frac{86}{2} - \frac{38}{2} = 24.$$

2.ª—La diferencia de los cuadrados de dos números es igual *(problema 60, cita* 1.ª) al doble producto del número menor por la diferencia, mas el cuadrado de ésta. Llamando, pues, m al número menor, como la diferencia de los números es 38, se tendrá

$$2\ m\ .\ 38 + 38^2 = 3268;$$

ó bien

$$76\ m + 1444 = 3268;\ (A)$$

de donde

$$76\ m = 3268 - 1444 = 1824;$$

y de aquí

$$m = \frac{1824}{76} = 24.$$

Luego el número mayor será 24 + 38 = 62.

3.ª—Sean los dos números M, el mayor, y m, el menor. Tendremos

$$M^2 - m^2 = 3268;$$

mas, como M es igual á m + 38, sustituyendo, se tendrá

$$(m + 38)^2 - m^2 = 3268;$$

y, quitando el paréntesis, resultará

$$m^2 + 2\ .\ 38 m + 38^2 - m^2 = 3268;$$

ó bien

$$76 m + 1444 = 3268,$$

que es la ecuación (A) del razonamiento anterior. Resuélvase como antes.

PROBLEMA 74.

El cuadrado de la diferencia de dos números es 1369 y la diferencia de los cuadrados de los mismos números es 6475: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución.

Si la cantidad 1369 es el cuadrado de la diferencia de los dos números pedidos, la $\sqrt{1369} = 37$ será esta diferencia. Ahora la cuestión queda reducida al problema anterior con nuevos datos. Resuélvase y se tendrá

M, número mayor, = 106

y *m*, número menor, = 69.

PROBLEMA 75.

El cubo de la suma de dos números es 117649: uno de estos dos números es 32: ¿cuál es el otro?

Resolución.

Si el cubo de la suma de los dos números de que se trata es 117649, la $\sqrt[3]{117649} = 49$ será la suma de dichos dos números; y, si 49 es la suma de los dos números y uno de ellos es el 32, el otro será 49 — 32 = 17.

Este mismo razonamiento puede hacerse gráficamente diciendo: sea x el otro número. Tendremos

$$(x + 32)^3 = 117649.$$

Extrayendo la raíz cúbica de los dos miembros de esta ecuación, se tendrá esta otra

$$x + 32 = \sqrt[3]{117649} = 49;$$

ó sea

$$x + 32 = 49:$$

de donde

$$x = 49 - 32 = 17.$$

PROBLEMA 76

La suma de los cubos de dos números es 18737'136; uno de estos dos números es 25: ¿cuál es el otro?

Resoluciones.

1.ª – Es evidente que, si de 18737'136, suma de los cubos de los dos números en cuestión, se resta $25^3 = 15625$, cubo del número dado, el resto 18737,136 – 15625 = 3112'136 será el cubo del número que se pide. Luego la $\sqrt[3]{3112'136} = 14'6$ será el número pedido.

Este mismo razonamiento puede consignarse gráficamente diciendo: sea x el número incógnito. Tendremos

$$x^3 + 25^3 = 18737'136;$$

ó bien

$$x^3 + 15625 = 18737'136;$$

de donde

$$x^3 = 18737'136 - 15625 = 3112'136;$$

y de aquí

$$x = \sqrt[3]{3112'136} = 14'6.$$

2.ª - Sea x el otro número. Este número, ó es mayor ó menor que 25. Supongamos que sea mayor. *La suma de los cubos de dos números es igual al duplo del cubo del menor, mas el triplo del cuadrado del menor por la diferencia entre éste y el mayor, mas el triplo del menor por el cuadrado de la diferencia, mas el cubo de la diferencia* (1). Llamando, pues, d á esta diferencia, tendremos

---

(1) Demostremos esta proposición. Sea M el número mayor. m el menor y d la diferencia entre ellos. Digo que

$$M^3 + m^3 = 2m^3 + 3m^2d + 3md^2 + d^3.$$

En efecto, $M = m + d$. Elevando al cubo los dos miembros de esta ecuación, resultará esta otra

$$M^3 = m^3 + 3m^2d + 3md^2 + d^3;$$

y, agregando m^3 á los dos miembros de esta ecuación, se tendrá en definitiva

$$M^3 + m^3 = 2m^3 + 3m^2d + 3md^2 + d^3.$$

Lo que se quería demostrar,

La exactitud de la antedicha proposición se percibe claramente considerando: 1.º que el $2m^3 + 3m^2d + 3md^2 + d^3$ puede descomponerse en dos partes, que son: m^3 y $m^3 + 3m^2d + 3md^2 + d^3$; y 2.º que el $3m^2d + 3md^2 + d^3$ es, como luégo demostraremos, la diferencia de los cubos de dos números. Agregado el $3m^2d + 3md^2 + d^3$ al m^3, como lo está en la 2.ª parte, resulta el cubo del número mayor; y, como la parte 1.ª la constituye el m^3, cubo del nùmero menor, de aquí que el $3m^3 + 3m^2d + 3md^2 + m^3$ sea la suma de los cubos de los números M y m.

Corolario. Cuando sea $d = 1$, la ecuación $M^3 + m^3 = 2m^3 + 3m^2d + 3md^2 + d^8$ se convertirá en esta otra

$$M^3 + m^3 = 2m^3 + 3m^2 + 3m + 1.$$

Lo que nos dice, que, cuando los nùmeros dados se diferencian en 1 unidad, la suma de sus cubos es igual al duplo del cubo del menor, mas el triplo del cuadrado del menor, mas el triplo del menor, mas 1.

$2 . 25^3 + 3 . 25^2 d + 3 . 25 d^2 + d^3 = 18737'136$; (A).
ó bien, invirtiendo los términos del 1.^er^ miembro,
$d^3 + 3 . 25 d^2 + 3 . 25^2 d + 2 . 25^3 = 18737'136$.

Pasando al 2.º miembro $25^3 = 15625$, será
$d^3 + 3 . 25 d^2 + 3 . 25^2 d + 25^3 = 18737'136 - 15625$;
ó sea

$$d^3 + 3 . 25 d^2 + 3 . 25^2 d + 25^3 = 3112'136.$$

Si nos fijamos en el número y naturaleza de los términos del 1.er miembro de esta ecuación, en el acto comprenderemos que dicho miembro representa el cubo de $d + 25$. Luego, extrayendo la raíz cúbica de los dos miembros, tendremos esta ecuación

$$d + 25 = \sqrt[3]{3112'136} = 14'6;$$

de donde

$$d = 14'6 - 25 = - 10'4.$$

Este resultado negativo nos dice que el número incógnito no es mayor que 25, como lo hemos supuesto, sinó menor en 10'4 unidades. Será, pues, $25 - 10'4 = 14'6$.

Prescindamos del resultado que acabamos de obtener en la 1.ª suposición y supongamos ahora que x sea menor que 25. *La suma de los cubos de dos números es igual al duplo del cubo del mayor, menos el triplo del cuadrado del mayor por la diferencia entre éste y el menor, mas el triplo del mayor por el cuadrado de la diferencia, menos el cubo de ésta* (1). Llamando, pues, d á la diferencia, tendremos

---

(1) Demostremos esta proposición. Sea M el número mayor, m el menor y d la diferencia entre ellos. Digo que

$$M^3 + m^3 = 2 M^3 - 3 M^2 d + 3 M d^2 - d^3.$$

En efecto, $m = M - d$. Elevando al cubo los dos miembros de esta ecuación, resultará esta otra

$$m^3 = M^3 - 3 M^2 d + 3 M d^2 - d^3;$$

$$2 \cdot 25^3 - 3 \cdot 25^2 d + 3 \cdot 25 d^2 - d^3 = 18737'136. \quad (B)$$

Resolviendo esta ecuación en la misma forma que su correspondiente (A) del supuesto anterior (1) se hallará que es $d = 10'4$. Luego el número menor será $25 - 10'4 = 14'6$.

Estos resultados nos dicen que para hallar el número incógnito basta una sola suposición.

---

y, agregando M^3 á los dos miembros, se tendrá en definitiva

$$M^3 + m^3 = 2M^3 - 3M^2 d + 3Md^2 - d^3.$$

Lo que se quería demostrar.

La exactitud de la proposición demostrada se percibe claramente considerando: 1.º que el $2M^3 - 3M^2 d + 3Md^2 - d^3$ se compone de dos partes, que son: M^3, la una, y $M^3 - 3M^2 d + 3Md^2 - d^3 = M^3 - (3M^2 d - 3Md^2 + d^3)$, la otra; y 2.º que el $3M^2 d - 3Md^2 + d^3$ expresa, como luego se verá, la diferencia de los cubos de dos números. Restado del M^3 el $(3M^2 d - 3Md^2 + d^3)$, como lo está en la 2.ª parte, resulta el cubo del número menor; y, como la parte 1.ª la constituye el M^3, cubo del número mayor, se sigue que $M^3 + M^3 - 3M^2 d + 3Md^2 - d^3 = 2M^3 - 3M^2 d + 3Md^2 - d^3$ es la suma de los cubos de los números M y m.

Corolario. Cuando sea $d = 1$, la ecuación $M^3 + m^3 = 2M^3 - 3M^2 d + 3Md^2 - d^3$ se convertirá en esta otra

$$M^3 + m^3 = 2M^3 - 3M^2 + 3M - 1.$$

Lo que nos dice que, cuando los dos números dados se diferencian en 1 unidad, la suma de los cubos de dichos números es igual al duplo del cubo del mayor, menos el triplo del cuadrado del mayor, mas el triplo del mayor, menos 1.

(1) Obsérvese que la raíz cúbica del primer miembro de la ecuación (B), depués de pasado al 2.º el 25^3, no es $d + 25$, como antes, sinó $d - 25$. Asi lo dicen ya los signos negativos de dos de los cuatro términos.

PROBLEMA 77.

El cubo de la diferencia de dos números es 10648; uno de ellos es 37: ¿cuál es el otro?

Resolución.

Siendo 10648 el cubo de la diferencia de los dos números, la $\sqrt[3]{10648} = 22$ será esta diferencia. Siendo 22 la diferencia del número dado 37 y el otro número, este número, si es mayor que 37, será $37 + 22 = 59$, porque el minuendo es igual al sustraendo mas la diferencia; y, si es menor que 37, será $37 - 22 = 15$, porque el sustraendo es igual al minuendo menos la diferencia.

Este mismo razonamiento puede consignarse gráficeamente diciendo: sea x el número desconocido. Este número será mayor ó menor que 37. Supongamos que sea mayor. Tendremos

$$(x - 37)^3 = 10648.$$

Extrayendo la raíz cúbica de los dos miembros de esta ecuación, resultará esta otra

$$x - 37 = \sqrt[3]{10641} = 22;$$

ó sea

$$x - 37 = 22;$$

de donde

$$x = 22 + 37 = 59.$$

Supongamos ahora que sea menor que 37. Tendremos

$$(37 - x)^3 = 10641;$$

y, razonando como antes, resultará

$$x = 15.$$

PROBLEMA 78.

La diferencia de los cubos de dos números es 622566: uno de estos dos números es 87: ¿cuál es el otro?

Resoluciones.

1.ª—Es evidente que, si al cubo del número menor se agrega la diferencia entre este cubo y el cubo del número mayor, la suma será este segundo cubo, porque el resto mas el sustraendo es igual al minuendo. También es obvio que, si del cubo del número mayor se resta la diferencia entre este cubo y el del número menor; el resto será el cubo de este segundo número, porque el sustraendo es igual al minuendo menos el resto. Luego, si el número incógnito es mayor que 87, $87^3 + 622566 = 1281069$ será el cubo del número mayor; y, por lo tanto, la $\sqrt[3]{1281069} = 107'9$ será el número mayor; y, si dicho número incógnito es menor que 87, $87^3 - 622566 = 658503 - 622566 = 35937$ será el cubo del número menor, y, por lo mismo, la $\sqrt[3]{35937} = 33$ será el número menor.

Este mismo razonamiento puede hacerse gráficamente en esta forma. Sea x el número que se pide. O éste número es mayor que 87, ó es menor que él. Supongamos que sea mayor. En este caso tendremos

$$x^3 - 87^3 = 622566;$$

ó bien

$$x^3 - 658503 = 622566;$$

de donde

$$x^3 = 622566 + 658503 = 1281069;$$

y de aquí

$$x = \sqrt[3]{1281069} = 107'9.....,\text{ número mayor.}$$

Supongamos ahora que x sea menor que 87. Tendremos

$$87^3 - x^3 = 622566;$$

ó bien

$$658503 - x^3 = 622566;$$

de donde

$$- x^3 = 622566 - 658503 = -- 35937$$

ó sea, cambiando los signos,

$$x^3 = 35937$$

y de aquí

$$x = \sqrt[3]{35937} = 33,\text{ número menor.}$$

Este número 33 es el único que, combinado con el dato 87, forma solución del problema.

2.ª—La diferencia de los cubos de dos números es igual al triplo del cuadrado del número menor por la diferencia entre éste y el mayor, mas el triplo del menor por el cuadrado de la diferencia, mas el cubo de ésta (1): y también

---

(1) Demostración. Sea M el número mayor, m el menor y d la diferencia entre ellos. Digo que $M^3 - m^3 = 3\,m^2 d + 3\,m\,d^2 + d^3$.

*E*n efecto, $M = m + d$. Elevando al cubo los dos miembros de esta ecuación, se tendrá esta otra

$$M^3 = m^3 + 3m^2 d + 3\,m\,d^2 + d^3;$$

y, pasando m^3 al primer miembro, resultará en definitiva

$$M^3 - m^3 = 3m^2 d + 3md^2 + d^3.$$

Corolario. Cuando sea $d = 1$, la última ecuación se convertirá en

$$M^3 - m^3 = 3m^2 + 3\,m + 1;$$

lo cual dice que la diferencia de los cubos de dos números que se diferencian en 1 unidad es igual al triplo del cuadrado del menor, mas el triplo del menor, mas 1.

es igual el triplo del cuadrado del mayor por la diferencia, menos el triplo del mayor por el cuadrado de la diferencia, mas el cubo de ésta (1). Tendremos, pues, llamando d á dicha diferencia, que, si el número incógnito es mayor que 87, será

$$3 \,.\, 87^2 d + 3 \,.\, 87 d^2 + d^3 = 622566;$$

ó bien

$$d^3 + 3 \,.\, 87 d^2 + 3 \,.\, 87^2 d = 622566.$$

Agregando á los dos miembros de esta ecuación 87^3, que es igual á 658503, resultará esta otra

$$d^3 + 3 \,.\, 87 d^2 + 3 \,.\, 87^2 d + 87^3 = 622566 + 558503;$$

ó sea $d^3 + 3 \,.\, 87 d^2 + 3 \,.\, 87^2 d + 87^3 = 1281069$ (A).

El 1.^{er} miembro de esta ecuación, como lo indican el número y naturaleza de sus términos, representa el cubo de de $d + 82$. Luego extrayendo la raíz cúbica de dos miembros, se tendrá

$$d + 87 = \sqrt[3]{1281069} = 107{\cdot}9.....;$$

---

(1) Demostración. Sea M el número mayor, m el menor y d la diferencia entre ellos. Digo que $M^3 - m^3 = 3\,M^2 d - 3\,M d^2 + d^3$.

En efecto, $M^3 = M^3$, y como $m = M - d$, será

$$m^3 = M^3 - 3\,M^2 d + 3\,M d^2 - d^3.$$

Restando ordenadamente las dos ecuaciones 1.ª y 3.ª, se tendrá

$$M^3 - m^3 = 3\,M^2 d - 3\,M d^2 + d^3.$$

Corolario. Cuando sea $d = 1$, la última ecuación se convertirá en $M^3 - m^3 = 3\,M^2 - 3\,M + 1$. Lo cual dice que la diferencia de los cubos de dos números que se diferencian en 1 unidad es igual al triplo del cuadrado del mayor, menos el triplo del mayor, mas 1.

Luégo veremos también á qué otra cosa es igual, tanto la suma como la diferencia de los cubos de dos números.

de donde

$$d = 107{'}9 .... - 87 = 20{'}9.$$

Luego el número desconocido será 87 + 20'9 = 107'9.

Si el número incógnito es menor que 87, se tendrá

$$3 \,.\, 87^2 d - 3 \,.\, 87 d^2 + d^3 = 622566;$$

ó bien

$$d^3 - 3 \,.\, 87 d^2 + 3 \,.\, 87^2 d = 622566.$$

Restando ahora de los dos miembros de esta ecuación 87^3, que es igual á 658503, resultará esta otra

$$d^3 - 3 \,.\, 87 d^2 + 3 \,.\, 87^2 d - 87^3 = 622566 - 658503;$$

ó sea

$$d^3 - 3 \,.\, 87 d^2 + 3 \,.\, 87^2 d - 87^3 = -35937. \text{ (B)}$$

Resolviendo esta ecuación en la misma forma que su correspondiente (A) del supuesto anterior (1), se hallará que es $d = 54$. Luego el número incógnito será 87 — 54 = 33.

PROBLEMA 79.

El cubo de la suma de dos números que se diferencian en una unidad es 1442897: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Si 1442897 es el cubo de la suma de los dos números que se piden, evidentemente la $\sqrt[3]{1442897} = 113$ será la suma de estos dos números; y, como la suma de dos nú-

---

(1) Obsérvese que la raíz cúbica del primer miembro de la ecuación (B) es $d - 87$ y la del 2.° miembro es — 33. Así lo indican ya los signos de los términos de dicha ecuación.

meros es igual al duplo del menor, mas la diferencia, (1) y aquí la diferencia es 1, resultará que, si de la suma 113 restamos 1, el resto 112 representará el duplo del número menor: luego 112 : 2 = 56 será el número menor. Luego el mayor será 56 + 1 = 57.

Este mismo razonamiento puede consignarse gráficamente diciendo: Sea x uno de los dos números: el otro será, ó x + 1, ó x — 1. Supongamos que sea x + 1. Tendremos

$$\left(x + (x + 1)\right)^3 = 1442897;$$

ó bien

$$(2x + 1)^3 = 1442897.$$

Extrayendo la raíz cúbica de los dos miembros de esta ecuación, resultará esta otra

$$2x + 1 = \sqrt[3]{1442897} = 113;$$

ó sea

$$2x + 1 = 113;$$

de donde

$$2x = 113 - 1 = 112;$$

y de aquí

$$x = \frac{112}{2} = 56.$$

Luego el otro número será, ó 56 + 1 = 57, ó 56 — 1 = 55. Sólo el 56 y 57 forman solución.

2.ª—Siendo 1442897 el cubo de la suma de los dos números en cuestión, la $\sqrt[3]{1442897} = 113$ será la suma de estos dos números. Ahora, siendo 113 la suma de estos dos

---

(1) También la suma de dos nùmeros es igual al duplo del mayor, menos la diferencia; y al número mayor hemos podido igualmente referirnos.

números y 1 su diferencia, los números *(problema 31)* serán,

$$M, \text{ el mayor, } = \frac{118}{2} + \tfrac{1}{2} = 57$$

y

$$m, \text{ el menor, } = \frac{113}{2} - \tfrac{1}{2} = 56.$$

PROBLEMA 80.

La suma de los cubos de dos números que se diferencian en una unidad es 46341: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Sea x uno de los dos números: el otro será, ó x + 1, ó x — 1. Supongamos que sea x + 1. Tendremos

$$x^3 + (x + 1)^3 = 46341;$$

ó bien, resuelto el paréntesis,

$$x^8 + x^3 + 3x^2 . 1 + 3x . 1^2 + 1^3 = 46341;$$

ó sea

$$2x^3 + 3x^2 . 1 + 3x . 1 + 1 = 46341; \qquad \text{(A)}$$

y, pasando el + 1 al 2.º miembro, se tendrá

$$2x^3 + 3x^2 . 1 + 3x . 1 = 46340;$$

y, dividiendo toda la ecuación por 2, resultará

$$x^3 + 3x^2 . \tfrac{1}{2} + 3x . \tfrac{1}{2} = 23170. \text{ (1)}.$$

Si nos fijamos en el 1.er miembro de esta ecuación, observaremos que, si, en vez de ser el 3.er término $3x . \frac{1}{2}$,

---

(1) Esta ecuación, como se ve, es *de tercer grado*; mas, como los Maestros no tenemos la obligación legal de conocer esta clase de ecuaciones, prescindimos de su teoría y para su resolución nos valemos de un procedimiento especial que hemos ideado y que nos parece muy sencillo.

fuese $3x \,.\, {}^1/_4$, dicho 1.^{er} miembro representaría los tres primeros términos del cubo de $x + \frac{1}{2}$; esto es, el cubo de x, mas el triplo del cuadrado de x por $\frac{1}{2}$, mas el triplo de x por el cuadrado de $\frac{1}{2}$, ó sea por ${}^1/_4$. Para conseguir que esto suceda, vamos á sustituir en dicho tercer término el factor $\frac{1}{2}$ con el factor ${}^1/_4$. Esto equivale á restar de ese 3.^{er} término su mitad $3x \,.\, {}^1/_4 = \frac{3x}{4}$; la misma que restaremos del 2.º miembro para que no se altere la ecuación, la cual se transformará en esta otra

$$x^3 + 3x^2 \,.\, \tfrac{1}{2} + 3x \,.\, {}^1/_4 = 23170 - \frac{3x}{4}.$$

Si ahora á los dos miembros de esta ecuación agregamos el cubo de $\frac{1}{2}$, que es ${}^1/_8 = 0{,}125$, la nueva ecuación será

$$x^3 + 3x^2 \,.\, \tfrac{1}{2} + 3x \,.\, {}^1/_4 + {}^1/_8 = 23170{,}125 - \frac{3x}{4}.$$

El 1.^{er} miembro es, porque así lo hemos formado, el cubo de $x + \frac{1}{2}$. Si ahora transportamos este 1.^{er} miembro al 2.º y del 2.º trasladamos al 1.º el término $-\frac{3x}{4}$, la nueva ecuación será

$$\frac{3x}{4} = 23170{,}125 - (x^3 + 3x^2 \,.\, \tfrac{1}{2} + 3x \,.\, {}^1/_4 + {}^1/_8)$$

Como se ve, $\frac{3x}{4}$ es la diferencia entre el número 23170‘125 y el paréntesis, que representa el mayor cubo contenido en dicho número. La cantidad $\frac{3x}{4}$ es, pues, el residuo de la raíz cúbica entera de 23170‘125, que es la raíz cúbica exacta del polinomio encerrado en el paréntesis y la cual raíz cúbica exacta, como ya sabemos, es $x + \frac{1}{2}$, ó $x + 0{,}5$. La cuestión, por lo tanto, está reducida en su esencia á extraer la raíz cúbica entera de 23170‘125. Véase la operación hecha prácticamente.

$\sqrt[3]{23170'125}$ | 28'5, raíz entera.

8

15170

13952

1218125

1197125

21'000, residuo de la raíz.

Por manera que, según lo expuesto anteriormente, será

$$28'5 = x + 0'5$$

y

$$21 = \frac{3x}{4}.$$

Despejando á x en estas dos ecuaciones, se tendrá: en la 1.ª:

$$x = 28'5 - 0'5 = 28;$$

y en la 2.ª, sucesivamente,

$$3x = 84$$

y

$$x = \frac{84}{3} = 28.$$

Si el número x es igual a 28, el otro número será ó el 27 ó el 29. Hecha la comprobación, resulta que sólo los números 28 y 29 satisfacen.

2.ª—La suma de los cubos de dos números que se diferencian en 1 unidad *(probl. 76, cita 1.ª, corolario)* es igual al duplo del cubo del menor, mas el triplo del cuadrado del menor; mas el triplo del menor, mas 1. Llamando, pues, x al número menor de los dos que se nos piden, tendremos

$$2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 46341;$$

que es la ecuación (A) del razonamiento anterior y que se resuelve como antes.

PROBLEMA 81.

La diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos es 5419: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—La diferencia de los cubos de dos números que se diferencian en 1 unidad *(problema 78, cita 1.ª, corolario)* es igual al triplo del cuadrado del menor, mas el triplo del menor, mas 1; y tambien es igual *(el mismo problema, cita 2.ª corolario)* al triplo del cuadrado del mayor, menos el triplo del mayor, mas 1. Fijémonos en el 1.º de estos dos enunciados, como pudiéramos hacerlo en el 2.º Llamando, pues, m al número menor, tendremos

$$3\,m^2 + 3\,m + 1 = 5419.$$

Pasando el 1 al 2.º miembro, será

$$3\,m^2 + 3\,m = 5418:$$

y, dividiendo toda la ecuación por 3, se tendrá

$$m^2 + m = \frac{5418}{3} = 1806;$$

ó sea

$$m^2 + m = 1806;$$

de donde *(problema 62, resol. 1.ª)* será

$$m = 42.$$

Luego el número mayor será 42 + 1 = 43.

2.ª—*La diferencia de los cubos de dos números es el producto de multiplicar la suma de los cuadrados y del producto de dichos números por la diferencia de éstos* (1) y, como con-

---

(1) Demostración. Sea M el número mayor y m el menor. Digo que $M^3 - m^3 = (M^2 + m^2 + M\,m) \times (M - m)$.

secuencia, cuando, como aquí ahora sucede, la diferencia de los números es 1, la de sus cubos es igual á la suma de los cuadrados y del producto de dichos números. La cantidad, pues, 5419, diferencia de los cubos de los números pedidos, se compone de la suma de los cuadrados y del producto de dichos números. Si ahora elevamos al cuadrado el número 1, diferencia de los expresados números, su cuadrado, que será también 1, contendrá á la suma de cuadrados de dichos números, menos el doble producto de los mismos números. Luego, si de la cantidad 5419 restamos el número 1, el resto 5418 representará el triple producto de los dos números en cuestión. Luego 5418 : 3 = 1806 será el producto de dichos dos números. Ahora, si 1806 es el producto de los dos números que se diferencian en 1 unidad, los números *(probl. 35, nota 2.ª)* serán..... *los que ya conocemos.*

3.ª—Sea x uno de los dos números: el otro será $x + 1$, ó $x - 1$. Supongamos que sea $x + 1$. Tendremos

$$(x + 1)^3 - x^3 = 5419;$$

ó bien, quitando el paréntesis,

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 = 5419;$$

ó sea

$$3x^2 + 3x + 1 = 5419;$$

ecuación igual á la 1.ª de la 1.ª resolución. Resuelta como ésta, se obtendrá

$$x = 42.$$

En efecto, ejecutando la multiplicación indicada en el segundo miembro de esta supuesta ecuación, se tendrá $(M^2 + m^2 + Mm) \times (M - m) = M^3 + Mm^2 + M^2m - M^2m - m^3 - Mm^2$; y, simplificando, será

$$(M^2 + m^2 + Mm) \times (M - m) = M^3 - m^3;$$

ó bien, invirtiendo los miembros,

$$M^3 - m^3 = (M^2 + m^2 + Mm) \times (M - m).$$

Corolario. Si $M - m = 1$, evidentemente será

$$M^3 - m^3 = M^2 + m^2 + Mm.$$

Luego el otro número será, ó $42 + 1 = 43$, ó $42 - 1 = 41$. Solo el 42 y 43 forman solución.

PROBLEMA 82.

El cubo de la suma de dos números es 59319, y la diferencia de los mismos es 15: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Si 59319 es el cubo de la suma de los dos números que se piden, la suma de estos dos números será la $\sqrt[3]{59319} = 39$. Ahora, siendo 39 la suma y 15 la diferencia de dichos números, éstos *(problema 31)* serán

$$M\text{, el mayor, } = \frac{39}{2} + \frac{15}{2} = 27$$

y

$$m\text{, el menor, } = \frac{39}{2} - \frac{15}{2} = 12.$$

2.ª—Sea x el número menor: el mayor será $x + 15$. Tendremos, pues, que

$$(x + x + 15)^3 = 59319;$$

ó bien

$$(2x + 15)^3 = 59319.$$

Extrayendo la raíz cúbica de los dos miembros de esta ecuación, se tendrá esta otra

$$2x + 15 = \sqrt[3]{59319} = 39;$$

ó sea

$$2x + 15 = 39;$$

de donde

$$2x = 39 - 15 = 24;$$

y de aquí

$$x = \frac{24}{2} = 12.$$

Luego el número mayor será $12 + 15 = 27$.

PROBLEMA 83.

El cubo de la suma de dos números es 175616 y el de su diferencia 2744: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución.

Siendo 175616 el cubo de la suma de los dos números en cuestión, la $\sqrt[3]{175616} = 56$ será la suma de estos dos números; y, siendo 2744 el cubo de la diferencia de dichos dos números, la $\sqrt[3]{2744} = 14$ será la diferencia de los mismos números. Ahora, siendo 56 la suma y 14 la diferencia de los citados números, estos números *(problema 31)* serán

$$M, \text{ el mayor, } = \frac{56}{2} + \frac{14}{2} = 35$$

y

$$m, \text{ el menor, } = \frac{56}{2} - \frac{14}{2} = 21.$$

PROBLEMA 84.

El cubo de la diferencia de dos números es 21952 y la suma de los mismos 52: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—Si 21952 es el cubo de la diferencia de los dos números pedidos, la $\sqrt[3]{21952} = 28$ será la diferencia de dichos números; y, como, según la hipótesi, la suma de los mismos es 52, los citados números *(problema 31)* serán

$$\text{M, el mayor, } = \frac{52}{2} + \frac{28}{2} = 40$$

y

$$m\text{, el menor, } = \frac{52}{2} - \frac{28}{2} = 12.$$

2.ª—La diferencia de dos números *(probl. 31, nota 2.ª)* es igual á la suma de los mismos, menos el duplo del menor. Luego, si llamamos *m* al número menor, tendremos

$$(52 - 2m)^3 = 21952.$$

Extrayendo la raíz cúbica de los dos miembros de esta ecuación, resultará esta otra

$$52 - 2m = \sqrt[3]{21952} = 28;$$

ó bien

$$52 - 2m = 28;$$

de donde

$$-2m = 28 - 52 = -24;$$

ó sea

$$2m = 24$$

y de aquí

$$m = \frac{24}{2} = 12, \text{ número menor.}$$

Luego el mayor será $52 - 12 = 40$.

PROBLEMA 85.

La suma de dos números es 89 y la de sus cubos 195533: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—La suma de los cubos de dos números es el producto de multiplicar la suma de estos números por la suma de sus cuadrados, disminuida en el producto de los mismos números (1). Por consiguiente, si dividimos 195533, suma de los cubos de los dos números en cuestión, por 89, suma de estos dos números, el cociente 195533 : 89 = 2197 será la suma de los cuadrados de los citados números, menos el producto de los mismos. Si ahora cuadramos la suma 89 de los dos números y de su cuadrado $89^2 = 7921$, que se compone de la suma de los cuadrados y del doble producto de los dos números, restamos el cociente 2197, que, como hemos visto se compone de la suma de los cuadrados de los dos números disminuida en el producto de éstos, el resto resultante 7921 — 2197 = 5724 representará el triple producto de los dos números. Luego 5724 : 3 = 1908 será este producto. Ahora, siendo 89 la suma de los dos números y 1908 su producto, estos números *(problema 32)* serán

M, el mayor, = 53
y m, el menor, = 36.

2.ª—Hallado por el razonamiento anterior que el producto de los dos números es 1908, si ahora restamos este producto del cociente 2197, que, como se ha visto, se compone de la suma de los cuadrados de dichos números, menos el producto de los mismos, es evidente que el resto 2197 — 1908

---

(1) Demostración. Sea M el número mayor y m el menor. Digo que $M^3 + m^3 = (M + m) \times (M^2 + m^2 - Mm)$.

En efecto, verificando la multiplicación indicada en el 2.º miembro, resultará

$(M + m) \times (M^2 + m^2 - Mm) = M^3 + Mm^2 - M^2m + M^2m + m^3 - Mm^2$; y simplificando en el 2.º miembro, se tendrá

$$(M + m) \times (M^2 + m^2 - Mm) = M^3 + m^3;$$

ó bien, invirtiendo los miembros,

$$M^3 + m^3 = (M + m) \times (M^2 + m^2 - Mm).$$

= 289 será el cuadrado de la diferencia de los expresados números, por constar de la suma de los cuadrados de éstos menos el doble producto de los mismos. Luego la $\sqrt{289} = 17$ será dicha diferencia. Ahora siendo 89 la suma y 17 la diferencia de los referidos números, éstos *(problema 31)* serán

$$M, \text{ el mayor } = \frac{89}{2} + \frac{17}{2} = 53$$

y

$$m, \text{ el menor, } = \frac{82}{2} - \frac{17}{2} = 36.$$

3.ª—Sea M el número mayor y m el menor. Tendremos

$$M^3 + m^3 = 195533;$$

mas, como es $M = 89 - m$, sustituyendo, se tendrá

$$(89 - m)^3 + m^3 = 195533;$$

y, resolviendo el paréntesis, será

$$89^3 - 3 \,.\, 89^2 m + 3 \,.\, 89 m^2 - m^3 + m^3 = 195533$$

y, simplificando é invirtiendo el orden de los términos en el 1.^{er} miembro, resultará

$$3 \,.\, 89 m^2 - 3 \,.\, 89^2 m + 89^3 = 195533; \text{ (A)}$$

ecuación completa de 2.º grado. Resuélvase como la del problema 32 y se tendrá en definitiva

$$\left.\begin{array}{l} m = 36 \\ \text{y} \quad m = 53 \end{array}\right\} \text{números pedidos.}$$

4.ª—La suma de los cubos de dos números *(problema 76, cita 1.ª)* es igual al duplo del cubo del número menor, mas el triplo del cuadrado del menor por la diferencia, mas el triplo del menor por el cuadrado de la diferencia, mas el cubo de la diferencia. Llamando, pues, m al número menor y d á la diferencia, tendremos

$$2m^3 + 3m^2 d + 3md^2 + d^3 = 195533;$$

y, como la diferencia es igual á la suma, que llamaremos s, menos el duplo del número menor, sustituyendo, se tendrá $2m^3 + 3m^2(s - 2m) + 3m(s - 2m)^2 + (s - 2m)^3 = 195533$.

Resolviendo las potencias de los paréntesis, resultará $2m^3 + 3m^2(s - 2m) + 3m(s^2 - 4sm + 4m^2) + s^3 - 6s^2m + 12sm^2 - 8m^3 = 195533$; y, quitando los paréntesis, será $2m^3 + 3sm^2 - 6m^3 + 3s^2m - 12sm^2 + 12m^3 + s^3 - 6s^2m + 12sm^2 - 8m^3 = 195533$; y simplificando, tendremos

$$3sm^2 - 3s^2m + s^3 = 195533.$$

Reemplazando ahora la letra s con su valor 89, se tendrá

$$3\,.\,89m^2 - 3\,.\,89^2m + 89^3 = 195533;$$

que es la misma ecuación (A) de la resolución anterior.

5.ª—Si elevamos al cubo la suma 89 de los dos números, el cubo $89^3 = 704969$ contendrá á la suma de los cubos de los dos números, mas el triplo del cuadrado del mayor por el menor, mas el triplo del cuadrado del menor por el mayor. Luego, si del cubo 704969 se resta la cantidad 195533, suma de los cubos de los dos números, el resto $704969 - 195533 = 509436$ contendrá al triplo del cuadrado del número mayor por el menor, mas el triplo del cuadrado del número menor por el mayor. Llamando, pues, M al número mayor y m al menor, tendremos

$$3M^2m + 3Mm^2 = 509436;$$

y, como el número mayor es igual á la suma, menos el menor, llamando s á la suma, se tendrá

$$3m(s - m)^2 + 3m^2(s - m) = 509436;$$

y, resolviendo la potencia del $1.^{er}$ paréntesis, será

$$3m(s^2 - 2sm + m^2) + 3m^2(s - m) = 509436;$$

y, quitando los dos paréntesis, resultará

$$3s^2m - 6sm^2 + 3m^3 + 3sm^2 - 3m^3 = 509436.$$

Simplificando, tendremos ahora

$$-3sm^2 + 3s^2m = 509436;$$

y, dividiendo toda la ecuación por 3, será

$$- s m^2 + s^2 m = 169812;$$

y: reemplazando á s con su valor 89, se tendrá

$$- 89 m^2 + 89^2 m = 169812;$$

ó bien,

$$- 89 m^2 + 7921 m = 169812.$$

Cambiando los signos á todos los términos, será

$$89 m^2 - 7921 m = - 169812;$$

ecuación completa de 2.º grado, la cual, resuelta como la del problema 32, dará

$$\left.\begin{array}{r} m = 53 \\ \text{y} \quad m = 36. \end{array}\right\} \text{números pedidos.}$$

6.ª—Cubicando la suma 89 de los dos números, su cubo $89^3 = 704969$ contendrá á la suma de los cubos de los dos números, mas el triplo del cuadrado del mayor por el menor, mas el triplo del cuadrado del menor por el mayor. Luego, si del cubo 704969 se resta la cantidad 195533, suma de los cubos de los dos números, el resto $704969 - 195533 = 509436$ contendrá al triplo del cuadrado del número mayor por el menor, mas el triplo del cuadrado del número menor por el mayor. Luego, si dividimos por 3 el resto 509436, el cociente $509436 : 3 = 169812$ contendrá al cuadrado del número mayor por el menor, mas el cuadrado del número menor por el mayor. Llamando, pues, M al número mayor y m al menor, tendremos

$$M^2 m + m^2 M = 169812;$$

ó bien

$$M . Mm + m . Mm = 169812;$$

y, separando en el 1.^{er} miembro el factor común Mm, será

$$(M + m) \times Mm = 169812;$$

y, como es $M + m = 89$, sustituyendo, se tendrá

$$89 M m = 169812:$$

de donde

$$Mm = \frac{169812}{89} = 1908.$$

Ahora, si la suma de los dos números pedidos es 89 y su producto 1908, los números *(probl. 32)* serán

$$M = 53$$

y

$$m = 36.$$

PROBLEMA 86.

El cubo de la suma de dos números es 85184 y la suma de los cubos de los mismos números es 23408: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución.

Siendo 85184 el cubo de la suma de los dos números que se piden, la $\sqrt[3]{85184} = 44$ será la suma de dichos dos números. Conocida la suma de los dos números, la cuestión queda reducida al problema anterior con nuevos datos. Resuelto este problema, se obtendrá que es

$$M,\ \text{número mayor,} = 26$$

y

$$m,\ \text{número menor,} = 18.$$

PROBLEMA 87.

La diferencia de dos números es 49 y la de sus cubos 567469: ¿cuáles son estos dos números?

Resoluciones.

1.ª—La diferencia de los cubos de dos números *(problema 81, cita 1.ª)* es el producto de multiplicar la diferencia de estos números por la suma de los cuadrados y del producto de los mismos números. Luego, si dividimos la diferencia de los cubos por la diferencia de los números, el cociente 567469 : 49 = 11581 será la suma de los cuadrados y del producto de los citados números. Si ahora cuadramos la diferencia de los números, su cuadrado $49^2 = 2401$ contendrá á la suma de los cuadrados de éstos, menos el doble producto de los mismos; y, como el cociente 11581 contiene, como hemos dicho, á la suma de los cuadrados y del producto de los números, es evidente que, restando de este cociente el cuadrado 2401, el resto 11581 — 2401 = 9180 será el triple producto de los números. Luego 9180 : 3 = 3060 será el producto. Ahora, siendo 49 la diferencia de los dos números y 3060 su producto, los números *(problema 35)* serán

M, el mayor, = 85
y m, el menor, = 36.

2.ª—Averiguado por el razonamiento anterior que 9180 es el producto de los dos números de que se trata, si agregamos este producto al cociente 11581, que, como se ha visto, comprende la suma de los cuadrados y del producto de los citados números, la suma resultante 11581 + 9180 = 20761 será el cuadrado de la suma de estos números. Luego la $\sqrt{20761} = 121$ será esta suma, Ahora, si 121 es la suma y 49 la diferencia de los dos números, éstos *(problema 31)* serán

$$M\text{, el mayor, } = \frac{121}{2} + \frac{49}{2} = 85$$

y

$$m\text{, el menor, } = \frac{121}{2} - \frac{49}{2} = 36,$$

3.ª—Si elevamos al cubo la diferencia 49 de los dos números, el cubo $49^3 = 117649$ contendrá al cubo del número mayor, menos el triplo del cuadrado del mayor por el menor, mas el triplo del mayor por el cuadrado del menor, menos el cubo del menor; y, como la cantidad 567469 contiene al cubo del mayor, menos el cubo del menor, si de esta cantidad restamos la primera, el resto 567469 — 117649 = 449820 contendrá al triplo del cuadrado del número mayor por el menor, menos el triplo del mayor por el cuadrado del menor, Llamando, pues, M al número mayor y m al menor, tendremos

$$3\,M^2 m - 3\,M m^2 = 449820:$$

y, como el número mayor es igual al menor, mas la diferencia 49, sustituyendo, se tendrá

$$3\,m\,(m + 49)^2 - 3\,m^2\,(m + 49) = 449820;$$

Resolviendo la potencia del 1.er paréntesis, resultará

$$3\,m\,(m^2 + 2\,.\,49\,m + 49^2) - 3\,m^2\,(m + 49) = 449820;$$

y, quitando el paréntesis, será

$$3\,m^3 + 3\,.\,2\,.\,49\,m^2 + 3\,.\,49^2\,m - 3\,m^3 - 3\,.\,49\,m^2 = 449820;$$

ó bien, simplificando,

$$3\,.\,49\,m^2 + 3\,.\,49^2\,m = 449820;$$

ó sea

$$147\,m^2 + 7203\,m = 449820; \quad (A)$$

ecuación completa de 2.° grado, que, resuelta como la del problema 32, da por resultado

$$m = 85$$

y

$$m = 36$$

4.ª—La diferencia de los cubos de dos números es igual al triplo del cuadrado del número menor por la diferencia entre este y el mayor, mas el triplo del menor por el cuadrado de la diferencia, mas el cubo de la diferencia. Llamando, pues, m al número menor, como la diferencia de los números es 49, tendremos

$$3\,m^2 \times 49 + 3\,m \times 49^2 + 49^3 = 449820;$$

ó bien, efectuando multiplicaciones,

$$147\,m^2 + 7203\,m + 117649 = 567469$$

y, pasando el término 117649 al 2.º miembro, será

$$147\,m^2 + 7203\,m = 567469 - 117649 = 449820; \quad \text{(B)}$$

ó sea

$$147\,m^2 + 7203\,m = 449820;$$

que es la ya resuelta ecuación (A) de la resolución anterior.

5.ª—Sea M el número mayor y m el menor. Tendremos

$$M^3 - m^3 = 567469;$$

y, como el número mayor es igual al menor mas la diferencia, que aquí es 49, sustituyendo, se tendrá

$$(m + 49)^3 - m^3 = 567469.$$

Resolviendo el paréntesis, será

$$m^3 + 3\,.\,49^2 m + 3\,.\,49 m^2 + 49^3 - m^3 = 567469;$$

y, simplificando, resultará

$$3\,.\,49^2 m + 3\,.\,49\,m^2 + 49^3 = 567469;$$

ó sea, efectuando multiplicaciones,

$$7203\,m + 147\,m^2 + 117649 = 567469,$$

que es la ya resuelta ecuación (B) de la resolución anterior.

6.ª—Cubicando la diferencia 49 de los dos números, el cubo $49^3 = 117649$ contendrá al cubo del número mayor, menos el triplo del cuadrado del mayor por el menor, mas el triplo del cuadrado del menor por el mayor, menos el cubo del menor; y, como la cantidad 567469 contiene al cubo del mayor menos el cubo del menor, si de esta cantidad 567469 restamos la primera 117649, el resto $567469 - 117649 = 449820$ contendrá al triplo del cuadrado del número mayor por el menor, menos el triplo del cuadrado del menor por el mayor. Luego, si á dicho resto lo dividimos por 3, el cociente $449820 : 3 = 149940$ contendrá al cuadrado del número mayor por el menor, menos el cuadrado del menor por el mayor. Por manera que, llamando M al número mayor y m al menor, tendremos

$$M^2 m - m^2 M = 149940;$$

ó bien

$$M \,.\, Mm - m \,.\, Mm = 149940;$$

y, separando en el 1.^{er} miembro el factor común Mm, será

$$(M - m)\, Mm = 149940;$$

y, como es $M - m = 49$, sustituyendo, se tendrá

$$49\, Mm = 149940;$$

de donde

$$Mm = \frac{149940}{49} = 3060.$$

Ahora, siendo 49 la diferencia de los dos números pedidos y 3060 su producto, los números *(probl. 35)* serán

$$M = 85$$

y

$$m = 36.$$

PROBLEMA 88.

El cubo de la diferencia de dos números es 5832 y la diferencia de los cubos de los mismos números es 202392: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución.

Si la cantidad 5832 es el cubo de la diferencia de los dos números que se piden, la $\sqrt[3]{5832} = 18$ será esta diferencia. Ahora la cuestión queda reducida al problema anterior con otros datos. Resuelto este problema, se tendrá como resultado

M, número mayor, $= 70$

y m, número menor, $= 52$.

PROBLEMA 89.

El cuadrado de la suma de dos números es 576 y la suma de los cubos de los mismos números es 4193'28: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución.

Si el cuadrado de la suma de los dos números pedidos es 576, la $\sqrt{576} = 24$ será esta suma. Ahora la cuestión 'queda reducida al problema 85 con nuevos datos. Resuelto este problema, se obtendrá

M, número mayor, = 15'2
y m, número menor, = 8'8.

PROBLEMA 90.

El cuadrado de la diferencia de dos números es 2025 y la diferencia de los cubos de los mismos números es 353565: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución.

Siendo 2025 el cuadrado de la diferencia de los dos números pedidos, la $\sqrt{2025} = 45$ será la diferencia de estos números.—La cuestión queda ya reducida al problema 87 con nuevos datos. Resuelto este problema, se tendrá

M, número mayor, = 72
y m, número menor, = 27.

PROBLEMA 91.

El cubo de la suma de dos números es 117649 y la suma de los cuadrados de los mismos números es 1366‘12: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución.

Si 117649 es el cubo de la suma de los dos números pedidos, la $\sqrt[3]{117649} = 49$ será la suma de estos dos números.—La cuestión se reduce ya á resolver el problema 67 con nuevos datos. Hecha la resolución, se tendrá por resultado

M, número mayor, = 36·6
y *m*, número menor, = 15‘4.

PROBLEMA 92.

El cubo de la suma de dos números es 1442897 y la diferencia de los cuadrados de los mismos números es 8701: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución.

Siendo 1442897 el cubo de la suma de los dos números que se piden, la $\sqrt[3]{1442897} = 113$ será la suma de estos dos números.—Ahora la cuestión queda reducida al problema 69 con otros datos. Resuelto este problema, se obtendrá en definitiva

M, número mayor, = 95
y *m*, número menor, = 18.

PROBLEMA 93.

El cubo de la diferencia de dos números es 11261'824 y la suma de los cuadrados de los mismos números es 2700'88: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución,

Si 11261'824 es el cubo de la diferencia de los dos números, la $\sqrt[3]{11261'824} = 22'4$ será la diferencia de estos dos números.=Ya la cuestión queda reducida á resolver el problema 71 con nuevos datos. Hecha la resolución, se tendrá por resultado

M, número mayor, = 46'2
y *m*, número menor, = 23'8.

PROBLEMA 94

El cubo de la diferencia de dos números es 14526'784 y la diferencia de los cuadrados de los mismos números es 4277'2: ¿cuáles son estos dos números?

Resolución.

Siendo 14526·784 el cubo de la diferencia de los dos números de que se trata, la $\sqrt[3]{14526·784} = 24'4$ será la diferencia de estos dos números.—La cuestión queda ya reducida á resolver el problema 73 con nuevos datos. Resuelto este problema, el resultado será

M, número mayor, = 93·7
y *m*, número menor, = 69'3.

PROBLEMA 95.

Un cosechero tiene llenas de aceite dos tinas cúbicas cuyas bases y lados suman, respectivamente, 200‘02 decímetros cuadrados y 20 decímetros lineales: de la venta de todo este aceite quiere sacar 3017‘40 pesetas. ¿A cómo deberá vender el decalitro?

Resolución.

La parte principal de esta cuestión consiste en determinar el valor numérico del lado de cada una de las dos tinas. Al efecto consideremos que en los 20 decímetros lineales tenemos la suma de dichos lados y en los 200‘02 decímetros cuadrados la suma de los cuadrados de los mismos lados: el valor de cada uno de éstos será, pues, *(probl. 67).*

L, el mayor, = 10‘1 decímetros
y l, el menor, = 9‘9 id.

Siendo 10‘1 dm. el lado de la tina mayor y 9‘9 íd. el de la menor, la capacidad de la 1.ª tina será

10‘1^3 = 1030‘301 dm^3, ó litros
y la de la 2.ª
9‘9^3 = 981‘299 íd., ó íd.
Total 2011‘6 íd., ó íd. = 201‘16 decalitros.

Ahora, si estos 201‘16 Dl. han de valer 3017‘40 pesetas, uno de ellos valdrá 3017‘40 : 201‘16 = 15 pesetas.

Este, pues, es el precio á que el cosechero debe vender por decalitros el aceite de las dos tinas para sacar de la venta las 3017‘40 pesetas que desea.

PROBLEMA 96.

Un propietario ha vendido, al precio de 750 pesetas hectárea, dos heredades cuadradas, cuyos lados respectivos se diferencian en 8 decámetros: la heredad mayor ha importado 6720 pesetas más que la menor. ¿Cuál es la cabida y cuál el importe de cada una de dichas dos heredades?

Resolución.

Para determinar la cabida y luégo el importe de las dos heredades, necesitamos conocer el valor del lado respectivo de éstas. Sea, pues, L el lado de la heredad mayor y l el de la menor. El área de la 1.ª es L^2 y el de la 2.ª l^2. La diferencia de los cuadrados de dos números *(problema 60, cita 1.ª)* es igual al duplo del producto del número menor por la diferencia entre éste y el mayor, mas el cuadrado de esta diferencia. Tendremos, pues,

$$L^2 - l^2 = 2l \,.\, 8 + 8^2$$

Ahora, si la heredad mayor ha importado 6720 pesetas más que la menor, esto nos dice que el exceso de la cabida de la 1.ª sobre la de la 2.ª es 6720 pts. : 750 pts = 8'96 hect. = 896 áreas ó decámetros cuadrados.

Siendo 896 decámetros cuadrados la diferencia de cabidas de las dos heredades, *ó sea la diferencia de los cuadrados de los dos números expresivos del valor de los lados de estas heredades*, y 8 decámetros lineales la diferencia de estos dos números, estamos en pleno problema 73. Aplicada cualquiera de las resoluciones de este problema, tendremos

L, lado mayor, = 60 decámetros
y l, lado menor, = 52 íd.

La cabida, pues, de la heredad mayor será

$$60 \times 60 = 3600 \text{ Dm}^2. = 36 \text{ Hectár.}$$

y la de la menor 52 × 52 = 2704 íd. = 27'04 íd.

Por consiguiente, el importe de la 1.ª será

36 × 750 = 27000 pesetas,

y el de la 2.ª, 37'04 × 750 = 20280 íd.

PROBLEMA 97.

Se han comprado en 10296'90 pesetas dos heredades cuadradas que miden en conjunto 20 hectáreas, 59 áreas y 38 centiáreas: el lado de la heredad mayor excede al de la menor en 150 metros. ¿Cuánto más que la menor ha importado la heredad mayor?

Resolución.

Para determinar el exceso del importe de la heredad mayor sobre el de la menor, necesitamos averiguar antes el valor del lado de cada heredad. A este efecto observaremos que en 20 hectáreas, 59 áreas y 38 centiáreas = 205938 centiáreas *ó metros cuadrados* tenemos la suma de los cuadrados de los dos números expresivos de los valores de los lados de las heredades y en 150 metros la diferencia de estos dos números. Estamos, pues, dentro del problema 71. Aplicada cualquiera de las resoluciones de éste, se tendrá

L, lado mayor, = 387 metros

y *l*, lado menor, = 237 íd. (1).

Luego el área de la heredad mayor será 387 × 387 = 149769 m.², y la de la menor, 237 × 237 = 56169 ídem. La cuestión ya está reducida á dividir el importe total de las dos heredades, 10296'90 pesetas, en 2 partes proporcionales á las cabidas de aquellas. Será, pues, el importe de la

---

(1) O bien, l = 387 — 150 = 237.

mayor $\frac{10296'90}{205938} \times 149769 = 7488'45$ pesetas y el de la menor, $\frac{10296'90}{205938} \times 56169 = 2808'49$ íd.

