

ELEMENTOS DE GEODESIA.

OPERACIONES

DE
UN LEVANTAMIENTO GEODÉSICO

por

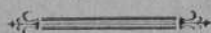
D. Francisco Ortega y Delgado,

CAPITÁN DE ARTILLERÍA

Y

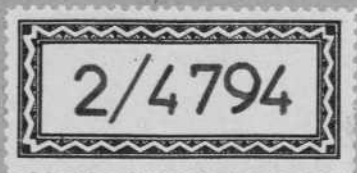
PROFESOR DE LA ACADEMIA DEL CUERPO.

OBRA DECLARADA DE TEXTO POR REAL ÓRDEN DE 13 DE MARZO DE 1891.



SEGOVIA
EST. TIP. DE SEGUNDO BORDA,
Juan Bravo, núm. 20.
1891.

1851 IE



Tit m.

33602

Sig.: 1851 IE

Tit.: Elementos de geodesia : opera

Aut.: Ortega y Delgado, Francisco

Cód.: 51042505



R.-21.548

ELEMENTOS DE GEODESIA.

OPERACIONES

DE

UN LEVANTAMIENTO GEODÉSICO.

por

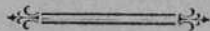
D. Francisco Ortega y Helgado,

CAPITÁN DE ARTILLERÍA

Y

PROFESOR DE LA ACADEMIA DEL CUERPO.

OBRA DECLARADA DE TEXTO POR REAL ÓRDEN DE 13 DE MARZO DE 1891.



SEGOVIA:

EST. TIP. DE SEGUNDO RUEDA,

Juan Bravo, núm. 20.

1891.



.....
Es propiedad del autor.

Queda hecho el depósito que marca la ley.
.....



INTRODUCCIÓN.

Nada más lejos de mi ánimo que suponer he dado cima á una obra perfecta, ni aún siquiera de utilidad general al redactar los *Elementos de Geodesia*. El fin que me he propuesto es muy restringido; me limito á desear, que tanto por la forma de redacción, como por la cantidad de doctrina, sirvan para dar á nuestros alumnos una ligera idea del conjunto de la Geodesia y hacerles entrever los medios por que llega al resultado apetecido.

Si este objeto principal lo he conseguido, mi aspiración está cumplida y mi deber llenado.

Francisco Ortega.

Segovia, Agosto de 1889.

A mi distinguido amigo y
compañero D. Arturo Barza:

Francisco Ortega



PRÓLOGO.

EL objeto especial que, según he indicado en la Introducción, han de cumplir estos apuntes, me obliga á redactarles en una forma particular que, en mi concepto, exige una breve explicación.

Es sabido que el estudio de la Geodesia en nuestra carrera obedece en resúmen, á el derecho adquirido de ocupar nuestros oficiales un cierto número de plazas en el Instituto Geográfico y Estadístico; á primera vista, esto debía exigir un estudio profundo y detallado de esta ciencia; pero si se tiene en cuenta que en el Instituto se sigue la práctica de la división del trabajo, designando á cada grupo de oficia'es de su personal científico, una clase especial de cometido invariable en lo sucesivo, se comprende que esta profundidad de conocimientos no es necesaria y basta una idea general del conjunto, para armonizar los trabajos de todos los grupos. No está, sin embargo, fuera de lugar, especificar algo los detalles de cada operación, no tan solo para aumentar en lo posible esos conocimientos de conjunto, sinó también para sentar bases sólidas á cada cometido especial, que facilite en su día el completo dominio teórico que ha de simplificar mucho el práctico.

Por estas razones, he comenzado el trabajo por dos capítulos que con el epigrafe común de PLAN GENERAL DE UN LEVANTAMIENTO GEODÉSICO, comprenden todas las consi-

deraciones generales más necesarias para dar idea del porqué de cada método y grupo de operaciones, y del orden que se sigue para llegar al resultado apetecido.

Los capítulos siguientes detallan más los extremos de los anteriores y en ellos, dada la mira especial que me ha guiado, se describe el aparato de medir bases del general Ibáñez y sus cálculos correspondientes; se pasa revista á los métodos de orientación detallando los más usados por el Instituto Geográfico, y en fin, en todos los cálculos empleados, se adoptan las notaciones y fórmulas que usa el mencionado centro y están comprendidas en las INSTRUCCIONES PARA LOS TRABAJOS GEODÉSICOS.

En resumen, es solo un bosquejo de la Geodesia lo que presento en estos apuntes, y por lo tanto, su utilidad no es general, salvo para aquéllos que solo deseen adquirir de esta ciencia, la idea suficiente para comprender sus planes y medios de ejecución y el como alcanza los resultados con un límite de precisión que parece á primera vista irrealizable.

CAPÍTULO PRIMERO.

Plan general de un levantamiento geodésico.

I. PRELIMINARES.—La Geodesia tiene dos objetos principales, que dan origen á las dos ramas en que puede dividirse su acción. Estos objetos, son: 1.^o el estudio de la forma y dimensiones de la tierra; y 2.^o el levantamiento de un terreno de extensión considerable. Las ramas de la Geodesia que se dedican á cumplir y llenar cada objeto, toman respectivamente los nombres de *Geodesia superior* y *Geodesia elemental*.

2. Los procedimientos seguidos en una y otra para alcanzar el resultado que se pide, son los mismos en cuanto al orden, método, aparatos y cálculos empleados. Solo difieren en el grado de precisión que deba alcanzarse, pues que en la Geodesia superior se necesita, que las diversas líneas que se tracen en el elipsoide terrestre tengan toda la exactitud compatible con el objeto que ha de llenar, por lo que los métodos de observación se cumplen con todas las precauciones imaginables; en cambio, en la Geodesia elemental, debe tenerse muy en cuenta que lo que se busca es una representación gráfica del terreno, en la que se han de cometer necesariamente errores de dibujo que quizás destruirán en parte la exactitud de los elementos proporcionados por las observaciones y el cálculo; por esto no se debe llegar nunca en las operaciones á mayor grado de precisión que el que sea compatible con la mayor ó menor exactitud y riqueza de detalles que per-

mita la escala adoptada; obrar de otro modo sería perder un tiempo precioso y efectuar un trabajo tanto más laborioso, cuanto más exacto y de todo punto improductivo,

Como en el apéndice tercero de estas nociones, indicamos someramente la marcha que sigue la Geodesia superior para determinar la longitud de arcos de meridiano y paralelo bajo diversas latitudes, con cuyo conocimiento se llega al de la forma y dimensiones de nuestro planeta; como, según se ha de ver en dicho apéndice comparado con el texto, el orden, objeto y alcance de cada una de las operaciones prácticas y de los cálculos teóricos, prescindiendo de la precisión, es el mismo en los trabajos de la Geodesia superior que en los de la elemental, á esta última nos ceñiremos exclusivamente, pues que todo cuanto contribuya al mejor conocimiento de la una, acrecentará también al de la otra.

La lectura ó estudio del texto propiamente dicho y su comparación con el citado apéndice, formarán implícitamente un compendio razonado de la Geodesia superior, evitando repeticiones, aligerando el estudio y simplificando notablemente nuestra tarea; este plan resulta además de conformidad con el título sencillo que hemos dado á estas nociones: "Operaciones de un levantamiento geodésico.,"

3. La consideración de la escala del dibujo, que, según hemos dicho, es indispensable en la Geodesia elemental, permite indicar su íntimo enlace con la Topografía, que solo es, en resúmen, una rama ó caso particular de aquella. Se sabe, en efecto, que la Topografía se ocupa de dar reglas para el levantamiento de un trozo de la superficie terrestre, cuya extensión reducida, permita suponerlo plano y como tal representarlo: si á esta semejanza de objetivo se une el que, según se irá viendo sucesivamente: no hay operación en la Topografía que carezca de similar en la Geodesia elemental, el enlace de ambos estu-

ños se encuentra claro y puede decirse que no difieren más que en un punto, en considerar ó nó, la forma real del núcleo ó molde del terreno estudiado. Y aún en esta parte, la consideración de la escala del dibujo, los compenetra más y más; efectivamente, ¿qué es claro que una dimensión ó forma de terreno, despreciable en una escala, puede tener que considerarse en otra más amplificada ó próxima á la natural?; según veremos muy pronto, la diferencia entre un arco terrestre de 1.^o de amplitud y su tangente, es de 2^m '81; pues bien, esta diferencia, que es despreciable en la escala $\frac{1}{150000}$, por ejemplo, no lo es

en la $\frac{1}{30000}$; el levantamiento de un terreno de 20 leguas cuadradas, que corresponde á este grado, será pues, topográfico con la primer escala y geodésico con la segunda. El enlace de una y otra, queda, por lo tanto establecido, y para no aparecer en contradicción con lo dicho, debemos decir que en el párrafo siguiente, sin dejar de insistir en esta idea, se busca en tésis general, un punto de partida á los levantamientos propiamente geodésicos.

4. *Extensión de terreno necesaria para que un levantamiento sea geodésico.*—Siendo la tierra un cuerpo de forma sensiblemente esférica, se comprende desde luego que, para que el levantamiento de una parte de su superficie pueda entrar en el dominio de la Geodesia elemental, es preciso sea de tal extensión que no pueda prescindirse de su curvatura; la primera cuestión que debemos resolver, es, por lo tanto, determinar donde comienzan los levantamientos geodésicos.

Supongamos para ello (fig. 1.^a) un arco A B cuya amplitud sea de un grado; trazando la tangente en su punto medio M y limitándola en C y D por los radios O A y O B; tendremos en el triángulo rectángulo O C M,

$$CM = \frac{1}{2} CD = R \cdot \text{tang. } 30'$$

calculando esta fórmula, y duplicando el valor obtenido, se deduce

$$CD = 11113^m \cdot 92;$$

por otra parte, siendo la longitud aproximada de un cuadrante de meridiano, 10.000.000^m, se tiene:

$$\text{long. arco } AB = \frac{40.000.000^m}{360} = 11111^m \cdot 11.$$

La diferencia entre ambos valores es de 2^m '81, y por lo tanto, siempre que los medios de que se disponga puedan dar los datos del terreno afectado de un error igual ó superior á dicha diferencia; ó también, cuando la escala del dibujo haya de ser tal, que valores de 2^m ,81 resulten despreciables, podrá tomarse la longitud de la tangente por longitud del arco; y como otro tanto puede decirse en todos los círculos de la tierra que pasen por el punto M, el casquete esférico cuya base es AB, podrá suponerse confundido con su plano tangente en el punto medio.

Pasado este límite, la curvatura de la tierra debe tomarse en cuenta y como el casquete esférico anterior corresponde á una superficie de 20 leguas cuadradas, que prácticamente puede ampliarse hasta 25 próximamente, se puede decir, en general, que el levantamiento de un terreno de mayor extensión que esta, corresponde á la Geodesia.

5. *Cáneas geodésico; redes de diversos órdenes.*—

Para fijar con exactitud los distintos puntos del terreno, sería suficiente medir escrupulosamente las rectas ó líneas que los unen entre sí, y los ángulos que forman sus direcciones; más como este procedimiento, además de largo y muy costoso, trae consigo el inconveniente de que los errores inevitables que se cometan en cada medición se

acumulan con los de las siguientes, se hace preciso dividir el terreno en trozos de dimensión y forma conveniente, que dividen el levantamiento en otros tantos parciales, localizando los errores y aumentando la exactitud del resultado; la forma adoptada generalmente es la triangular, y el conjunto de estos triángulos que, según se demuestra por el Cálculo de probabilidades, deben ser en el menor número posible, constituye lo que se llama *cadena geodésica*.

6. Si se elijen en el terreno aquellos puntos principales que por sí solos bastan para dar una primera idea aproximada de la estructura y naturaleza del terreno, la reunión de triángulos de gran extensión relativa que liguén unos puntos con otros, forma la *red de primer orden*.

Deben considerarse, pues, como vértices de primer orden, en el caso del levantamiento del mapa de un estado, por ejemplo, aquellos que determinen la dirección de los meridianos y paralelos, los límites del estado y la configuración de sus costas; de esta manera, se forman á lo largo de esas líneas principales, verdaderas cadenas de triángulos, que dejando entre sí grandes cuadriláteros vacíos, se rellenan y enlazan con las llamadas redes de unión que tienen por vértices puntos interiores del cuadrilátero, cuya gran importancia se ha reconocido; el conjunto de estas cadenas y redes de unión, constituye la verdadera red de primer orden.

Cuando el levantamiento es de menor importancia, como el de una provincia, por ejemplo, se prescinde de las cadenas y se cubre el terreno con una red sencilla de triángulos, cuyos vértices sean puntos principales y constituyan, por decirlo así, la armazón ó esqueleto del terreno,

La longitud de los lados en la red de primer orden, llega por término medio hasta 20 kilómetros, pasando á veces de este límite en más ó menos cantidad, según el terreno, y aún con gran exceso en otras ocasiones; como

por ejemplo, en los triángulos que sirvieron para enlazar la red geodésica española con la argelina cuyos lados medían hasta 117 kilómetros de extensión.

Para determinar por completo la red de primer orden, basta medir directamente y con toda precisión una de sus líneas que se llama *base*, y todos los ángulos formados en cada vértice; la longitud de los demás lados se obtiene por el cálculo, mediante la resolución de triángulos y con toda la precisión que este medio permite.

7. Si en el espacio comprendido por cada triángulo de la red anterior, se eligen aquellos puntos que, siendo de menor importancia que los anteriores, ó no pudiendo enlazarse á ellos por triángulos de primer orden, tienen, sin embargo, gran valor para el mejor conocimiento de la forma del terreno, se obtiene uniéndolos entre sí, una série de triángulos más pequeños que constituyen la *red de segundo orden*.

La longitud de los lados de esta red varía entre 6 y 8 kilómetros, y queda determinada partiendo de un lado de la primera como base y midiendo todos los ángulos.

8. Por último, subdividiendo cada triángulo de segundo orden en otros más pequeños aún, mediante la elección de puntos de detalle, se forma la *red de tercer orden*, cuyos vértices no son otra cosa que los llamados *trigonométricos* en Topografía. Para fijar la situación de estos puntos, se parte, como base, de un lado de la red de segundo orden y se determinan los ángulos necesarios para que cada vértice se obtenga por tres intersecciones. El levantamiento del terreno comprendido dentro de cada triángulo de esta red (cuyos lados tienen 2 ó 3 kilómetros de extensión á lo mas) pertenece ya al dominio de la Topografía.

