LECCIONES

DE

CALCULO INTEGRAL.

José Lopez de Cora

SEGOVIA: 1862.

Imprenta, de. D. Juan de Alba.

LECCIONES DE CALCULO INTEGRAL.

LECCION PRIMERA.

Integracion de las funciones diferenciales mas sencillas de una sola variable.

1.° Una funcion diferencial de primer órden de una sola variable está en general representada por $X\,d\,x$, siendo X una funcion de x: esta funcion diferencial es siempre el resultado de una diferenciacion practicada sobre una cierta funcion y de la variable x, de modo que se tiene

$$d\,y = X\,d\,x \quad \text{y} \quad \frac{d\,y}{d\,x} = X$$

ó por lo menos se puede siempre mirar como el resultado de una operacion semejante. La operacion, pues, llamada *integracion* consiste en hallar la funcion y cuando es dada la diferencial $X\,d\,x$, ó en general hallar una funcion de x que diferenciada dé la expresion $X\,d\,x$. Esta funcion y que tiene por diferencial $X\,d\,x$, se llama la *integral* de dicha diferencial, y para indicar esta operacion, se coloca el signo S delante de $X\,d\,x$; así, supuesta la ecuacion $d\,y = X\,d\,x$, se verifica por consecuencia de ella esta otra $y = S\,X\,d\,x$, y tambien recíprocamente. Pero conviene observar, que, aun despues de hallada una funcion de x, que diferenciada dé por resultado $X\,d\,x$, todavía se le podrá añadir una constante cualquiera C, sin que por eso deje de tener la misma diferencial: luego si la funcion que se trata de hallar no nos es conocida, sino por la condicion de que diferenciada dá por resultado $X\,d\,x$, debemos, para obtener su expresion general, comprender en ella la cantidad constante y arbitraria C. Segun esto la integral de la funcion diferencial propuesta $X\,d\,x$ se debe expresar en general de este modo

$$y = C + S\,X\,d\,x$$

En esta ecuacion $S\,X\,d\,x$ representa el resultado inmediato de la integracion, esto es, la funcion de x, que diferenciada daria $X\,d\,x$; y C es la *constante arbitraria* que se debe agregar á esta funcion para dar á la expresion de la integral y toda la generalidad necesaria. Añadiendo esta constante, es como quedamos satisfechos de que y comprende todas las expresiones analíticas formadas de la variable x que dan por diferencial comun $X\,d\,x$, porque tampoco se podria añadir á la cantidad $S\,X\,d\,x$ sino otra cuya derivada fuese nula, es decir cero.

Mientras la integral y no esté determinada por otra circunstancia que la de tener por diferencial $X\,d\,x$, la constante arbitraria C permanece enteramente indeterminada; pero en las cuestiones que se resuelven por medio del cálculo integral siempre hay condiciones, en virtud de las cuales se puede fijar su valor, y llegar á un resultado enteramente determinado.

Desde luego podemos decir en general, que la constante arbitraria C, queda determinada siempre que, dada la diferencial $X\,d\,x$ cuya integral y se pide, se añade la circunstancia de que á un cierto valor dado a de x corresponde tambien otro valor dado b de y, pues sustituyendo en la ecuacion $y = C + S\,X\,d\,x$ tendremos $C = b - f\,(a)$

2.° No carece de fundamento el haber adoptado por signo para indicar la integracion la letra S inicial de la palabra *suma*: en efecto, una funcion cualquiera se puede siempre considerar como la suma de un número infinito de valores de su diferencial. Para hacerlo ver claramente volveremos á hacer uso de la consideracion ya empleada otras veces de los valores subcesivos.

x_0, $x_0 + \delta x$, $x_0 + 2\delta x$, $x_0 + 3\delta x$..... $x_0 + (n-1)\delta x$, $x_0 + n\delta x$, dados á la variable independiente x, y que se diferencian constantemente en la cantidad δx, y los correspondientes valores

$$y_0, y_1, y_2 \ldots y_{n-1}, y_n$$

que toma entonces una cierta funcion y de dicha variable.

Representando por Δy_0, Δy_1, $\Delta y_2 \ldots \Delta y_{n-1}$ las diferencias entre dos valores consecutivos de y, y supuesto que entre los valores $x = x_0$, $x = x_n$ la funcion y no tiene valores infinitos, se tiene evidentemente

$$y_n = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \Delta y_2 + \Delta y_3 + \ldots\ldots + \Delta y_{n-1}$$

cuya expresion puede escribirse tambien así:

$$y_n = y_0 + \left(\frac{\Delta y_0}{\delta x} + \frac{\Delta y_1}{\delta x} + \frac{\Delta y_2}{\delta x} + \ldots \frac{\Delta y_{(n-1)}}{\delta x}\right)\delta x:$$

figurémonos ahora que la cantidad δx disminuye cada vez mas, aproximándose á cero, y que el número n aumenta al mismo tiempo y en la misma relacion, de modo que la cantidad $n\,\delta x$ no varía: entonces el número de términos contenido en el paréntesis aumentará mas y mas y el valor de cualquiera de ellos, tal como $\frac{\Delta y_1}{\delta x}$ se acerca sin cesar al del coeficiente diferencial $\frac{dy}{dx}$, que corresponde al valor $x_0 + \delta x$ de la variable x, luego, á medida que δx disminuye, la cantidad

$$\left(\frac{\Delta y_0}{\delta x}+\frac{\Delta y_1}{\delta x}+\frac{\Delta y_2}{\delta x}+\ldots\ldots+\frac{\Delta y_{(n-1)}}{\delta x}\right)\delta x$$

se aproxima á un límite, que es la suma de los infinitos valores que toma la diferencial $\frac{dy}{dx}dx$ de la funcion propuesta, cuando la variable x crece por intérvalos constantes é infinitamente pequeños como dx desde $x=x_0$ hasta $x=x_0+n\delta x$. Se sigue de todo esto que, para pasar de un valor cualquiera y_0 de la funcion á otro cualquiera y, hay que añadir á y_0 la suma de todos los valores que toma la diferencial $\frac{dy}{dx}dx$ en el intérvalo comprendido entre los valores x_0 y x que corresponden á y_0 é y.

Si representamos, pues, como arriba por $X\,dx$ la diferencial de la funcion y, es decir $\frac{dy}{dx}dx$, podremos en lugar de la ecuacion precedente poner esta

$$y=y_0+S_{x_0}\,X\,dx$$

en la cual el signo S_{x_0} denota que se ha tomado la suma de los valores de la diferencial $X\,dx$ correspondientes á todos los valores x_0, x_0+dx, $x_0+2\,dx$, $x_0+3\,dx$. . . . etc. hasta el valor $x_0+(n-1)\,dx$ que precede al valor de x correspondiente á la funcion y que está en el primer miembro. De este modo se especifica cuál es el valor particular x_0 correspondiente á y_0 desde el cual se cuenta aquella suma.

La ecuacion anterior subsiste ademas, cualesquiera que sean los valores correlativos x_0 é y_0; y si se hubiese dado simplemente una diferencial $X\,dx$, sin expresar desde cuál valor x_0 de la variable se queria contar la suma de sus valores, ni cuál era el valor correspondiente y_0 de la funcion, entonces no habria absolutamente medio de determinarlos.

Considerando, pues, á la funcion y en la ecuacion precedente como sujeta solo á la condicion de tener por diferencial $X\,d\,x$, es preciso mirar á x_0 á y_0 como enteramente arbitrarias: entonces es inútil marcar el valor indeterminado de x desde el cual se ha contado la suma $S\,X\,d\,x$, y se puede escribir como en el número anterior $y=C+S\,X\,d\,x$.

3.° Esplicada ya la naturaleza de la operacion llamada integracion, nos resta ahora esponer los medios que la análisis suministra para efectuarla, es decir, para hallar la funcion finita de la variable x que diferenciada daria la diferencial propuesta $X\,d\,x$; ó bien para hallar la funcion primitiva cuya derivada ó cuyo coeficiente diferencial de primer órden es X. Pero debemos hacer notar que, aunque la operacion que tiene por objeto dada una funcion y deducir su diferencial $d\,y$, se efectúa por un procedimiento regular y seguro que conduce siempre al resultado apetecido, la operacion inversa que se propone por el contrario retroceder de la diferencial á la funcion primitiva no se puede efectuar completamente sino en casos particulares, y como si digéramos, por escepcion de la regla. En efecto, hablando en general, no podemos tener seguridad de obtener en términos finitos la funcion primitiva de x que corresponde á una diferencial dada $X\,d\,x$, y muchas veces nos veremos precisados, como se verá mas adelante, á suplir por métodos de aproximacion la imposibilidad de hallar exactamente la expresion de la funcion primitiva. Conviene, pues, conocer los principales casos en que la integracion es posible, y los métodos que en cada uno de ellos se deben emplear.

4.° En primer lugar debe observarse que los signos S y d se destruyen puestos el uno á continuacion del otro, porque indicando dos operaciones contrarias dejan en el mismo estado á la expresion á quien afectan. Esto supuesto, es evidente que se obtendrá desde luego la integral de una diferencial propuesta cuando está presente la misma forma que algunas de las que obtuvimos para las funciones simples en la leccion 1.ª del cálculo diferencial. Asi se ve desde luego que

$$d\,y = x^m\,d\,x \quad \text{se tendrá} \quad S\,d\,y = y = C + \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$d\,y = \frac{d\,x}{x} \qquad y = C + l\,x$$

$$d\,y = e^x\,d\,x \qquad y = c + e^x$$

$$d\,y = a^x\,d\,x \qquad y = c + \frac{a^x}{l\,a}$$

$$d\,y = sen.\,x\,d\,x \qquad y = c - cos.\,x$$

$$d\,y = cos.\,x\,d\,x \qquad y = c + sen.\,x$$

$$d\,y = \frac{d\,x}{cos.^2\,x} \qquad y = c + tang.\,x$$

$$d\,y = -\frac{d\,x}{sen.^2\,x} \qquad y = c + cot.\,x$$

$$d\,y = \frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad y = c + arc.\,(sen. = x)$$

$$d\,y = -\frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad y = c + arc.\,(cos. = x)$$

$$d\,y = \frac{d\,x}{1+x^2} \qquad y = c + arc.\,(tang. = x)$$

$$d\,y = -\frac{d\,x}{1+x^2} \qquad y = c + arc.\,(cot. = x)$$

La fórmula $S\,x^m\,d\,x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ subsiste en general para todos los valores positivos ó negativos, enteros ó fraccionarios y hasta irracionales del exponente m, siendo dignos de notarse los dos casos siguientes:

$$S\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \qquad\qquad S\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

que se presentan con mucha frecuencia. Examinando el caso en que $m = -1$, la fórmula da $\frac{dx}{x} = \frac{1}{0}$, y no debemos por esto inferir que el análisis dé un valor infinito para la integral de la funcion diferencial $\frac{dx}{x}$, lo que sería un absurdo. Para esplicar este caso, debemos tener presente que la integral se ha de completar con una constante arbitraria, y lo que necesitamos venir á deducir es tan solo que la expresion general $C + \frac{x^{m+1}}{m+1}$ dá el resultado que deba corresponder en todos los casos y por consiguiente en el de $m = -1$.

Para ello en la expresion $y = c + \frac{x^{m+1}}{m+1}$ determinemos la constante por la condicion general de que y sea cero cuando $x = a$ y tendremos

$$o = c + \frac{a^{m+1}}{m+1}\,; \qquad \text{ó} \qquad c = -\frac{a^{m+1}}{m+1}$$

y sustituyendo será

$$y = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$$

que con $m = -1$ se reduce á $\frac{0}{0}$ libremos de indeterminacion derivando ambos términos de la fraccion en concepto de m

variable y tendremos $y = lx$. + En efecto este debe ser el valor de la funcion y, cuando $m = 1$; porque sabemos que $\frac{dx}{x}$ espresion diferencial á que se reduce la propuesta $x^m\,dx$ cuando $m = -1$, proviene de lx es decir que $d\,lx = \frac{dx}{x}$. Lo espuesto sobre la expresion diferencial $x^m\,dx$ da lugar á dos observaciones.

1.ª Que en toda espresion de la forma $y = c + S\,X\,dx$ no porque la parte $S\,X\,dx$ incurra en un valor indeterminado ó ∞ debemos decir que lo es la funcion y, sino que á esta le corresponderá el valor que resulte de la suma $C + S\,X\,dx$ luego que sea determinada la constante C.

2.ª La circunstancia de incurrir en $\frac{0}{0}$ la espresion $y = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$ con $m = -1$ ocurre en el momento en que $y = S\,x^m\,dx$ cambia de naturaleza como se ha observado en otros casos, pues de ser ahora y algébrica con cualquiera valor de m, pasa á trascendente con $m = -1$.

5.° Obtenidas las integrales de la tabla puesta en el artículo anterior pasaremos á dar reglas para obtener las correspondientes á las demas espresiones diferenciales y desde luego podemos decir que para obtenerlas es preciso emplear diferentes procedimientos que tienen siempre por objeto, ó ya *descomponer* la funcion en otras mas sencillas y que puedan reducirse á las esplicadas, ó ya variar su forma mediante la *sustitucion* de una nueva variable en lugar de la x, á fin de que la diferencial propuesta tome una forma de aquellas cuya integral se conoce inmediatamente, ó ya por último hacer depender la integral pedida de otra integral mas fácil de obtener.

Este último es el método que se conoce por el nombre de *integracion por partes*, que es uno de los mas generales, y

+ y = lb - la,

que con mas frecuencia se emplean en el cálculo integral. Para esplicarle, observaremos que $d\,u\,v = u\,d\,v + v\,d\,u$, luego será reciprocamente $u\,v = S\,(u\,d\,v + v\,d\,u) = S\,u\,d\,v + S\,v\,d\,u$ (véase el número 7, advertencia segunda) de donde se saca $S\,u\,d\,v = u\,v - S\,v\,d\,u$.

Asi, pues, con tal que se consiga poner la diferencial propuesta en la forma $u\,d\,v$, es decir bajo la forma de un producto, en el que uno de los factores sea una funcion finita u de x, y el otro una funcion diferencial $d\,v$ cuya integral sea conocida, la investigacion de la integral pedida quedará reducida á la integral $S\,v\,d\,u$. No es necesario advertir que la expresion de la integral pedida se debe siempre completar con una constante arbitraria que no hemos expresado en la ecuacion anterior.

Para hacer visible con un ejemplo la utilidad del método de integracion por partes, propongamos la diferencial $d\,y = x\,cos.\,x\,d\,x$ la consideraremos compuesta de los dos factores x y $cos.\,x\,d\,x$, de los cuales el segundo tiene por integral $sen.\,x$: aplicando, pues, la fórmula general diremos

$$S\,x.\,cos.\,x.\,d\,x = x\,sen.\,x - S\,sen.\,x\,d\,x = x\,sen.\,x + cos.\,x,$$

y completando la integral con una constante arbitraria, se tiene $y = C + x\,sen.\,x + cos.\,x$, expresion cuya exactitud se comprueba facilmente por la diferenciacion.

El buen éxito de la aplicacion de este método depende siempre del acierto en la eleccion de los factores en que se descompone la diferencial propuesta; si en la diferencial anterior $x\,cos.\,x\,d\,x$, hubiésemos descompuesto en los factores $cos.\,x$ y $x\,d\,x$ de los cuales el último tiene por integral $\frac{x^2}{2}$, hubiesemos tenido

$$S\,cos.\,x.\,x\,d\,x = \frac{x^2\,cos.\,x}{2} - S\,\frac{x^2}{2} \times -sen.\,x\,d\,x = \frac{x^2\,cos.\,x}{2} + S\,\frac{x^2\,sen.\,x\,d\,x}{2},$$

donde se ve que la integral pedida depende de otra mas complicada que ella. Se debe, pues, descomponer, siempre que sea posible, la diferencial propuesta de tal modo, que la integracion de uno de los factores y la diferenciacion del otro conduzcan á espresiones mas sencillas, y cuya integral se presente inmediatamente.

7.° En la practica de la integracion de las funciones diferenciales conviene mucho tener presente las tres advertencias siguientes que contribuyen á facilitarlas.

1.ª Que todo factor constante que afecte á una diferencial afecta igualmente á la integral, asi

$$d\,y = a\,X\,d\,x \text{ dá } y = C + a\,S\,X\,d\,x \ (^*)$$

2.ª Que cuando la funcion se compone de la suma de varias diferenciales, la integral pedida es igualmente la suma de las integrales correspondientes á estas diferenciales, y tomadas separadamente, es decir que

$d\,y = X_1\,d\,x + X_2\,d\,x + X_3\,d\,x$ dá $y = S\,X_1\,d\,x + S\,X_2\,d\,x + S\,X_3\,d\,x$ (**)

(*) Porque se sabe por el cálculo diferencial que la constante a que afecta á la funcion, afecta del mismo modo á la diferencial, luego si en la diferencial hay un factor constante, será porque tambien lo habia en la funcion primitiva ó en la integral.