Ultimamente, si el importe de la heredad mayor es 7488'45 pesetas, y el de la menor 2808'49 íd., el exceso del 1.º sobre el 2.º será 7488'45 — 2808'49 = 4679'96 pesetas.

Nota.—Este problema pudo resolverse hallando el exceso de la cabida de la heredad mayor sobre la de la menor, ya en áreas, ya en hectáreas y multiplicando este exceso por el valor de cada área ó hectárea, que será el cociente de dividir el importe total de las dos heredades por la cabida total de las mismas; las cuales dos cantidades se nos dan conocidas.

De igual manera, determinada la cabida de una de las dos heredades, la de la otra puede hallarse restando de la cabida ó área total, que se nos da conocida, el área ó cabida hallada: la diferencia será la cabida de la otra heredad.

PROBLEMA 98.

Hay dos cubos macizos de plata cuyos lados respectivos se diferencian en 1 centímetro: cada centímetro cúbico de plata pesa 10'5 gramos: el cubo mayor ha pesado 7'5705 kilogramos más que el menor. ¿Cuál es el peso de cada uno de dichos dos cubos de plata?

Resolución.

Si cada centímetro cúbico de plata pesa 10'5 gramos, los 7'5705 kg. = 7570'5 gramos, exceso del peso del cubo mayor sobre el del menor, representarán 7570'5 : 10'5 = 721 centímetros cúbicos de diferencia entre el volumen del 1.^{er} cubo y el del 2.° Ahora, si los lados de estos cubos se diferencian en 1 centímetro lineal y sus volúmenes en 720 centímetros cúbicos, dichos lados *(probl. 81)* serán

L, el mayor, = 16 centímetros
y l, el menor, = 15 »
Diferencia 1 »

y, como consecuencia, serán

L^3, vol. del cubo mayor, = 16^3 = 4096 cm^3
y l^3, íd. del menor, = 15^3 = 3375 »
Diferencia 721 »

Como, según los datos, cada centímetro cúbico pesa 10‘5 gramos, los pesos de los dos cubos en cuestión serán:

el del mayor, 4096 × 10‘5 = 43008 gr. = 43,008 kg.
y el del menor, 3375 × 10‘5 = 35437‘5 » = 35‘4375 »

PROBLEMA 99.

Un viticultor tiene dos lagares cúbicos cuya capacidad total es 88‘604 metros cúbicos: el lado del 1.°, mas el del 2.° suman 6‘8 metros: ¿cuál es la capacidad de cada uno de los dos lagares?

Resolución.

La capacidad de cada uno de los dos lagares quedará determinada en el momento que determinemos el valor del lado respectivo de éstos. Para la determinación del valor de cada uno de estos lados tenemos conocidas la suma de estos dos valores, que es 6‘8 metros lineales, y la suma de sus cubos, que es 88‘604 metros cúbicos. Estamos, pues, en pleno problema 85. Aplicando cualquiera de los procedimientos resolutivos de este problema, resultará como resolución

L, lado del lagar mayor, = 4‘1 metros
1 l, íd. del id. menor, = 2‘7 »
Suma 6‘8 »

y, como consecuencia,

L^3 capacidad del lagar mayor, 68‘921 metros cúbicos
y l^3 íd. del íd. menor, 19‘683 » »
Suma 88‘604 » »

PROBLEMA 100.

Se ha vendido á 12 pesetas decalitro el aceite de que estaban llenas dos zafras cúbicas cuyos lados respectivos se diferencian en 3 decímetros: el aceite de la zafra mayor ha importado 1088‘10 pesetas más que el aceite de la zafra menor. ¿A cuánto asciende el importe total de la venta?

Resolución.

Para averiguar el importe total de la venta del aceite contenido en las dos zafras en cuestión, hay que hallar antes la capacidad ó volumen de éstas; y para determinar esta capacidad ó volumen, necesitamos fijar previamente el valor del lado de cada una de las dos zafras. Al efecto observaremos que, si dividimos las 1088‘10 pesetas, importe del aceite que la zafra mayor tenía más que la menor, por 12 pesetas, precio del decalitro de aceite, el cociente 1088‘10 : 12 = 90‘675 decalitros = 906‘75 litros será el exceso de aceite de la zafra mayor sobre el de la menor; y, como cada litro es un decímetro cúbico, resulta que la diferencia de los volúmenes de las dos zafras es 906,75 decímetros cúbicos.

Conocemos ahora la diferencia, 3 decímetros, de los lados de las zafras, *que son cúbicas,* ó bien de los números expresivos del valor de esos lados, y también la diferencia 906'75 decímetros cúbicos de los volúmenes de las dos zafras, ó sea de los cubos de los mencionados números: estamos, pues, en pleno problema 87. Aplicando aquí cualquiera de los procedimientos resolutivos allí empleados, obtendremos que, llamando L al lado mayor y l al menor, será

$$L = 11'5 \text{ decímetros}$$

y $$l = 8'5 \quad \text{íd.}$$

Ahora, si el lado de la zafra menor vale 8·5 decímetros, el volumen de esta zafra será $8'5^3 = 614'125$ dm^3, *ó litros,* $= 61'4125$ decalitros, que, á 12 pesetas uno, importan $12 \times 61'4125 = 736'95$ pesetas. Luego el aceite de la zafra mayor importará

$$736'95 + 1088'10 = 1825'05 \text{ pesetas:}$$

luego el importe total del aceite de las dos zafras será

$$736'95 + 1825'05 = 2562 \text{ pesetas.}$$

PROBLEMA 101.

Un traficante en aves y huevos ha comprado cierto número de pollos y otro número igual de gallinas, siendo 2304 el cuadrado de la suma de dichos dos números: por cada gallina ha pagado una peseta más que por cada pollo: la suma de los cubos del importe de los pollos y del importe de las gallinas es 632016. ¿Cuántas son las gallinas y cuántos los pollos comprados y cuáles el precio y el importe de las unas y de los otros?

Resoluciones.

1.ª PARTE.—*Resol. 1.ª*—Si 2304 es el cuadrado de la suma del número de pollos y de su igual el de gallinas, la $\sqrt{2304}$

$= 48$ será la suma de dichos dos números; y, como se nos dice que estos dos números son iguales, es evidente que $48 : 2 = 24$ será el número de pollos y también el de gallinas.

Resol 2.ª—El cuadrado de todo número es cuádruplo del cuadrado de la mitad de este número (1). Por consiguiente, $2304 : 4 = 576$ es el cuadrado, tánto del número de pollos como del número de gallinas: luego la $\sqrt{576} = 24$ es cada uno de estos dos números.

2.ª PARTE.—Siendo 632016 la suma de los cubos de los números expresivos de los importes de los pollos y gallinas, como cada importe es el producto de multiplicar el número de aves correspondientes por el respectivo precio de éstas y como el cubo de cada importe es el producto de multiplicar entre sí los cubos de los dos factores que lo componen, puesto que para elevar un producto á una potencia se elevan á esta potencia todos sus factores, evidente es que, si dividimos la expresada suma 632016 por $24^3 = 13824$, cubo del número, así de pollos como de gallinas, el cociente $632016 : 13824 = 45'71875$ será la suma de los cubos de los precios (2); y,

---

(1) Demostración. Sea N el número y m su mitad. Digo que $N^2 = 4m^2$.

En efecto, $N = 2m$.

Cuadrando los dos miembros de esta ecuación, resultará esta otra

$$N^2 = (2m)^2 = 2^2 m^2 = 4m^2;$$

ó sea

$$N^2 = 4m^2.$$

Lo que se quería demostrar.

(2) Patenticemos gráficamente todo esto. Al efecto, sea n el número de gallinas y á la vez el de pollos, P el precio

como, según los datos, estos precios se diferencian en 1 peseta, estamos para su determinación en pleno problema 80. Discurriendo y obrando ahora como allí se hizo, se obtendrá que es

p, precio menor, = 2'25 pesetas.

Luego el precio mayor será 2'25 + 1 = 3'25 ídem.

Por manera que, si, como hemos averiguado, los pollos comprados son 24 y su precio 2'25 pesetas, su importe será 2'25 × 24 = 54 pesetas; y si, las gallinas son también 24 y su precio 3'25 pesetas, será su importe 3'25 × 24 = 78 pesetas.

---

de aquéllas y p el de éstos: el importe de las primeras será nP y el de los segundos np: los cubos de estos importes serán n^3P^3 y n^3p^3. Si ahora llamamos S á la suma de estos dos cubos, tendremos la ecuación

$$S = n^3P^3 + n^3p^3.$$

Dividiendo por n^3 los dos miembros de esta ecuación, resultará la siguiente

$$\frac{S}{n^3} = P^3 + p^3;$$

y, dando á S y á n^3 su respectivo valor, resultará

$$\frac{632016}{13824} = P^3 + p^3;$$

ó sea

$$45'71875 = P^3 + p^3,$$

que es lo aseverado arriba en el texto.

PROBLEMA 102.

Un ganadero vendió cierto número de ovejas y cierto número de cabras á tantas pesetas cabeza cuantas eran, reunidas, las cabras y las ovejas: del importe total de la venta separó, para acabar de satisfacer una deuda de 2060 pesetas, cantidad igual á la suma de los cubos de los números de ovejas y de cabras, el triplo del producto de estos dos números, habiéndole quedado sobrantes 103 pesetas ¿Cuántas eran las cabras y cuántas las ovejas vendidas?

Resolución

Suelen dictarse algunos problemas con una fraseología tal, que ella viene á ser causa de que ellos parezcan mucho más difíciles de lo que realmente son. Al número de estos problemas de laberíntico enunciado pertenece el que ahora nos ocupa, el cual, si se estudia, aunque sea ligeramente, se verá que no es ni más ni menos que este otro, expuesto en términos escuetos;

«*El cuadrado de la suma de dos números* (1), *disminuido en el triplo de su producto, es 103, y la suma de los cubos de los mismos números es 2070: ¿cuáles son dichos dos números?*»

El cuadrado de la suma de dos números es igual á la suma de los cuadrados de los mismos, mas el duplo de su producto. Ahora, si de la suma de los cuadrados de los dos números, mas el duplo del producto de los mismos se resta el triplo de este producto, el resto será la suma de los cuadrados de los dos números, menos el producto de éstos. Luego en el caso presente la cantidad 103 contiene á la

---

(1) El de ovejas y el de cabras.

suma de los cuadrados de los dos números en cuestión, menos el producto de estos dos números. Luego, si la cantidad 2060, suma de los cubos de los dos números que se buscan, se divide por 103, el cociente 2060 : 103 = 20 será *(problema 85, cita 1.ª)* la suma de dichos dos números. Si ahora elevamos al cuadrado este cociente, su cuadrado $20^2 = 400$ contiene á la suma de los cuadrados de los dos números, mas el duplo del producto de los mismos; y, como la cantidad 103, según hemos dicho, contiene á la suma de los cuadrados de los dos repetidos números, menos el producto de los mismos, si de 400 restamos 103, el resto 400 — 103 = 297 será el triplo del producto de los dos números. Luego 297 : 3 = 99 será este producto. Ahora, si 99 es el producto de los dos números y 20 su suma, los números *(problema 32)* serán

$$\left.\begin{array}{ll} & \text{M, el mayor,} = 11 \\ \text{y} & m\text{, el menor,} = 9. \end{array}\right\} = 20.$$

Resulta, pues, que las ovejas son 11 y las cabras 9, ó viceversa, que son 9 las ovejas y 11 las cabras.

PROBLEMA 103.

Un comerciante separó de su capital durante 4 años consecutivos al principio de cada uno de ellos 1600 duros para los gastos de la casa: y, habiendo ganado en cada año una cantidad igual á la 4.ª parte del capital con que negoció, logró ver duplicado su capital primitivo al cabo de dichos 4 años, ¿Cuál era ese capital primitivo?

Resolución.

Sea x duros el capital primitivo. Deducidos de él los 1600 duros para los gastos de la casa, le quedaron al comerciante para negociar en el 1.^{er} año x — 1600; y, como en este año ganó la 4.^{a} parte de esta cantidad, el capital para el 2.^{o} año sería

$$(x - 1600) \times \frac{5}{4} = \frac{5x}{4} - 2000 \text{ duros (a).}$$

Deducidos al comenzar el 2.^{o} año los 1600 duros consabidos, le quedaron al comerciante para negociar

$$\frac{5x}{4} - 2000 - 1600 = \frac{5x}{4} - 3600 \text{ duros.}$$

y, como ganó la 4.^{a} parte de esta cantidad, el capital para el 3er año sería

$$\left(\frac{5x}{4} - 3600\right) \times \frac{5}{4} = \frac{25x}{16} - 4500 \text{ duros.}$$

Deducidos al principio del 3.^{er} año los 1600 duros para los gastos de la casa, le quedaron al comerciante para negociar

$$\frac{25x}{16} - 4500 - 1600 = \frac{25x}{16} - 6100 \text{ duros;}$$

y, como ganó $^1/_4$ de esta cantidad, el capital para el 4.^{o} año sería

$$\left(\frac{25x}{16} - 6100\right) \times \frac{5}{4} = \frac{125x}{64} - 7625 \text{ duros.}$$

Separados al principio del 4.^{o} año los 1600 duros para los gastos domésticos, le quedaron al comerciante para negociar

$$\frac{125x}{64} - 7625 - 1600 = \frac{125x}{64} - 9225 \text{ duros;}$$

y, como ganó la 4.^{a} parte de esta cantidad, el capital al fin de este 4.^{o} año sería

$$\left(\frac{125x}{64} - 9225\right) \times \frac{5}{4} = \frac{625x}{256} - 11531'25 \text{ duros;}$$

(a) Como multiplicar un nùmero, *sea el que fuere*, por un quebrado es tomar del multiplicando las partes que expresa el multiplicador, al multiplicar el capital por $^5/_4$ tomamos $^5/_4$ del capital; es decir, que el producto representa la suma del capital; con su 4.^{a} parte.—Este procedimiento, por lo rápido, es preferible al de hallar primero la 4.^{a} parte del capital y sumar después el capital con su 4.^{a} parte.

y, como, según los datos, este capital es doble que el primitivo x, la ecuación será

$$2x = \frac{625x}{256} - 11531'25.$$

Quitando el denominador, se tendrá

$$512x = 625x - 2952000;$$

y, transponiendo y reduciendo, resultará

$$113x = 2952000;$$

de donde

$$x = \frac{2952000}{113} = 26123'89 \text{ duros.}$$

PROBLEMA 104.

¿Cuál es el número de 4 cifras, la suma de cuyo valor absoluto es 26, siendo la 2.ª cifra (contando de derecha á izquierda) $^3/_4$ **de la 1.ª; la 3.ª, subdupla de la 2.ª, y la 4.ª, el triplo de la 3.ª?**

Resoluciones.

1.ª—Sea x la 1.ª cifra, *ó sea la cifra de las unidades:* la 2.ª será $\frac{3x}{4}$; la 3.ª, $\frac{3x}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3x}{8}$; y la 4.ª, $\frac{3x}{8} \times 3 = \frac{9x}{8}$. La ecuación será, pues,

$$x + \frac{3x}{4} + \frac{3x}{8} + \frac{9x}{8} = 26.$$

Quitando denominadores haciendo uso del mínimo múltiplo, se tendrá

$$8x + 6x + 3x + 9x = 208;$$

y, simplificando en el 1.^{er} miembro, resultará

$$26x = 208;$$

de donde

$$x = \frac{208}{26} = 8.$$

Resulta, pues, que la cifra de las unidades es. . . . 8.
Luego la de las decenas será. . . . . $8 \times {}^3/_4 = 6$,
la de las centenas. . . . . $6 \times \frac{1}{2} = 3$
y la de los millares. . . . . $3 \times 3 = 9$.
Luego el número que se pide es el 9368.

2.ª—Si la cifra de los millares ha de ser el triplo de la de las centenas, tendrá que ser el 1, el 2 ó el 3: nó el 4 ni el 5 &., porque el triplo de 4, 5 &. es 12, 15 &. y no hay ninguna cifra que tenga este valor. Luego la cifra de los millares habrá de ser el 3, el 6 ó el 9. Luego las cifras 4.ª y 3.ª tendrán que formar los números

31
62
ó 93.

Si la cifra de las centenas ha de ser subdupla ó mitad de la de las decenas, ésta tendrá que ser el 2, el 4 ó el 6. Luego las cifras 4.ª, 3.ª y 2.ª tendrán que formar los números

312,
624
ó 936.

Si la cifra de las decenas ha de ser ${}^3/_4$ de la de las unidades, ésta, recíprocamente, tendrá que valer ${}^4/_3$ de la de las decenas. Valdrá, pues, $2\ {}^2/_3$, $5\ {}^1/_3$ ú 8: y, como no hay ninguna cifra que valga ni $2\ {}^2/_3$ ni $5\ {}^1/_3$, resulta que 8 es la cifra de las unidades. Luego sólo las cifras del número 9368 reunen las condiciones exigidas: luego este es el número pedido.

PROBLEMA 105.

Un carnicero compró, á los mismos precios, á un sujeto 12 carneros y 20 cabritos y á otro sujeto 14 carneros y 18 cabritos: la primera compra le importó 366 pesetas, y la 2.ª, 395. ¿A qué precio pagó cada carnero y cada cabrito?

Resolución.

Sea x el precio de los carneros y z el de los cabritos en las dos compras hechas. Los 12 carneros de la 1.ª compra importarían 12 x pesetas y los 20 cabritos 20 z íd.; y, como entre unos y otros importaron 366 pesetas, la 1.ª ecuación será

$$12x + 20z = 366.$$

Los 14 carneros y los 18 cabritos de la 2.ª compra importarían, respectivamente, 14 x y 18 z pesetas; y, como entre unos y otros importaron 395 pesetas, será la 2.ª ecuación

$$14x + 18z = 395$$

Tenemos, pues, un sistema de dos ecuaciones de 1.er grado con igual número de incógnitas. Despejando una cualquiera de éstas, x, por ejemplo, en la 1.ª ecuación y sustituyendo su valor en la 2.ª, resultará esta 3.ª ecuación, *después de quitar paréntesis y denominadores y de transponer y reducir,*

$$64z = 384;$$

de donde

$$z = \frac{384}{64} = 6 \text{ pesetas.}$$

Reemplazando ahora á z con su valor 6 en cualquiera de las dos primeras ecuaciones, en la 1.ª, por ejemplo, y despejando luégo en ella á x, se tendrá

$$x = 20{\cdot}50 \text{ pesetas}$$

Resulta, pues, que cada carnero costó 20·50 pesetas y cada cabrito 6 ídem.

PROBLEMA 106

Un sujeto se comprometió á transportar una partida de pocillos, platos y fuentes con la condición de que por cada pieza que rompiese, no sólo no se le había de abonar porte, sinó que se le había de descontar una cantidad igual á éste. Se le entregaron primero 6 pocillos, 8 platos y 4 fuentes: rompió todos los pocillos y recibió 74 céntimos de peseta. Entregáronsele luégo 4 pocillos, 5 platos y 7 fuentes: rompió todos los platos y recibió 50 céntimos. Se le entregaron, por último, 8 pocillos, 9 platos y 3 fuentes: rompió todas las fuentes y recibió 82 céntimos. ¿Cuántos se le abonaban por el porte de cada una de las tres clases de piezas?

Resolución.

Sean x, y y z los céntimos de peseta que respectivamente se le abonaban por el porte de cada pocillo, de cada plato y de cada fuente. Según el enunciado, las ecuaciones del problema serán

$$\left.\begin{array}{rr} & 8y + 4z - 6x = 74 \\ & 4x + 7z - 5y = 50 \\ \text{y} & 8x + 9y - 3z = 82. \end{array}\right\} \text{(A)}$$

Despejando á y, á fin de eliminarla, en la 1.ª ecuación y sustituyendo su valor en las demás, resultarán las dos siguientes, ya simplificadas:

$$\left.\begin{array}{rr} & 0\text{'}25x + 9\text{'}5z = 9625 \\ \text{y} & 7\text{'}5z - 14\text{'}75x = 1\text{'}25. \end{array}\right\} \text{(B)}$$

Despejando á x, para eliminarla, en la 1.ª de estas dos ecuaciones y sustituyendo su valor en la 2.ª, resultará esta 3.ª

$$568z = 5680;$$

de donde $z = \frac{5680}{568} = 10.$

Sustituyendo ahora á z con su valor 10 en cualquiera de las dos ecuaciones (B) y despejando en ella á x se tendrá

$$x = 5;$$

y, reemplazando á x y z con su respectivo valor 5 y 10 en cualquiera de las 3 ecuaciones (A) y despejando en ella á y, tendremos

$$y = 8.$$

Resulta, pues, que al transportador de la vajilla se le abonaron 5 céntimos por cada pocillo, 8 por cada plato y 10 por cada fuente.

PROBLEMA 107.

Tres hermanos, Ramón, Santiago y Tomás, **compraron mancomunadamente una finca, contribuyendo por igual al pago de su importe: para comprarla uno solo de ellos les faltaba: á Ramón, $^1/_7$ del capital de Santiago; á Santiago, $^1/_3$ del capital de Tomás; y á Tomás, $^3/_8$ del capital de Ramón. La suma de los capitales de los tres hermanos excede al duplo del valor de la finca en 30.000 duros. ¿A cuántos ascendía el capital de cada uno de dichos tres hermanos y á cuántos otros el valor de la finca por ellos comprada?**

Resolución

Sea r duros el capital del Ramón, s el de Santiago, t el de Tomás y v el valor de la finca. Según el enunciado, las ecuaciones del problema serán

$$\left.\begin{array}{rl} r + \frac{s}{7} = v & \\ s + \frac{t}{3} = v & \\ t + \frac{3r}{8} = v & \\ \text{y} \quad r + s + t = 2v + 30.000 & \end{array}\right\} \text{(A)}$$

Despejando á r, para eliminarla, en la 1.ª ecuación y sustituyendo su valor en las demás en que figura, resultarán las 3 siguientes, ya simplificadas:

$$\left.\begin{array}{r} s + \frac{t}{3} = v \\ 56\,t - 3\,s = 35\,v \\ \text{y} \quad 6\,s + 7\,t = 7\,v + 210.000 \end{array}\right\} \text{(B)}$$

Despejando á s, para eliminarla, en la 1.ª de estas 3 ecuaciones y sustituyendo su valor en las restantes, resultarán, ya simplificadas, las dos que siguen:

$$\left.\begin{array}{r} 57\,t = 38\,v \\ \text{y} \qquad 5\,t = v + 210.000 \end{array}\right\} \text{(C)}$$

Despejando á t, á fin de eliminarla, en la 1.ª de estas dos ecuaciones y sustituyendo su valor en la otra, resultará esta 3.ª

$$133\,v = 11.970.000;$$

de donde $v = \frac{11.970.000}{133} = 90.000$ duros.

Reemplazando á v con su valor conocido, 90.000 duros, en cualquiera de las dos ecuaciones (C) y despejando en ella á t, se tendrá

$$t = 60.000 \text{ duros.}$$

Sustituyendo ahora á v y á t con sus valores ya conocidos en cualquiera de las tres ecuaciones (B) y despejando en ella á s, resultará

$$s = 70.000 \text{ duros.}$$

Por último, reemplazando con su valor ya conocido á v, t y s en cualquiera de las 4 ecuaciones (A) y despejando en ella á r, tendremos

$$r = 80.000 \text{ duros.}$$

Resulta, pues, que

el valor de la finca es 90000 duros: su duplo		180.000
el capital de Ramón,	80.000	210.000
el de Santiago,	70.000	
y el de Tomás,	60.000	
Diferencia		30.000

El valor de la finca y los capitales, como es fácil comprobar, cumplen también con las demás condiciones del problema: luego son valores que satisfacen.

PROBLEMA 108.

¿Cuántas permutaciones pueden formarse con *m* letras tomadas *n* á *n*?

Resolución.

Llámanse *permutaciones* los grupos que pueden formarse con varias letras (ú otros objetos) tomadas 2 á 2, 3 á 3, 4 á 4, &. &., los cuales se diferencian entre sí en una ó más letras ó en el orden de colocación de éstas.

Las permutaciones se apellidan *binarias*, *ternarias*, *cuaternarias* &,, según que consten de 2, 3, 4 &. letras.

Las permutaciones binarias se forman agregando sucesivamente á cada letra cada una de las demás. Así, por ejemplo, las permutaciones binarias de las 4 letras *a*, *b*, *c* y *d* serán

ab, *ac*, *ad*,
ba, *bc*, *bd*.
ca, *cb*, *cd*,
da, *db*, *dc*,

Como se ve, cada letra sirve de base á tantas permutaciones binarias como letras son, menos 1. Luego, si llamamos *m* al número de letras permutables, el de las permutaciones binarias de cada letra será $m - 1$, y el de las formadas por todas ellas será

$$m\ (m - 1).$$

Las permutaciones ternarias se forman agregando sucesivamente á cada permutación binaria cada una de las letras que no entran en ella. Así, las permutaciones ternarias de las 4 letras anteriores serán

abc, *abd*, *acb*, *acd*, *adb*, *adc*,
bac, *bad*, *bca*, *bcd*, *bda*, *bdc*,
cab, *cad*, *cba*, *cbd*, *cda*, *cdb*,
dab, *dac*, *dba*, *dbc*, *dca*, *dcb*;

y, como en cada permutación binaria dejan de entrar todas las letras que se consideran, menos las 2 que la constituyen, síguese que cada permutación binaria producirá $m - 2$ permutaciones ternarias: luego las $m(m - 1)$ permutaciones binarias producirán

$m(m - 1)(m - 2)$ permutaciones ternarias.

Prosiguiendo el razonamiento, deduciríamos que las permutaciones cuaternarias de m letras son

$$m(m - 1)(m - 2)(m - 3);$$

que las permutaciones quinarias son

$$m(m - 1)(m - 2)(m - 3)(m - 4);$$

y así sucesivamente. Luego, generalizando, el número de permutaciones de m letras tomadas n á n será

$$m(m - 1)(m - 2)(m - 3)\ldots\ldots\big(m - (n - 1)\big);$$

ó bien, efectuando la resta indicada en el último paréntesis,

$$m(m - 1)(m - 2)(m - 3)\ldots\ldots(m - n + 1),$$

producto que consta de n factores.

Nota.—Si en cada permutación entran todas las m letras, será $m = n$; y en tal caso la fórmula general anterior se transformará en esta otra.

$$m(m - 1)(m - 2)(m - 3)\ldots\ldots\times 1$$

ó, traducida y escrita en sentido inverso,

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots\times n.$$

Así, el número de permutaciones binarias de 2 letras es $1 \times 2 = 2$; el de permutaciones ternarias de 3 letras, $1 \times 2 \times 3 = 6$; el de permutaciones cuaternarias de 4 letras, $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$; &. &.

PROBLEMA 109.

¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse á una mesa 8 individuos y, suponiendo que en cada colocación inviertan tan sólo 2 minutos, cuánto tiempo invertirán en el total de colocaciones?

Resolución.

Lo que en este problema se pide en 1.^{er} término es el número de permutaciones octonarias que pueden formarse con los 8 individuos propuestos. Llamando x á este número de permutaciones, tendremos *(probl. anterior, nota)*

$$x = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 = 40320$$

Resulta que el número de colocaciones es 40.320.

Ahora, si, según se ha supuesto, en cada colocación se invierten 2 minutos, en el total de ellas se invertirán 40.320 $\times$ 2 = 80640 minutos = 1344 horas = 56 días.

Nota.—El mismo número de permutaciones, 40.320, pueden, *naturalmente*, formarse con las 8 palabras que constituyen el verso latino

Tot tibi sunt dotes, virgo, quot sídera cœlo (1);

las mismas que formó *(¡desocupado estaba el hombre!)* el P. Prestet, habiendo observado que 3.376 de ellas constituían verso.

---

(1) *Tienes,* niña, *tantas gracias, cuantas estrellas el cielo.*

PROBLEMA 110.

Determinar separadamente el número de permutaciones, desde las binarias hasta las denarias, inclusive, que pueden formarse con los 10 guarismos de nuestra notación aritmética.

Resolución.

Según las fórmulas correspondientes del problema general número 108, las permutaciones que se piden, hecha ya en aquéllas la sustitución de las letras *m* y *n* con su valor respectivo, son las siguientes:

las binarias..... 10×9. . . . .=..........90
las ternarias.... $10\times9\times8$.. . . . .=........720
las cuaternarias $10\times9\times8\times7$. . . . . . . =......5040
las quinarias... $10\times9\times8\times7\times6$. . . . . . .=....30240
las senarias..... $10\times9\times8\times7\times6\times5$. . . . . .=..151200
las septenarias $10\times9\times8\times7\times6\times5\times4$. . . . .=..604800
las octonarias.. $10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3$.. . .=1814400
las novenarias. $10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2$. .=3628800
y las denarias..... $10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=3628800$

PROBLEMA 111.

¿Cuántas combinaciones ó productos diferentes pueden formarse con *m* letras tomadas *n* á *n*?

Resolución.

Llámanse *combinaciones* ó *productos diferentes* las permutaciones que se diferencian en una ó más letras.

Las combinaciones se clasifican, como las permutaciones, en *binarias*, *ternarias*, &. &., según que consten de 2, 3. &. letras.

Las permutaciones binarias *(probl. 108)* de las 4 letras *a*, *b*, *c* y *d* son

ab, *ac*, *ad*,
ba, *bc*, *bd*,
ca, *cb*, *cd*,
da, *db*, *dc*,

y las ternarias,

abc, *abd*, *acb*, *acd*, *adb*. *adc*,
bac, *bad*, *bca*, *bcd*, *bda*, *bdc*,
cab, *cad*, *cba*, *cbd*, *cda*, *cdb*,
dab, *dac*, *dba* *dbc*, *dca*, *dcb*.

Fijando la consideración en las permutaciones de estos dos órdenes, se ve que en las primeras hay las 6 combinaciones binarias siguientes:

ab, *ac*, *ad*,
bc, *bd*,
cd,

y en las segundas estas 4 combinaciones ternarias:

abc, *abd*, *acd*, *bcd*.

Las 6 permutaciones restantes de las binarias y las 20 restantes de las ternarias no son productos diferentes, sinó iguales, por constar de los mismos factores, aunque en distinto orden, á las otras 6 y á las otras 4 que respectivamente hemos señalado como combinaciones, ya binarias, ya ternarias.

En vista de los resultados precedentes, puede establecerse la siguiente regla para formar con varias letras las combinaciones de los diferentes órdenes á que pueden dar lugar:

Para las combinaciones binarias, se multiplica cada letra por cada una de las siguientes.

Para las ternarias, se multiplica cada letra por cada una de las combinaciones binarias de las letras siguientes.

Para las cuaternarias, se multiplica cada letra por cada una de las combinaciones ternarias de las letras que le siguen.

Y, en general, para formar las combinaciones de un orden cualquiera, se multiplica cada letra por cada una de las combinaciones del orden inmediato inferior de las letras siguientes

Para hallar el número de combinaciones binarias de *m* letras, conviene observar que en las permutaciones binarias de estas *m* letras, como se ve en las formadas antes por las 4 letras *a*, *b*, *c* y *d*, cada combinación está representada 2 veces; esto es, tantas como permutaciones binarias se pueden formar con 2 letras: luego el número de combinaciones existentes en dichas permutaciones es 2 veces $= 1 \times 2$ veces menor que el de permutaciones, el cual *(probl. 108)* es $m\ (m - 1)$. El número, pues, de las combinaciones de *m* letras será

$$\frac{m\ (m-1)}{1\ .\ 2}.$$

Haciendo análoga observación respecto de las combinaciones ternarias, se deducirá que el número de éstas es

$$\frac{m\ (m-1)\ (m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .}.$$

Y, continuando el razonamiento, se hallará que las combinaciones cuaternarias son

$$\frac{m\ (m-1)\ (m-2)\ (m-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4};$$

y, en general, que el número de combinaciones de *m* letras tomadas *n* á *n* es

$$\frac{m\ (m-1)\ (m-2) \ldots (m-n+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3 \ldots n.}$$

Nota.—El número de combinaciones de *m* letras tomadas *n* á *n* es igual al número de combinaciones de *m* letras tomadas *m* — *n* á *m* — *n*.

En efecto, según se acaba de ver, el número de combinaciones de m letras tomadas n á n es

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2).....\,(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3......\,n} \qquad (A)$$

: el número de combinaciones de m letras tomadas $m - n$ á $m - n$ se hallará sustituyendo en la fórmula anterior á n con $m - n$; y será.

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2).....\,(m-(m-n)+1)}{1\,.\,2\,.\,3.....\,(m-n)}\,;$$

ó bien, efectuando la resta indicada en el último doble paréntesis del numerador,

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)......\,(m-m+n+1}{1\,.\,2\,.\,3......\,(m-n)}$$

ó sea, simplificando el último paréntesis del numerador,

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)......(n+1)}{1\,.\,2\,.\,3......\,(m-n)}$$

Reduciendo ahora á un común denominador esta fracción y la fracción (A), las dos nuevas fracciones serán éstas

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)....\,(m-n+1)\times(m-1)....\,3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3....\,n\times 1\,.\,2\,.\,3....\,(m-n)}$$

y

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)....\,(n+1)\times n.....\,3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\,.\,3.....\,n\times 1\,.\,2\,.\,3.....\,(m-n)}$$

Estas dos fracciones son iguales por tener el mismo denominador y por ser iguales los numeradores, como productos que uno y otro son de todos los números naturales desde 1 hasta m; y, como la 1.ª expresa las combinaciones de m letras tomadas n á n y la 2.ª las combinaciones de m letras tomadas $m - n$ á $m - n$, resulta que el número de combinaciones es el mismo en el un caso que en el otro.

La proposición que acaba de demostrarse puede ser demostrada de una manera mucho más breve y no menos clara.

En efecto, si de las m letras se toman n letras, quedarán

$m - n$ letras. Las n letras tomadas forman una combinación y las $m - n$ letras que quedaron forman otra combinación. Por manera que á cada combinación de m letras responde otra de $m - n$, y viceversa: Luego el número de combinaciones de m letras tomadas n á n es igual al número de combinaciones de m letras tomadas $m - n$ á $m - n$.

PROBLEMA 112.

Determinar el número de combinaciones cuaternarias que pueden formarse con 12 letras.

Resolución.

La fórmula correspondiente del problema general anterior, aplicable á la determinación del número de combinaciones ó productos diferentes que se nos pide, es la siguiente:

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

Dando, pues, valores, se tendrá

$$\frac{12\,.\,11\,.\,10\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} = \frac{11880}{24} = 495,$$

número de combinaciones cuaternarias que pueden formarse con 12 letras.

PROBLEMA 113.

Determinar separadamente el número de combinaciones ó productos diferentes, desde las binarias hasta las duodenarias, inclusive, que pueden formarse con 15 letras.

Resolución.

Según las fórmulas correspondientes del problema general número 111, las combinaciones, ó productos diferentes, que se nos piden, hecha ya en aquéllas la sustitución de las letras *m* y *n* con su valor respectivo, serán:

las binarias...... $\frac{15 . 14}{1 . 2}$. . . . .= 105
las ternarias..... $\frac{15 . 14 . 13}{1 . 2 . 3}$. . . . .= 455
las cuaternarias $\frac{15 . 14 . 13 . 12}{1 . 2 . 3 . 4}$. . . . .= 1365
las quinarias.... $\frac{15 . 14 . 13 . 12 . 11}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}$. . . . .= 3003
las senarias...... $\frac{15 . 14 . 13 . 12 . 11 . 10}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6}$. . . .= 5005
las septenarias. $\frac{15 . 14 . 13 . 12 . 11 . 10 . 9}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7}$. . ; .= 6435

las octonarias son iguales en número á las septenarias, 6435, porque 15 letras — 7 = 8, y 15 — 8 = 7, y ya se ha dicho *(probl. 111, nota)* que el número de combinaciones de *m* letras tomadas *n* á *n* es igual al de combinaciones de *m* letras tomadas *m* — *n* á *m* — *n*.

Por idéntica razón son iguales:

las novenarias á las senarias. 5005
las denarias á las quinarias. 3003
las undenarias á las cuaternarias. . . . 1365
y las duodenarias á las ternarias. 455

PROBLEMA 114.

Averiguar el número de combinaciones duodenarias que pueden formarse con 12 letras y el de las combinaciones del mismo orden que se pueden formar con 13.

Resolución.

Este problema es, en sus dos partes, de los de sencillez tan extremada, que, *por quien esté en antecedentes,* pueden muy bien contestarse satisfactoriamente antes de acabar de ser enunciados. Veámoslo.

1.ª PARTE.—Las 12 letras de que se trata forman *(problema 108, nota)* 1 . 2 . 3......10 . 11 . 12 = 479001600 permutaciones duodenarias; mas, como en cada una de ellas entran las mismas 12 letras, esas 479001600 permutaciones expresan todas el mismo producto: luego forman una sola combinación (1).

Si para la resolución de esta 1.ª parte del problema recurrimos á la fórmula general correspondiente, obtendremos el mismo resultado. En efecto, esta fórmula *(probl. 111)* es, después de sustituidas las letras m y n con su valor común 12,

$$\frac{12 \,.\, 11 \,.\, 10 ...... 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 .... 10 \,.\, 11 \,.\, 12};$$

y, como es un quebrado cuyo numerador y denominador son iguales entre sí, evidentemente equivale á 1. Sólo una combinación duodenaria puede, pues, formarse con 12 letras.

2.ª PARTE.— Como *(probl. 111, nota)* el número de combinaciones de m letras tomadas n á n es igual al número de combinaciones de m letras tomadas $m - n$ á $m - n$ y, como es aquí $m = 13$, $n = 12$ y, por consiguiente, $m - n = 13 - 12 = 1$, resulta que el número de combinaciones duodenarias de 13 letras es igual al número de distribuciones, colocaciones ó separaciones de esas 13 letras, tomadas singular ó individualmente ó 1 á 1; esto es, igual á 13.

Este mismo resultado daría la aplicación de la fórmula general correspondiente, la cual *(probl. 111)* es, después de

---

(1) Esto mismo sucede, y no puede menos de suceder, en todas las permutaciones de un orden cualquiera en las que entren todas las letras permutables; es decir, que en el total de permutaciones habrá una sola combinación.

reemplazadas las letras *m* y *n* con su valor respectivo 13 y 12.

$$\frac{13 \,.\, 12 \,.\, 11 \ldots\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 9 \,.\, 10 \,.\, 11 \,.\, 12}$$

Suprimiendo en este quebrado los factores comunes á numerador y denominador, sólo quedará subsistente en el 1.º el factor 13. Trece, pues, son las combinaciones duodenarias de 13 letras (1).

PROBLEMA 115.

El cuadrado de la suma de 5 números es 3025; la suma de sus cuadrados, 869; la del primer número y del 2.º, 8; la del 2.º y 3.º, 14; la del 3.º y 4.º, 24, y la del 4.º y 5.º, 38. ¿Cuáles son estos 5 números?

Resoluciones.

1.ª—Este problema puede resolverse: 1.º., haciendo uso de las tres clases de datos que contiene y que son: cuadrado de la suma de los cinco números pedidos, suma de los cuadrados de estos números y suma de cada dos de ellos consecutivos; 2.º, prescindiendo del primer dato; y 3.º prescindiendo del segundo. Resolvámosle primero tomando en consideración las tres clases de datos.

El cuadrado de la suma de los términos de un polinomio, *numérico ó literal*, es igual al cuadrado del 1.º, mas el duplo del 1.º por el 2.º, mas el cuadrado del 2.º; mas el duplo de 1.º por 3.º, mas el duplo de 2.º por 3.º, mas cuadrado de 3.º: mas du-

---

(1) Esto mismo sucede, y tiene que suceder, en cuanto al número de combinaciones de un orden cualquiera que sea inferior en 1 unidad al número de letras combinables; es decir, que ese número de combinaciones estará expresado por el número de estas letras.

plo de cada uno de los anteriores por el 4.º, mas cuadrado del 4.º; &. &.; ó bien, *dicho más breve*, es igual á la suma de cuadrados de cada uno de sus términos, mas el duplo de la suma de sus productos binarios. Luego, si de la cantidad 3025, cuadrado de la suma de los cinco números en cuestión, se resta la cantidad 869, suma de los cuadrados de los mismos, el resto $3025 - 869 = 2156$ será el duplo de la suma de los productos binarios de dichos cinco números. Luego, si dividimos por 2 el expresado resto 2156, el cociente $2156 : 2 = 1078$ será la suma de los productos binarios. Por manera que, si, para fijar las ideas, llamamos a, b, c, d y e á los cinco números, presentados de menor á mayor, tendremos: $1078 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de$. (X)

Ahora, según los datos, tenemos:

$$\overbrace{\left.\begin{array}{l} a + b = 8 \\ b + c = 14 \\ c + d = 24 \\ d + e = 38 \end{array}\right\}}^{\text{Cuadro 1.º}} \text{ y de aquí } \overbrace{\left\{\begin{array}{l} a = 8 - b \\ b = 14 - c \\ c = 24 - d \\ d = 38 - e; \end{array}\right.}^{\text{Cuadro 2.º}}$$

$$\text{Suma} \quad \overline{84}$$

y, sustituyendo en el 2.º miembro de este segundo cuadro las cantidades b, c y d con su valor respectivo, que está en la ecuación inmediata inferior del mismo cuadro, y designando luego con s la suma $a + b + c + d + e$, resultará

CUADRO 3.º

$$\begin{array}{lcccccccc} a = & 8 & - 14 & + 24 & - 38 & + e & = & - 20 & + e \\ b = & \text{»} & + 14 & - 24 & + 38 & - e & = & + 28 & - e \\ c = & \text{»} & \text{»} & + 24 & - 38 & + e & = & - 14 & + e \\ d = & \text{»} & \text{»} & \text{»} & + 38 & - e & = & + 38 & - e \\ e = & \text{»} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & + e & = & \text{»} & + e \\ \hline s = & 8 & \text{»} & 24 & \text{»} & e & = & 32 & + e. \end{array}$$

Sustituyendo ahora en la ecuación (X) las letras a, b, c y d con sus valores referidos á la letra e (1) y contenidos en este 3.er cuadro, se tendrá:

$$1078 = (e - 20) \times (28 - e) + (e - 20) \times (e - 14) + (e - 20) \times (38 - e) + (e - 20) \times e + (28 - e) \times (e - 14) + (28 - e) \times (38 - e) + (28 - e) \times e + (e - 14) \times (38 - e) + (e - 14) \times e + (38 - e) \times e = 28e - 560 - e^2 + 20e + e^2 - 20e - 14e + 280 + 38e - 760 + 20e - e^2 + e^2 - 20e + 28e - e^2 - 392 + 14e + 1064 - 38e - 28e + e^2 + 28e - e^2 + 38e - 532 - e^2 + 14e + e^2 - 14e + 38e - e^2 = -2e^2 + 132e - 900.$$

Tenemos, pues, en definitiva

$$1078 = -2e^2 + 132e - 900;$$

ó bien

$$-2e^2 + 132e - 900 = 1078;$$

y, cambiando los signos á toda la ecuación, resultará esta otra

$$2e^2 - 132e + 900 = -1078;$$

y, pasando el 2.º miembro al 1.º, será

$$2e^2 - 132e + 900 + 1078 = 0;$$

ó bien

$$2e^2 - 132e + 1978 = 0;$$

y, dividiendo toda la ecuación por 2, se tendrá

$$e^2 - 66e + 989 = 0;$$

ecuación completa de 2.º grado, ya preparada. Aplicando la fórmula correspondiente *(problema 32)*, será en definitiva

$$e = 33 + 10 = 43$$

y

$$e = 33 - 10 = 23.$$

El 1.er valor de e, 43, no puede satisfacer, porque entre e y d, según los datos, han de sumar únicamente 38. Solo

---

(1) Lo mismo pudieran referirse á otra letra cualquiera los valores de las cuatro restantes.

puede satisfacer, como realmente satisface, el 2.º valor; esto es, 23.

Si el valor de e es 23, será, según el cuadro 2.º, $d = 38 - 23 = 15$; $c = 24 - 15 = 9$; $b = 14 - 9 = 5$, y $a = 8 - 5 = 3$.

Resulta, pues, que los cinco números pedidos son, de menor á mayor, el 3, el 5, el 9, el 15 y el 23.

2.ª—Prescindamos ahora del 1.er dato; esto es, del cuadrado de la suma de los cinco números pedidos. Según el cuadro 3.º tendremos

$$\begin{aligned} a &= -20 + e \\ b &= +28 - e \\ c &= -14 + e \\ d &= +38 - e \\ e &= \quad \text{»} + e \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado estas igualdades y sumando luégo las que resulten, se tendrá

$$\begin{aligned} a^2 &= (-20 + e)^2 = e^2 - 40e + 400 \\ b^2 &= (\ \ 28 - e)^2 = e^2 - 56e + 784 \\ c^2 &= (-14 + e)^2 = e^2 - 28e + 196 \\ d^2 &= (\ \ 38 - e)^2 = e^2 - 66e + 1444 \\ e^2 &= \qquad\qquad e^2 = e^2 \quad \text{»} \quad \text{»} \\ \hline a^2 + b^2 &+ c^2 + d^2 + e^2 = 5e^2 - 200e + 2824; \end{aligned}$$

y, como, según los datos, es $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$, $= 869$, sustituyendo, se tendrá

$$869 = 5e^2 - 190e + 2824;$$

ecuación completa de 2.º grado, que, reducida á la forma general y resuelta *(problema 32)*, da por resultado final

$$e = 20 + 3 = 23$$

y $$e = 20 - 3 = 17.$$

Ya sabemos que el verdadero valor de e es 23 y que, determinado uno de los cinco números, lo están los demás.

3.ª—Prescindamos ahora del 2.º dato, esto es, de la suma de los cuadrados de los cinco números que se nos piden.

Las sumas 1.ª y 3.ª del cuadro tercero nos dan esta ecuación.

$$s = 32 + e.$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de esta ecuación, resultará la siguiente

$$s^2 = 32^2 + 2 \,.\, 32 e + e^2;$$

ó bien

$$s^2 = 1024 + 64 e + e^2:$$

y, como s^2, según los datos, vale 3025, sustituyendo, se tendrá

$$3025 = 1024 + 64 e + e^2;$$

ó bien

$$e^2 + 64 e + 1024 = 3025;$$

y, pasando el 2.º miembro al 1.º, será

$$e^2 + 64 e - 2004 = 0;$$

ecuación completa de 2.º grado, que, preparada y resuelta *(problema 32)*, da por resultado definitivo

$$e = -32 + 55 = 23$$

y $$e = -32 - 55 = -87.$$

4.ª—Si el cuadrado de la suma de los cinco números en cuestión es 3025, la suma de estos números será la $\sqrt{3025} = 55$. Si ésta es la suma de los cinco números, sustituyendo á s con su igual 55 en la ecuación que forman las sumas primera y última del cuadro 3.º, se tendrá

$$55 = 32 + e;$$

de donde

$$e = 55 - 32 = 23.$$

5.ª—Averiguado, como en el caso anterior, que la suma de los números pedidos es 55, diremos: si esta suma la restamos de la suma de las sumas de cada dos sumandos consecutivos, que es la de los segundos miembros del cuadro 1.°, igual á 84, el resto 84 — 55 = 29, será la suma de los números *b*, *c* y *d*, que en dicha suma total, 84, entran repetidos. Luego, si de este resto, 29, deducimos la suma de 2 de ellos, que por dato nos es conocida, por ejemplo, $b + c = 14$, el número 29 — 14 = 15 será el valor del número *d*, el cual nos da el de los otros cuatro números.

6.ª—Hallaríamos, si ya no lo estuviera, la suma de los 5 números, que es 55, y diríamos: si de esta suma restamos la suma de cuatro de aquéllos, que nos es conocida, por ejemplo, la de $a + b = 8$ y la de $c + d = 24$, la cual suma es 8 + 24 = 32, el resto 55 — 32 = 23 será, evidentemente, el valor del 5.° número; esto es, el valor de *e*.

Nota.—Los dos razonamientos últimos no caben, cuando el número de números pedidos es impar.

PROBLEMA 116.

El cuadrado de la suma de 5 números es 2500; la suma de sus cuadrados, 706; la diferencia entre el primer número y el segundo, 6; entre el segundo y el tercero, 5; entre el tercero y el cuarto, 4; y entre el cuarto y el quinto, 3. ¿Cuáles son estos 5 números?

Resoluciones.

1.ª—Este problema puede resolverse: 1.° haciendo uso de las tres clases de datos que contiene y que son; el cuadrado de la suma de los 5 números, la suma de los cuadrados de estos números y la diferencia de cada dos de ellos consecutivos; 2.º prescindiendo del 1.^{er} dato; y 3.º prescindiendo del 2.º

Resolvámosle primero tomando en consideración todos los datos.

El cuadrado de la suma de los términos de un polinomio, *numérico ó literal*, es igual á la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos, mas el duplo de la suma de los productos binarios. Luego, si de la cantidad 2500, cuadrado de la suma de los números pedidos, restamos la cantidad 706, suma de los cuadrados de los mismos números, el resto $2500 - 706 = 1794$ será el duplo de la suma de los productos binarios de dichos 5 números. Luego, si dividimos por 2 el expresado resto 1794 el cociente $1794 : 2 = 897$ será la suma de los productos binarios. Por manera que, si, para fijar las ideas, llamamos a, b, c, d y e á los cinco números, presentados de mayor á menor, tendremos $897 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de.$ (X)

Ahora, según los datos, tenemos

$$\begin{array}{c}\text{Cuadro 1.º}\\ \overbrace{\left.\begin{array}{r} a - b = 6\\ b - c = 5\\ c - d = 4\\ d - e = \underline{3}\\ \text{Suma}\quad 18\end{array}\right\}}\end{array}\quad \text{y de aquí}\quad \begin{array}{c}\text{Cuadro 2.º}\\ \overbrace{\left\{\begin{array}{l} a = 6 + b\\ b = 5 + c\\ c = 4 + d\\ d = 3 + e;\end{array}\right.}\end{array}$$

y, sustituyendo en el 2.º cuadro los sumandos b, c y d con su valor respectivo, que está en la ecuación inferior inmediata, y designando luego con s la suma $a + b + c + d + e$, resultará

CUADRO 3.°

$$
\begin{array}{l}
a = 6 + 5 + 4 + 3 + e = 18 + e \\
b = \text{»} + 5 + 4 + 3 + e = 12 + e \\
c = \text{»} \quad \text{»} + 4 + 3 + e = 7 + e \\
d = \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} + 3 + e = 3 + e \\
e = \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} + e = \text{»} + e \\
\hline
s = 6 + 10 + 12 + 12 + 5e = 40 + 5e
\end{array}
$$

Sustituyendo ahora en la ecuación (X) las letras a, b, c y d con sus valores referidos á la letra e y contenidos en este 3.^{er} cuadro se tendrá

$$
\begin{aligned}
897 &= (18+e) \times (12+e) + (18+e) \times (7+e) + (18+e) \times (3+e) \\
&+ (18+e) \times e + (12+e) \times (7+e) + (12+e) \times (3+e) + (12+e) \\
&\times e + (7+e) \times (3+e) + (7+e) \times e + (3+e) \times e = 216 \\
&+ 12e + 18e + e^2 + 126 + 7e + 18e + e^2 + 54 + 3e \\
&+ 18e + e^2 + 18e + e^2 + 84 + 7e + 12e + e^2 + 36 + 3e \\
&+ 12e + e^2 + 12e + e^2 + 21 + 3e + 7e + e^2 + 7e + e^2 \\
&+ 3e + e^2 = 10e^2 + 160e + 537.
\end{aligned}
$$

Tenemos, pues, en definitiva,

$$897 = 10e^2 + 160e + 537;$$

y, pasando el 1.^{er} miembro al 2.°, será

$$0 = 10e^2 + 160e - 360$$

ó bien

$$10e^2 + 160e - 360 = 0;$$

y, dividiendo toda la ecuación por 10, se tendrá

$$e^2 + 16e - 36 = 0;$$

ecuación completa de 2.° grado, ya preparada, que, resuelta *(problema 32)*, dará en definitiva

$$e = -8 + 10 = 2$$

y

$$e = -8 - 10 = -18.$$

Si el valor de e es 2, será, según el cuadro 2.°, $d = 3 + 2 = 5$, $c = 4 + 5 = 9$, $b = 5 + 9 = 14$ y $a = 6 + 14 = 20$.