Resumiendo lo expuesto, puede decirse que la red de primer orden empieza á dar idea de terreno y puede medir su extensión superficial; la de segundo, puntualiza

más la estructura, y en fin, la del tercero, detalla por completo la forma general, siendo esta red á la Geodesia, lo que es para la Topografía el levantamiento de los detalles.

9. *Forma más conveniente para los triángulos del cánevas.* (1)—Puede determinarse en virtud de las consideraciones siguientes: representemos por b y B la base y su ángulo opuesto, y supongamos que al medir el ángulo A se haya cometido un error angular α que traerá consigo en el lado opuesto a el lineal e_a . Designemos por β el error que introduce en el ángulo B la falta de exactitud del A y supongamos en primer lugar que, α y β sean los dos positivos; si en la fórmula conocida

$$a \cdot \text{sen. } B = b \cdot \text{sen. } A$$

sustituimos en vez de a , B y A sus valores erróneos, $a + e_a$, $B + \beta$ y $A + \alpha$, obtendremos

$$(a + e_a) \text{ sen. } (B + \beta) = b \cdot \text{sen. } (A + \alpha);$$

desarrollando estas expresiones, teniendo en cuenta que en la práctica α y β se pueden suponer iguales; y en fin, que siendo estos errores muy pequeños, pueden considerarse los senos iguales á los arcos y los cosenos iguales á la unidad, se deduce en resumen:

$$e_a = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen. } (B - A);$$

análogamente operariase para el lado c y ángulo C , comparándolos con b y B y obtendríamos:

$$e_c = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen. } (B - C).$$

Si los dos errores α y β son negativos, el mismo procedimiento anterior daría lugar á las fórmulas

$$e_a = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen. } (A - B).$$

(1) Véase el apéndice 1.º

$$e_c = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen.} (C - B).$$

En uno y otro caso se vé fácilmente que los errores e_a y e_c son nulos á la vez si se verifica

$$\text{sen.} (B - A) = \text{sen.} (B - C) = 0$$

para lo que es necesario que se tenga

$$B - A = B - C = 0$$

ó lo que es lo mismo,

$$A = B = C.$$

Esto nos dice que cuando los errores son del mismo signo, la forma más conveniente para los triángulos es la equilátera.

10. Cuando α y β son de signos contrarios, se obtienen, operando como queda dicho, las fórmulas:

$$e_a = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen.} (A + B)$$

$$e_c = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen.} (C + B)$$

de las que fácilmente se deducen las siguientes:

$$e_a = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen.} C.$$

$$e_c = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen.} A.$$

Se comprende que para hacer mínimos á la vez ambos errores, es preciso hacer á un tiempo máximo el denominador y mínimo el numerador de cada fórmula, lo que se obtiene evidentemente si se hace

$$B = 90^\circ \text{ y } A = C$$

Esto prueba, que cuando los errores son de signos contrarios, la forma más conveniente es la de triángulo

isósceles rectángulo, siendo recto el ángulo opuesto á la base.

II. No debe atribuirse á estos resultados un valor absoluto en la práctica, en primer lugar, por que no es fácil apreciar cuando los errores angulares son ó no del mismo signo y además, por las consideraciones que siguen: hemos dicho que para fijar los puntos del terreno, se parte de una línea, llamada base, que se mide directamente; como esta debe hacerse en terreno llano y sensiblemente horizontal y la gran extensión de los lados de la red de primer orden, no siempre permitirán encontrar un terreno apropiado para medir uno de ellos, se adopta el

procedimiento de medir una base cuya longitud sea $\frac{1}{20}$ de la línea que se toma con base verdadera y enlazar ambas por una red de triángulos, llamada red de enlace. Sentado esto, se comprende que si se adoptase como única la forma equilateral, siendo constante la magnitud de los lados, no se podría efectuar nunca dicho enlace; si se tomase la forma de triángulo rectángulo é isósceles en que la base medida fuese la primera hipotenusa, los triángulos sucesivos irían disminuyendo en vez de aumentar, y el enlace tampoco podría efectuarse.

Por todo esto, los triángulos de la red de enlace no se elijen con forma determinada, obligándoles tan sólo á satisfacer la condición de aumentar paulatinamente hasta llegar al lado elejido en la red general; una vez ya en esta, se adopta en lo posible la forma equilátera ó que más se le aproxime, por ser este triángulo entre todos los del mismo perímetro el de área máxima y puede cubrirse el mismo terreno con menor número, como debe suceder.

12. *Reconocimiento del terreno y preparación de los vértices de primer orden.*—Además de las condiciones generales que según hemos indicado (6), deben cumplir los puntos vértices de la red de primer orden, han de satisfa-

cer también á las particulares siguientes; que desde cada uno se divise el mayor número posible de los que le rodean; que sean accesibles; y que en el mismo vértice ó en sus inmediaciones, haya terreno apropiado para las construcciones necesarias y para la estancia de los observadores, que suele durar mucho tiempo.

13. Recorriendo el terreno que ha de abarcar el levantamiento, con un aparato medidor de ángulos de cierta precisión, se hará estación en todos aquellos puntos que, reuniendo las condiciones expuestas, puedan ser vértices de la red de primer orden; se medirán los ángulos que forman en cada punto las direcciones de los demás, y se dejarán señales provisionales, exactamente referidas á tres puntos del terreno; estas señales provisionales, que han de servir luego para encontrar el vértice, lo mismo que las referencias que lo fijan, deben situarse de modo que no presentándose á la vista de un modo muy marcado, queden al abrigo de cualquier accidente fortuito, sea ó no intencionado. Al hacer estación en cada punto, se anotarán las condiciones de terreno y las de visibilidad con respecto á los que le preceden y le siguen, para saber de antemano las dimensiones que han de tener las obras de fábrica necesarias. Estas condiciones de visibilidad se refieren á dos datos principales, que son: la distancia aproximada de los vértices y la forma de proyección, según sea en el suelo ó sobre el cielo; el primer dato influye en la altura de la señal que indica el vértice, y el segundo, en la naturaleza de la mira que deba emplearse.

14. Para saber desde un vértice si se proyecta en el cielo ó en el suelo, con respecto al que le precede y sin necesidad de volver á este, se sigue el procedimiento que indica la figura 2.^a; sea B un punto ya elegido como capaz de ser vértice, y se quiere saber, al hacer estación en el punto A, si la visual dirigida de B hácia A se proyecta de un modo ú otro; para ello se miden las distancias zení-

tales ZAB y ZAC correspondientes al punto B y al opuesto del mismo plano vertical que el anterior; si la suma de estos dos ángulos es menor que dos ángulos rectos, la visual BAI queda por debajo de la AC , y el punto A visto desde B se proyectará en el suelo; la proyección será en el cielo, si dicha suma es mayor que dos ángulos rectos.

15. La altura de la señal se determina (fig. 3.^a), teniendo en cuenta que para que un objeto AB sea visible desde C , en buenas condiciones, su diámetro aparente ACB no debe ser menor de treinta y un segundos de arco; sentado esto, en el triángulo ABC se tiene:

$$AB = AC \cdot \text{tang. } 31'' = AC \times 0,00015$$

y como, por término medio, á los lados de la red de primer orden puede atribuírsele una longitud AC de 20.000 metros, la fórmula anterior se reduce á

$$AB = 20.000^m \times 0,00015 = 3^m;$$

tal es, por lo tanto, la altura mínima que debe tener una señal.

16. Reunidos los datos anteriores, puede formarse un croquis del terreno, en el cual se hace la elección definitiva de los vértices de primer orden, procurando que los triángulos resulten aceptables, como forma y como dimensiones; los puntos excluidos de la red de primer orden, se consideran, desde luego, como vértices de la segunda.

17. Elejidos ya los vértices, se procede á sustituir las señales provisionales por las permanentes, las cuales han de cumplir las condiciones siguientes: tener situación precisa, lo que se consigue refiriendo el punto conveniente de la señal á tres bien marcados del terreno del modo que dirémos enseguida; poder hacer desde ellas las observaciones necesarias, lo que se obtiene con la construcción de observatorios de dimensiones y altura convenientes; y, en fin, poder ser observadas, para lo cual, las señales que se

coloquen, han de determinar fijamente la vertical del punto del terreno y cumplir las condiciones de visibilidad anteriormente expuestas.

Al construir, pues, las obras de fábrica necesarias en cada vértice, debe tenerse en cuenta que cada uno exige un observatorio y una señal; mientras el terreno lo permita deben hacerse ambas cosas reunidas y de no ser posible, se construirá en el vértice la señal y lo más cerca que se pueda el observatorio. Estudiarémos brevemente los dos casos.

18. *Pueden hacerse todas las obras en el vértice.*—En este caso, se construye una obra de mampostería de apariencia tronco-cónica, cuya base mayor descansa en el terreno y cuya altura no exceda de siete metros, pudiendo tener tres como mínimo (15); el diámetro de la base superior, ha de ser tal, que dé espacio para la construcción del pilar de observación y para colocar la caseta ó tienda en que han de guarecerse de los rayos solares, los observadores y los aparatos.

Esta obra se construye por cuerpos cilíndricos de un metro de altura, aumentando de medio en medio metro los diámetros de cada uno; con cuyo dato y la altura de la construcción, se conoce de antemano el diámetro que ha de tener el cuerpo inferior de la señal.

En cuanto á la forma y dimensiones del pilar de observación, son las mismas que estudiarémos en el caso siguiente:

Cuando por las condiciones del terreno, la altura de la señal, ha de ser tal, que exceda de los siete metros, pero no pase de quince, y con el fin de no acrecentar inútilmente el coste de la obra, se eleva un gran pilar de dicha altura y de la sección conveniente para darle solidez y alrededor un andamiaje de madera terminado por una plataforma de extensión conveniente para colocar la caseta.

Si la altura de la construcción hubiese de exceder de

los quince metros, se prefiere desechar el vértice como de primer orden, á ser posible, reservándolo para una de las redes inferiores según su importancia y condiciones.

19. *No pueden hacerse todas las obras en el vértice.*—En este caso, debe, como ya se ha dicho, construirse la señal en el vértice y lo más cerca posible el observatorio.

La señal consiste en un macizo de mampostería de 3 á 5 metros de altura, de apariencia tronco-cónica y cuyos diámetros de las bases son de 1 y 3 metros respectivamente; si las depresiones ó elevaciones del terreno hiciesen insuficiente esta altura, se elevará lo necesario para que la parte visible desde el vértice más dificultoso, no baje de 3 metros; y cuando para conseguir esto sea necesario elevarse á más de 15 metros, se desecha el vértice obrando con él como se ha dicho antes.

Los observatorios deben construirse no solo con la altura necesaria para divisar el mayor número de vértices, sinó con la extensión necesaria también para que contenga el pilar de observación y la caseta de los operadores. La parte esencial de los observatorios es el pilar de observación que consiste en un prisma cuadrangular de mampostería, cuya base ha de tener la extensión conveniente para que quepan los aparatos que hayan de emplearse y de tal altura, que el observador pueda estar sentado al hacer las operaciones.

20. *Referencias.*—Sea cualquiera el caso de los dos considerados en que nos encontremos, se ejecutan las referencias que han de fijar el vértice, de la manera siguiente: en el punto preciso de la base inferior que corresponda á el vértice, se coloca una referencia que toma el nombre de *principal* y consiste en un sillar de piedra enterrado en el terreno y con un taladro que se rellena de plomo fundido; esta señal, se refiere á tres análogas convenientemente elejidas fuera de la señal, midiendo todos los ángulos y

líneas que entre estos cuatro puntos pueden considerarse, con el fin de hallar el vértice aún cuando desapareciera la obra de fábrica, la referencia principal y aún alguna de las tres que la fijan.

Edificada la señal, se fija en ella, por medio de una placa de bronce con sus diagonales bien marcadas, el punto preciso en que la vertical levantada en la referencia principal encuentra á la base superior; este punto sirve para la colocación exacta de la mira ó señal propiamente dicha y aún del aparato, si observatorio y señal forman una sola construcción; en este caso el pilar de observación se ha de construir en dicho punto precisamente.

21. *Señales*.—Según las condiciones de visibilidad del vértice, así las señales son simples miras ó heliotropos.

Las miras consisten en tableros, discos ó cruces de extensión superficial conveniente para que se presenten con buena apariencia en el campo del anteojo, pintados de negro y clavados en pértigas para que destaquen bien. Estas miras, sólo pueden emplearse cuando las observaciones son de día y el vértice se proyecta en el cielo.

Si el vértice se proyecta en el suelo, ó si las observaciones se han de hacer de noche, se recurre al empleo de las señales luminosas, empleando los heliotropos por el día y los colimadores por la noche.

Para dar, pues, por terminado cuanto es esencial para los vértices de la red de primer orden, describirémos someramente uno de los heliotropos y colimadores más empleados en la práctica.

22. *Heliotropo de Gauss, modificado por Brunner*.—

En su parte esencial, un heliotropo consiste, en un espejo plano, que recibiendo los rayos del sol, los refleja y envía en una dirección constante y determinada; si M , (figura 4.^a), es el espejo y $Q O P$ un cono luminoso incidente en el punto O , cuya abertura corresponda al diámetro aparente del sol, después de la reflexión obtendremos otro

cono $Q' O P'$ cuyo eje $O S'$ podrá dirigirse hacia un punto determinado, modificando para ello la inclinación del espejo; como lo dicho para el punto O , es aplicable á otro punto cualquiera del espejo, y todos los conos incidentes proceden del mismo origen, el observador percibirá por la unión de los conos reflejados, una imagen única de gran visibilidad y de forma regular que le permitirá hacer las observaciones fijando bien la puntería.