(**) Porque si suponemos

$$\left.\begin{array}{l} d\,X' = X_1\,d\,x \\ d\,X'' = X_2\,d\,x \\ d\,X''' = X_3\,d\,x \end{array}\right\} \text{ ó bien } \left\{\begin{array}{l} X' = S\,X_1\,d\,x \\ X'' = S\,X_2\,d\,x \\ X''' = S\,X_3\,d\,x \end{array}\right.$$

se tendrá segun lo dicho en el cálculo diferencial

$$d\,y = d\,X' + d\,X'' + d\,X''' = d\,(X' + X'' + X''')$$

é integrando ambos miembros

$S\,d\,y = S\,d\,(X' + X'' + X''')$ que es lo mismo que $y = X' + X'' + X'''$, luego poniendo por X', X'', X''' sus valores y añadiendo la constante será por último

$$y = C + S\,X_1\,d\,x + S\,X_2\,d\,x + S\,X_3\,d\,x$$

3.ª Que cuando una funcion tiene por sí, ó puede tomar, mediante una transformacion, la forma $f(X)\,d\,X$, siendo X una funcion cualquiera de x, entonces dicha funcion puede ser tratada como si X fuese una variable independiente; de manera que si $F(x)$ significa la funcion cuya diferencial es $f(x)\,d\,x$, es decir, si se tiene $F(x) = S\,f(x)\,d\,x$ se tendrá del mismo modo $F(X) = S\,f(X)\,d\,X$.

Sirva de ejemplo la diferencial

$$d\,y = x^{m-1} \times sen.\,(a + b\,x^{m})\,d\,x;$$

multiplicando y dividiendo por $m\,b$, se puede decir

$d\,y = \dfrac{1}{m\,b}\,sen.\,(a + b\,x^{m})\,m\,b\,x^{m-1}\,d\,x$; pero $m\,b\,x^{m-1}\,d\,x$ es la diferencial de la funcion $a + b\,x^{m}$ que está afectada del signo del seno, luego, si hacemos $X = a + b\,x^{m}$, tendremos

$d\,y = \dfrac{1}{m\,b}\,sen.\,X\,d\,X$, cuya integral es

$y = C - \dfrac{1}{m\,b}\,cos.\,X = C - \dfrac{1}{m\,b}\,cos.\,(a + b\,x^{m})$, como se podria comprobar por la diferenciacion.

LECCION 2.ª

Integracion de las funciones algébricas.

8.º Las funciones algébricas pueden ser racionales ó irracionales. Cualquiera que sea la naturaleza de las primeras podemos presentarlas bajo la forma

$$\varphi(x) + \frac{f(x)}{F(x)}$$

siendo la primera parte un polinomio racional en x, y la segunda una fraccion cuyo denominador sea de mayor grado que el numerador por cuya razon la integracion de esta clase de funciones quedará expresada en

$$S\left(\varphi\,(X) + \frac{f\,(x)}{F\,(x)}\right) d\,x = S\,\varphi\,(X)\,d\,x + S\,\frac{f\,(x)}{F\,(x)}\,d\,x$$

La primera integral está ya demostrado su modo de obtenerla, pues está comprendida en $S\,(A + B\,x + C\,x^2 \ldots + K\,x^m)\;d\,x = S\,A\,d\,x + S\,B\,x\,d\,x + \ldots + S\,K\,x^m\,d\,x$. En cuanto á la segunda, se sabe que toda fraccion racional se puede descomponer en tantas fracciones de primer grado cuantas raices reales contenga su denominador; y en tantas fracciones de segundo grado cuantas raices imaginarias conjugadas contenga, todo esto bajo el supuesto que no contenga el denominador raices iguales; pues en este caso son los denominadores las potencias sucesivas de los factores reales de primero ó segundo grado desde el grado mayor en que entren hasta el primero segun se demostró ya en el tratado de las séries.

Bajo este supuesto, la espresion $\frac{f\,(x)}{F\,(x)}$ solo puede ser descompuesta en fracciones de las formas siguientes:

$$\frac{A\,d\,x}{x-a},\quad \frac{A\,d\,x}{(x-a)^m},\quad \frac{(A\,x + B)\,d\,x}{(x-a)^2 + b^2},\quad \frac{(A\,x + B)\,d\,x}{[(x-a)^2 + b^2]^m}$$

Los denominadores de las dos últimas espresiones son los factores de segundo grado correspondientes á cada par de raices imaginarias conjugadas de la forma general $x = a \pm b\sqrt{-1}$, cuyo producto de sus factores de primer grado es $(x-a + b\sqrt{-1})\,(x-a-b\sqrt{-1}) = (x-a)^2 + b^2$

1.ª y 2.ª Haciendo en las dos primeras $x-a=z$ quedan reducidas á las formas $S\frac{A\,d\,z}{z}$, $S\frac{A\,d\,z}{z^m}$, por lo tanto sus integrales son

$$S\frac{A\,d\,x}{x\text{-}a}, = C + A\,l\,(x\text{-}a);\ S\frac{A\,d\,x}{(x\text{-}a)^m} = -\frac{A}{(m\text{-}1)\,(x\text{-}a)^{m-1}} + C$$

3.ª Observando la forma de la 3.ª se puede conocer que si en vez del término $A\,x\,d\,x$ tuviésemos otro de la forma $A\,(x\text{-}a)\,d\,x$, podria descomponerse dicha fraccion en otras dos del mismo denominador, la primera de las cuales corresponderá á un logaritmo y la segunda al arco funcion de la tangente. Para verificar esto, podemos dar al numerador la forma

$$\frac{A\,x + B}{(x\text{-}a)^2 + b^2}\,d\,x = \frac{A\,(x\text{-}a) + (A\,a + B)}{(x\ a)^2 + b^2}\,dx = \frac{A\,(x\text{-}a)\,d\,x}{(x\text{-}a)^2 + b} + \frac{(A\,a + B)\,d\,x}{(x\text{-}a)^2 + b^2}$$

con lo cual la integracion pasará á ser

$$S\frac{A\,(x\text{-}a)\,d\,x}{(x\text{-}a)^2 + b^2} + S\frac{(A\,a + B)\,d\,x}{(x\text{-}a)^2 + b^2} = \frac{A}{2}\,l\,[\,(x\text{-}a)^2 + b^2\,] + S\frac{(A\,a + B)\,d\,x}{(x\text{-}a)^2 + b^2}.$$

Dándole á la última integral la forma $\frac{A\,a + B}{b}\,S\frac{d\,z}{1 + z^2} =$

$$\frac{A\,a + B}{b} \times arc.\ tang.\ \frac{x\text{-}a}{b} + C.$$

4.ª En el último caso $S\frac{(A\,x + B)\,d\,x}{[\,(x\text{-}a)^2 + b^2]^m}$ haciendo las mismas transformaciones del caso anterior queda bajo la forma

$$S\frac{A\,(x\text{-}a)\,d\,x}{[\,(x\text{-}a)^2+b^2\,]^m}+S\frac{(A\,a+B)\,d\,x}{[\,(x\text{-}a)^2+b^2\,]^m}=-$$

2m-1

$$\frac{A}{2\,(m\text{-}1)\,[\,(x\text{-}a)^2+b^2\,)^m}+\frac{A\,a+B}{b^2\,(m\text{-}1)}\,S\frac{d\,z}{(1+z^2)^m}\,(A)$$

Esta última integral no puede encontrarse directamente, y hay que hacerla depender de otras mas sencillas. Para esto dándole la forma

$$S\frac{d\,z}{(1+z^2)^m}=S\frac{(1+z^2)\,d\,z}{(1+z^2)^{m+1}}=S\frac{d\,z}{(1+z^2)^{m+1}}+S\,z\times$$

$$\frac{z\,d\,z}{1+z^2)^{m+1}}=S\frac{d\,z}{(1+z^2)^{m+1}}-\frac{z}{2\times m\,(1+z^2)^m}+$$

$$\frac{1}{2\,m}\,S\frac{d\,z}{(1+z^2)\,m},$$

cambiando m en $m-1$ se obtendrá

$$S\frac{d\,z}{(1+z^2)^m}=S\frac{d\,z}{(1+z^2)^m}-\frac{z}{2\,(m-1)\,(1+z^2)^{m-1}}+$$

$$\frac{1}{2\,(m-1)}\,S\frac{d\,z}{(1+z^2)^{m-1}}\quad S\frac{d\,z}{(1+z^2)^m}=\frac{z}{2(m-1)\,(1+z^2)^{m-1}}$$

$$+\frac{2\,(m-3)}{2\,(m-1)}\,S\frac{d\,z}{1+z^2)^{m-1}}\;\ldots\ldots(B)$$

operando con la última integral del mismo modo que con la análoga anterior, ó mejor, sustituyendo en el resultado anterior $((B))$ por m, m-1, y asi sucesivamente quedaria (por ser

m entero positivo) dependiente de $S\dfrac{dz}{1+z^2} = arc.\ tang. = z$;

esto es

$$S\frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}} = \frac{z}{2(m-2)(1+z^2)^{m-2}} + \frac{2m-3}{2(m-2)}\,S\frac{dz}{(1+2^2)^{m-2}},$$

ó bien

$$S\frac{dz}{(1+z^2)^m} = \frac{z}{2(1+z^2)^{m-1}}\left\{\frac{1}{m-1} + \frac{m-\frac{3}{2}}{m-1}\times\frac{1+z^2}{m-2}\times\frac{m-\frac{5}{2}}{m-2}\times\frac{(1+z^2)^2}{m-3}\times\dots+\right\} + \frac{m-\frac{3}{2}}{m-1}\times\frac{m-\frac{5}{2}}{m-3}\times\dots\times\frac{\frac{3}{2}}{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{1}\times arc.\ (tang. = 2.)$$

cuyo valor sustituido en la ecuacion ((A)) dá para la propuesta su valor final reemplazando por z su equivalente $\dfrac{x-a}{b}$;

$$S\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\times l\frac{a+x}{a-x};\quad S\frac{x^3+x^2+2}{x^5-2x^3+x}dx = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{x-1} + 2\,l\,x - \frac{3}{4}\,l(x-1) - \frac{3}{4}\,l(x+1)$$

$$S\frac{(x^2-x+1)\,dx}{(x+1)(x^2+1)} = l\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{\sqrt[4]{x^2+1}} - \frac{1}{2}\,arc.\ (tang. = x)$$

$$S\frac{dx}{(1+x)(x^2+2)x^2(x^2+1)^2} = l\sqrt[12]{(x+1)(x^2+2)} - \frac{1}{2x} +$$

$$\frac{1}{8}\, l\, \frac{x^2+1}{x^4} + \frac{1}{6\sqrt{2}}\, \text{arc. tang.} = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x+1}{4\,(x^2+1)} - \frac{1}{2}\, \text{arc. (tang.} = x).$$

LECCION 3.ª

Funciones irracionales.

9.º Las funciones algébricas irracionales no presentan generalmente reglas fijas para poderse integrar bajo una forma finita; y solo en algunos casos puede conseguirse esto. Tales son: 1.º cuando la irracionalidad es monomia, esto es, consiste en términos de la forma $\sqrt[n]{a x^n}$; 2.º cuando la irracionalidad es de segundo grado, esto es, corresponde á un polinomio de este grado afectado de un radical del mismo órden. Fuera de estos casos no queda otro arbitrio que hacer depender la integral de otras mas sencillas.

1.ª clase. Sea $\dfrac{\sqrt[n]{x^m} + \sqrt[p]{x^a} + x^h}{x^2 + \sqrt[q]{x}} \times d\,x$, una funcion irracional monomia. Para esto, si introducimos una nueva variable tal que haga racionales todos los términos quedará la integracion reducida á las lecciones anteriores. Desde luego se concibe que si hemos de reducir los radicales à su mas simple racionalidad haremos $x = z^K$ siendo este esponente el mínimo múltiplo comun de todos los índices. Así sucede para este caso haciendo $x = z^{npq}$ y la espresion propuesta pasaría á ser

$$S\, n\, p\, q\, \frac{z^{mpq} + z^{naq} + z^{hnpq}}{z^{2npq} + z^{np}}\, z^{npq-1}\, d\,z$$

la cual se integrará despues de haberla descompuesto segun las reglas dadas para las fracciones racionales.

10... 2.ª clase. Las funciones comprendidas en esta clase son segun dejamos dicho, aquellas en que la irracionalidad proviene tan solo de la existencia de un radial de segundo grado, tal como

$\sqrt{a+bx+cx^2}$ ó $\sqrt{a+bx-cx^2}$, siendo a y b cantidades constantes cualesquiera, y c una cantidad constante y positiva, siempre es posible hacer racional esta funcion, y por consiguiente siempre es tambien posible integrarla, empleando los procedimientos esplicados en el artículo precedente.

En primer lugar, si el signo del término cx^2 es positivo, tomaremos una nueva variable t y haremos

$\sqrt{a+bx+cx^2}=t-x\sqrt{c}$ ó $a+bx=t^2-2tx\sqrt{c}$, y será

$$x=\frac{t^2-a}{2t\sqrt{c}+b} \text{ y } dx=\frac{2(t^2\sqrt{c}+bt+a\sqrt{c})\,dt}{(2t\sqrt{c}+b)^2}$$

cuyos valores sustituidos en la funcion la harán necesariamente racional.

11. En segundo lugar, cuando el signo del término cx^2 es negativo, la funcion se hará tambien racional, suponiendo

$\sqrt{a+bx-cx^2}=xt-\sqrt{a}$ ó $b-cx=xt^2-2t\sqrt{a}$, que dá

$$x=\frac{b+2t\sqrt{a}}{c+t^2} \text{ y } dx=\frac{2(c\sqrt{a}-bt-t^2\sqrt{a})\,dt}{(c+t^2)^2}$$

Pero esta trasformacion, en el caso en que la cantidad a fuese negativa, introduciria términos imaginarios en la diferencial propuesta, por lo que procederemos del modo siguiente. Partiendo del supuesto de que se opera sobre cantidades siempre reales, y por consiguiente sobre valores de x tales que el radical $\sqrt{a+bx-cx^2}$, se conserve siempre real, observaremos que entonces el trinomio $a+bx-cx^2$ tiene valores positivos, de donde se sigue que la ecuacion x^2-

$\frac{b}{c}x - \frac{a}{c} = o$ tiene sus raices reales; si representamos, pues, por P y P', estas raíces podremos suponer.

$$\sqrt{a + bx - cx^2} = \sqrt{c(x-P)(P'-x)} = \sqrt{c}\,(x-P)\,t$$

de donde sale; elevando al cuadrado

$$P_{,} - x = (x-P)\,t^2$$

y $\quad x = \dfrac{Pt^2 + P_{,}}{t^2+1} \qquad dx = \dfrac{2\,t\,dt\,(P - P_{,})}{(t^2+1)^2}$

estos valores sustituidos arriba harian ya racional la funcion y sin introducir en ellas cantidades imaginarias.

12. Con la misma facilidad, se puede hacer desaparecer la irracionalidad, cuando provenga de la presencia de dos radicales de la forma $\sqrt{a+x}$, $\sqrt{b+x}$ que solo contengan x elevada á la primera potencia: entonces haremos $\sqrt{b+x} = t$, que dá $x = t^2 - b$ y $dx = 2\,t\,dt$, con cuya transformacion desaparece el segundo radical, y el primero toma la forma $\sqrt{a - b + t^2}$ que se reduce al caso esplicado en el número 10.

13. Indicaremos algunas de las aplicaciones mas sencillas de los métodos que acabamos de esponer

sea $dy = \dfrac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$; empleando la transformacion del número 10 esta diferencial se convierte en

$$dy = \frac{2\,dt}{2\,t\sqrt{c} + b},$$

que integrada es

$y = \dfrac{1}{\sqrt{c}}\, l\,(2\,t\sqrt{c} + b) + C$: poniendo por t su valor en x, resulta

$y=C+\frac{1}{\sqrt{c}}l(b+2cx+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}$ ó bien (*)

$$y=C+\frac{1}{\sqrt{c}}l\left(\frac{b}{2\sqrt{c}}+x\sqrt{c}+\sqrt{a+bx+cx^2}\right),$$ es-

presando siempre C la constante arbitraria que introduce la integracion.

14. Sea ahora $dy=\frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}}$, empleando la primera transformacion del número **11**, esta diferencial se convierte en

$$dy=-\frac{2dt}{c+t^2}=-\frac{2}{\sqrt{c}},\frac{dt\sqrt{c}}{c+t^2}=-\frac{2}{\sqrt{c}}\frac{\frac{dt}{\sqrt{c}}}{1+\frac{t^2}{c}}$$

la cual tiene por integral $y=-\frac{2}{\sqrt{c}}arc.\left(tang.=\frac{t}{\sqrt{c}}\right)+C$ y poniendo por t su valor

---

(*) El valor de t en funcion de x sacado del número **11**, es $t=\sqrt{a+bx+cx^2}+x\sqrt{c}$, el cual sustituido en y dá

$$y=\frac{1}{\sqrt{c}}l.\ (b+2cx+2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2})+C$$

dividiendo por $2\sqrt{c}$ dentro del paréntesis, y añadiendo fuera para compensarlo $l\,2\sqrt{c}$, se tiene

$$y=\frac{1}{\sqrt{c}}l\left(\frac{b}{2\sqrt{c}}+x\sqrt{c}+\sqrt{a+bx+cx^2}\right)+$$

$l.\ 2\sqrt{c}+C.$

y como el término $l\,2\sqrt{c}$ es constante, se omite suponiéndolo comprendido en la constante arbitraria C.

$$y = c - \frac{2}{\sqrt{c}} \text{ arc.} \left(\text{tang.} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a + bx - cx^2}}{x\sqrt{c}} \right)$$

Empleando la segunda transformacion del mismo número, se tendrá $dy = -\frac{2}{\sqrt{c}} \frac{dt}{t^2+1}$, cuya integral es $C - \frac{2}{\sqrt{c}}$ arc. (tang. $= t$) y poniendo por t su valor, $y = c - \frac{2}{\sqrt{c}}$ arc. $\left(\text{tang.} = \sqrt{\frac{P_{,} - x}{x - P}}\right)$ esta espresion, teniendo presente que P y $P_{,}$ son las raices de la ecuacion $x^2 - \frac{b}{c} x - \frac{a}{c} = o$, se podrá tambien poner bajo esta forma

$$y = c - \frac{2}{\sqrt{c}} \text{ arc.} \left(\text{tang.} = \sqrt{\frac{-2cx + b + \sqrt{4ac + b^2}}{2cx - b + \sqrt{4ac + b^2}}} \right)$$

Ambas espresiones de la integral pedida se pueden emplear indistintamente, pues no difieren sino en el valor de la constante arbitraria.