2.ª—Prescindamos ahora del 1.$^{\text{er}}$ dato; esto es, del cuadrado de la suma de los 5 números pedidos. Según el cuadro 3.º, tendremos

$$\begin{aligned} a &= 18 + e \\ b &= 12 + e \\ c &= 7 + e \\ d &= 3 + e \\ e &= \text{»} + e. \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado estas igualdades y sumando luégo las que resulten, se tendrá

$$\begin{aligned} a^2 &= (18 + e)^2 = e^2 + 36\,e + 324 \\ b^2 &= (12 + e)^2 = e^2 + 24\,e + 144 \\ c^2 &= (\ 7 + e)^2 = e^2 + 14\,e + 49 \\ d^2 &= (\ 3 + e)^2 = e^2 + 6\,e + 9 \\ e^2 &= \qquad\quad e^2 = e^2 + \text{»} + \text{»} \end{aligned}$$

$$\overline{\underline{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 5\,e^2 + 80\,e + 526}}$$

y, como, según los datos, es $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 706$, sustituyendo, se tendrá

$$706 = 5\,e^2 + 80\,e + 526;$$

ecuación completa de 2.º grado, que, reducida á la forma general y resuelta (*probl. 32*), da por resultado final

$$e = -\,8 + 10 = \ 2$$

y

$$e = -\,8 - 10 = -\,18.$$

Ya sabemos que el verdadero valor de e es 2.

3.ª—Prescindamos ahora del 2.º dato; esto es, de la suma de los cuadrados de los 5 números en cuestión

Las sumas 1.ª y 3.ª del cuadro 3.º nos dan esta ecuación

$$s = 40 + 5\,e.$$

Cuadrando los dos miembros de esta ecuación, resultará esta otra

$$s^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 5\,e + (5\,e)^2;$$

ó bien $s^2 = 1600 + 400\,e + 25\,e^2;$

y, como, según los datos, s^2 vale 2500, sustituyendo, se tendrá

$$2500 = 1600 + 400\,e + 25\,e^3;$$

ó bien

$$25\,e^2 + 400\,e + 1600 = 2500;$$

ecuación completa de 2.º grado, que, preparada y resuelta *(probl. 32)*, nos dará en definitiva

$$e = -8 + 10 = 2$$

y

$$e = -8 - 10 = -18.$$

4.ª—Si el cuadrado de la suma de los 5 números de que se trata es 2500, la suma de estos números será la $\sqrt{2500} = 50$. Si esta es la suma de los 5 números, sustituyendo á s con su igual 50 en la ecuación que forman las sumas 1.ª y última del cuadro 3.º, se tendrá

$$50 = 40 + 5\,e;$$

de donde

$$5\,e = 50 - 40 = 10;$$

y de aquí

$$e = \frac{10}{5} = 2.$$

Determinado uno de los 5 números, lo están los otros cuatro.

PROBLEMA 117.

Un comerciante de ultramarinos compró una partida de garbanzos á 10 duros fanega y, deducida la 6.ª parte de aquélla para el consumo de la casa, vendió el resto á 12 duros fanega, habiendo sacado de la venta el mismo dinero que le había importado la compra. ¿De cuántas fanegas constaba ésta?

Resolución.

Sea x las fanegas de que constaba la partida de garbanzos comprada por el comerciante: su importe será 10 x duros; la parte de la compra reservada para el consumo de la casa es $\frac{x}{6}$; la destinada á la venta, $x - \frac{x}{6} = \frac{5x}{6}$; y el importe de estas $\frac{5x}{6}$ fanegas, $\frac{5x}{6} \times 12$ duros. Luego la ecuación será

$$10x = \frac{5x}{6} \times 12.$$

Quitando el denominador, se tendrá

$$60x = 5x \times 12,$$

ó bien

$$60x = 60x.$$

Esta identidad revela ya claramente que el problema propuesto es indeterminado en el sentido de que x tiene un valor cualquiera. En efecto, despejando á x, tendremos

$$60x - 60x = 0;$$

y, separando en el primer miembro el factor común x, será

$$x \times (60 - 60) = 0,$$

ó bien

$$x \times 0 = 0;$$

de donde

$$x = \frac{0}{0}.$$

Este resultado nos dice que el valor de x es un número que, multiplicado por el divisor *cero*, da de producto el dividendo *cero;* y como esto es propio de todo número, resulta que x es igual á un número cualquiera y, por consiguiente, què las fanegas de garbanzos compradas lo mismo pueden ser 6, que 6.000, que 60.000, que 8, que 4, &. &.

PROBLEMA 118.

Un traficante en ganado lanar compró 70 corderos, habiéndole quedado después de pagarlos, $^5/_8$ del capital, con los cuales compró otros 112 corderos, de ellos la mitad á 5 reales más que los anteriores y la otra mitad á 3 reales menos. ¿A cuántos reales ascendió el capital invertido en las tres compras y cuál fué el precio en cada una de ellas?

Resoluciones.

1.ª—Sea x reales el capital invertido en las tres compras hechas por el traficante. Los empleados en la 1.ª de ellas, ó sea en la de los 70 corderos serán

$$x - \frac{5}{8}x = \frac{3}{8}x = \frac{3x}{8}.$$

Luego el precio en la compra de estos 70 corderos fué

$$\frac{3x}{8} : 70 = \frac{3x}{560} \text{ rs.}$$

Por consiguiente, según los datos, el precio en la 2.ª compra ó sea en la de los 56 corderos, mitad de los 112, tuvo que ser $\frac{3x}{560} + 5$; y el de la 3.ª compra, ó sea la de los otros 56 corderos, $\frac{3x}{560} - 3$. Siendo éstos los precios en las tres compras, los importes serán respectivamente, $\frac{3x}{560} \times 70 = \frac{210x}{560}$, $\left(\frac{3x}{560} + 5\right) \times 56$ y $\left(\frac{3x}{560} - 3\right) \times 56$. Ahora, como la suma de los tres importes parciales ha de ser igual al capital del traficante, la ecuación será

$$\frac{210x}{560} + \left(\frac{3x}{560} + 5\right) \times 56 + \left(\frac{3x}{560} - 3\right) \times 56 = x.$$

Resolviendo los paréntesis, se tendrá

$$\frac{210x}{560} + \frac{168x}{560} + 280 + \frac{168x}{560} - 168 = x;$$

y, quitando denominadores, resultará

$$210\,x + 168\,x + 156800 + 168\,x - 94080 = 560\,x;$$

y, transponiendo términos y reduciendo los semejantes, será

$$14\,x = 62720;$$

de donde

$$x = \frac{62720}{14} = 4480.$$

Resulta que el capital invertido por el traficante en la compra de los 182 corderos ascendió á 4480 reales.

Para determinar ahora los precios, no hay más que sustituir á x con su valor en las expresiones $\frac{3\,x}{560}$, $\frac{3\,x}{560} + 5$ y $\frac{3\,x}{560} - 3$ y efectuar las operaciones indicadas en ellas, y resultará

1.^{er} precio $\frac{3\,x}{560} = \frac{3\,.\,4480}{560} = \frac{13440}{560} = 24$ rs.

2.^{o} id. $\frac{3\,x}{560} + 5 = 24 + 5 = 29$ »

3.^{o} id. $\frac{3\,x}{560} - 3 = 24 - 3 = 21$ »

2.ª—Sea x reales el precio de los 70 corderos: el de los primeros 56 será $x + 5$, y el de los 56 segundos, $x - 3$. El importe de los 70 corderos será $70\,x$; el de los 56 primeros $(x + 5) \times 56 = 56\,x + 280$, y el de los 56 segundos $(x - 3) \times 56 = 56\,x - 168$. Ahora, como en la compra de los 70 corderos se invirtieron $\frac{3}{8}$ del capital y en la de los 112 los $\frac{5}{8}$ restantes del mismo, si al importe $70\,x$ le agregamos 2 tercios suyos, la suma $70\,x + \frac{140}{3}\,x = \frac{210}{3}\,x + \frac{140}{3}\,x = \frac{350}{3}\,x$ expresará $\frac{5}{8}$ del capital. Luego la ecuación será

$$\frac{350}{3}\,x = 56\,x + 280 + 56\,x - 168;$$

y, quitando el denominador 3, se tendrá

$$350\,x = 168\,x + 840 + 168\,x - 504;$$

y, transponiendo términos y reduciendo los semejantes, resultará

$$14\,x = 336;$$

de donde

$$x = \frac{336}{14} = 24.$$

Si el precio de los 70 corderos es 24 reales, el de los 56 primeros será $24 + 5 = 29$ y el de los 56 segundos $24 - 3 = 21$. Como consecuencia, los 70 corderos importaron $24 \times 70 = 1680$ reales; los 56 primeros, $29 \times 56 = 1624$, y los 56 segundos, $21 \times 56 = 1176$. Luego el importe total fué

$$1680 + 1624 + 1176 = 4480 \text{ reales.}$$

PROBLEMA 119.

Un sujeto trata de distribuir á partes iguales cierto número de cosas entre cierto número de personas y al hacer la distribución resulta que, si á cada persona da n cosas, le sobran s, y que, si le da m cosas, le faltan f: ¿cuántas son las personas y cuántas las cosas?

Resolución.

Sea x el número de personas: el de cosas será $nx + s$ y también lo será $mx - f$: luego

$$mx - f = nx + s.$$

Despejando á x en esta ecuación, tendremos sucesivamente las que siguen:

$$mx - nx = s + f$$

y

$$(m - n)\,x = s + f;$$

de donde

$$x = \frac{s + f}{m - n};$$

y, como *m* — *n* representa la diferencia entre el número de cosas que en cada caso se propone dar, si á esta diferencia la llamamos *d*, será

$$x = \frac{s + f}{d}.$$

Esta fórmula general nos dice que en esta clase de problemas *el número de personas se hallará sumando lo que al hacer la distribución sóbre en el 1.er caso con lo que falte en el 2.º y dividiendo la suma resultante por la diferencia entre las unidades que se trata de dar en cada caso.*

Averiguado el número de personas, lo está inmediatamente el de *cosas*: la 1.ª ecuación lo da en cualquiera de sus dos miembros.

PROBLEMA 120.

Verificados los exámenes públicos en una escuela de niñas, el Presidente del Tribunal trató de distribuir entre ellas cierta cantidad de almendras, de las cuales sobraban 32, dando 8 á cada niña, y faltaban 28, si se le daban 9: ¿cuántas eran las niñas y cuántas las almendras?

Resoluciones.

1.ª—Este problema es un caso particular del general anterior. Aplicando, pues, la fórmula de este problema general, $x = \frac{s + f}{d}$, tendremos

$$x = \frac{32 + 28}{1} = 60 \text{ niñas.}$$

Ahora, si las niñas eran 60, las almendras serían $8 \times 60 + 32 = 512$; ó, si no, $9 \times 60 - 28 = 512$. Pero hagamos caso omiso del problema general y resolvamos independientemente de él el particular propuesto.

2.ª—Sea x el número de niñas: el de almendras será $8x + 32$ y también $9x - 28$: luego la ecuación será ésta

$$8x + 32 = 9x - 28;$$

y despejando á x, resultará sucesivamente

$$8x - 9x = -28 - 32,$$

$$-x = -60,$$

y

$$x = 60 \text{ niñas.}$$

El número de almendras se calcula como antes.

3.ª—Si, dando 8 almendras á cada niña, sobran 32 y para darle 9 faltan 28, esto demuestra que, agregando las 28 que le faltan para dar 9 á las 32 que le sobran dando 8, con las 60 resultantes tendría para dar una almendra más á cada una de las niñas, luego éstas eran 60.

4.ª—Si, dando 8 almendras á cada niña, sobran 32, es que eran 32 las niñas á quienes se podía dar á 9 almendras: luego estas 32 niñas recibirían $9 \times 32 = 288$ almendras. Si, para dar 9 almendras á cada niña, faltan 28, es que eran 28 las niñas á quienes sólo podía darse á 8 almendras: luego estas 28 niñas recibirían $8 \times 28 = 224$ almendras: luego el número de niñas es $32 + 28 = 60$, y el de almendras, $288 + 224 = 512$.

PROBLEMA 121.

Al visitar un hospital una señora y repartir el dinero que llevaba entre los enfermos que allí había, vió que le sobraban 14 rs., si daba 4 á cada enfermo, y que le faltaban 22, para poder darle 6: ¿cuántos eran los enfermos y cuántos los reales que la visitante llevaba? Y, para dar 5 reales á cada enfermo, ¿qué dinero le faltaría ó sobraría?

Resoluciones.

1.ª—Este problema es un caso particular del problema general núm. 119. Aplicando, pues, la fórmula de este problema general, que es $x = \frac{s + f}{d}$ se tendrá

$$x = \frac{14 + 22}{2} = \frac{36}{2} = 18 \text{ enfermos.}$$

Ahora, si los enfermos son 18, los reales serán $4 \times 18 + 14 = 86$, ó, si no, $6 \times 18 - 22 = 86$.

Si hubiese de dar 5 reales á cada uno de los enfermos, como éstos eran 18, el número de reales al efecto necesarios sería $5 \times 18 = 90$; y, como, según hemos averiguado, sólo llevaba 86, resulta que le faltaban $90 - 86 = 4$

Vamos ahora á prescindir del problema general.

2.ª—Sea x el número de enfermos: el de reales será $4x + 14$ y también $6x - 22$. Luego la ecuación será ésta: $4x + 14 = 6x - 22$; y despejando á x, resultará sucesivamente

$$4x - 6x = -22 - 14,$$
$$-2x = -36$$

y
$$2x = 36;$$
de donde
$$x = \frac{36}{2} = 18.$$

El número de reales se calcula como antes.

3.ª y 4.ª—Son la 3.ª y 4.ª del problema anterior, teniendo en cuenta que aquí cada 2 reales sobrantes, ó deficientes, representan un solo enfermo.

PROBLEMA 122.

Un padre tiene *N* años y un hijo suyo *n* íd.: ¿cuántos deben transcurrir para que la edad del padre sea *v* veces mayor que la del hijo?

Resolución.

Sea x los años que deben transcurrir para que se cumpla la condición del problema. Al cumplirse esta condición, la edad del padre será $N + x$ y la del hijo $n + x$; y, como la del 1.º ha de ser entonces v veces mayor que la del 2.º, la ecuación será

$$N + x = v\,(n + x)$$

Despejando á x en esta ecuación, irán resultando sucesivamente estas otras

$$N + x = vn + vx,$$
$$x - vx = vn - N,$$
$$vx - x = N - vn$$
y
$$(v - 1)\,x = N - vn;$$
de donde
$$x = \frac{N - vn}{v - 1}.$$

Esta fórmula general nos dice que, para resolver todos los problemas de esta clase, se resta de la edad del padre el producto de multiplicar la del hijo por el número que exprese las veces que la de aquél ha de ser mayor que la de éste y que el resto resultante se divide por dicho número de veces, disminuido en 1 unidad.

PROBLEMA 123.

Un sujeto tiene 40 años y un hijo suyo, 18. ¿Cuántos años deben transcurrir para que la edad del padre sea doble que la de su hijo?

Resoluciones.

1.ª—Este problema es un caso particular del problema general anterior. Aplicando, pues, la fórmula de este problema general, que es $x = \frac{N - nv}{v - 1}$, tendremos

$$x = \frac{40 - 2 \cdot 18}{2 - 1} = \frac{40 - 36}{1} = 4 \text{ años.}$$

Si los años que deben transcurir para cumplirse la condición del problema son 4, al cabo de ellos el padre tendrá $40 + 4 = 44$, y el hijo $18 + 4 = 22$.

Prescindamos del problema general.

2.ª—Sea x el número de años que deben transcurrir para que la edad del padre sea doble que la del hijo. El padre tendrá entonces $40 + x$ años, y el hijo $18 + x$ id.; y, como la edad de aquél ha de ser dupla de la de éste, la ecuación será

$$40 + x = (18 + x) \times 2.$$

Despejando á x en esta ecuación, resultarán sucesivamente las siguientes:

$$40 + x = 36 + 2x$$

$$x - 2x = 36 - 40,$$

$$-x = -4$$

y

$$x = 4$$

3.ª—La edad del padre, al cumplirse la condición del problema, ha de ser doble que la de su hijo y entonces, como ahora, ha de componerse de la edad del hijo, mas la diferencia entre la de éste y la de su padre, la cual diferencia es una cantidad constante, puesto que, por cada año que cumpla el padre, otro cumple también el hijo: luego en el caso presente la edad del hijo y la diferencia de edades son iguales entre sí (1), Hallando, pues, esta diferencia, que es 40 — 18 = 22, ella será la edad del hijo. Este tendrá, pues, 22 años al cumplirse la condición. Luego el padre tendrá entonces 22 × 2 = 44. Luego deben transcurrir 4 años para cumplirse el enunciado.

4.ª—Si duplicamos los 18 años, edad actual del hijo, resultarán 36. Si ésta fuese la edad del padre, el enunciado se cumpliría en la actualidad; mas, como la edad del padre es 40 años, excede á 36, duplo de la del hijo, en 4. Luego, si agregamos 4 años á la del padre y otros 4 á la del hijo, después del duplo 36, resultarán para el primero 8 y para

---

(1) Esto se demuestra fácilmente de un modo práctico. En efecto, sea p la edad del padre; h la del hijo y d la diferencia entre ambas. Según el enunciado, al cumplirse la condición que él establece, es

$$p = 2h,$$

ó bien

$$p = h + h.$$

Siempre es

$$p = h + d:$$

luego, comparando entre sí estas dos ùltimas ecuaciones, será

$$h + h = h + d;$$

y, suprimiendo h en los dos miembros de esta última ecuación, quedará

$$h = d.$$

el segundo la mitad, 4. Luego con esta agregación la edad total del padre, 44 años, resulta doble que la del hijo, 22. Restando, pues, de la edad del padre el duplo de la del hijo, el resto nos da los años que deben transcurrir.

Si dividiéramos la edad del padre por la del hijo, el residuo nos daría el mismo resultado.

Nota.—Si en este problema hubiésemos fijado, por ejemplo, en 24 años la edad del hijo, el resultado obtenido sería — 8. Este resultado negativo nos diría que el problema así propuesto era imposible: que la condición se había cumplido hacía 8 años; esto es, cuando el hijo tenía 16 y el padre 32. Para hacer posible el problema, bastaría modificar el enunciado diciendo, en vez de *cuántos años deben transcurir* &, *cuántos años han transcurrido desde que la edad del padre fué dupla de la del hijo.*

Antes de resolver un problema de esta clase puede saberse si es ó no posible. Al efecto, duplíquese la edad del hijo y, si el duplo es mayor que la edad del padre, el problema será imposible, ó el resultado que se obtenga será negativo; ó si no, réstese de la edad del padre la del hijo y, si el resto es menor que esta edad, quedará de manifiesto la imposibilidad del problema.

PROBLEMA 124

Un abuelo tiene 61 años y un nietecito suyo 6 ídem: ¿dentro de cuánto tiempo será la edad del abuelo décupla de la de su nieto?

Resoluciones.

1.ª—Este problema es un caso particular del problema general, núm. 122. Aplicando, pues, la fórmula de este problema general, que es $x = \frac{N - v n}{v - 1}$, tendremos $x = \frac{61 - 10 \cdot 6}{10 - 1} = \frac{61 - 60}{9} = \frac{1}{9}$ años = 1 mes y 10 días, tiempo que debe transcurrir.

Transcurrido este tiempo, el abuelo tendrá 61 años, 1 mes y 10 días, y el nieto 6 años, 1 mes y 10 días. Multiplicada esta 2.ª edad por 10, da la 1.ª

Prescindamos de la fórmula del problema general.

2.ª—Es la 2.ª del problema 123.

3.ª—Es la 3.ª de dicho problema 123, debiendo tenerse aquí en cuenta que hay que dividir por 10 — 1 = 9 la unidad que resulta de diferencia entre 61, edad del abuelo, y 60, décuplo de la del nieto. En este caso, al agregar á dicha unidad su novena parte, resultan $\frac{10}{9}$, y, como á la edad del nieto sólo se le agrega $\frac{1}{9}$, la 1.ª, ó del abuelo, es décupla de la 2.ª, ó del nieto.

4.ª—Es la 4.ª del citado problema 123. Aquí ha de tenerse presente que la diferencia entre las edades actuales del abuelo y del nieto, 61 — 6 = 55 años, tiene que contener y contiene 9 veces á la edad del nieto: por esto, al dividir 55 por 9, el cociente $\frac{55}{9} = 6 \frac{1}{9}$ años = 6 años, 1 mes y 10 dias será la edad del nieto al cumplirse la condición del problema.

PROBLEMA 125.

Cuando Manuel cumpla 80 años, tendrá doble edad que su hijo Luis, que tiene 22. ¿Qué edad cuenta hoy Manuel?

Resoluciones.

1.ª—Si, cuando Manuel cumpla 80 años, ha de tener doble edad que su hijo Luis, éste tendrá entonces 40 años: luego la diferencia de edades de padre é hijo será entonces 40 años; y como esta diferencia de edades es constantemente la misma 40 años será hoy como entonces esa diferencia; y, como la edad del padre se compone en todo tiempo de la edad del hijo mas dicha diferencia, dedúcese naturalmente que la edad actual de Manuel será 22 + 40 = 62 años.

2.ª—Si, cuando Manuel cumpla 80 años, ha de tener doble edad que su hijo Luis, éste tendrá entonces 40 años. Para que Luis, que tiene 22 años, llegue á cumplir 40, se necesita que transcurran 40 — 22 = 18 años: los mismos que deben transcurrir para que Manuel cumpla 80. Luego 80 — 18 = 62 son los años de edad que hoy tiene Manuel.

PROBLEMA 126.

Un individuo tiene cierto número de objetos en dos habitaciones: si de la 1.ª pasa n objetos á la 2.ª, en las dos habitaciones habrá el mismo número de ellos: mas, si los pasa de la 2.ª á la 1.ª, en ésta habrá doble que en la otra. ¿Cuántos objetos hay ahora en cada una de las dos habitaciones?

Resolución.

Sea P el número de objetos que hay en la 1.ª habitación y S el de los que hay en la 2.ª Pasando n objetos de la 1.ª á la 2.ª, en la 1.ª quedarán $P - n$ y en la 2.ª se reunirán $S + n$; y, como en este caso en las dos habitaciones hay igual número de objetos, será

$$P - n = S + n;$$

de donde

$$P = S + 2n. \qquad \text{(A)}$$

Si de la 2.ª habitación se pasan n objetos á la 1.ª, en aquella quedarán $S - n$ y en ésta se reunirán $P + n$; y, como en este caso el número de objetos de la 1.ª habitación es duplo del de la 2.ª, se tendrá

$$P + n = 2\ (S - n),$$

ó bien

$$P + n = 2S - 2n;$$

de donde

$$P = 2S - 2n - n;$$

ó bien

$$P = 2S - 3n \qquad \text{(B)}.$$

Comparando las ecuaciones (A) y (B), resultará esta otra

$$S + 2n = 2S - 3n;$$

y, despejando á S, resultarán sucesivamente las ecuaciones siguientes:

$$S - 2S = -3n - 2n$$

$$-S = -5n$$

y

$$S = 5n.$$

Lo que nos dice que el número de objetos de la 2.ª habitación, que es el menor, equivale á 5 veces el de los objetos que se pretende trasladar. Luego el número mayor. **P**, que es el de los de la 1.º habitación, será, según la ecuación 2.ª, $5n + 2n = 7n$; esto es, 7 veces el citado número de los objetos que han de ser trasladados.

Nota.—El valor de P puede hallarse también directamente despejando á S, para luego eliminarla, comparando sus valores, en las ecuaciones 1.ª y 4.ª, como antes se ha hecho con P.

PROBLEMA 127.

Un cosechero tiene vino en dos cubas, mayor y menor: si de la mayor se trasladan 20 cántaras á la me-

nor, las dos cubas contendrán el mismo número de cántaras, y, si de la menor son trasladadas á la mayor, ésta contendrá doble número de cántaras que la otra. ¿Cuántas cántaras hay ahora en cada cuba?

Resoluciones.

1.ª—Este problema es un caso particular del problema general anterior. Aplicando, pues, las fórmulas de este problema general, que son $C = 5\ n$ y $S = 7\ n$, y llamando C al vino de la cuba mayor y c al de la menor, se tendrá

$$C = 7 \times 20 = 140 \text{ cántaras}$$

y

$$c = 5 \times 20 = 100 \text{ ídem.}$$

Resulta, pues, que en la cuba mayor hay 140 cántaras y en la menor 100.

Prescindamos del problema general y resolvamos el particular propuesto.

2.ª—Sea C el número de cántaras de la cuba mayor y c el de la menor. Si de C pasamos 20 cántaras á c, C se convertirá en $C - 20$, y c en $c + 20$; y, como en este caso los dos números de cántaras son iguales,

será $$C - 20 = c + 20;$$

de donde $$C = c + 40.$$

Si de c se pasan á C 20 cántaras, c se convertirá en $c - 20$ y C en $C + 20$; y, como en este caso la 2.ª cantidad es dupla de la 1.ª, será

$$C + 20 = (c - 20) \times 2;$$

ó bien $$C + 20 = 2\ c - 40;$$

de donde $$C = 2\ c - 60.$$

Comparando ahora esta ecuación con la 2.ª, tendremos

$$c + 40 = 2\ c - 60,$$

y, despejando á c, resultarán sucesivamente estas ecuaciones

$$c - 2\,c = -\,100,$$
$$-\,c = -\,100$$
y $$c = 100.$$

Si la cuba menor contiene 100 cántaras, la mayor contendrá 100 + 40 = 140.

3.ª—Para que se cumpla la 1.ª condición del enunciado, es indispensable que el número mayor exceda al menor en 40 cántaras. Al pasar 20 del número menor al mayor, este nuevo número mayor excederá al nuevo número menor en otras 40 cántaras: luego el exceso total del 1.er número al 2.º será de 80 cántaras. Ahora, como el nuevo número mayor es igual á 2 veces el nuevo número menor y también es igual al nuevo número menor mas la diferencia 80, resulta que este nuevo número menor y esta diferencia 80 son iguales: luego, agregando á esta diferencia 80 cántaras las 20 deducidas del número menor primitivo, la suma 80 + 20 = 100 nos dará este primitivo número menor. Si el número menor es 100, el mayor será 100 + 40 = 140.

Nota 1.ª—Obsérvese que, si en el razonamiento anterior cambiamos las expresiones *40 cántaras*, *80 cántaras*, *100 cántaras* y *140 cántaras* por sus equivalentes *2 veces*, *4 veces*, *5 veces* y *7 veces* el número de las 20 cántaras que se trata de trasladar, resultará, en consonancia con las fórmulas del problema general anterior, que el número mayor se compone de 7 veces el indicado número de cántaras que han de trasladarse; y el menor, de 5 veces este mismo número.

Nota 2.ª—La razón de estas fórmulas, que son en esencia las mismas del problema general, se deduce ya de la siguiente consideración.

Cuando sólo se quiere trasladar 1 cántara (y lo mismo si se tratara de cualquiera otra clase de objetos), los números que satisfacen las condiciones del problema son el 7 y el 5: luego, cuando se quiera trasladar 2, 3, 4 & cántaras, los resultados correspondientes serán 7×2 y 5×2, 7×3 y 5×3, 7×4 y 5×4, &. &.

PROBLEMA 128.

Un galgo, divisado por una liebre, divisa á su vez á ésta cuando ésta se encuentra á 90 saltos suyos distante del galgo: el galgo, al perseguir á la liebre, da 25 saltos en cada 3 minutos, y la liebre, al huir del galgo, da 40 en el mismo tiempo; mas, como 5 saltos de la liebre equivalen solamente á 2 del galgo, el galgo acaba por alcanzar á la liebre. ¿Cuántos saltos dará la liebre hasta ser alcanzada por el galgo, cuántos dará el galgo hasta alcanzar á la liebre y cuánto tiempo transcurrirá hasta verificarse el alcance de la liebre por el galgo?

Resolución.

Sea x los saltos que da la liebre y z los que da el galgo. Según los datos, tendremos:

$$40 : 25 : : x : z = \frac{25\,X}{40}$$

Puesto que la distancia entre los puntos de partida de la liebre y del galgo se nos da en saltos de liebre, reduciremos á saltos de liebre los $\frac{25\,X}{40}$ saltos de galgo. En efecto, llamando y á los nuevos saltos, tendremos, según los datos:

$$2 : 5 : : \frac{25\text{ x}}{40} : y = \frac{25\text{ x} \times 5}{40 \times 2} = \frac{125\text{ x}}{80}$$

La distancia recorrida por la liebre en saltos suyos es x; la recorrida por el galgo, expresada en saltos de liebre, es $\frac{125\,X}{80}$; y, como el galgo recorre más que la liebre los 90 saltos de ésta que median entre los puntos de partida de ambos, es evidente que, agregando estos 90 saltos á los dados por la liebre, dichas dos distancias serán iguales. Se tendrá pues:

$$\frac{125 \text{ X}}{80} = x + 90;$$

ecuación de primer grado con una incógnita.

Quitando el dominador 80 del primer miembro de esta ecuación, será

$$125\ x = 80\ x + 7200.$$

Transponiendo el término 80 x del 2.° al 1.°, resultará

$$125\ x - 80\ x = 7200.$$

Haciendo en el primer miembro la reducción de los términos semejantes, se tendrá

$$45\ x = 7200;$$

de donde

$x = \frac{7200}{45} = 160$, saltos que da la liebre. Para determinar los que da el galgo, sustituiremos á x con su valor conocido 160 en el 4.° término $\frac{25 \text{ X}}{40}$ de la 1.ª proporción y tendremos

$$\frac{25 \times 160}{40} = \frac{4000}{40} = 100, \text{ saltos que da el galgo.}$$

Para la completa resolución del problema, réstanos determinar el tiempo que transcurrirá hasta el alcance de la liebre por el galgo. A este efecto observaremos que, según el enunciado, el galgo da 25 saltos en cada 3 minutos y la liebre 40 en el mismo tiempo. Tendremos, pues, cualquiera de estas dos proporciones

$$25 \text{ saltos} : 100 \text{ saltos} : : 3 \text{ minutos} : x \text{ minutos} = \frac{100 \times 3}{25} = 12 \text{ minutos.}$$

$$40 \text{ saltos} : 160 \text{ saltos} : : 3 \text{ minutos} : z \text{ minutos} = \frac{160 \times 3}{40} = 12 \text{ minutos.}$$

Resulta, pues, que á los 12 minutos de carrera la liebre es alcanzada por el galgo.

Nota 1.ª—Esta identidad de los 4.os términos de estas dos proporciones constituye una verdadera comprobación de la exactitud de los resultados del problema; y

Nota 2.ª—Si en vez de reducir á saltos de liebre los saltos dados por el galgo, hubiéramos preferido reducir á saltos de galgo los saltos dados por la liebre, habría habido necesidad de reducir también á saltos de galgo los 90 de liebre que mediaban entre los respectivos puntos de la partida de la liebre y el galgo.

PROBLEMA 129.

En un reloj de pared giran sobre el centro de la esfera el horario, el minutero y el segundero: dada la diferencia de velocidades de estas tres manecillas y partiendo las tres simultáneamente de las 12, ¿dónde y cuándo alcanzará al horario el minutero y al minutero y al horario el segundero?

Resolución.

Al señalar el horario una hora cualquiera de las 12 que la esfera contiene, el minutero está indefectiblemente sobre las 12: luego, mientras el horario recorre 1 vez la esfera, el minutero la ha recorrido 12 veces: luego la velocidad del minutero es 12 veces mayor que la del horario. A las 12 en punto el horario y el minutero coinciden en esta hora; mas, como la velocidad del minutero es 12 veces mayor que la del horario, cuando éste llega á la 1, ya aquél ha vuelto á colocarse sobre las 12. En esta primera vuelta, pues, el minutero ni alcanza ni puede alcanzar al horario, al cual deja atrás en el momento de partir de las 12. Alcánzale en las 11 vueltas siguientes. Cuando el horario llegue á las 2, el minutero volverá á señalar las 12: luego antes ha tenido que pasar por sobre el horario entre la 1 y las 2. Fijemos el punto de encuentro. Llamemos al efecto x á la parte de esfera recorrida por el horario desde la 1 hasta el punto donde le alcanzó el minutero. Mientras el horario ha recorrido este pequeño espacio, el minutero ha recorrido la distancia de las 12 á la 1, *distancia que tomaremos por unidad*, mas el espacio x recorrido por el horario. Ahora bien, como la velocidad del horario es 12 veces menor que la del minutero y se trata de un mismo tiempo, el espacio recocorrido por el horario tiene que ser 12 veces menor que el recorrido por el minutero. Luego la ecuación será

$$1 + x = 12\,x;$$

y, transponiendo á x del 1.^{er} miembro al 2.^{o}, se tendrá

$$1 = 11\,x;$$

de donde

$$x = \frac{1}{11}.$$

Resulta, pues, que la 1.^{a} vez que el minutero alcanza al horario, lo verifica en la $1\frac{1}{11}$ de las 12 divisiones horarias de la esfera; y, como el tiempo que el horario tarda en recorrer cada una de estas 12 divisiones es 1 hora, resulta también que el minutero le alcanza á la $1\frac{1}{11}$ horas de haber partido de las 12.

Discurriendo de la misma manera, se hallará que el minutero alcanza al horario, sucesivamente, lo mismo en espacio que en tiempo, en y á las $2\frac{2}{11}$, $3\frac{3}{11}$, $4\frac{4}{11}$,.......y $11\frac{11}{11}$, ó sea en y á las 12.

Pasemos á considerar el minutero y el segundero.

Cuando el minutero señala una cualquiera de las 60 divisiones minutarias de la esfera, el segundero se encuentra sobre las 12: luego, mientras el minutero recorre 1 vez la esfera (lo cual verifica en 1 hora), el segundero la recorre 60 veces: luego la velocidad del segundero es 60 veces mayor que la del minutero. A las 12 en punto el minutero y el segundero coinciden en esta hora; mas, como la velocidad del segundero es 60 veces mayor que la del minutero, cuando éste llega á la 1.ª línea divisoria minutaria, ya aquel ha vuelto á colocarse sobre las doce. En esta 1.ª vuelta del segundero, éste ni alcanza ni puede alcanzar al minutero, porque al partir de las 12, ya le deja atrás: le alcanza en las 59 vueltas siguientes. Cuando el minutero llega á la 2.ª de las 60 lineas divisorias minutarias, el segundero volverá á señalar las 12: luego antes ha tenido que pasar por sobre el minutero entre la 1.ª y la 2.ª de dichas lineas divisorias. Precisemos el punto de encuentro. Llamemos al efecto x al espacio recorrido por el minutero desde la 1.ª de las citadas líneas hasta el punto donde le alcanzó el segundero. Mientras el minutero ha recorrido este espacio, el segundero ha recorrido la 1.ª división minutaria, *que tomaremos por unidad*, mas el espacio x recorrido por el minutero. Ahora bien, como la velocidad del minutero es 60 veces menor que la del segundero y la han ejercitado el mismo tiempo, el espacio recorrido por aquél tiene que ser 60 veces menor que el recorrido por éste. Luego la ecuación será

$$1 + x = 60x;$$

y transponiendo á x del 1.er miembro al 2.º, se tendrá

$$1 = 59x;$$

de donde

$$x = \frac{1}{59}.$$

Resulta, pues, que la 1.ª vez que el segundero alcanza al minutero lo verifica en la $1\frac{1}{59}$ de las 60 divisiones minutarias de la esfera; y, como el tiempo que el minutero tarda en recorrer cada 1 de estas 60 divisiones es 1 minuto, resulta también que el segundero le alcanza al cabo de $1\frac{1}{59}$ minutos de haber partido de las 12.

Discurriendo de la misma manera se hallará que el segundero vuelve á dar alcance al minutero, sucesivamente, en espacio y en tiempo, en y á los $2\frac{2}{59}$ minutos, $3\frac{3}{59}$, $4\frac{4}{59}$, ...$59\frac{59}{59}$, ó sea á las 12.

Consideremos, por último, el horario y el segundero.

Como la velocidad del minutero es 12 veces mayor que la del horario y la del segundero es 60 veces mayor que la del minutero, síguese que la del segundero es $12 \times 60 = 720$ veces mayor que la del horario. Así es que, mientras el horario recorre 1 vez la esfera, *lo cual verifica en 12 horas*, el segundero la recorre 720 veces. Habido esto en cuenta é imaginando dividida la esfera en 720 partes iguales, cada una de las cuales representa 1 minuto, por ser éste el tiempo invertido por el horario en recorrerla, y aplicando el razonamiento empleado anteriormente, se hallará que el segundero alcanza al horario en cada vuelta de esfera de éste 719 veces: la 1.ª, en espacio, y tiempo, en y á $1\frac{1}{719}$ minutos; la 2.ª, á los $2\frac{2}{719}$; la 3.ª, á los $3\frac{3}{719}$,........la 60.ª, á los $60\frac{60}{719}$, ó sea á la $1\frac{60}{719}$ horas;...,....y la última, á los $719\frac{719}{719}$ minutos, ó bien á los 720 minutos, ó sea á las 12 horas.

PROBLEMA 130.

Hierón, Tirano de Siracusa (1) entregó á un platero 20 libras de oro para que le fabricase una corona que se proponía ofrecer á Júpiter Olímpico. Fabricóla de dicho peso el platero; mas el Tirano, sospechando adulteración, dió al famoso Arquímedes

---

(1) Antigua capital de la isla de Sicilia.

el entonces arduo cometido de analizarla sin destruirla. Arquímedes, después de discurrir mucho y de haber descubierto en un momento de inspiración el en útiles aplicaciones fecundo principio que en Física lleva su nombre, recurrió á los pesos específicos, hallando que el de la corona era 16, cuando, fabricada de oro puro, tenía que haber sido 19'64. La adulteración, pues, quedó manifiesta. Apoyado Arquímedes en sólidas razones, conjeturó que el metal aleado con el oro era la plata, cuyo peso específico es 10'50, y habiendo hecho bajo este supuesto los cálculos correspondientes, los resultados obtenidos demostraron lo fundado de sus conjeturas: á mayor abundamiento, la exactitud de estos resultados fué luégo plenamente confirmada por la explícita declaración del platero. En vista de los anteriores datos, dígasenos: ¿cuántas libras de oro y cuántas de plata contenía la célebre falsificada corona de Hierón?

Resoluciones.

1.ª—Sean x las libras de oro y z las de plata que la corona contenía. Tendremos

$$x + z = 20 \qquad (A)$$

Como la Física enseña, el cociente de dividir el peso relativo de un cuerpo por el peso específico del mismo da el volumen de este cuerpo: luego el volumen de la corona será $\frac{20}{16}$ $= 1'25$; el del oro que ésta contenía, $\frac{x}{19'64}$, y el de la plata que de ella formaba parte, $\frac{z}{10'50}$. Y como el volumen del oro y el de la plata constituían el de la corona, será

$$\frac{x}{19'64} + \frac{z}{10'50} = 1'25. \qquad (B)$$

Las ecuaciones (A) y (B) forman un sistema de dos ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas. Resolvamos este sistema. Para ello eliminaremos la incógnita x despejándola en la ecuación (A), que quedará convertida en $x = 20 - z$ y sustituyendo su valor en la ecuación (B), la cual se transformará en

$$\frac{20 - z}{19{`}64} + \frac{z}{10{`}50} = 1{`}25.$$

Quitando en esta nueva ecuación el denominador 19‘64, resultará esta otra

$$20 - z + \frac{19{`}64\,z}{10{`}50} = 1{`}25 + 19{`}64;$$

ó bien,

$$20 - z + \frac{19{`}64\,z}{10{`}50} = 24{`}55$$

Haciendo ahora desaparecer en esta última ecuación el denominador 10‘50 será

$$20 + 10{`}50 - 10{`}50\,z + 19{`}64\,z = 24{`}55 + 10{`}50;$$

ó bien

$$210 - 10{`}50\,z + 19{`}64\,z = 257{`}775;$$

y, haciendo la transposición del término 210 y la reducción de los semejantes 10‘50 z y 19‘64 z, se tendrá

$$9{`}14\,z = 257{`}775 - 210;$$

ó bien

$$9{`}14\,z = 47{`}775;$$

de donde

$$z = \frac{47{`}775}{9{`}14} = 5{`}227.$$

Si, como se ve, las libras de plata son 5‘227, evidentemente las de oro serán $20 - 5{`}227 = 14{`}773$

2.ª—Sean x y z respectivamente las libras de oro y plata que constituían la corona. Tendremos

$$x + z = 20. \text{ (A)}$$

La Física enseña:

1.º Que todo sólido sumergido en un líquido desaloja un volumen de éste igual al del sólido sumergido y pierde de su peso lo que pesa el volumen del líquido desalojado *(Principio de Arquímedes)*; y

2.º Que el peso específico de un cuerpo es la relación que hay entre el peso relativo de un volumen cualquiera de la materia de este cuerpo y el de otro volumen igual de agua destilada á la temperatura de cuatro grados centígrados.

Ahora bien; si, conforme á este 2.º principio *(llamèmosle asi)*, de dividir el peso relativo de un cuerpo por el de un volumen igual de agua destilada y á 4 grados centígrados resulta el peso específico de dicho cuerpo, de dividirle por el peso específico tiene que resultar el peso relativo del volumen igual de dicha agua (1); y, como, según el primer principio, lo que pesa este volumen es cabalmente lo que pierde de su peso el sólido sumergido en ella, se tendrá necesariamente que las tres expresiones $\frac{20}{16} = 1'25$, $\frac{20}{19'64} = 1'018$ y $\frac{20}{10'50} = 1'905$ determinarán respectivamente lo que perdió de su peso la corona por su inmersión en el agua y lo que hubiera perdido por igual concepto si hubiese sido de oro puro ó de plata pura. Ahora, si las 20 libras de oro pierden de su peso 1'018 y las 20 de plata 1'905, una de las primeras perderá $\frac{1'018}{20} = 0'051$ y una de las segundas $\frac{1'905}{20} = 0'095$: luego las x libras de oro perderán 0'051 x, y las z de plata 0'095 z; y, como lo que pierden de su peso el oro y la plata constituye la pérdida de peso de la corona, será

$$0'051\,x + 0'095\,z = 1'25. \qquad \text{(B)}$$

Tenemos, como antes, que las ecuaciones (A) y (B) constituyen un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas. Para resolverle despejaremos á x en la primera ecuación, que se convertirá en $x = 20 - z$, y sustituiremos su valor en la 2.ª, la cual tomará esta forma

$$0'051 \times (20 - z) + 0'095\,z = 1'25.$$

---

(1) Siempre que un producto de dos factores se divide por uno de ellos, resulta y no puede menos de resultar de cociente el otro factor.

Quitando el paréntesis, será

$$0'051 \times 20 - 0'051\,z + 0'095\,z = 1'25;$$

ó bien,

$$1'020 - 0'051\,z + 0'095\,z = 1'25;$$

y, haciendo la transposición del primer término y la reducción de los dos siguientes, que son semejantes, tendremos

$$0{,}044\,z = 1'25 - 1'020;$$

ó bien,

$$0'044\,z = 0'230;$$

de donde

$$z = \frac{0'230}{0'044} = \frac{230}{44} = 5'227 \text{ libras de plata:}$$

luego las de oro son 20 — 5'227 = 14'773; los cuales resultados son iguales á los obtenidos anteriormente.

La comprobación de estos valores de las incógnitas puede hacerse, ahora como antes, sustituyendo á éstas con aquellos en una ecuación cualquiera de las del problema, la cual, hechas las operaciones indicadas, quedará convertida en identidad; que es lo que prueba que dichos valores, son los verdaderos.

Nota.—Los tres términos de cada una de las dos ecuaciones (B) $\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{19'64} + \frac{z}{10'50} = 1'25 \\ 0'051\,x + 0'095\,z = 1'25 \end{array} \right.$ representan simultánea y correlativamente el volumen y la pérdida del peso del oro, de la plata y de la corona. Así que, en la resolución primera del problema pudimos habernos referido á las pérdidas de peso, en vez de hacerlo á los volúmenes; y en la segunda, á los volúmenes, en lugar de haber tomado en consideración las pérdidas de peso.

3.ª—Como se ha visto por la resolución anterior, cada libra de oro pierde de su peso por su inmersión en el agua destilada 0'051, y cada libra de plata 0'095. Hay, entre estas dos pérdidas 0'095 — 0'051 = 0'044 de diferencia, por defecto, respecto del oro, y por exceso, respecto de la plata. Ahora bien, si suponemos que las 20 libras, peso de la corona, fuesen de oro, al calcular su pérdida sucederá que cada libra de plata convertida en libra de oro por la suposición producirá en la pérdida de peso de la corona 0'044 de menos. Luego cada 0'044 de menos representan 1 libra de plata. Como cada libra de oro pierde 0'051, las 20 libras de la corona, que suponemos todas de oro, perderán 0'051 × 20 = 1,020; y, como, según los datos, la corona perdió 1'250, entre estas dos pérdidas hay una diferencia, por defecto, de 1'250 — 1'020 = 0'230. Luego, por lo antes dicho, 0'230 : 0'044 = 5'227 serán las libras de plata que la corona contenía. Luego las de oro serán 20 — 5'227 = 14'773.

4.ª—Supongamos ahora que las 20 libras, peso de la corona, sean de plata. Por lo dicho en el razonamiento anterior, sucederá que al calcular la pérdida de esas 20 libras de plata, cada libra de oro, convertida por la suposición en libra de plata, producirá en dicha pérdida 0'044 de aumento. Luego cada 0'044 que resulten de aumento representarán 1 libra de oro. La cuestión, pues, está reducida á determinar el número de milésimas de pérdida que resultan de aumento y á dividirle por 0'044: el cociente expresará las libras de oro que la corona contenía. Como cada libra de plata pierde 0'095, las 20 libras perderán 0'095 × 20 = 1'900; y, como, según los datos, la corona solamente perdió 1'250, hay entre estas dos pérdidas una diferencia, por exceso ó aumento, de 1'900 — 1'250 = 0'650. Luego, por lo dicho antes, 0'650 : 0'044 = 14'773 serán las libras de oro que la corona contenía. Luego las de plata serán 20 — 14'773 = 5'227.

5.ª—Las 20 libras de peso de la corona, al ser ésta sumergida en el agua destilada, perdieron *(resolución 2.ª)* 1'250 libras.

Si suponemos que toda esta pérdida corresponda al oro, al calcular el número de libras de oro que representa, resultará que cada 0'095 de plata, consideradas de oro, representarán 1'863 libras de oro, produciendo, por consiguiente, un aumento de 0'863. Luego cada 0·863 de aumento representan 1 iibra de plata, La cuestión, pues, está reducida á determinar el número de milésimas que resultan de aumento y á dividirle por 0'863. Como cada 0'051 representan 1 libra de oro, las 1'250 que la corona perdió representarán 1'250 : 0'051 = 24'5098 libras; y, como la corona solo pesaba 20, resulta un exceso de 24'5098 — 20 = 4·5098. Luego, por lo últimamente dicho, las libras de plata serán 4'5098 : 0'863 = 5'226. Luego las de oro serán 20 — 5'226 = 14'774.

6.ª--Si suponemos que las 1'250 libras que la corona perdió correspondiesen todas á la plata (lo que equivale á suponer que la corona fuese de plata exclusivamente), al calcular las libras de plata que dichas 1'250 libras de pérdida representan, resultará que cada 0'051 de oro, consideradas de plata, representarán 0'537 libras de plata, produciendo, por consiguiente, una diminución ó falta de 1 — 0'537 = 0'463. Luego cada 0'463 de falta, ó diminución ó defecto representan 1 libra de oro. La cuestión, pues, está reducida á determinar el número de milésimas que resultan de menos y á dividirle por 0'463. Como cada 0'095 representan 1 libra de plata, las 1'250 que la corona perdió representarán 1'250 : 0'095 = 13'1578 libras; y, como la corona al aire libre pesaba 20, hay un defecto de 20 — 13'1578 = 6'8422 libras. Luego, por lo dicho antes, las libras de oro serán 6'8422 : 0'463 = 14'777. Luego las de plata habrán de ser 20 — 14'777 = 5'223. (1).

---

(1) La diferencia que en las dos últimas soluciones se observa en la cifra de las milésimas, comparada con la misma cifra de las cuatro soluciones primeras, proviene de las divisiones inexactas.

PROBLEMA 131.

Trátase de construir un salón de escuela de forma rectangular para 75 niños, á cada uno de los cuales han de destinarse, conforme á los últimos planos oficiales, una extensión superficial de 1 metro y 25 decímetros cuadrados y una capacidad de 5 metros cúbicos: se quiere que lo largo y lo ancho del salón estén entre sí en la razón de 5 es á 3. ¿Cuál habrá de ser el valor numérico de cada una de las tres dimensiones del citado salón?

Resoluciones.

1.ª—Si cada uno de los 75 niños ha de ocupar una extensión superficial de 1'25 metros cuadrados, los 75 niños la ocuparán de 1'25 × 75 = 93'75 íd. íd., que es el área del salón; y, si á cada uno de los 75 niños se le ha de destinar una capacidad de 5 metros cúbicos, la capacidad total del salón será 5 × 75 = 375 metros cúbicos; y, como por ser el salón un paralelepípedo rectángulo esta capacidad resulta de multiplicar por la altura el área de la base, que es el área del pavimento del salón, si llamamos a á la altura, será

$$a = \frac{375}{93'75} = 4 \text{ metros.}$$

Para determinar ahora lo largo y lo ancho del salón, si llamamos x á la 1.ª de estas dos dimensiones y z á la 2.ª, tendremos

$$x : z :: 5 : 3;$$

de donde

$$x = \frac{5z}{3}. \qquad \text{(A)}$$

También tenemos que es

$$x z = 93'75;$$

de donde

$$x = \frac{93'75}{z}.$$

Luego, comparando con esta ecuación la ecuación (A), tendremos

$$\frac{5z}{3} = \frac{93'75}{z};$$

y, quitando denominadores, será

$$5z^2 = 281'25;$$

y, dividiendo toda la ecuación por 5, se tendrá

$$z^2 = 56'25;$$

de donde

$$z = \sqrt{56'25} = 7'5 \text{ metros};$$

El valor de x se hallará sustituyendo á z con el suyo, por ejemplo, en la ecuación (A). Hecha la sustitución, resulta.

$$x = \frac{5 \cdot 7'5}{3} = 12'5 \text{ metros}.$$

Quedan, pues, determinadas las tres dimensiones del salón.

2.ª—Si á cada niño han de destinarse 1'25 metros cuadrados de superficie y 5 metros cúbicos de capacidad, como éstos resultan de multiplicar aquéllos por la altura, esta altura será 5 : 1'25 = 4 metros.

Para determinar ahora lo largo y lo ancho del salón, cuya área hemos averiguado ya que es 93'75 metros cuadrados, observaremos que, si imaginamos construido dicho salón, divididas su longitud en 5 partes iguales y su latitud en 3, también iguales entre sí, y que serán iguales á las de la longitud, y levantadas en estos puntos de división perpendiculares á la longitud y latitud del salón, respectivamente, el rectángulo que constituye el pavimento de éste quedará dividido en 5 × 3 = 15 cuadrados iguales, cuya área, por lo tanto, será $\frac{1}{15}$ de la del rectángulo. Será, pues, 93'75 : 15

= 6'25 metros cuadrados. Luego el lado de este cuadrado será la $\sqrt{6'25} = 2'5$ metros. Si éste es el valor del lado del cuadrado, el de la longitud del salón será $2'5 \times 5 = 12'5$, y el de la latitud, $2'5 \times 3 = 7'5$.

PROBLEMA 132.

Un labrador compró cierto número de ovejas, que, destinadas á la cría, logró quintuplicar en pocos años. Al cabo de éstos vendió todo su rebaño á tantas, mas 8, pesetas cabeza, cuantas eran las ovejas que anteriormente había comprado, habiendo ascendido el importe de la venta á un número de pesetas expresado por el céntuplo del número de ovejas compradas. ¿Cuál fué este número de ovejas, el de las vendidas, el precio de la venta y el importe total de ésta?

Resolución.