23. El heliotropo de Gauss, modificado por Brunner y que emplea en sus trabajos el Instituto Geográfico, consiste en esencia, en dos espejos planos M y N (fig. 5.^a), que se cortan en ángulo recto; si sobre la arista A incide un rayo luminoso $A S$ se reflejará á la vez en los dos espejos dando lugar á los rayos $A S'$ y $A S''$; más como quiera que los ángulos de incidencia α y β suman 90° y otro tanto ha de sucederles, por las leyes de la reflexión de la luz, á los ángulos m $A S'$ y n $A S''$, se comprende que estos rayos reflejados $A S'$ y $A S''$ estarán en línea recta: por lo tanto, si un observador colocado en S'' enfila con un anteojo la dirección de un vértice, y mueve los espejos hasta recibir el rayo $A S''$, tendrá la seguridad de que el $A S'$ pasa por dicho vértice y la señal queda establecida.

24. El heliotropo que nos ocupa, consiste, (fig. 6.^a) en un anteojo sostenido por dos collares C y C' montados á su vez en una horquilla ó plataforma que puede girar alrededor de un eje vertical con movimiento rápido y lento, mediante los tornillos T' y T de presión y coincidencia; un trípode con sus tres tornillos nivelantes sostiene el aparato y permite colocar verticalmente el eje del aparato.

El collar C está dispuesto para dar al anteojo movimientos rápido y lento alrededor de su eje óptico, como indica la primera de las figuras 6; formando cuerpo con el anteojo, hay una rueda dentada R , y una parte del collar B , giratoria en uno de sus extremos, puede hacer que en.

grante ó nó con la rueda un tornillo sin fin P'; cuando el engrane se verifica, el anteojo gira lentamente (posición (1)); si, por el contrario, la parte B del collar gira y ocupa la posición (2) no hay engrane y el anteojo gira libremente, dándose á mano este movimiento.

Hacia el objetivo, vá unido al anteojo un collar, del que arrancan dos aletas H, cuyos extremos llevan practicados los cojinetes de un eje alrededor del cual, y formando cuerpo con él, giran los espejos M y N; á un extremo de este eje se une un sector dentado S, uno de cuyos radios extremos forma parte integrante del espejo N; este sector, y con él los espejos, se mueve por la acción de un piñón dentado que se maneja con el botón P.

25. Para colocar en estación el heliotropo, después de nivelado y rectificado, se dirige la puntería al vértice á que vá á dirigirse la señal, valiéndose para conseguirlo, de los movimientos del aparato alrededor de su eje vertical; enseguida y haciendo uso de los giros rápido y lento del anteojo, se cambia la inclinación de los espejos hasta que los rayos incidan en su arista común, y por último, moviendo dichos espejos alrededor de su arista, mediante el botón P, se consigue que los rayos reflejados en el espejo N den la imagen del sol perfectamente bisectada por el hilo central del retículo que lleva el anteojo; ya hemos dicho, que obtenido esto, se tiene la seguridad de que la luz reflejada por el espejo M, pasa por el vértice á que previamente se dirigió la puntería.

Como los rayos del sol varían de inclinación por consecuencia del movimiento aparente del astro, el observador encargado del heliotropo debe mantener constantemente la imagen centrada en el retículo, por los movimientos combinados de los botones P y P'; y á fin de que la intensidad de la luz solar no dañe la vista en esta observación continua, el espejo N es de cristal negro y las observaciones se hacen á través de un vidrio rojo.

26. La apariencia de las señales solares, dentro de las distancias á que se opera, es mayor que la de una estrella de primera magnitud, de contorno bien definido, y que puede bisectarse fácilmente con el hilo central del retículo al dirigir las punterías al vértice así iluminado; pero tienen el inconveniente de que no pueden emplearse en buenas condiciones, más que en las primeras horas de la mañana, cuando el sol está aun poco elevado sobre el horizonte, y por la tarde de cuatro á una hora antes de la puesta del sol; esto reconoce por causa, que, cambiando constantemente en las horas intermedias, la densidad del aire por consecuencia de la acción variable del calor solar, presentan las imágenes obtenidas una especie de temblor que impide fijar las punterías. Por esta razón se utiliza muchas veces la noche para las observaciones, y así se ha hecho en la unión geodésica de España y Argelia, llevada á cabo por los geodestas españoles y franceses reunidos. Las únicas señales que en esta clase de trabajos pueden usarse, son las luminosas, mediante el empleo de un aparato, ideado por el coronel de ingenieros francés, Mr. Mangin, que describimos á continuación lijeramente.

27. *Colimador óptico, Mangin.*—La figura 7.^a representa la parte esencial del aparato; en el punto S se coloca una lámpara de petróleo (1), cuyos rayos atravesando un sistema convergente, formado por dos lentes plano-convexas n y n' , van á formar en F el foco conjugado del punto S; otra lente plano-convexa N, colocada de modo que su foco principal, coincida con F, recibe el cono de luz, cuyo vértice es este punto, y lo hace emerger paralelamente á su eje principal; con esto se consigue que los rayos emanados del punto S, sufriendo poca absorción, tengan un alcance que en buenas condiciones atmosféricas

(1) En la citada unión Geodésica se empleó la luz eléctrica.

llega hasta 40 kilómetros, presentando desde el vértice en que se observa una apariencia suficiente para ser bisecada con el hilo central del retículo. Un espejo cóncavo e , colocado de manera que su centro de curvatura esté en S , recoge los rayos de luz que salen en dirección contraria á las lentes, y reflejándolos, los concentra de nuevo en S , obligándoles así á pasar por las lentes, aumentando la cantidad de luz del haz principal.

Todo el sistema vá dispuesto, como indica la figura, en el interior de dos cajas prismáticas c y c' y el conjunto puede girar alrededor de un eje vertical, sostenido por un trípode con tornillos de nivelación; por último, unido al colimador hay un anteojo $L L'$, cuyo eje óptico es paralelo al del sistema de lentes $n n' N$.

28. Para manejar este aparato, se empieza por dirigir una visual con el anteojo al vértice á que se quiere enviar la luz (operación que debe hacerse de día; siendo el haz que emite la lente N , paralelo al eje óptico del anteojo, es evidente, que si la puntería está bien dirigida, la luz pasará por el vértice en cuestión, y la señal quedará así establecida. Este aparato tiene sobre los heliotropos la ventaja de no necesitar observación continua por parte del encargado de manejarlo, á causa de la inmovilidad de dirección del haz luminoso.

La apariencia de las señales producidas por un colimador, es la de una estrella de primera magnitud, de contorno bien definido y de una gran fijeza.

29. *Elección y preparación de los vértices de segundo y tercer orden.*—Hemos dicho antes, (7) que sobre los lados de la red de primer orden se apoyan otra série de triángulos cuyos vértices son puntos importantes del terreno, constituyéndose así la red de segundo orden. Se comprende, por lo tanto, que todos los lados y vértices de la red de primer orden han de formar parte de la de segundo, entrando como líneas nuevas, las que sirven para en-

lazar los vértices nuevamente elejidos. Son estos, además de los puntos del terreno que por cualquier causa no hayan podido entrar en la red de primer orden, teniendo condiciones para ello, todos los que, por definir variaciones ó accidentes notables del terreno, puedan acrecentar la idea de su estructura; y en fin, las poblaciones cabeza de partido judicial, y todos aquellos lugares habitados que tengan término municipal propio.

30. Como según hemos dicho, la longitud de los lados especiales de la red de segundo orden, es por término medio de 6 kilómetros, las señales y demás construcciones de fábrica han de ser pequeñas y sencillas. Cada vértice exige también señal y observatorio, solo que en esta red en que las observaciones han de ser de menos duración y á menor distancia, será menos frecuente el caso de que ambas construcciones hayan de estar separadas. Se hace, por lo tanto, en cada vértice un pilar-señal de forma prismático-cuadrangular, de un metro de altura y cuya sección sea lo suficiente para la colocación del aparato medidor de ángulos; este pilar se revoca de blanco para hacerlo más visible á distancia, puesto que ha de servir de mira; cuando la situación del vértice es tal, que la altura del pilar no basta para ser visible desde los demás, se construye primero una série, en número conveniente, de cuerpos prismáticos de un metro de altura, de manera que el último ó superior tenga metro y medio de lado, y los demás vayan creciendo de medio en medio metro; sobre el último cuerpo se construye el pilar-señal.

En todos los casos, la situación del vértice debe quedar fija por la referencia principal y á tres puntos próximos del terreno, lo que se efectúa del mismo modo que se dijo para la red de primer orden.

31. Sobre los lados de la red de segundo orden se apoya, por último, una nueva série de triángulos cuyos vértices han de reunir las condiciones asignadas en Topo-

grafía á los puntos trigonométricos; así se forma la red de tercer orden, cuyo enlace con las anteriores estriba en que, al terminar la formación del cánevas, todos los puntos y líneas de las dos primeras redes forman también parte de la tercera.

32. Cada vértice se fija, como se ha explicado, por tres referencias, y las señales consisten en un hito prismático de sillería, de treinta centímetros de lado en su base y de setenta centímetros á un metro de altura, enterrado en el suelo hasta que solo quede visible una altura de treinta centímetros; en el centro de su cara superior, lleva practicado un taladro de unos cuarenta centímetros de profundidad, que sirve para introducir el regatón de la banderola que constituye la verdadera señal; antes de colocar el hito, se extiende en el fondo de la excavación practicada una capa de carbón menudo y se clava un cilindro de bronce ó un clavo de hierro, para encontrar el vértice si por cualquier causa el hito desaparece.

CAPÍTULO SEGUNDO.

Plan general de un levantamiento geodésico.

(CONCLUSIÓN.)

33. *Consideraciones generales sobre la medida de la base.*—Formado ya de un modo definitivo el cánvas geodésico, debe procederse á la determinación y medida de sus distintos elementos, para lo cual se parte de una línea llamada *base*, que se mide directamente. Esta base debía ser precisamente uno de los lados de la red de primer orden, pero en la imposibilidad de medirlo directamente por su gran longitud y por la dificultad de hallar terreno apropiado, se mide una pequeña base, cuya longitud sea $\frac{1}{20}$ de la de los lados de la red y se la une al verdaderamente elegido como base, por medio de una red especial que se llama *red de enlace*.

34. El terreno para la medida de esta pequeña base (en general no excede de 2000 metros) se elije en una carretera bien conservada y recta y cuya pendiente no pase de tres grados sexagesimales; como trabajo preliminar habrán de hacerse pequeños desmontes y terraplenes para igualar las pendientes en aquellos puntos en que excedan del límite fijado.

Elejidos ya los extremos de la base y medida ésta dos veces con la cinta métrica, se forma el proyecto de la red de enlace, elijiendo en el terreno aquellos puntos

que puedan ser vértices, no adoptándose como definitiva la base hasta que se tenga seguridad de que enlaza con la red general en buenas condiciones.

35. Verificados todos los trabajos preliminares, se procede á señalar definitivamente los extremos de la base, por medio de dos hitos de sillería enterrados y en cuya cara superior se encastra una placa cuadrada de bronce, con sus diagonales marcadas, determinando por su intersección el punto preciso de que ha de partir y en que ha de terminar la medida; de 500 en 500 metros deben establecerse otras señales de la misma forma y condiciones y además las intermedias que se juzguen necesarias y todas situadas en la recta que une los extremos, lo que se efectúa del modo siguiente: instalado un teodolito en un extremo de la base y bien rectificado, se dirige una visual á una mira colocada en el otro, y haciendo cabecear el anteojo describirá un plano vertical, cuya traza sobre el terreno será la base y de la que pueden marcarse cuantos puntos se quieran, colocando jalones ó señales en los de intersección del terreno con un cierto número de visuales del anteojo en posiciones diversas; estas señales se colocan siguiendo las indicaciones del que maneja el teodolito; y en fin, debe marcarse en la misma línea un punto más allá del extremo en que haya de terminar la medición, con objeto de colocar bien la regla en su última posición.

36. Terminada la alineación, se procede á medir la base por medio de un aparato de reglas de extremada precisión, con las precauciones y método que corresponda al aparato empleado. Debe tenerse en cuenta, como regla sin excepción, que la base ha de medirse dos veces, en el mismo sentido, pero en cada día de la segunda medición se mide solo el trozo correspondiente á igual día de la primera; esto tiene por objeto reunir los datos necesarios no solo para saber la longitud de la base, sinó también los

errores probables de cada día, y, por lo tanto, el de toda la medida.

37. El valor así encontrado para la longitud de la base, debe sufrir algunas correcciones y reducciones antes de introducirlo en los cálculos de la red. Estas correcciones, son; *primera*, corrección de temperatura, por cuanto no se operará generalmente ni á aquélla para la cual la longitud de la regla es conocida, ni aún siquiera á temperatura constante; *segunda*, reducción á la horizontal, puesto que se ha medido en una pendiente determinada y lo que se busca es la distancia horizontal entre los extremos de la base; *tercera*, reducción al nivel del mar, con el fin de tener su longitud como arco de círculo máximo sobre la esfera de proyección ó comparación; y *cuarta*, algunas veces, la de reducción de una base quebrada á la línea recta, cuando la naturaleza del terreno ó la del aparato empleado, no permita efectuar la medición en sentido rectilíneo.

38. Por último, dependiendo la situación del cánvas de la que corresponde á la base, y con objeto de que la carta ó mapa que se construya luego, represente una figura semejante á la del terreno y semejantemente dispuesta, debe hacerse su orientación, lo que se consigue determinando el ángulo que la base forma con el meridiano que pasa por uno de sus extremos, ó en otros términos, hallando su *azimut*. Los procedimientos astronómicos, son los únicos que por su precisión se adaptan al carácter esencial de las operaciones geodésicas, por lo que, en lugar oportuno, estudiaremos los que se realizan por observaciones al sol y á la estrella polar, que son los más usados en la práctica.

39. *Consideraciones generales sobre la medida de ángulos.* Dos métodos pueden seguirse para la medida de los ángulos de la red y por lo tanto dos clases de aparatos son necesarios para esta medida. Los métodos son los de

repetición y reiteración y los aparatos los teodolitos repetidores y reiteradores.

Antes se medían los ángulos en el plano de los objetos mediante el empleo de los llamados *círculos repetidores*; pero las numerosas causas de error de que este procedimiento adolecía y que aunque brevemente citaremos en su lugar oportuno (capítulo 5.^o), ha hecho desecharse por completo este sistema, sustituyéndolo exclusivamente por el fundado en el empleo de los teodolitos que dan ya el ángulo, proyectando horizontalmente ó lo que es igual, *reducido al horizonte*; solo, pues, de este medio vamos á ocuparnos ahora, razonando acerca de las causas de que han nacido los dos métodos antes indicados.