15. En el caso particular de que se diese la diferencial $dy = \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$ hariamos $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, y la fórmula del número 13, nos daria $y = c + C(x + \sqrt{1 + x^2})$

16. Si la diferencial fuese $dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$, se sabe que entonces es $y = c +$ arc. (sen. $= x$); y en efecto la primera fórmula del número 14, dá

$y = c\,2\ arc.\ (tang. = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x})$: pero si hacemos $\varphi = art.\ (sen. = x)$, esta espresion se convierte (*) en

---

(*) Haciendo $\varphi = arc.(sen. = x)$ ó $x = sen.\ \varphi$, la espresion $y = c - 2.\ art.\ (tang. = \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x})$ se convierte en

$$y = c - 2\ arc.\ (tang. = \frac{1+cos.\ \varphi}{sen.\ \varphi}) =$$

$$c - 2\ arc.\ (tang. \frac{1+cos.^2\frac{1}{2}\varphi - sen.^2\frac{1}{2}\varphi}{2\,sen.\frac{1}{2}\varphi\,cos.\frac{1}{2}\varphi}) =$$

$$c - 2\ arc.\ (tang. = \frac{2\,cos.^2\frac{1}{2}\varphi}{2\,sen.\frac{1}{2}\varphi\,cos.\frac{1}{2}\varphi}) =$$

$$c - 2\ art.\ (tang. = \frac{cos.\frac{1}{2}\varphi}{sen.\frac{1}{2}\varphi}) = c - 2\ arc.\ (tang. =$$

$$cot.\tfrac{1}{2}\varphi) = c - 2\,(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\varphi) = C - \pi + \varphi$$

ó por último, comprendiendo la π en la constante $y = c + \varphi$, que poniendo por φ su valor, es $y = c + arc.\ (sen. = x)$ como antes.

$$y = c - 2\,arc.\left(tang. \frac{1 + cos.\,\varphi}{sen.\,\varphi}\right) = C -$$

$$2\,arc.\left(tang. = \frac{cos.\,\frac{1}{2}\,\varphi}{sen.\,\frac{1}{2}\,\varphi}\right) = C + \varphi$$, que es el mismo resultado de antes.

Asi mismo la segunda fórmula del número **14**, dá

$$y = c - 2\,arc.\left(tang. = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$, que es lo mismo que (*)

$$y = c - arc.\left\{tang. = \frac{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1 - \frac{1-x}{1+x}}\right\} = C - arc.\left(tang. = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right),$$

y haciendo como antes $\varphi = arc.\,(sen. = x)$

$$y = c - arc.\left(tang. = \frac{cos.\,\varphi}{sen.\,\varphi}\right) = c - arc.\,(tang. = cot.\,\varphi) = c - \left(\tfrac{1}{2}\,\pi - \varphi\right) = c + \varphi$$ como siempre.

17. Conviene observar que tambien se podria deducir la integral de la funcion diferencial $d\,y = \frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}}$ por medio de

---

(*) Recuérdese que $tang.\,2\,a = \frac{2\,tang.\,a}{1 - tang.^2\,a}$

la fórmula del número 15, haciendo en ella $a = 1$, $b = o$, $c = -1$: aplicando dicha fórmula bajo este supuesto, se tiene la espresion imaginaria

$$y = c + \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\left(x\sqrt{-1} + \sqrt{1-x^2}\right).$$

18. Haremos notar todavia que podrá acaso parecer mas sencilla la integracion de la diferencial

$$d\,y = \frac{d\,x}{\sqrt{a + b\,x - c\,x^2}}$$

no empleando ya ninguna de las transformaciones del número 14, si no refiriendo inmediatamente la diferencial propuesta á la espresion $\frac{d\,t}{\sqrt{1-t^2}}$. Siguiendo este método se tendrá

$$d\,y = \frac{d\,x}{\sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\,x \cdot x^2}} = \frac{d\,x}{\sqrt{c}\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b^2}{4\,c^2} - \left(x - \frac{b}{2\,c}\right)^2}} =$$

$$\frac{d\,x}{\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b^2}{4\,c^2}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{b}{2c}}{\sqrt{\frac{a}{b} + \frac{b^2}{4\,c^2}}}\right)^2}}, \text{ que tiene por integral}$$

$$y = c + \frac{1}{\sqrt{c}}\, arc. \left(sen. = \frac{x - \frac{b}{2\,c}}{\sqrt{\frac{a}{c} + \frac{b^2}{4\,c^2}}} \right) \text{ ó bien}$$

$$y = c + \frac{1}{\sqrt{c}}\, arc. \left(sen. = \frac{2\,c\,x - b}{\sqrt{4\,a\,c + b^2}} \right)$$

Esta nueva espresion tampoco se diferencia de la que hemos hallado en el número 14 sino en el valor de la constante arbitraria.

Del mismo modo se podria reducir la diferencial $\frac{d\,x}{\sqrt{a + b\,x + c\,x^2}}$ á la forma $\frac{d\,t}{\sqrt{1 + t^2}}$, cuya integral hemos dado en el número 15; pero no obtendriamos por este medio un resultado mas sencillo que la fórmula del número 13.

LECCION 4.ª

Binomias.

19. Se trata de integrar las diferenciales binomias comprendidas en la general

$$K\,x^m\,(a + b\,x^n)^P\,d\,x$$

siendo m, n p positivas, negativas, enteras ó fraccionarias.

En primer lugar, si p es número entero, desenvolviendo el binomio resultará una espresion compuesta de número finito de monomios, y por ello capaz de integracion exacta; de modo que únicamente siendo p fraccionario hay dificultad en la integracion. Veamos en general lo que sucede, suponiendo para ello

$$z = a + b\,x^n$$

Despejando x primeramente, elévese el resultado á la potencia $m + 1$ y diferenciando despues hallaremos

$$x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},\quad x^m\,d\,x = \left(\frac{(z-a)^{\frac{m+1}{n} - 1}}{n\,b^{\frac{m+1}{n}}}\right) d\,z$$

Por sustitucion de estas espresiones, la general se transforma en

$$K\,\frac{(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}}{n\,b^{\frac{m+1}{n}}} \times z^{p}\,d\,z$$

si $\frac{m+1}{n}$ es número entero, desplegando el binomio

$(z-a)^{\frac{m+1}{n}-1}$ saldrán monomios todos sus términos; y multiplicándolos por $z^{p}\,d\,z$ se harán integrables por la regla de potencias, aunque p sea fraccionario. *Luego, será la diferencial integrable, siempre que el esponente de* x *fuera del binomio aumentado con la unidad sea divisible por el de* x *dentro del binomio.*

Aunque por la simplicidad del cálculo se ha supuesto $a - b\,x^n = z$, en la práctica se hace igual á z^h, siendo entonces en la propuesta $p = \frac{1}{h}$, pues de este modo en el resultado anterior desaparece la irracionalidad de los monomios, y es mas cómoda su integracion.

Para examinar otro caso divídase el factor $(a + b\, x^n)^p$ de la espresion general por x^{np}, y multiplicando por x^{np}; resultará $K x^m (a + b\, x^n)^p\, d\, x = K x^{m + np} (b + a\, x^{-n})^p\, d\, x$ que segun el teorema precedente será racional, si $\dfrac{m + n\, p + 1}{n}$ ó su igual $\dfrac{m + 1}{n} + p$ es entero. Luego tambien será integrable una diferencial binomia, cuando el cociente espresado en el teorema anterior, aumentado con p, sea número entero.

Cuando se da, pues, una espresion binomia, se hace desde luego el reconocimiento sencillo de si p es número entero; y en caso de no serlo, si $\dfrac{m + 1}{n}$ se halla en este caso; y cuando no, á lo menos la fraccion $\dfrac{m + 1}{n} + p$; y despues de dicho reconocimiento se procede á la transformacion correspondiente segun lo observado. Para ensayo proponemos los dos ejemplos que siguen:]

1.° En la espresion $S\left[x^{\frac{1}{3}}\, d\, x\, (a + b\, x^{\frac{1}{2}})^2\right]$ es p número entero; y desenvolviendo el binomio, la propuesta equivale á

$$S\, a^2\, x^{\frac{1}{3}}\, d\, x + S\, 2\, a\, b\, x^{\frac{1}{6}}\, d\, x + S\, b^2\, x^{\frac{1}{3}}\, d\, x$$

2.° En esta otra espresion que proponemos

$$x^{-2}\, d\, x\, (a + x^3)^{-\frac{5}{3}}$$

es p fraccionario, y ademas resulta $\dfrac{m + 1}{n} = -\frac{1}{3}$: pero

$$\frac{m+1}{n}+p=-2$$

Visto que pertenece al tercer caso, prepárese para la integracion siguiendo la marcha que está determinada: se multiplica y divide primeramente por $(x^3)^{-\frac{5}{3}}$ que aqui es el factor x^{np} de la análisis general y resultará la equivalente á la propuesta

$$X^{-7}\,d\,x\,(1+a\,x^{-3})^{\frac{5}{3}}$$

Suponiendo en esta $1+a\,x^{-3}=z^3$, por ser 3 el denominador de $p=-\frac{5}{3}$, se halla

$$x=\left(\frac{(z^3-1)}{a}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

Despejada ya x, elévese á la potencia -6 que es aqui el valor de $m+n\,p+1$, y diferenciando despues hay la igualdad

$$x^{-7}\,d\,x=-\frac{1}{a^2}(z^3-1)\,z^2\,d\,z$$

sustituyendo por $x-3$ y $x^{-7}\,d\,x$ sus equivalentes, viene

$$S\,x^{-7}\,d\,x\,(1+a\,x^{-3})^{-\frac{5}{3}}=S-\frac{1}{a^2}(1-z^{-3})\,d\,z=$$

$$-\frac{1}{a^2}(z+\tfrac{1}{2}\,z^{-2})+const.$$

y si en la integral hallada se sustituye $(1+a\,x^{-3})^{\frac{1}{3}}$ por z, reemplazando tambien el primer miembro con su equivalente funcion propuesta, se tendrá

$$S\,x^{-2}\,d\,x\,(a+x^3)\,\frac{5}{3} = const. - \frac{3\,x^3+2\,a}{2\,a^2\,x\,\sqrt[3]{[\,(x^3+a)^2\,]}}$$

20. Cuando despues de hacer los reconocimientos se vea que no pertenece la espresion á algunos de los tres casos, hay que recurrir al medio de que la integral dependa de otra mas simple, segun el método de integracion por partes.

1.er caso...... $m_{\prime\prime}$ positivo.

$$S\,x^m\,d\,x\,(a+b\,x^n)^P = \frac{1}{n\,b}\,S\,x^{m-n+1} \times (a+b\,x^n)^P \times n\,b\,x^{n-1}\,d\,x = \frac{1}{n\,b\,(P+1)}\,x^{m-n+1}\,(a+b\,x^n)^{P+1}$$

$$-\frac{m-n+1}{n\,b\,(p+1)}\,S\,x^{m-n}\,d\,x\,(a+b\,x^n)^{P+1} =$$

$$\frac{1}{n\,b\,(p+1)}\,x^{m-n+1}\,(a+b\,x^n)^{P+1} - \frac{m-n+1}{n\,b\,(p+1)} \times$$

$$S\,x^{m-n}\,d\,x\,(a+b\,x^n)\,(a+b\,x^n)^P = \frac{1}{n\,b\,(p+1)}\,x^{m-n+1}$$

$$(a+b\,x^n)^{P+1} - \frac{a\,(m-n+1)}{n\,b\,(p+1)}\,S\,x^{m-n}\,dx\,(a+b\,x^n)^P$$

$$-\frac{(m-n+1)}{n\,(p+1)}\,S\,x^m\,d\,x\,(a+b\,x^n)^P$$

y reduciendo la última integral con la del primer miembro y despejando resulta

$$S\, x^m\, dx\, (a+b\,x^n)^P = \frac{x^{m-n+1}(a+b\,x^n)^{P+1}}{b\,(m+1+n\,p)} - \frac{a\,(m-n+1)}{b\,(m+1+n\,p)}\, S\, x^{m-n}\, dx\, (a+b\,x^n)^P \;\ldots\; (1)$$

2.º caso...... $m_{\prime\prime}$ negativo.

Despejando la fórmulas ((1)) la integral del segundo miembro resulta

$$S\, x^{m-n}\, dx\, (a+b\,x^n)^P = \frac{x^{m-n+1}(a+b\,x^n)^{P+1})}{a\,(m-n+1)} - \frac{b\,(m+1+n\,p)}{a\,(m-n+1)}\, S\, x^m\, dx\, (a+b\,x^n)^P$$

y cambiando $m_{\prime\prime}$ en $m+n$ tendremos la fórmula para el caso de ser m negativo

$$S\, x^{-m}\, dx\, (a+b\,x^n)^P = -\frac{x^{-m+1}(a+b\,x^n)^{P+1}}{a\,(m-1)} + \frac{b\,(-m+1+n\,p+n)}{a\,(m-1)}\, S\, x^{-m+n}\, dx\, (a+b\,x^n)^P$$

ó lo que es lo mismo

$$S\,\frac{(a+b\,x^n)^P\, dx}{x\,m} = -\frac{(a+b\,x^n)^{P+1}}{a(m-1)\,x^{m-1}} + \frac{b(np+n-m+1)}{a\,(m-1)}$$

$$S\,\frac{(a+b\,x^n)\, dx}{x^{m-n}} \;\ldots\ldots (2)$$

3.er caso...... p positivo.

En este caso conviene que p disminuya sin alterar m con cuyo objeto se dispone la integral del modo siguiente:

$$S\, x^m\, d\, x\, (a + b\, x^n)^P = S\, x^m\, d\, x\, (a + b\, x^n)^{P-1}\, (a + b\, x^n) =$$

$$a\, S\, x^m\, d\, x\, (a + b\, x^n)^{P-1} + b\, S\, x^{m+n}\, d\, x\, (a + b\, x^n)^{P-1}$$

Sustituyendo en la fórmula ((1)) por $m_{''}$ $m + n$ y por $p_{''}$ $p - 1$ resulta

$$S\, x^{m+n}\, d\, x\, (a + b\, x^n)^{P-1} = \frac{x^{m+1}\, (a + b\, x^n)^P}{b\, (m + 1 + n\, p)} -$$

$$\frac{a}{b}\, \frac{(m + 1)}{\cancel{b}(m + 1 + n\, p}\, S\, x^m\, d\, x\, (a + b\, x^n)^{P-1}$$

é introduciendo este valor es el segundo miembro de la integral propuesta, resulta

$$S\, x^m\, d\, x\, (a + b\, x^n)^P = a\, S\, x^m\, d\, x\, (a + b\, x^n)^{P-1} +$$

$$\frac{x^{m+1}\, (a + b\, x^n)^P}{m + 1 + n\, p} - \frac{a\, (m + 1)}{m + 1 + n\, p}\, S\, x^m\, d\, x\, (a + b\, x^n)^{P-1}$$

en la que reduciendo se obtiene el valor

$$S\, x^m\, d\, x\, (a + b\, x^n)^P = \frac{x^{m+1}\, (a + b\, x^n)^P}{m + 1 + n\, p} + \frac{a\, n\, p}{m+1+n\, p} \times$$

$$S\, x^m\, d\, x\, (a + b\, x^n)^{P-1} \quad \ldots\ldots (3)$$

4.° caso..... $p_{''}$ negativo.