Sea x el número de ovejas compradas por el labrador: el de las vendidas después por éste será 5 x. Como el precio de la venta fué $x + 8$ pesetas, el importe de ésta tiene que ser $5x(x + 8)$; y, como se nos dice que este importe es igual á $100x$, la ecuación será

$$5x(x + 8) = 100x.$$

Resolviendo el paréntesis, se tendrá

$$5x^2 + 40x = 100x;$$

y, pasando el 2.º miembro al 1.º, resultará

$$5x^2 + 40x - 100x = 0,$$

ó bien, simplificando,

$$5x^2 - 60x = 0;$$

y, dividiendo toda la ecuación por 5, será

$$x^2 - 12x = 0,$$

ecuación de 2.º grado, incompleta por faltarle el 3.er término.

La incógnita x tiene en estas ecuaciones dos valores: el uno es cero; y el otro, el coeficiente del 2.º termino, con el signo cambiado (1). Será, pues, en este caso el número 12. DOCE, pues, es el número de ovejas que compró el labrador: luego el de las vendidas será $12 \times 5 = 60$; el precio de venta, $12 + 8 = 20$ pesetas; y el importe total de ésta, ó $60 \times 20 = 1200$ pesetas, ó $12 \times 100 = 1200$ íd.

---

(1) Supongamos que no sabemos que sea ésta la solución de toda ecuación incompleta de 2.º grado de la clase de la que venimos considerando y que, por lo mismo, necesitamos deducirla. A este efecto diremos: la ecuación $x^2 - 12x = 0$ puede escribirse así:

$$x \times x - 12x = 0,$$

ó, separando el factor común x,

$$x(x - 12) = 0.$$

Ahora bien, para que el producto indicado en el primer miembro de esta ecuación sea *cero*, como dice el 2.º miembro, es indispensable que sea el factor $x = 0$, ó que lo sea el otro factor $x - 12$. Haciendo $x - 12 = 0$, resulta $x = 12$.

Los dos valores, pues, de x, cero y 12, satisfacen: luego los dos son verdaderos: luego es cierta la proposición general que ha motivado esta cita.

PROBLEMA 133.

Varios amigos ajustaron en 540 reales un coche que los condujese de Palencia á Carrión de los Condes y luégo de Carrión de los Condes á Palencia; y, por no haber podido 3 de ellos realizar el viaje proyectado, cada uno de los que lo llevaron á cabo tuvo que pagar 15 reales más que los que hubiera pagado en otro caso. ¿Cuántos eran los amigos que hicieron el viaje y qué cuota satisfizo cada uno de ellos?

Resolución.

Sea x los amigos que ajustaron el coche: los que realizaron la excursión serán x — 3. Cada uno de los 1.os, si todos hubieran hecho el viaje, habría pagado $\frac{540}{x}$ reales; y cada uno de los 2.os pagó $\frac{540}{x-3}$; y, como, según los datos, cada uno de éstos pagó 15 reales más que los que hubiera pagado si todos aquéllos hubiesen hecho el viaje, la ecuación será

$$\frac{540}{x-3} - \frac{540}{x} = 15.$$

Quitando el denominador x — 3, se tendrá

$$540 - \frac{540 \cdot (x-3)}{x} = 15 \times (x-3);$$

y, quitando el denominador x, resultará

$$540\,x - 540 \times (x-3) = 15\,x \times (x-3);$$

y, suprimiendo paréntesis, tendremos

$$540\,x - 540\,x + 1620 = 15\,x^2 - 45\,x$$

Los dos primeros términos del 1.er miembro se destruyen. Pasando el 3.o al 2.o miembro, será

$$0 = 15\,x^2 - 45\,x - 1620;$$

ó bien

$$15x^2 - 45x - 1620 = 0;$$

y, dividiendo toda la ecuación por 15, coeficiente del 1.^{er} término, se tendrá

$$x^2 - 3x - 108 = 0;$$

ecuación completa de 2.° grado, ya preparada. Aplicando la fórmula correspondiente *(problema 32)*, se obtendrá en definitiva

$$x = {}^3/_2 + 10\ {}^1/_2 = 12$$

y

$$x = {}^3/_2 - 10\ {}^1/_2 = -9.$$

El valor positivo, 12, expresa los amigos que ajustaron el coche; y el valor negativo, — 9, tomado positivamente, representa los amigos que realizaron el viaje. Hecha la comprobación, se verá que cada uno de los 1.^{os} hubiese pagado 45 reales y que cada uno de los 2.^{os} abonó 60; esto es, 15 reales más.

PROBLEMA 134.

Descomponer el número 84 en dos sumandos tales, que, multiplicados entre sí, den 1088 de producto.

Resolución.

Este problema es, bajo otra forma, el problema número 32. Resuelto como aquél, la solución será

M, sumando mayor, = 68

y *m*, ídem menor, = 16.

Nota.—Para que un problema de esta clase sea posible, es indispensable que el producto de los dos sumandos ó partes en que se divide el número propuesto no sea mayor que el cuadrado de la mitad de este número. En otro caso, los valores de las incógnitas resultarán cantidades imaginarias, siendo, por tanto, imposible el problema. Demostrémoslo.

Sea s el número de que se trata, x y z las dos partes en que se le divide y cuyo valor queremos determinar y p el producto de estas dos partes. Tendremos

$$x + z = s$$

y

$$x\,z = p.$$

Despejando á x en la 1.ª ecuación y sustituyendo su valor en la 2.ª se tendrá

$$(s - z)\,z = p$$

y de aquí

$$sz - z^2 = p,$$

$$z^2 - sz = -p$$

y

$$z^2 - sz + p = 0;$$

de donde *(problema 32, fórmula)*

$$z = \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}$$

y

$$z = \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}.$$

Si en cualquiera de estas dos fórmulas fuese p mayor que el quebrado $\frac{s^2}{4}$, que evidentemente es el cuadrado de $\frac{s}{2}$, el resto $\frac{s^2}{4} - p$ sería cantidad negativa y por tanto la $\sqrt{\frac{s^2}{4} - p}$ sería cantidad imaginaria, que es lo que pretendíamos demostrar.

Si p fuese igual al quebrado $\frac{s^2}{4}$, entonces el resto $\frac{s^2}{4} - p$ sería cero, y la $\sqrt{\frac{s^2}{4} - p}$, como raíz cuadrada de cero, sería también cero. En este caso sería $z = \frac{s}{2}$ y, por consiguiente, lo sería x también. Esto nos dice que *el mayor producto que se puede formar con dos partes de un número dado es el producto de sus dos mitades ó el cuadrado de su mitad.* Esta verdad puede demostrarse también directa y sencillamente de la siguiente manera:

Sea s el número en cuestión y d la diferencia de las dos partes en que se le quiere dividir. Según el problema 31, la parte mayor será

$$\frac{s}{2}+\frac{d}{2}$$

y la parte menor

$$\frac{s}{2}-\frac{d}{2};$$

por consiguiente, el producto de estas dos partes *(problema 69, cita 1.ª)* será

$$\left(\frac{s}{2}+\frac{d}{2}\right)\times\left(\frac{s}{2}-\frac{d}{2}\right)=\frac{s^2-d^2}{4}$$

Si d es igual á cero, los dos paréntesis de esta ecuación, *que representan las dos partes del número dado* s, se reducen á $\frac{s}{2}$; esto es, á la mitad de dicho número; y el 2.º miembro de la ecuación se convierte en $\frac{s^2}{4}$, que es el producto de dichas dos mitades ó el cuadrado de cualquiera de ellas.

Si el valor de la diferencia d es superior á cero, la 1.ª de las dos mencionadas partes aumenta y la 2.ª disminuye, disminuyendo también el producto. Queda, pues, demostrado lo que nos propusimos.

PROBLEMA 135.

Un arriero conducía 150 arrobas de vino con su recua de mulos, y, habiendo comprado en el camino 2 mulos más, distribuyó entre todos ellos, á partes iguales, las 150 arrobas; por cuya razón se disminuyó en 2 $\frac{1}{2}$ la carga de cada uno de los primeros mulos. ¿Cuántos eran éstos?

Resolución.

Sea x el número de los primeros mulos: el de los primeros y segundos será x + 2. La primera carga de cada mulo es $\frac{150}{x}$ arrobas; y la segunda, $\frac{150}{x+2}$; y, como la 1ª. excede á la 2.ª en 2 $\frac{1}{2}$ = 2'5 arrobas, la ecuación será

$$\frac{150}{x} - \frac{150}{x+2} = 2'5$$

Quitando el denominador x se tendrá

$$150 - \frac{150\,x}{x+2} = 2'5\,x.$$

Suprimiendo ahora el denominador x + 2, resultará

$$(x + 2) \times 150 - 150x = (x + 2) \times 2'5\,x;$$

y, resolviendo los paréntesis, será

$$150\,x + 300 - 150\,x = 2'5\,x^2 + 5\,x$$

Los términos 1.° y 3.° del 1.er miembro se destruyen mutuamente. Queda, pues,

$$300 = 2'5\,x^2 + 5\,x;$$

y, pasando el 1.er miembro al 2.°, se tendrá

$$0 = 2'5\,x^2 + 5\,x - 300;$$

ó bien

$$2'5\,x^2 + 5\,x - 300 = 0;$$

y, dividiendo toda la ecuación por 2'5, resultará esta otra

$$x^2 + 2x - 120 = 0;$$

ecuación completa de 2.º grado en la forma general. Resuelta como la del problema 32, se tendrá en definitiva

$$x = -1 + 11 = 10$$

y

$$x = -1 - 11 = -12.$$

El valor positivo, 10, expresa el número de los primeros mulos, y el negativo, — 12, tomado positivamente, el de los primeros, mas los 2 últimamente comprados.

Comprobación:

150 arr. : 10 mulos = 15 arrobas
150 » : 12 » = 12'5 »

Diferencia. . . 2'5 »

PROBLEMA 136.

Con el importe de un hatajo de carneros, vendidos á un número de pesetas igual á la mitad del número de carneros del hatajo, compró un ganadero, á 6 pesetas una, un número de corderas superior en 8 al triplo del número de dichos carneros, y áun le sobraron tantos reales cuantas eran las corderas compradas. ¿Cuántos fueron los carneros vendidos, cuántas las corderas compradas y cuál el importe de unos y de otras?

Resolución.

Sea x el número de carneros vendidos: su precio será $\frac{x}{2}$ pesetas y su importe $\frac{x}{2} \times x = \frac{x^2}{2}$ íd. El número de corderas compradas será $3x + 8$ y su importe $(3x + 8) \times 6$. El importe de las corderas es también el mismo de los carneros, disminuido en la cantidad sobrante de la compra, que es $(3x + 8)$ reales $= \frac{3x + 8}{4}$ pesetas. Luego la ecuación será

$$(3x + 8) \times 6 = \frac{x^2}{2} - \frac{3x + 8}{4}$$

Resolviendo el paréntesis, se tendrá

$$18x + 48 = \frac{x^2}{2} - \frac{3x + 8}{4};$$

y, quitando denominadores haciendo uso del mínimo múltiplo, será

$$72x + 192 = 2x^2 - (3x + 8);$$

ó bien, efectuando la resta indicada en el 2.º miembro,

$$72x + 192 = 2x^2 - 3x - 8;$$

y, transponiendo términos y reduciendo los semejantes, resultará

$$2x^2 - 75x - 200 = 0;$$

y, dividiendo toda la ecuación por 2, se convertirá en esta otra

$$x^2 - 37'5 - 100 = 0;$$

ecuación completa de 2.º grado, ya preparada. Aplicando la fórmula del problema 32, se obtendrá

$$x = 18'75 + 21'25 = 40$$

y

$$x = 18'75 - 21'25 = - 2'50$$

Resulta, pues, que los carneros vendidos fueron 40. Luego su precio será 40 : 2 = 20 pesetas y su importe 40 × 20 = 800 íd. El número de corderas compradas será 40 × 3 + 8 = 128; y, como su precio es 6 pesetas, su importe habrá de ser 6 × 128 = 768 pesetas. Luego el dinero sobrante de la compra será 800 — 768 = 32 pesetas, equivalentes á 32 × 4 = 128 reales, número igual al de las corderas compradas.

PROBLEMA 137.

Un comerciante vendió en 84 duros una partida de lienzo: ganó en la venta un tanto por ciento expresado por $^2/_7$ de los duros que el lienzo le había costado. ¿Cuál fué el coste, cuál la ganancia y cuál el tanto por ciento?

Resolución.

Sea x el coste del lienzo y *g* la ganancia. Según el enunciado, tendremos

$$x + g = 84$$

y

$$100 : {}^2/_7\, x :: x : g.$$

De la ecuación resulta

$$g = 84 - x$$

y de la proporción

$$g = \frac{2\,x^2}{7 \times 100} = \frac{2\,x^2}{700}.$$

Luego

$$\frac{2\,x^2}{700} = 84 - x.$$

Quitando el denominador, se tendrá

$$2\,x^2 = 58800 - 700\,x;$$

y, dividiendo toda la ecuación por 2, coeficiente del 1.^{er} término, resultará

$$x^2 = 29400 - 350\,x;$$

y, pasando todo el 2.° miembro al 1.°, será

$$x^2 + 350\,x - 29400 = 0;$$

ecuación completa de 2.° grado, sin coeficiente en el 1.^{er} término. Así preparada la ecuación, la incógnita *(problema 32, fórmula)* será en definitiva

$$x = \begin{cases} -175 + 245 = 70 \\ -175 - 245 = -420. \end{cases}$$

Como el valor negativo de x no tiene en este caso razón de ser, resulta que el coste de la partida de lienzo fué 70 duros. Luego la ganancia consistió en 84 — 70 = 14 duros, siendo el tanto por ciento $70 \times \frac{2}{7} = \frac{140}{7} = 20$.

PROBLEMA 138.

Dos cuadrillas de braceros tardan en cavar juntas una viña 6 días, y la 1.ª de ellas emplearía en cavarla sola 3 días más que la 2.ª ¿En cuánto tiempo la cavaría cada una de las dos cuadrillas?

Resolución.

Sean x y z los días que respectivamente tardaría cada una de las dos cuadrillas en cavar la viña. Si la 1.ª cuadrilla tarda x días en llevar á cabo esta operación y la segunda tarda z días, en los 6 días que tardan en realizarla juntas, la 1.ª cavará una parte de la viña expresada por el quebrado $\frac{6}{x}$ y la 2.ª cavará otra parte, que será $\frac{6}{z}$; y, como la suma de las partes es igual al todo, que aquí es la unidad viña, será

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{z} = 1.$$

Ahora, como la 1.ª cuadrilla tarda en cavar la viña 3 días más que la 2.ª, tendremos

$$x = z + 3. \qquad (A)$$

Sustituyendo en la 1.ª de estas dos ecuaciones el valor que tiene x en la 2.ª, resultará esta 3.ª

$$\frac{6}{z+3} + \frac{6}{z} = 1.$$

Quitando el denominador $z + 3$, será

$$6 + \frac{6z + 18}{z} = z + 3;$$

y, suprimiendo el denominador z, se tendrá

$$6z + 6z + 18 = z^2 + 3z;$$

y, transponiendo y reduciendo, será

$$z^2 - 9z - 18 = 0,$$

ecuación completa de 2.º grado, ya preparada. Aplicando la fórmula del problema 32, se tendrá en definitiva

$$z = 4'5 + 6'18 = 10'68$$

y

$$z = 4'5 - 6'18 = -1'68$$

Sustituyendo ahora sucesivamente estos valores de z en la ecuación (A), que es la más sencilla, tendremos

$$x = 10'68 + 3 = 13'68$$

y

$$x = -1'68 + 3 = 1'32.$$

Tenemos, pues, las dos soluciones siguientes:

$$1.^{\text{a}} \begin{cases} x = 13'68 \\ z = 10'68 \end{cases}$$

y

$$2.^{\text{a}} \begin{cases} x = 1'32 \\ z = -1'68. \end{cases}$$

De estas dos soluciones la 1.ª es la que satisface y nos dice que la 1.ª cuadrilla cavaría la viña en 13'68 días y la 2.ª en 10'68 ídem.

PROBLEMA 139.

Si dos cuadrillas de braceros cavan juntas una viña, tardan en cavarla 5 días; y, si la cavan cavando primero la 1.ª cuadrilla media viña y á continuación la 2.ª cuadrilla la otra media, tardan entre las dos 12 días. ¿Cuántos empleará en cavar toda la viña cada una de las dos cuadrillas?

Otrosí. Y, si las dos cuadrillas empiezan á cavar y continúan cavando simultáneamente cada una su media viña, ¿cuánto tiempo antes que la otra terminará su labor una de ellas?

Resolución,

1.ª PARTE.—Sean x y z los días que respectivamente empleará cada cuadrilla de braceros en cavar toda la viña. Si, como lo suponemos, la 1.ª cuadrilla tarda x días en cavar toda la viña y la 2.ª tarda z días, es evidente que en cavar media viña la 1.ª cuadrilla tardará $\frac{x}{2}$, y la 2.ª, $\frac{z}{2}$ días; y, como lo que en esta operación tarda la 1.ª cuadrilla, mas lo que tarda la 2.ª son 12 días, la 1.ª ecuación será

$$\frac{x}{2} + \frac{z}{2} = 12.$$

Si la 1.ª cuadrilla cava toda la viña en x días y la 2.ª en z, en los 5 días que tardan en cavarla juntas, aquélla cavará una parte expresada por $\frac{5}{x}$, y ésta cavará otra, que será $\frac{5}{z}$; y, como la suma de las partes es igual al todo, que aquí es la unidad viña, tendremos

$$\frac{5}{x} + \frac{5}{z} = 1.$$

Quitando los denominadores en las dos ecuaciones, resultarán estas otras dos

$$x + z = 24 \qquad (A)$$

y
$$5x + 5z = xz,$$

ó bien

$$x + z = 24$$

y
$$5 \times (x + z) = xz$$

y, como, según la 1.ª de estas dos ecuaciones, el valor de $x + z$ es 24, sustituyendo este valor en el 1.^er^ miembro de la 2.ª y efectuando su multiplicación por 5, se tendrá

$$120 = xz$$

ó
$$xz = 120$$

Por manera que tenemos las dos ecuaciones

$$x + z = 24$$

y
$$xz = 120,$$

las cuales nos dan en 24 la suma de las dos incógnitas x y z y en 120 el producto de las mismas. Estamos, pues, en pleno problema 32. Aplicando cualquiera de los razonamientos empleados en él, tendremos en definitiva

$$z = 12 + \text{4‘9} = \text{16‘9}$$

y
$$z = 12 - 4{,}9 = \text{7‘1}.$$

Sustituyendo ahora sucesivamente estos valores de z en la ecuación (A), que es la más sencilla, tendremos

$$x = 24 - \text{16‘9} = \text{7‘1}$$

y
$$x = 24 - \text{7‘1} = \text{16‘9}.$$

Tenemos, pues, dos soluciones del problema, que son

$$1.^a \begin{cases} x = \text{7‘1} \\ z = \text{16‘9} \end{cases}$$

y
$$2.^a \begin{cases} x = \text{16‘9} \\ z = \text{7‘1}: \end{cases}$$

las dos soluciones nos dicen que una, *cualquiera*, de las dos cuadrillas tardará 7‘1 días en cavar la viña y la otra 16‘9 días.

2.ª PARTE.—Si una de las dos cuadrillas tarda en cavar la viña 16‘9 días y la otra 7‘1, en cavar media viña tardarán respectivamente 8‘45 y 3‘55: luego una de ellas termina la cava de su media viña 8‘45 — 3‘55 = 4‘9 días antes que la otra.

PROBLEMA 140.

Hallar dos números cuya diferencia sea igual á su producto y también á la diferencia de sus cuadrados.

Resolución.

Sean x y z los dos números que se piden. Tendremos conforme á los datos,

$$x - z = xz$$

y
$$x - z - x^2 - z^2$$

Como *(probl. 69, cita 1.ª)* es $x^2 - z^2 = (x + z)(x - z)$, sustituyendo cantidades iguales en el 2.º miembro de la 2.ª ecuación, resultará esta otra

$$x - z = (x + z)(x - z);$$

y, dividiendo los dos miembros por el factor común $x - z$, se tendrá

$$1 = x + z.$$

Despejando á x (lo mismo sería á z) en esta ecuación, será

$$x = z - 1; \qquad (A)$$

y reemplazando este valor de x en la 1.ª ecuación, se tendrá

$$1 - z - z = (1 - z)z;$$

de donde

$$1 - 2z = z - z^2$$

y
$$z^2 - 3z + 1 = 0,$$

ecuación completa de 2.º grado, ya preparada. Aplicando la fórmula del problema 32, resultará en definitiva

$$z = 1{'}5 + 1{'}118 = 2{'}618$$

y

$$z = 1{'}5 - 1{'}118 = 0{'}382.$$

Sustituyendo ahora sucesivamente estos valores de z en la ecuación (A), que es la más sencilla, resultará

$$x = -\ 1{'}618$$

y

$$x = \ 0{'}618.$$

Hay, pues, dos soluciones del problema:

$$1.^a \left\{ \begin{array}{l} x = -\ 1{'}618 \\ z = \ 2{'}618 \end{array} \right.$$

y

$$2.^a \left\{ \begin{array}{l} x = \ 0{'}618 \\ z = \ 0{'}382. \end{array} \right.$$

Esta 2.ª solución, como compuesta de números positivos, es la única que satisface. En efecto, la diferencia de estos dos números, su producto y la diferencia de sus cuadrados es 0'236.

PROBLEMA 141.

Sabiendo que 5 metros equivalen á 6 varas, ¿á cuántas varas equivaldrán 280 metros y á cuántos metros 1800 varas?

Resoluciones.

1.ª—Este problema es una doble cuestión de regla de tres simple y directa. En efecto, si 5 metros valen 6 varas, mayor número de metros valdrá mayor número de varas. Tendremos, pues,

$$5 : 6 :: 280 : x;$$

de donde

$$x = \frac{6 \times 280}{5} = 336 \text{ varas.}$$

De la misma manera, si 6 varas valen 5 metros, mayor número de varas valdrán mayor número de metros. Será, pues,

$$6 : 5 : : 1800 : x;$$

de donde

$$x = \frac{5 \times 1800}{6} = 1500 \text{ metros.}$$

2.ª—Si 5 metros valen 6 varas, 1 metro valdrá 5 veces menos: valdrá, pues, $^6/_5$ varas; y, si estas varas vale 1 metro, los 280 valdrán 280 veces más: valdrán, pues, $^6/_5 \times 280 = \frac{6 \times 280}{5} = 336$ varas.

Del mismo modo, si 6 varas valen 5 metros, 1 vara valdrá 6 veces menos: valdrá, pues, $^5/_6$ metros; y, si estos metros vale 1 vara, las 1800 valdrá 1800 veces más: valdrán, por lo tanto, $^6/_5 \times 1800 = \frac{6 \times 1800}{5} = 1500$ metros.

PROBLEMA 142

Doce hombres han segado un campo en 9 días; 16 hombres ¿en cuántos días lo hubieran segado?

Resoluciones.

1.ª—Esta cuestión es de regla de tres simple inversa. En efecto, á mayor número de hombres corresponde menor número de días. Será, pues,

$$12 : 16 : : x : 9;$$

de donde

$$x = \frac{12 \times 9}{16} = 6‘75.$$

Resulta que los 16 hombres hubieran segado el campo en 6 días y $^3/_4$ de día.

2.ª—Si 12 hombres tardaron en segar el campo 9 días, 1 hombre solo hubiera tardado 12 veces más; esto es 9×12 días; y, si estos días hubiera tardado 1 hombre solo, los 16 hombres hubieran tardado 16 veces menos; esto es $\frac{9 \times 12}{16} = 6'75$ días.

Nota.—Como es sabido, en toda regla de tres simple entran 4 cantidades: tres conocídas y una desconocida, las cuales son homógeneas dos á dos, siendo dos homegéneas correspondientes á las otras dos homogéneas; y comunmente la regla de tres simple se divide en *directa* é *inversa:* directa, cuando la 1.ª cantidad es á su homogénea, como la correspondiente á la 1.ª es á la correspondiente á la 2.ª; é inversa, cuando la 1.ª cantidad es á su homogénea, como la correspondiente á la 2.ª es á la correspondiente á la 1.ª—No es de necesidad la división de la regla de tres simple en directa é inversa: la proporción que en uno y en otro caso la constituye puede formarse siempre de una misma manera. Al efecto basta averiguar, en la forma en que lo hemos hecho en este problema y en el del número anterior, si la incógnita es mayor ó menor que su homogénea y, hecho esto y llamando *(para abreviar ahora)* M á la cantidad mayor de la 1.ª especie, M' á la mayor de la 2.ª, *m* á la menor de la 1.ª especie y *m'* á la menor de la 2.ª, formar una cualquiera de las 8 proporciones siguientes:

$$M : M' :: m : m',$$
$$M : m :: M' : m'$$
$$M' : M :: m' : m$$
$$M' : m' :: M : m$$
$$m : m' :: M : M'$$
$$m : M :: m' : M'$$
$$m' : m :: M' : M$$
y
$$m' : M' :: m : M.$$

PROBLEMA 143.

Un comerciante ha comprado un carro de garbanzos á 40 pesetas la fanega, ¿á qué precio deberá vender, ya la fanega, ya el hectolitro, para ganar el 15 p 0/0 del capital invertido en la compra?

Resolución.

El capital invertido en la compra, ó sea el importe total de las fanegas de garbanzos compradas por el comerciante, *cualquiera que sea el número de ellas,* es evidentemente la suma del importe de cada una de estas fanegas. Ahora bien, como lo que se hace con cada uno de los sumandos que constituyen una suma, eso mismo queda hecho con ésta, para que el importe total de las fanegas compradas resulte aumentado en su 15 por ciento, bastará que se aumente en su 15 por ciento el valor de cada fanega. La cuestión, pues, está reducida por de pronto á determinar el 15 por ciento de 40 pesetas, precio de las fanegas de garbanzos que se han comprado. Tendremos, pues,

$$100 : 15 :: 40 : x$$

de donde

$$x = \frac{15 \times 40}{100} = 6 \text{ pesetas.}$$

El precio, pues, á que el comerciante debe vender la fanega de garbanzos para ganar el 15 p 0/0 del capital invertido en la compra del carro de ellos, es 40 + 6 = 46 pesetas.

Determinemos ahora el precio del hectolitro.

Una fanega equivale á 0'555 hectolitros. Luego, si 1 fanega vale 46 pesetas, éste será el valor de 0'555 hectolitros. Luego el de 1 de ellos será 46 : 0'555 = 82'89 pesetas.

Lo mismo podría decirse: 1 hectolitro equivale á 1'802 fanegas. Conque, si 1 fanega vale 46 pesetas, las 1'802 fanegas valdrán 46 × 1'802 = 82'89; y, como las 1'802 equivalen á 1 hectolitro, el valor de éste será las 82'89 pesetas.

PROBLEMA 144.

Tres cuadrillas de braceros cavan un viñedo: la 1.ª en 5 días; la segunda en 7; y la tercera en 9. Unidas las 3 cuadrillas, ¿en cuánto tiempo lo cavarán?

Resoluciones.

1.ª—Sea x los días que emplearán las tres cuadrillas juntas en hacer el trabajo en cuestión. Es evidente que, si la 1.ª cuadrilla hace el trabajo en 5 días, en 1 de ellos hará $\frac{1}{5}$: y en x dias, $\frac{x}{5}$; que, si la 2.ª lo hace en 7, en 1 hará $\frac{1}{7}$: y en x días, $\frac{x}{7}$; y que, si la 3.ª lo hace en 9, en 1 hará $\frac{1}{9}$, y en x días, $\frac{x}{9}$; y, como lo hecho por las tres cuadrillas juntas en los x días constituye el trabajo entero, que es 1 unidad, se tendrá la ecuación

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{7} + \frac{x}{9} = 1.$$

Quitando los denominadores, será

$$63\,x + 45\,x + 35\,x = 315;$$

y, reduciendo en el 1.^{er} miembro los términos semejantes, resultará

$$143\,x = 315;$$

de donde

$$x = \frac{315}{143} = 2‘20 \text{ días;}$$

ó sea 2 días, 4 horas y 48 minutos.

2.ª—Si la 1.ª cuadrilla hace el trabajo en 5 días, en 1 hará $\frac{1}{5}$; si la 2.ª lo hace en 7, en 1 hará $\frac{1}{7}$; y, si la 3.ª lo hace en 9, en 1 hará $\frac{1}{9}$: luego las 3 cuadrillas reunidas harán en 1 día $\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{63}{315} + \frac{45}{315} + \frac{35}{315} = \frac{143}{315}$ del mencionado trabajo. Ahora, si para hacer $\frac{143}{315}$ de este trabajo emplean juntas 1 día, para hacer el trabajo entero, que aquí es 1 unidad, emplearán x días. Tendremos, pues,

$$\frac{143}{315} : 1 : : 1 : x;$$

de donde

$$x = 1 \times 1 : \frac{143}{315} = 1 : \frac{143}{135} = \frac{1 \,.\, 315}{143} = \frac{315}{143} = 2‘20$$

días.

Nota.—Podíamos haber prescindido de formar la proporción, diciendo: si para hacer $\frac{143}{315}$ del trabajo necesitan 1 día las tres cuadrillas juntas, para hacer 2 veces, 3 veces & $\frac{143}{315}$, necesitarán 2 días, 3 días &. La cuestión, pues, se reduce á determinar cuántas veces la porción $\frac{143}{315}$ del trabajo cabe en 1, trabajo entero; y, como ver las veces que un número cabe en otro es dividir el 2.º por el 1.º, el resultado que se busca será $1 : \frac{143}{315} = 2‘20$ días.

PROBLEMA 145.

Dos grifos de una fuente llenan de agua el pilón de la misma, el 1.º en 8 horas y el 2.º en 12; y dos orificios que hay en el fondo del pilón vácian á éste, el 1.º en 10 horas y el 2.º en 15: vacío el pilón y abiertos simultáneamente los grifos y los orificios, ¿en cuánto tiempo se llenaría de agua aquél?

Resoluciones.

1.ª—Sea x las horas que el pilón tarda en llenarse. Si el 1.er grifo llena el pilón en 8 horas y el 2.º en 12, en 1 hora el 1.º llenará $\frac{1}{8}$ del pilón y el 2.º, $\frac{1}{12}$; y en las x horas el 1.º llenará $\frac{x}{8}$ y el segundo, $\frac{x}{12}$, y los dos juntos llenarán $\frac{x}{8} + \frac{x}{12}$ del pilón.

Si el 1.er orificio vácia el pilón en 10 horas y el 2.º en 15, en 1 hora el 1.º vaciará $\frac{1}{10}$ y el segundo, $\frac{1}{15}$; y en las x horas el 1.º vaciará $\frac{x}{10}$ y el segundo $\frac{x}{15}$ del pilón. Luego la ecuación será

$$\left(\frac{x}{8} + \frac{x}{12}\right) - \left(\frac{x}{10} + \frac{x}{15}\right) = 1 \text{ pilón;}$$

ó bien

$$\frac{x}{8} + \frac{x}{12} - \frac{x}{10} - \frac{x}{15} = 1;$$

y, quitando denominadores, se tendrá

$$1800x + 1200x - 1440x - 960x = 14400;$$

y, simplificando el 1.er miembro, resultará

$$600x = 14400;$$

de donde

$$x = \frac{14400}{600} = 24 \text{ horas.}$$

2.ª - Si el 1.er grifo llena el pilón en 8 horas y el 2.º en 12, en 1 hora el 1.er grifo llenará $\frac{1}{8}$ y el segundo $\frac{1}{12}$ del pilón, y los dos juntos llenarán $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{12}{96} + \frac{8}{96} = \frac{20}{96} = \frac{5}{24}$.

Si el 1.er orificio vácia el pilón en 10 horas y el 2.º en 15, en 1 hora el 1.º vaciará $\frac{1}{10}$ y el segundo $\frac{1}{15}$ y los dos juntos vaciarán $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{15}{150} + \frac{10}{150} = \frac{25}{150} = \frac{1}{6}$ del pilón. Luego la parte de pilón que se llena en 1 hora será

$$\frac{5}{24} - \frac{1}{6} = \frac{5}{24} - \frac{4}{24} = \frac{1}{24}.$$

Ahora, si para llenar $\frac{1}{24}$ del pilón se necesita 1 hora, para llenar los $\frac{24}{24}$ del pilón, que es todo el pilón, se necesitarán 24 horas.

PROBLEMA 146.

Si 15 hombres, trabajando 8 horas diarias, hacen en 24 días 96 metros de pared, ¿cuántos hombres serán necesarios para hacer en 30 días 1800 metros con un trabajo diario de 10 horas?

Resoluciones.

1.ª—Esta cuestión es un caso de regla de tres compuesta, toda vez que en ella se pide una cantidad desconocida proporcional á más de tres que se dan conocidas. Resolvámosla primero por medio de un sistema de proporciones formadas con sujeción á la regla de tres simple. Al efecto consideraremos á los 2.os hombres en las mismas circunstancias que los 1.os; esto es, supondremos que trabajan el mismo número de días y de horas en cada día, y diremos: á mayor número de metros de pared, mayor número de hombres. Tendremos, pues,

$$96 : 1800 :: 15 : x \text{ hombres;}$$

é invirtiendo los términos de esta proporción, resultará esta otra

$$1800 : 96 :: x : 15. \qquad 1.^a$$

La incógnita x representa los hombres que se necesitan para hacer los 1800 metros de pared; pero en 24 días. Ahora, á mayor número de dias, menor número de hombres. Será, pues,

$$24 : 30 :: y : x. \qquad 2.^a$$

La incógnita y representa los hombres necesarios para hacer los 1800 metros de pared en 30 días; pero trabajando 8 horas diarias, siendo así que han de trabajar 10 horas. A mayor número de horas, menor número de hombres. Se tendrá, pues,

$$8 : 10 :: z : y. \qquad 3.^a$$

Cabe ahora hallar el valor de x en la 1.ª ecuación y sustituirle en la 2.ª; hallar el de y en la 2.ª y reemplazarle en la 3.ª y luégo despejar en ésta á z, que es la incógnita final y cuyo valor se pide; pero es preferible multiplicar ordenadamente las proporciones 1.ª, 2.ª y 3.ª y suprimir los factores x é y comunes á los términos de la 2.ª razón; hecho lo cual, resultará

$$1800 \times 24 \times 8 : 96 \times 30 \times 10 :: z : 15;$$

de donde

$$z = \frac{1800 \times 24. \times 8 \times 15}{96 \times 30 \times 10} \text{ (a)} = 180.$$

Se necesitan, pues, 180 hombres.

2.ª—Resolvamos ahora el problema por reducción á la unidad.

Si para hacer 96 metros se necesitan 15 hombres, para

(a) Antes de efectuar la división que este quebrado indica, conviene suprimir los factores comunes á sus dos términos.

hacer 1 metro se necesitarán 96 veces menos: se necesitarán, pues, $\frac{15}{96}$ hombres. Si estos hombres se necesitan para hacer 1 metro, para hacer 1800 se necesitarán 1800 veces más: se necesitarán, pues, $\frac{15 \times 1800}{96}$ hombres. Si estos hombres se necesitan para hacer los 1800 metros de pared en 24 días, para hacerlos en 1 se necesitarán 24 veces más; esto es, $\frac{15 \times 1800 \times 24}{96}$ hombres; y, para hacerlos en 30 se necesitarán 30 veces menos: se necesitarán, pues, $\frac{15 \times 1800 \times 24}{96 \times 30}$ hombres. Si estos hombres se necesitan para hacer los 1800 metros de pared en 30 días trabajando 8 horas diarias, trabajando 1 sola hora se necesitarán 8 veces más: se necesicesitarán, pues, $\frac{15 \times 1800 \times 24 \times 8}{96 \times 30}$ hombres: y para hacerlos trabajando 10 horas, se necesitarán 10 veces menos: se necesitarán, pues, $\frac{15 \times 1800 \times 24 \times 8}{96 \times 30 \times 10} = 180$ hombres.

PROBLEMA 147.

Doce obreros, con un vigor como 5, trabajando 9 horas diarias, abren en 9 días 4 zanjas de 7 metros de longitud, 1 $\frac{1}{2}$ de latitud y 2 de profundidad en un terreno cuya tenacidad es como 4; 18 obreros, con un vigor como 3, trabajando 8 horas diarias, ¿cuántos días tardarán en abrir 6 zanjas de 14 metros de longitud 1 $\frac{1}{4}$ de latitud y 1'80 de profundidad, siendo como 5 $\frac{1}{2}$ la tenacidad del terreno?

Resoluciones.

1.ª—Este problema es de la misma índole que el anterior.

Resolviéndole por un sistema de proporciones, diremos, *abreviando el razonamiento:*

A mayor número de obreros, menor número de días:

$$18 : 12 : : 9 : a,$$

A mayor vigor, menor número días:

$$3 : 5 : : a : b.$$

A mayor número de horas, menor número de días:

$$8 : 9 : : b : c.$$

A mayor número de zanjas, mayor número de días:

$$4 : 6 : : c : d.$$

A mayor longitud de las zanjas, mayor número de días:

$$7 : 14 : : d : e.$$

A mayor latitud, mayor número de días:

$$1{,}5 : 1{,}25 : : e : f.$$

A mayor profundidad, mayor número de días:

$$2 : 1{,}80 : : f : g.$$

A mayor tenacidad del terreno, mayor número de días:

$$4 : 5{,}5 : : g : x.$$

Multiplicando ordenadamente las 8 proporciones y separando en la resultante los factores comunes á los dos términos de la 2.ª razón, se tendrá $18 \times 3 \times 8 \times 4 \times 7 \times 1{,}5 \times 2 \times 4 : 12 \times 5 \times 9 \times 6 \times 14 \times 1{,}25 \times 1{,}8 \times 5{,}5 : : 9 : x$; de donde

$$x = \frac{12 \times 5 \times 9 \times 6 \times 14 \times 1{,}25 \times 1{,}8 \times 5{,}5 \times 9}{18 \times 3 \times 8 \times 4 \times 7 \times 1{,}5 \times 2 \times 4} = 34{,}80$$

días.

2.ª--Resolvamos la cuestión por reducción á la unidad, *abreviando también el razonamiento.*

Si 12 hombres tardan 9 días en abrir las 4 zanjas, 1 hombre tardará 12 veces más; esto es, 9×12 días; y, si esto tarda 1 hombre, 18 tardarán 18 veces menos, ó sea $\frac{9 \times 12}{18}$ días. Si estos días tardan 18 hombres, siendo su

vigor como 5, siendo como 1, tardarán 5 veces más; esto es, $\frac{9\ .\ 12\ .\ 5}{18}$, y, siendo como 3, tardarán 3 veces menos; ó sea $\frac{9\ .\ 12\ .\ 5}{18\ .\ 3}$. Si estos días tardan los 18 hombres trabajando 9 horas, trabajando 1 tardarán 9 veces más: esto es, $\frac{9\ .\ 12\ .\ 5\ .\ 9}{18\ .\ 3}$; y trabajando, 8, tardarán 8 veces menos; ó sea $\frac{9\ .\ 12\ .\ 5\ .\ 9}{18\ .\ 3\ .\ 8}$. Si estos días tardan en abrir 4 zanjas, en abrir 1 tardarán 4 veces menos, esto es, $\frac{9\ .\ 12\ .\ 5\ .\ 9}{18\ .\ 3\ .\ 8\ .\ 4}$, y en abrir 6 tardarán 6 veces más; ó sea $\frac{9\ .\ 12\ .\ 5\ .\ 9\ .\ 6}{18\ .\ 3\ .\ 8\ .\ 4}$. Si estos días tardan siendo la longitud 7 metros, siendo 1 tardarán 7 veces menos; esto es, $\frac{9\ .\ 12\ .\ 5\ .\ 9\ .\ 6}{18\ .\ 3\ .\ 8\ .\ 4\ .\ 7}$; y, siendo 14, tardarán 14 veces más; ó sea $\frac{9\ .\ 12\ .\ 5\ .\ 9\ .\ 6\ .\ 14}{18\ .\ 3\ .\ 8\ .\ 4\ .\ 7}$. Si estos días tardan siendo la latitud 1'5 metros, siendo 1 tardarán 1'5 veces menos; esto es, $\frac{9\ .\ 12\ .\ 5\ .\ 9\ .\ 6\ .\ 14}{18\ .\ 3\ .\ 8\ .\ 4\ .\ 7\ .\ 1'5}$; y, siendo 1'25, tardarán 1'25 veces más, ó sea $\frac{9\ .\ 12\ .\ 5\ .\ 9\ .\ 6\ .\ 14\ .\ 1'25}{18\ .\ 3\ .\ 8\ .\ 4\ .\ 7\ .\ 1'5}$.
Si estos días tardan siendo la profundidad 2 metros, siendo 1 tardarán 2 veces menos (ó la mitad); esto es, $\frac{9\ .\ 12\ .\ 5\ .\ 9\ .\ 6\ .\ 14\ .\ 1'25}{18\ .\ 3\ .\ 8\ .\ 4\ .\ 7\ .\ 1'5\ .\ 2}$; y siendo 1,80 metros, tardarán 1'80 veces más; ó sea, $\frac{9\ .\ 12\ .\ 5\ .\ 9\ .\ 6\ .\ 14\ .\ 1'25\ .\ 1'80}{18\ .\ 3\ .\ 8\ .\ 4\ .\ 7\ .\ 1'5\ .\ 2}$.

Si estos días tardan siendo la tenacidad del terreno como 4, siendo como 1 tardarán 4 veces menos; esto es, $\frac{9 \,.\, 12 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 6 \,.\, 14 \,.\, 1\text{‘}25 \,.\, 1\text{‘}80}{18 \,.\, 3 \,.\, 8 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 1\text{‘}5 \,.\, 2 \,.\, 4}$; y siendo como 5‘5, tardarán 5‘5 veces más; ó sea

$$\frac{9 \,.\, 12 \,.\, 5 \,.\, 9 \,.\, 6 \,.\, 14 \,.\, 1\text{‘}25 \,.\, 1\text{‘}80 \,.\, 5\text{‘}5}{18 \,.\, 3 \,.\, 8 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 1\text{‘}5 \,.\, 2 \,.\, 4} = 34\text{‘}80 \text{ días.}$$

Nota 1.ª—En la resolución de este problema, en vez de considerar aisladamente, como lo hemos hecho, las zanjas y sus dimensiones, cabe empezar cubicando las 1.as

Nota 2.ª—Ni en la resolución del problema anterior ni en la de éste hemos empleado el llamado *método de causas y efectos;* 1.° porque es puramente mecánico; y 2.° porque á veces induce á error, como sucedería aplicado en el problema actual, en cuya resolución los números expresivos de la tenacidad del terreno resultarían invertidos; esto es, el 4 en el numerador y el 5‘5 en el denominador, debiendo resultar lo contrario.

PROBLEMA 148.

Entre cuatro amigos jugaron un décimo de la Lotería nacional: el 1.° jugó 5 pesetas; el segundo, 12; el tercero, 15; y el cuarto, 18: les favoreció la suerte con un premio de 10.000 pesetas. ¿Qué porción de ellas debe percibir cada uno de los cuatro amigos?

Resolución.

Evidente es que cada uno de los cuatro amigos debe percibir en proporción á la cantidad que jugó. La cuestión, pues, está reducida á dividir el premio de las 10.000 pesetas en 4 partes proporcionales á los 4 números 5, 12, 15 y 18.

Para dividir un número dado en partes proporcionales á otros números dados, se divide dicho número por la suma de los números á que deben ser proporcionales las partes y el cociente se multiplica por cada uno de dichos números: los productos resultantes son las partes proporcionales (1). Tendremos, pues,

parte del 1.°. . . . $\frac{10000}{50} \times 5 = 1000$ pts.

íd. del 2.°. . . . $\frac{10000}{50} \times 12 = 2400$ »

íd. del 3.°. . . . $\frac{10000}{50} \times 15 = 3000$ »

íd. del 4.°. . . . $\frac{10000}{50} \times 18 = 3600$ »

Total 10000 »

---

(1) Este procedimiento es el de reducción á la unidad. Podían emplearse también las proporciones, diciendo: 50 pesetas, valor del décimo, es á 5 pesetas, cantidad que jugó el 1.° de los 4 amigos, como 10000 pesetas, valor del premio, es á x pesetas, parte que de éste corresponde al primer amigo. Y así sucesivamente.

PROBLEMA 149

Cuatro costureras han hecho cierto número de prendas de vestir, por cuya hechura les han dado 850 reales: una de aquéllas ha trabajado 10 días; otra, 16; otra, 18; y la otra, 24. ¿Cuánto debe percibir cada una de ellas?

Resolución.

Este problema, en el fondo, es igual al anterior. Resuelto como él, la solución será:

parte de la 1.ª costurera.	125 rs.
íd. de la 2.ª íd.	200 »
íd. de la 3.ª íd.	225 »
íd. de la 4.ª íd.	300 »
Suma.	850 »

PROBLEMA 150.

Tres carpinteros contrataron una obra en 582 pesetas: el 1.º trabajó 30 días; el segundo, 26, y el tercero, 24: el trabajo diario de cada uno de los 3 carpinteros, por el orden en que se han enumerado, fué, por su mérito relativo, como los números 3, 4 y 5. ¿Cuánto debe percibir cada uno de dichos tres carpinteros?

Resolución.

Evidente es que cada uno de los tres carpinteros debe percibir en proporción á los días que trabajó y al mérito relativo de su trabajo. Deben, pues, percibir los tres carpinteros en proporción al producto de sus respectivos días de trabajo por el mérito relativo de éste (1). Estos productos son:

1.er	carpintero.	$30 \times 3 = 90$
2.°	íd.	$26 \times 4 = 104$
3.°	íd.	$24 \times 5 = 120$
	Suma. . .	314.

La cuestión, pues, está reducida á dividir las 582 pesetas de la contrata en 3 partes proporcionales á los 3 productos 90, 104 y 120. Tendremos, pues, *(probl. 148):*

cuota del 1.er carpintero. . . .	166'82 pts.
íd. del 2.°.	192'76 »
íd. del 3.°.	222'42 »
Total. . . .	582' » »

---

(1) Esta proposición es demostrable. En efecto, sean C y C' dos carpinteros, d y d' los días que respectivamente trabajaron, m y m' el mérito relativo de su respectivo trabajo y q y q' la cuota respectiva que cada carpintero debe percibir. Digo que

$$q : q' : : dm : d'm'.$$

Para demostrarlo, admitamos un tercer carpintero, C'', que haya trabajado los mismos días que C, es decir, d días, y cuyo trabajo tenga igual mérito que el de C', esto es, m'. A la cuota que este tercer carpintero debe percibir, que no puede ser ni q ni q', la llamaremos q.''

Comparando á C con C'', tendremos que, por ser iguales sus días de trabajo,

$$q : q'' : : m : m';$$

y, comparando ahora á C'' con C', por ser igual el mérito de su trabajo, será

$$q'' : q' : : d : d'.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones y separando á q'', factor común á los dos términos de la 1.ª razón, resultará

$$q : q' : : dm : d'm',$$

que es lo que se pretendia demostrar.

PROBLEMA 151.

Sabiendo que las actuales monedas de bronce españolas constan de cobre, estaño y zinc en la proporción de 950, 40 y 10 milésimas de su peso, respectivamente. ¿cuánto zinc, estaño y cobre entrará en las monedas necesarias para reunir 4560 pesetas?

Resolución.

Como cada moneda de las de que se trata pesa tantos gramos cuantos céntimos de peseta vale, el total de las que se nos piden, que valen 4560 × 100 = 456000 céntimos, pesarán 456000 gramos = 456 kilogramos. La cuestión, pues, está reducida á dividir estos 456 kilogramos en 3 partes proporcionales á los números 950, 40 y 10, expresivos de las cantidades de cobre, estaño y zinc que componen los referidos kilogramos. Tendremos, pues, *(probl. 148)*

cobre.	433'200	kg.
estaño	18'240	»
zinc.	4'560	»
Suma. . . .	456'000	»

PROBLEMA 152.

Tres hermanos, Juan, Pedro y Miguel, **compraron en 32000 duros una finca que les renta al año 40.000 reales. Juan aportó para la compra 2000 duros más que Pedro y éste 3000 duros más que Miguel. ¿Cuánto debe percibir de dicha renta anual cada uno de los 3 hermanos?**

Resoluciones.

1.ª—Evidente es que cada uno de los tres hermanos debe percibir de la renta una parte proporcional á la cantidad que aportó para la compra de la finca. Se hace, pues, indispensable empezar por determinar el capital que cada hermano aportó.

Sea x el capital aportado por Juan: el de Pedro será $x - 2000$, y el de Miguel $x - 2000 - 3000 = x - 5000$. La ecuación será, pues,

$$x + x - 2000 + x - 5000 = 32000.$$

Transponiendo los términos $- 2000$ y $- 5000$, y haciendo la reducción de los semejantes, se tendrá

$$3x = 39000;$$

de donde

$$x = 39000 : 3 = 13000 \text{ duros.}$$

Siendo el capital de Juan 13000 duros,
el de Pedro será 13000 — 2000 = 11000 »
y el de Miguel 11000 — 3000 = 8000 »
Total 32000 »

Dividiendo ahora la renta total 40000 rs. en partes proporcionales á estos capitales, se tendrá *(probl. 148):*

Renta de Juan.	16250 rs.
Id. de Pedro.	13750 »
Id. de Miguel.	10000 »
Renta total. . . .	40000 »

2.ª—Si Juan aportó 2000 duros más que Pedro y éste 3000 más que Miguel, resulta que Juan aportó 5000 más que Miguel y que entre Juan y Pedro aportaron 8000 más que Miguel. Luego, si del capital 32000 duros restamos estos 8000, los $32000 - 8000 = 24000$ restantes serán los aportados, *á partes iguales*, por los tres hermanos:
luego, lo aportado por Miguel es $24000 : 3 = 8000$ duros
lo aportado por Pedro, será, pues, $8000 + 3000 = 11000$ »
y lo aportado por Juan, $11000 + 2000 = 13000$ »
Total 32000 »

Ahora sólo resta ya dividir, como antes se ha hecho, la renta 40000 rs. en partes proporcionales á estos tres capitales 8000, 11000 y 13000.

PROBLEMA 153.

Se ha recibido un saco de dinero que contiene monedas de plata, de las de nuevo cuño, de duro, peseta y media peseta: el número de monedas de duro es doble del de monedas de peseta, y éste doble del de medias pesetas: el saco aislado pesa 8 decagramos, y con las expresadas monedas, 28 kilogramos y 205 gramos. ¿Qué cantidad en reales contiene este saco y cuántas monedas de cada clase hay en él?

Resoluciones.

1.ª—Sea x el número de medias pesetas: el de pesetas, según el enunciado, será 2 x, y el de duros $2x \times 2 = 4x$. Ahora bien, como cada media peseta, cada peseta y cada duro del nuevo cuño pesan, respectivamente, $\frac{1}{400} = 0{`}0025$ kilogramos, $\frac{1}{200} = 0{`}005$ íd. y $\frac{1}{40} = 0{`}025$ íd., el peso de las x medias pesetas, 2 x pesetas y 4 x duros será $0{`}0025\,x$ kilogramos, $0{`}005 \times 2x = 0{`}01\,x$ íd. y $0{`}025 \times 4x = 0{`}1\,x$, respectivamente, y en total, $0{`}0025\,x + 0{`}01\,x + 0{`}1\,x$ kilogramos. Ahora, como el peso de las monedas es evidentemente la diferencia entre el peso del saco con ellas y el peso del saco vacío, la ecuación será

$$0{`}0025\,x + 0{`}01\,x + 0{`}1\,x = 28{`}205 - 0{`}08;$$

y, reduciendo términos semejantes, se tendrá

$$0{`}1125\,x = 28{`}125;$$

de donde

$$x = \frac{28{`}125}{0{`}1125} = 250.$$

Si las medias pesetas son 250, las pesetas, según el enunciado, serán 250 × 2 = 500; y los duros 500 × 2 = 1000. Ahora, como las 250 pesetas valen 500 reales; las 500 pesetas, 2000 íd., y los 1000 duros, 20000 íd., resulta que el dinero total que contenía el saco es 500 + 2000 + 20000 = 22500 reales

2.ª—Si del peso del saco con las monedas, 28'205 kilogramos = 28205 gramos, deducimos el peso del saco aislado, 8 Dg. = 80 gramos, el resto 28205 — 80 = 28125 gramos será el peso líquido de las monedas. Si ahora al número 28125 gramos le dividimos por los 5 que pesa una peseta, el cociente 28125 : 5 = 5625 será el valor en pesetas de las monedas que contiene el saco; valor equivalente á 5625 × 4 = 22500 reales. Ahora bien, en el total de monedas que representan estos 22500 reales, por cada media peseta, *que vale 2 reales*, entran 2 pesetas, *que valen 8 reales*, y 4 duros, *que valen 80 reales*. Luego para determinar el valor en reales del total de medias pesetas, del de pesetas y del de duros, que entran á componer los 22500 reales, la cuestión está reducida á dividir este número en tres partes proporcionales á los números 2, 8 y 80. Tendremos, pues, *(problema 148)*

valor de las medias pesetas. . . . . . . 500 reales
íd. de las pesetas. . . . . 2000 íd.
íd. de los duros. . . . . 20000 íd.
Suma. . . . 22500

Si las medias pesetas valen 500 reales, el número de ellas será 500 : 2 = 250: luego el número de pesetas será 250 × 2 = 500, y el de duros 500 × 2 = 1000.