40. Se sabe ya por Topografía, que los elementos esenciales de un teodolito, son: un limbo horizontal graduado que toma el nombre de *azimutal*, del que arranca un eje perpendicular á su plano y que pasa por su centro; sobre este eje gira una regla ó círculo con dos nónios opuestos y un anteojo que puede tener distintas inclinaciones en un plano vertical, girando alrededor de un eje horizontal; algunas veces, por debajo del limbo azimutal vá colocado otro anteojo que puede ó no, según convenga, girar con el limbo ó independientemente; este anteojo, cuyo uso veremos luego, toma el nombre de *antelojo de referencia*.

41. Para medir con un teodolito un ángulo cualquiera por una sola observación, basta colocar el cero de un nónio en coincidencia con el del limbo, y por los movimientos generales del aparato, dirigir la visual con el anteojo al objeto de la derecha ó al de la izquierda, según el sentido de las graduaciones del limbo; permaneciendo fijo éste, se lleva el anteojo por los movimientos particulares del círculo ó regla de los nónios, hasta que la visual pase por el otro punto del terreno; basta hacer la lectura en el limbo para obtener el valor pedido.

42. El ángulo que así se obtiene, está afectado de algunos errores cuya importancia y modo de corregirlos vamos á estudiar.

1.º *Excentricidad del limbo y la alidada.*—Se comete este error, cuando el centro del arco en que vá trazado el nóbio no coincide, por defecto de construcción, con el centro del limbo en que está el eje de giro, este error puede ser en más ó en menos, según que el centro de figura esté adelantado ó retrasado con respecto al de giro, y como no hay datos para determinarlo y su valor puede exceder al de apreciación del aparato, se recurre al medio de emplear dos nóbios situados en los extremos de un mismo diámetro de un círculo y hacer las lecturas de las fracciones de ángulo con los dos nóbios tomando luego su promedio; de esta manera, el error queda corregido por entero, pues lo que para un nóbio sea por exceso, para el otro será por defecto y en cantidad igual.

2.º *Falta de igualdad en las divisiones del limbo.*—También procede de defectos de construcción y esta desigualdad puede dividirse en *sistemática y accidental*. Se llama sistemática, cuando las divisiones á partir de un cierto origen, vayan constantemente creciendo ó decreciendo y reconoce por causa que al centrar el limbo en la máquina de dividir, no sea perfecta la coincidencia entre los centros de giro y de figura; es accidental, cuando las divisiones son mayores ó menores que las verdaderas, sin sujeción á ley determinada, lo que procede de falta de fijeza del estilete que marca las divisiones en la citada máquina. Al medir un ángulo por una sola observación, no se podrá, pues, considerar como exacta la lectura hecha, puesto que dependerá de la parte de limbo que se haya usado y se desconoce además el valor y sentido del error.

3.º *Error de lectura*—Por dos causas puede cometerse; la primera y principal estriba en la dificultad de apreciar con exactitud qué división del nóbio coincide con

una del limbo; este error, que puede llegar á valer la apreciación del aparato, es tanto más fácil de cometer, cuanto mayor sea el número de divisiones del nóio; pues que se sabe que en este caso, varias divisiones del nóio parecen estar en coincidencia con otras tantas del limbo y hay indeterminación al adoptar una. Otra causa que, aunque en pequeña escala, influye en el error de lectura, consiste en que las divisiones del nóio y limbo tienen sección triangular, una de cuyas caras estará generalmente en sombra y la otra, iluminada, lo que puede ser causa de que las coincidencias se establezcan por las caras en sombra; pero este error resulta aminorado ó casi destruido haciendo las lecturas con los dos nóios á causa del cambio de sombras en ambas mitades del limbo.

4.^o *Error de puntería.*—Se compone de dos partes; el error de puntería propiamente dicho y el de fase. El primero procede de la dificultad de centrar el retículo exactamente en el eje de la señal; y el de fase, consiste en que se toma como eje de la señal, el que solo lo es de la cara ó parte iluminada por el sol. Este último puede evitarse midiendo un mismo ángulo en dos horas muy distintas del día, pues que la marcha del sol hará que en la segunda operación esté iluminada la parte que en la primera estaba en sombra, y viceversa.

5.^o *Error de arrastre.*—Que se comete cuando, al dirigir la segunda visual, se afina la puntería con los movimientos lentos del círculo de los nóios; produciéndose este movimiento por un tornillo de coincidencia, después de unir el círculo al limbo por otro de presión, podrá suceder que, aunque en pequeña cantidad, giren los dos círculos á un tiempo y el cero cambie de posición.

A evitar este error obedece la colocación del antejo de referencia que antes citamos (40); como hemos dicho, este antejo puede girar con el limbo ó independientemente de él; por lo tanto, si dirigida la primera visual,

hacemos girar solo el anteojo de referencia, hasta que la visual por él dirigida pase por un punto bien marcado del terreno y entonces lo unimos al limbo, podrémos saber, al terminar la operación si ha habido arrastre y destruirlo rectificando la puntería de dicho anteojo auxiliar.

43. Hay, pues, un cierto número de errores, como son los de desigualdad de las divisiones, primero de lectura y primero de puntería, que no pueden corregirse midiendo los ángulos por una sola observación.

Para evitarlos, se recurre á dos procedimientos especiales, llamados de *repetición* y de *reiteración*, que si no destruyen los errores, los amenguan, y que consisten: el de *repetición*, en medir un mismo ángulo un cierto número de veces y sin solución de continuidad en los arcos correspondientes, no haciendo más lecturas que la primera y la última, y tomando por valor del ángulo el cociente de dividir el arco total recorrido por el nóio, por el número de veces que se haya repetido la operación; el de *reiteración*, en medir un mismo ángulo sobre distintas regiones del limbo, haciendo siempre las dos lecturas y procurando que al terminar la operación entre los dos nóios se haya recorrido todo el limbo; se toma para valor del ángulo, la suma de los arcos obtenidos dividida por el número de reiteraciones. Mas adelante estudiaremos detenidamente ambos procedimientos y verémos hasta que punto se compensan los errores indicados que, en su conjunto, toman el nombre genérico de *errores de observación*.

44. En el caso en que por las condiciones del terreno, se haya hecho estación en un punto que no sea el vértice verdadero, es preciso reducir el ángulo medido al que hubiera sido de operarse en el punto verdadero; á esta operación, que en su lugar detallaremos, se la denomina *reducción al centro de estación*; y en fin, cuando se haya medido el ángulo en el plano de los objetos, se obtiene el



valor de su proyección horizontal, que es lo que se necesita, verificando la llamada *reducción al horizonte*, que aunque ligeramente trataremos también en el momento oportuno.

45. *Cálculo de los triángulos; teorema de Legendre.* (Véase apéndice 2.º).—Determinada la longitud de la base ya reducida al nivel del mar, y medidos los ángulos del cáncas, se procede, por el cálculo, á determinar la longitud de los demás lados, resolviendo una serie de triángulos; siendo una esfera la superficie de comparación, sobre la cual se suponen colocados los vértices, los triángulos que los enlazan serán también esféricos, y los cálculos resultarán largos y enojosos, si un teorema, debido á Legendre, y que vamos á exponer someramente, no permitiese convertirlos en planos (para los efectos del cálculo) y aplicar las fórmulas, más sencillas, de la Trigonometría rectilínea.

46. TEOREMA.—*La suma de los tres ángulos de un triángulo esférico de lados cortos (1), excede de 180º en una cantidad muy pequeña, que se llama exceso esférico.*

Como consecuencia de este teorema, veremos también que *este triángulo esférico puede sustituirse por uno plano, que tiene por lados la longitud de los arcos del esférico, y por ángulos, los de éste, disminuídos en el tercio del exceso.*

47. Para demostrar el teorema, sea A B C, (fig. 8.^a) un triángulo de lados cortos situado en una esfera cuyo centro sea O; representemos por a , b y c los valores graduales de los lados y por α , β y γ sus longitudes ó desarrollos; tomando por unidad el radio R de la esfera, se tendrá, evidentemente

$$a = \frac{\alpha}{R} \quad b = \frac{\beta}{R} \quad c = \frac{\gamma}{R}$$

(1) Teniendo en cuenta la magnitud del radio de la tierra, siempre estaremos en este caso, aún en la red de primer orden.

por lo que, sustituyendo estos valores en la fórmula fundamental

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}$$

se obtendrá:

$$\cos. A = \frac{\cos. \frac{\alpha}{R} - \cos. \frac{\beta}{R} \cos. \frac{\gamma}{R}}{\sin. \frac{\beta}{R} \cdot \sin. \frac{\gamma}{R}}$$

desarrollando en série los senos y cosenos, despreciando los términos que tengan potencias de R, superiores á la cuarta y efectuando todas las operaciones sucesivamente indicadas, se llega á la expresión,

$$\cos. A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2 \cdot \beta \cdot \gamma} + \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2 \cdot \alpha^2 \beta^2 - 2 \cdot \alpha^2 \gamma^2 - 2 \cdot \beta^2 \gamma^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \beta \gamma \cdot R^2}$$

Para que este valor de cos. A pueda corresponder á un triángulo plano, basta suponer $R = \infty$ y llamando A' al ángulo correspondiente, se tendrá:

$$\cos. A' = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2 \cdot \beta \gamma}$$

de donde,

$$\begin{aligned} \sin.^2 A' &= 1 - \cos.^2 A' = \\ &= \frac{2 \cdot \alpha^2 \beta^2 + 2 \cdot \alpha^2 \gamma^2 + 2 \cdot \beta^2 \gamma^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4}{4 \cdot \beta^2 \gamma^2}; \end{aligned}$$

comparando esta fracción con el valor obtenido para cos. A, se tiene:

$$\cos. A = \cos. A' - \frac{\sin.^2 A' \cdot \beta \gamma}{2 \cdot 3 \cdot R^2}.$$

y como llamando S al área del triángulo plano, tiene por expresión:

$$S = \beta \gamma \cdot \frac{\text{sen. } A'}{2}$$

la fórmula anterior, se convierte en

$$\cos. A = \cos. A' - \frac{S}{3 \cdot R^2} \cdot \text{sen. } A'.$$

Siendo muy pequeña la fracción $\frac{S}{3 \cdot R^2}$ por ser R el rádio de la tierra, puede considerarse que dicha fracción mide un arco cuyo coseno es igual á la unidad y cuyo seno es el mismo arco, y llamando $\left(\frac{e}{3}\right)''$ el valor gradual en segundos de dicho arco, se tendrá:

$$\frac{S}{3 \cdot R^2} = \text{sen. } \left(\frac{e}{3}\right)'' \cdot \cos. \left(\frac{e}{3}\right)'' = 1$$

por lo cual, la fórmula anterior puede ponerse bajo la forma:

$$\cos. A = \cos. A' \cdot \cos. \left(\frac{e}{3}\right)'' - \text{sen. } A' \cdot \text{sen. } \left(\frac{e}{3}\right)''$$

ó lo que es igual

$$\cos. A = \cos. \left(A' + \frac{e}{3}\right);$$

para lo que es necesario se verifique

$$A = A' + \frac{e}{3} \quad \text{ó sea} \quad A - A' = \frac{e}{3}$$

y como, análogamente se tendría

$$B - B' = \frac{e}{3} \quad \text{y} \quad C - C' = \frac{e}{3}$$

sumando las tres igualdades, se deduce, en fin:

$$e = A + B + C - (A' + B' + C')$$

y poniendo en vez de $A' + B' + C'$ su valor

$$e = A + B + C - 180^\circ$$

que demuestra el teorema.

48. La consecuencia que se obtiene de la proposición demostrada, es que el área del triángulo esférico diferirá muy poco de la del triángulo plano, puesto que el ángulo A' que entra en esta, es casi igual al ángulo A ; la extensión de terreno abarcada por el triángulo plano, puede, por lo tanto, considerarse igual á la que abarca el esférico y pudiéndose aplicar las fórmulas de la trigonometría plana, se simplifican mucho los cálculos.

49. *Casos en que debe conocerse el exceso esférico y modo de calcularlo.*—Si los tres ángulos de cada triángulo se encontrasen sin ningún error de observación, bastaría, para convertirlos en planos, quitar de cada uno el tercio del exceso esférico. Cuando sean conocidos los tres ángulos, que es el caso de las redes de primero y segundo orden, puede hacerse la conversión sin necesidad de calcular previamente el exceso esférico; en efecto, representemos por δ la diferencia entre la suma de los tres ángulos y 180° ; en ella están englobados los errores de observación y el exceso esférico, restando, pues, de cada ángulo $\frac{\delta}{3}$

obtenemos exactamente los ángulos del triángulo plano buscado. Mas cuando uno de los vértices quede determinado solo por la intersección de dos líneas, es decir, cuando se conozcan solamente dos ángulos, es preciso hallar el exceso esférico, pues de lo contrario, el tercer ángulo, determinado por la fórmula

$$C' = 180^\circ - (A' + B')$$

resultaría con menor valor que el verdadero; en este caso, se quita de cada ángulo A y B el tercio del exceso esférico y quedarán dos valores afectados de los errores de observación, que se compensan por medio de ecuaciones de que

hablarémos en lugar oportuno, pudiendo obtenerse ya con exactitud el tercer ángulo.

50. Además de este caso, se debe calcular el exceso esférico de un triángulo, aunque se conozcan sus tres ángulos, cuando se quiere apreciar el grado de perfección con que se han hecho las operaciones prácticas; por que si llamamos δ la diferencia entre la suma de los tres ángulos hallados y 180° y representemos por Σ el exceso esférico, es indudable que

$$\Delta = \delta - \Sigma$$

representará el total de los errores de observación y permitirá hacer la crítica del método seguido en las observaciones.

51. Y, por último, se calculará el exceso esférico para todos los triángulos de la red general, cuando la importancia del levantamiento exija que la compensación general de errores se efectúe con gran precisión, como ocurre con la formación del mapa de un estado ó región importante del globo, ó cuando la red tiene por objeto la medición de un arco extenso de paralelo ó meridiano terrestre.