Despejando en la fórmula ((3)) la integral del 2.° miembro resulta

$$S\, x^m\, dx\, (a+b\,x^n)^{p-1} = -\frac{x^{m+1}(a+b\,x^n)^p}{a\,n\,p} + \frac{m+1+n\,p}{a\,n\,p} S\, x^m\, dx\, (a+b\,x^n)^p$$

en la que cambiando $p_{\prime\prime}$ en $-p+1$, dá por resultado

$$S\, x^m\, dx\, (a+b\,x^n)^{-p} = \frac{x^{m+1}(a+b\,x^n)^{-p+1}}{a\,n\,(p-1)} - \frac{m+1-n\,p+n}{a\,n\,(p-1)} S\, x^m\, dx\, (a+b\,x^n)^{-p+1}$$

ó lo que es lo mismo

$$S\,\frac{x^m\,dx}{(a+b\,x^n)^p} = \frac{x^{m+1}}{an(p-1)(a+b\,x^n)^{p-1}} - \frac{m+1-np+n}{a\,n\,(p-1)} S\,\frac{x^m\,dx}{(a+b\,x^n)^{p-1}} \ldots \ldots (4)$$

21. Las cuatro fórmulas ((1)), ((2)), ((3)), ((4)), conducen á la integral de una espresion binomia $K\,x^m\,(a+b\,x^n)^p\,dx$, por medio de una série de operaciones que resultan de someter sucesivamente á ellas la integral indicada, que viene por término último de cada operacion. La fórmula ((1)) conduce á una serie en cuyos términos el exponente de x fuera del binomio va decreciendo: y en la ((2)) decrece el exponente p del binomio. Lo contrario sucede en la ((3)) y ((4)) siendo útiles por esta razon para integrar diferenciales binomias, en que es negativo uno de los exponentes m ó p.

Las fórmulas que dejamos establecidas dejan de ser aplicables solo en el caso en que $m + n p + 1$ sea cero, pero entonces la espresion

$K x^m (a + b x^n)^p d x$ está comprendida en el caso de ser

$\frac{m+1}{n} + p$ número entero pues que de $m + n p + 1 = 0$

viene $\frac{m+1}{n} + p = 0$

Si aplicamos á las dos espresiones que se van á proponer la fórmula ((1)) tendremos

$$S \frac{x^m d x}{\sqrt{(1-x^2)}} = - \frac{x^{m-1} \sqrt{(1-x^2)}}{m} + \frac{m-1}{m} S \frac{x^{m-2} d x}{\sqrt{(1-x^2)}} \quad (f)$$

$$S \frac{x^m d x}{\sqrt{(x^2 \pm 1)}} = \frac{x^{m-1} \sqrt{(x^2 \pm 1)}}{m} \mp \frac{m-1}{m} S \frac{x^{m-2} d x}{\sqrt{(x^2 \pm 1)}} \dots \quad (g)$$

Haciendo lo mismo con las integrales indicadas en los últimos términos de estas ecuaciones, vendremos por fin á que las integrales propuestas dependan de

$S \frac{x d x}{\sqrt{(1-x^2)}}$, ó $S \frac{x d x}{\sqrt{(x^2 \pm 1)}}$, cuando m es impar

$S \frac{d x}{\sqrt{(1 - x^2)}}$, ó $S \frac{d x}{\sqrt{(x^2 \pm 1)}}$, cuando m sea par,

pues el esponente m de x decrece de dos en dos unidades. Estas finales están comprendidas en las reglas de la leccion precedente.

Tambien por medio de la fórmula ((3)) se halla

$$S\frac{dx}{x^m\sqrt{(1-x^2)}}=-\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{(m-1)x^{m-1}}+$$

$$\frac{m-2}{m-1}\;S\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{(1-x^2)}}\;\ldots\ldots\;(h)$$

Cambiando m en $m-2$, se tendrá por la fórmula ((*h*)) el equivalente de la integral indicada en su último término, y la sucesion de operaciones nos conducirá por fin hasta sé final uno ú otro de los términos

$$S\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}},\ \text{si } m \text{ es par}$$

$$S\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}},\ \text{si } m \text{ es impar}$$

cuyas integrales por las reglas dadas serán

$$S\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=ang.\ (sen.=x)$$

$$S\frac{dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}=lC-l\left(\frac{1+\sqrt{(1-x^2)}}{x}\right)$$

LECCION 5.ª

Esponenciales y logarítmica.

22. Cuando las diferenciales de esta clase no son integrables por las reglas de la primera leccion, el calculador se dirige á transformarlas en algébricas. Empezando por las esponenciales, proponemos una de la fórmula

$$f(a^x)\,d\,x$$

en que $d\,x$ tiene por coeficiente cualquiera funcion de a^x. Supóngase $ax = u$, y será

$$f(a^x) = f\,u;\ x = \frac{l\,u}{l\,a};\ d\,x = \frac{d\,u}{u\,l\,a}$$

De este modo la propuesta se transforma segun se manifiesta en

$$S f(a_x)\,d\,x = \frac{1}{l\,a}\,S\,\frac{f\,u\,d\,u}{u};$$

y por tanto, sabemos *que toda funcion de una esponencial* a^x *multiplicada por la diferencial del esponente, se transforma en algébrica, por la suposicion* $a^x = u$.

Otra regla de integracion se deduce de la diferencial

$$d\,(e^x\,f\,x) = e^x\;d\,x\left(f\,x + \frac{d\,f\,x}{d\,x}\right)$$

en que representa e la base de los logaritmos neperianos; pues, integrando sale

$$S\,e^x\,d\,x\,(f\,x + \frac{d\,f\,x}{d\,x}) = e^x\,f\,x;$$

y de aqui emana la siguiente regla. *Cuando una espresion compuesta de dos factores, de los que uno sea esponencial afectado de la diferencial de su esponente, y el otro conste de dos partes, de las que una sea derivada de la otra; la integral es el producto de la esponencial por la funcion primitiva del segundo factor.* Conforme à esto será

$$\int e^x\,d\,x\,(a\,x^2 + 2\,a\,x + b) = (a\,x^2 + b)\,e^x + const.$$

Si la espresion esponencial no está incluida en las dos que anteceden, se integra por partes, asi por ejemplo, supuesta v funcion algébrica de x será

$$S\, v\, a^x\, d\, x = \frac{v\, a^x}{l\, a} - \frac{1}{l\, a} S\, a^x\, d\, v;$$

y como $d\, v$ debe contener menor potencia de x, que v en la propuesta, será mas simple que ella la integral indicada del último término; por lo cual, integrando este por partes y siguiendo en adelante llegaremos á un término final integrable.

Por ejemplo, siendo $v = x^n$ la funcion v del caso mas general que se ha discutido, sale

$$S\, x^n\, a^x\, d\, x = \frac{a^x\, x^n}{l\, a} - \frac{n}{l\, a} S\, a^x\, x^{n-1}\, d\, x$$

Esta fórmula es propia para la integracion de la propuesta cuando n sea entero positivo; pues el método mismo aplicado sucesivamente á la integral no efectuada, conducirá á un término en que no exista x y que por tanto sea integrable por la regla de las esponenciales.

Pero si n fuera negativa, convendrá hacer la integracion por partes de modo que crezca el esponente de x en las operaciones sucesivas, como

$$S\, \frac{a^x\, d\, x}{x^n} = -\frac{a^x}{(n-1)\, x^{n-1}} + \frac{l\, a}{n-1} S\, \frac{a^x\, d\, x}{x^{n-1}}$$

Aplicando la misma regla á la integral indicada que resta se debe llegar á un término en que el esponente de x sea la unidad como $S\, \dfrac{a^x\, d\, x}{x}$. Esta integral se tendrá desenvolviendo en serie $\dfrac{a^x}{x}$ por la forma de Maclaurin, multiplicando el resultado por dx; é integrando despues que esté así preparada. Las formas de la serie é integral son

$$\frac{a^x dx}{x} = \left(\frac{1}{x} + \frac{la}{1} + \frac{(la)^2}{2} x + \frac{(la)^3}{2.3} x^2 + \ldots\right) dx;$$

$$S \frac{a^x dx}{x} = lx + x\,la + \frac{x^2 (la)^2}{2.2} + \ldots.$$

Este método de preparar una diferencial descomponiéndola en muchas partes integrables, se emplea con frecuencia en toda clase de funciones.

Si fuese n fraccionario en la esponencial de que se trata, el término último contendrá x elevada á un esponente cuyo valor se hallará entre cero y la unidad positiva ó negativa. En tal caso, se hará el desarrollo. y multiplicando despues los términos de este por dx, la suma de sus integrales, será la del término final espresado.

23. La funcion logarítmica $v\,dx\,(lx)^n$ en que v es funcion algébrica de x, se integra por partes á fin de hallar

$$S\,v\,dx\,(lx)^n = (lx)^n\,S\,v\,dx -$$

$$n\,S\left[(lx)^{n-1}\frac{dx}{x}\;S\,v\,dx\right]$$

y como se supone conocido $S\,v\,dx$ por las reglas dadas, la integracion de la propuesta dependerá de otra semejante á ella que es el último término; y la forma de este indica que al fin se ha de llegar á uno afectado de $(lx)^0$ cuando n sea entero positivo. Suponiendo por ejemplo $v = x^m$, será

$$S\,x^m (lx)^n\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(lx)^n -$$

$$\frac{n}{m+1}\,S\,(lx)^{n-1}\,x^m\,dx$$

Mas cuando n sea entero negativo, la descomposicion de factores para integrar ha de hacerse de otro modo, segun manifiesta la ecuacion

$$v(lx)^n\,dx = vx(lx)^n \frac{dx}{x};$$

y por ser $S(lx)^n \frac{dx}{x} = \frac{(lx)^{n+1}}{n+1}$, tendremos la fórmula

$$S\,vx(lx)^{-n}\,dx = -\frac{vx}{n-1}(lx)^{-n+1} + \frac{1}{n-1} S(lx)^{-n+1}\,d(vx)$$

Fácil es conocer que del procedimiento resultará un término final, à que no pueda ser aplicada la misma fórmula de integracion; y para que todo lo de este caso se haga mas visible, nos referiremos à un ejemplo. Sea $v = x^m$ en la espresion general; y segun ella tendremos

$$S\frac{x^m\,dx}{(lx)^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)(lx)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} S\frac{x^m}{(lx)^{n-1}}\,dx$$

El método conducirá al término final $S\frac{x^m\,dx}{lx}$; y para su integracion supóngase $x^{m+1} = z$ de donde $(m+1)\,lx = lz$, y de aqui $lx = \frac{lz}{m+1}$. La diferencia de esta última ecuacion se reduce á $x^m\, d\, x = \frac{d\, z}{m+1}$, cuyo segundo miembro se ha de sustituir por $x^m\, d\, x$, asi como el de la anterior por $l\, x$ en la espresion del término final que se trata de integrar; y haciendo despues $l\, z = u$ se tiene

$$S\frac{x^m\, d\, x}{l\, x} = S\frac{d\, z}{l\, z} = S\frac{e^u\, d\, u}{u}$$

integral que se halla desenvolviendo en serie e^u como ya se sabe.

Cuando n es fraccionario, los procedimientos conducen al término final en que el esponente de $l\, x$ se hallará entre 0 y la unidad positiva ó negativa; y la integral de dicho término final se obtendrá tambien por serie.

LECCION 6.ª

Funciones circulares.

24. Pasemos á las funciones circulares no comprendidas en la primera leccion.

Cuando estàn afectadas del ángulo funcion, con facilidad se consigue que esta desaparezca; porque su diferencial es cantidad algébrica, é integrando por partes de modo que en la primera operacion sea constante el àngulo, resultará una funcion sin él; como por ejemplo sucede en

$$S\, v\, d\, x\, ang.\,(sen. = x) = ang.\,(sen. = x)\, S\, v\, d\, x - \frac{S\, d\, x\, S\, v\, d\, x}{\sqrt{(1 - x^2)}}$$

Libre ya la propuesta de la dificultad principal, su integracion depende de las indicadas que hay en ella, practicables por medios que se conocen.

Del mismo modo se hallan las integrales de

$$v\,d\,x\ ang.\ (cos. = x)\ \text{y}\ v\,d\,x\ ang.\ (tang. = x)$$

teniendo presente las diferenciales (34) de $ang.\ (cos. = x)$ y $ang.\ (tang. = x)$ pues la integracion por partes conduce á los resultados

$$S\,v\,d\,x\ ang.\ (cos. = x) = ang.\ (cos. = x)\,S\,v\,d\,x + S\frac{d\,x\,S\,v\,d\,x}{\sqrt{(1 - x^2)}}$$

$$S\,v\,d\,x\ ang.\ (tang. = x) = ang.\ (tang. = x)\,S\,v\,d\,x - S\frac{d\,x\,S\,v\,d\,x}{1 + x^2}$$

Tanto en estos dos casos como en el primero, vemos que la cuestion se ha convertido en la de integrar funciones algébricas, con tal que $S\,v\,d\,x$ fuera de esta naturaleza.

17. Cuando la línea trigonométrica es funcion del arco, entre las muchas funciones diferenciales de esta naturaleza que pueden presentarse para la integracion, merece particular atencion por las diferentes espresiones formulares que de ella se deducen; la de la forma

$$v = S\,d\,x,\ sen.^m\,x\ cos.^n\,x$$

la cual, no puede ser integrada desde luego en forma finita, siendo preciso valerse del medio de hacerla depender de otra mas simple; bien reduciéndola á la forma de integrales binomias, ó bien aplicándola directamente la teoría de la integracion por partes.

Para integrarla por el primer medio bastará simplemente hacer $sen.\,x = z$, á que se sigue $cos.\,x = \sqrt{1 - z^2}$

$$d\,x = \frac{d\,z}{\sqrt{1 - z^2}},$$ y por lo tanto

$$S\,dx.\,sen.^{m}x.\,cos.^{n}\,x = S\,dz.\,z^{m}\,(1 - z^{2})^{\frac{n-1}{2}}$$

la cual, siendo n número impar, será racional y desarrollando el binomio, se hallarán las integrales parciales por la regla sencillla de potencias. En el caso de no ser n número impar, será preciso recurrir á las fórmulas de reduccion de las integrales binomias, escogiendo de ellas, la que corresponda á los valores y signos de los esponentes m y n, pero el siguiente método de integracion por partes, conduce mas directamente al resultado, razon, por la que le emplearemos con preferencia para deducir la espresion de la integral propuesta y las de otras que de ellas se derivan. A este fin, distinguiremos todos los casos que pueden ocurrir, dependientes de la naturaleza y valor de los esponentes m y n.

1.° Siendo m positivo y queriendo que desminuya sin que n altere, dispóngase la integral propuesta bajo la forma

$$v = S\,sen.^{m-1}\,x\,(\,cos.^{n}\,x\,sen.\,x\,d\,x\,)$$

de donde

$$v = -\frac{sen.^{m-1}\,x\,cos.^{n+1}\,x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\,S\,dx.\,sen.^{m-2}\,x\,cos.^{n+2}\,x$$

ó lo que es lo mismo

$$v = -\frac{sen.^{m-1}\,x\,cos.^{n+1}\,x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\,S\,dx\,sen.^{m-2}\,x\,cos.^{n}\,x\,(1 - sen.^{2}\,x) =$$

$$-\frac{sen.^{m-1}\, x \cos.^{n+1}\, x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\, S\, d\, x\, sen.^{m-2}\, x \cos.^{n}\, x - \frac{m-1}{n+1}\, v$$

y despejando v

$$v = S\, d\, x\, sen.^{m}\, x \cos.^{n}\, x = -\frac{sen.^{m-1}\, x \cos.^{n+1}\, x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\, S\, d\, x\, sen.^{m-2}\, x \cos.^{n}\, x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

2.° En el caso de ser n positivo y de quererse que disminuya este esponente sin aumentar m se dispondrá dicha espresion en la forma:

$$v = S \cos.^{n-1}\, x\, (sen.^{m}\, x \cos.\, x\, d\, x)$$

la que integrada del mismo modo que la anterior, da por resultado

$$v = S\, d\, x\, sen.^{m}\, x \cos.^{n}\, x = \frac{sen.^{m+1}\, x \cos.^{n-1}\, x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\, S\, d\, x\, sen.^{m}\, x \cos.^{n-2}\, x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

3.° Si el esponente m fuera negativo, despejando en la fórmula ((1)) la integral del segundo miembro resulta

$$S\, d\, x\, sen.^{m-2}\, x \cos.^{n}\, x = \frac{sen.^{m-1}\, x \cos.^{n+1}\, x}{m-1} + \frac{m+n}{m-1}\, S\, d\, x\, sen.^{m}\, x \cos.^{n}\, x$$

y cambiando m en $-m+2$

:

resulta

$$S\frac{\cos.^{n} x}{\text{sen.}^{m} x}dx = -\frac{\cos.^{n+1} x}{(m-1)\,\text{sen.}^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1}\,S\,dx\frac{\cos.^{n} x}{\text{sen.}^{m-2} x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

4.º Si el esponente n fuese negativo, despejando en la fórmula (2) la integral del segundo miembro resulta

$$S\,dx\,\text{sen.}^{m} x\cos.^{n-2} x = -\frac{\text{sen.}^{m+1} x\cos.^{n-1} x}{n-1} + \frac{m+n}{n-1}\,S\,dx\,\text{sen.}^{m} x\cos.^{n} x.$$

y cambiando n en $-n+2$ resulta

$$S\,dx\frac{\text{sen.}^{m} x}{\cos.^{n} x} = \frac{\text{sen.}^{m+1} x}{(n-1)\cos.^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\,S\,dx\frac{\text{sen.}^{m} x}{\cos.^{n-2} x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