3.ª—Hemos averiguado antes que el peso líquido de las monedas del saco es 28125 gramos. Ahora bien, cada media peseta pesa 2‘5 gramos; cada peseta, 5; y cada duro, 25; y, como por cada media peseta, entran en las monedas del saco 2 pesetas y 4 duros, en los 28125 gramos, peso del total de monedas, por cada 2‘5 gramos, peso de 1 media peseta, entrarán 10 gramos, peso de las 2 pesetas, y 100 gramos, peso de los 4 duros. Luego, para determinar el peso del total de las medias pesetas, el del total de las pesetas y el del total de los duros, la cuestión está reducida á dividir los 28125 gramos en tres partes proporcionales á los números 2‘5, 10 y 100. Tendremos, pues, *(probl. 148)*

peso de las medias pesetas.	625	gr.
íd. de las pesetas.	2500	»
íd. de los duros.	25000	»
Total. . . .	28125	»

Si las medias pesetas pesan 625 gramos, el número de ellas será $625 : 2‘5 = 250$: luego el de pesetas será $250 \times 2 = 500$; y el de duros, $500 \times 2 = 1000$.

PROBLEMA 154.

Murió un sujeto dejando 60.000 duros de capital y á su mujer encinta, habiendo ordenado en su testamento, que, si su esposa paría hijo, percibiese éste $^2/_5$ de lo que percibiera la madre, y que, si ésta paría hija, la hija percibiera $^3/_7$ de lo que percibiese la madre; mas sucedió que la viuda de que se trata dió á luz hijo é hija. ¿Cuánto debe asignarse á cada uno de los tres herederos, segun la expresa voluntad del testador?

Resolución.

La voluntad del testador fué que lo que se asignara al hijo fuese á lo que se asignara á la madre, como 2 es á 5, y que lo que se asignara á la hija fuese á lo que se asignara á la madre como 3 es á 7.

Reduzcamos los quebrados $^2/_5$ y $^3/_7$ á un denominador común. Resultará $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$ y $\frac{3}{7} = \frac{15}{35}$. Toda vez que los quebrados $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$ son iguales, respectivamente, á $\frac{14}{35}$ y $\frac{15}{35}$, también fué la voluntad del testador que lo que recibiese el hijo fuera á lo que recibiese la madre como 14 es á 35, y que lo que recibiese la hija fuera á lo que recibiese la madre como 15 es á 35. La cuestión, pues, esta reducida á dividir la herencia total, 60000 duros, en tres partes proporcionales á los números 14, 15 y 35. Tendremos, pues, *(problema 148):*

herencia	del hijo.	13125	duros
íd.	de la hija.	14062'5	»
íd.	de la madre. . . .	32812'5	»
	Total. . .	60000'0	»

Hecha la comprobación se verá que, efectivamente, la herencia del hijo, es, como no puede menos de ser, $^2/_5$ de la de su madre, y la de la hija $^3/_7$ de la herencia de su madre.

PROBLEMA 155.

Un sujeto dispuso al morir que del capital que dejaba se invirtiesen $^2/_5$ en sufragios para su alma y $^3/_8$ en limosnas para los pobres y que el resto, consistente en 13500 pesetas, se distribuyera entre cuatro sobrinos que tenía, en razón inversa de la edad que cada uno contaba, que era de 2, 4, 5 y 8 años respectivamente. ¿A cuántas pesetas ascendía el capital legado, qué porción de él debió destinarse á cada uno de los fines expresados por el testador y cuánto correspondió á cada uno de los cuatro sobrinos de éste?

Resoluciones.

1.ª—Sea x las pesetas á que ascendía el capital: lo invertido en sufragios será $\frac{2x}{5}$ y lo empleado en limosnas $\frac{3x}{8}$. Luego la ecuación será

$$x - \left(\frac{2x}{5} + \frac{3x}{8}\right) = 13.500.$$

Quitando el paréntesis, se tendrá

$$x - \frac{2x}{5} - \frac{3x}{8} = 13.500;$$

y, quitando los denominadores, resultará

$$40x - 16x - 15x = 540.000,$$

y, reduciendo los términos semejantes del 1.er miembro, será

$$9x = 540.000$$

de donde

$$x = \frac{540.000}{9} = 60000 \text{ pesetas.}$$

Siendo 60000 pesetas el capital, la parte de él invertida

en sufragios será.	$60000 \times {}^2/_5 = $	24.000 pts.
y lo empleado en limosnas.	$60000 \times {}^3/_8 = $	22.500 »
lo destinado á los 4 sobrinos		13.500 »
	Total. . . .	60.000 »

Determinemos ahora la cuota correspondiente á cada uno de los 4 sobrinos del testador.

Todo número es la razón de sí mismo á la unidad; así, por ejemplo, 7 es igual á $\frac{7}{1}$; 15 $= \frac{15}{1}$; 74 $= \frac{74}{1}$, &. &. Luego la razón inversa de un número será la razón de la unidad á este número; así, la razón inversa de 7 será $\frac{1}{7}$; la de 15, $\frac{1}{15}$; la de 74, $\frac{1}{74}$; &. &. Por consiguiente, la razón inversa de los números 2, 4, 5 y 8, expresivos de la edad respectiva de los 4 sobrinos del testador, será $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{8}$. La cuestión, pues, está reducida á dividir las 13.500 pesetas legadas á estos sobrinos en 4 partes proporcionales á los 4 números $\frac{1}{2} = 0‘5$, $\frac{1}{4} = 0‘25$, $\frac{1}{5} = 0‘2$ y $\frac{1}{8} = 0‘125$. Tendremos *(probl. 148)*

cuota del 1er sobrino (el más joven).	6279‘07
íd. del 2.º	3139‘53
íd. del 3.º	2511‘63
íd. del 4.º	1569‘77
Suma. . . .	13500‘00 (a)

(a) De no reducir á decimales los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{8}$, al dividir en partes proporcionales á ellos las 13500 pesetas hay que reducirlos, para sumarlos, á un común denominador, convirtiéndose entonces por esta reducción en $\frac{20}{40}$, $\frac{10}{40}$, $\frac{8}{40}$ y $\frac{5}{40}$; y, como los quebrados que tienen el mismo deno minador son proporcionales á los numeradores, en la resolución de este problema, como en la de todos los de su clase, conviene sobremanera, por simplificarse con ello extraordinariamente las operaciones del cálculo, suprimir el denominador común y hacer la distribución en partes proporcionales á los numeradores.

Nota.—Cuando sólo son dos los números, *sean los que fueren,* á los cuales han de ser proporcionales, *en razón inversa*, las partes en que un número haya de dividirse, se puede, y hasta conviene, dividir este número en partes directamente proporcionales á los dos números dados, asignando luégo á cada uno de ellos la parte correspondiente al otro.

Lo mismo se puede y conviene hacer cuando los números á que han de ser inversamente proporcionales las partes son más de dos, *siempre que dichos números formen progresión geométrica,* como el 2, 4, 8, 16 &.; ó el 2, 6, 18, 54 &. En este caso la parte resultante para el último se asigna al 1.º; la del penúltimo, al 2.º, y así sucesivamente.

Al número 1, como igual á $\frac{1}{1}$, trátese de razón directa ó inversa, siempre le corresponde la misma cantidad en una distribución dada.

2.ª *resol.*—Si del capital total han de invertirse $\frac{2}{5}$ en sufragios y $\frac{3}{8}$ en limosnas, en ambos conceptos se invertirán en conjunto $\frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{16}{40} + \frac{15}{40} = \frac{31}{40}$; y, como el capital, como todo número, tiene $\frac{40}{40}$, indudablemente los $\frac{40}{40} - \frac{31}{40} = \frac{9}{40}$ que restan los representan las 13500 pesetas destinadas á los sobrinos del testador. Ahora bien, si 13500 pesetas con $\frac{9}{40}$ del capital, 13500 : 9 = 1500 pesetas será $\frac{1}{40}$ y 1500 × 40 = 60000 pesetas serán los $\frac{40}{40}$ del capital ó todo el capital.

Yá, en los demás extremos, se procede como antes.

PROBLEMA 156.

Pedro asoció para una empresa su capital al de Juan, que era de 500 duros: al cabo de cierto tiempo se disolvió la sociedad, resultando una ganancia de

640.000 reales, número que constituye el cuadrado del que expresa en duros el capital social inicial, ó con que la empresa fué acometida. ¿Qué porción de la ganancia total correspondió á cada uno de los dos socios?

Resolución,

Este problema es el caso de la regla de compañía en que son iguales los tiempos y diferentes los capitales. Es evidente que en este caso las ganancias *(y lo mismo las pérdidas, si de ellas se tratase)* son proporcionales á los capitales. El del 1.^{er} socio nos es conocido, 500 duros; el del 2.º necesitamos averiguarlo. Al efecto tendremos que, si el número 640000 es el cuadrado del que expresa en duros el capital social inicial, la $\sqrt{640000} = 800$ (a) duros será dicho capital social. Ahora, como el del socio Pedro es 500, el de su consocio Juan será 800 — 500 = 300 duros. La cuestión queda ya reducida á dividir la ganancia total 640000 reales en 2 partes, proporcionales á los dos números 500 y 300. Será, pues, *(probl. 148)*

ganancia de Pedro.	400.000 rs.
íd. de Juan.	240.000 »
Total. . .	640.000 »

(a) Como 640000 es igual á 64 × 100 × 100 y como una raíz de un producto es igual al producto de las raíces del mismo grado de sus factores y, como la raíz cuadrada de 64 es 8 y la de 100 es 10, la raíz cuadrada de 640000 será 8 × 10 × 10 = 800.

PROBLEMA 157.

Tres individuos formaron sociedad, á la que aportaron: el primero, 580 duros más que el 2.º, y éste 104 menos que el 3.º. Al disolverse la sociedad resultó una ganancia de 10200 duros, cantidad equivalente al 8 $\frac{1}{2}$ p 0/0 del capital social. ¿Qué ganancia corresponde á cada socio?

Resolución.

Este problema constituye el mismo caso de la regla de compañía que el problema anterior. En él las ganancias parciales son proporcionales á los capitales de los tres socios. Determinemos estos capitales.

Puesto que la ganancia total, 10200 duros, equivale al 8'5 por ciento del capital social, este capital, que llamaremos C, se hallará por la proporción siguiente.

$$100 : C : : 8'5 : 10200;$$

de donde

$$C = \frac{100 \times 10200}{8'5} = 120000 \text{ duros.}$$

Conocido el capital social, fácil es determinar el particular de cada socio. Al efecto, sea x el del 1.º: el del 2.º, según el enunciado, será x — 580; y el del tercero, x — 580 + 104 = x — 476. Ahora, como la suma de los capitales parciales ha de dar por resultado el capital social, tendremos la ecuación

$$x + x - 580 + x - 476 = 120000 \text{ duros;}$$

y, haciendo la transposición de términos y la reducción de los semejantes, se tendrá

$$3\,x = 121056;$$

de donde

$$x = \frac{121056}{3} = 40352 \text{ duros.}$$

Siendo el capital del 1.er socio 40352 duros, el del 2.° será 40352 — 580 = 39772; y el del tercero, 39772 + 104 = 39876.

Determinados los capitales de los socios, la cuestión queda reducida, como al principio se ha dicho, á dividir la ganancia total, 10200 duros, en 3 partes proporcionales á los tres capitales. Tendremos, pues, *(probl. 148):*

ganancia del 1.er socio.	3429'92
íd. del 2.°	3380'62
íd. del 3.°.	3389'46
Total.	10.200 »

PROBLEMA 158.

Un sujeto acometió una empresa con 8000 duros de capital: á los 5 meses se le asoció otro con igual dinero: y 9 meses más tarde se les unió un tercero con la misma cantidad. Terminada la empresa 11 meses después, resultó una ganancia de 112000 pesetas. ¿Cuánto corresponde de ella á cada uno de los tres socios?

Resolución.

Este problema es el caso de la regla de compañía en que los capitales son iguales y los tiempos de producción, diferentes: las ganancias *(y lo mismo serían las pérdidas)* se consideran proporcionales á los tiempos. El tiempo correspondiente al 1.er socio es 5 + 9 + 11 = 25 meses; el correspondiente al segundo, 9 + 11 = 20, y el correspondiente al tercero, 11. La cuestión, pues, está reducida á dividir la ganancia total, 112000 pesetas, en 3 partes proporcionales á los 3 números 25, 20 y 11. Tendremos, pues, *(probl. 148):*

ganancia del 1.er socio.			50.000 pts.
íd.	del 2.º	íd.	40.000 »
íd.	del 3.º	íd. . . . , ...	22.000 »
		Total. . . .	112.000 »

Nota.—Pudieran formarse también estas tres proporciones:

$56 : 112000 : : 25 : x =$ 50.000 pts.

$56 : 112000 : : 20 : y =$ 40.000 »

$56 : 112000 : : 11 : z =$ 22.000 »

Total 112.000 »

PROBLEMA 159.

¿Qué utilidad producirán en un año 15000 reales impuestos al 6 por ciento de interés anual?

Resoluciones.

1.ª—Es un principio evidente que en igualdad de tiempo los intereses son proporcionales á los capitales. Tendremos, por consiguiente, llamando i al interés, utilidad ó ganancia del capital,

$$100 : 15000 : : 6 : i;$$

de donde

$$i = \frac{15000 \times 6}{100} = 900 \text{ reales.}$$

Nota.—Como la precedente proporción, $100 : 15000 : : 6 : i$, es independiente del valor de sus tres últimos términos, *ca-*

pital, *tanto p 0/0 é interés*, si á estos les designamos, respectivamente, con las letras c, t é i, tendremos la proporción general

$$100 : c :: t : i,$$

la cual sirve para hallar el valor de cualquiera de sus tres términos últimos, conocido el de los otros dos.

2.ª *resol.*—Si 100 reales producen 6 de utilidad, 1 producirá 100 veces menos: producirá, pues, $\frac{6}{100}$; y, si esto produce 1 real, 15000 producirán 15000 veces más: producirán, pues, $\frac{6}{100} \times 15000 = 900$ reales.

PROBLEMA 160.

Siendo c un capital que ha estado impuesto á interés simple, t el tanto por ciento anual á que ha estado impuesto el capital, p el tiempo de imposición, diferente de un año, é I el interés que en este tiempo ha producido, ¿cuál será la relación que liga á cada una de estas cuatro cantidades c, t, p é I con las tres restantes?

Resolución.

Supongamos que el capital c haya estado impuesto el tiempo de un año, al cual llamaremos a: en él habrá producido un interés distinto de I y que, denominaremos i. Como en igualdad de tiempo los intereses son proporcionales á los capitales, tendremos

$$100 : c :: t : i.$$

Pero el capital c no ha estado en producción el tiempo a, tiempo de un año, sinó el tiempo p, diferente de un año. Como, cuando los capitales son iguales y los tiempos diferentes, los intereses son proporcionales á los tiempos, tendremos

$$a : p : : i : I.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones y suprimiendo en la resultante el factor i, común á los dos términos de la 2.ª razón, se tendrá

$$100 \times a : c \times p : : t : I.$$

Esta proporción general sirve para hallar el valor de cualquiera de las cuatro cantidades c, p, t é I, conocido el de las tres restantes (1). En efecto de ella resulta

$$I = \frac{c \times p \times t}{100 \times a}. \qquad 1.^a$$

De ella resulta también

$$t = \frac{100 \times a \times I}{c \times p}. \qquad 2.^a$$

De la misma citada proporción se deduce que es

$$c \times p = \frac{100 \times a \times I}{t};$$

y, dividiendo los dos miembros de esta ecuación por c, será

$$p = \frac{100 \times a \times I}{t \times c}; \qquad 3.^a$$

y, si en esa misma ecuación, en vez de dividir sus dos miembros por c, los dividimos por p, tendremos

$$c = \frac{100 \times a \times I}{t \times p}. \qquad 4.^a$$

Estas cuatro fórmulas, 1.ª, 2.ª, 3.ª y 4.ª, nos dan el valor de las cuatro mencionadas incógnitas.

---

(1) El valor de a, tiempo de 1 año, es siempre conocido y valdrá 1, si el tiempo está expresado en años; valdrá 12 si está expresado en meses, y valdrá 360, si lo está en días.—El año en el comercio se considera, nó de 365, sinó de 360 días.

PROBLEMA 161.

¿Qué capital será aquel que, impuesto al 8 p 0/0 anual de interés simple, ha producido en 3 años 1000 pesetas de utilidad?

Resoluciones.

1.ª—Tenemos *(probl. anterior, fórm. 4.ª):*

$$c = \frac{100 \times a \times I}{t \times p};$$

y, dando valores, será

$$c = \frac{100 \times 1 \times 1000}{8 \times 3} = 4166‘67 \text{ pesetas.}$$

2.ª Si queremos prescindir de la fórmula, diremos: supongamos que el capital en cuestión ha estado impuesto un año y llamemos i al interés que en él ha producido. En igualdad de tiempo los intereses son proporcionales á los capitales. Tendremos, pues,

$$100 : c : : 8 : i.$$

Pero el capital c no ha estado impuesto 1 año, sinó 3. Cuando los capitales son iguales *(ó uno mismo)* y los tiempos son diferentes, los intereses son proporcionales á los tiempos. Será, pues,

$$1 \text{ año} : 3 \text{ años} : : i : 1000.$$

Cabe hallar el valor de i en la 2.ª proporción y sustituirle en la 1.ª; pero es preferible multiplicar ordenadamente las dos proporciones. Haciéndolo así y suprimiendo el factor común i, se tendrá

$$100 \times 1 : 3c : : 8 : 1000;$$

de donde

$$3c = \frac{100 \times 1000}{8};$$

y, dividiendo por 3 los dos miembros, resultará

$$c = \frac{100 \times 1000}{8 \times 3} = 4166{`}67 \text{ pesetas.}$$

3.ª—Si á 8 pesetas de interés anual corresponden 100 de capital, á 1 corresponderán 8 veces menos: corresponderán, pues, $\frac{100}{8}$: y, si estas pesetas de capital corresponden á 1 de interés, á las 1000 corresponderá un capital 1000 veces mayor: corresponderán, pues, $\frac{100 \times 1000}{8}$ pesetas. Pero esto se entiende siendo un año el tiempo de imposición. Siendo 3, el capital será 3 veces menor: será, pues, $\frac{100 \times 1000}{8 \times 3} = 4166{`}67$ pesetas.

Nota.—Este último razonamiento ha podido hacerse así:

Si el capital ha producido 1000 pesetas de interés en 3 años, en 1 habrá producido 3 veces menos: habrá, pues, producido $\frac{1000}{3}$ pesetas. Ahora, si á 8 pesetas de interés anual corresponden 100 de capital, á 1 corresponderán 8 veces menos: corresponderán, pues, $\frac{100}{8}$; y, si estas pesetas de capital corresponden á 1 de interés anual, á las $\frac{1000}{3}$, que también son de interés anual, corresponderá un capital $\frac{1000}{3}$ veces mayor: corresponderán, pues,

$$\frac{100}{8} \times \frac{1000}{3} = \frac{100 \times 1000}{8 \times 3} = 4166{`}67 \text{ pesetas.}$$

PROBLEMA 162.

¿A qué tanto p 0/0 anual de interés simple habrá estado impuesto el capital 9000 pesetas, el cual ha producido en 200 días 300 pesetas de ganancia?

Resoluciones.

1.ª—Tenemos *(probl. 160, fórm. 2.ª)*

$$t = \frac{100 \times a \times I}{c \times p};$$

y dando valores, será

$$t = \frac{100 \times 360 \times 300}{9000 \times 200} = 6 \text{ pesetas.}$$

Si se prescinde de la fórmula, hay que repetir aquí el razonamiento empleado en la resolución del citado problema general número 160, como se hizo en la 2.ª del problema particular anterior.

2.ª—Si el capital 9000 pesetas ha producido 300 de interés en 200 días, en 1 habrá producido 200 veces menos; habrá producido, pues, $\frac{300}{200}$; y en 360 días *(un año)* habrá producido 360 veces más: habrá, pues, producido $\frac{300 \times 360}{200}$. Si estas pesetas de interés han producido en un año las 9000 del capital, una de éstas habrá producido 9000 veces menos: habrá, pues, producido $\frac{300 \times 360}{200 \times 9000}$; y, si estas pesetas ha producido 1 de las del capital, 100 de éstas habrán producido 100 veces más: habrán producido, pues,

$$\frac{300 \,.\, 360 \,.\, 100}{200 \,.\, 9000} = 6 \text{ pesetas.}$$

PROBLEMA 163.

¿En cuánto tiempo habrá producido 825 reales el capital 6800 íd., impuesto al interés simple de $4\frac{1}{2}$ p 0/0 anual?

Resoluciones.

1.ª—Tenemos *(probl. 160; fórm. 3.ª)*

$$p = \frac{100 . a . I}{t . c};$$

y dando valores, será

$$p = \frac{100 . 12 . 825}{4'5 . 6800} = 32'35 \text{ meses} = 32 \text{ meses y } 10\tfrac{1}{2} \text{ días.}$$

Si se prescinde de la anterior fórmula, hay que repetir aquí el razonamiento empleado en el problema general número 160.

2.ª--Averigüemos, como antes, el tiempo en meses.

Si, para que 100 reales produzcan 4'5 íd. se necesitan 12 meses, para que los produzca 1 solo real se necesitarán 100 veces más tiempo: se necesitarán, pues, 12 × 100 meses; y, si estos meses necesita 1 solo real, los 6800 del capital necesitarán un tiempo 6800 veces menor: necesitarán, pues, $\frac{12 . 100}{6800}$ meses. Si este tiempo necesitan los 6800 reales para producir 4'5, para producir 1 necesitarán un tiempo 4'5 veces menor: será pués, $\frac{12 . 100}{6800 . 4'5}$ meses. Y si este tiempo necesitan para producir un real, para producir los 825 que en el enunciado se dicen, necesitarán un tiempo 825 veces mayor: será, pues, este tiempo $\frac{12 . 100 . 825}{6800 . 4'5} = 32'35$ meses.

PROBLEMA 164

¿Cuánto deberá deducirse del valor nominal de una letra de 5000 pesetas que vence dentro de un año y se abona hoy, siendo 5 el tanto por ciento anual, ya de descuento, ya de interés?

Resoluciones.

Este problema es el caso de la regla de descuento en que el plazo de letra es precisamente un año.

Hay dos métodos de descontar. Consiste el 1.º en que el tenedor, ó dueño de la letra, y el tomador ó adquiridor de ella, convienen en rebajar de cada 100 unidades de dinero un tanto, que se llama tanto por ciento *de descuento.* Este método es el usado en el comercio; por lo que se apellida *comercial.*

El 2.º método consiste en deducir del valor nominal de la letra *el interés* que, durante lo que resta del plazo de la misma, puede producir al tenedor la cantidad que le anticipa el tomador y del cual éste se priva. Este método, como sólidamente fundado en razón, se denomina *racional.*

Apliquemos estos dos métodos, puesto que los dos se piden, á la resolución del problema propuesto.

Mètodo comercial.

Resol. 1.ª—Si de 100 pesetas se deducen 5, de 5000 se deducirán x. Será, pues,

$$100 : 5 : : 5000 : x;$$

de donde

$$x = \frac{5 \,.\, 5000}{100} = 250.$$

Siendo el descuento 250 pesetas, el valor actual será 5000 — 250 = 4750.

2.ª – Si de 100 pesetas, se deducen 5, de 1 se deducirán 100 veces menos: se deducirán, pues, $\frac{5}{100}$; y, si esto se deduce de 1 peseta, de 5000 se deducirán 5000 veces más; ó sea $\frac{5 \,.\, 5000}{100} = 250$ pesetas.

3.ª — Si de 100 pesetas se deducen 5, quedarán reducidas á 95: Luego las 5000 quedarán reducidas á x. Será, pues,

$$100 : 95 : : 5000 : x;$$

de donde

$$x = \frac{95 \,.\, 5000}{100} = 4750.$$

Siendo 5000 pesetas el valor nominal y 4750 el valor actual, el descuento será 5000 — 4750 = 250 pesetas.

Método racional.

Resolución.—Si 100 pesetas de las que hoy se anticipan producen 5 de interés al año, al final de éste se convierten en 105: luego 105 pesetas á cobrar á fin de un año hoy no valen más que 100: luego las 5000 del valor nominal, que son á cobrar á fin de un año, sólo valdrán ahora x. La proporción, pues, será

$$105 : 100 : : 5000 : x;$$

de donde

$$x = \frac{100 \,.\, 5000}{105} = 4761‘905.$$

Siendo 4761‘905 pesetas el valor actual de la letra, el descuento de la misma será

$$5000 — 4761‘905 = 238‘095 \text{ pesetas.}$$

Nota.—Como se ve, el descuento obtenido por el 1.^er^ método excede al obtenido por el 2.º en 250 — 238‘095 = 11‘905 pesetas. Esta diferencia de resultados proviene de que por el 2.º método se descuenta el interés únicamente de la cantidad que se anticipa, que es lo justo, racional y equitativo, al paso que por el 1.º se descuenta el interés, no sólo de la cantidad que el tomador anticipa, sinó también de la que se reserva como descuento. Esto último es inícuo, irracional y soberanamente injusto.

PROBLEMA 165.

¿Cuál es hoy el valor de un pagaré de 7500 reales que vence dentro de 195 días, siendo 6 el tanto por ciento de descuento anual, y cuál siendo 6 el tanto por ciento anual de interés?

Resoluciones.

Este problema es el caso de la regla de descuento en que el plazo de la letra ó pagaré es diferente de un año. Emplearemos en su resolución los dos métodos que hay de descontar *(probl. anterior)*, puesto que los dos se exigen en el enunciado.

Método comercial.

Resol. 1.ª—Hallaremos 1.º el descuento de todo el valor nominal, correspondiente al año, ó 360 días, y deduciremos de él el correspondiente á los 195 días, plazo del pagaré. Tendremos, pues,

$$100 : 6 :: 7500 : x$$

y

$$360 : 195 :: x : z.$$

Ahora, ó se despeja á x en la 1.ª proposión y su valor se sustituye en la 2.ª, ó, lo que es preferible, se multiplican ordenadamente las dos proporciones y se suprime el factor común x. Haciéndolo así, se tendrá

$$100 \times 360 : 6 \times 195 :: 7500 : z;$$

de donde

$$z = \frac{6 \,.\, 195 \,.\, 7500}{100 \,.\, 360} = 243{`}75.$$

Siendo 243'75 reales el descuento del pagaré, el valor actual de éste será 7500 — 243'75 = 7256'25 reales.

2.ª—Del 6 p 0/0 de descuento al año deduciremos el tanto p 0/0 correspondiente á los 195 días, plazo del pagaré. Al efecto diremos: si de 100 reales se deducen 6 al año, ó á 360 días, á los 195 del plazo del pagaré, se descontarán x reales. Será, pues,

$$360 : 195 \; ; : 6 : x. \qquad \text{(A)}$$

Si de 100 reales se deducen x en los 195 días, de los 7500 reales se deducirán en igual tiempo z reales; esto es,

$$100 : 7500 : x : z.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos proporciones y suprimiendo el factor común x, se tendrá

$$360 \times 100 : 195 \times 7500 : \; ; 6 : z;$$

de donde

$$z = \frac{195 \,.\, 7500 \,.\, 6}{360 \,.\, 100} = 243{`}75.$$

3.ª—Si de 100 reales se deducen 6 al año, de 1 se deducirá 100 veces menos: se deducirá, pues, $\frac{6}{100}$; y, si esto se deduce de 1 real, de 7500 se deducirán 7500 veces más: esto es, $\frac{6 \,.\, 7500}{100}$. Si estos reales se deducen de 7500 al año, ó á los 360 días, por 1 día se deducirán 360 veces menos: se deducirán, pues, $\frac{6 \,.\, 7500}{100 \,.\, 360}$; y, si estos reales se deducen por 1 día, por los 195 días se deducirán 195 veces más; ó sea $\frac{6 \,.\, 7500 \,.\, 195}{100 \,.\, 360} = 243{`}75$ reales.

4.ª—Averiguado por la proporción (A) de la resolución 2.ª que x, tanto p 0/0 correspondiente á los 195 días, es igual, á $\frac{195 . 6}{360}$ = 3'25, diremos: si, por virtud de este descuento, 100 reales quedan reducidos á 96'75, los 7500 se reducirán á z; esto es,

$$100 : 96'75 : : 7500 : z;$$

de donde

$$z = \frac{96'75 . 7500}{100} = 7256'25 \text{ reales.}$$

Luego el descuento será 7500 — 7256'25 = 243'75 rs.

Método racional.

Resolución.—Averiguado en la resolución anterior que el tanto p 0/0 de interés correspondiente á los 195 días es 3'25 reales, diremos *(problema anterior, 2.º método):*

$$103'25 : 100 : : 7500 : x;$$

de donde $$x = \frac{100 . 7500}{103'25} = 7263'92,$$

Siendo 7263'92 reales el valor actual, el descuento será 7500 — 7263'92 = 236'08 reales.

Nota.—Véase la del problema anterior.

PROBLEMA 166.

Un sujeto tiene un pagaré que vence dentro de 5 meses, y trata de negociarlo hoy al 6 por ciento anual. De hacer la negociación por el procedimiento racional, ó del interés, á verificarla por el comercial, ó del descuento, resulta una diferencia de 9'15 pesetas. ¿A cuántas se eleva el valor nominal del pagaré?

Resolución.

Sea n el valor nominal del pagaré. Determinemos 1.º el descuento que á este valor corresponde según el procedimiento comercial. Al efecto diremos *(probl. 164)*: si de 100 pesetas se descuentan 6 al año, de las *n* pesetas se descontarán x. Tendremos, pues,

$$100 : 6 : : n : x = \frac{6\ n}{100} = 0‘06\,n;$$

y, si de *n* pesetas se descuentan 0‘06 *n* al año, ó á los 12 meses, á los 5 meses se descontarán *z*. Será, pues,

$$12 : 5 : : 0‘06\,n : z = \frac{5\ .\ 0‘06\ n}{12} = 0‘025\,n\ \text{pts.}$$

descuento que se buscaba.

Determinemos ahora el correspondiente á *n* según el procedimiento racional. Tendremos *(el mismo probl. 164)* que, si 100 pesetas producen 6 de interés al año, á los 5 meses producirán x. Se tendrá, pues,

$$12 : 5 : : 6 : x = \frac{5\ .\ 6}{12} = 2{,}5\ \text{pts.}$$

Ahora tendremos que, si 100 + 2‘5 pesetas de á fin de los 5 meses hoy no valen más que 100, las *n* pesetas, que son de á fin de los 5 meses, hoy no valdrán más que *z*. Será, pues,

$$102‘5 : 100 : : n : z = \frac{100\ n}{102{\cdot}5} = 0{\cdot}97561\,n\ \text{pts.},$$

valor actual del pagaré

Siendo *n* el valor nominal del pagaré y 0‘97561 *n* su valor actual, su descuento será *n* — 0‘97561 *n*.

Tenemos que el descuento del pagaré, calculado por el procedimiento comercial, es 0‘025 *n* pesetas, y por el procedimiento racional, *n* — 0‘97561 *n*. Luego la ecuación será

$$0‘025\,n - (n - 0‘97561\,n) = 9‘15;$$

y, quitando el paréntesis, se tendrá

$$0‘025\,n - n + 0‘97561\,n = 9‘15;$$

y, reduciendo en el 1.^{er} miembro los términos semejantes, resultará

$$0‘00061\, n = 9‘15;$$

de donde

$$n = \frac{9‘15}{0‘00061} = 15000 \text{ pesetas.}$$

valor nominal del pagaré.

Nota.—Este problema puede resolverse también hallando el descuento correspondiente á 1 peseta, tánto por el 1.^{er} procedimiento como por el 2.°, determinando luégo la diferencia entre ellos y dividiendo, por último, por esta diferencia la total 9‘15 pesetas.

El descuento correspondiente á la peseta, por el 1.^{er} procedimiento, es 0‘025 pesetas, y por el segundo, 0‘02439 ídem, y la diferencia de uno á otro, 0‘00061 íd. Ahora, claro es que, por cada vez que esta diferencia de descuento de 1 peseta quepa la diferencia 9‘15 pesetas del valor nominal del pagaré, se tendrá 1 peseta de este valor. Luego 9‘15 : 0‘00061 = 15000 pesetas será el valor nominal.

PROBLEMA 167.

Sabiendo que, en cambio á la par, 25 pesetas españolas equivalen á 26 francos franceses; 100 francos, á 26‘96 thaleres prusianos; 50 thaleres á 75‘08 florines austriacos; 10 florines, á 110‘58 piastras turcas; 1000 piastras, á 55,84 rublos rusos, y 500 rublos, á 1722‘60 chelines ingleses, ¿á cuántos chelines equivaldrán 20.000 pesetas?

Resoluciones.

1.ª—Este problema pertenece á la regla llamada *conjunta.* para resolverlo según esta regla, se sacan al frente todas las equivalencias que contenga el enunciado, disponiéndolas en columna de manera que el $1.^{er}$ miembro de cada una sea de la misma especie que el 2.º de la inmediata anterior. Hecho esto, la incógnita figurará, ó entre los primeros miembros, ó entre los segundos. Si figura entre los primeros, será igual al producto de todos los segundos, partido por el de todos los primeros *conocidos*; y, si figura entre los segundos, será igual al producto de todos los primeros, dividido por el de todos los segundos *conocidos*.

Esto sentado, y llamando x á los chelines á que equivalen las 20000 pesetas, tendremos las equivalencias siguientes:

x chel. = 20000 pesetas
25 pes. = 26 francos
100 fran. = 26‘96 thaleres
50 thal. = 75,08 florines
10 flor. = 110‘58 piastras
1000 piast. = 55‘84 rublos
500 rubl. = 1722‘60 chelines.

Como aquí la incógnita x figura entre los primeros miembros, será, por lo dicho antes,

$$x = \frac{20000 \;.\; 26 \;.\; 26\text{‘}96 \;.\; 75\text{‘}08 \;.\; 110\text{‘}58 \;.\; 55\text{‘}84 \;.\; 1722\text{·}60}{25 \;.\; 100 \;.\; 50 \;.\; 10 \;.\; 1000 \;.\; 500} \text{(a)}$$

= 17894‘40 chelines.

2.ª—Este problema, como todos los de su clase, puede resolverse también por reducción á la unidad. Al efecto, dispuestas, *por comodidad*, las equivalencias en la forma en que ya lo están, diremos:

Si 500 rublos valen 1722‘60 chelines, un solo rublo val-

(a) Antes de efectuar la división que indica este quebrado conviene suprimir los factores comunes á sus dos términos.

drá 500 veces menos: valdrá pues, $\frac{1722‘60}{500}$ chelines; y, si estos chelines vale 1 rublo, los 55‘84 rublos valdrán 55‘84 veces más: valdrán, pues, $\frac{1722‘60 \,.\, 55‘84}{500}$ chelines; y, como los 55‘84 rublos equivalen á 1000 piastras, las 1000 piastras valdrán estos mismos $\frac{1722‘60 \,.\, 55‘84}{500}$ chelines. Si 1000 piastras valen estos chelines, 1 valdrá 1000 veces menos: valdrá, pues, $\frac{1722‘60 \,.\, 55‘84}{500 \,.\, 1000}$ chelines; y 110‘58 piastras valdrán 110‘58 veces más: valdrán, pues, $\frac{1722‘60 \,.\, 55‘84 \,.\, 110‘58}{500 \,.\, 1000}$ chelines; y, como 110‘58 piastras equivalen á 10 florines, los 10 florines valdrán estos mismos $\frac{1722‘60 \,.\, 55‘84 \,.\, 110‘58}{500 \,.\, 1000}$ chelines. Si 10 florines valen estos chelines, 1 florín valdrá *(abreviando)* $\frac{1712‘60 \,.\, 55‘84 \,.\, 110‘58}{500 \,.\, 1000 \,.\, 10}$ chelines, y 75‘08 florines = 57 thaleres valdrán $\frac{1722‘60 \,.\, 55‘84 \,.\, 110‘58 \,.\, 75‘08}{500 \,.\, 1000 \,.\, 10}$ chelines. Si 50 thaleres valen estos chelines, 1 thaler valdrá $\frac{1722‘60 \,.\, 55‘84 \,.\, 110‘58 \,.\, 75‘08}{500 \,.\, 1000 \,.\, 10 \,.\, 50}$ chelines, y 26‘96 thaleres = 100 francos valdrán $\frac{1722‘60 \,.\, 55‘84 \,.\, 110‘58 \,.\, 75‘08 \,.\, 26‘96}{500 \,.\, 1000 \,.\, 10 \,.\, 50}$ chelines. Si 100 francos valen estos chelines, 1 valdrá $\frac{1722‘60 \,.\, 55‘84 \,.\, 110‘58 \,.\, 75‘08 \,.\, 26·96}{500 \,.\, 1000 \,.\, 10 \,.\, 50 \,.\, 100}$ chelines y 26 francos = 25 pesetas valdrán $\frac{1722‘60 \,.\, 55‘84 \,.\, 110‘58 \,.\, 75‘08 \,.\, 26‘96 \,.\, 26}{500 \,.\, 1000 \,.\, 10 \,.\, 50 \,.\, 100}$ chelines. Si 25 pesetas valen estos chelines, 1 valdrá

$$\frac{1722'60 \,.\, 55'84 \,.\, 110'58 \,.\, 75'08 \,.\, 26'96 \,.\, 26}{500 \,.\, 1000 \,.\, 10 \,.\, 50 \,.\, 100 \,.\, 25}$$ chelines, y las 20000 de que se trata valdrán

$$\frac{1722'60 \,.\, 55'84 \,.\, 110'58 \,.\, 75'08 \,.\, 26'96 \,.\, 26 \,.\, 20000}{500 \,.\, 1000 \,.\, 10 \,.\, 50 \,.\, 100 \,.\, 25} = 17894'40$$

chelines.

3.ª—Resolvamos la cuestión por medio de un sistema de proporciones. Al efecto diremos:

Si 25 pesetas valen 26 francos, las 20000 pesetas valdrán x francos. Tendremos, pues,

25 : 26 : : 20000 : x.

Si 100 francos valen 26·96 thaleres, los x francos valdrán *t* thaleres. Será, pues,

100 : 26'96 : : x : *t*.

Si 50 thaleres valen 75'08 florines, los *t* thaleres valdrán *f* florines; y será

50 : 75'08 : : *t* : *f*.

Si 10 florines valen 110'58 piastras, los *f* florines valdrán *p* piastras; y será

10 : 110'58 : : *f* : *p*.

Si 1000 piastras valen 55'84 rublos, las *p* piastras valdrán *r* rublos; y será

1000 : 55'84 : : *p* : *r*.

Y, si 500 rublos valen 1722'60 chelines, los *r* rublos valdrán *ch* chelines; y será

500 : 1722'60 : : *r* : *ch*.

Ahora cabe hallar el valor de x en la 1.ª proporción y sustituirle en la 2.ª; hallar en ésta el de *t* y reemplazarle en la 3.ª; &. &.; pero es preferible multiplicar ordenadamente las 6 proporciones y suprimir los factores x, *t*, *f*, *p* y *r*, comunes á los dos términos de la 2.ª razón. Hecho así, resultará

$25 \times 100 \times 50 \times 10 \times 1000 \times 500 : 26 \times 26'96 \times 75'08 \times 110'58 \times 55'84 \times 1722'60 : : 20000 : ch$; de donde

$$ch = \frac{26 . 26'96 . 75'08 . 110'58 . 55'84 . 1722'60 . 20000}{25 . 100 . 50 . 10 . 1000 . 500} = 17894'40.$$

PROBLEMA 168.

Se han mezclado 35 hectolitros de trigo de 20 pesetas uno con 40 de 18 pesetas, 50 de 16 y 53 de 15. ¿Cuál es el precio medio ó precio de la mezcla?

Resolución.

Este problema constituye el 1.º de los dos casos generales que se distinguen en la regla de aligación; caso en que se dan las cantidades de diferente especie que han de mezclarse y el precio de cada una de ellas y se pide el precio de la mezcla ó precio medio. Para resolverle, se hallan los valores de las cantidades de distinta especie que han de constituir la mezcla y se divide la suma de los valores por la suma de dichas cantidades. En efecto, en el caso presente

	los 35 hectolitros valdrán	35 × 20 =	700 pts.
	los 40 » «	40 × 18 =	720 »
	los 50 » »	50 × 16 =	800 »
y	los 53 » »	53 × 15 =	797 »
	Sumas	178 Hl.	3017 »

Por manera que los 178 hectolitros mezclados valen 3017 pesetas: luego 1 de ellos valdrá 178 veces menos. Valdrá, pues,

$$3017 : 178 = 16'95 \text{ pesetas.}$$

Nota.—A esta clase de problemas se reducen todos aquéllos que tienen por objeto hallar un término medio entre diferentes extremos. Al efecto se suman los valores de los extremos y la suma se divide por el número de éstos. Así que, si, por ejemplo, quisiéramos saber cuál ha sido la temperatura media en un día en que el termómetro marcó 6 grados á las ocho de la mañana, 8 á las diez, 9 $\frac{1}{2}$ á las doce, 11 á las tres de la tarde, 7 $\frac{1}{2}$ á las siete de la noche y 6 á las diez, sumaríamos las diferentes temperaturas observadas y dividiríamos la suma por el número de ellas. La suma de las temperaturas es $6 + 8 + 9\frac{1}{2} + 11 + 7\frac{1}{2} + 6 = 48$, y el número de ellas es 6. Luego la temperatura media que se busca sería

$$48 : 6 = 8 \text{ grados.}$$

PROBLEMA 169.

Se han mezclado 12 cántaras de vino de 13 reales una con otras 12 íd. de 9 íd. íd. y con otras 12 íd. de 8 íd. íd. ¿Cuál es el precio de la mezcla ó el precio medio?

Resolución.

Este problema puede resolverse como se resolvió el anterior; esto es, dividiendo la suma de los valores, que es 360 reales, por la suma de las cantidades mezcladas, que es 36 cántaros, y el cociente 360 : 36 = 10 reales será el precio de la mezcla. Mas, si se tiene en cuenta que las cantidades mezcladas lo han sido en proporciones iguales, se comprenderá que en este caso el precio de la mezcla es el término medio de los precios de las especies; esto es,

$$(13 + 9 + 8 = 30) : 3 = 10 \text{ reales.}$$

Hallar en este caso el término medio de los precios de las tres especies equivale á, en la división de la suma de los valores por la suma de las cantidades mezcladas, dividir á dividendo y divisor por el factor común 12, número de cántaras tomadas de cada especie de vino.

PROBLEMA 170.

Se han mezclado 7, 8 y 15 fanegas de trigo de tres precios diferentes: el valor de las 30 fanegas que constituyen la mezcla es 1080 reales. ¿Cuál es el precio medio de las especies mezcladas y cuál el particular que cada una de ellas tenía antes de entrar en la mezcla?

Resolución.

Este problema, por lo que se refiere á su 1.ª parte, viene á ser el 1.er caso de la regla de aligación.

Si las 30 fanegas de mezcla valen 1080 reales, evidentemente una de ellas valdrá 30 veces menos. Valdrá, pues,

$$1080 : 30 = 36 \text{ reales.}$$

Este, pues, es el precio medio ó el precio de la mezcla.

En cuanto á su 2.ª parte, el problema es indeterminado, porque cabe descomponer de mil maneras el valor total 1080 reales en tres partes, considerando cada una de ellas como el valor de cada una de las tres cantidades de trigo que se han mezclado. En cada una de estas infinitas descomposiciones resultaría que la combinación de los tres cocientes resultantes de dividir cada una de las tres partes por el respectivo número de fanegas mezcladas formaría una solución del problema. Habría, pues, infinidad de soluciones.

PROBLEMA 171.

En proporciones iguales se han mezclado tres especies de aceite de precio distinto: la masa total de la mezcla se ha vendido á 10 pesetas decalitro, precio medio correspondiente á los precios particulares de las especies mezcladas, habiendo producido la venta 720 pesetas. ¿Cuántos son los decalitros que se han mezclado de cada una de las tres especies de aceite y cuál el precio particular que tenía cada especie antes de mezclarse?

Resoluciones.

1.ª - Este problema, por lo que respecta á su 1.ª parte, puede muy bien considerarse como 1.^{er} caso de la regla de aligacion.

Como, según el enunciado, el valor de todos los decalitros mezclados es 720 pesetas y el de cada uno de ellos es 10 ídem, es evidente que el número de éstos será

$$720 : 10 = 72.$$

Ahora, como de cada una de las tres especies de aceite entra en la mezcla un número igual de decalitros, los que entran de cada especie serán

$$72 : 3 = 24.$$

En cuanto á su 2.ª parte, este problema es indeterminado por lo que se dijo en la 2.ª parte de la resolución del problema anterior. Puede además razonarse así: El precio medio, 10 pesetas, es el término medio entre los tres precios que se piden: el producto de un término medio por el número de extremos es siempre igual á la suma de estos: en el caso presente el producto de 10 × 3 es 30: luego toda combinación de 3 números cuya suma sea 30 formará solución del problema en lo que respecta á la determinación de los precios particulares: luego el problema es indeterminado en esta parte.

2.ª—Sea x los decalitros de la 1.ª especie de aceite: x será también los de la 2.ª y los de la 3.ª especie. El valor en mezcla de los 1.ºˢ decalitros será 10 x; el de los 2.ºˢ, 10 x, y el de los 3.ºˢ, 10 x. Luego la ecuación será

$$10\,x + 10\,x + 10\,x = 720$$

ó bien

$$30\,x = 720:$$

de donde

$$x = \frac{720}{30} = 24 \text{ decalitros.}$$

PROBLEMA 172.

Un labrador debe por contribuciones 568 pesetas, que quiere pagar con el importe de un número igual de fanegas de habas, aluvias y garbanzos, vendidas á 7, 24 y 40 pesetas, respectivamente. ¿Cuántas fanegas de cada clase deberá vender?

Resoluciones.

1.ª—Sea x las fanegas de habas: x será también las de aluvias y las de garbanzos. Si cada fanega de habas, cada fanega de aluvias y cada fanega de garbanzos vale, respectivamente, 7, 24 y 40 pesetas, las x fanegas de habas, de aluvias y de garbanzos valdrán, respectivamente, 7 x, 24 x y 40 x pesetas. Luego la ecuación será

$$7\,x + 24\,x + 40\,x = 568;$$

y, simplificando el 1ᵉʳ miembro, se tendrá

$$71\,x = 568;$$

de donde

$$x = \frac{568}{71} = 8.$$

Debe, pues, vender 8 fanegas de cada una de las tres citadas clases de legumbres.

2.ª - Es evidente que por cada vez que la suma de los tres precios, 7 + 24 + 40 = 71, quepa en la cantidad 568, importe del total de fanegas, el labrador tendrá que vender 1 fanega de habas, otra de aluvias y otra de garbanzos. La cuestión, pues, está reducida á dividir 568 por 71. El cociente será

$$568 : 71 = 8 \text{ fanegas.}$$

3.ª—Este problema viene á ser un recíproco del 1.° de los dos casos generales que se distinguen en la regla de aligación *(tál caso es el problema 168)*, puesto que aquí se nos dan explícitamente los precios de las especies y la suma de los valores de éstas é implícitamente el precio medio de las mismas, que por ser 3 éstas *y en cantidades iguales*, es (7 + 24 + 40 = 71) : 3 = 23 $^2/_3$, y se nos pide la suma de las especies que entran en ella en proporción común. Así como, si en dicho primer caso se divide la suma de los valores por la de las especies, el cociente es el precio medio, así también si se la divide por el precio medio, resultará de cociente la suma de las especies. Tendremos, pues,

$$568 : 23 \, ^2/_3 = 24 \text{ fanegas;}$$

y, como estas 24 fanegas son de tres especies en número igual, las de cada especie serán

$$24 : 3 = 8 \text{ fanegas.}$$

PROBLEMA 173.

Un labrador ha comprado una mula en 921 pesetas, que quiere pagar con el importe de habas, aluvias y garbanzos, vendidos, respectivamente, á 7, 24 y 40 pesetas la fanega: desea que en la venta entren 8 fanegas más de habas que de aluvias y 5 más de aluvias que de garbanzos. ¿Cuántas son las fanegas que debe vender de cada una de estas tres clases de legumbres?

Resoluciones.

1.ª—Sea x las fanegas de garbanzos: las de aluvias serán $x + 5$ y las de habas $x + 5 + 8 = x + 13$. Si cada fanega de garbanzos vale 40 pesetas, las x fanegas valdrán $40x$; si cada fanega de aluvias vale 24 pesetas, las $x + 5$ fanegas valdrán $(x + 5) \times 24 = 24x + 120$ pesetas; y si cada fanega de habas vale 7 pesetas, las $x + 13$ fanegas valdrán $(x + 13) \times 7 = 7x + 91$ pesetas. Luego la ecuación será

$$40x + 24x + 120 + 7x + 91 = 921;$$

y, transponiendo términos y reduciendo los semejantes, se tendrá

$$71x = 710;$$

de donde

$$x = \frac{710}{71} = 10.$$

Si las fanegas de garbanzos son 10, las de aluvias serán $10 + 5 = 15$, y las de habas $15 + 8 = 23$.

2.ª—Si en la venta han de entrar 5 fanegas más de aluvias que de garbanzos y 8 más de habas que de aluvias, entrarán $8 + 5 = 13$ más de habas que de garbanzos. El valor de las 5 fanegas de exceso de aluvias, será

	$5 \times 24 = 120$	pesetas;
y el de las 13 íd. de habas	$13 \times 7 = 91$	»
Total	211	»

Ahora, si del importe total, 921 pesetas, se resta este importe parcial, 211 pesetas, el resto $921 - 211 = 710$ será el importe de un número igual de fanegas de habas, de aluvias y de garbanzos. Este número *(problema anterior)* será 10, que representa las fanegas de garbanzos, con cuyo número hemos igualado el de las de aluvias y de habas. Luego las de aluvias serán $10 + 5 = 15$; y las de habas, $10 + 13 = 23$.

PROBLEMA 174

Un labrador ha comprado una heredad en 1170 pesetas, que quiere pagar con el importe de habas, aluvias y garbanzos, vendidos, respectivamente, á 7, 24 y 40 pesetas la fanega: desea que el número de fanegas de aluvias que ha de vender sea doble que el de garbanzos y el de habas triple que el de aluvias. ¿Cuántas son las fanegas que necesita vender de cada una de estas tres clases de legumbres?

Resoluciones.

1.ª— Sea x las fanegas de garbanzos: las de aluvias serán 2x, y las de habas $2x \times 3 = 6x$. El valor de las x fanegas de garbanzos será 40x; el de las 2x de aluvias, $2x \times 24 = 48x$; y el de las 6x de habas, $6x \times 7 = 42x$. Luego la ecuación será

$$40x + 48x + 42x = 1170;$$

y, simplificando el 1.^er^ miembro, se tendrá

$$130x = 1170;$$

de donde

$$x = \frac{1170}{130} = 9.$$

Resulta que las fanegas de garbanzos son 9: luego las de aluvias serán 9 × 2 = 18, y las de habas 18 × 3 = 54.

2.ª—El valor de 1 fanega de garbanzos es 40 pesetas; el de 2 de aluvias 24 × 2 = 48; y el de 6 de habas, 7 × 6 = 42. Luego, por cada vez que la suma 40 + 48 + 42 = 130 pesetas quepa en el valor total 1170 pesetas, tendremos 1 fanega de garbanzos, 2 de aluvias y 6 de habas. Tendremos, pues,

$$1170 : 130 = 9.$$

Por manera que las fanegas de garbanzos son 9; las de aluvias, 9 × 2 = 18, y las de habas, 9 × 6 = 54.

PROBLEMA 175.