52. Es preciso, pues, saber encontrar el exceso de un triángulo esférico de lados cortos. Al demostrar el teorema de Legendre, hemos visto que se le ha llamado e , y tiene por expresión:

$$e = \frac{S}{R^2}$$

siendo S el área del triángulo plano equivalente, y R el radio de curvatura terrestre, sustituyendo por S su valor

$$S = \frac{1}{2} \beta \gamma \cdot \text{sen. } A'$$

el exceso esférico resulta ser

$$e = \frac{1}{2 \cdot R^2} \cdot \beta \gamma \cdot \text{sen. } A'$$

En la práctica, para simplificar esta expresión, se re-

presenta por K el valor gradual en segundos del arco cuya longitud es $\frac{1}{2 \cdot R^2}$ por lo que se tiene

$$K = \frac{1}{2 \cdot R^2 \cdot \text{sen. } 1''}$$

y sustituyendo en la fórmula que dá el valor del exceso esférico,

$$e = K \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \text{sen. } A'.$$

Para calcular esta expresión, se resuelve aproximadamente el triángulo para conocer β y γ tomando por valor de A' el deducido de la observación; de esta manera se obtiene para e un valor que no es el verdadero, pero que difiere muy poco de él, y cuya diferencia se engloba con los errores de observación y se compensa al mismo tiempo que estos.

53. Efectuadas todas estas operaciones y convertido en planos de triángulos de la red, se calculan sus elementos lineales, partiendo del triángulo que contiene la base, por las fórmulas de trigonometría rectilínea correspondiente á los datos de cada uno.

54. *Formación de la carta.—Necesidad de un sistema coordinado.—Su composición y nombres de las coordenadas.*—Realizadas ya las operaciones prácticas, y efectuados los cálculos hasta el presente indicados, podría dibujarse el cánvas de triángulo en triángulo, según la escala adoptada; mas como así los errores gráficos inevitables irían acumulándose y no habría medios de conocerlos ni atenuarlos, destruyéndose quizás al dar al plano forma tangible la precisión alcanzada en las operaciones, es conveniente y así se hace en la práctica, referir todos los vértices á un sistema de tres ejes rectangulares y calcular sus coordenadas; de este modo, cada vértice se fija en el papel independientemente de los otros, y además los datos del cánvas dán una comprobación que antes no exis-

tia. Podemos decir, por lo tanto, que el cálculo de coordenadas tiene por objeto la determinación de cada vértice por un segundo sistema de valores que comprueban á los primeros, y son, á su vez, comprobados por estos.

Como las operaciones prácticas necesarias para determinar las coordenadas de un punto son largas y delicadas, se llevan á cabo solamente para uno ó un número limitado de puntos, según la importancia del levantamiento, deduciéndose las de los demás por el cálculo con toda la precisión que éste permite. Habrá así vértices cuyas coordenadas puedan obtenerse en función de dos puntos por lo menos; es regla general calcularlos por los dos caminos, para tener siempre comprobación en los resultados.

55. El sistema rectangular á que se refieren los puntos del terreno, tiene dos ejes curvilíneos, situados en la esfera de comparación, y cortándose ortogonalmente, y el tercero es una línea recta, normal á la citada superficie. Las coordenadas curvas de un punto, se llaman *latitud* y *longitud*, cuyos nombres provienen de la opinión de los antiguos geógrafos, que consideraban la tierra plana, y por lo tanto, dotada de ancho y largo; la tercera coordenada, se llama *altitud*, mide la elevación del punto sobre la superficie de comparación, y se determina mediante un conjunto de operaciones y cálculos, que toma el nombre de *nivelación*.

Los ejes curvos del sistema coordenado, son, uno de los meridianos de la tierra, que toma el nombre de *principal* y el ecuador terrestre.

56. *Definición de latitud y longitud geográficas.*— Se llama *latitud* de un punto, al arco del meridiano que pasa por él, comprendido entre dicho punto y el ecuador; en la figura 9.^a, E A, es la latitud del punto A. Las latitudes se cuentan de 0° á 90°, desde el ecuador á cada polo, llamándose *boreal* ó *austral*, según el hemisferio en que esté situado el punto. De la definición de latitud se

deduce, que todos los puntos de la tierra situados en un mismo paralelo tienen igual la primera coordenada.

57. Llámase longitud geográfica de un punto al arco de ecuador (ó de paralelo) comprendido entre el meridiano principal y el que pasa por el punto considerado; en la citada figura 9.^a, y suponiendo que $P P'$ sea la proyección del meridiano principal, $E e$, representa la longitud del punto A ; como en dicha figura se vé que, siendo $A A'$ el paralelo ó círculo menor que pasa A , el valor gradual del arco $E e$ es igual al del arco $A a$, se comprende, porque hemos definido la longitud, refiriéndola indistintamente al ecuador ó al paralelo del punto propuesto. Las longitudes se cuentan de 0° á 180° á derecha é izquierda del meridiano principal, llamándose *oriental* en el primer caso, y *occidental* en el segundo. Según se desprende de la definición, todos los puntos situados en el mismo meridiano terrestre, tendrán la misma longitud.

58. *Consideraciones generales sobre la determinación práctica de las coordenadas geográficas.*—Para determinar prácticamente la latitud de un lugar, no puede hacerse uso de la anterior definición (56) por cuanto exige que se mida un arco de meridiano (1), operación difícil, si ha de ser precisa y que constituye uno de los trabajos científicos más importantes de la Geodesia superior. La determinación de esta coordenada se hace por observaciones astronómicas relativamente sencillas; para comprender su esencia es preciso demostrar que la latitud de un lugar puede definirse también, diciendo que es *el ángulo de altura del polo visible, sobre el horizonte de dicho lugar*.

Sea, para ello, (fig. 9.^a) A el punto cuya latitud $E A$ se quiere determinar; el radio $O A$ prolongado determina en $A C$ la vertical del punto A y el plano $M M'$, tangente en A á la esfera terrestre, representa en dirección el horizonte de dicho punto; si por A consideramos trazadas, la

(1) Véase apéndice 3.º

recta A E' paralela al rádio O E del ecuador y la A B paralela también al eje de la tierra P P', habremos formado dos ángulos C A E' y B A M' iguales por tener sus lados perpendiculares: pero el primer ángulo es igual al A O E que mide la latitud del lugar y el segundo representa la altura del polo P sobre el horizonte M M', puesto que, por la gran distancia á que se halla dicho polo celeste, la visual que á él se dirijiera desde A podría considerarse paralela á P P', y por lo tanto, confundida con A B; luego la igualdad de estos ángulos demuestra la identidad de las dos definiciones de latitud.

59. Si en el punto preciso del polo visible existiese un astro cuya posición, por lo tanto, fuese invariable, sería suficiente dirijir una visual á dicha estrella para tener determinada la latitud; más como esto no sucede, ni por otra parte es necesario, vamos á probar que midiendo la distancia zenital de una estrella cualquiera, cuya distancia polar sea conocida, en el momento que pase por el meridiano del lugar, puede determinarse la latitud. En efecto, supongamos, (fig. 10), que sea A el punto cuya latitud se quiere hallar y considerémos trasladada á este punto la parte de la figura 9.^a situada á la izquierda de la recta M M'; en la figura 10, las líneas M M', A B, A C y A E representan, pues, los mismos datos que se han dicho al tratar de la 9.^a; si A S representa en dirección la visual dirijida á un astro cuando pasa por el meridiano de A, y se conoce de este astro la distancia polar B S, el ángulo S A C, y por lo tanto, el arco S C mide la distancia zenital de la estrella indicada; como se tiene

$$B C = B S - S C$$

la latitud B M queda determinada por la expresión,

$$B M = 90^{\circ} - B C$$

ó sustituyendo

$$B M = 90^{\circ} - B S + S C.$$

En la práctica se usa, sin embargo, una fórmula más

sencilla en función de la declinación del astro y su distancia zenital; más como por ahora no conocemos las coordenadas de un astro y el objeto de esta parte es solo dar una idea de como puede obtenerse la latitud de un punto, más adelante deduciremos dicha fórmula al ocuparnos de estudiar la parte práctica del asunto.

60. Si se tratase de hallar la longitud de un lugar aplicando estrictamente la definición dada antes (57), sería preciso medir un arco de ecuador ó paralelo, operación que presenta las mismas dificultades citadas al hablar de la latitud.

Pero si consideramos que en el espacio de 24 horas y á causa del movimiento de rotación de la tierra, pasan por debajo del meridiano principal, supuesto fijo, todos los puntos del ecuador, podremos deducir por diferencia de horas entre dicho meridiano principal y otro cualquiera, la longitud de este último; en efecto, si en 24 horas pasan por el meridiano 360° , en una hora pasarán:

$$\frac{360^{\circ}}{24} = 15^{\circ}$$

en un minuto,

$$\frac{15 \times 60'}{60} = 15'$$

y en un segundo,

$$\frac{15 \times 60''}{60} = 15''$$

cuyas expresiones permiten reducir fácilmente tiempos á arcos y viceversa: así, pues, conociendo en un momento preciso la hora de dos meridianos, hallando su diferencia y empleando las equivalencias anteriores, se hallará la longitud de uno con respecto al otro.

Supongamos, para fijar las ideas, que nos colocamos en el meridiano cuya longitud se quiere conocer, con un cronómetro que marque la hora verdadera del meridiano principal y con otro que señale la local; si determinamos el momento preciso en que el sol, por ejemplo, pase por

el meridiano considerado, en cuyo momento deben ser las 12 de hora local, y compararnos esta hora con la que señale el cronómetro principal, tendremos todos los datos necesarios: supongamos primero, que el reloj local atrasa, es decir, que son, por ejemplo las 12^h 5^m y 6^s en el principal cuando el local marca las 12; esto nos dice que el sol ha pasado ya por el meridiano principal, ó lo que es lo mismo, que la longitud es oriental y cuyo valor se determina multiplicando las diferencias 5^m y 6^s por sus equivalencias en arco, resultando ser 1° 16' y 30"; si el reloj local adelanta, la longitud es occidental y su valor se determina del modo dicho.

61. Cuando la longitud se determina desde luego con respecto al meridiano principal, se obtiene la longitud propiamente dicha, más si se encuentra la diferencia de horas entre un meridiano cualquiera y otro de longitud conocida pero que no sea el principal, lo que se obtiene se llama diferencia de longitudes entre dichos meridianos; conocido este dato, basta sumarlo con la longitud conocida del meridiano que ha servido de base para obtener la del pedido. Es, pues, necesario, partir siempre de una primera longitud tomada con respecto al meridiano principal.

62. Tales son en esencia los fundamentos en que descansa la determinación práctica de las coordenadas curvas de un punto cualquiera; en su lugar oportuno, estudiaremos ligeramente la práctica de las observaciones.

63. Réstanos hacer ver, como en función de un primer azimut y de la latitud y longitud de un extremo de una línea orientada, pueden determinarse las coordenadas geográficas de los demás puntos y los azimutes de las demás líneas que constituyen la red, siempre en la hipótesis de que la tierra es esférica.

Supongamos, (fig. II), que el arco A B representa la base medida y orientada en A y sean P A y P B los meridianos que pasen por sus extremos; limitando estos meri-

dianos en los puntos A' y B' en que cortan al ecuador, el arco A' B' que mide el ángulo esférico en P es, por definición, la diferencia de longitudes entre A y B. En el triángulo esférico P A B, se conocen los datos siguientes: el arco P A, complemento de la latitud de A que suponemos conocida de antemano; el lado A B, longitud de la base medida y reducida al nivel del mar; y, por último, el ángulo P A B igual al azimut conocido de la base *a' b' c' d'*, disminuido en 180° . Puede, pues, resolverse el triángulo y conocerse los elementos que siguen: el ángulo P B A igual al azimut de la base en el punto B; el ángulo en P, que es la diferencia de longitudes entre A y B; y el arco P B que restado de 90° dá la latitud buscada del punto B.

64. Como en realidad estos cálculos no son esenciales prescindimos de ellos y damos las fórmulas empleadas en la práctica en el apéndice 7.^o, letra (A) con las modificaciones introducidas por no ser la tierra una esfera perfecta y si un elipsóide cuyos elementos hipotéticos se han determinado por el cálculo.

65. *Consideraciones generales sobre la determinación de altitudes.*—La série de operaciones y cálculos que tiene por objeto la determinación de la altitud ó tercera coordenada de cada vértice de la red, constituye la *nivelación*. El método que se sigue, es partir de un punto de altitud conocida y determinar la diferencia de nivel entre cada dos puntos; para esto, se halla la distancia zenital de la recta que une dos vértices cualesquiera ó sea el ángulo que esta recta forma con la vertical del punto de estación. Siempre que sea posible, se determinan las distancias zenitales recíprocas ó sean los ángulos que la citada línea forma con las verticales de sus dos extremos, ángulos cuya suma ha de ser igual á 180° mas el ángulo de las verticales, puesto que estas, en geodésia no pueden considerarse como paralelas. Hay que tener en cuenta, además, el error de elevación que á las visuales dirigidas imprime la

refracción atmosférica. Y, en fin, con todos estos datos, se establecen como veremos en su lugar oportuno, las fórmulas generales de las diferencias de nivel, conocidas las cuales y por sencillas sumas algebraicas, se obtienen las altitudes aproximadas de todos los vértices de la red general. Hasta aquí se ha empleado exclusivamente el procedimiento llamado en Topografía de nivelación por ángulos verticales.

66. Partiendo de estos vértices, y usando el método llamado de *nivelación* por visuales horizontales, se ejecuta, por los procedimientos prácticos que en su lugar veremos y que solo difieren de los topográficos en la precisión de los aparatos empleados y precauciones en su manejo, la llamada *nivelación de precisión* en todas las líneas principales del levantamiento, sean carreteras, vías férreas, corrientes de agua, etc., etc.

El conjunto de ambas nivelaciones proporciona el conocimiento del relieve del terreno.