5.º Si en la espresion de donde se dedujo la fórmula ((3)) se sustituye por n „ $-m$ resulta

$$S\,dx\frac{\text{sen.}^{m-2} x}{\cos.^{m} x} = S\,dx\frac{\text{sen.}^{m-2} x}{\cos.^{n-2} x}\times\frac{1}{\cos.^{2} x} =$$

$$S\,dx\,\text{tang.}^{m-2} x(1+\text{tang.}^{2} x) = \frac{\text{sen.}^{n-1} x}{(m-1)\cos.^{m-1} x}$$

$$S\,dx\,tang.^{m-2}x + S\,dx\,tang.^{m}x = \frac{sen.^{m-1}x}{(m-1)\,cos.^{m-1}x} = \frac{tang.^{m-1}x}{m-1} \text{ de donde}$$

$$S\,dx\,tang.^{m}x = \frac{tang.^{m-1}x}{m-1} - S\,dx\,tang.^{m-2}x.(5)$$

6.° Por último, si en la ecuacion que produjo la fórmula ((4)) se sustituye por $m_{,,} - n_{,,}$ resulta, siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior.

$$S\,dx\,cot.^{n-2}x\,(1 + cot.^{2}x) = S\,dx\,cot.^{n-2}x +$$

$$S\,dx.\,cot.^{n}x = -\frac{cot.^{n-2}x}{n-1} \text{ y por lo tanto}$$

$$S\,dx\,cot.^{n}x = -\frac{cot.^{n-2}x}{n-1} - S\,dx\,cot.^{n-2}x \ldots (6)$$

Recopilando las seis fórmulas halladas, y ademas las que de ellas se deducen, haciendo respectivamente nulos los esponentes m y n resulta el siguiente cuadro

m positivo .... $S\,dx\,sen.^{m}x\,cos.^{n}x = -$

$$\frac{sen.^{m-1}x\,cos.^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} S\,dx\,sen.^{m-2}x\,cos.^{n}x..(1)$$

n positivo...................... $S\,dx\,sen.^{m}x\,cos.^{n}x =$

$$\frac{sen.^{m+1}x\,cos.^{n-1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} S\,dx\,sen.^{m}x\,cos.^{n-2}x \ldots (2)$$

$$m \text{ negativo} \ldots\ S\,d\,x\,\frac{\cos.^{n}\,x}{\text{sen}.^{m}\,x} = -\,\frac{\cos.^{n+1}\,x}{(m-1)\,\text{sen}.^{m-1}\,x} +$$

$$\frac{m-n-2}{m-1}\,S\,d\,x\,\frac{\cos.^{n}\,x}{\text{sen}.^{m-2}\,x} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$n \text{ negativo} \ldots\ S\,d\,x\,\frac{\text{sen}.^{m}\,x}{\cos.^{n}\,x} = \frac{\text{sen}.^{m+1}\,x}{(n-1)\cos^{n-1}\,x} +$$

$$\frac{m-n+2}{n-1}\,S\,d\,x\,\frac{\text{sen}.^{m}\,x}{\cos.^{n-2}\,x} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\left.\begin{matrix} m \text{ positivo} \\ n = -m \end{matrix}\right\}\ S\,d\,x\,\tan g.^{m}\,x = \frac{\tan g.^{m-1}\,x}{m-1} -$$

$$S\,d\,x\,\tan g.^{m-2}\,x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$\left.\begin{matrix} n \text{ positivo} \\ m = -n \end{matrix}\right\}\ S\,d\,x\,\cot.^{n}\,x = -\,\frac{\cot.^{n-1}\,x}{n-1} -$$

$$S\,d\,x\,\text{cotang}.^{n-2}\,x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\left.\begin{matrix} m = o \\ n \text{ positivo} \ldots \end{matrix}\right\}\ S\,d\,x\,\cos.^{n}\,x = \frac{\text{sen}.\,x\,\cos.^{n-1}\,x}{n} +$$

$$\frac{n-1}{n}\,S\,d\,x\,\cos.^{n-2}\,x \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\left.\begin{matrix} m = o \\ n \text{ negativo} \ldots \end{matrix}\right\}\ S\,\frac{d\,x}{\cos.^{n}\,x} = \frac{\text{sen}.\,x}{(n-1)\cos.^{n-1}\,x} +$$

$$\frac{n-2}{n-1}\,S\,\frac{d\,x}{\cos.^{n-2}\,x} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

m positivo ... $\left.\begin{matrix} \\ n=o\,\ldots\ldots\end{matrix}\right\}$ $S\,d\,x\,sen.^{m}\,x = -\dfrac{sen.^{m-1}\,x\,cos.\,x}{m} + \dfrac{m-1}{m}\,S\,d\,x\,sen.^{m-2}\,x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$

m negativo ... $\left.\begin{matrix} \\ n=o\,\ldots\ldots\end{matrix}\right\}$ $S\dfrac{d\,x}{sen.^{m}\,x} = -\dfrac{cos.\,x}{(n-1)\,sen.^{m-1}\,x} + \dfrac{m-2}{m-1}\,S\dfrac{d\,x}{sen.^{m-2}\,x} \ldots\ldots\ \ldots\ldots (10)$

Por medio de estas fórmulas de reduccion, se podrán efectuar las integrales propuestas, haciéndolas depender en último análixis de las siguientes; en el concepto de ser enteros los esponentes m y n.

$$S\,d\,x = x + const.$$

$$S\frac{d\,x}{cos.\,x} = l\,tang.\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) + const.$$

$$S\,cos.\,x\,d\,x = sen.\,x + const.$$

$$S\frac{sen.\,x.}{cos.\,x}\,d\,x = const. - l.\,cos.\,x.$$

$$S\,sen.\,x\,d\,x = -\,cos.\,x + const.$$

$$S\frac{cos.\,x}{sen.\,x}\,d\,x = l\,sen.\,x + const.$$

$$S\,sen.\,x\,cos.\,x\,d\,x = \frac{1}{2}\,sen.^{2}\,x + const.$$

$$S\frac{d\,x}{sen.\,x\,cos.\,x} = l\,tang.\,x + const.$$

$$S\frac{dx}{sen.\,x}=l\,tang.\,\frac{1}{2}\,x+const.$$

de las cuales solo ofrecen alguna dificultad en su integracion, las que se consideran á continuacion

$S\dfrac{dx}{sen.\,x}\Big\}$ Haciendo $cos.\,x=z$, y por lo tanto $sen.\,x=$

$\sqrt{1-z^2}$,, $dx=-\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$,, resulta

$$S\frac{dx}{sen.\,x}=-S\frac{dz}{1-z^2}=-S\,dz\left(\frac{A}{1+z}+\frac{B}{1-z}\right)=$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{S\frac{-dz}{1+z}+S\frac{-dz}{1-z}\right\}=\tfrac{1}{2}\,l\frac{1-z}{1+z}=l\,\tfrac{1}{2}\left(\frac{1-cos.\,x}{1+cos.\,x}\right)$$

y teniendo presente la fórmula trigonomètrica $tang.^2\,\frac{1}{2}\,x=\dfrac{1-cos.\,x}{1+cos.\,x}$ será

$$S\frac{dx}{sen.\,x}=l\,tang.\,\tfrac{1}{2}\,x+const.$$

$S\dfrac{dx}{cos.\,x}\Big\}$ Haciendo del mismo modo ,, $sen.\,x=z$,, á que se sigue $cos.\,x=\sqrt{1-z^2}$,, $dx=\dfrac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ se obtiene siguiendo el mismo procedimiento

$$S\frac{dx}{cos.\,x}=S\frac{dz}{1-z^2}=\tfrac{1}{2}\,l\frac{1+z}{1-z}=l\left(\frac{1+sen.\,x}{1-sen.\,x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

y en virtud de la fórmula de trigonometría

$$tang.^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)=\frac{1+sen.\,x}{1-sen.\,x}$$

$$S\frac{d\,x}{cos.\,x}=l\,tang.\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+const.$$

$$S\frac{d\,x}{sen.\,x\,cos.\,x}=S\frac{d\,x\,(cos.^2 x+sen.^2 x)}{sen.\,x\,cos.\,x}=$$

$$S\frac{cos.\,x}{sen.\,x}d\,x+S\frac{sen.\,x}{cos.\,x}d\,x=l\,sen.\,x-l\,cos.\,x+const.=$$

$l\,tang.\,x+const.$

En el caso de que los esponentes m y n sean fraccionarios, las últimas integrales de que dependerán las propuestas serán de potencias fraccionarias del seno y del coseno, y habrá que apelar para su integracion, al método de integracion por series.

Haciendo aplicacion de la fórmula ((9)) á la integral

$$\Sigma=\frac{4}{3}E\,r^4\,S_0^{\frac{\pi}{2}}\,sen.^4\,x\,d\,x$$

resultará (*)

$$\Sigma=\frac{4}{3}E\,r^4\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=E\frac{\pi\,r^4}{4}$$

(*) Hemos presentado esta sencilla aplicacion, por que el valor de Σ espresa el momento de resistencia á la flexion de un sólido cuya seccion transversal sea un círculo. (Elementos de artillería de Senderos, tomo 1.°, apéndice al art. 3.° párrafo 8.°)

LECCION 7.ª

Integracion por series.

25. La teoría general de series, y el teorema de Maclaurin, proporcionan el medio de desenvolver en serie una funcion por potencias enteras y ascendentes de su variable, y por consiguiente, el medio de reducir á una sucesion de integrales de potencias una funcion dada: y asi sucede en efecto, porque siendo:

$$F(x) = F(o) + x F'(o) + \frac{x^2}{2} F''(o) + \frac{x^3}{2.3} F'''(o) + \ldots.$$

la forma general de dicho desarrollo, es evidente que la integral de una funcion diferencial que lo admita, estará formulada en la espresion

$$S F(x)\, dx = C + x F(o) + \frac{x^2}{2} F'(o) + \frac{x^3}{2.3} F''(o) + \frac{x^4}{2.3.4} F'''(o) + \ldots.$$

siendo C la constante adictiva.

Cuando la funcion por incurrir las derivadas en el infinito al hacer la variable nula, no es desarrollable por potencias enteras de esta variable, pero si admite el desenvolvimiento por potencias fraccionarias bien por medio del desarrollo del binomio de Newton, ó por cualquiera otro método algébrico; en este caso la cuestion se resuelve del mismo modo, y la funcion se halla sujeta á las mismas condiciones en su integracion.

Pero ni en uno ni en otro caso la cuestion quedaria resuelta, si la serie que produce la integracion no fuese convergente; pues solo con esta condicion se puede valuar la funcion primitiva con relacion al valor de su variable. Conviene advertir, que dicha serie será convergente, siempre que lo sea el desarrollo de la diferencial que la produzca, por la razon de aumentar una unidad el esponente de la variable y resultar dividida por este mismo esponente, la integral de cada término de dicho desarrollo.

Cuando la operacion de integrar por series una funcion produce una serie convergente, este método es de muy fácil aplicacion y el mas sencillo á veces que se puede emplear, para obtener el desenvolvimiento de una funcion por potencias de su variable.

Tal sucede en las espresiones

$$l\,(1+x)=S\,d\,x\,\frac{1}{1+x}=S\,d\,x\,(1-x+x^2-x^3+x^4..)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots.$$

$$arc.\ tang.\ x=S\,d\,x\,\frac{1}{1+x^2}=S\,d\,x\,(1-x^2+x^4-x^6+x^8\ldots.)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}\ldots..$$

$$arc.\ sen.\ x=S\,d\,x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=S\,d\,x(1+\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1.\,3}{2.\,4}x^4+\frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}x^6+\ldots)=x+\tfrac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.\,3}{2.\,4}\times\frac{x^5}{5}+\frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}\times\frac{x^7}{7}+$$

sin constantes adictivas, por ser nula la funcion á la par que la variable.

Cuando por el contrario, la serie no es convergente, entonces es preciso apelar al medio de hacerla de esta naturaleza por medio de convenientes transformaciones que dificultan y complican bastante la integracion.

LECCION 8.ª

Integrales definidas.

26. Supongamos que $f(x)\,d\,x$ sea una diferencial cualquiera de la variable x, y que $F(x)$ sea su integral, esto es la funcion que tiene por diferencial $f(x)\,d\,x$, ó si se quiere mas generalidad que $d\,[C + F\,x] = f(x)\,d\,x$ siendo C una constante enteramente arbitraria: la funcion $F(x)$ se podrá deducir de la diferencial $f(x)\,d\,x$, cuando esta sea dada, en virtud de alguno de los métodos espuestos en los artículos que preceden. Esto supuesto, y sabiendo que una funcion cualquiera se puede siempre mirar como la suma de un número infinito de valores de su diferencial; la espresion $C + F(x)$ representa en general la suma de un número infinito de valores de la diferencial $f(x)\,d\,x$: mientras la constante C permanezca indeterminada es igualmente indeterminado el valor de x desde el cual se ha principiado á tomar esta suma, y por lo que respecta el valor de x, en el cual la misma suma concluye, es el mismo que tiene esta variable en la espresion $F(x)$.

La resolucion de un gran número de cuestiones importantes exige con frecuencia el conocimiento de la suma de un número indefinido de valores de una diferencial propuesta, pero contada esta suma desde un cierto valor x_0 de x, desde el cual se supone que se suman unas con otras todas las diferenciales sucesivas, hasta otro valor fijo x_n de la misma variable, pasado el cual no se toman ya en cuenta las diferenciales que siguen: esta suma se espresa analiticamente con toda generalidad de este modo

$$S_{x_0}^{x_n} d\,x\,f(x)$$

poniendo en la parte inferior del signo *S* el valor de la variable, desde el cual se principian á sumar las diferenciales, y en la parte superior el valor de la variable en el cual dicha suma se termina. Esta espresion es lo que se llama una *integral definida*, cuyo nombre significa que la integral ó la suma de las diferenciales está tomada entre límites determinados: x_0 es el límite inferior y x_n el limite superior de la integral. Las integrales definidas constituyen, como veremos despues, una especie de funciones de un uso muy frecuente en el análixis.

En contraposicion á las integrales definidas se dá tambien con frecuencia el nombre de *integral indefinida* á la espresion $C+F(x)$ de cuya investigacion nos hemos ocupado en los artículos precedentes, que satisface de la manera mas general á la condicion de tener por diferencial á $f(x)\,d\,x$ y comprender todos los valores de su diferencial contados desde uno indeterminado de x hasta el arbitrario que se quiera dar á esta variable en la funcion $F(x)$. Ahora bien, conocida la integral indefinida de una diferencial propuesta, se puede siempre deducir inmediatamente el valor de una integral definida de la misma diferencial entre límites cualesquiera: en efecto, si se hace $x=x_n$ en la espresion $C+F(x)$, se tendrá $C+F(x_0)$ que espresa la suma de los valores de la diferencial $f(x)\,d\,x$ desde un cierto valor indeterminado de x hasta el valor x_0; y si se hace $x=x_n$ en la misma espresion, sin variar la constante c, se tendrá $C+F(x_n)$ que espresará la suma de los valores de esta diferencial contados desde el mismo valor indeterminado de x, hasta el valor x_n, luego la diferencia entre estas dos espresiones que es $F(x_n)-F(x_0)$ representará la suma de los valores de la diferencial comprendidos entre el que corresponde á x_0 y el que corresponde á x_n.

Se vé, pues, por todo lo que precede, que la ecuacion $d\ F\ (x) = f\ (x)\ d\ x$ lleva siempre consigo esta otra

$$S_{x_0}^{x_n}\ d\ x\ f\ (x) = F\ (x_n) - F\ (x_0)$$

es decir, que el valor de la integral definida se halla restando uno de otro los dos valores que toma la integral indefinida, cuando en ella se suponen á la variable los valores correspondientes á los límites inferior y superior, entre los cuales se quiere tomar la integral.

27. Resulta de todo esto que es siempre fácil obtener el valor numérico de una integral definida $S_{x_0}^{x_n}\ d\ x\ f\ (x)$ cuando se puede espresar en términos finitos ó en una serie convergente el valor de la funcion $F\ (x)$ cuya diferencial es $d\ x\ f\ (x)$. Como esto último no es siempre posible cuando no se puede conseguir, hay necesidad de calcular el valor numérico de la integral por métodos de aproximacion de que hablaremos mas adelante. Aun en los casos en que la funcion $F\ (x)$ se puede obtener bajo una forma finita, suelen ser muchas veces preferibles los métodos de aproximacion á los que conducen directamente á la determinacion de la funcion.

28. Las nociones que preceden se hacen muy sensibles si se considera á la variable x como la abscisa y á la funcion $F\ (x)$, ó mejor aun á la $[\ C + F\ (x)\ ]$ como la ordenada de una curva: una diferencial cualquiera $d\ [C + F\ (x)] = f\ (x)\ d\ x$ representa entonces el incremento infinitamente pequeño que recibe la ordenada cuando se pasa de la abscisa x á la inmediatamente próxima $x + d\ x$: la suma de todos los incrementos que sucesivamente recibe la ordenada desde un cierto valor x_0 de x hasta otro valor x_n es evidentemente igual al esceso que lleva la ordenada correspondiente al último límite á la que corresponde el primero, es decir que es $y_n - y_0$ ó bien $F\ (x_n) - F\ (x_0)$.