Se han mezclado 5, 8 y 12 arrobas de azúcar de tres especies: el precio de la 1.ª excede al de la 2.ª en 5 reales y el de la 2.ª al de la 3.ª en 2: las 25 arrobas mezcladas se han vendido á su precio medio correspondiente, habiendo producido la venta 1224 reales. ¿Cuál es el precio medio ó de la mezcla y cuál el precio que tenía cada una de las tres especies antes de ser mezcladas?

Resoluciones.

1.ª—Si el valor de las 25 arrobas de mezcla ha sido 1224 reales, evidentemente el de 1 de ellas será 1224 : 25 = 48‘96. Este, pues, es el precio medio.

Determinemos ahora el precio de cada una de las especies antes de ser mezcladas.

Sea x el precio de la 3.ª especie de azúcar: el de la 2.ª será $x + 2$; y el de la 1.ª, $x + 2 + 5 = x + 7$. El valor del azúcar de la 3.ª especie será $12x$; el del azúcar de la 2.ª, $(x + 2) \times 8 = 8x + 16$, y el del de la 1.ª, $(x + 7) \times 5 = 5x + 35$. Luego la ecuación será

$$12x + 8x + 16 + 5x + 35 = 1224;$$

y, haciendo la transposición de términos y la reducción de los semejantes, se tendrá

$$25x = 1173;$$

de donde

$$x = \frac{1173}{25} = 46‘92.$$

Si el precio de la 3.ª especie de azúcar es 46‘92 reales, el de la 2.ª será 46‘92 + 2 = 48‘92, y el de la primera, 48‘92 + 5 = 53‘92.

2.ª—Si el precio de las 8 arrobas de azúcar de la 2.ª especie excede en 2 reales al precio del azúcar de la 3.ª especie, el valor de las 8 arrobas excederá en 8 × 2 = 16 reales al valor que tendrían siendo su precio igual al de la 3.ª especie; y, si el precio de las 5 arrobas de la 1.ª especie excede en 5 reales al precio de la 2.ª especie y, por consiguiente, en 5 + 2 = 7 al precio de la 3.ª, el valor de las 5 arrobas de la 1.ª especie excederá en 5 × 7 = 35 reales al valor que tendrían siendo su precio igual al de la 3.ª especie. Luego, si del valor total 1224 reales restamos la suma de dichos valores excedentes, 16 + 35 = 51 reales el resto 1224 — 51 = 1173 reales será el valor de las 25 arrobas de mezcla vendidas á un precio igual. Luego este precio igual será

$$1173 : 25 = 46‘92 \text{ reales.}$$

Este, pues, es el precio de la 3.ª especie de azúcar, puesto que con él hemos igualado los de las otras dos especies. Luego el de la 2.ª será 46‘92 + 2 = 48‘92, y el de la primera, 48‘92 + 5 = 53‘92.

PROBLEMA 176.

Se han mezclado tres especies de cebada de precio distinto: de la 1.ª especie ha entrado en la mezcla un número de fanegas triplo del de la 2.ª especie, y de ésta un número cuádruplo del de la 3.ª: la masa total de la mezcla se ha vendido á 6'25 pesetas fanega, precio medio correspondiente á los precios de las especies mezcladas, habiendo producido la venta 1062'50 pesetas. ¿Cuántas son las fanegas mezcladas de cada una de las tres especies de cebada?

Resoluciones.

1.ª--Sea x las fanegas de la 3.ª especie de cebada: las de la 2.ª serán 4 x, y las de la primera $4x \times 3 = 12x$. El valor de las x fanegas de la 3.ª especie será 6'25 x pesetas; el de las 4 x fanegas de la 2.ª especie, $4x \times 6'25 = 25x$; y el de las 12 x fanegas de la 1.ª especie, $12x \times 6'25 = 75x$ pesetas. Luego la ecuación será

$$6'25x + 25x + 75x = 1062'50$$

ó bien, simplificando,

$$106'25x = 1062'50;$$

de donde

$$x = \frac{1062'50}{106'25} = 10.$$

Resulta que las fanegas de cebada de la 3.ª especie son 10: luego las de la 2.ª serán $10 \times 4 = 40$, y las de la primera, $40 \times 3 = 120$.

2.ª—Siendo el valor de todas las fanegas mezcladas 1062'50 pesetas y el de una de ellas 6'25, el número de fanegas de la mezcla será

$$1062'50 : 6'25 = 170.$$

Ahora, como por cada fanega de la 3.ª especie entran en la mezcla 4 de la 2.ª y 12 de la 1.ª, la cuestión está reducida á dividir la masa total de la mezcla, 170 fanegas, en 3 partes proporcionales á los números 1, 4 y 12. Tendremos, pues, *(problema 148)*:

fanegas de la 3.ª especie. . . .	10
íd. de la 2.ª íd.	40
íd. de la 3.ª íd.	120
Total. . .	170

PROBLEMA 177.

Trátase de mezclar sustancias de dos especies, cuyos precios son P y p, de los cuales el 1.º es mayor que el 2.º ¿En qué proporciones deberán esas dos sustancias entrar en la mezcla para que el precio de ésta sea p'?

Resoluciones.

1.ª—Sea S la cantidad que ha de tomarse de la 1.ª sustancia y s la que debe tomarse de la 2.ª Cada unidad de las de S que, valiendo P monedas, se venda á p' monedas, produce una pérdida de $P - p'$ monedas: luego las S unidades la producirán de $(P - p') \times S$ monedas.

Cada unidad de las de s que, valiendo p monedas, se venda á p' monedas, produce una ganancia de $p' - p$: luego las s unidades la producirán de $(p' - p) \times s$.

Ahora, como esta pérdida y esta ganancia se compensan mútuamente, resulta que es

$$(P - p') \times S = (p' - p) \times s.$$

Si, como aquí acontece, el producto de dos cantidades es igual al producto de otras dos, con las cuatro se puede formar proporción poniendo por extremos los factores del un producto y por medios los del otro. Será, pués,

$$S : s : : p' - p : P - p' \qquad (X)$$

Esta proporción general nos dice que, cuando las sustancias que se han de mezclar son dos, las cantidades que de ellas deben tomarse están en razón inversa de las diferencias de sus precios al precio medio; esto es, que la cantidad de la 1.ª especie es la diferencia del precio medio al precio de la 2.ª y que la cantidad de la 2.ª es la diferencia del precio de la 1.ª al precio medio.

Nota.—Este problema es indeterminado, por cuanto, como $P - p'$ y $p' - p$ son el uno término medio y el otro término extremo de la proporción (X) y, si un extremo y un medio de una proporción se multiplican ó dividen por un mismo número, la proporción no varía, si á dichos extremo y medio los multiplicamos ó dividimos por un número cualquiera, los productos ó los cocientes resultantes formarán solución del problema; así que éste puede tener todas las que se quiera.

Resol. 2.ª - Una unidad de las de S produce la pérdida $P - p'$; y, como esta pérdida ha de compensarse con la ganancia que produzcan las unidades que al efecto sea necesario mezclar de las de s y como cada una de estas unidades produce la ganancia $p' - p$, es evidente que por cada vez que esta ganancia quepa en aquella pérdida tendremos que mezclar 1 unidad de las de s. Luego

$$\frac{P - p'}{p' - p} \qquad (Z)$$

es el número de unidades que deben tomarse de las de s por cada 1 que se tome de las de S.

De la misma manera se demuestra que

$$\frac{p' - p}{P - p'} \qquad (T)$$

es el número de unidades que debe mezclarse de las de S por cada uno que se mezcle de las de *s*.

Nota.—También aquí se ve que el problema es indeternado, pues, si los dos términos de cualquiera de los dos quebrados que constituyen las fórmulas (Z) y (T), se multiplican ó dividen por un mismo número, como el quebrado nó por esto cambia de valor, expresará constantemente la misma relación.

PROBLEMA 178.

Con café de 20 reales kilogramo se ha de mezclar otro de 13 íd. íd. ¿Cuántos kilogramos deberán mezlarse de uno y de otro café para que el precio de la mezcla sea 15 reales?

Resoluciones.

1.ª—Este problema constituye el 1.er caso de los dos que comprende el 2.º general de la regla de aligación, por ser sólo dos las especies que han de mezclarse. Según la fórmula (X) del problema general anterior, tendremos

$$S : s :: p' - p : P - p';$$

y, dando valores, será

$$S : s :: 15 - 13 : 20 - 15,$$

ó bien

$$S : s :: 2 : 5.$$

Lo que nos dice que por cada 2 kilogramos del café de 20 reales hay que mezclar 5 del café de 13.

En la práctica la operación se dispone colocando los precios en columna y abrazándolos con una llave, á cuyo vértice se escribe el precio medio y se ejecuta poniendo á la derecha del precio menor la diferencia del mayor al precio medio, y á la derecha del mayor la diferencia del precio medio al menor, en esta forma.

$$15\left\{\begin{array}{l}20.\;.\;.\;.\;.\;2\\13.\;.\;.\;.\;.\;5.\end{array}\right.$$

2.ª—Razonando como en la resolución 2.ª del problema anterior, diríamos: cada kilogramo de café de 20 reales, vendido á 15, produce una pérdida de 5 reales, la cual ha de compensarse con otros 5 reales que produzcan de ganancia los kilogramos que sea necesario tomar del café de 13, vendido á 15; y, como cada kilogramo de éstos produce 2 reales de ganancia, el número de los que deben tomarse será $5 : 2 = 2\frac{1}{2}$. Luego por cada kilogramo que se tome del 1.er café hay que tomar $2\frac{1}{2}$ del 2.º; lo cual, como se ve, constituye otra de las infinitas soluciones *(notas del problema anterior)* que tiene el problema.

Lo mismo podíamos haber dicho: cada kilogramo del café de 13 reales, vendido á 15, produce una ganancia de 2 reales, la cual ha de compensarse con otros 2 reales que produzcan de pérdida los kilogramos que sea necesario mezclar del café de 20 reales; y, como cada kilogramo de éstos produce 5 reales de pérdida, el número de los que deben mezclarse será $2 : 5 = 0'4$. Luego por cada kilogramo del 2.º café hay que mezclar 0'4 kilogramos del 1.º.

Y aquí tenemos otra nueva solución del problema propuesto.

Nota.—Para hacer determinados, ó que tengan una solución única, los problemas de esta clase, es indispensable que, además de los precios de las 2 especies y del precio medio, se den conocidas, ó la suma de las dos cantidades que han de mezclarse, ó la diferencia de las mismas, ó una, cualquiera de ellas.

PROBLEMA 179.

Trátase de mezclar arroz de 0‘32 y de 0‘27 pesetas libra: se quiere que el precio de la mezcla sea 0‘30 pesetas, ¿cuántas libras deberán tomarse de cada especie de arroz para que resulten 480 de mezcla?

Resoluciones.

1.ª—Sea x las libras de la 1.ª especie de arroz y z las de la 2.ª. Tendremos *(probl. 177).*

$$x : z :: 0\text{‘}30 - 0\text{‘}27 : 0\text{‘}32 - 0\text{‘}30;$$

ó bien

$$x : z :: 0\text{‘}03 : 0\text{‘}02;$$

ó sea

$$x : z :: 3 : 2.$$

En toda proporción la suma de antecedente y consecuente de la 1.ª razón es á su antecedente, *ó consecuente*, como la suma de antecedente y consecuente de la 2.ª razón es á su antecedente, *ó consecuente*. Tendremos, pues,

$$x + z : x :: 3 + 2 = 5 : 3;$$

y, como, según el dato final, es $x + z = 480$, sustituyendo, se tendrá

$$480 : x :: 5 : 3;$$

de donde

$$x = \frac{480 . 3}{5} = 288.$$

Si del 1.er café hay que tomar 288 libras, del 2.º habrán de tomarse 480 — 288 = 192.

2.ª—Prescindamos por un momento de que la suma de las libras mezcladas haya de ser precisamente 480. El problema en este caso queda reducido al anterior, cualquiera de cuyas resoluciones puede emplearse. Empleemos la 2.a. Resultará, tomando el céntimo de peseta como unidad:

$$30\left\{\begin{array}{l} 32\ .\ .\ .\ .\ .\ 3 \\ 27\ .\ .\ .\ .\ .\ 2 \end{array}\right.$$

$$\text{Suma}\quad \overline{5.}$$

Ahora diremos: si para que la suma sea 5 libras hay que tomar 3 del 1.er arroz, para que sea 480 habrá que tomar x. Tendremos, pues,

$$5 : 480 : : 3 : x;$$

de donde $$x = \frac{480 \cdot 3}{5} = 288.$$

Ya procédase como antes.

3.a—Como cada 3 céntimos de pérdida representan 1 libra del 1.er arroz, y cada 2 céntimos de ganancia otra libra del 2.o, la cuestión está reducida á dividir el total de libras, 480, en 2 partes proporcionales á los números 3 y 2. Será, pues, (*problema 148*):

libras del 1.er arroz.	288
íd. del 2.o íd.	192
Suma. . .	480

PROBLEMA 180.

Con salvado cuyo precio es 15 reales fanega, ha de mezclarse otro cuyo precio es $11\frac{1}{2}$ íd. íd. ¿Cuántas fanegas deberán tomarse de cada clase de salvado, para que de la 2.a resulten 25 más que de la 1.a y para que el precio de la mezcla sea $12\frac{1}{2}$ reales?

Resoluciones.

1.a—Sea x las fanegas que han de mezclarse del 1.er salvado y z las del 2.º. Tendremos (*probl. 177*)

$$x : z : : 12'5 - 11'5 : 15 - 12'5;$$

ó bien

$$x : z : : 1 : 2'5,$$

ó sea,

$$z : x : : 2'5 : 1.$$

En toda proporción la diferencia de antecedente y consecuente de la 1.ª razón es á su antecedente, *ó consecuente*, como la diferencia de antecedente y consecuente de la 2.ª razón es á su antecedente, *ó consecuente*. Tendremos, pues,

$$z - x : x : : 2'5 - 1 = 1'5 : 1;$$

y, como, según la hipótesi, es $z - x = 25$, sustituyendo, se tendrá

$$25 : x : : 1'5 : 1;$$

de donde

$$x = \frac{25 \,.\, 1}{1'5} = 16'67$$

Si del 1.er salvado hay que tomar 16'67 fanegas, del 2.º deberán tomarse 16'67 + 25 = 41'67.

2.ª—Prescindamos por un momento de la condición de que del 2.º salvado han de entrar en la mezcla precisamente 25 fanegas más que del 1.º El problema en este caso queda reducido al señalado con el número 178, cualquiera de cuyas resoluciones puede emplearse. Empleemos la 2.ª. Resultará

$$12'5 \left\{ \begin{array}{ll} 15. \;.\;.\;.\;.\;.\; & 1 \\ 11'5 \;.\;.\;.\;.\; & 2'5 \end{array} \right.$$

$$\text{Diferencia.} \;.\; \quad 1'5.$$

Ahora diremos: si, para que la diferencia á favor del 2.º salvado sea 1'5 fanegas, hay que tomar 1 del 1.º, para que sea 25 fanegas, habrá que tomar x. Tendremos, pues,

$$1'5 : 25 : : 1 : x;$$

de donde

$$x = \frac{25 \,.\, 1}{1'5} = 16'67.$$

Yá, como antes.

PROBLEMA 181.

Con 65 decalitros de aceite del precio de 10‘50 pesetas uno, se ha de mezclar otro aceite cuyo precio es 14 pesetas íd. ¿Cuántos decalitros deben tomarse de este 2.º aceite para que el precio de la mezcla sea 12 pesetas?

Resoluciones.

1.ª—Sea x los decalitros del 2.º aceite. Tendremos *(problema 177)*

$$65 : x :: 14 - 12 : 12 - 10\text{‘}5;$$

ó bien

$$65 : x :: 2 : 1\text{‘}5;$$

de donde

$$x = \frac{65 \cdot 1\text{‘}5}{2} = 48\text{‘}75.$$

Resulta que con las 65 cántaras del 1.er aceite hay que mezclar 48‘75 del 2.º

2.ª—Prescindamos por un momento de que hayan de ser precisamente 65 las cántaras del 1.er aceite. La cuestión en este caso queda reducida al problema número 178, cualquiera de cuyas resoluciones puede emplearse. Empleemos la 2.ª. Resultará

$$12\left\{\begin{array}{ll} 10\text{‘}5.\;.\;.\;.\;. & 2 \\ 14.\;.\;.\;.\;.\;. & 1\text{‘}5 \end{array}\right.$$

Ahora diremos: si con 2 cántaras de la 1.ª especie hay que mezclar 1‘5 de la 2.ª, con 65 de la 1.ª habrá que mezclar x de la 2.ª. Tendremos, pues,

$$2 : 1\text{‘}5 :: 65 : x;$$

de donde

$$x = \frac{1\text{‘}5 \cdot 65}{2} = 48\text{‘}75 \text{ cántaras.}$$

Como antes.

PROBLEMA 182.

Ha de mezclarse trigo de cinco precios: de 50, de 47, de 44, de 41 y de 40 reales fanega. ¿Cuántas deberán mezclarse de cada precio para que el de la mezcla sea 45 reales?

Resolución.

Este problema constituye el 2.° caso de los dos que comprende el 2.° general de la regla de aligación; esto es, el caso en que se dan conocidos el precio de la mezcla y los de las especies que han de mezclarse, siendo éstas más de dos. Es, pues, este caso repetición del problema número 178, cuyos procedimientos resolutivos pueden todos emplearse aquí. Sin embargo, vamos á preferir el 1.° en su forma práctica, por considerarle más sencillo. Al efecto, dispuestos en columna los precios de las especies, abrazados con una llave y colocado en el vértice de ésta el precio medio, iremos tomando 2 á 2 los precios de las especies, siendo siempre uno mayor y otro menor que el precio medio, con el cual los compararemos, anotando luego á su derecha, en sentido inverso, como en el problema 178, las diferencias que resulten, en esta forma:

$$45\left\{\begin{array}{lcccccc} 50 & 1 & & + & 5 & = & 6 \\ 47 & & 2 & & & = & 2 \\ 44 & 5 & & & & = & 5 \\ 41 & & 2 & & & = & 2 \\ 40 & & & & 5 & = & 5 \end{array}\right.$$

Resulta que, para que el precio de la mezcla sea 45 reales, deben mezclarse 6 fanegas del trigo del 1.^er^ precio; 2 del 2.°; 5, del 3.°, 2 del 4.°, y 5, del 5.°

Nota,—La simple inspección de arriba abajo de las anotaciones de los números en la resolución del problema revela claramente la forma en que se han hecho las comparaciones de los precios de las especies con el precio medio; mas, como aquéllos precios pueden combinarse de muchas maneras, siendo siempre el uno mayor y el otro menor que el precio medio, y, como además los resultados obtenidos en cada serie de combinaciones pueden multiplicarse y dividirse por un mismo número, cualquiera que él sea, resulta que son muchísimas, infinitas, las soluciones del problema: éste, pues, es indeterminado. Cabe hacerle determinado dentro de cada serie de combinaciones, dándose conocidas, además de los precios de las especies y del precio medio, ó la suma de las cantidades que han de mezclarse, ó la diferencia de dos de ellas, ó una cualquiera de dichas cantidades.

PROBLEMA 183.

Se ha de mezclar entre sí aceite de los precios siguientes la cántara: 60 reales, 65, 58, 54, 62, 59 $\frac{1}{2}$ y 54 $\frac{1}{2}$. ¿Cuántas cántaras deberán tomarse de cada especie de aceite para que resulten 165 de mezcla cuyo precio sea 57 $^3/_4$ reales?

Resolución.

Prescindamos por un momento de que la suma de las cántaras mezcladas haya de ser precisamente 165. El problema en este caso queda reducido al anterior. Resolviéndole como éste, tendremos

57‘75	60	3‘25					=	3‘25
	65		3‘75				=	3‘75
	58			3‘25			=	3‘25
	54		7‘25 +		4‘25		=	11‘50
	62				3‘75		=	3‘75
	59‘5					3‘25	=	3‘25
	54‘5	2‘25 +		0‘25 +		1‘75	=	4‘25
						Suma		33 »

Ahora diremos: si en 33 cántaras de mezcla entran 3‘25 del 1.^{er} precio, en las 165 que se piden entrarán x cántaras. Tendremos, pues,

33 : 3‘25 : : 165 : x;

de donde

$$x = \frac{3‘25 \cdot 165}{33} = 16‘25 \text{ cántaras.}$$

Análoga proporción se forma para las demás especies; lo cual puede muy bien excusarse, toda vez que las cantidades antes obtenidas tienen que resultar multiplicadas por el mismo factor por que lo ha sido la 1.ª cantidad; factor que será el cociente de dividir el valor del 4.º término de la 1.ª proporción por la cantidad que (prescindiendo de la suma) resulta de la 1.ª especie: en este problema, dividiendo 16‘25 por 3‘25.

Más breve aún. El factor común que se busca es el cociente de dividir la suma que se pide, por la suma obtenida: en este caso, 165 por 33. Esto proviene de la proporción anterior

33 : 3‘25 : : 165 : x,

en la que es

$$x = \frac{3‘25 \cdot 165}{33} = 3‘25 \times \frac{165}{33} = 3‘25 \times 5.$$

Por manera que el resultado final será éste:

Del precio de	60	reales	3‘25 × 5 =	16‘25	cánt.
	65	»	3‘75 × 5 =	18‘75	»
	58	»	3‘25 × 5 =	16‘25	»
	54	»	11‘50 × 5 =	57‘50	»
	62	»	3‘75 × 5 =	18‘75	»
	59‘5	»	3‘25 × 5 =	16‘25	»
	54‘5	»	4‘25 × 5 =	21‘25	»
			Suma	165	»

Nota.—Este problema es indeterminado, en cuanto pueden hacerse muchas combinaciones con los precios; pero la suma total que se da le hace ser perfectamente determinado dentro de cada combinación.

PROBLEMA 184.

Se trata de mezclar trigo de cuatro especies, cuyo precio respectivo es 50, 47, 42, y 40 reales fanega: se quiere que de la última especie entren en la mezcla 16 fanegas más que de la 1.ª y que el precio medio sea 44 reales. ¿Cuántas fanegas deberán mezclarse de cada una de las cuatro especies de trigo?

Resolución.

Prescindamos por un instante de que las fanegas que entren de la última especie hayan de exceder en 16 á las que se tomen de la 1.ª especie. El problema en este caso queda reducido al del número 182. Resuelto como éste, se tendrá

$$44\left\{\begin{array}{lll}50 & 4 & \\ 47 & & 2 \\ 42 & & 3 \\ 40 & 6 & \end{array}\right.$$

Como se ve, según esta solución, las fanegas de la última especie exceden á las de la 1.ª en $6 - 4 = 2$. Ahora diremos: si, para que la diferencia entre dichas especies sea 2, han de mezclarse 4 fanegas de la 1.ª, para que sea 16, habrá que mezclar x; esto es,

$$2 : 4 : : 16 : x;$$

de donde

$$x = \frac{4 \times 16}{2} = 4 \times \frac{16}{2} = 4 \times 8 = 32.$$

Hay, pues, que tomar 32 fanegas de la 1.ª especie: luego de la última deberán tomarse $32 + 16 = 48$.

El quebrado $\frac{16}{2}$ de la ecuación anterior nos dice que, para hallar, *sin necesidad de más proporciones*, el número por el que hay que multiplicar cada una de las cantidades resultantes, se divide la diferencia dada de las dos especies, cualesquiera que ellas sean, por la que entre ellas resulte del cálculo hecho sin tomar en consideración la diferencia dada. Y, como en el caso actual el cociente de $\frac{16}{2}$ es 8, el resultado final será:

$$\text{Del precio de}\left\{\begin{array}{ll}50\text{ rs.} & 4 \times 8 = 32\text{ fan.} \\ 47 & 2 \times 8 = 16\ \text{»} \\ 42 & 3 \times 8 = 24\ \text{»} \\ 40 & 6 \times 8 = 48\ \text{»}\end{array}\right.$$

Este problema es indeterminado, en cuanto al número de combinaciones que pueden hacerse con los precios; y perfectamente determinado después de hecha en cualquiera de ellas la multiplicación correspondiente.

PROBLEMA 185.

Con 24 cántaras de vino de 12 reales una se han de mezclar otras de 8, de 9, de 14, de 16 y de 19 reales, respectivamente. ¿Cuántas cántaras deberán tomarse de cada una de las cinco últimas especies de vino para que el precio medio sea 15 reales?

Resolución.

Prescindamos por de pronto de que las cántaras del 1.^{er} vino hayan de ser precisamente 24. El problema en este caso queda reducido al del número 182. Resolviéndole como éste, resultará

$$15\left\{\begin{array}{lllllll} 12 & 4 & & & & = 4 & \text{cánt.}\\ 8 & & 1 & & & = 1 & »\\ 9 & & & 4 & & = 4 & »\\ 14 & & & & 1 & = 1 & »\\ 16 & & & 7 & +1 & = 8 & »\\ 19 & & 3 & +6 & & = 9 & » \end{array}\right.$$

Ahora diremos: si para cuatro cántaras de la 1.ª especie hay que tomar, por ejemplo, 9 de la 6.ª, para 24 de la 1.ª habrá que tomar x de la 6.ª tendremos, pues,

$$4 : 9 : : 24 : x;$$

de donde

$$x = \frac{9 \times 24}{4} = 9 \times \frac{24}{4} = 9 \times 6 = 54.$$

El quebrado $\frac{24}{4}$ nos dice que, para hallar (sin necesidad de más proporciones) el número por el que hay que multiplicar cada una de las cantidades resultantes, se divide la cantidad dada de la 1.ª especie (ó de cualquiera que se dé) por la que de esta especie haya resultado en el cálculo hecho prescindiendo de dicha cantidad dada.

Por manera que el resultado final será éste:

Del precio de	12 reales	4 × 6 = 24	cántaras
	8 »	1 × 6 = 6	»
	9 »	4 × 6 = 24	»
	14 »	1 × 6 = 6	»
	16 »	8 × 6 = 48	»
	19 »	9 × 6 = 54	»

Este problema es también indeterminado, en cuanto al número de combinaciones que pueden hacerse con los precios, y perfectamente determinado en cada combinación; es decir, que los resultados obtenidos no pueden multiplicarse por ningún número que no sea el expresado cociente.

PROBLEMA 186

Un tabernero tiene una partida de vino que, puesta en la taberna, le sale de coste á 0'45 pesetas el litro: con este vino quiere mezclar agua, que no le cuesta nada, en cantidad tál, que resulten 1265 litros de mezcla y que, vendidos al precio medio 0'40 pesetas uno, le produzcan una ganancia de 42 pesetas. ¿Cuánto son los litros de la citada partida de vino y cuántos los que á ésta hay que agregarle de agua?

Resoluciones.

1.ª—Para la resolución de este problema conviene considerar divididos los litros de agua en dos partes: unos, los destinados á compensar la pérdida que experimentan los de vino puro; y otros, los que han de producir la ganancia de 42 pesetas. Estos, desde luego, serán 42 : 0‘40 = 105. Determinados estos litros, la resolución del problema ya no ofrece dificultad: éste queda reducido al 1.° de los dos casos del 2.° general de la regla de aligación, en el que, para hacer determinado el problema, se da conocida la suma de las cantidades de las dos especies (probl. 179). Para plantearle, empezaremos por deducir de los 1265 litros de mezcla los 105 de agua que han de producir la ganancia. Hecha la deducción, quedarán 1265 — 105 = 1160 litros. Tendremos, pues,

$$0‘40 \left\{ \begin{array}{l} 0‘45. \ldots\ldots \\ 0‘ \ \ldots\ldots \end{array} \right. \begin{array}{r} 0‘40 \\ \underline{0‘05} \end{array}$$

$$\text{Suma. . . } 0‘45.$$

Ahora, si en 0‘45 litros de mezcla entran 0‘40 de vino, en los 1160 de mezcla entrarán x; esto es,

$$0‘45 : 0‘40 : : 1160 : x;$$

de donde

$$x = \frac{0‘40 \,.\, 1160}{0‘45} = 1031‘11.$$

Y, si los litros de vino son 1031‘11, los de agua serán 1160 — 1031‘11 = 128‘89.

Agregando á estos 128‘89 litros de agua los 105 anteriores, la suma total de ellos será 128‘89 + 105 = 233‘89. Resultan, pues, en definitiva litros

	de vino.	1031‘11
y	de agua.	233‘89
	Total. . .	1265 »

2.ª—Este problema puede resolverse también por el método de reducción á la unidad. En efecto, deducidos, como antes, los 105 litros que han de producir las 42 pesetas de ganancia, diremos: en cada litro de vino puro, que, valiendo á 0'45 pesetas, se vende á 0'40, hay una pérdida de 0'05 pesetas: luego á cada litro de vino puro hay que agregarle una cantidad de agua capaz de compensar estas 0'05 pesetas de pérdida; y, como 0'05 es la 8.ª parte de 0'40 y á 0'40 corresponde 1 litro de agua, á cada litro de vino corresponderá $^1/_8$ de litro de agua (ó sea 0'125 litros). Resulta, pues, que, cualquiera que sea la masa de mezcla que se forme, en ella habrá $^8/_8$ de vino y $^1/_8$ de agua $= {}^9/_8$. Luego la cantidad de agua contenida en los 1160 litros de mezcla en cuestión será 1160 : 9 = 128'89. Luego la de vino será 1160 — 128'89 = 1031'11.

Agregando á los 128'89 litros de agua contenidos en los 1160 de mezcla los 105 considerados al principio, resultará un total de litros de agua de 128'89 + 105 = 233'89.

Nota.—Si en este problema se hubiese dicho que el agua valía, por ejemplo, 5 pesetas, hubiéramos empezado por deducir los $\frac{5 \text{ pts.}}{0'40 \text{ pts}}$ = 12'50 litros de agua que habían de producir estas 5 pesetas, y los $\frac{42}{0'40}$ = 105 litros de íd. que habían de dar las 42 pesetas de ganancia (operaciones que pueden hacerse de una vez sumando las 5 pesetas con las 42 y dividiendo la suma 47 por 0'40); y, hecha esta doble deducción, con los 1265 — 117'50 = 1147'50 litros restantes, hubiéramos procedido como se hizo antes.

PROBLEMA 187.

Un comerciante compró 4 partidas de arroz de igual número de arrobas: la 1.ª, á 24'75 reales arroba; la 2.ª, á 25; la 3.ª, á 27, y la 4.ª, á 29'25: mezcló las 4 partidas, y la masa total de la mezcla la vendió á su precio medio correspondiente aumentado en su 5.ª parte, habiendo producido la venta 1017'60 reales. ¿De cuántas arrobas constaba cada una de las 4 partidas de arroz?

Resolución.

Para determinar el número de arrobas de que constaba cada una de las cuatro partidas de arroz mezcladas, necesitamos averiguar antes cuál fué el precio de la mezcla. Como las arrobas de arroz de las cuatro partidas entraron en la mezcla en número igual, el precio medio será el cociente de dividir la suma de los precios de las especies por el número de éstas. Será, pues, $(24'75 + 25 + 27 + 29'25) : 4 = 106 : 4 = 26'50$ reales. Ahora, para determinar el número de arrobas mezcladas de cada especie, pueden seguirse varios procedimientos:

1.º—Como el producto de la venta, 1017'60 reales, no ha resultado de multiplicar el total de arrobas por su precio medio, sinó por éste aumentado en su quinto, si dividimos dicho producto por el precio medio, el cociente $1017'60 : 26'50 = 38'40$ será el número total de arrobas, aumentado en su quinto: representará, pues, $^6/_5$ de dicho total. Luego, si dividimos el 38'40 por 6, el cociente $38'40 : 6 = 6'40$ será $^1/_5$ de 38'40; y, si ahora restamos de este número el 6'40, el resto $38'40 - 6'40 = 32$ representará los $^5/_5$ del total de arrobas, ó sea este total. Si el total de arrobas es 32, las de cada partida, por ser iguales en número, serán 32 : 4 = 8.

2.º—Siendo el precio medio 26'50 reales, si le agregamos su 5.ª parte, que es 26'50 : 5 = 5'30, resultará el precio de la venta, que es 26'50 + 5'30 = 31'80. Si ahora dividimos los 1017'60 reales, valor del total de arrobas, por 31'80, valor de una de ellas, el cociente 1017'60 : 31'80 = 32 será evidentemente dicho total de arrobas, y 32 : 4 = 8 serán las de cada partida.

3.º—El producto de la venta, 1017'60 reales, es el de multiplicar el total de arrobas por el precio medio aumentado en su quinto, ó sea por $^6/_5$ del precio medio. Luego, si dividimos por 6 dicho producto, el cociente 1017'60 : 6 = 169'60 será la ganancia; y, si ahora dividimos esta ganancia por la que ha producido cada arroba, que es el quinto, 5'30, del precio medio, en el cual éste había sido aumentado, el cociente 169'60 : 5'30 = 32 será el total de arrobas.

4.º—Si del producto total de la venta, 1017'60 reales, se resta la ganancia, 169'60, el resto 1017'60 — 169'60 = 848 será el producto de multiplicar el total de arrobas por el precio medio. Luego, si ese producto se divide por el precio medio, el cociente 848 : 26'50 = 32 será el total de arrobas

Y 5.º—Acabamos de consignar que la cantidad 848 reales es el producto de multiplicar el total de arrobas por el precio medio: representa, pues, la cantidad 848 reales el verdadero valor del total de arrobas. Ahora, como es el mismo el número de arrobas de cada una de las cuatro partidas, por cada vez que la suma de los precios de estas arrobas quepa en el valor total de las mismas, tendremos una arroba de las de cada precio. Luego 848 : (24'7 + 25 + 27 + 29'25) = 848 : 106 = 8 son las arrobas de cada una de las cuatro partidas de arroz que se mezclaron.

PROBLEMA 188.

Un tabernero mezcló con 40 cántaras de vino de 9 reales una, 8 íd. de agua, cuya conducción le había costado 1 peseta; mas, arrepentido luégo de esta mixtificación y no creyendo conveniente vender el vino aguado al precio que realmente le correspondía, decidió unir á la mezcla tantas cántaras de otro vino de 12 reales una, cuantas fueren necesarias para que la cántara de la nueva mezcla valiese lo que otra del primer vino. ¿Cuántas cántaras tuvo que tomar del 2.º vino?

Resoluciones.

1.ª—Hallemos primero el precio de la 1.ª mezcla.

El importe de las 40 cántaras de vino, á 9 reales una, es 360 reales; y el de las 8 cántaras de agua, 4 íd.: luego el de las 48 cántaras de vino aguado es 364 íd.: luego el valor de una de estas 48 cántaras, ó sea el precio de esta 1.ª mezcla, será 364 : 48 = 7‘583 reales.

Determinemos ahora las cántaras de vino de 12 reales una que será necesario mezclar con las 48 del vino aguado, cuyo precio es 7‘583 rs., para que el precio de la nueva mezcla sea 9 reales.

Este problema es igual al señalado con el número 181. Tendremos, pues,

$$9 \begin{cases} \text{12 reales . . . . 1‘417 cánt,} \\ \text{7‘583 . . . . . 3.} \quad \text{»} \end{cases}$$

Ahora, si por cada 3 cántaras del vino aguado hay que mezclar 1‘417 del puro de 12 rs., por las 48 del 1.er vino habrá que tomar x del 2.º Será, pues,

$$3 : \text{1‘417} : : 48 : x = \frac{\text{1‘417} \cdot 48}{3} = \text{22‘672 cánt.}$$

2.ª—Puesto que las 40 cántaras del 1.^{er} vino han de conservar su precio en la mezcla final, prescindiremos de ellas. La cuestión en este caso queda reducida á determinar cuántas cántaras del 2.º vino deben mezclarse con las 8 de agua para que el precio de la mezcla sea 9 reales. Considerando que el precio del agua es 4 : 8 = 0·5 reales cántara, tendremos *(probl. 181)*

$$9\left\{\begin{array}{lll} 0'5 \text{ reales} & \ldots\ldots & 3 \text{ cánt.} \\ 12 \quad \text{»} & \ldots\ldots & 8'5 \quad \text{»} \end{array}\right.$$

Ahora, si para cada 3 cántaras de agua hay que tomar 8'5 de vino, para las 8 de agua se tomarán x cántaras de vino. Y será

$$3 : 8'5 : : 8 : x = \frac{8'5 \,.\, 8}{3} = 22'66 \text{ cántaras.}$$

3.ª—Prescindamos también del 1.^{er} vino por lo dicho antes.

Sea x las cántaras que deben mezclarse del 2.º vino. Cada cántara de agua, cuyo precio es 0'5 reales, vendida á 9, produce una ganancia de 8'5 reales: luego las 8 cántaras la producirán de 8'5 × 8 = 68 reales. Cada cántara de vino de 12 rs., vendida á 9, produce una pérdida de 3 reales: luego las x cántaras la producirán de 3 x reales, y, como la ganancia y la pérdida son iguales entre sí, será

$$3x = 68;$$

de donde

$$x = \frac{68}{8} = 22'66.... \text{ cánt.}$$

4.ª—Prescindamos también del 1.^{er} vino.

Cada cántara de agua produce 8·5 rs. de ganancia: luego las 8 cántaras producirán 8·5 × 8 = 68 rs. Cada cántara de vino produce una pérdida de 3 rs.: luego las cántaras de vino que deben tomarse para compensar los 68 reales de ganacia serán 68 : 3 = 22'66....

PROBLEMA 189.

Hallar por medio de las Tablas de logaritmos los correspondientes á los números 468 y 2384‘562.

Resolución.

1.ª PARTE.—El número 468, como entero é inferior á 10.000, se halla contenido en las Tablas (1). Buscado en ellas en la columna correspondiente, se ve que á la derecha y en su misma linea está el logaritmo 2‘67024585, que es el que le corresponde (2).

2.ª PARTE.—El número 2384‘562, como fraccionario que es, no está contenido en las Tablas, pero se halla comprendido entre los dos números enteros consecutivos 2384 y 2385, que figuran en aquéllas, siendo su respectivo logaritmo 3‘3773063 y 3‘3774824 y la diferencia de estos logaritmos 0‘0001821.

Como el número dado, 2384‘562, es mayor que el 2384, el logaritmo de aquél tiene que ser mayor que el de éste:

---

(1) Las Tablas logarítmicas de que nosotros hacemos uso son las de Lalande, que comprenden los números enteros desde el 1 al 10000 y en las cuales la mantisa ó parte decimal de los logaritmos tiene hasta 7 cifras.—Son también muy recomendables las Tablas del español Vázquez Queipo.

(2) Como la característica ó parte entera de un logaritmo tiene tantas unidades como cifras, menos 1, tiene la parte entera del número á que el logaritmo corresponde, con solo ver este número de cifras está determinada la característica del logaritmo del número.

se compondrá, pues, del logaritmo de éste y de cierta y determinada cantidad, que llamaremos x. Para hallar el valor de esta cantidad x que hay que agregar al logaritmo de 2384 para que se convierta en el de 2384'562, admitiremos, como lo hacen los algebristas, que las diferencias de los números sean proporcionales á las diferencias de sus logaritmos (lo cual no es completamente exacto, pero dista de la exactitud tanto menos, cuanto mayores sean los números y los logaritmos tomados en consideración). Ahora bien, la diferencia de los dos números consecutivos 2384 y 2385 es 1; la del número dado y el menor de los dos consecutivos que lo comprenden es 0'562; la diferencia de los logaritmos de dichos dos números consecutivos es 0'0001821, y la del logaritmo del número dado al logaritmo del menor de los dos consecutivos es, como ya hemos dicho, x. Tendremos, pues,

$$1 : 0'562 : : 0\,0001821 : x;$$

de donde

$$x = 0'0001821 \times 0'562 = 0'0001023402. \text{ (1)}$$

Luego el logaritmo de 2384'562 será

$$3'3773063 + 0'0001023402 = 3'3774086402.$$

PROBLEMA 190.

Hallar por medio de las Tablas de logaritmos los correspondientes á los números 16580 y 3'129.

Resolución.

1.ª PARTE.—El número 16580, como superior á 10000, no

---

(1) En la práctica puede excusarse, y de hecho se excusa, la proporción anterior, toda vez que, como se ha visto, la cuestión para hallar el valor de x está reducida á multiplicar la diferencia logarítmica de los dos números consecutivos por la diferencia del número dado al menor de ellos.

figura en las Tablas. Para hallar su logaritmo observaremos que, si un número se divide por 10, 100, 1000 &., la mantisa de su logaritmo no varía, pero la característica queda disminuida en 1, 2, 3 &. unidades. Dividiremos, pues, el número 16580 por 10 (y nó por 100, 1000 &., por lo dicho en el paréntesis del problema anterior), en cuyo caso quedará reducido á 1658; número que se encuentra en las Tablas y cuyo logaritmo es 3‘2195845. Agregando ahora, por lo dicho antes, una unidad á la característica de este logaritmo, se convertirá en el del número 16580. Por manera que el logaritmo de este número es 4‘2195845.

Nota 1.ª—Pudimos haber dicho: como el número dado tiene 5 cifras, la característica de su logaritmo *(probl. anterior, cita 2.ª)* tiene que ser 4. Para hallar la mantisa, observaremos que, si se divide por 10 el número 16580, la mantisa de su logaritmo no sufre alteración; es decir, que será la misma del logaritmo del cociente resultante 1658. Hallada en las Tablas esta mantisa y agregada á la ya conocida característica 4, la suma 4‘2195845 será el logaritmo del número dado.

Nota 2.ª—También cabe decir: el número dado 16580 es igual á 1658 × 10: luego log 16580 = log (1658 × 10); y. como el logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores, será log 16580 = log 1658 + log 10; y, como el logaritmo de 1658, según las Tablas, es 3‘2195845 y el de 10 es 1, será log 16580 = 3‘2195845 + 1 = 4‘2195845.

2.ª PARTE.—El número 3‘129, como fraccionario, no se encuentra en las Tablas. Para hallar su logaritmo, podemos seguir exactamente la misma marcha seguida en el probl. 188 para determinar el logaritmo del número 2384‘562; pero teniendo en cuenta lo consignado en el paréntesis de dicho problema y considerando también que, si un número se multiplica por 10, 100, 1000 &., la mantisa de su logaritmo no varía, pero la característica queda aumentada en 1, 2, 3 &. unidades, multiplicaremos el número 3'129 por 1000; en cuyo caso se convertirá en 3129; hallaremos ahora el logaritmo de este número, que está en las Tablas y es 3'4954056, y deduciendo, por lo anteriormente dicho, 3 unidades de su característica, el resultado final 0'4954056 será el logaritmo que se nos pide, ó sea el del número 3'129. (1).

Nota.—Cabe hacer aquí una observación análoga á la contenida en la 1.ª de las dos notas anteriores.

PROBLEMA 191.

Hallar por medio de las Tablas logarítmicas los números correspondientes á los logaritmos 3'1417632 y 2'92498.

Resolución.

1.ª PARTE.—Examinadas las Tablas según el orden correlativo de la característica de los logaritmos, se ve que figura en ellas el logaritmo dado 3'1417632 y que á él corresponde el número 1386.

2.ª PARTE.—El logaritmo 2'92498 no se encuentra en las Tablas, pero está comprendido entre los logaritmos 2'924796 y 2'92531209, que figuran en ellas como correspondientes á

---

(1) Si hubiésemos calculado el logaritmo del número 3'129 sin multiplicar á éste por 1000, hubiéramos obtenido como resultado final 0'4932383.

los números enteros consecutivos 841 y 842, Como el logaritmo dado 2'92498 es mayor que el logaritmo 2'924796, el número correspondiente al primero tiene que ser mayor que el correspondiente al segundo: aquél número, pues, se compondrá de éste y de cierta cantidad, que llamaremos x. Para determinar el valor de x, cantidad que hay que agregar á 841, número correspondiente al logaritmo 2'924796, para que se convierta en el número correspondiente al logaritmo dado, admitiremos, como es corriente *(probl. 188, 2.ª parte)*, que las diferencias de los números son proporcionales á las de sus logaritmos y tendremos que 1, *diferencia de los dos números consecutivos cuyos logaritmos comprenden al logaritmo dado*, es á x, *diferencia del número que se pide y el menor de los dos consecutivos citados*, como 0'00051609, *diferencia de los logaritmos de estos dos números*, es á 0:000184, *diferencia del logaritmo dado y el menor de los dos anteriores*; esto es

$$1 : x : : 0'00051609 : 0'000184;$$

de donde

$$x = \frac{0'000184}{0'00051609} = 0'3565269 \ (1).$$

Luego el número correspondiente al logaritmo dado 2'92498 es

$$841 + 0'3565269 = 841'3565269.$$

---

(1) En la práctica se prescinde de formar la proporción anterior y se procede desde luego á dividir la diferencia del logaritmo dado y su inmediato menor por la diferencia de los dos que comprenden al logaritmo dado.

PROBLEMA 192.

Hallar por medio de las Tablas logarítmicas los números correspondientes á los logaritmos 7'6302244 y 0'64.

Resolución.

1.ª PARTE.--El logaritmo 7'6302244, por ser su característica superior á 3, no se encuentra en las Tablas. Para hallar el número á que este logaritmo corresponde, observaremos que, si la característica de un logaritmo disminuye en 1, 2, 3. &. unidades, el nuevo logaritmo que resulta corresponde á un número 10, 100, 1000 &. veces menor que el primero. Disminuyendo, pues, la característica 7 del logaritmo dado en 4 unidades (y nó en más, por lo dicho en el paréntesis del problema 188), el nuevo logaritmo será 3'6302244, el cual figura en las Tablas como correspondiente al número 4268; número que, por lo dicho antes, es 10.000 veces menor que el que buscamos: luego éste será 4268 × 10.000 = 42680000

Nota.—Si el logaritmo resultante por la diminución de la característica del logaritmo dado no se encontrase en las Tablas, se hallaría el número á que corresponde empleando el procedimiento seguido en la 2.ª parte del problema anterior.

2.ª PARTE.—El logaritmo 0'64 no figura en las Tablas, pero está comprendido entre los logaritmos 0'60205999 y 0'69897000, que sí figuran en ellas como correspondientes á los números 4 y 5. Podemos, pues, hallar el número á que corresponde el logaritmo dado 0'64 aplicando desde luego el procedimiento seguido en la 2.ª parte del problema anterior; mas, teniendo en cuenta lo dicho en el paréntesis del problema 188, agregaremos á la característica *cero* 3 unidades (y nó más, porque el nuevo logaritmo no figuraría en las Tablas por ser su característica superior á 3); hallaremos *(problema 190, 2.ª parte)* el número á que corresponde el nuevo logaritmo 3‘64, que es el 4365‘1588, el cual es 1000 veces mayor que el correspondiente al logaritmo dado 0‘64, porque, si la característica de un logaritmo aumenta en 1, 2, 3 &. unidades, el nuevo logaritmo corresponde á un número 10, 100, 1000 & veces mayor que el primero. El número, pues, que buscamos será

4365‘1588 : 1000 = 4‘3651588. (1)

PROBLEMA 193.

Siendo r **la razón de una progresión aritmética,** a **el primer término de ésta,** u **el último y** n **el número de todos ellos, ¿cuál será la relación que liga á cada una de estas cuatro cantidades con las tres restantes?**

Resolución.

En toda progresión aritmética, sea creciente ó decreciente, *algebraicamente considerada*, cada término es igual á su anterior inmediato sumado con la razón. Por manera que el 2.° término es igual al 1.°, mas la razón; el 3.° igual al 2.°, mas la razón; y, como el 2.° es igual al 1.°, mas la razón, el 3.° es igual al 1.°, mas 2 veces la razón. El 4.° término es igual al 3.°. mas la razón; y, como el 3.° es igual al 1.° mas 2 veces la razón; el 4.° es igual al 1.°, mas 3 veces la razón; y así su-

---

(1) El número que obtendríamos no agregando las 3 unidades á la característica sería 4‘3914973......

cesivamente. Síguese de aquí que un término cualquiera, que es lo que se llama *término general de la progresión*, se compone del 1.º, mas tantas veces la razón como términos preceden al que se considera, y que, como consecuencia de esto, el último término de una progresión aritmética es igual al 1.º, mas el producto de la razón por el número de términos, menos uno, que tiene la progresión. Luego, llamando, como en el enunciado, r á la razón, a al 1.^{er} término, u al último y n al número de ellos (1), será

$$u = a + r\,(n - 1) \qquad 1.^a$$

Esta ecuación-fórmula sirve, no solo para hallar el valor de u, sinó en general el de cualquiera de las cuatro cantidades u, a, r y n, conocidos los valores de las otras tres. En efecto, pasando en la referida ecuación al 1er miembro el término $r\,(n - 1)$, se tendrá

$$u - r\,(n - 1) = a;$$

ó bien.

$$a = u - r\,(n - 1) \qquad 2.^a$$

Del mismo modo, si en la ecuación 1.ª pasamos a al primer miembro, será

$$u - a = r\,(n - 1);$$

y dividiendo por $n - 1$ los dos miembros de esta ecuación, resultará

$$\frac{u - a}{n - 1} = r;$$

ó bien

$$r = \frac{u - a}{n - 1}. \qquad 3.^a$$

Si en la propia ecuación 1.ª transpasamos el término a, tendremos

---

(1) En adelante, sin otra nueva advertencia, emplearemos estas mismas letras con la misma representación que aquí tienen, en todos los problemas que sean aplicación de las progresiones.

$$u - a = r\,(n - 1);$$

y dividiendo por r toda la ecuación, resultará esta otra

$$\frac{u - a}{r} = n - 1;$$

y, pasando el — 1 al 1.er miembro, se tendrá en definitiva

$$\frac{u - a}{r} + 1 = n;$$

ó bien

$$n = \frac{u - a}{r} + 1. \qquad 4.^{a}$$

Queda determinada en las 4 fórmulas 1.ª, 2.ª, 3.ª y 4.ª la relación que liga á cada una de las 4 cantidades r, a, u y n con las tres restantes (1).

PROBLEMA 194.

Una profesora repartió cierta cantidad de almendras entre las niñas de su colegio, que eran 36: á cada una dió 2 más que á la inmediata anterior, habiendo recibido la última 74: ¿cuántas recibió la primera?

Resolución.

Del simple enunciado de la cuestión propuesta se deduce con perfecta claridad que los números expresivos de las almendras recibidas individualmente por las 36 niñas del colegio forman una progresión aritmética creciente cuya razón

---

(1) Nuestros lectores harán bien en fijarse exclusivamente en la fórmula primera, $u = a + r\,(n - 1)$, puesto que, como se ha visto, de ella se deducen facilmente las otras tres. Una fórmula sola se graba y retiene en la memoria mucho mejor que no 4.

es 2, siendo 36 el número de sus términos y 74 el último de ellos; como así bien, que lo que se pide es el valor del 1.^{er} término. En su consecuencia, tendremos *(problema anterior, fórmula 2.ª)*

$$a = u - r\ (n - 1);$$

y, dando valores, será

$$a = 74 - 2 \times (36 - 1);$$

ó bien

$$a = 74 - 2 \times 35;$$

ó sea

$$a = 74 - 70 = 4.$$

Resulta, pues, que el número de almendras recibido por la 1.ª niña es 4.

Nota.—Dijimos al principio de la resolución del problema general anterior que el último término de una progresión aritmética se compone del 1.º, mas el producto de la razón por el número de términos, menos 1, que tiene la progresión. Luego, recíprocamente, el 1.^{er} término se compondrá del último, menos el expresado producto. Aquí el último término es 74 y el citado producto 2 × 35 = 70. Luego el primer término será 74 — 70 = 4.

PROBLEMA 195.

Un jugador perdió el día 1.º de Abril 12 reales; el día 2.º, 8 reales más que en el anterior; el día 3.º, 8 reales más que en el 2.º, y así sucesivamente. ¿Cuántos reales perdió el día 30?

Resolución.

Evidentemente, las pérdidas sucesivas del jugador de que se trata forman una progresión aritmética creciente, siendo 12 su 1.^{er} término, 8 su razón y 30 el número de sus términos y siendo el último de éstos la incógnita del problema. Tendremos, pues *(problema 193, fórmula 1.ª)*,

$$u = a + r\ (n - 1);$$

y, dando valores, será

$$u = 12 + 8 \times (30 - 1);$$

ó bien

$$u = 12 + 8 \times 29;$$

ó sea

$$u = 12 + 232 = 244.$$

Resulta que el jugador en cuestión perdió 244 reales el día último de Abril.

PROBLEMA 196.