67. Por último, ejecutados ya todos los trabajos de campo y cálculos correspondientes, se procede al dibujo de la carta con las precauciones y método que corresponden a la extensión de terreno levantada, valiéndose para ello, de los métodos gráficos que más adelante estudiaremos con el nombre genérico de *proyecciones*.

68. Hemos dado hasta aquí cuenta de los procedimientos generales y orden que se sigue en las operaciones de un levantamiento geodésico; esto permite formarse idea de como, por medio de la Geodesia, puede llegarse á determinar con aproximación suficiente, la forma y dimensiones de nuestro planeta y el caso más restringido en que solo se quiere levantar el mapa de un país ó región del globo. Podemos ya descender á los detalles, estudiando en los capítulos siguientes los aparatos empleados en cada caso, métodos de observación y marcha de los cálculos y observaciones generales.

CAPÍTULO TERCERO.

Medida precisa de una base.

(DESCRIPCIÓN, USO Y FÓRMULAS DEL APARATO DE REGLA IBÁÑEZ.)

69. PRELIMINARES.—La medida de una base en Geodesia, dado el límite de precisión que han de alcanzar los resultados y la importancia que por ello tiene dicha línea, solo puede efectuarse con un aparato de reglas, dotado de todos los elementos precisos para que las operaciones resulten con una exactitud que es verdaderamente pasmosa.

Numerosos sistemas de aparatos de reglas se han conocido y usado, desde el método de simples reglas en contacto, con el que ya en 1740 se midieron bases con un error probable de $\frac{1}{30.000}$ de la distancia medida.

Entre los principales sistemas que realmente admiten ya el nombre de aparatos completos, están: el de Borda, cuyo error de medición era $\frac{1}{200.000}$ de la longitud; el de Tenner, que dá un error de $\frac{1}{300.000}$; el de Colby, cuyo error es ya solo de $\frac{1}{400.000}$; el de Struve, con $\frac{1}{1.200.000}$ el de Bessel, $\frac{1}{600.000}$ el de Porro, mejorado por Secchi, que dá la medida con un error de $\frac{1}{1.200.000}$.

y que puede considerarse como origen de los dos siguientes: el de la Comisión del Mapa de España, proyectado en 1853, por el, entónces, Comandante de Ingenieros Don Carlos Ibáñez y el Capitán de Artillería D. Frutos Saavedra, y con el cual se midió la base central de Madridejos, de 14 $\frac{1}{2}$ kilómetros de longitud, con un error probable de

$\frac{1}{5.800.000}$ de la medida, resultado notabilísimo y cali-

ficado por sábios eminentes como el *non plus ultra* de las mediciones precisas; y en fin, el aparato Ibáñez, empleado hoy por el Instituto Geográfico y único que estudiaremos con detalles; este aparato dá la medida de bases con un

error probable de $\frac{1}{2.200.000}$, resultado también nota-

ble y superior al de todos los aparatos anteriores, excepto el del Mapa de España.

70. La índole especial de estas nociones nos veda entrar en detalles, hasta cierto punto innecesarios, por lo que omitimos la descripción de estos diversos sistemas, limitándonos á decir que, todos los anteriores al de Porro (1850) emplean, por lo menos, dos reglas metálicas, de longitud rigurosamente determinada á temperatura conocida y dotadas de los necesarios termómetros, niveles y anteojos ó pinulas, para su establecimiento en la alineación general, medida de sus inclinaciones y correcciones de temperatura. El empleo de dos ó varias reglas tiene el grave inconveniente (y de aquí los límites excesivos de sus errores comparados con los que les siguen) de que al colocar las reglas, una á continuación de otra, hay que hacerlo forzosamente con solución de continuidad, para evitar que la colocación de una regla trajera por su choque con la ya colocada, algún desvío en la posición de ésta; esas soluciones de continuidad había luego que medirlas bien por reglitas adicionales, lengüetas graduadas, cuñas de cristal, etc., etc., introduciéndose así una série

numerosa de errores de lectura que influían y aumentaban el error probable de toda la medición: además los desgastes y modificaciones naturales de las superficies en contacto, alteraban de tiempo en tiempo la longitud de cada regla, obligando á efectuar de nuevo su comparación ó contraste con la medida tipo, cuya operación tiene gran dificultad por la minuciosa exactitud con que debe efectuarse.

Porro fué el primero que ideó emplear una sola regla, colocándola señales que permitían por medio de microscopios fijos, situar el principio de cada posición de la regla exactamente donde había terminado la anterior, evitándose así choques ni soluciones de continuidad. Este aparato, mejorado notablemente por el P. Secchi, que sustituyó la regla de madera de Porro por una metálica, formada de dos metales (hierro forjado y latón), unidas por el centro y libres de dilatarse en los extremos, fué empleado con gran éxito por el Observatorio de Roma, en 1855, en la medición de una base en la Vía Appia.

Al mismo sistema obedece ya el aparato empleado por la Comisión del Mapa de España, y también el más sencillo del sábio Director del Instituto Geográfico, General D. Carlos Ibáñez, que, según hemos dicho, es el único que vamos á estudiar algo detalladamente.

Basta, pues, esta ligerísima reseña para punto de partida de nuestro trabajo.

71. DESCRIPCIÓN DEL APARATO IBÁÑEZ. — Para comprender claramente la precisión que puede alcanzarse con este aparato, nos bastará decir que, en concepto de experiencia, midió su autor, al presentarlo, tres bases, midiendo cada una de ellas dos veces, y que los valores obtenidos con una de ellas, son:

Base B.	1. ^a medición....	2359 ^m .3044	
	2. ^a id.....	2359 ^m .3038	
	Diferencia...	0 ^m .0006	(1)

(1) Ibáñez. — *Nuevo aparato de medir bases geodésicas.*

72. Las partes esenciales de este aparato, que por separado describiremos detalladamente, son: la regla, los soportes, los portamicroscópios, los anteojos de referencia y alineación, la mira, los diversos retículos, la reglita adicional; y, en fin, la señal y referencia de término.

73. *Regla.* (fig. 12).—Es de hierro forjado, de sección en forma de T invertida y de una longitud de 4^m próximamente. En los extremos de la regla é incrustadas en su canto superior, hay dos chapitas de plata *r*, con un trazo marcado en dirección perpendicular á la longitud de la regla; otras siete chapas intermedias la dividen, con las anteriores, en ocho partes iguales; cuatro termómetros *t* ván adosados al nervio de la regla, teniendo sus depósitos medio incrustados en su espesor y rodeados con limaduras del metal que ha servido para construirla; la escala de estos termómetros aprecia décimas de grado. Sobre el canto superior y sujeto por unos ganchos que permiten trasladar la regla sin quitarlo, hay un nivel de burbuja *N*, que puede girar alrededor del punto *O*, por la acción de un tornillo *T*, marcándose el ángulo recorrido en un arco *A*, cuyo cero corresponde á la horizontal. Por último, dos placas de latón *p* ván unidas á su cara inferior, y cuatro asas *a* facilitan su manejo. El objeto de la sección dada á la regla es disminuir su peso sin aumentar la flexión.

74. *Soporte.*—Aun cuando solo son necesarios dos, acompañan cuatro al aparato para la mayor rapidez en las operaciones. Consiste, (fig 13), en una meseta circular, provista de tres brazos con sus correspondientes tornillos de nivelación *t*; de esta meseta arranca un manguito en que enchufa el eje vertical del aparato, y ambos pueden formar cuerpo apretando el tornillo de presión *P*; este eje es hueco y vá roscado en su interior, sirviendo de tuerca á un tornillo *z*, que gira sin avanzar, por lo que la tuerca y con ella todo el aparato, toma un movimiento en sentido vertical que permite cambiar la altura del soporte. A este

eje-tuerca, se une una plataforma *n*, labrada á cola de milano, que encaja en unas guías practicadas en otra plataforma *M* colocada en su misma dirección; mediante un tornillo *Y*, cuya tuerca fija está en *n*, se dá á la plataforma *M* movimiento de traslación en un plano horizontal y en sentido paralelo á la longitud de la regla; á su vez, la plataforma *M* lleva las guías *S* de otra *R*, perpendicular á ella y que por el tornillo *X*, análogo al *Y*, puede trasladarse horizontalmente en dirección perpendicular á la anterior: tiene, pues, el soporte tres movimientos de traslación rectangulares, mediante los que puede ponerse la regla á la altura y en la dirección convenientes. Sobre la plataforma *R* ván colocadas las mordazas *m m'*, compuestas de una parte fija *m* y de una móvil *m'* que puede aproximarse ó alejarse con el tornillo *Q*; un cilindro de latón *C* vá unido á dos salientes de la plataforma, pudiendo girar en sus cojinetes; sobre este cilindro se apoya la regla en el trozo correspondiente á la chapa de latón, *p* (fig. 12), y apretando la mordaza se la puede fijar en la posición conveniente; en fin, un nivel *N* tiene por objeto colocar horizontal la plataforma.

75. *Porta-microscópio*.—Por la misma razón que hemos dicho en los soportes, el aparato lleva cuatro. Uno cualquiera de ellos, consiste, (fig. 14), en una plataforma con tornillos de nivelación que solo se diferencia de la descrita anteriormente, en que carece de movimiento vertical, y en que el eje es hueco para poder ver el terreno, á través de él y de las aberturas practicadas en las distintas plataformas del aparato, dotadas de movimientos rectangulares horizontales; sobre la última plataforma, hay otra anular, que puede tener movimientos de rotación rápido y lento por la acción combinada de los tornillos *T* y *T'* de presión y coincidencia; sobre esta plataforma anular está colocada otra *P* que sostiene la parte esencial del porta-microscópio; de esta plataforma y en uno de sus bordes

arranca una escuadra vertical fija E' , á lo largo de la cual, puede correr, por la acción del tornillo t , otra escuadra $a b c d$, con su borde tallado en bisel y una chapita de plata r con un trazo marcado en la dirección $c d$; un saliente E unido á esta segunda escuadra, lleva en su extremo el microscópio M que puede subir ó bajar lo necesario para enfocar lo, y dispuesto de tal modo, que el borde r de la escuadra, se vea en la mitad interior del campo de su retículo. De la misma plataforma P arrancan dos montantes H , terminados en horquilla de forma semi-cilíndrica, para servir de cojinetes á los muñones de los anteojos de referencia y alineación, lo mismo que á la mira; (en la figura está colocado el anteojo A de referencia); el soporte H de la derecha, lleva una escuadra atravesada por un tornillo S , cuya punta está ahuecada en forma cónica; el de la izquierda lleva un sólido muelle m que puede acercarse ó separarse por una excéntrica e . Para comprender el juego de estas piezas, supongamos, de acuerdo con la figura, que se desea colocar el anteojo de referencia, cuyos muñones, según indica la fig. 15, acaban en conos; se separa el muelle m por medio de la excéntrica y se retira el tornillo S ; se coloca el anteojo con su eje óptico vertical y el objetivo hácia la parte inferior, introduciéndolo en el hueco cilíndrico del eje, apoyando sus muñones en las horquillas de los soportes H ; enseguida se invierte el juego de la excéntrica aproximando el muelle que se pone en contacto con uno de los muñones y se hace avanzar el tornillo S hasta que el extremo cónico del otro muñón se introduzca en el hueco de igual forma que tiene la punta de dicho tornillo. Del mismo modo se coloca la mira de la fig. 18 y el anteojo de alineación, si bien este con el eje óptico horizontal. Un nivel N tiene por objeto colocar horizontal el eje de dichos anteojos y otro N' se utiliza en la nivelación general del aparato.

76. *Anteojos de referencia y alineación.*—El apa-

rato lleva uno de cada clase, mas como solo difieren en la forma del retículo, basta describir uno cualquiera: en esencia, (fig. 15), es un anteojo astronómico sin más particularidad que una lente colectora n montada en un tubo interior que puede desplazarse por la acción de una cremallera c y piñón p ; esta lente sirve para que la imagen del objeto visado, sea cualquiera su distancia, se forme siempre con claridad en el plano del retículo. La forma y objeto de los muñones, lo indica suficientemente la figura y lo dicho al tratar de su colocación en el porta-microscópio.

77. *Mira*.—Consiste, (fig. 18), en un cilindro hueco de poca altura, con dos muñones m iguales á los de los anteojos; en la sección media de la mira y pudiendo rectificarse desde el exterior, hay dos hilos de platino a y b resguardados entre dos cristales y cuyo punto de cruce determina el eje de la mira.

78. *Reticulos*.—El del *microscópio*, está formado, (fig. 14), por tres hilos, de los cuales, uno b , coincide con el diámetro horizontal y los otros l y l' , son verticales y equidistan, del diámetro correspondiente. Al usar este retículo, (en cuyo campo se ven ocupando las posiciones a a y r el borde de la escuadra del porta-microscópio y el trazo correspondiente) debe procurarse que el canto de la regla c c , diste del hilo b , lo mismo que el a de la escuadra y que la señal r' de uno de sus extremos, quede á igual distancia de los hilos l y l' , y por lo tanto, en prolongación de la r ; como luego veremos, todo esto se consigue por la acción combinada de los movimientos rectangulares de los soportes y de los porta-microscópios.

El retículo del *anteojo de referencia*, (fig. 16), lo forman seis hilos, tres á tres perpendiculares; de ellos, el 2 y el 5 coinciden con dos diámetros y los 1 y 3 por un lado y 4 y 6 por otro, equidistan de los anteriores; de esta manera, el punto de intersección de los 2 y 5 corresponde al centro de la circunferencia inscrita en el pequeño cua-

drado que determinan los otros; el objeto de esta forma especial, lo veremos más adelante.

Por último, el retículo del *anteojo de alineación*, (figura 17), está compuesto solo de dos hilos que coinciden con dos diámetros perpendiculares, uno de ellos horizontal.

79. *Reglita adicional*.—Está compuesta, (fig. 19), de una abrazadera A, que por dos tornillos de presión T puede fijarse al nervío de la regla de tal modo que la reglita *a* enrase con su canto superior; á dicha abrazadera vá unida una mordaza *m* que sostiene la reglita, pudiéndose fijar esta por un tornillo de presión S; aflojando este tornillo y por la acción de otro horizontal T' que gira sin avanzar y cuya tuerca móvil está en *a*, pueden darse á la reglita movimientos de traslación en sentido de su longitud, para obtener la coincidencia de su cero con uno de los trazos *r* de la regla. La reglita vá graduada de tal modo que puede apreciar décimas de milímetros.