29. Debe tenerse ademas muy presente que la ecuacion $S_{x_0}^{x_n} dx\, f(x) = F(x_n) - F(x_0)$ puesta anteriormente y en la que $F(x)$ es tal que $d\,F(x) = dx\, f(x)$ no se verifica en el caso en que x ó $F(x)$ se hagan infinitas para un valor de x, comprendido entre los límites x_0 y x_n de la integral definida. En efecto, cuando presentamos las consideraciones, de las cuales vinimos á inferir que una integral cualquiera representa siempre la suma de un número infinito de valores de la diferencial, no podiamos menos de mirar como escluido el caso en que las funciones de que se trata tomasen valores infinitos.

Cuando se pide el valor de una integral definida $S_{x_0}^{x_n} dx\, f(x)$ y sucede que la funcion $F(x)$ se hace infinita para un cierto valor a de x comprendido entre los límites x_0 y x_n de la integral, no se puede en general obtener el valor que se busca, sino dividiendo la integral en dos partes, de las cuales la primera acaba, y la segunda principia en el valor $x = a$, es decir, considerando separadamente las dos integrales definidas

$$S_{x_0}^{a} dx\, f(x) \text{ y } S_{a}^{x_n} dx\, f(x)$$

cuya suma dará el valor pedido. Esta suma tendrá un valor infinito, si las dos partes son infinitas con el mismo signo, ó si solo uno de ellas lo es: tendrà un valor indeterminado, si las dos partes son infinitas y tienen signos contrarios; y por último tendrá un valor determinado y finito, si las dos partes tienen valores finitos.

Análogamente si entre los límites x_0 y x_n hubiese dos valores a y a_1 para los cuales $F(x)$ se hiciese infinita, entonces se debería dividir la integral definida propuesta en tres partes de este modo

$$S_{x_0}^{a} dx\, f(x) + S_{a}^{a_1} dx\, f(x) + S_{a_1}^{x_n} dx\, f(x)$$

y determinar por separado el valor de cada parte. Del mismo modo se procederia, si fuese mayor el número de valores intermedios que hiciesen infinita á $F(x)$

30. De lo dicho resulta que lo mismo es cambiar el signo á una integral definida que invertir el órden de los límites dentro de los cuales se considera tomada: asi

$$S_{x_0}^{x_n} dx f(x) = -S_{x_n}^{x_0} dx f(x)$$

Tambien se puede cambiar la variable x que está bajo el signo de integral definida, con tal que al mismo tiempo se varien los límites de tal modo que conserven los mismos valores absolutos. Si, por ejemplo, en la espresion anterior se quiere reemplazar la variable x por otra nueva t, estableciendo entre ambas una cierta relacion $x = \varphi(t)$ entonces se deberá poner en lugar dx, $d\varphi(t)$ y en lugar x_0 y de x_n los valores de t que se deducirian respectivamente de las ecuaciones $x_0 = \varphi(t)$, $x_n = \varphi(t)$

LECCION 9.ª

Aplicacion de las integrales definidas á la determinacion de las longitudes de las curvas y á la medicion de las áreas y volúmenes.

1.º Áreas de las curvas planas.

31. Considerando una curva cualquiera referida á ejes rectangulares, propongámonos determinar su área, esto es, el espacio comprendido entre el eje, la curva y dos ordenadas cualesquiera. Sea $y = f(x)$ la ecuacion de la curva x_0 y x_n las abscisas que limitan el área que se quiere determinar: vimos que designando por u el àrea contada desde un origen cualquiera hasta la ordenada correspondiente á la abscisa x, la diferencial de dicha área estaba espresada por

$$du = y\,dx$$

Ahora bien, el área que queremos determinar es la suma de los infinitos valores que toma la $d\,u$, cuando en ella se dán á x todos los valores comprendidos entre x_0 y x_n ; luego, segun lo dicho en el artículo anterior, esta área estará espresada por la integral definida $S_{x_0}^{x_n}\, y\ d\ x$, entendiéndose que x_0 y x_n son en ellas dos números dados que espresan los valores de la abscisa correspondientes á las posiciones de las dos ordenadas que terminan el área. El resultado, pues de la operacion indicada en la espresion analítica anterior será tambien el número determinado que representará el valor de esta área.

Puede tambien imaginarse que solo sea dado y fijo el primer límite x_0 y el segundo x_n quede indeterminado y arbitrario; entonces este segundo límite, se representará simplemente por x, y el resultado de la integracion será una funcion de x que significará el área que principia á contarse desde la ordenada correspondiente á la abscisa x_0 y concluye en la ordenada correspondiente á una abscisa arbitraria é indeterminada x. Espresando tambien por u este área, debemos decir

$$u = S_{x_0}^{x}\, y\ d\ x$$

32. Si la curva propuesta estuviese referida á coordenadas polares, su ecuacion seria dada bajo la forma $r = f\,(u)$ siendo u el ángulo comprendido entre el rádio vector cuya longitud representa r y una linea fija.

El área sería entonces el espacio triangular comprendido entre la curva y dos rádios vectores que formasen respectivamente con el eje fijo los ángulos u_0 y u; y como hemos visto que su diferencial es $d\ s = \frac{1}{2}\, r^2\ d\ u$ se tendrá aquí

$$s = \tfrac{1}{2}\, S_{u_0}^{u}\, r^2\, d\,u$$

33. Cuadratura del círculo.

Primer método.

$$x^2+y^2=r^2,, \; y=\sqrt{r^2-x^2} \quad u=S_{x_0}^{x_1} y\,dx=S_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{r^2-x^2}$$

Integral indefinida $S\,dx\sqrt{r^2-x^2}=S\,dx\dfrac{r^2-x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}=$

$$r^2 S\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}-S\frac{x^2\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=r^2 S\frac{\frac{dx}{r}}{\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}}+$$

$$S\,x\times\frac{-2x\,dx}{2\sqrt{r^2-x^2}}=r^2\ ang.\ sen.\ \frac{x}{r}+x\sqrt{r^2-x^2}-$$

$S\,dx\sqrt{r^2-x^2}$ y despejando $S\,dx\sqrt{r^2-x^2}$ resulta

$$S\,dx\sqrt{r^2-x^2}=\frac{r^2}{2}\ ang.\ sen.\ \frac{x}{r}+\frac{1}{2}\,x\sqrt{r^2-x^2}$$ y por

consiguiente la integral definida entre los límites $x_0\,x_1$, será

$$S_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{r^2-x^2}=\frac{r^2}{2}\left\{ang.\ sen.=\frac{x_1}{r}-ang.\ sen.=\frac{x_0}{r}\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{x_1\sqrt{r^2-x_1^2}-x_0\sqrt{r^2-x_0^2}\right\}$$

El área del cuadrante corresponde á los límites $x_0=o$ $x_1=r$ tiene por valor

$$\frac{r^2}{2}(ang.\ sen.=1-ang.\ sen.=o)=\frac{\pi r^2}{4},,$$ de donde área del círculo $=\pi r^2$

Segundo método.

$$x^2+y^2=r^2,\ y=\sqrt{r^2-x^2}\ \ldots\ u=S_{x_0}^{x_1} y\,dx=$$

$S_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{r^2-x^2}$ y haciendo $\sqrt{r^2-x^2}=tx$, á lo que es consiguiente $r^2-x^2=t^2x^2,\ x^2=\dfrac{r^2}{1+t^2}$, resulta la integral indefinida

$$S\,dx\sqrt{r^2-x^2}=St\times x\,dx=\frac{tx^2}{2}-\frac{1}{2}Sx^2dt=$$

$$\frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2}-\frac{r^2}{2}S\frac{dt}{1+t^2}=\frac{x\sqrt{r^2-x^2}}{2}-\frac{r^2}{2}\text{arc. tang.}\frac{\sqrt{r^2-x^2}}{x}$$

y por lo tanto la integral definida entre los límites $x_0,\ x_1$

$$S_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{r^2-x^2}=\tfrac{1}{2}\left\{x_1\sqrt{r^2-x_1^2}-x_0\sqrt{r^2-x_0^2}-r^2\left(\text{arc. tang.}=\frac{\sqrt{r^2-x_1^2}}{x^1}-\text{arc. tang.}\frac{\sqrt{r^2-x_0^2}}{x^0}\right)\right\}$$

El área del cuadrante $=\frac{1}{2}r^2\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi r^2}{4}$ y por consiguiente el área del círculo $=\pi r^2$

34. Sea por ejemplo, la elipse referida á sus diámetros rectángulares cuya ecuacion es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ ó } y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \ \ldots\ldots \text{ (figura 1.}^{\text{a}}\text{)}$$

siendo a y b los semidiámetros $O\,A$ y $o\,B$ el área $o\,B\,m\,p$ estará representada segun lo dicho (31) por

$$u=\frac{b}{a}\,S_0^x\,d\,x\sqrt{a^2-x^2}$$

siendo x la abscisa $o\,p$. Para obtener el valor de esta integral, consideremos primero la indefinida $S\,d\,x\sqrt{a^2-x^2}$. Esta se podría hacer racional; ó bien, y esto será mas sencillo, ponerla bajo la forma

$S\,d\,x\dfrac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ considerada descompuesta en las dos partes

$S\,d\,x\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+S\,d\,x\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$ de las cuales la primera

se integra inmediatamente segun lo dicho y la segunda considerándola como una diferencial binomia, y procediendo semejantemente à lo que se practicó (33); pero es mejor y mas sencillo que todo esto suponer $\sqrt{a^2-x^2}=t\,x$ que dá $x^2=\dfrac{a^2}{1+t^2}$, siendo t una nueva variable, y se tiene

$$S\,d\,x\sqrt{a^2-x^2}=S\,t\,x\,d\,x=\tfrac{1}{2}\,t\,x^2-\tfrac{1}{2}\,S\,x^2\,d\,t,=$$

$$\tfrac{1}{2}\,t\,x^2-\frac{a^2}{2}\,S\frac{d\,t}{1+t^2}=C+\tfrac{1}{2}\,t\,x^2-\frac{a^2}{2}\,arc.$$

($tang.=t$) : poniendo por t su valor

$$S\,d\,x\sqrt{a^2-x^2}=C+\tfrac{1}{2}\,x\sqrt{a^2-x^2}-$$

$$\tfrac{1}{2}a^2\,arc.\left(tang = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

Determinando la integral entre los limites cero y x

$$S_0^x dx\sqrt{a^2-x^2} = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2} - arc.\left(tang. = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)\right) = (^*)\ \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\,arc.\left(sen. = \frac{x}{a}\right)$$

luego la espresion del área pedida será

$$u = \frac{b\,x}{2\,a}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a\,b}{2}\,arc.\left(sen. = \frac{x}{a}\right) = \frac{x\,y}{2} + \frac{a\,b}{2}\,arc.\left(sen. = \frac{x}{a}\right)$$

(*) Para determinar la constante, observaremos que cuando $x = o$ (que es el límite inferior) la integral ó sea el área que se busca no existe, luego, poniendo por x cero en la integral que dá el cálculo deberemos igualar á cero, y despejando C, resulta $C = \frac{a^2}{2}\,arc.\,(tang. = \infty) = \frac{a^2}{2} \times \frac{\pi}{2}$. Puesto este valor de c en la integral indefinida, y sacando el factor comun $\frac{a^2}{2}$, resulta la integral definida tomada desde cero hasta un valor x que queda sin determinar.

Como $\frac{x\,y}{2}$ es el área del triángulo $o\ m\ p$, se vé que el área del sector $o\ B\ m$ está representada por $\frac{a\,b}{2}\ arc.\,(sen. = \frac{x}{a})$

Haciendo $x = a$, resulta $\frac{\pi\,a\,b}{4}$, que es el área del cuadrante elíptico $o\ B\ A$; luego el área total de la elipse será $\pi\,a\,b$.

35. La ecuacion de la parábola, (Fig. 2.ª) contando las coordenadas desde el vértice es

$$y^2 = 2\,p\,x \text{ ó } y = \sqrt{2\,p\,x}\,;$$

luego el área $o\ m\ p$ estará representada por

$$u = \sqrt{2\,p}\ S_0^x\,d\,x\sqrt{x}$$

que es lo mismo que $u = \frac{2}{3}\sqrt{2\,p} \times x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\,x\,y$:

se ve que el área $o\ m\ p$ es los $\frac{2}{3}$ del rectángulo $o\ r\ m\ p$, siendo $o\ r\ m$ el tercio restante.

36. Cuadratura de la cicloyde

$$u = S\,v\,d\,x \left\{\begin{array}{l} x = r\,(w - sen.\ w) \\ v = r\,(1 - cos.\ w) \end{array}\right\} d\,x = r\,d\,w\,(1 - cos.\ w)$$

$$cos.^2\,\tfrac{1}{2}\,x = \frac{1 - cos.\ x}{2},\ x = 2\,w,\ cos.^2\,w = \frac{1 - cos.\ 2\,w}{2}$$

$$S_{w_0}^{w_1}\,v\,d\,x = S_{w_0}^{w_1}\,r\,(1 - cos.\ w) \times r\,d\,w\,(1 - cos.\ w) =$$

$$r^2\,S_{w_0}^{w_1}\,(1 - cos.\ w)^2\,d\,w$$

Integral indefinida $S\,(1 - cos.\ w)^2\,d\,w = S\,d\,w\,(1 - 2\,cos.\ w + cos.^2\ w) = S\,d\,w\,(1 - 2\,cos.\ w + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,cos.\ 2\,w) =$

$S \frac{3}{2} d\,w - 2\,S\,cos.\,w\,d\,w - \frac{1}{4}\,S\,cos.\,2\,w \times 2\,d\,w = \frac{3}{2}\,w -$ $2\,sen.\,w - \frac{1}{4}\,sen.\,2\,w + C$ y por consiguiente:

$$r^2\,S_{w_0}^{w_1}\,(1 - cos.\,w)^2\,d\,w = r^2\,[\,\tfrac{3}{2}\,(w_1 - w_0) -$$

$$2\,(sen.\,w_1 - 1 \text{ en } w_0) - \tfrac{1}{4}\,(sen.\,2\,w_1 - sen.\,2\,w_0)\,]$$

siendo $w_0 = o$ y $w_1 = \pi$,, resulta,, (figura 3.ª) $O\,B\,A = \frac{3}{2}\,\pi\,r^2$,, $O\,A\,H = 3\,\pi\,r^2$ = tres veces el área del círculo generador. El área cicloydal esterior $O\,C\,A\,D\,H$ tiene por valor: $O\,C\,A\,D\,H = O\,C\,D\,H - O\,A\,H = 4\,\pi\,r^2 - 3\,\pi\,r^2 = \pi\,r^2$ = área del círculo generador y el segmento $O\,C\,A = H\,D\,A - O\,C\,A\,B - O\,A\,B = 2\,\pi\,r^2 - \frac{3}{2}\,\pi\,r^2 = \frac{1}{2}\,\pi\,r^2$ = área semicicloydal esterior.

37. Siguiendo el método que acabamos de esponer, será posible siempre obtener la espresion del área que encierra un contorno dado cualquiera trazado sobre un plano. Sea por ejemplo $M\,m_1\,N\,m_2$ (figura 4.ª) el contorno dado referido à coordenadas rectangulares: designemos por x_0, x_n las abscisas estremas $o\,P$, $o\,q$, por x una abscisa cualquiera $o\,p$, y por $y_1\ y_2$ las ordenadas $m_1\,p$ y $m_2\,p$ correspondientes á la misma abscisa x en cada una de las dos ramas de curva que forman el contorno: estas ordenadas deben ser dadas en funcion de x, y es fácil comprender por lo que va dicho que el àrea $M\,m_1\,N\,m_2$ está espresada por la integral definida

$$S_{x_0}^{x_n}\,d\,x\,(y_2 - y_1)$$

Si el contorno $M\,m_1\,N\,m_2$ es discontinuo, y está compuesto de partes distintas cuyas ordenadas no se pueden espresar por una misma funcion de la abscisa x, entonces se podrá dividir tanto el área propuesta como la integral definida que espresa su valor en varias partes que correspondan respectivamente á aquellas porciones del contorno respectivo.

38. En las curvas referidas al sistema polar, la fórmula de las áreas es (32)

$$u = \tfrac{1}{2} S^{n}_{n_0} r^2 \, d\,w$$

y se propone el siguiente ejemplo:

Sea $r = \dfrac{a\,u}{2\,\pi}$, ecuacion de la espiral de Arquímides. Sustituyendo en la ecuacion por $d\,u$ su espresion correspondiente, que aquí es $d\,u = \dfrac{2\,\pi}{a}\,d\,r$ vendrá á salir para los límites o y a

$$u = S^{a}_{0} \frac{\pi}{a}\, r^2 \, d\,r = \pi\,\frac{a}{3}$$

tercera parte del círculo del rádio a

Rectificacion de las curvas planas.

39. Empleando consideraciones semejantes á las espuestas en el párrafo (31) y recordando que la diferencial del arco de una curva plana cuya ecuacion referida á coordenadas rectangulares es $y = f\,x$ está espresada por

$d\,s = d\,x \sqrt{1 + \left(\dfrac{d\,y}{d\,x}\right)^2}$ se tendrá evidentemente

para la espresion general de la longitud del arco de curva comprendido entre los puntos cuyas abscisas son x_0 y x la integral definida.

$$S = S^{x}_{x_0} \, d\,x \sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}$$

40. Asi mismo si la curva se ha referido á coordenadas polares, en cuyo caso su ecuacion es $r = f(u)$, la espresion diferencial de su arco es

$$d\,s = d\,u \sqrt{r^2 + \left(\frac{d\,r}{d\,u}\right)^2}$$

y se tendrá por consiguiente la integral definida

$$s = S_{u_0}^{u}\, d\,u \sqrt{r^2 + \left(\frac{d\,r}{d\,u}\right)^2}$$

para la espresion general de la longitud del arco de curva comprendido entre los puntos correspondientes á los valores u_0 u del ángulo que determina la direccion del rádio vector.