Una señora, al visitar un hospital, distribuyó todas las piezas de 5 céntimos que llevaba, entre los enfermos que allí había, que eran 19: á cada uno de ellos le dió cierto número de piezas menos que á su inmediato anterior, habiendo recibido 59 el primer enfermo y 5 el último. ¿Cuántas piezas menos que su inmediato anterior recibió cada enfermo?

Resolución.

Es evidente que los números expresivos de las piezas ó monedas de 5 céntimos recibidas individualmente por los 19 enfermos de que se trata forman una progresión aritmética decreciente, cuyos términos 1.° y último son, respectivamente, 59 y 5, siendo 19 el número de todos ellos y la incógnita del problema la razón de la progresión. Tendremos, pues, *(problema 193, fórmula 3.ª)*

$$r = \frac{\mathrm{u} - \mathrm{a}}{\mathrm{n} - 1};$$

y, dando valores, será

$$r = \frac{5 - 59}{19 - 1};$$

ó bien

$$r = \frac{-54}{18} = -3,\ (1)$$

Es decir que la Señora visitante dió á cada uno de los 19 enfermos 3 monedas *menos* que al inmediato anterior.

PROBLEMA 197.

Un sujeto se dedicó al juego cierto número de días consecutivos: en el 1.º de ellos perdió 7 pesetas; en el 2.º, 5 más; en el 3.º, otras 5 más, y así sucesivamente hasta el día último, en el cual perdió 102 pesetas. ¿Cuántos son los días dedicados al juego por dicho sujeto?

Resolución.

Las diferentes pérdidas sufridas por el sujeto en cuestión en los diferentes días dedicados al juego y que son

7 pesetas, 12, 17, 22, 27.......102,

constituyen una progresión aritmética creciente, cuya razón es 5 y cuyos términos 1.º y último son 7 y 102, respectivamente, y de la cual se desconoce y pide el número de términos, que es el número de días dedicados al juego. Tendremos, pues, *(problema 193, fórmula 4.ª)*

$$n = \frac{\mathrm{u} - \mathrm{a}}{\mathrm{r}} + 1;$$

---

(1) No debe causar sorpresa este valor negativo de r, porque cuando, como ahora sucede, la progresión es decreciente, la razón es una cantidad negativa.

y, dando valores, será

$$n = \frac{102 - 7}{5} + 1;$$

ó bien

$$n = \frac{95}{5} + 1;$$

ó sea

$$n = 19 + 1 = 20.$$

Resulta que los dias destinados al juego por el sujeto de que se trata son 20.

PROBLEMA 198.

Siendo a **el primer término de una progresión aritmética,** u **el último,** n **el número de términos y** s **la suma de todos ellos, ¿cuál será la relación que liga á cada una de estas cuatro cantidades con las tres restantes?**

Resolución.

Para resolver la cuestión propuesta, vamos á servirnos de la siguiente progresión:

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f \,.\, g \,.\, u.$$

Si llamamos s á la suma de los términos de esta progresión, será

$$s = a + b + c + d + e + f + g + u;$$

y, como el orden de colocación de los sumandos no influye en el valor de la suma, será también

$$s = u + g + f + e + d + c + b + a;$$

y, sumando ordenadamente estas dos ecuaciones tomando 2

á 2 las sumas parciales de los segundos miembros, se tendrá
$$2s = (a + u) + (b + g) + (c + f) + (d + e) + (e + d) + (f + c) + (g + h) + (u + a).$$ (1)

Si fijamos la consideración en el 2.º miembro de esta ecuación, veremos que las sumas parciales (y al propio tiempo sumandos) 1.ª y última, $a + u$ y $u + a$, representan cada una de ellas la suma de los términos 1.º y último de la progresión, y que cada uno de las demás sumas-paréntesis es la suma de dos términos equidistantes de los extremos. Por consiguiente, todas estas sumas-paréntesis son iguales á la 1.ª ó á la última é iguales entre sí (2). Como consecuencia de esto, en vez de los 8 paréntesis, podemos tomar el 1.º multiplicado por 8; y, como 8 es el número de términos de la progresión y a y u el 1.º y el último de ellos, llamando n al número de todos ellos, será

$$2s = (a + u)\,n;$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{a + u}{2}\,n; \\ \text{ó bien}\quad s &= (a + u) \times \frac{n}{2} \end{aligned}\right\}\quad 1.^{a}$$

Esta ecuación-fórmula sirve para hallar el valor de cualquiera de las cuatro cantidades s, a, u y n, conocido el de cada una de las otras tres. En efecto, multiplicando por 2

---

(1) Así como una suma de varias sumas indicadas es una suma compuesta de todos los sumandos de las sumas parciales propuestas, así también una suma de varios sumandos puede descomponerse en varias sumas parciales de estos mismos sumandos, que es lo que arriba acaba de hacerse.

(2) Cuando el número de términos de la progresión es impar, el duplo del término equidistante de los extremos es igual á la suma de éstos.

toda la ecuación; resultará esta otra, que es la inmediata anterior,

$$2s = (a + u)\,n;$$

y, deshaciendo el paréntesis, se tendrá

$$2s = an + un;$$

y, trasladando el *un*, resultará

$$2s - un = an;$$

y, dividiendo por *n* los dos miembros, tendremos

$$\frac{2\text{s}}{\text{n}} - u = a;$$

ó bien

$$a = \frac{2\text{s}}{\text{n}} - u. \qquad 2.^{\text{a}}$$

De igual modo, si en la fórmula 1.ª multiplicamos sus dos miembros por 2, resultará

$$2s = (a + u)\,n;$$

y, quitando el paréntesis, tendremos

$$2s = an + un;$$

y, transponiendo el *an*, se tendrá

$$2s - an = un;$$

y, dividiendo los dos miembros por *n*, será

$$\frac{2\text{s}}{\text{n}} - a = u;$$

ó bien

$$u = \frac{2\text{s}}{\text{n}} - a; \qquad 3.^{\text{a}}$$

Por último, multiplicando por 2 la ecuación 1.ª, resultará esta otra

$$2s = (a + u)\,n;$$

y, dividiendo los dos miembros por *a* + *u*, se tendrá

$$\frac{2\text{s}}{\text{a} + \text{u}} = n;$$

ó bien

$$n = \frac{2\text{s}}{\text{a} + \text{u}}. \qquad 4.^{\text{a}}$$

Queda, pues, determinada la relación que liga á cada una de las cuatro cantidades s, a, u y n con las tres restantes (1).

Nota 1.ª—Cuando la progresión aritmética está constituida precisamente por los números impares á partir desde el 1, también es $s = \frac{a + u}{2} \times n$; pero cabe deducir de esta fórmula otra aún más sencilla. En efecto, como es $u = r\ (n - 1)$, sustituyendo á u con su valor en la ecuación

$$s = \frac{a + u}{2} \times n,$$

resultará esta otra

$$s = \frac{a + a + r\ (n - 1)}{2} \times n = \frac{2a + r\ (n - 1)}{2} \times n;$$

y, deshaciendo el paréntesis, será

$$s = \frac{2a + rn - r}{2} \times n:$$

y, como en la progresión especial de que se trata es $a = 1$ y $r = 2$, reemplazando estas letras con sus valores, se tendrá

$$s = \frac{2 \cdot 1 + 2n - 2}{2} \times n;$$

ó bien

$$s = \frac{2 + 2n - 2}{2} \times n;$$

ó sea, simplificando,

$$s = n \times n = n^2.$$

Este resultado final nos dice que la suma de los términos

---

(1) Damos por reproducida aquí, con relación á la fórmula 1.ª, la cita 2.ª del problema 193, referente á la fórmula 1.ª de allí.

de la progresión aritmética especial que forman los números impares á partir desde el 1, es igual al cuadrado del número de términos tomados en consideración.

De la fórmula anterior, $s = n^2$, se desprende por sí sola esta otra

$$n = \sqrt{s}.$$

Nota 2.ª—Si asociamos una cualquiera de las fórmulas del problema 193, por ejemplo, $u = a + r\,(n - 1)$, con otra cualquiera de las del problema actual, v. gr., $s = \frac{a + u}{n} \times n$, observaremos que en ellas entran las 5 cantidades generales a, u, r, n y s, de las cuales, si se dan conocidas 3, podemos deducir el valor de las otras 2. Y, como 5 letras *(probl. 111)* pueden combinarse 3 á 3 de $\frac{5 \times 4}{1 \times 2}$ = 10 maneras, la determinación de dichas dos cantidades da origen á los 10 problemas generales siguientes:

1.° Dadas a, r y u, hallar n y s
2.° » a, r y n, » u y s
3.° » a, r y s, » u y n
4.° » a, u y n, » r y s
5.° » a, u y s, » r y n
6.° » a, n y s, » r y u
7.° » r, u y n, » a y s
8.° » r, u y s, » a y n
9.° » r, n y s, » a y u
10 » u, n y s, » a y r

PROBLEMA 199.

Un almacenista de vinos vendió el primer día de Marzo 12 litros; el segundo, 16; el tercero 20, y así sucesivamente, aumentando en 4 litros los vendidos el día inmediato anterior. ¿Cuántos litros de vino vendió en los 31 días del mes de Marzo?

Resolución.

Es evidente que las partidas de litros de vino

12, 16, 20, 24,.........

vendidas sucesivamente por el almacenista en los días 1.°, 2.°, 3.°, 4.°, &. &. del mes de Marzo forman una progresión aritmética creciente, de la que se conocen la razón, que es 4, el 1.° de sus términos, que es 12, y el número de ellos, que es 31, y de la cual se pide la suma de sus términos. Tendremos, pues, *(problema anterior, fórmula 1.ª)*

$$s = \frac{a + u}{2} \times n;$$

y, como *(problema 193, fórmula 1.ª)* es $u = a + r(n - 1)$, sustituyendo á u con su valor en la ecuación anterior, se tendrá

$$s = \frac{a + a + r(n - 1)}{2} \times n = \frac{2r + rn - r}{2} \times n;$$

y, dando valores, resultará

$$s = \frac{2 \cdot 12 + 4 \cdot 31 - 4}{2} \times 31 = \frac{24 + 124 - 4}{2} \times 31$$

$$= 72 \times 31 = 2232.$$

Resulta que los litros de vino vendidos en todo el mes de Marzo son 2232.

PROBLEMA 200.

En un paseo público hay una fila de 100 árboles, cada uno de los cuales dista de su inmediato 5 metros: en línea con los árboles y á 5 metros del 1.º de ellos hay una fuente, de la cual un peón tiene que tomar un cántaro de agua para riego de cada uno de los 100 árboles. Al cabo de su faena ¿cuántas leguas habrá recorrido dicho peón?

Resolución.

Para determinar las leguas recorridas en su faena por el peón de que se trata, forzoso es averiguar antes los metros que en ella ha recorrido. Para averiguar estos metros observaremos que, para ir de la fuente al 1.er árbol y regresar de éste á la fuente, el peón tiene que recorrer 10 metros; para hacer lo propio respecto del 2.º árbol, tiene que recorrer 20; para el 3.º, 30; para el 4.º, 40; y así sucesivamente. Se ve, pues, que los números

10 metros, 20, 30, 40, 50,........

forman una progresión aritmética creciente, de la que se conocen la razón, que es 10, el 1.º de los términos, que es también 10, y el número de ellos, que es 100, y de la cual se pide la suma de todos sus términos. Es, pues, este problema igual en esencia al problema anterior. Reproduciendo aquí el razonamiento empleado allí, se tendrá en definitiva

$$s = 50.500 \text{ metros} = 50'5 \text{ km.}$$

Ahora, como cada 5'5 kilómetros equivalen á 1 legua, el total de leguas será

$$50'5 : 5'5 = 9'18 \text{ leguas.}$$

Nota.—Hemos hecho el cálculo suponiendo que el peón, regado el último árbol, regresó al punto de partida; esto es, á la fuente. En otro caso habría que deducir de los 50,500 metros que se han supuesto recorridos, los 500 que dista de la fuente el último árbol. Entonces, las leguas recorridas por el peón serían 9'09.

PROBLEMA 201.

Suponiendo que al célebre constructor de la famosa torre Eiffel de París le hubiesen dado un duro por la colocación de las piezas del primer metro de altura, 3 por la íd. de las del segundo, 5 por íd de las del 3.º, y así sucesivamente, siguiendo el orden de los números impares hasta el último de los 300 metros de la altura total, ¿cuántos duros habría recibido?

Resolución.

Habiendo recibido 1 duro por el 1.er metro de altura, 3 por el segundo, 5 por el tercero, y así sucesivamente en la forma que se dice en el enunciado, el total de duros recibidos sería la suma de los 300 términos de la progresión especial que forman los números impares, á partir desde el 1, representativos de las cantidades parciales recibidas. Sería, pues, dicho total *(problema 198, nota 1.ª)*

$$s = n^2;$$

y, dando valores, se tendrá

$$s = 300^2 = 90.000 \text{ duros.}$$

PROBLEMA 202.

Un saquillo de arena, abandonado desde la barquilla de un globo aerostático elevado á la atmósfera, tardó en llegar á la tierra 12 segundos. ¿Desde

qué altura fué abandonado el saquillo en el espacio, teniendo en cuenta que, prescindiendo de la resistencia del aire, recorrió en el primer segundo de tiempo 17 $\frac{1}{2}$ pies; en el 2.º segundo, 3 veces esa longitud: en el tercer segundo, 5 veces la misma longitud, y así sucesivamente, siguiendo el orden de los números impares?

Resolución.

Dícese en el enunciado del problema, de conformidad con una de las leyes del descenso de los graves, que el saquillo de arena de que se trata recorrió en el 1.er segundo de tiempo 17 $\frac{1}{2}$ pies $= 1 \times 17\frac{1}{2}$ pies; en el 2.º segundo, $3 \times 17\frac{1}{2}$; en el 3.er segundo, $5 \times 17\frac{1}{2}$; y así sucesivamente siguiendo el orden de los números impares hasta el último de los 12 segundos que duró la caida del saquillo. Como claramente se ve, estas distancias ó espacios parciales forman la progresión aritmética especial de los números impares, desde el 1 hasta el duodécimo, que es el 23; progresión la suma de cuyos términos es la incógnita del problema, por representar esta suma la distancia recorrida en su descenso por el saquillo de arena. Antes de aplicar para la resolución del problema la fórmula correspondiente, observaremos que, estando en este caso particular, los números impares, términos de la progresión, afectados todos del factor común 17 $\frac{1}{2}$ pies, la suma tiene que estarlo también y que, por consiguiente, será *(problema 198, nota 1.ª)*

$$s = n^2 \times 17\tfrac{1}{2}; \text{ (1)}.$$

---

(1) Cuando s representa la suma de los números 1, 3, 5, 7, &, &., es igual á n^2; mas, como ahora representa la suma de $1 \times 17'5$, $3 \times 17'5$, $5 \times 17'5$, &. &., para que subsista la igualdad de s á n^2, como s contiene aquella suma multiplicada por 17'5, factor común á todos los sumandos, es forzoso multiplicar á n^2 por dicho factor común.

y, dando valores, se tendrá

$$s = 12^2 \times 17'5 = 2520.$$

Resulta que la altura á que fué abandonado el saquillo de arena en el espacio es 2520 pies = 840 varas

Nota.—Según la Física enseña al exponer las leyes del descenso de los graves, los espacios totales recorridos por éstos son como los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos. Si comparamos, pues, el espacio recorrido por el saquillo en el 1.^{er} segundo con el recorrido en los 12 segundos que duró el descenso, se tendrá, conforme á la ley expuesta, llamando x á este 2.º espacio,

$$17{,}5 : x :: 1^2 : 12^2;$$

de donde

$$x = \frac{17'5 \times 12^2}{1^2};$$

ó bien

$$x = \frac{17'5 \times 144}{1} = 17'5 \times 144 = 2520 \text{ pies.}$$

Se ve, pues, que la Física y el Algebra marchan en este punto en perfecto acuerdo.

PROBLEMA 203.

Si un aeronauta elevado la atmósfera en su globo se desprendiese de éste á la altura de 6350'4 metros, ¿cuánto tiempo tardaría en descender á la tierra, hecha abstracción de la resistencia del aire y sabiendo que en el primer segundo recorrería 4'9 metros; en el 2.º segundo, 3 veces esta longitud; en el 3.º, 5 veces la misma longitud, y así sucesivamente, siguiendo el orden de los números impares?

Resolución.

Si, como en el enunciado del problema se dice, el aeronauta de que en él se habla había de recorrer en el 1.^{er} segundo de tiempo 4'9 metros $= 1 \times 4'9$ metros; en el 2.º segundo, $3 \times 4'9$; en el 3.^{er} segundo, $5 \times 4'9$; y así sucesivamente, siguiendo el orden de los números impares hasta el último del total de segundos que durará la caida, estos espacios parciales recorridos en su descenso por el aeronauta forman la progresión especial de los números impares á partir desde el 1; progresión de la cual se conoce la suma de todos sus términos, que es 6350'4 metros, y se desconoce el número de sus términos, que es el número de segundos que el aeronauta tardaría en recorrer esta distancia, el cual número de segundos constituye la incógnita del problema. Para determinarla y antes de aplicar al efecto la fórmula correspondiente, observaremos que todos los términos de la progresión están afectados del factor 4'9 y que, por consiguiente, la suma tiene que resultar afectada también de este mismo factor común. Tendremos, pues, *(problema 198, nota 1.ª)*

$$s = n^2 \times 4'9; \quad (1)$$

y, reemplazando á s con su valor conocido, será

$$6350'4 = n^2 \times 4'9;$$

de donde

$$n^2 = \frac{6350'4}{4'9} = 1296;$$

y de aquí

$$n = \sqrt{1296} = 36.$$

Resulta que el areonauta en cuestión tardaría 36 segundos en llegar á la tierra.

Nota.—Aplicando aquí la ley física expuesta en la nota del problema anterior y, comparando el espacio recorrido en

---

(1) Damos por reproducida aquí la cita del problema anterior. Las cantidades 4'9 metros y 17 $\frac{1}{2}$ pies son equivalentes.

el 1.^{er} segundo con el recorrido en los n segundos, tendremos

$$4'9 : 6350'4 : : 1^2 : n^2;$$

de donde

$$n^2 = \frac{6350'4 \times 1^2}{4'9} = 1296;$$

y de aquí, como antes,

$$n = \sqrt{1296} = 36 \text{ segundos.}$$

PROBLEMA 204.

Un comerciante de ultramarinos, ha vendido 1896 kilogramos de arroz en 24 días: en cada uno de éstos ha vendido 6 más que en su inmediato anterior. ¿Cuántos kilogramos vendió el primer día, cuántos el último y cuántos el día décimoquinto?

Resolución.

Si, como en el enunciado se dice, el comerciante de que se trata ha vendido en cada uno de los 24 días citados 6 kilogramos de arroz más que en el día anterior inmediato, evidentemente las partidas parciales vendidas formarán una progresión aritmética creciente, de la que la razón es 6, el número de sus términos 24 y la suma de todos ellos 1896, y de la cual se piden en el problema propuesto los términos 1.°, último y décimoquinto, que son desconocidos. Empezaremos por determinar el 1.^{er} término. Tendremos *(problema 198, fórmula 2.ª)*

$$a = \frac{2\text{ s}}{\text{n}} - u;$$

y, como es $u = a + r\ (n - 1) = a + rn - r$, sustituyendo, se tendrá

$$a = \frac{2\ s}{n} - (a + rn - r) = \frac{2\ s}{n} - a - rn + r;$$

ó bien

$$a = \frac{2\ s}{n} - a - rn + r;$$

y, transponiendo el $- a$ del 2.° miembro, tendremos

$$2\,a = \frac{2\ s}{n} - rn + r;$$

y, dando valores, será

$$2\,a = \frac{2\ .\ 1896}{24} - 6\ .\ 24 + 6 = 20;$$

de donde

$$a = \frac{20}{2} = 10.$$

Resulta que en el 1.^{er} día el comerciante vendió 10 kilogramos de arroz.

Para determinar los vendidos en el día último, tenemos la fórmula

$$u = a + r\ (n - 1).$$

Dando en ella valores, se tendrá

$$u = 10 + 6 \times 23 = 148 \text{ kilogramos.}$$

Finalmente, para averiguar los vendidos en el día décimoquinto, ó consideramos á este término como último de la progresión, ó tendremos presente lo dicho al principio de la resolución del problema 193; esto es, que un término cualquiera de una progresión aritmética se compone del 1.°, mas el producto de la razón por el número de términos que preceden al que se considera. Fundados en esto último y llamando t al término que nos ocupa, tendremos

$$t = 10 + 6 \times 14 = 94 \text{ kilogramos.}$$

PROBLEMA 205.

En una reunión hay cierto número de personas, cada una de las cuales excede á la inmediata de su derecha en $2\frac{1}{2}$ años de edad: la última de todas tiene 63 años y entre todas suman 785 ¿Cuántas son las personas que constituyen la reunión y qué edad cuenta la primera de ellas?

Resolución.

Las edades de las diferentes personas que constituyen la reunión forman una progresión aritmética creciente, de la cual es la razón $2\frac{1}{2} = 2{'}5$, el último de sus términos 63 y la suma de todos ellos 785. De esta progresión se pide el número de sus términos, que es el de personas reunidas, y el valor del 1.º, que es la edad de la 1.ª de éstas. Empecemos por determinar la 1.ª de estas dos incógnitas. Al efecto tendremos *(problema 198, fórmula 4.ª)*

$$n = \frac{2\,\mathrm{s}}{\mathrm{a}+\mathrm{u}};$$

y, como *(problema 193, fórmula 2.ª)* es $a = u - r\,(n-1)$, sustituyendo la cantidad a con su valor, se tendrá

$$n = \frac{2\,\mathrm{s}}{\mathrm{u-r(n-1)+u}} = \frac{2\,\mathrm{s}}{\mathrm{2u-r\,(n-1)}} = \frac{2\,\mathrm{s}}{\mathrm{2u-rn+r}};$$

ó bien

$$n = \frac{2\,\mathrm{s}}{\mathrm{2\,u - rn + r}};$$

y, dando valores, será

$$n = \frac{2\,.\,785}{2\,.\,63-2{'}5\mathrm{n}+2{'}5} = \frac{1570}{126-2{'}5\mathrm{n}+2{'}5} = \frac{1570}{128{'}5-2{'}5\mathrm{n}};$$

ó bien

$$n = \frac{1570}{128{'}5 - 2{'}5\,n};$$

y, quitando el denominador del 2.º miembro, se tendrá

$$n \times (128{'}5 - 2{'}5\,n) = 1570;$$

y, resolviendo el paréntesis, resultará

$$128{'}5\,n - 2{'}5\,n^2 = 1570;$$

y, cambiando los signos á todos los términos de la ecuación, se tendrá esta otra

$$-128{'}5\,n + 2{'}5\,n^2 = -1570;$$

ó bien

$$2{'}5\,n^2 - 128{'}5\,n = -1570;$$

y, pasando el 2.º miembro al 1.º, será

$$2{'}5\,n^2 - 128{'}5\,n + 1570 = 0;$$

y, dividiendo toda la ecuación por el coeficiente del 1.er término, resultará

$$n^2 - 51{'}4\,n + 628 = 0;$$

ecuación completa de 2.º grado, ya preparada. Aplicando la fórmula correspondiente *(problema 32)*, se obtendrá en definitiva

$$n = 31{'}4$$

y

$$n = 20.$$

Como no cabe que las personas reunidas sean 31'4, éstas son sin disputa alguna 20.

Hallado el número de términos de la progresión, ó sea el de las personas reunidas, el valor del 1.er término, ó sea la edad de la 1.ª de éstas, se determinará fácilmente por la fórmula consignada atrás

$$a = u - r\,(n - 1).$$

En efecto, sustituyendo valores conocidos, se tendrá

$$a = 63 - 2{'}5 \times 19 = 15{'}5 \text{ años.}$$

Queda resuelto el problema en sus dos partes.

PROBLEMA 206.

Un sujeto retiró de sus ingresos, para irlas colocando en una Caja de Ahorros, 585 pesetas en el transcurso de 30 días: en el 1.º de éstos retiró 5 de aquéllas; y, en cada uno de los sucesivos, un número fijo de pesetas más que en el inmediato anterior. ¿Cuál es este numero fijo de pesetas?

Resolución.

Las pesetas retiradas en cada uno de los 30 días de que en el enunciado se habla, forman una progresión aritmética creciente cuya razón, *incógnita del problema*, es el número fijo de pesetas que el sujeto en cuestión retiró cada día sobre las retiradas en el inmediato anterior. Para determinar dicha razón se conocen el 1.º de los términos de la progresión, que es 5, *pesetas retiradas el 1.er día*, el número de todos ellos, que es 30, *número de los días*, y la suma de dichos términos constituida por las 585 pesetas retiradas en totalidad. Tendremos, pues, *(problema 198, fórmula 1.ª)*

$$s = \frac{a + u}{2} \times n;$$

y, como es $u = a + r\ (n - 1)$, sustituyendo se tendrá

$$s = \frac{a + a + r\ (n - 1)}{2} \times n;$$

ó bien

$$s = \frac{2a + r\ (n - 1|}{2} \times n;$$

y, dividiendo la ecuación por n, resultará esta otra

$$\frac{s}{n} = \frac{2\,a + r\ (n - 1)}{2};$$

y, quitando el denominador 2, se tendrá

$$\frac{2\,\mathrm{s}}{\mathrm{n}} = 2a + r(n - 1);$$

y, dando valores, será

$$\frac{2 \times 585}{30} = 2 \,.\, 5 + 29\,r;$$

ó bien

$$39 = 10 + 29\,r;$$

y, transponiendo el 10, se tendrá

$$29 = 29\,r;$$

de donde

$$r = \frac{29}{29} = 1.$$

Resulta, pues, que el sujeto en cuestión retiró cada día 1 peseta más que en el inmediato anterior.

PROBLEMA 207.

El célebre aeronauta francés José Luis Gay-Lussac, en una de sus ascensiones aerostáticas, se elevó á la altura de 7840 metros: si en este punto se hubiese desprendido de la barquilla del globo, ¿con qué velocidad hubiera chocado con la tierra?

Resolución.

Sabido es que los graves, al descender libremente en la atmósfera, hecha abstracción de la resistencia de ésta, recorren, como en el vacío, 4'9 metros en el 1.er segundo de tiempo, 3 veces esta misma distancia en el 2.° segundo, 5 veces la misma distancia en el 3.er segundo, y así sucesivamente siguiendo el orden de los números impares. Como se ve, los espacios parciales

$$1 \times 4{'}9,\ 3 \times 4{'}9,\ 5 \times 4{'}9,\ 7 \times 4{'}9, \ldots\ldots$$

que Gay-Lussac habría recorrido en los segundos sucesivos que hubiera durado su descenso, forman la progresión aritmética especial de los números impares á partir desde el 1, de la cual se conocen la razón, que es 2, el 1.º de sus términos, que es 1 × 4'9, y la suma de todos ellos, que son los 7840 metros de la elevación del globo, y de la que se pide el valor del último término. Para determinarlo, necesitamos averiguar antes el número de términos de la citada progresión, que es, evidentemente, el número de segundos que el aeronauta hubiera tardado en su descenso. Determinemos, pues, este número de segundos ó de términos. Al efecto tenemos *(problema 203)*

$$s = n^2 \times 4{'}9$$

y, sustituyendo á s con su valor, será

$$7840 = n^2 \times 4{'}9;$$

de donde

$$n^2 = \frac{7840}{4{'}9} = 1600;$$

y de aquí

$$n = \sqrt{1600} = 40 \text{ segundos;}$$

Determinemos ahora el valor del último de estos 40 términos. Tendremos *(probl, 193, fórm. 1.ª)*

$$u = a + r\,(n - 1);$$

y, dando valores, será

$$u = 1 + 2 \times 39 = 79.$$

Y, como este último término, como todos los demás, se halla en este caso afectado del factor 4'9 metros, resulta que su verdadero valor, ó sea el espacio recorrido en el último de los 40 segundos, es 79 × 4'9 = 387'10 metros; la cual vertiginosa celeridad demuestra lo enorme de la violencia con que Gay-Lussac hubiera chocado con la tierra.

Nota 1.ª—Puédese también resolver este problema haciendo uso de la ley del descenso de los graves que se enuncia diciendo: *Los espacios totales son como los cuadrados de los tiempos empleados en recorrerlos.* En efecto, comparando, por ejemplo, 4‘9 metros, espacio correspondiente al primer segundo, con 7840 metros, espacio correspondiente al total de segundos, al cual total llamaremos t, tendremos, según la ley enunciada,

$$4‘9 : 7840 : : 1^2 : t^2,$$

ó bien

$$4‘9 : 7840 : : 1 \quad : t^2;$$

de donde

$$t^2 = \frac{7840 \times 1}{4‘9} = \frac{7840}{4‘9} = \frac{78400}{49};$$

y, extrayendo la raiz cuadrada de los miembros de la ecuación $t^2 = \frac{78400}{49}$, será

$$t = \sqrt{\frac{78400}{49}} = \frac{\sqrt{78400}}{\sqrt{49}} = \frac{280}{7} = 40 \text{ segundos},$$

que son el tiempo que se pide.

Determinada esta incógnita, es muy fácil determinar la otra, ó sea la velocidad pedida, que es el espacio recorrido en el segundo cuadragésimo de tiempo. Al efecto, considerando que en el descenso de los graves en el vacío *los espacios parciales son como los números impares correspondientes,* compararemos 4‘9 metros, primer espacio, con x, espacio último, y 1, número impar correspondiente al 1.$^{\text{er}}$ espacio, con i, número impar correspondiente al espacio último, en esta forma:

$$4‘9 : x : : 1 : i.$$

Ahora el valor de i se halla, ya por el procedimiento anterior; esto es, como se determinó el valor de u, sin multiplicarle por 4‘9, el cual valor de u, 79, es el mismo que tiene i; ya de memoria; ya teniendo presente que en la progresión especial formada por los números impares á partir del 1, un término cualquiera es la suma del número de orden del lugar que ocupa en la progresión y del número consecutivo anterior. Así, el término 5.º es $5 + 4 = 9$; el término 11.º, $11 + 10 = 21$; y por consiguiente, el término cuadragésimo, que es el representado por i, $40 + 39 = 79$. Sustituyendo ahora á i con este número 79 en la proporción anterior

$$4'9 : x :: 1 : i,$$

resultará esta otra

$$4'9 : x :: 1 : 79;$$

de donde

$$x = \frac{4'9 \times 79}{1} = 387'10 \text{ metros},$$

velocidad que se pide.

Nota 2.ª—Si suponemos que Gay-Lussac pesara 63'25 kilogramos (5'5 arrobas), tendríamos, que, según las doctrinas del eminente físico español D. José Echegaray, esos 63'25 kigramos, recorriendo en su descenso los 7840 metros de altura, representarían una energía ó trabajo mecánico de $63'25 \times 7840 = 495880$ kilográmetros (1); y, como cada 75 kilográmetros representan un caballo de vapor, los expresados 495880 kilográmetros representarán $495880 : 75 = 6611$ caballos de vapor. Tál es la fuerza, *equivalente á la acumulada de muchas locomotoras*, con que Gay Lussac hubiera chocado con la tierra.

---

(1) Sabido es que en Mecánica se da el nombre de *kilográmetro* al esfuerzo que se necesita desplegar para elevar á un metro de altura en un segundo de tiempo un kilogramo de peso.

PROBLEMA 208.

Siendo r **la razón de una progresión geométrica,** a **el primer término de ésta,** u **el último y** n **el número de todos ellos, ¿cuál será la relación que liga á cada una de estas cuatro cantidades con las tres restantes?**

Resolución.

En toda progresión geométrica, sea creciente ó decreciente, algebraicamente considerada, cada término es igual á su anterior inmediato multiplicado por la razón. Por manera que el 2.º término es igual al 1.º multiplicado por la razón; el 3.º es igual al 2.º multiplicado por la razón; y como el 2.º es igual al 1.º multiplicado por la razón, el 3.º es igual al 1.º multiplicado por el cuadrado de la razón. El 4.º término es igual al 3.º multiplicado por la razón; y, como este es igual al 1.º multiplicado por el cuadrado de la razón, el 4.º es igual al 1.º multiplicado por el cubo de la razón; y así sucesivamente. Síguese de aquí que un término cualquiera, que es lo que se llama *término general de la progresión,* se compone del 1.º multiplicado por una potencia de la razón cuyo exponente es el número de términos que preceden al que se toma en consideración, y que, como consecuencia de esto, el último término de una progresión geométrica es igual al 1.º multiplicado por la razón elevada á una potencia expresada por el número de términos, menos uno, que tiene la progresión. Luego llamando r á la razón, a al 1.$^{\text{er}}$ término, u al último y n al número de términos, se tendrá

$$u = a \times r^{n-1} \text{ (1).} \qquad 1.^{a}$$

---

(1) Si nuestros lectores fijan su atención en ésta y en las demás fórmulas de las progresiones geométricas, notarán la perfecta correla-

Esta ecuación-fórmula sirve para determinar, no sólo el valor de u, sinó el de cualquiera de las cuatro cantidades u, a, r y n, conocido el de las tres restantes. En efecto, dividiendo los dos miembros por r^{n-1}, se tendrá

$$\frac{u}{r^{n-1}} = a;$$

ó bien

$$a = \frac{u}{r^{n-1}}. \qquad 2.^a$$

De igual modo, si en la ecuación 1.ª dividimos por a los dos miembros, será

$$\frac{u}{a} = r^{n-1};$$

y, extrayendo de los dos miembros la raiz $n - 1$, resultará

$$\sqrt[n-1]{\frac{u}{a}} = r;$$

ó bien

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}; \qquad 3.^a$$

Por último, si en la propia ecuación 1.ª se dividen por a los dos miembros, se tendrá

$$\frac{u}{a} = r^{n-1}.$$

Como esta ecuación es exponencial por tener por expo-

---

ción que existe entre cada una de éstas y su correspondiente de las aritméticas. Verán que todo lo que en las aritméticas es sumar, restar, multiplicar y dividir es en las geométricas multiplicar, dividir, elevar á potencias y extraer raices, respectivamente. Por manera que el conocimiento de una fórmula de una clase recuerda la correspondiente de la otra clase.

nente la incógnita n, para despejar á ésta hay que apelar á los logaritmos. Tomando, pues, logaritmos, se tendrá

$$\log.\ \frac{u}{a} = \log.\ r^{n-1};$$

y, como el logaritmo de una potencia de una cantidad es igual al logaritmo de la cantidad, multiplicado por el exponente de la potencia, será

$$\log.\ \frac{u}{a} = \log.\ r \times (n-1);$$

y, como el logaritmo de un quebrado ó cociente es igual al logaritmo del numerador ó dividendo, menos el logaritmo del denominador ó divisor, resultará

$$\log.\ u - \log.\ a = \log.\ r \times (n - 1);$$

y, dividiendo los dos miembros por log. r, se tendrá

$$\frac{\log.\ u - \log.\ a}{\log\ r} = n - 1;$$

y, pasando el — 1 al 1.^{er} miembro, tendremos en definitiva

$$\frac{\log.\ u - \log.\ a}{\log.\ r} + 1 = n;$$

ó bien

$$n = \frac{\log.\ u - \log.\ a}{\log.\ r} + 1. \quad (1) \qquad 4.^a$$

PROBLEMA 209.

¿Cuántos vigésimos abuelos ha tenido un individuo cualquiera?

Resolución.

Todo individuo ha tenido 4 abuelos (2 paternos y 2 ma-

---

(1) Damos por reproducida aquí la cita 2.ª del problema 193.

ternos), 8 bisabuelos, 16 tatarabuelos ó abuelos terceros, 32 abuelos 4.^{os}; y así sucesivamente, duplicando. Como se ve, los números

4, 8, 16, 32, 64, 128,.......,

expresivos de los abuelos de los diferentes grados que un individuo ha tenido, forman una progresión geométrica creciente cuyo número de términos en el presente caso es 20, siendo 4 el 1.^{o} de ellos y 2 la razón de la progresión, cuyo último término es la incógnita del problema. Para determinarla tenemos *(problema anterior, fórmula 1.^{a})*

$$u = ar^{n-1};$$

y, dando valores, será

$$u = 4 \times 2^{19} = 2097152.$$

Resulta, pues, que todo individuo ha tenido 2.097.152 vigésimos abuelos.

PROBLEMA 210.

Siendo r **la razón de una progresión geométrica,** a **el primer término de ésta,** u **el último y** s **la suma de todos ellos, ¿cuál será la relación que liga á cada una de estas cuatro cantidades con las tres restantes?**

Resolución.

Para resolver la cuestión propuesta, vamos á servirnos de la siguiente progresión

$$\div\div\, a : b : c : d : e : f : g : u.$$

Como en toda progresión geométrica cada término es igual á su inmediato anterior multiplicado por la razón, será

$$b = ar$$
$$c = br$$
$$d = cr$$

$$e = dr$$
$$f = er$$
$$g = fr$$
y
$$u = gr.$$

Sumando ordenadamente estas igualdades y separando en el 2.º miembro el factor común r, se tendrá

$$b + c + d + e + f + g + u = (a+b+c+d+e+f+g) \times r$$

El 1.^{er} miembro de esta ecuación es la suma de todos los términos de la progresión propuesta, menos el 1.º, y el paréntesis del 2.º miembro es también dicha suma, menos el término último. Luego, si llamamos s á la suma de todos los términos de la progresión y sustituimos, la última ecuación se transformará en esta otra

$$s - a = (s - u)\ r;$$

ó bien, quitando el paréntesis,

$$s - a = sr - nr;$$

y, pasando el — a al 2.º miembro y el sr al 1.º, se tendrá

$$s - sr = a - nr;$$

ó bien

$$1s - sr = a - ur;$$

y, separando en el 1.^{er} miembro el factor común s, resultará

$$s \times (1 - r) = a - ur;$$

de donde

$$s = \frac{a - ur}{1 - r};$$

y, cambiando los signos en el 2.º miembro, se tendrá en definitiva

$$s = \frac{ur - a}{r - 1}. \qquad 1.^a$$

Esta ecuación-fórmula sirve para determinar, no sólo el valor de s, sinó en general el de cualquiera de las cuatro cantidades s, a, u y r, conocido el de las tres restantes. En efecto, si multiplicamos los dos miembros de la ecuación por $r - 1$, se tendrá

$$s(r - 1) = ur - a;$$

ó bien quitando el paréntesis,

$$sr - s = ur - a;$$

y, pasando el $- a$ al 1.er miembro, tendremos

$$sr - s + a = ur;$$

y, dividiendo por r los dos miembros, resultará

$$s - \frac{s + a}{r} = u;$$

ó bien

$$u = s - \frac{s + a}{r}. \qquad 2.^a$$

Si en la misma fórmula 1.a multiplicamos los dos miembros por $r - 1$, se tendrá

$$sr - s = ur - a;$$

y, pasando el ur al 1.er miembro, será

$$sr - s - ur = - a;$$

y, cambiando los signos á todos los términos de la ecuación, resultará esta otra

$$s - sr + ur = a;$$

ó bien

$$a = s - sr + ur. \qquad 3.^a$$

Finalmente, si en la fórmula 1.a se multiplican los dos miembros por $r - 1$, tendremos

$$sr - s = ur - a;$$

y, pasando el sr al 2.º miembro y el $- a$ al 1.º, se tendrá

$$a - s = ur - sr;$$

y, separando en el 2.º miembro el factor común r, resultará

$$a - s = r(u - s);$$

y, dividiendo los dos miembros por $u - s$, será

$$\frac{a - s}{u - s} = r;$$

ó bien

$$r = \frac{a - s}{u - s}. \qquad 4.^a$$

Nota 1.ª - Cuando la progresión es geométrica decreciente y continuada al infinito, la suma de sus términos no es, como pudiera creerse, una cantidad infinita, sinó finita y limitada, y para su determinación puede deducirse de la fórmula general otra sencillísima. En efecto, según se ha dicho al principio de la resolución de este problema general, es

$$s = \frac{ur - a}{r - 1}.$$

También hemos visto *(problema 208, fórmula 1.ª)* que es

$$u = ar^{n-1}.$$

Sustituyendo este valor de u en la ecuación anterior se tendrá

$$s = \frac{ar^{n-1} \times r - a}{r - 1};$$

ó bien

$$s = \frac{ar^{n} - a}{r - 1}.$$

Ahora, como, por ser decreciente la progresión de que se trata, su razón r es menor que 1; como las potencias de un número menor que 1 van disminuyendo á medida que crece su grado; como en este caso el grado de la potencia de r, por ser infinito, no puede crecer más y, por consiguiente, el valor del quebrado r tampoco puede disminuir más, siendo, por lo mismo, igual á cero, y, como toda cantidad multiplicada por cero es igual á cero, resulta que es

$$s = \frac{-a}{r - 1};$$

ó bien, cambiando los signos en el 2.º miembro,

$$s = \frac{a}{1 - r}. \quad (1).$$

Nota 2.ª—Téngase por reproducida aquí, con relación á las fórmulas del problema 208 y á las del actual, la nota 2.ª del problema 198.

PROBLEMA 211.

¿Cuál es el número de ascendientes en línea recta que un individuo tiene, contando hasta la vigésimaquinta generación inclusive?

Resolución.

Todo individuo tiene ó ha tenido 2 padres, 4 abuelos, 8 bisabuelos, 16 tatarabuelos, 32 cuartos abuelos, &. &. Como se ve, estos números de ascendientes en línea recta 2, 4, 8, 16, 32......forman una progresión geométrica creciente, cuya razón es 2; su 1.er término, también 2, y el número de sus términos, 25, siendo la suma de éstos la incógnita del problema. Para determinarla, tenemos *(problema 210, fórmula 1.ª)*

$$s = \frac{ur - a}{r - 1};$$

y como *(problema 207, fórmula 1.ª)* es $u = ar^{n-1}$, sustituyendo, se tendrá

$$s = \frac{ar^{n-1} \times r - a}{r - 1} = \frac{ar^{n} - a}{r - 1};$$

y, dando valores, será

$$s = \frac{2 \cdot 2^{25} - 2}{2 - 1} = 2^{26} - 2 = 67.108862;$$

---

(1) Las fórmulas de este problema no se corresponden, ni pueden corresponderse, con las de las progresiones aritméticas.

El número, pues, de ascendientes en linea recta que se pide es 67.108.862.

PROBLEMA 212.

Un jugador hizo al juego de la banca una puesta de 3 piezas de 5 céntimos, y la perdió; hizo otra puesta triple de la anterior, y la perdió; hizo otra, y otra y otras, cada una de ellas triple que su inmediata anterior y también las perdió; por último hizo otra por valor de 531441 piezas, triple de su inmediata anterior, y la ganó, pero con puerta; descontándole por ella de esta ganancia su 4.ª parte. Pregúntase: 1.º ¿cuántas puestas hizo el jugador?; 2.º ¿qué dinero ganó?; y 3.º ¿cuánto hubiera salido perdiendo, si no hubiese acertado la última puesta?

Resolución.

Según el enunciado, las diferentes puestas hechas por el jugador en cuestión están representadas por los números 3, $3 \times 3 = 9$, $9 \times 3 = 27$, $27 \times 3 = 81$,........531441, los cuales números, como se ve, forman una progresión geométrica creciente cuya razón es 3. De esta progresión se conocen, además de la razón, los términos 1.º y último, que son, respectivamente, 3 y 531441, y de ella, al pedirnos en 1.er lugar el número de puestas hechas por el jugador, se nos pide indirectamente el número de sus términos, toda vez que el número de éstos y el de aquéllas son iguales. Al efecto, tendremos *(problema 208, fórmula 4.ª)*

$$n = \frac{\text{log. u} - \text{log a}}{\text{log. r}} + 1;$$

y, dando valores, será

$$n = \frac{\text{log. } 531441 - \text{log. } 3}{\text{log. } 3} + 1;$$

y, como *(probl. 189)* los logaritmcs de 531441 y de 3 son respectivamente, 5‘72543109 y 0‘47712125, sustituyendo, se tendrá

$$n = \frac{\text{5‘72543109} - \text{0‘47712125}}{\text{0‘47712125}} + 1;$$

ó bien

$$n = \frac{\text{5‘24830984}}{\text{0‘47712125}} + 1;$$

ó sea

$$n = 11 + 1 = 12.$$

Resulta, pues, que el jugador de que se trata hizo 12 puestas.

Hallemos ahora la cantidad que ganó.

Es evidente que la ganancia obtenida tiene que ser la diferencia de lo ganado en la última puesta y la suma de lo perdido en las 11 precedentes. Lo ganado en la puesta última es, habido en cuenta el descuento de puerta,

$$531441 \times {}^{3}/_{4} = \text{398580‘75} \text{ piezas:}$$

lo perdido en las 11 primeras jugadas es la suma de los 11 primeros términos de la progresión geométrica;

$$3 : 9 : 27 : 81 : : : : :$$

Para determinar esta suma tendremos *(problema 210, fórmula 1.ª)*

$$s = \frac{ur - a}{r - 1};$$

y, como *(probl. 208, fórm. 1.ª)* es $u = ar^{n-1}$, se tendrá

$$s = \frac{ar^{n-1} \times r - a}{r - 1};$$

y, como para multiplicar potencias iguales se suman los exponentes, será

$$s = \frac{ar^{n-1+1} - a}{r - 1} = \frac{ar^{n} - a}{r - 1};$$

y, dando valores, se tendrá

$$s = \frac{3 \, . \, 3^{11} - 3}{3 - 1} = \frac{3^{12} - 3}{2} = 265719 \text{ piezas (1).}$$

---

(1) Esta suma puede hallarse mucho más fácilmente considerando que, como puede observarse en la progresión propuesta y según luégo demostraremos, un término cualquiera de cualquiera progresión geométrica, disminuido en el primero y dividido por la razón menos 1, es igual á la suma de todos los que le preceden. Así, en el caso presente, $\frac{531441 - 3}{3 - 1} = \frac{531438}{2} = 265719$. será, como lo es, la suma de los 11 términos de la indicada progresión

Demostremos ahora la proposición sentada

Sea la progresión $a : b : c : d : e : t : : : :$, en la cual es r la razón. Fijémonos, por ejemplo, en el término t. Digo que es $\frac{t - a}{r - 1} = a + b + c + d + e$.

En efecto, según la definición de la progresión geométrica (*probl. 208*), es

$$b = ar,$$
$$c = br,$$
$$d = cr,$$
$$e = dr,$$

y

$$t = er.$$

Sumando ordenadamente estas cinco igualdades y separando en el 2.° miembro el factor común r, se tendrá

$$b + c + d + e + t = (a + b + c + d + e)\, r;$$

y restando de los dos miembros el paréntesis, será

$$t - a = (a + b + c + d + e)\, r - (a + b + c + d + e) \times 1;$$

y, separando en el 2.° miembro el factor común, que es el paréntesis, se tendrá

$$t - a = (a + b + c + d + e)\,(r - 1);$$

y, dividiendo los dos miembros por $r - 1$, resultará

$$\frac{t - a}{r - 1} = a + b + c + d + e.$$

Lo que se quería demostrar.

Consecuencia natural de lo demostrado es que, si al último

Por manera que la ganancia final obtenida es

398580'75 — 265719 = 132861'75 piezas

ó sea

132861'75 : 20 = 6643'09 pesetas.

Se nos pide, por último, que expresemos cuánto hubiera salido perdiendo el jugador, si no hubiese acertado la duodécima puesta. Es palmario que en este supuesto habría perdido la cantidad que representa la suma de los 12 términos de la supradicha progresión. Esta suma puede hallarse aplicando la fórmula correspondiente $s = \frac{ur - a}{r - 1}$; mas, toda vez que conocemos el valor del último término, 531441, y la suma de los 11 precedentes, 265719, es más breve sumar estas dos cantidades, cuya suma es la de los 12 términos de la progresión. Hubiera perdido, pues,

531441 + 265719 = 797160 piezas, equivalentes á

797160 : 20 = 39858 pesetas.

Queda resuelto el problema en sus tres partes.

PROBLEMA 213.

Un joven heredó de su padre un capital considerable, del cual disipó en el primer año 18 centésimas partes y en cada uno de los 9 años sucesivos la misma fracción de lo que restaba del año inmediato anterior. ¿A qué porción había quedado reducido el capital al terminar el último año?

Resolución.

Para determinar la fracción á que el capital heredado

---

término de una progresión geométrica se le agrega el cociente de dividir por la razón menos 1 el exceso de dicho último término al primero, la suma será la de todos los términos de la progresión.

había quedado reducido al cabo del 10.° año de disipación, que es el último, necesario es averiguar antes la suma de las cantidades disipadas en dicho periodo de tiempo. Según el enunciado del problema, el joven en cuestión disipó en el 1.^er^ año 18 centésimas del capital que heredó de su padre. Luego, llamando c á este capital, disiparía $\frac{18}{100}$ c. Luego le quedarían $\frac{100}{100}$ c — $\frac{18}{100}$ $c = \frac{82}{100}$ c. Si de estas $\frac{82}{100}$ c disipó $\frac{18}{100}$ en el 2.° año, disiparía $\frac{82}{100} c \times \frac{18}{100} = \frac{1476}{10000}$ c. Luego le quedarían $\frac{82}{100} c - \frac{1476}{10000} c = \frac{8200}{10000} c - \frac{1476}{10600} c = \frac{5724}{10000}$ c. Si de estas $\frac{5724}{10000}$ c disipó $\frac{18}{100}$ en el 3.^er^ año, disiparía $\frac{5724}{10000} c \times \frac{18}{100} = \frac{121032}{1000000}$ c; y asi sucesivamente. Vése, pues, que las cuotas disipadas

$$\frac{82}{100}\ c,\ \frac{1476}{10000},\ \frac{121032}{1000000},\dots\dots\dots,$$

forman una progresión geométrica decreciente, cuya razón es $\frac{82}{100}$; de la cual progresión necesitamos conocer la suma de sus términos. Al efecto tenemos *(problema 210, fórmula 1.ª)*

$$s = \frac{ur - a}{r - 1}.$$

También tenemos *(problema 208, fórmula 1.ª)*

$$u = ar^{n-1}.$$

Sustituyendo este valor de u en la ecuación anterior, resultará esta otra.

$$s = \frac{ar^{n-1} \times r - a}{r - 1};$$

ó bien

$$s = \frac{ar^{n} - a}{r - 1};$$

y dando valores, se tendrá

$$s = \frac{0'18 \times 0'82^{10} - 0'18}{0'82 - 1};$$

ó sea

$$s = \frac{-\ 0'079526}{-\ 0'18} = \frac{0'079526}{0'18} = 0'8625.$$

Resulta, pues, que la parte de capital disipada en los 10 años es 0'8625. Luego al final del 10.º año dicho capital estaba reducido á

$$1 - 0,8625 = 0'1375$$ de lo que era al heredarle.

PROBLEMA 214.

El día en que un cosechero anunció la venta de una cuba de vino vendió $^2/_5$ del total de éste; al día siguiente, $^2/_5$ de lo que había quedado; al siguiente, $^2/_5$ de lo que restaba, y así sucesivamente hasta el octavo día: en el noveno vendió todo el vino que áun quedaba. ¿Qué porción vendió en este noveno día?

Resolución.

Este problema es igual en esencia al anterior, y, resuelto como él, dá la solución siguiente

Vino vendido en los 8 primeros días. $\frac{768128}{1171873}$

id. el día 9.º. . . . . $\frac{403745}{1171873}$

Total. . . $\frac{768128}{1171873} + \frac{403745}{1171873} = \frac{1171873}{1171873} = 1.$

Ocioso parece advertir que este resultado final, 1, representa la masa total del vino de la cuba.

PROBLEMA 215.

¿Qué porción del aire contenido en el recipiente de una máquina neumática extraeríamos en un número infinito de pistonazos, suponiendo que en el 1.º extrajésemos 58 centésimas de dicho aire y en cada uno de los pistonazos siguientos 100 veces menos que en su inmediato anterior?

Resoluciones.

1.ª—Según el enunciado, las cantidades de aire extraidas en los diferentes pistonazos en número infinito serían

$$\frac{58}{100}, \frac{58}{10000}, \frac{58}{1000000}, \ldots\ldots\ldots$$

cantidades que, como se ve, forman una progresión geométrica decreciente continuada al infinito, cuya razón es $\frac{1}{100}$. La incógnita del problema propuesto es evidentemente la suma de los términos de esta progresión. Para determinarla tenemos *(fórmula de la nota 1.ª del problema 210)*

$$s = \frac{a}{1 - r};$$

y, sustituyendo las letras con sus valores conocidos, será

$$s = \frac{0{'}58}{1 - 0{'}01} = \frac{0{'}58}{0{'}99} = \frac{58}{99}.$$

Resulta que en el número infinito de pistonazos habríamos extraido de la masa de aire contenida en el recipiente de la máquina neumática $\frac{58}{99}$.