80. *Señal y referencia de término*.—Al llegar cada día al término de la medición del trozo de base correspondiente, es preciso fijar en el terreno de un modo muy exacto el punto de intersección de la vertical que pasa por el extremo de la regla, en cuyo punto ha de comenzar la medida al día siguiente. Para el'o, en la dirección de la base y al llegar al punto conveniente, se entierra un sillar cuya cara superior se ha desbastado, y en la que vá encastada una plancha de bronce *b*, (fig. 20) que debe situarse perfectamente horizontal; sobre esta plancha se coloca un disco de metal D (fig. 21), con un taladro central cuyo diámetro es exactamente igual al lado del pequeño cuadrado que forman los hilos 1, 3, 4 y 6 del retículo del anteojo de referencia; unido á un montante que arranca de este disco, hay un cilindro hueco de eje vertical C, cuyo diámetro interior es mayor que el del taladro antes citado y cuyo eje coincide con el de dicho taladro.

Colocada ya la señal de término y el anteojo de refe-

rencia puesto en el porta-microscópio, se sitúa el disco D, moviéndolo convenientemente hasta que el taladro se vea perfectamente inscrito en el cuadrado del retículo; marcando en la placa *b* el centro del taladro, se obtiene evidentemente el punto que se desea en el terreno; para conseguir esta marca, se hace uso de un punzón P, de acero templado, que se introduce en el hueco del cilindro C, guiándolo por un muelle M que hace coincidir su eje con el del cilindro; dando un golpe en la cabeza del punzón, su punta marca la señal pedida. En su lugar oportuno veremos como se utiliza esta señal al recomenzar los trabajos.

81. *Personal necesario para una medición.*—El personal necesario para medir una base con el aparato que se acaba de describir, se clasifica en *científico*, *auxiliar* y *de trabajo*. El científico, lo forma un solo individuo, oficial del Instituto Geográfico, que es el Jefe de la medición; el auxiliar, seis individuos topógrafos, pertenecientes al mencionado centro, y el de trabajo, veinte hombres, destinados á los transportes y colocación del material.

82. *Cometidos del Jefe y del personal auxiliar y de trabajo.*—Con el fin de hacer más breve, y al mismo tiempo, más clara la explicación de la marcha metódica que debe seguirse al medir una base geodésica con el aparato Ibáñez, creemos preferible detallar por separado la misión de cada individuo del personal científico y auxiliar, con lo que bastará luego un sencillo cuadro ó programa de marcha, para apreciar bien y de un solo golpe de vista todo el conjunto de la operación.

83. *El Jefe*, establece el origen y el término de cada día, fija la alineación y rectifica la mira, si es necesario.

Para establecer el *origen*, procede del modo siguiente: colocado el primer porta-microscópio en la señal fija del extremo de la base el primer día, (ó en la señal de término del día anterior en los demás días), pone en él del mo-

do dicho (75) el anteojo de referencia, comprobando que su eje óptico es vertical, y por los movimientos rectangulares horizontales, de dicho porta-microscópio, establece el punto fijo marcado en la señal, en el centro del cuadrado de los hilos del retículo, ó sea en coincidencia con el punto de intersección de los hilos 2 y 5 de dicho retículo. Para marcar el *término de cada día*, colocada ya la señal de término, (fig. 20), y el disco de referencia (fig. 21), vuelve á situar, en la última posición del porta-microscópio, el anteojo de referencia y determina el punto en que la visual de este anteojo corta al terreno, del modo dicho en la descripción de la señal y referencia de término (80); esta señal sirve de origen al día siguiente, y con respecto á ella opera el Jefe como se ha explicado para el primer extremo de la base.

Para fijar la *línea*, operación que se hace inmediatamente después de determinado el origen, coloca el anteojo de alineación en el primer porta-microscópio, después de asegurarse y rectificar, si es preciso, que el cruce de los hilos de su retículo coincide con el eje de figura; enseguida, y valiéndose de los movimientos de giro lento y rápido que tiene la plataforma del porta-microscópio, sitúa la visual dirigida en la línea general determinada por las grandes miras colocadas en el extremo opuesto de la base y señales principales intermedias (35), dejando así el anteojo.

Y, por último, si, como se verá en las operaciones siguientes, el punto de cruce de los hilos de platino de la mira no estuviese en el eje de ésta, la rectificación necesaria la hace también el Jefe.

84. Los *auxiliares números 1 y 2*, establecen, de acuerdo y bajo las indicaciones del primero, la coincidencia de los trazos *r*, extremos de la regla, con los correspondientes de las escuadras de los microscópios. Para efectuarlo, se coloca el número 1 en el porta-microscópio más próximo al origen de la medición, y el 2, en el situado

al otro extremo de la regla: el auxiliar número 1, establece la coincidencia de las señales correspondientes de regla y microscópio del modo dicho al describir el retículo de éste (78), pero valiéndose solo de los movimientos rectangulares del soporte de la regla, pues que no puede tocar al porta-microscópio sin sacarlo de la línea y del origen; por lo tanto, opera en el orden siguiente, *atrae* la regla con el movimiento rectangular perpendicular á ésta (tornillo X, fig. 13), la *eleva* hasta que el trazo de su extremo y el del microscópio estén en un mismo plano (tornillo Z, fig. 13), y por último, *arrastra* la regla en sentido de su longitud (tornillo Y, fig. 13), por medio del segundo movimiento horizontal, hasta que la señal *r* quede centrada entre los hilos *l* y *l'* del retículo del microscópio (fig. 14).

Como el auxiliar número 2, no puede ya mover la regla, ni en altura ni en longitud, para no alterar la coincidencia del primero, ni, por otra parte, puede desplazar su porta-microscópio en sentido perpendicular á la base, para no salirse de la alineación, efectúa la coincidencia en el otro extremo de la regla que está á su cargo, valiéndose de los siguientes movimientos: horizontal del soporte en sentido perpendicular á la línea (tornillo X), hasta colocar el borde de la regla en posición conveniente, respecto al hilo *b* del retículo; movimiento vertical del microscópio, (tornillo *t*, fig. 14), para situar el trazo *r* de éste en el mismo plano que el canto de la regla; y, en fin, horizontal del porta-microscópio en sentido de la línea, hasta conseguir la coincidencia de trazos. Cuando el auxiliar número 1 la ha terminado, dá la voz de *coincide*, en cuyo momento, el número 2, efectúa la suya y repite la voz.

85. Los auxiliares números 3 y 4, provistos cada uno de un cuaderno, hacen, anotan y confrontan en cada posición de la regla, las lecturas de los termómetros é indicaciones del nivel. Para esto deben obrar con entera

independencia hasta el final, y proceder en orden inverso; es decir, que mientras el 3, por ejemplo, observa y anota las lecturas de los cuatro termómetros: el 4, rectifica el nivel y anota la graduación del arco, repitiéndose la operación ahora, leyendo los termómetros el 4 y el nivel el 3; terminadas las anotaciones, confrontan sus cuadernos, pero sin corregirlos ni ponerlos de acuerdo, á menos que una diferencia demasiado grande, hiciese presumir que hay error, en cuyo caso, cada auxiliar por separado, rectifica por sí la observación dudosa, poniendo su resultado por nota en el cuaderno.

86. *El auxiliar número 5*, efectúa la alineación sucesiva de cada trozo ó posición de la regla, para lo cual (al empezar la operación), se sitúa en el primer porta-microscópio, donde el Jefe ha dejado ya situado y rectificado el anteojo de alineación; sin tocar á este anteojo, dirige la visual al segundo porta-microscópio en que se habrá colocado la mira y hace las indicaciones necesarias para que el punto de cruce de los hilos de la mira coincida con el de su retículo, en dos posiciones inversas de la mira: cuando esta coincidencia, obtenida en la primera posición no se verifica en la segunda, hay que rectificar la mira cuya operación, según se ha dicho, la hace el Jefe.

87. *El auxiliar número 6*, sitúa la mira en el segundo porta-microscópio, colocando su eje de muñones horizontal por medio del nivel correspondiente, hecho esto, y siguiendo las indicaciones que le haga el auxiliar núm. 5, coloca en la línea el punto de cruce los hilos de platino, valiéndose para conseguirlo del movimiento horizontal que, en sentido perpendicular á la línea, tiene el porta-microscópio; invierte después los muñones de la mira, y cuando ha terminado, traslada ésta al tercer porta-microscópio.

88. *El personal de trabajo*, se subdivide en una parte destinada para que, mientras se hace la medición del pri-

mer trozo, puedan colocar los soportes y porta-microscópios que han de servir en la segunda posición de la regla, valiéndose para ello, de una vigueta de madera, de cuatro metros de longitud y con señales convenientemente dispuestas para que los soportes y los porta-microscópios queden á distancia conveniente y próximamente en la línea; otra parte de este personal se destina al transporte de los sombrajos, que sirven para resguardar la regla y los observadores de los rayos directos del sol; y, en fin, cuatro hombres se dedican exclusivamente á la conducción de la regla y su colocación sobre los soportes.

89. Réstanos decir, que con objeto de que los soportes y porta-microscópios queden á la altura necesaria para que los auxiliares puedan operar sentados, se los coloca sobre sólidos trípodes de madera, con sus tejos correspondientes para los tornillos nivelantes y horadados en el centro de su plataforma, para que pueda verse el terreno; el número de tripodes es igual al de soportes y porta-microscópios.

90. *Práctica de la medición.*—Detalladas en los párrafos anteriores, la misión de cada individuo del personal empleado, basta para formarse idea completa del conjunto de la operación que indiquemos, por su orden la série de partes que constituye la medición de un trozo.

La marcha que se observa para medir una base con este aparato, es, pues, la siguiente:

1.^o Con auxilio de la vigueta de que se ha hecho mención anteriormente, se colocan á la distancia debida, los dos primeros soportes y porta-microscópios, y enseguida se sustituye la vigueta por la regla.

2.^o El Jefe establece el origen y fija la línea; esta operación no se repite, pues solo se verifica en el primer trozo de cada día.

3.^o Los auxiliares 5 y 6 operando como se ha explicado ya, colocan en la línea el segundo porta-microscó-

pio; hecho esto, el 5, traslada á este porta-microscópio el antejo de alineación, y el 6, la mira al tercero que ya se habrá colocado por el personal que conduce la vigueta; estos dos auxiliares continúan así, de trozo en trozo, hasta el fin de la medición.

4.^o Los auxiliares 1 y 2 efectúan las coincidencias de las señales extremas, y se trasladan corriendo un porta-microscópio en sentido de la línea.

5.^o Los auxiliares 3 y 4 hacen las lecturas del nivel y de los cuatro termómetros.

6.^o Los encargados de la regla la trasladan á la segunda posición.

Todas estas operaciones se repiten en el mismo orden en cada trozo; ocho metros antes de llegar al punto designado para fin de la medición en el día, se fija en el terreno la señal de término, (fig. 20), y al llegar á ella el Jefe, establece como se ha dicho (83), la referencia de término, que ha de servir de origen al día siguiente.

Así se procede en los diversos días de la medición, hasta llegar al último día y última posición de la regla, que podrá suceder no haya de tomarse entera, por distar la señal extrema de la base del fin de la posición anterior, una longitud menor que la de la regla. En este caso, se utiliza el trazo conveniente de los intermedios, tomando el más próximo inferior, y la fracción correspondiente del trozo contiguo, se aprecia por una regla de plata, cuya longitud es igual al intervalo entre dos señales de la regla, graduada en milímetros y el primer centímetro de cada extremo en décimas de milímetro. Esta regla se coloca, haciendo que coincida con el trazo intermedio de la regla de hierro, la división exacta conveniente para que el extremo dividido en décimas de milímetro, caiga en el campo del último microscópio, haciéndose la lectura correspondiente á la división que quede entre los hilos *l* y *l'* del retículo, en pro-
longación del trazo *r* de la escuadra.

91. Terminada la primera medición y efectuados los cálculos, como dirémos enseguida, se procede á remedir la base, efectuando en cada día con las mismas precauciones y método, la medición del trozo correspondiente al mismo día de la primera operación, para lo que se hace uso de las respectivas señales de término que sucesivamente se han ido estableciendo. Como, por los errores inevitables de observación, no se apreciará la longitud de cada trozo de base, con igualdad absoluta en las dos mediciones, si bien la diferencia ha de ser muy pequeña, se hace uso para medir esta diferencia de la reglita adicional, (fig. 19); se coloca esta de manera que el cero corresponda al extremo libre de la regla y se hace la lectura correspondiente al trazo del porta-microscópio situado en la vertical del término; esta diferencia en más ó en menos, se tomará en cuenta con su signo, del modo que verémos en los cálculos relativos á la segunda medición.

92. *Cálculos relativos á la medida de una base.*—Los cálculos necesarios para obtener la longitud de la base, cuando se ha medido con el aparato Ibáñez, pueden hacerse en el campo; lo que constituye otra ventaja no despreciable de dicho aparato.

La fórmula empleada para conocer la longitud medida en cada día, exige para su establecimiento, otra correspondiente á cada posición de la regla, la cual se emplea también aislada, en los casos que verémos enseguida, por lo que dividiremos esta parte en tres, á saber: distancia horizontal correspondiente á cada posición de la regla; distancia horizontal al fin de cada día en la primera medición; la misma distancia en la segunda medición.

93. *Distancia horizontal correspondiente á cada posición de la regla.*—Representemos por F_n la longitud conocida de la regla á la temperatura t_n ; por t el promedio de lectura de los cuatro termómetros; por φ la dilatación total de la regla para un grado centígrado; por c la dife-

rencia entre la longitud de la regla y su proyección horizontal; y por p , la longitud de esta proyección horizontal, que es precisamente la incógnita de la fórmula.