41. Tomemos por ejemplo la elipse referida á sus diàmetros rectangulares cuya ecuacion es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, que dá $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, y $\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$: se tendrá

$$s = S_0^x\, d\,x \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \times \frac{x^2}{a^2 - x^2}} =$$

$$S_0^x\, d\,x \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)\,x^2}{a^2\,(a^2 - x^2)}}$$

espresion del área contada desde el vértice de la curva hasta el punto cuya abscisa es x: introduciendo la escentricidad designada por e ó lo que es lo mismo, haciendo $a^2 - b^2 = a^2 e^2$, la espresion anterior se podrá escribir asi

$$s = S_0^x\, d\,x \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}$$

No es posible obtener esta integral bajo una forma finita, pero se la puede desarrollar en série convergente de diversas maneras observando por ejemplo que $\frac{x}{a}$ es siempre una fraccion, se puede suponer $x = a\ cos.\ V$ de donde $d\ x = - a\ sen.\ V\ d\ V$, y será

$$s = - a\ S_{\frac{\pi}{2}}^{V} d\ V \sqrt{1 - e^2 cos.^2 V};$$

ó desarrollando el binomio

$$\left(1 - e^2 cos.^2 V\right)^{\frac{1}{2}}; \text{ (*)}$$

$$s = a\left(\frac{\pi}{2} - V\right) + a\ S_{\frac{\pi}{2}}^{V} d\ V\left(\frac{e^2}{2} cos.^2 V + \tfrac{1}{2}\frac{e^4}{4} cos.^4 V +\right.$$

(*) $s = - a\ S_{\frac{\pi}{2}}^{V} d\ V\left(1 - \frac{e^2}{2} cos.^2 V - \tfrac{1}{2}. \frac{e^4}{4} cos.^4 V - \frac{1.\ 3\ e^6}{2.\ 4\ 6} cos.^6 V \text{ etc.}\right)$

separando la integral del primer término

$$s = - a\ S_{\frac{\pi}{2}}^{V} d\ V - a\ S_{\frac{\pi}{2}}^{V} d\ V\left(- \frac{e^2}{2} cos.^2 V - \tfrac{1}{2}\frac{e^4}{4} cos.^4 V - \frac{1.\ 3}{2.\ 4} . \frac{e^6}{6} . cos.^6 . V - \text{etc.}\right) =$$

$$- a\left(V - \frac{\pi}{2}\right) - a\ S_{\frac{\pi}{2}}^{V} d\ V\left(- \frac{e^2}{2} cos.^2 V - \tfrac{1}{2} . \frac{e^4}{4} . cos.^4 V - \frac{1.\ 3}{2.\ 4} . \frac{e^6}{6} cos.^6 V - \text{etc.}\right)$$

$$= a\left(\frac{\pi}{2} - V\right) + a\ S_{\frac{\pi}{2}}^{V} d\ V\left(\frac{e^2}{2} . cos.^2 . V + \tfrac{1}{2} . \frac{e^4}{4} . cos.^4 V + \frac{1.\ 3}{2.\ 4}\frac{e^6}{6} . cos.^6 V + \text{etc.}\right)$$

$$+\frac{1.3}{2.4}\,\frac{e^6}{6}\cos.^6 V+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{e^8}{8}\cos.^8 V+\text{etc.})$$

ahora bien la sétima de las fórmulas del núm. 24 aplicada aqui, da

$$S\,d\,V\cos.^2 V=\tfrac{1}{2}\,sen.\,V\cos.\,V+\tfrac{1}{2}S\,d\,V=\tfrac{1}{2}\,sen.\,V\cos.\,V+\tfrac{1}{2}V+c$$

$$S\,d\,V\cos.^4 V=\tfrac{1}{4}\,sen.\,V\cos.^3 V+\tfrac{3}{4}S\,d\,V\cos.^2 V=\tfrac{1}{4}\,sen.\,V\cos.^3 V+\frac{1.3}{2.4}\,sen.\,V\cos.\,V+\frac{1.3}{2.4}V+c'$$

$$S\,d\,V\cos.^6 V=\tfrac{1}{6}\,sen.\,V\cos.^5 V+\tfrac{5}{6}S\,d\,V\cos.^4 V=\tfrac{1}{6}\,sen.\,V\cos.^5 V+\frac{1.5}{4.6}\,sen.\,V\cos.^3 V+\frac{1.3.5}{2.4.6}\,sen.\,V\cos.\,V+\frac{1.3.5}{2.4.6}V+c''$$

$$S\,d\,V\cos.^8 V=\frac{1}{8}\,sen.\,V\cos.^7 V+\frac{7}{8}S\,d\,V\cos.^6 V=\frac{1}{8}\,sen.\,V\cos.^7 V+\frac{1.7}{6.8}\,sen.\,V\cos.^5 V+\frac{1.5.7}{4.6.8}\,sen.\,V\cos.^3 V+\frac{1.3.5.7.}{2.4.6.8.}\,sen.\,V\cos.\,V+\frac{1.3.5.7.}{2.4.6.8.}V+c'''\ \text{etc.}$$

cuyas integrales tomadas desdes $V=\frac{\pi}{2}$ hasta $V=V$ son.

$$S_{\frac{\pi}{2}}^{V}d\,V\cos.^2 V=\frac{1}{2}\,sen.\,V\cos.\,V-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-V\right)$$

$$S_{\frac{\pi}{2}}^{V}d\,V\cos.^4 V=\frac{1}{4}\,sen.\,V\cos.^3 V+\frac{1.3.}{2.4.}\,sen.\,V\cos.\,V-\frac{1.3.}{2.4.}\left(\frac{\pi}{2}-V\right)$$

$$S_{\frac{\pi}{2}}^{V} dV\cos.^6 V = \frac{1}{6}\,sen.\,V\cos.^5 V + \frac{1.5.}{4.6.}\,sen.\,V\cos.^3 V + \frac{1.3.5.}{2.4.6.}\,sen.\,V\cos.V - \frac{1.3.5.}{2.4.6.}\left(\frac{\pi}{2} - V\right)$$

$$S_{\frac{\pi}{2}}^{V} dV\cos.^8 V = \frac{1}{8}\,sen.\,V\cos.^7 V + \frac{1.7.}{6.8.}\,sen.\,V\cos.^5 V + \frac{1.5.7.}{4.6.8.}\,sen.\,V\cos.^3 V + \frac{1.3.5.7.}{2.4.6.8.}\,sen.\,V\cos.\,V - \frac{1.3.5.7.}{2.4.6.8.}\left(\frac{\pi}{2} - V\right)\ etc.$$

Si se supone $x = a$, y por consiguiente $cos.\ V = 1$ ó $V = o$, la espresion anterior de s nos dará la longitud del cuadrante de elipse, que es (*)

(*) Poniendo en la espresion de s por cada uno de los términos que están bajo el signo integral sus valores hallados poco hà, teniendo presente que $V = o$, $sen.\ V = o$, $cos.\ V = 1$ resulta

$$\frac{\pi a}{2} + \frac{e^2}{2} \times \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^4}{4} \times \frac{1.3.}{2.4.} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1.3.}{2.4.}\frac{e^6}{6} \times \frac{1.3.5.}{2.4.6.}\frac{\pi}{2} + etc.$$

$$= \frac{\pi a}{2}\left(1 - \frac{e^2}{2^2} - \frac{1.3.e^4}{2^2 4^2} - \frac{1.3^2.5e^6}{2^2 4^2 6^2} - \frac{1.3^2.5^2.7e^8}{2^2 4^2 6^2 8^2} - etc.\right) =$$

$$\frac{\pi a}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5.}{2.4.6.}e^3\right)^2 - \frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)^2 - etc.\right\}$$

$$\frac{\pi a}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3.}{2.4.}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5.}{2.4.6.}e^3\right)^2-\right.$$

$$\left.\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7.}{2.4.6.8.}e^4\right)^2-etc.\right\}$$

42. La ecuacion de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\ \frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

y por consiguiente

$$s=S_a^x\, dx\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}\frac{x^2}{x^2-a^2}}=$$

$$S_a^x\, dx\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{a^2(x^2-a^2)}}$$

ó haciendo como antes $a^2+b^2=a^2e^2$,

$$s=S_a^x\, dx\sqrt{\frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}};$$

esta es la espresion de la longitud del arco de hipérbola contado desde el vértice de la curva hasta el punto cuya abscisa es x; como aquí es siempre $x>a$, haremos

$$x=\frac{a}{cos.\,V},\ \text{con lo cual será}\ dx=\frac{a\,sen.\,V\,dV}{cos.^2\,V},\ \text{y}$$

$$s=a\,S_0^V\frac{dV}{cos.^2\,V}\sqrt{e^2-cos.^2\,V}=$$

$$a\,S_0^V\, d\,V \frac{e}{\cos.^2 V} \sqrt{1 - \frac{\cos.^2 V}{e^2}} : (*)$$

desarrollando el binomio $\left(1 - \dfrac{\cos.^2 V}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ sale

$$s = a\,S_0^V\, d\,V \frac{e}{\cos.^2 V}\left(1 - \frac{1}{2e^2}\cos^2 V - \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\,\frac{1}{4e^4}\cos.^4 V - \frac{1.\ 3}{2.\ 4}\,\frac{1}{6e^6}\cos.^6 V - etc.\right) \text{ ó bien}$$

$$s = a\,e\,tang.\,V - \frac{a}{2e} V - a\,S_0^V\, d\,V\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{4e^3}\cos.^2 V + \right.$$

$(*)$ $$S = S_0^V \frac{a\,sen.\,V\,d\,V}{\cos.^2 V} \sqrt{\frac{\dfrac{e^2 a^2}{\cos.^2 V} - a^2}{\dfrac{a^2}{\cos.^2 V} - a^2}} =$$

$$a\;S_0^V \frac{sen.\,V\,d\,V}{\cos.^2 V} \sqrt{\frac{a^2 e^2 - a^2 \cos.^2 V}{a^2 - a^2 \cos.^2 V}} =$$

$$a\;S_0^V \frac{sen.\,V\,dV}{\cos.^2 V} \sqrt{\frac{e^2 - \cos.^2 V}{sen.^2 V}} =$$

$$a\;S_0^V \frac{d\,V}{\cos.^2 V} \sqrt{e^2 - \cos.^2 V} =$$

$$a\;S_0^V\, d\,V \frac{e}{\cos.^2 V} \sqrt{1 - \frac{\cos.^2 V}{e^2}}$$

$$\frac{1.3}{2.4}\ \frac{1}{6e^5}\cos.^4 V + etc.)\ (^*)$$

El valor de los términos de esta serie se hallará por medio de las espresiones $S\,d\,V$,, $S\,d\,V\cos.^2 V$,, $S\,d\,V\cos.^4 V$, *etc.* dadas en el número anterior y suponiendo la constante arbitraria C igual á cero.

Puede observarse que siendo $y = \frac{b}{a}x$ la ecuacion de la asíntota, la distancia del centro de la curva al punto de la asíntota cuya abscisa es x será

$$\frac{x\sqrt{a^2+b^2}}{a} = e\,x = \frac{a\,e}{\cos. V}$$ (**) Si llamamos r, á esta distancia tendremos

$$r - s = a\,e\,\frac{1-sen.\,V}{\cos.\,V} + \frac{a}{2e}V +$$

$$a\,S_0^V\,d\,V\left(\tfrac{1}{2}\ \frac{1}{4e^3}\cos.^2 V + \frac{1.3}{2.4}\ \frac{1}{6e^5}\cos.^4 V +\right.$$

(*) Separando la integral de los dos primeros términos y haciendo la multiplicacion de los del paréntesis por

$$\frac{e}{\cos.^2 V}$$

(**) Porque dicha distancia se puede mirar siempre como hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son x é y, y será por lo mismo

$$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}} =$$

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{x}{a}\,a\,e = e\,x = \frac{a\,e}{\cos.\,V}$$

$$\frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}\,\frac{1}{8\,e^7}\,\cos.^6 V + \text{etc.})$$

si se supone $x = \frac{1}{0}$, y por consiguiente $\cos. V = 0$, ó $V = \frac{\pi}{2}$, esta fórmula nos dará el límite á quien se acerca la diferencia $r - s$, á medida que la abscisa x se va haciendo cada vez mayor: este límite (teniendo presente que la espresion

$$\frac{1 - sen. V}{\cos. V} = \frac{1 - sen.^2 V}{(1 + sen. V)\cos. V} = \frac{\cos. V}{1 + sen. V}$$ se reduce á 0, cuando $V = \frac{\pi}{2}$) es

$$\frac{\pi a}{2 e}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.\,3}{2.\,4}\,\frac{1}{e^2}\right)^2 + \frac{1}{5}\left(\frac{1.\,3.\,5}{2.\,4.\,6}\,\frac{1}{e^3}\right)^2 + \text{etc.}\right\}$$

Cubatura del volúmen y planificacion de la superficie de revolucion.

43. Dada la curva en cuya revolucion fueron engendrados el volúmen v y la superficie S de que se trata hay que apropiar al caso las fórmulas

$$v = S_0^x\,\pi\,y^2\,d\,x\,,\ S = S_0^x\,2\,\pi\,y\,\sqrt{(d\,x^2 + d\,y^2)}$$

Para aplicar la primera sea la elipse $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ la curva que suponemos dá vuelta al rededor del eje $A\,x$ sobre quién se halla el eje $2a$ de la elipse (figura 5.ª) recordando que por verificarse la rotacion sobre el eje mayor resulta elipsoide prolongado y si se verificase sobre el eje menor resultaría elipsoide aplanado. Sustitúyase, pues, en la fórmula 1.ª por y^2 su valor y será el volúmen ó parte indefinida del elipsoide

$$v = \pi \frac{b^2}{a^2} S_0^x (a^2 - x^2)\,dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)$$

Si se quiere limitar el volúmen de manera que se obtenga el del semi elipsoide dará la integral limitada para valor de dicho volúmen

$$v = \frac{2}{3} \pi b^2 a$$

y su duplo ó elipsoide entero será

$$\frac{4}{3} \pi b^2 a$$

Si hacemos $a = b$ la elipse pasa á círculo y segun la espresion precedente el volúmen de la esfera que tenga el diámetro $2a$ vale $\frac{4}{3} \pi a^3$ y si el diámetro de la esfera es $2b$ el volúmen vale $\frac{4}{3} \pi b^3$. Comparando con el elipsoide vemos que el volúmen de la esfera está con el del elipsoide en la misma razon que el cuadrado del eje sobre que está construida la esfera tiene con el otro eje del elipsoide.

44. Tratemos de aplicar tambien la fórmula de las superficies para determinar la del elipsoide y para ello sustitúyase por y y dy las espresiones que dá la ecuacion de la elipse. Verificado esto y haciendo para simplificar

$$e = \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a}$$

que es la razon de la escentricidad al semi-eje mayor se tiene para cualquiera parte entre los límites 0 y x

$$S = \frac{2\pi b e}{a} S_0^x dx \sqrt{\left(\frac{a^2}{e^2} - x^2\right)}$$

Esta integral sin el coeficiente es el área circular comprendida entre los mismos límites en concepto de estar descrito el círculo con el rádio $\frac{a}{e}$ integral que sabemos adquirir y llamándola Σ tendremos la superficie del elipsoide

$$S = \frac{2\pi b e}{a} \Sigma$$

Concluiremos aplicando la misma fórmula de las superficies á la parábola y para ello la ecuacion $y^2 = 2px$ de la curva nos dá

$$dx = \frac{y\,dy}{p}, \text{ de donde } dx^2 = \frac{y^2\,dy^2}{p^2}$$

con la sustitucion de este último valor la fórmula referida al paraboloide será despues de las reducciones

$$S = S_0^y \frac{2\pi}{p} y\,dy \sqrt{(y^2 + p^2)}$$

y su resultado por la regla de potencias

$$S = \frac{2\pi}{3p}\left[(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right]$$

pero supongamos que se trata de averiguar el área del paraboloide comprendida por la circunferencia que en la revolucion habrá descrito la ordenada al focus y como esta tiene de valor el semi-parámetro p la integral entre los límites o y p será

$$S = \frac{2\pi}{3p}\left[(2p^2)^{\frac{3}{2}} - p^3\right] = \frac{4}{3}\pi p^2 \left(\sqrt{2} - \tfrac{1}{4}\right)$$

TEORIA DE INTEGRACIONES DOBLES.

Integrables dobles.