2.ª—Como ya hemos visto, las cantidades de aire extraidas sucesivamente de la campana de la máquina neumática son

0'58, 0'0058, 0'000058, 0'00000058,........;

y, como la suma de estas cantidades es la incógnita del problema, se tendrá

$s = 0'58 + 0'0058 + 0'000058 + 0'00000058 + ... = 0'58585858.....;$ fracción decimal periódica pura, cuya fracción generatriz, según la Aritmética, es un quebrado que tiene por numerador el período y por denominador tantos nueves como cifras tiene el período. Será, pues,

$$0'58585858.... = \frac{58}{99}.$$

Luego

$$s = \frac{58}{99};$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

PROBLEMA 216.

De la masa de agua contenida en un estanque se han evaporado en un día 125 milésimas partes; en el siguiente, 34 cienmilésimas, y en cada uno de los sucesivos una cantidad 100 veces menor que la del día anterior inmediato. ¿Qué porción de dicha masa de agua se evaporará en un número infinito de días?

Resoluciones.

1.ª—Según el enunciado, si llamamos m á la masa de agua del estanque, las porciones de ella evaporadas en los días sucesivos serán

$$\frac{125}{1000}m, \frac{34}{100000}m, \frac{34}{100000}m \times \frac{1}{100} = \frac{34}{10000000}m, ...$$

Estas cantidades, *excluida la 1.ª*, forman una progresión geométrica decreciente continuada al infinito, cuya razón es $\frac{1}{100}$. La cuestión, pues, está reducida á determinar la suma de los términos de esta progresión y á agregarle la cantidad

$\frac{125}{1000}$ *m*. Dicha suma (*probl. 210, fórm. de la nota 1.ª*) será

$$s = \frac{a}{1 - r};$$

y, dando valores, se tendrá

$$s = \frac{34}{100000} : \left(1 - \frac{1}{100}\right) = \frac{34}{100000} : \frac{99}{100} = \frac{34}{99000}.$$

Agregando ahora á esta suma $\frac{34}{99000}$ la cantidad excluida $\frac{125}{1000}$, la suma total será

$$\frac{34}{99000} + \frac{125}{1000} = \frac{34}{99000} + \frac{12375}{99000} = \frac{12409}{99000},$$ que es la cantidad total evaporada en el número infinito de días.

2.ª—Las diferentes cantidades evaporadas son, como se ha visto.

$$\frac{125}{1000}, \frac{34}{100000}, \frac{34}{10000000}, \dots\dots$$

ó sea, 0'125, 0'00034, 0'0000034,..........

cuya suma es

0'125 + 0'00034 + 0'0000034 +....= 0,125343434...,

que es el valor de la incógnita del problema.

Este resultado, 0'125343434..... es, como se ve, una fracción periódica mixta; por consiguiente, su fracción generatriz será un quebrado, cuyo numerador se compondrá de la parte no periódica multiplicada por tantos nueves como cifras tiene el período, mas el período, y su denominador, de tantos nueves como cifras tiene el período, seguidos de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica (1). Será, pues,

---

(1) También puede decirse que *el numerador de la fracción generatriz de una fracción periódica mixta es un quebrado cuyo*

$$0'125343434.....= \frac{125 \times 99 + 34}{99000} = \frac{12375 + 34}{99000} =$$

$\frac{12409}{99000}$, que es el resultado obtenido anteriormente.

---

numerador consta de la parte no periódica seguida del período, menos la parte no periódica, y cuyo denominador le compondrán tantos nueves como cifras tiene el período, seguidos de tantos ceros como cifras tiene la parte no periódica.

Esta fórmula se deduce fácilmente de la anterior,

$$0'125343434....= \frac{125 \times 99 + 34}{99000}.$$

En efecto, sustituyendo en el numerador del 2.° miembro el factor 99 con su igual 100 — 1, será

$$\frac{125 \times 99 + 34}{99000} = \frac{125 \times (100-1) + 34}{99000} = \frac{12500 - 125 + 34}{99000}$$

$$= \frac{12534 - 125}{99000}.$$

$$\text{Luego, } 0'125343434....= \frac{12534 - 125}{99000}.$$

Hecha la resta indicada en el numerador del 2.° miembro, el resultado será el mismo que antes, esto es, $\frac{12409}{99000}$.

PROBLEMA 217.

Dos individuos emprendieron una partida de juego, el primero de ellos con 1447‘84 pesetas y el segundo con una cantidad bastante mayor: el primer jugador ganó al 2.º, el primer día, la décima parte del dinero que éste tenía; el día 2.º la décima parte del dinero que le había quedado; el día 3.º, la décima parte del dinero que le restaba, y así sucesivamente. Al terminar la sesión del día quinto los dos jugadores tenían igual cantidad de dinero. ¿Con cuánto había emprendido la partida el segundo jugador y qué cantidad le ganó el primero?

Resoluciones.

1.ª—Para determinar la cantidad con que emprendió la partida de juego el 2.º jugador, es indispensable averiguar previamente qué porción de aquélla le ganó el 1.º en los 5 días que la partida duró. Sea, pues, x pesetas dicha cantidad. Si de ella perdió el 2,º jugador $\frac{1}{10}$ el primer día, perdería $\frac{1}{10}$ x. Luego le quedaría $\frac{9}{10}$ x. Si de esta cantidad perdió $\frac{1}{10}$ el 2.º día, perdería $\frac{9}{10} x \times \frac{1}{10} = \frac{9}{100}$ x. Luego le quedaría $\frac{9}{10} x - \frac{9}{100} x = \frac{81}{100}$ x. Si de esta cantidad perdió $\frac{1}{10}$ el tercer día, perdería $\frac{81}{100} x \times \frac{1}{10} = \frac{81}{1000}$ x. Luego le quedaría $\frac{81}{100} x - \frac{81}{1000} x = \frac{810}{1000}$ x.

Si fijamos la consideración en las pérdidas sucesivas

$$\frac{1}{10} x, \ \frac{9}{100} x, \ \frac{81}{1000} x, \ldots\ldots,$$

observaremos que ellas forman una progresión geométrica decreciente, cuya razón es $\frac{9}{10}$; progresión que consta de 5 términos cuya suma representa la pérdida total del 2.º jugador, que es la cantidad que por de pronto necesitamos conocer. Llamando *s* á esta suma, será *(problema 210, fórm. 1.ª)*, hechas ya las sustituciones y operaciones,

$$s = \frac{40951}{100000} x. \qquad (A)$$

Resulta, pues, que al finalizar la sesión de juego de 5.º y último día, el 1.er jugador había ganado al 2.º durante toda la partida $\frac{40951}{100000}$ x. (1) Luego el 1.er jugador, terminada la sesión final, reunió las pesetas que tenía al empezar la partida de juego y que son 1447'84, mas la cantidad ganada, y el 2.º jugador se quedó con la cantidad con que emprendió la partida, menos la porción que de ella había perdido. El 1.º, pues, reunió $1447'84 + \frac{40951}{100000}$ x pesetas, y el 2.º se quedó con $x - \frac{40951}{100000}$ x pesetas; y, como se dice que los dos jugadores, al terminar la partida, tenían igual dinero, la ecuación será

---

(1) Como aquí los términos de la progresión no son más que 5 y de ellos ya conocemos el valor de los tres primeros, cabe prescindir de las fòrmulas y, continuando el razonamiento, determinar el de cada uno de los otros dos, que es $\frac{729}{10000}$ x y $\frac{6561}{100000}$ x, y sumar los 5 términos.

Aquellos de nuestros lectores que al estudiar este problema sientan frío en el cerebro y quieran hacerle entrar en calor, no tienen más que fijar las pérdidas del 2.º jugador, en vez de en $\frac{1}{10}$, en $\frac{1}{100}$, y los días de juego, en lugar de en 5, siquiera en 10. Háganlo así y verán lo que es bueno.

$$x - \frac{40951}{100000} x = 1447'84 + \frac{40951}{100000} x;$$

y, despejando á x, será en definitiva

$$x = \frac{144784000}{18098} = 8000 \text{ pesetas.}$$

Para determinar ahora qué porción de estas 8000 pesetas ganó el 1.^{er} jugador al 2.°, sustitúyase á x con su valor en la ecuación (A) y efectúense las operaciones indicadas y resultará

$$s = \frac{40951]}{100000} x = \frac{40951}{100000} \times 8000 = 3276'08 \text{ pesetas.}$$

2.ª—Averiguado por el razonamiento anterior que, según la ecuación (A), ó sea $s = \frac{40951}{100000}$ x, la pérdida total del 2.° jugador consiste en 40951 cienmilésimas de su capital, diremos: Toda cantidad, y, por consiguiente x, tiene 100000 cienmilésimas. Luego, si el 2.° jugador perdió 40951 cienmilésimas de su capital, se quedaría con 100000 —40951 = 59049 cienmilésimas del mismo; y, como el 1.^{er} jugador reunió sus 1447'84 pesetas, mas las 40951 cienmilésimas del capital del 2.°, y lo reunido por el 1.° es igual á lo que le quedó al 2.°, resulta que las 1447'84 pesetas, capital primitivo del 1.^{er} jugador, representan 18098 cienmilésimas del capital del 2.°, que son las que les faltan á las 40951 para componer las 59049 que al 2.° le quedaron. Luego, si dichas 1447'84 pesetas se dividen por 18098, el cociente 1447'84 : 18098 = 0'08 representará 1 cienmilésima de x, y, si á este cociente se le multiplica por 100000, el producto 0'08 × 100000, = 8000 representará todo el valor de x, ó sea todo el primitivo capital del 2.° jugador.

La parte que de este capital ganó el 1.^{er} jugador se calcula como antes.

PROBLEMA 218.

Siendo a **el primer término de una progresión geométrica,** u **el último,** n **el número de términos y** p **el producto de todos ellos, ¿cuál será la relación que liga á cada una de estas cuatro cantidades con las tres restantes?**

Resolución.

Para resolver la cuestión propuesta, vamos á servirnos de la siguiente progresión

$$\div\div a : b : c : d : e : f : g : u.$$

Si llamamos p al producto de los términos de esta progresión, será

$$p = a \times b \times c \times d \times e \times f \times g \times u;$$

y, como el orden de los factores no altera el producto, será también

$$p = u \times g \times f \times e \times d \times c \times b \times a;$$

y, multiplicando ordenadamente estas dos ecuaciones, tomando dos á dos, de arriba abajo, los factores de los 2.os miembros, se tendrá

$$p^2 = au \times bg \times cf \times de \times ed \times fc \times gb \times ua \text{ (1)}.$$

Si fijamos la consideración en el 2.° miembro de esta igualdad, observaremos que los productos parciales (y al mismo tiempo factores) 1.° y último representan cada uno de ellos el producto de los términos extremos de la progresión y que cada uno de los demás productos-factores es el pro-

---

(1) Así como el producto de varios productos indicados es un producto compuesto de todos los factores de los productos propuestos, recíprocamente, un producto indicado de varios factores puede descomponerse en varios productos de estos mismos factores.

ducto de dos términos equidistantes de los extremos. Por consiguiente, todos estos factores-productos son iguales entre sí (1). Como consecuencia de esto, en vez de los 8 productos parciales, podemos tomar el 1.º de ellos 8 veces por factor ó elevarlo á la 8.ª potencia; y, como 8 es el número de términos que tiene la progresión y *a* y *u* son el 1.º y el último de la misma, llamando *n* al número de términos, se tendrá

$$p^2 = (au)^n;$$

de donde

$$p = \sqrt{(au)^n};$$

y, como para extraer una raíz de una potencia de una cantidad se divide el exponente de la ponencia por el índice de la raíz, ejecutándolo así tendremos

$$\sqrt{(au)^n} = (au)^{n:2}$$

Luego $p = (au)^{n:2}$ 1.ª

Esta ecuación-fórmula sirve para hallar el valor de cualquiera de las cuatro cantidades p, a, u y n, conocidos los de las otras tres. En efecto, extrayendo de los dos miembros de dicha ecuación la raíz del grado $\frac{n}{2}$, se tendrá esta otra

$$\sqrt[\frac{n}{2}]{p} = au;$$

y, dividiendo por u los dos miembros de esta ecuación, resultará

---

(1) Cuando el número de términos de la progresión es impar; el cuadrado del término equidistante de los extremos es igual al producto de éstos.

$$\frac{\sqrt[\frac{n}{2}]{p}}{u} = a$$

ó bien

$$a = \frac{\sqrt[\frac{n}{2}]{p}}{u} \qquad 2.^a$$

Si en dicha primera fórmula extraemos de los dos miembros la raíz del grado $\frac{n}{2}$, se tendrá

$$\sqrt[\frac{n}{2}]{p} = au;$$

y dividiendo por a los dos miembros, resultará

$$\frac{\sqrt[\frac{n}{2}]{p}}{a} = u,$$

ó bien

$$u = \frac{\sqrt[\frac{n}{2}]{p} \cdot}{a} \qquad 3.^a$$

Finalmente, si en la misma 1.ª fórmula, tomamos logaritmos, será

$$\log. p = \log. (au)^{n:2}$$

y, como el logaritmo de una potencia de una cantidad es igual al logaritmo de la cantidad, multiplicado por el exponente de la potencia, tendremos

$$\log. p = \log. (au) \times \frac{n}{2};$$

y, como el logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores, será

$$\log. p = (\log. a + \log. u) \times \frac{n}{2};$$

y, multiplicando por 2 los dos miembros, se tendrá

$$\log. p \times 2 = (\log. a + \log. u) \times n;$$

de donde

$$n = \frac{\log. p \times 2}{\log. a + \log. u}. \qquad 4.^a$$

Nota.—Damos por reproducida aquí, con relación á las fórmulas del problema 208 y á las del problema actual, la nota 2.ª del problema 198, sin más variante que la de sustituir la letra *s* con la letra *p*.

PROBLEMA 219.

Un personaje, tan rico en dinero como pobre de dientes *(y de conocimientos matemáticos),* **encargó una inmejorable dentadura completa á un afamado dentista, el cual, al presentarla, pidió 1 céntimo de peseta por el primer diente, 2 por el segundo, 4 por el tercero, y así sucesivamente, duplicando, hasta llegar al último de los 32 dientes. El personaje, considerando excesivamente modesta la petición del dentista, ordenó á su mayordomo que entregase á éste, en vez de la suma de los números representativos de los céntimos de peseta, el producto resultante de multiplicarlos entre sí. ¿A cuánto ascendía la suma y á cuánto ascendió el producto?**

Resolución.

1.ª PARTE.—Las cantidades parciales pedidas por el dentista son éstas:

1 cént., 2, 4, 8, 16, 32, 64,.......,

hasta 32 cantidades, las cuales forman, una progresión geométrica creciente, cuya razón es 2 y la suma de cuyos términos es la cantidad total que, según su petición, debía recibir el dentista. Esta suma será *(probl. 210, fórm. 1.ª)*

$$s = \frac{ur - a}{r - 1}; \qquad \text{(A)}$$

y, como *(probl. 208, fórm. 1.ª)* es

$$u = ar^{n-1}, \qquad \text{(B)}$$

sustituyendo, se tendrá

$$s = \frac{ar^{n-1} \times r - a}{r - 1} = \frac{ar^{n} - a}{r-1};$$

y, dando valores, será

$$s = \frac{1 \,.\, 2^{32} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{32} - 1}{1};$$

ó bien

$$s = 2^{32} - 1 = 4294967295 \text{ céntimos}$$

equivalentes á 4294967295 : 100 = 42949672'95 pesetas.

Nota.—En la progresión geométrica especial que, como aquí sucede, forman los números 1, 2, 4, 8, 16........, la suma de todos sus términos es igual al duplo del último, menos 1. Y es que, consecuencia de lo demostrado en la cita del problema 212, en esta progresión, como es fácil observar, un término cualquiera, disminuido en 1 unidad, es igual á la suma de todos los que le preceden. Luego el último, menos 1 unidad, será igual á la suma de todos los de la progresión, menos él: luego él, más él, menos 1, ó el duplo de él, menos 1, representará la suma de todos los términos de la progresión.

Esto mismo se deduce fácilmente de la fórmula anterior (A), $s = \frac{ur - a}{r - 1}$ Dando en ella á las letras *r* y *a* el valor que respectivamente tienen en la citada progresión, será

$$s = \frac{ur - a}{r - 1} = \frac{u \,.\, 2 - 1}{2 - 1} = \frac{2u - 1}{1} = 2u - 1.$$

Resulta claro de la precedente observación que muy bien pudimos resolver esta primera parte del problema propuesto valiéndonos tan sólo de la ecuación (B). Hallado el valor de *u*, con multiplicarle por 2 y restar del producto una unidad, hubiera quedado determinada la suma que se nos pedía.

2.ª PARTE.—La cantidad que el personaje mandó entregar al dentista es

1 × 2 × 4 × 8 × 16 × 32 × 64 ×...... céntimos.

Llamando p á este producto indicado, será *(probl. anterior, fórmula 1.ª)*

$$p = (au)^{n:2};$$

y, como *(probl. 208, fórm. 1.ª)* es $u = ar^{n-1}$, sustituyendo, se tendrá,

$$p = (a \,.\, ar^{n-1})^{n:2};$$

y dando valores, será

$$p = (1 \,.\, 1 \,.\, 2^{31})^{16};$$

ó bien
$$p = (2^{31})^{16};$$

y, como para elevar úna potencia á otra potencia se multiplican los dos exponentes, será

$$p = 2^{31 \,.\, 16} = 2^{496}.$$

Tomando logaritmos, tendremos

$$\log. p = \log. 2^{496};$$

y, como el logaritmo de una potencia de una cantidad es igual al logaritmo de la cantidad, multiplicado por el exponente de la potencia, será

$$\log. p = \log. 2 \times 496;$$

y, como el logaritmo de 2 es 0‘30103000, sustituyendo, se tendrá

$$\log. p = 0‘30103000 \times 496 = 149‘31088000.$$

Ahora la cuestión está reducida á determinar el número á que corresponde el logaritmo 149·31088000 (1), y este número representará el valor del producto p.

---

(1) Como, según se ve, la característica de este logaritmo consta de 149 unidades, el número entero á que corresponde tiene que constar de ¡CIENTO CINCUENTA CIFRAS!, que constituyen 25 períodos de á 6, los cuales, por lo mismo, leidos, como es natural, de izquierda á derecha, representan, respectivamente, *viginticuatrillones, vigintitrillones, vigintibillones, vigintimillones, vigintillones, decinovillones, decioctillones, deciseptillones, sexdecillones, quindecillones, cuatordecillones, tredecillones, duodecillones, undecillones, decillones, novillones, octillones, septillones, sextillones, quillones, cuatrillones, trillones, billones, millones y unidades inferiores al millón.*

Hechas las operaciones que el caso requiere, *(probl, 192 1.ª parte)*, resulta que es

$p = 204587_{24}\ 941592_{23}\ 086669_{22}\ 806877_{21}\,060763_{20}$
$071125_{19}\ 765426_{18}\ 283560_{17}\ 998586_{16}\ 905322_{15}\,656617_{14}$
$993405_{13}\ 558172_{12}\ 397550_{11}\ 635892_{10}\ 604804_{9}\ 521902_{8}$
$967498_{7}\ 822421_{6}\ 102213_{5}\ 848327_{4}\ 837965_{3}\ 143664_{2}$
625529_{1} 910504 céntimos, los cuales quedarán reducidos á pesetas separando con una coma las dos últimas cifras. (1)

No es posible formarse idea, ni remota, del valor de tal cantidad. Concíbese, sí, que con todo el dinero existente en el universo mundo no hay ni siquiera para empezar á pagarla. (2)

---

(1) Como, por una parte, los logaritmos, *exceptuando los de 10 y sus potencias*, son cantidades incomensurables y, por otra, no es enteramente exacta la proporción que se forma, ó se supone formada, para hallar el número á que corresponde un logaritmo que no figura en las Tablas, con el fin de dar al resultado la mayor exactitud posible, al dividir entre sí las diferencias logarítmicas para averiguar el valor de p, hemos hallado en el cociente hasta 146 cifras decimales.

Puede también hallarse el valor de la potencia 2^{496} haciendo la serie de multiplicaciones correspondientes, para lo cual se necesita disponer de un encerado no menor que el frontón de una catedral. Al hacer estas multiplicaciones conviene tener en cuenta que (aparte otras muchas descomposiciones que del 2^{496} cabe hacer en potencias inferiores) es

$2^{496} = 2^8 \times 2^8 \times 2^8 \times .....$, entrando el 2^8 sesenta y dos veces por factor; y como es $2^8 = 256$, será

$2^{496} = 256 \times 256 \times 256 \times .....$, entrando el 256 sesenta y dos veces por factor.

(2) Véase, en confirmación de este aserto, el problema 198 de los geométricos.

Nota.—El incremento que van tomando la suma y el producto de los términos de una progresión geométrica creciente á medida que el número de estos términos aumenta, es tan considerablemente acelerado, que, si, en vez de ser 32 los del problema actual, hubiesen sido 64, como sucede en el tan conocida problema llamado *del ajedrez* ó *de Sesa* (presunto inventor de este juego), la suma hubiera constado de 20 cifras y el producto de 607.—¡Cualquiera lee estas 607 cifras!; por mas que no es imposible leerlas.

PROBLEMA 220.

Siendo c **un capital colocado por** n **años al** t **por ciento anual de interés compuesto y** s **la suma de ese capital y de sus intereses al cabo de los** n **años, ¿cuál será la relación que liga á cada una de las cuatro cantidades** s, c, t **y** n **con las tres restantes?**

Resoluciones.

1.ª—Si 100 unidades monetarias producen t unidades en el 1.er año, una de las 100 producirá 100 veces menos: producirá, pues, $\frac{t}{100} = 0'0\,t$ esto es, t centésimas. Luego esa unidad se convertirá en $1'0\,t$; y, si en esto se convierte 1 unidad, las c unidades se convertirán en $1'0\,t \times c$. Si, por lo anteriormente dicho, 1 de estas últimas unidades se convierte en el 2.º año en $1'0\,t$, las $1'0\,t \times c$ unidades se convertirán en $1'0\,t \times 1'0\,t \,.\, c = 1'0\,t^2 \,.\, c$; y, por la misma razón, este capital se convertirá en el 3.er año en $1'0\,t^3 \,.\, c$,..... y en el último año en $1'0\,t^n \,.\, c$; y, como esta cantidad representa la suma del capital primitivo y de los intereses por él devengados en los n años, será

$$s = 1'0\,t^n \times c. \qquad 1.^a$$

Esta fórmula general nos dice que *para hallar en qué se convierte al cabo de cierto número de años un capital colocado á interés compuesto, se halla el interés producido por la unidad monetaria en el primer año; unidad é interés se elevan á una potencia expresada por el número de años, y esta potencia se multiplica por el capital.*

La citada fórmula no sirve sólo para hallar el valor de *s*, sinó en general el de cualquiera de las cuatro cantidades *s*, *t*, *n* y *c*, conocidos los de las otras tres. En efecto, si en la expresada fórmula dividimos los dos miembros por $1'0\,t^n$, se tendrá

$$\frac{s}{1'0\,t^n} = c;$$

ó bien

$$c = \frac{s}{1'0\,t^n}. \qquad 2.^a$$

Si en la misma fórmula 1.ª se dividen los dos miembros por *c*, se tendrá

$$\frac{s}{c} = 1'0\,t^n;$$

y, extrayendo de los dos miembros la raíz del grado *n*, resultará

$$\sqrt[n]{\frac{s}{c}} = 1'0\,t;$$

y, restando 1 unidad de los dos miembros, será

$$\sqrt[n]{\frac{s}{c}} - 1 = 0'0\,t;$$

y, multiplicando los dos miembros por 100, se tendrá

$$\left(\sqrt[n]{\frac{s}{c}} - 1\right) \times 100 = t;$$

ó bien

$$t = \left(\sqrt[n]{\frac{s}{c}} - 1\right) \times 100 \qquad 3.^a$$

Por último, si en la referida fórmula 1.ª dividimos los dos miembros por c, tendremos

$$\frac{s}{c} = 1'0\,t^n;$$

y, tomando logaritmos, será

$$\log. \frac{s}{c} = \log. 1'0\,t^n;$$

y, como el logaritmo de un quebrado ó cociente es igual al logaritmo del numerador ó dividendo, menos el logaritmo del denominador ó divisor, y el logaritmo de una potencia de una cantidad es igual al logaritmo de la cantidad, multiplicado por el exponente de la potencia, se tendrá

$$\log. s - \log. c = \log. 1'0\,t \times n;$$

de donde

$$n = \frac{\log. s - \log. c}{\log. 1'0\,t}. \qquad 4.^a$$

2.ª—Según los datos, el capital c aumenta en el 1.er año en t unidades por 100. Luego se convertirá en $c\,.\,1'0\,t$. Por la misma razón, este 2.º capital $c\,.\,1'0\,t$ se convertirá en el 2.º año en $c\,.\,1'0\,t \times 1'0\,t = c\,.\,1'0\,t^2$. Por igual razón este capital $c\,.\,1'0\,t^2$ se convertirá en el 3.er año en $c\,.\,1'0\,t^2 \times 1'0\,t = c\,.\,1'0\,t^3$,..... y al fin de los n años el capital será $c\,.\,1'0\,t^n$.

Como es fácil comprender, los capitales resultantes al fin de cada uno de los n años, y que son

$$c\,.\,1'0\,t,\; c\,.\,1'0\,t^2,\; c\,.\,1'0\,t^3, \ldots\ldots\; c\,.\,1'0\,t^n,$$

forman una progresión geométrica creciente cuya razón es $1'0\,t$ y cuyo último término es la suma del capital primitivo y de todos sus intereses. Como este último término es $c \,.\, 1'0\,t_n$, sin necesidad de recurrir á la fórmula 1.ª del problema 208, tendremos

$$s = c \,.\, 1'0\,t^n,$$

que es la formula 1.ª de la resolución anterior y de la cual hemos deducido ya las otras tres.

PROBLEMA 221.

Un sujeto ha depositado en una Caja de ahorros por 5 años al 4 por ciento de interés compuesto 10000 reales. ¿Qué cantidad deberá recoger al cabo de dicho plazo?

Resolución.

Este problema es una cuestión de interés compuesto, en la cual se pide la suma de capital é intereses. Tendremos, pues, *(problema anterior, fórmula 1.ª)*

$$s = 1'0\,t^n \times c;$$

y, dando valores, será

$$s = 1'04^5 \times 10000 = 12166'53.$$

Deberá recoger 12166'53 reales.

Nota.—Este problema, como todos los semejantes á él, puede también resolverse aplicando la siguiente regla:

Hállese el interés producido por el capital en el 1.er año, súmense el capital y el interès, y la suma será el capital para el 2.º año; hállese el interés de este capital en el 2.º año y súmese con el capital, y la suma será el capital para el tercer año, y así sucesivamente hasta recorrer el total de años.

Este procedimiento peca de dilatorio, máxime cuando es crecido el número de años de imposición del capital.

PROBLEMA 222.

Quiero imponer en una Casa de Crédito una cantidad tal, que al 4 por ciento anual de interés compuesto me produzca en 3 años 6243'20 pesetas de utilidad. ¿Qué capital deberé imponer?

Resoluciones.

1.ª—La cuestión propuesta es de interés compuesto y en ella se pide el valor del capital. Para determinarlo tendremos *(problema 220, fórmula 2.ª)*

$$c = \frac{s}{1'0\,t^{n}};$$

y, dando valores, será

$$c = \frac{s}{1'04^{3}};$$

y, como *s* representa la suma del capital y de sus intereses, que son 6243'20, sustituyendo, tendremos

$$c = \frac{c + 6243'20}{1'04^{3}};$$

ó bien

$$c = \frac{c + 6243,20}{1'124864};$$

y, quitando el denominador, se tendrá

$$1'124864\,c = c + 6243'20;$$

y, pasando á *c* del 2.º miembro al 1.º, resultará

$$1'124864\,c - c = 6243'20;$$

ó bien

$$1'124864\,c - 1\,c = 6243'20;$$

y, separando en el 1.er miembro el factor común *c*, se tendrá

$$c \times (1'124864 - 1) = 6243'20;$$

ó bien

$$c \times 1'124863 = 6243'20;$$

de donde

$$c = \frac{6243'20}{1'124863} = 50000 \text{ reales.}$$

2.ª—Una unidad monetaria, al cabo de los 3 años, se ha convertido en $1'04^3 = 1'124864$; es decir, en lo que es ella, mas el interés que en ese tiempo ha producido. Luego, si á ella la deducimos, el resto $1'124864 - 1 = 0'124864$ será el interés producido por ella. Si 0‘124864 es el interés producido en los 3 años por 1 unidad monetaria y el producido en igual tiempo por las *c* unidades es 6243‘20, el cociente $6243'20 : 0'124864 = 50000$ representará las *c* unidades, ó sea el capital que se pide.

PROBLEMA 223.

¿Qué utilidad producirán en 4 ½ años 5000 pesetas impuestas al 6 por ciento anual de interés compuesto?

Resolución.

Este problema es de interés compuesto y en él se pide la utilidad producida por el capital en los 4 ½ años que ha estado en producción. Tendremos, pues, *(problema 220, fórmula 1.ª)*

$$s = 1'0t^{n} \times c;$$

y, dando valores, será

$$s = 1'06^{4\,1/2} \times 5000;$$

ó bien

$$s = 1'06^{9/2} \times 5000;$$

y, como es $1'06^{9/2} = \sqrt{1'06^{9}}$, porque para extraer una raíz de una potencia se divide el exponente de ésta por el índice de aquélla, sustituyendo, se tendrá

$$s = \sqrt{1'06^{9}} \times 5000;$$

ó bien

$$s = \sqrt{1'4233118144} \times 5000;$$

ó sea

$$s = 1'19301 \times 5000 = 5965'05.$$

Si 5965'05 es la suma del capital y de la utilidad que ha producido, evidente es que, restando de esta suma el capital, el resto 5965'05 — 5000 = 965'05 será la utilidad, que es lo que en el problema se pide.

PROBLEMA 224.

¿A cuánto por ciento anual de interés compuesto habrá que imponer el capital 60000 reales para que al cabo de 6 años se convierta en 106293'66?

Resoluciones.

1.ª—Esta cuestión es de interés compuesto y en ella se pide el tanto por ciento á que ha estado impuesto el capital. Tendremos, pues, *(problema 220, fórm. 3.ª)*

$$t = \left(\sqrt[n]{\frac{s}{c}} - 1 \right) \times 100;$$

y, dando valores, será

$$t = \left(\sqrt[6]{\frac{106293'66}{60.000}} - 1 \right) \times 100;$$

ó bien

$$t = \left(\sqrt[6]{1'771561} - 1 \right) \times 100.$$

Aquí pueden aplicarse los logaritmos, pero su aplicación no es de absoluta necesidad. En efecto, como para extraer de una cantidad una raíz cuyo índice sea un número compuesto, como aquí sucede, se extraen sucesivamente las raices indicadas por los factores simples del índice compuesto, se tendrá

$$t = \left(\sqrt[3]{\sqrt{1'771561}} - 1\right) \times 100;$$

ó bien

$$t = \left(\sqrt[3]{1'331} - 1\right) \times 100;$$

ó sea

$$t = (1'1 - 1) \times 100;$$

ó bien

$$t = 0'1 \times 100 = 10.$$

2.ª—La cantidad 106293'66 reales representa la suma del capital 60000 y de los intereses por él devengados en los 6 años que ha estado en producción. Luego, si dicha cantidad se divide por el capital, el cociente 106293'66 : 60000 = 1'771561 representará la suma de la unidad monetaria y de los intereses que ha producido en los citados 6 años; y, como esta suma resulta de elevar á la 6.ª potencia la expresada unidad con su tanto anual, si de ella extraemos la $\sqrt[6]{}$, esta raíz, que, como ya hemos visto, es 1'1, será la unidad monetaria y su tanto anual. Luego, si de esa raíz se deduce la unidad, el resto 1'1 — 1 = 0'1 será el tanto *por uno* anual; y, si ahora este tanto por uno anual se multiplica por 100, el producto 0'1 × 100 = 10 será el tanto *por ciento* tambien anual.

PROBLEMA 225.

¿A qué tanto por 100 anual de interés compuesto habrá estado impuesto el capital 30000 pesetas, el cual ha producido en 4 $\frac{1}{2}$ años una ganancia de 7376‘82 pesetas?

Resolución.

Según la fórmula 3.ª del problema 220, tendremos

$$t = \left(\sqrt[n]{\frac{c}{s}} - 1 \right) \times 100;$$

y, dando valores, será

$$t = \left(\sqrt[4\,1|2]{\frac{37376\text{‘}82}{30000}} - 1 \right) \times 100;$$

ó bien

$$t = \left(\sqrt[9|2]{\frac{37376\text{‘}82}{30000}} - 1 \right) \times 100;$$

ó sea

$$t = \left(\sqrt[9|2]{1\text{‘}245894;} - 1 \right) \times 100.$$

Aquí pudiera hacerse uso de los logaritmos; pero no hay de ello verdadera necesidad. En efecto, como es $\sqrt[9|2]{1\text{‘}245894} =$

$\left(\sqrt[9]{1'245894}\right)^2$, porque para elevar una raíz á una potencia se divide el índice de la raíz por el exponente de la potencia, sustituyendo, se tendrá

$$t = \left(\left(\sqrt[9]{1'245894}\right)^2 - 1\right) \times 100;$$

y, como es $\sqrt[9]{1'245894} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{1'245894}}$, porque para extraer de una cantidad una raíz cuyo índice sea compuesto se extraen sucesivamente las raices indicadas por los factores simples del índice compuesto, sustituyendo, tendremos

$$t = \left(\left(\sqrt[3]{\sqrt[3]{1'245894}}\right)^2 - 1\right) \times 100;$$

ó bien, extrayendo sucesivamente las raices indicadas,

$$t = \left(\left(\sqrt[3]{1'076}\right)^2 - 1\right) \times 100;$$

ó bien

$$t = (1{,}025^2 - 1) \times 100;$$

ó sea

$$t = (1'05 - 1) \times 100;$$

ó, en definitiva,

$$t = 0'05 \times 100 = 5.$$

Resulta, pues, que el capital en cuestión estuvo impuesto al 5 por 100 anual de interés compuesto.

PROBLEMA 226

El capital 100000 reales, depositado en un Banco á interés compuesto, ha producido en 5 años una ganancia de 27628'16 reales: ¿á cuánto por ciento anual ha estado impuesto?

Resoluciones.

1.ª—Según la fórmula 3.ª del problema 220, tendremos

$$t = \left(\sqrt{\frac{s}{c}} - 1\right) \times 100;$$

y, dando valores, será

$$t = \left(\sqrt[5]{\frac{127628'16}{100000}} - 1\right) \times 100;$$

ó bien

$$t = \left(\sqrt[5]{1'2762816} - 1\right) \times 100;$$

y, quitando el paréntesis, se tendrá

$$t = \sqrt[5]{1'2762816} \times 100 - 100;$$

y, pasando el término — 100 al 1^{er} miembro, será

$$t + 100 = \sqrt[5]{1'2762816} \times 100.$$

Ahora, como el índice 5 de la raíz es número primo, hay que recurrir á los logaritmos. Tomando, pues, logaritmos, tendremos

$$\log.\ (t + 100) = \log.\ \left(\sqrt[5]{1'2762816} \times 100.\right)$$

Como el logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de sus factores y el logaritmo del factor 100 es 2, será

$$\log.\ (t + 100) = \log.\ \sqrt[5]{1'2762816} + 2;$$

y, como *el logaritmo de una raíz de una cantidad es igual al logaritmo de la cantidad, dividido por el índice de la raíz* (1), se tendrá

$$\log.\ (t + 100) = \frac{\log.\ 1'2762816}{5} + 2;$$

y, como el logaritmo de 1'2762816 es 0'1059458, sustituyendo, será

$$\log.\ (t + 100) = \frac{0'1059458}{5} + 2;$$

---

(1) Esta teoría puede aplicarse á la resolución del problema 22. Aplicada en la ecuación $n = \sqrt[8]{1679616}$, se tendrá

$$\log.\ n = \frac{\log.\ 1679616}{8};$$

y, como *(problema 190, 1.ª parte)* es log. 1679616 = 6'2252100, sustituyendo, será

$$\log.\ n = \frac{6'2252100}{8} = 0'77815125;$$

y, como, según las Tablas, el número correspondiente al logaritmo 0'77815125 es el 6, resulta que es

$$n = 6.$$

ó bien

$$\log. (t + 100) = 0{,}0211891 + 2;$$

ó sea

$$\log, (t + 100) = 2{,}0211891;$$

y, como el número á que corresponde el logaritmo 2'0211891 es el 105, resulta que es

$$t + 100 = 105;$$

de donde

$$t = 105 - 100 = 5$$

Resulta, pues, en definitiva, que el capital 100000 reales ha estado impuesto al 5 p 0/0 de interés anual.

2.ª—Es evidente que, si la ganancia total 27628'16 reales se divide por el capital 100000 que la ha producido, el cociente 27628'16 : 100000 = 0'2762816 será la ganancia total correspondiente á 1 de las unidades monetarias, esto es, al real. Luego, si á esta ganancia se agrega la unidad, la suma 1'2762816 será la cantidad en que se ha convertido la unidad monetaria en los 5 años de producción; y, como esta cantidad resulta de elevar á la 5.ª potencia la unidad y su interés anual, es palmario que la $\sqrt[5]{1{,}2762816} = 1{,}05$ será la unidad monetaria, mas su tanto anual. Luego, si se resta la unidad, el resto 1'05 — 1 = 0'05 será el tanto anual de la unidad monetaria. Luego 0'05 × 100 = 5 será el tanto por ciento anual á que han estado impuestos los 100000 reales de que se trata.

PROBLEMA 227.

El capital 40000 pesetas, colocado al 10 por ciento de interés compuesto, ha producido 21492'20 de utilidad. ¿Cuánto tiempo ha estado en producción?

Resoluciones.

1.ª—Según la fórmula 4.ª del problema 220, tendremos

$$n = \frac{\text{log. s} - \text{log. c}}{\text{log. 1'0 t}};$$

y, dando valores, se tendrá

$$n = \frac{\text{log. } 61492'20 - \text{log. } 40000}{\text{log. } 1'1};$$

y, como los logaritmos de los números 61492'20, 40000 y 1'1 son, respectivamente, 4'79035775, 4'6020600 y 0'04139269, sustituyendo, será

$$n = \frac{4'79035775 - 4'6020600}{0'04139269};$$

ó bien

$$n = \frac{0'18829775}{0'04139269};$$

ó sea

$$n = 4'5$$

Resulta que el capital 40000 pesetas ha estado en producción $4 \frac{1}{2}$ años.

2.ª—Si el capital 40000 pesetas ha producido 21492'20 de utilidad, 1 de aquellas pesetas habrá producido 40000 veces menos, ó sea 21492'20 : 40000 = 0'537305 pesetas. Luego, si á esta cantidad se agrega la peseta, la suma 1'537305 será la cantidad en que se ha convertido la unidad monetaria en los n años que el capital ha estado impuesto; y, como esta cantidad es la potencia n de la unidad y de su tanto anual, y, como el logaritmo de una potencia de una cantidad es igual al logaritmo de la cantidad, multiplicado por el exponente de la potencia, síguese que, si se divide el logaritmo de la expresada cantidad 1'537305, que es 0'18676003, por el logaritmo de la unidad y de su tanto anual, que es 0'04139269, el cociente 0'18676003 : 0:04139269 = 4'5 será el valor de n años.

PROBLEMA 228.

Suponiendo que un capital cualquiera impuesto al 5 por ciento de interés compuesto se duplique á los 15 años (lo cual no es enteramente exacto, pero dista muy poco de la exactitud), **¿en qué se convertirían al cabo de 180 años 5000 pesetas impuestas con las mismas citadas condiciones?**

Resoluciones.

1.ª—Según el enunciado, en los primeros 15 años el capital 5000 pesetas se convertirá en $5000 \,.\, 2$; en los segundos 15 años, en $5000 \,.\, 2 \times 2 = 5000 \,.\, 2^2$; en los terceros 15 años, en $5000 \,.\, 2^2 \times 2 = 5000 \,.\, 2^3$; y así sucesivamente hasta el número de veces que el período de 15 años cabe en el período total 180 años; número que será 180 : 15 = 12.

Como es fácil observar, los capitales de al fin de cada uno de los 12 períodos de 15 años

$$5000 \,.\, 2,\ 5000 \,.\, 2^2,\ 5000 \,.\, 2^3, \ldots\ldots 5000 \,.\, 2^{12}$$

forman un progresión geométrica creciente cuya razón y número de términos son, respectivamente, 2 y 12 y de la cual se pide el valor del último término, que sin necesidad de determinarlo por medio de la fórmula correspondiente, se ve que es

$5000 \,.\, 2^{12} = 5000 \,.\, 4096 = 20.480.000$ pesetas, cantidad en que se convirtirían las 5000 al cabo de los 180 años.

2.ª—El problema propuesto equivale á este otro: «*¿En qué cantidad se convertirán al cabo de 180 años 5000 pesetas impuestas al 100 por 100 quindenal de interés compuesto?*»

Para resolverle tendremos *(probl. 220, fórm. 1.ª)*

$$s = 1'0t^{n} \times c;$$

y, dando valores y puesto que t vale en este caso $\frac{100}{100}$ $= 1$, será

$$s = 2^{12} \times 5000 = 20480000 \text{ pesetas,}$$

como antes se ha visto.

PROBLEMA 229.

Tres hermanos, Antonio, Benito y Celestino, **asociaron sus capitales, consistentes, el del 1.º, en 2500 pesetas, el del 2.º, en cierta y determinada cantidad, y el del 3.º, en la misma cantidad que el del 2.º y 500 pesetas más. Colocado el capital social por 5 años al $4\frac{1}{2}$ p 0/0 anual de interés compuesto, recibieron al cabo de dicho plazo por capital é intereses 12461'82 pesetas. ¿Cuáles eran los capitales de Benito y Celestino y qué parte de las 12461'82 pesetas devueltas correspondió percibir á cada uno de los tres hermanos asociados?**

Resoluciones.

1.ª—Determinado el capital social, lo estarán *ipso facto* los capitales de Benito y Celestino. Para determinar el capital social, tenemos *(probl. 220, fórm. 2.ª)*

$$c = \frac{s}{1'0\,t^{n}};$$

y, dando valores, se tendrá

$$c = \frac{12461'82}{1'045^{5}};$$

ó bien

$$c = \frac{12461'82}{1'246182};$$

ó sea

$$c = 10.000 \text{ pesetas.}$$

Si éste es el capital social, ó de los tres hermanos, deduciendo de él el capital particular de Antonio, 2500 pesetas, y el exceso del de Celestino sobre el de Benito, 500 pesetas, en conjunto 2000 pesetas, el resto 10000 — 2000 = 8000 será lo que asociaron *á partes iguales* estos dos últimos hermanos. Luego 8000 : 2 = 4000 es el capital de Benito y 4000 + 500 = 4500 es el de Celestino.

Ahora, para determinar la parte que cada hermano debe recibir de la cantidad 12461'82 pesetas, suma del capital secial y de sus intereses, se divide esta cantidad en partes proporcionales á los capitales. Tendremos, pues, *(probl. 148)*

Parte de Antonio.	3115'455
Id. de Benito.	4361'637
Id. de Celestino.	4984'728
Total.	12461'820

2.ª—Puede hallarse más prontamente el capital social. En efecto, como la cantidad 12461'82 pesetas es la en que se ha convertido el capital social en los 5 años de producción, si hallamos la en que en el mismo tiempo se ha convertido la unidad monetaria, que es 1'246182 será evidente que por cada vez que esta 2.ª cantidad esté contenida en la 1.ª, tendremos 1 unidad monetaria. Luego 1'2461'82 : 1'246182 = 10000 será el total de unidades monetarias, ó bien el capital social, que es lo que en definitiva se ha hecho y ha resultado en el procedimiento anterior.

3.ª—Sea b el capital de Benito: el de Celestino será $b + 500$; y, como el de Antonio es 2500, el capital social será
$b + (b + 500) + 2500 = b + b + 500 + 2500 = 2b + 3000$.

Este capital en el 1.º de los 5 años se convirtió en lo que era él, mas lo que produjo; y, como produjo el $4 \frac{1}{2} =$ 4'5 por ciento, se convirtió en $(2b + 3000) \times 1'045$; por la misma razón este 2.º capital en el 2.º año se convirtió en $(2b + 3000) \times 1'045 \times 1'045 = (2b + 3000) \times 1'045^2$; por igual razón los capitales al fin de los años 3.º, 4.º y 5.º serían, respectivamente, $(2b + 3000) \times 1'045^3$, $(2b + 3000) \times 1'045^4$ y $(2b + 3000) \times 1'045^5$ y, como según los datos, el valor de este último capital es 12461'82, la ecuación será

$$(2b + 3000) \times 1'045^5 = 12461'82;$$

ó bien

$$(2b + 3000) \times 1'246182 = 12461'82;$$

y, dividiendo los dos miembros por 1'246182, se tendrá

$$2b + 3000 = \frac{12461'82}{1'246182};$$

ó bien

$$2b + 3000 = 10000;$$

y restando el 3000 de los dos miembros, será

$$2b = 10000 - 3000 = 7000;$$

de donde

$$b = \frac{7000}{2} = 3500.$$

Luego el capital de Celestino será $3500 + 500 = 4000$ pesetas.

La distribución de las 12461'82 se hace como en la resolución 1.ª.

PROBLEMA 230.

Dos negociantes emprendieron al mismo tiempo sus negocios, el 1.º con 20000 pesetas de capital y el 2.º con 33.133‘25: el capital del 1.º se acrecentó cada año en su 10 p 0/0 y el del 2.º en su 4 p 0/0. ¿Al cabo de cuánto tiempo llegaron á igualarse los dos capitales y á cuánto ascendía entonces cada uno de ellos?

Resoluciones.

1.ª—El capital del primer negociante, que al emprender los negocios era de 20000 pesetas, por haberse acrecentado en su 10 p 0/0, ó sea en su 10.ª parte, se convirtió en el 1.er año en $20000 \times 1‘1$; en el 2.º, en $20000 \times 1‘1^{2}$; en el 3.º, en $20000 \times 1‘1^{3}$.......... y en los n años que se piden, en $20000 \times 1‘1^{n}$.

El capital del segundo negociante, que al emprender sus negocios era de 33133‘25 pesetas, por haberse acrecentado en su 4 p 0/0, ó bien en sus 4 centésimas, se convirtió en el 1.er año en $33133‘25 \times 1‘04$; en el 2.º, en $33133‘25 \times 1‘04^{2}$; en el 3.º, en $33133‘25 \times 1‘04^{3}$,....... y en los n años que transcurrieron hasta nivelarse los capitales de los dos negociantes, en $33133‘25 \times 1‘04^{n}$

Como se ve, los capitales sucesivos del 1.er negociante al fin de cada año,
$20000 \times 1‘1$, $20000 \times 1‘1^{2}$, $20000 \times 1‘1^{3}$,....... $20000 \times 1‘1^{n}$, y los del 2.º, $33133‘25 \times 1‘04$, $33133‘25 \times 1‘04^{2}$, $33133‘25 \times 1‘04^{3}$,......... $33133‘25 \times 1‘04^{n}$, forman dos progresiones geométricas crecientes, cuya razón respectiva es 1‘1 y 1‘04. De estas dos progresiones se nos pide: 1.º el número de términos, que es en las dos el mismo; y 2.º el valor del úl-

timo término, que también es el mismo en las dos, por expresar el capital final de cada negociante. Determinemos el número de términos. Al efecto tendremos *(problema 208, fórmula 4.ª)*

$$\left.\begin{array}{ll}\text{en la 1.ª progresión} & u = ar^{n-1}\\ \text{y en la 2.ª} & U = AR^{n-1}\end{array}\right\}\ (X);$$

y, como, por lo últimamente dicho, u y U son iguales, será

$$AR^{n-1} = ar^{n-1};$$

y, dando valores, se tendrá

$$33133'25 \,.\, 1'04 \times 1'04^{n-1} = 20000 \,.\, 1'1 \times 1'1^{n-1};$$

ó bien

$$33133'25 \times 1'04^{n} = 20000 \times 1'1^{n}; \qquad (Z)$$

y, dividiendo los dos miembros, primero por 20000 y luego por $1'04^{n}$ resultará

$$\frac{33133'25}{20000} = \frac{1'1^{n}}{1'04^{n}};$$

ó sea

$$1'66 = \frac{1'1^{n}}{1'04^{n}};$$

y, tomando logaritmos, se tendrá

$$\log.\ 1'66 = \log.\ \frac{1'1^{n}}{1'04^{n}};$$

y, como el logaritmo de un quebrado ó cociente es igual al logaritmo del numerador ó dividendo, menos el logaritmo del denominador ó divisor, será

$$\log.\ 1'66 = \log.\ 1'1^{n} - \log.\ 1'04^{n};$$

y, como el logaritmo de una potencia de una cantidad es igual al logaritmo de la cantidad, multiplicado por el exponente de la potencia, se tendrá

$$\log.\ 1'66 = \log.\ 1'1 \times n - \log.\ 1'04 \times n;$$

y, separando en el 2.º miembro el factor común n, tendremos,

$$\log.\ 1'66 = (\log.\ 1'1 - \log.\ 1'04) \times n;$$

de donde

$$n = \frac{\log.\ 1'66}{\log.\ 1'1 - \log.\ 1'04};$$

y, como los logaritmos de 1'66, 1'1 y 1'04 son, respectivamente, 0'22010809, 0'04139269 y 0'01703334, sustituyendo, se tendrá

$$n = \frac{0{,}22010809}{0'04139269 - 0'01703334} = 9.$$

Resulta, pues, que los capitales de los dos negociantes se igualaron á los 9 años.

Para determinar ahora á cuánto ascendía entonces el capital de cada negociante, no hay más que reemplazar en cualquiera de las dos ecuaciones (X) las letras *a*, *r* y *n* con sus valores conocidos y se tendrá

$$n = 20000\ .\ 1'1 \times 1'1^{\,9-1} = 20000 \times 1'1^{9} = 20000 \times 2'357947691 = 47158'95 \text{ pesetas.}$$

2.ª—Este problema puede resolverse también por medio de la regla de interés compuesto. En efecto, cabe imaginar que los dos negociantes impusieron su capital respectivo por *n* años, el 1.º al 10 y el 2.º al 4 por ciento anual de interés compuesto, y que al cabo de ese número *n* de años los capitales resultaron iguales. En este supuesto tendremos *(problema 220)*,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{con respecto al 1.}^{\text{er}}\text{ negociante,} & s = 1'0\,t^{n} \times c \\ \text{y respecto del 2.}^{\text{o}}, & S = 1'0\,T^{n} \times C\end{array}\right\}\ (X)$$

y, como *s* y S son iguales por dato, se tendrá

$$1'0\,t^{n} \times c = 1'0\,T^{n} \times C;$$

y dando valores, será

$$1'1^{n} \times 20000 = 1'04^{n} \times 33133'25; \qquad (Z)$$

y, dividiendo los dos miembros, primero por $1'04^{n}$ y después por 20000, resultará

$$\frac{1'1^{n}}{1'04^{n}} = \frac{33133'25}{20000} = 1'66;$$

ó sea

$$\frac{1'1^{n}}{1'04^{n}} = 1'66;$$

y, tomando logaritmos y razonando como en el procedimiento anterior, resultará en definitiva

$$n = 9 \text{ años.}$$

Para determinar ahora el valor de cualquiera de los capitales finales, puesto que los dos son iguales entre sí, en cualquiera de las dos fórmulas (X) se sustituyen las letras con sus valores conocidos y resultará, como antes,

$$s, \text{ ó } S = 47158'95 \text{ pesetas.}$$

Nota.—En la resolución 1.ª pudimos, *y debimos* igualar los últimos términos de las dos progresiones, puesto que ellos son dos expresiones de una misma cantidad, y hubiera resultado desde luego

$$20000 \times 1'1^{n} = 33133'25 \times 1'04^{n},$$

que es la ecuación (Z) de la 2.ª resolución.

FIN DE LA PRIMERA PARTE.