45. El volúmen $m\,p'$ y superficie $m\,p$ (figura 6.ª) comprendidos entre dos planos $A\,B'$ y $D\,C'$ paralelos al coordenado $z\,v$ á las respectivas distancias x y $x + d\,x$, y otros dos $n\,p'$ y $m\,q'$ paralelos al $z\,x$ á los correspondientes v y $v + d\,v$; son el volúmen y superficie diferenciales de segundo órden de un volùmen ó superficie cualquiera y tienen por espresiones formulares las siguientes:

$$m\,p' = d^2\,V = z.\,d\,x.\,d\,v \qquad m\,p = d^2\,S = d\,x\,d\,v\sqrt{1 + \left(\frac{d\,z}{d\,x}\right)^2 + \left(\frac{d\,z}{d\,v}\right)^2}$$

siendo $z = F\,(x, v)$ ó lo que es lo mismo $F\,(x, v, z) = o$ la ecuacion general de la superficie. Ahora vamos à tratar de resolver el problema contrario, de hallar el volúmen ó superficie primitiva entre límites determinados, de una diferencial de segundo órden. Para esto (figura 6.ª) supongamos se trata de hallar el volúmen limitado; en sentido del eje de las x, por dos planos paralelos al $z\,v$ á las distancias x_o y x_1; y en sentido del eje de las v,, por un plano paralelo al $z\,x$ tirado á la distancia v_o, y por un cilindro proyectante arbitrario $F\,F'\,D'\,E'\,E$,, dado por su ecuacion $v_1 = f(x)$ que será como sabemos la de su interseccion $F'\,D'\,E'$ con el plano $x\,v$ de proyeccion. El volúmen $A\,C' = d_x\,v$ y la superficie $A\,C = d_x\,S$ comprendidos entre el plado $z\,x$ (ó en general un plano v_o paralelo á este coordenado) y dicho cilindro proyectante, son iguales á las recpectivas sumas de infinito número de volúmenes de diferenciales $m\,p'$, y superficies diferenciales $m\,p$; y tienen por valores con arreglo al principio de las integrales definidas, y en atencion á ser constante $d\,x$:

$$d_x V = S_{v_0}^{v_1 = f(x)} z\,d\,v.\,d\,x = d\,x\,S_{v_0}^{v_1 = f(x)} z\,d\,v,,$$

$$d_x S = d\,x\,S_{v_0}^{v_1 = f(x)} d\,v \sqrt{1 + \left(\frac{d\,z}{d\,x}\right)^2 + \left(\frac{d\,z}{d\,v}\right)^2}$$

El volúmen V y la superficie S comprendidos entre dos planos paralelos al $z\,v$, trazado á las distancias x_0 x_1, y los límites anteriores, serán tambien sumas de los infinitos valores que $d\,d_x V$ y $d\,d_x S$ tomen entre estos límites, por lo que tendrán los valores

$$V = S_{x_0}^{x_1} d\,x\,S_{v_0}^{v_1 = f(x)} z\,d\,v\;\; S =$$

$$S_{x_0}^{x_1} d\,x\,S_{v_0}^{v_1 = f(x)} d\,v \sqrt{1 + \left(\frac{d\,z}{d\,x}\right)^2 + \left(\frac{d\,z}{d\,w}\right)^2} \quad (1)$$

Es evidente que si el cilindro proyectante que limita la superficie y el volúmen, fuera dado sobre otro plano coordenado tal como el $x\,z$ por medio de la ecuacion $z = f(x)$, dichas espresiones recibirian la forma

$$V = S_{x_0}^{x} d\,x\,S_{z_v}^{z = f(x)} v\,d\,z,,\;\; S =$$

$$S_{x_0}^{x} d\,x\,S_{z_0}^{z = f(x)} d\,z \sqrt{1 + \left(\frac{d\,v}{d\,x}\right)^2 + \left(\frac{d\,v}{d\,z}\right)^2}$$

En dichas espresiones formulares ((1)), habrá que sustituir en cada caso particular por x_0 y x_1 las distancias á que cortan al eje de las x los planos paralelos al $z\,v$, entre los que se quiere hallar el volúmen ó superficie por v_0 la distancia á que corta al eje de las v, el plano paralelo al $z\,x$ que limita en este sentido dicha superficie ó volúmen: por $v_1 = fx$ el valor de la ordenada v_1 del cilindro proyectante y por z en el volúmen, y por $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dv}$ en la superficie, sus valores sacados de la ecuacion que determina la naturaleza de la superficie ó volúmen definido que se quiera hallar. Pasemos para mayor claridad á hacer aplicacion á algunos ejemplos:

Hallar el volúmen del elipsoide de tres ejes.

46. La ecuacion de este elipsoide es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ y como su volúmen V, queda dividido en ocho partes iguales por los planos coordenados, resultará (figura 7.ª)

$$V = 8.\,B\,o\,A\,c$$

de suerte, que hallando el valor de esta octava parte, tendremos el del total. A este fin sabemos que dicha parte $B\,o\,A\,C$ está limitada en sentido del eje de las x, por los planos $z\,v$, y $P\,C\,Q$, que corresponden à los límites $x_0 = o$,, $x_1 = a$: en sentido del eje de las v los límites son el plano $z\,x$ y el cilindro proyectante que tiene por base la elipse $A\,C$, intercesion del elipsoide con el plano $x\,v$, cuya ecuacion es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$; de donde resulta $v_0 = o$ y $v_1 = fx = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, al mismo tiempo que la ecuacion del elipsoide dá para z el valor $z = \frac{c}{b}\sqrt{(\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2})^2 - v^2}$. Sustituyendo estos valores en la espresion correspondiente ((1)) resulta $B\,O\,A\,C =$

$$\frac{c}{b} S_0^a\, dx\, S_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 - v^2}$$

Mas como la integral

$S_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\, dv \sqrt{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 - v^2}$, es evidentemente la cuadratura de un círculo cuyo rádio es

$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, definida entre el orígen y el estremo del rádio segun indican los límites, tiene por valor

$$S_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\, dx \sqrt{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2 - v^2} =$$

$\frac{\pi b^2}{4a^2}(a^2-x^2)$ de donde $BOAC = \frac{\pi b c}{4a^2} S_0^a\, dx\,(a^2-x^2) =$

$\frac{\pi b c}{4a^2} \times \frac{2}{3} a^3 = \frac{1}{2.3} \pi b. c. a$ y por lo tanto,

$$V = \frac{4}{3} \pi b. c. a$$

Hallar el valor del elipsoide de revolucion

47. La ecuacion del elipsoide de revolucion que tiene por eje al de las x es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ y siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior se obtendria la espresion de su volúmen; pero en atencion á que su ecuacion solo se diferencia de la del elipsoide de tres ejes en ser $b = c$, es mas sencillo hacer esta modificacion en el valor de V hallado anteriormente lo que produce $V = \frac{4}{3} \pi a b^2$

Hallar el valor del volúmen de la esfera.

48. Siguiendo la teoría general, se deduciría de la ecuacion de la esfera $\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$, el valor de su volúmen, pero es mas sencillo en el caso actual y por la razon espresada en el anterior, hacer $a = b = c$, en la espresion del volúmen del elipsoide de tres ejes, ó $b = a$ en la del de revolucion, lo que dá para el de la esfera; el valor conocido desde geometría $V = \frac{4}{3} \pi a^3$

Hallar el valor de la superficie de la esfera.

49. La ecuacion de la esfera es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ y de ella se deducen los valores

$$z = \sqrt{(\sqrt{a^2 - x^2})^2 - v^2}\,,,\ \frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}$$

$$\frac{dz}{dv} = -\frac{v}{z}$$

Ademas, haciendo idéntico razonamiento que en la determinacion del volúmen del elipsoide, se obtienen los valores siguientes de la superficie y de sus limites (figura 8.ª)

$S = 8 \times A\ o\ c\ B,,\ x_0 = 0,,\ x_1 = a\ ,\ v_0 = 0,,\ v_1 = f\,x = \sqrt{a^2 - x^2}$

y sustituyendo en la fórmula ((1)) correspondiente resulta

$$A\ o\ c\ B = S_0^a\, d\,x\, S_0^{\sqrt{a^2 - x^2}}\, d\,v \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{v^2}{z^2}} =$$

$$a\,S_0^a\,d\,x\,S_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{d\,v}{\sqrt{(\sqrt{a^2-x^2})^2-v^2}}$$

la cual puede recibir la forma

$$A\ o\ c\ B = a\,S_0^a\ d\,x\,S_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{\dfrac{d\,v}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}}$$

La integral definida tiene por valor:

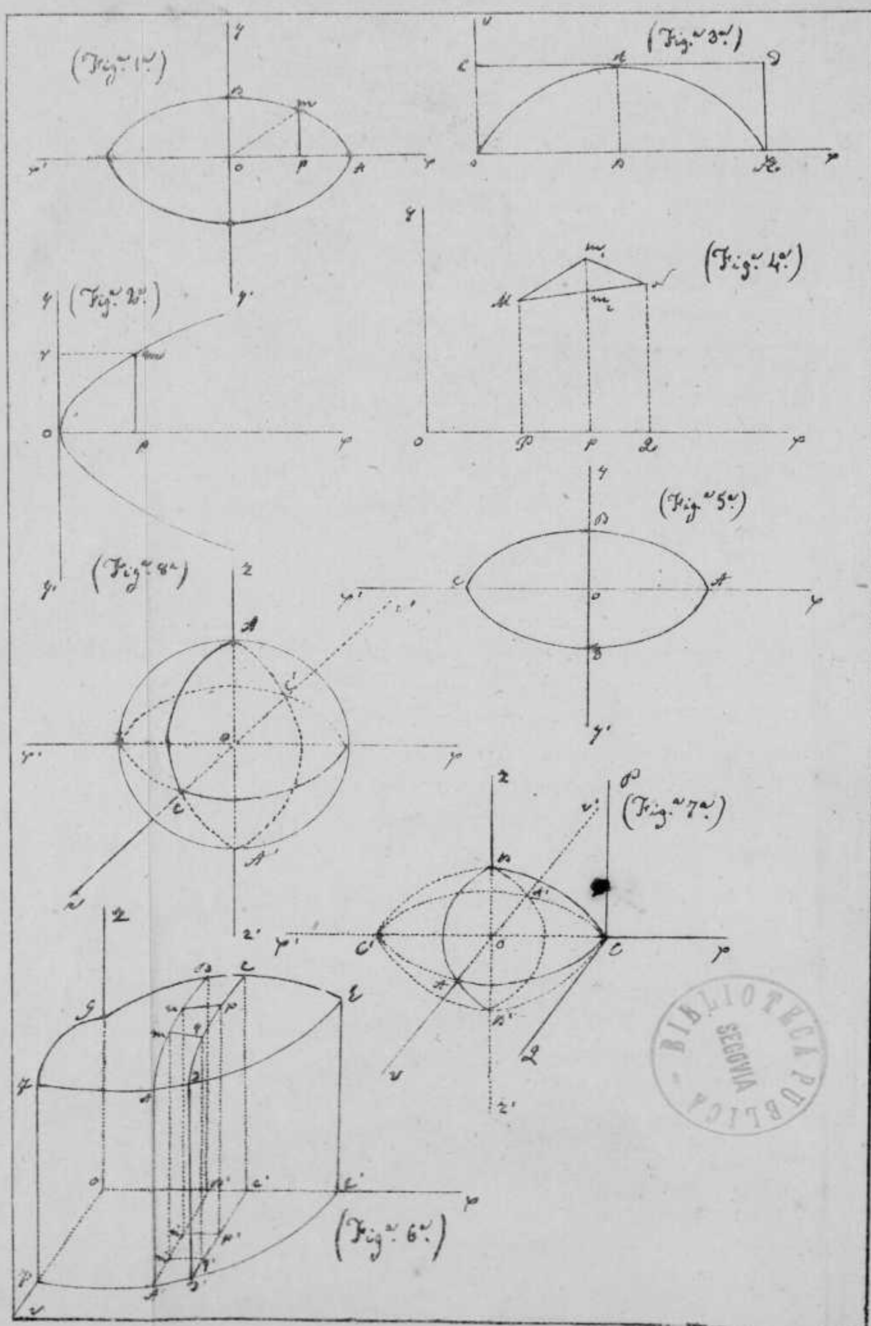
$$S_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{\dfrac{d\,v}{\sqrt{a^2-x^2}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}} =$$

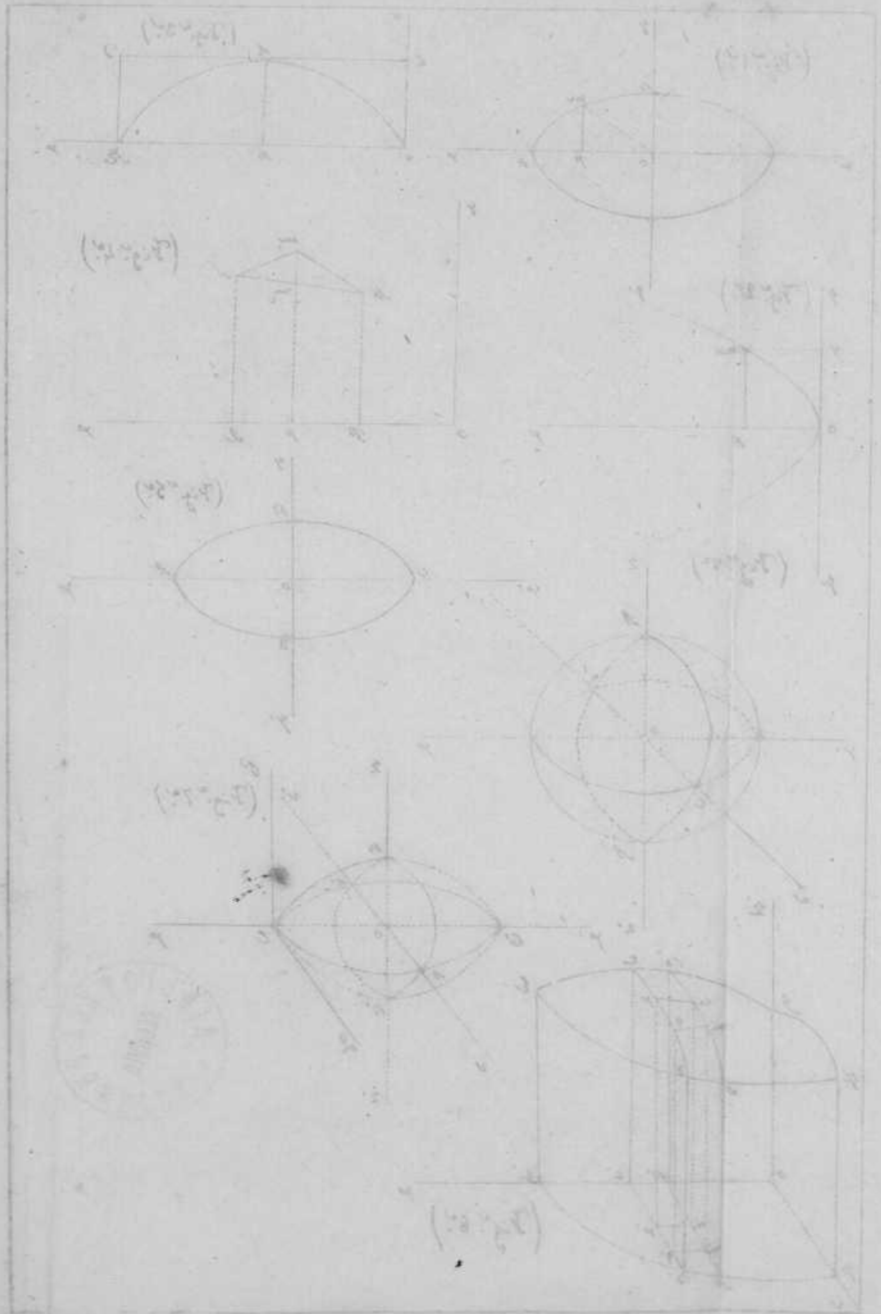
$$ang.\ sen. = \frac{v}{\sqrt{a^2-x^2}} + c$$

y por consiguiente la espresion anterior se trasforma en

$$A\ o\ c\ B = a\,S_0^a\,d\,x\left\{ang.\ sen. = 1 - ang.\ sen. = o\right\} =$$

$$= \frac{\pi a}{2}\,S_0^a\,d\,x = \frac{\pi\,a^2}{2} \qquad S = 4\,\pi\,a^2$$


(Fig.ª 1.ª)
(Fig.ª 2.ª)
(Fig.ª 3.ª)
(Fig.ª 4.ª)
(Fig.ª 5.ª)
(Fig.ª 6.ª)
(Fig.ª 7.ª)
(Fig.ª 8.ª)



$y = f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \ldots$

$dy = f'(x) + \varphi'(x) + \psi'(x) + \ldots$

$y = \int (f'(x) + \varphi'(x) + \psi'(x) + \ldots) = f(x) + \varphi(x) + \psi(x) + \ldots$

$= \int f'(x)\,dx + \int \varphi'(x)\,dx + \int \psi'(x)\,dx + \ldots$

$w = h(z)$, $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{h(z+\Delta z) - h(z)}{\Delta z}$

$z = \chi(y)$, $\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{\chi(y+\Delta y) - \chi(y)}{\Delta y}$ | $\frac{\Delta w}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta v} = \frac{h(z+\Delta z) - h(z)}{}$

$y = \varphi(v)$

$v = \psi(x)$.

CALCU

INTEGR