Si la regla se colocara horizontal y la temperatura media fuera t_n , sería evidentemente

$$p = F_n$$

é introduciendo las modificaciones consiguientes á no operarse en estas condiciones, suponiendo $t_n > t$, se deduce fácilmente:

$$p = F_n - c - (t_n - t) \varphi \quad (1)$$

Más adelante veremos por qué medios se han determinado con extremada precisión, los valores de φ y F_n que son, por lo tanto, conocidos ya en el campo. Para determinar c , se sabe que por definición de esta cantidad, se tiene

$$c = F_n - p$$

y sustituyendo por p su valor en función del ángulo I de inclinación de la regla, medido con el nivel, se deduce:

$$c = F_n - F_n \cos. I = 2 \cdot F_n \text{ sen.}^2 \frac{1}{2} I.$$

Para F_n se toma en esta fórmula, nó su valor exacto, sinó el de 4000 milímetros justos, que como luego veremos, difiere muy poco del verdadero; por esto se toma para c el valor

$$c = 8000 \cdot \text{sen.}^2 \frac{1}{2} I$$

Para evitar en el campo los cálculos que exige la aplicación de esta fórmula, se han construido tablas que dán los valores de c para los de I , creciendo de 10" en 10".

94. *Distancia horizontal al fin de cada día.*—Si la inclinación de la regla y la temperatura media permaneciesen constantes durante toda la operación, bastaría, para obtener la distancia al fin del día, multiplicar el valor de p por el número de posiciones de la regla. Mas como esto no sucede nunca, designemos por n el número de veces que

se ha colocado la regla; por $[t]$ la suma de los promedios de los cuatro termómetros, y por $[c]$ la suma de las correcciones relativas á la inclinación; la distancia horizontal buscada, que llamaremos D , tendrá por expresión:

$$D = n F_n - [c] - (n t_n - [t]) \varphi. \quad (2)$$

El último día de la medición, se calcula por la fórmula (2) la distancia horizontal para el número de veces que se ha empleado la regla entera; en el último trozo en que, por lo general, solo se emplea una parte de la regla que llamaremos F'_n , se calcula el valor de p para toda la regla por la fórmula (1) y se deduce la proyección de F'_n por la proporción

$$\frac{F_n}{p} = \frac{F'_n}{x}$$

de donde se obtiene

$$x = p \cdot \frac{F'_n}{F_n}.$$

95 *Distancia al fin de cada día en la segunda medición.*—Puesto que, según hemos dicho, en cada día de la segunda medición, se efectúa solo la del trozo correspondiente á igual día de la primera, es evidente que, el número de posiciones de la regla será el mismo, apreciándose por la reglita adicional la pequeña diferencia que puede existir entre ambas medidas, diferencia que representaremos por d ; así, pues, llamando $[c']$ la suma de las correcciones por inclinación, y $[t']$ la de promedios de los cuatro termómetros; la distancia horizontal D' vendrá determinada por la expresión

$$D' = n F_n - [c'] - (n t_n - [t']) \varphi \pm d \quad (3)$$

en cuya fórmula se opera, como se ha dicho antes, el último día de la medición, con los trozos en que no entre la regla entera.

La diferencia $D - D'$ tomada con cada par de valores

de estas cantidades, indicará el error medio de cada día de medición; con cuya serie de errores y aplicando el cálculo de probabilidades puede obtenerse el error medio y el probable de toda la operación.

Parece inútil decir, que la longitud de la base se obtiene sumando los trozos que la forman.

Para terminar, y aunque muy brevemente, indicaremos la manera como se han obtenido los valores de φ y F_n que figuran en las fórmulas anteriores.

96. *Determinación del va'or de φ .*—Se llevó á cabo experimentalmente, por medio de operaciones muy delicadas, con todas las precauciones necesarias y combinando los resultados por el cálculo, en la forma que indicaremos.

El aparato se dispuso del modo siguiente: en una artesa se colocó la regla sobre dos rodillos que la permitiesen dilatarse libremente, con los cuatro termómetros puestos en dirección vertical y cubierta la artesa, dejando ver solo los extremos de la regla y dando paso á las varillas de los termómetros; la artesa se llenaba de aceite y se emplearon todos los medios y precauciones necesarias para evitar la influencia de la temperatura ambiente.

En un sólido muro de mampostería, construido al lado de la artesa, se empotraron dos microscópios micrométricos de ejes verticales y correspondiendo con los trazos extremos de la regla á la temperatura de 3° que se tomó como inicial; el retículo de estos microscópios se desplazaba por la acción de los tornillos micrométricos, habiéndose determinado previamente cuantas vueltas y fracciones de vuelta correspondían á cada milímetro de avance, por una serie de 138 observaciones.

Partiendo de la temperatura de 3° y conocida la longitud de la regla á esta temperatura, por la distancia entre los ejes de los microscópios, que es constante y diferencias á ésta constante según las observaciones de desplazamien-

to de los retículos, se elevó el baño, y por lo tanto, la regla á distintas temperaturas, en número de catorce; en cada temperatura se hizo una série de diez observaciones, anotando el promedio de temperaturas de los cuatro termómetros y la suma de las hechas en los microscópios, pero invirtiendo el orden en cada observación. La longitud de la regla á cada temperatura se obtenía añadiendo á la longitud á 3° que llamaremos l_3 la suma de lecturas de los microscópios; ahora bien, entre l_3 y la longitud considerada á t^0 que designaremos por l_t existe la relación

$$l_t = l_3 + (t - 3) \varphi$$

y estableciendo esta ecuación para cada una de las 140 observaciones, se obtienen 140 valores de φ , cuyo promedio

$$\varphi = 0^{\text{mm}},043193$$

puede tomarse como definitivo.

Hemos prescindido de numerosos detalles y de las fórmulas empleadas para obtener el valor de partida l_3 , porque nuestro objeto ha sido tan solo indicar someramente la marcha seguida en esta delicada operación, y por lo tanto, el valor que debe atribuirse á φ en las fórmulas antes encontradas.

97. *Determinación del valor de F_n .*—Se obtuvo también después de una numerosa série de observaciones, comparando la regla con la regla-tipo empleada por la comisión del Mapa de España en la medida de la base de Madrideojos, y mediante el empleo de microscópios con tornillos micrométricos.

De este modo y para una temperatura media $t_n = 21^0,935$ se obtuvo

$$F_n = 4^{\text{m}},000587$$

cuyo valor difiere muy poco de los 4^{m} empleados en la fórmula hallada para valor de c (93).

98. *Marcha general de las correcciones y reduccio-*

nes que deben hacerse en la medición de una base.—Como en el aparato del general Ibáñez se obtiene desde luego la distancia horizontal entre los extremos de la base, en función de las temperaturas medias que corresponden á cada posición de la regla, resultan hechas implícitamente las dos primeras correcciones indicadas en el párrafo 37 al hacer las consideraciones generales sobre la medida de bases. Cuando el aparato empleado no sea el que hemos descrito, se hacen estas correcciones del modo que se indica á continuación, reseñando también las demás correcciones y reducciones que deben efectuarse, sea cual fuere el aparato empleado.

99. *Corrección por temperatura.*—Se ha de partir desde luego de una longitud de regla ó reglas conocidas á temperatura determinada, lo que se habrá obtenido por método análogo al descrito para la regla Ibáñez; el coeficiente de dilatación lineal, y por lo tanto, la dilatación total de la regla, también debe ser conocido, determinándose como se ha dicho para φ .

Con estos datos, ninguna dificultad ofrece la corrección indicada, puesto que se tendrá

$$R' = R - (t - t') \varphi$$

en la que R y t son la longitud y temperatura conocida, t' la lectura hecha en los termómetros y R' la longitud de regla buscada.

100. *Reducción á la horizontal.*—Se hace para cada trozo de igual inclinación, por una fórmula análoga á la que hemos indicado anteriormente, sinó referida á la regla total, ó sea, llamado R_1 la longitud de la regla corregida de temperatura, é I al ángulo de inclinación medido con el nivel.

$$H = R_1 \cdot \cos. I.$$

No en todos los sistemas de aparatos conocidos se emplea esta reducción, pues que algunos miden la base

por escalones horizontales, colocando en esta posición la regla con ayuda de un nivel y soportes de altura variable. Y además, en otros aparatos se emplea inclinación constante, por lo que basta hacer la reducción para la longitud total medida.

101. *Reducción al nivel del mar.*—Por la forma en que se ha hecho la medición de la distancia horizontal entre los extremos de la base, puede considerarse á ésta como un arco de círculo máximo, trazado á la altitud media de la de sus extremos; pero tomándose por superficie de comparación el nivel medio de las aguas del mar, á esta superficie debe referirse la base medida. Para conseguirlo, sea B, (fig. 23), el arco que representa la base medida, y designémos por h la altitud media en que se supone trazada; representando por R el radio de curvatura terrestre $c h$ correspondiente á la latitud y azimut medio de la base, se tiene

$$\frac{B}{b} = \frac{R + h}{R}$$

de donde,

$$b = B \cdot \frac{R}{R + h};$$

pero teniendo en cuenta que h es muy pequeño en comparación con R, y por lo tanto, que los logaritmos de R y $R + h$ pudieran tener iguales ó muy poco diferentes las siete primeras cifras decimales, se deduce que la fórmula anterior no es siempre de conveniente aplicación. En la práctica se determina el valor de $B - b$ que, restado de B, dará el de b que se busca; á este fin, apliquemos á la proporción anterior un conocido teorema de aritmética, obteniéndose

$$\frac{B - b}{b} = \frac{h}{R}$$

de donde,

$$B - b = b \cdot \frac{h}{R}$$

y reemplazando b por el valor antes hallado

$$B - b = \frac{B h}{R + h} = \frac{B \cdot \frac{h}{R}}{1 + \frac{h}{R}} = B \cdot \frac{h}{R} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1}$$

desarrollando en série la expresión $\left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1}$, suprimiendo los términos, á partir del que tenga el cuadrado de R , se obtiene, por último,

$$B - b = B \cdot \frac{h}{R} \left(1 - \frac{h}{R}\right). \quad (1)$$

que es la fórmula que ordinariamente se emplea.

102. *Reducción de una base quebrada á la línea recta.*—Sucede algunas veces, bien sea por las condiciones del terreno, ó por las del aparato empleado (como sucede con el de Porro) que los distintos trozos de la base, no se miden sobre la línea recta que une sus extremos, que deberán siempre ser visibles uno desde el otro. En este caso, que representa la figura 22 (exagerada para mayor claridad) es preciso proyectar la longitud medida, trozo por trozo, sobre la recta que une dichos extremos; esta operación se hace después de las correcciones por temperatura é inclinación, y antes de la reducción al nivel del mar.

Medido el primer trozo AC , se determina á la vez el ángulo α que forma con la dirección de la base, se tendrá:

$$AC' = AC \cdot \cos. \alpha.$$

Para el trozo CD se determinará, si es posible, el ángulo que forma con la base, y sinó el que forma con el trozo anterior, de cuyo valor se deduce el del ángulo $DCb = \beta$ por la expresión

(1) Véase Apéndice 7.º, letra B.

$$\beta = \gamma - (180^\circ - \alpha)$$

que se encuentra fácilmente siguiendo las indicaciones de la figura; obtenido β se halla la proyección del trozo C D por la fórmula

$$C' D' = C D \cdot \cos. \beta .$$

y así con los demás trozos.

Al llegar el punto B se tiene como comprobación, que el ángulo G B A medido directamente ha de ser igual al deducido en el punto G cuando se trató de proyectar el trozo G B; la razón de esta igualdad la indica también la figura.



CAPITULO CUARTO.

Determinación del azimut de una línea.

103. PRELIMINARES.—Se ha dicho en otro lugar, que para obtener un dibujo que sea fiel representación del terreno, hay que orientar el levantamiento, á fin de que las posiciones de las líneas y puntos del cánvas sean, con respecto á una dirección determinada del papel, las mismas que las del terreno con respecto á la homóloga de dicha línea.

Es indudable, que para obtener esta orientación, bastará hallar la de una línea cualquiera del cánvas, pues estando íntimamente ligadas con esta todas las demás, quedarán orientadas á la vez; pero en la práctica, sobre todo en levantamientos muy extensos, con el fin de tener comprobación en caso de duda, se orientan varias líneas convenientemente elejidas, según los casos.

La base debe siempre orientarse, no solo por ser la línea principal del cánvas, sino también por que su azimut es necesario para efectuar el cálculo de la reducción al nivel del mar.

La orientación de una línea, se determina por el ángulo que forma con la meridiana que pasa por uno de sus extremos, referido al sentido general en que se cuentan los azimutes; y como en los levantamientos geodésicos, la precisión necesaria para la determinación del meridiano, excluye todos los medios que no estén basados en observaciones astronómicas, es indispensable que comencemos

por las definiciones cosmográficas más empleadas en la práctica de las operaciones.

104. *Nociones astronómicas indispensables.*—Por un efecto de apariencia ó perspectiva, los astros se presentan á nuestra vista como fijos en una esfera concéntrica á la de la Tierra y pareciendo girar de E á O alrededor del eje de nuestro planeta; en este movimiento, la casi totalidad de las estrellas conservan sus posiciones relativas, al paso que á algunas se las vé dotadas de un movimiento propio por entre las demás; á las primeras se las llama estrellas fijas y se las agrupa en constelaciones, y á las otras, se las denomina estrellas errantes ó planetas; á la esfera en que todas parecen situadas, se la dá el nombre genérico de *esfera celeste*.

La intersección de esta esfera con el eje alrededor del cual gira, proporciona dos puntos que se llaman *polos celestes*, *boreal* y *austral*, y se denominan *ecuador* y *meridianos celestes*, las intersecciones que en dicha esfera causan los planos prolongados del ecuador y de los meridianos terrestres.

La rotación de la esfera celeste es perfectamente uniforme, es decir, que los espacios recorridos son proporcionales á los tiempos empleados en recorrerlos.

Llábase *eclíptica* la órbita que recorre la Tierra en su movimiento anual alrededor del Sol; esta órbita es plana, de forma elíptica, siendo el sol uno de sus focos y su plano no coincide con el del ecuador, formando con él un ángulo de $23^{\circ} 28'$ que se llama *oblicuidad de la eclíptica*; la intersección de estos dos planos corta á la esfera celeste en dos puntos llamados *vernales* que corresponden á los *equinoccios* de primavera y otoño ó sea á los signos del Zodiaco, Aries y Libra; dicha línea intersección se llama por esta causa *línea de los equinoccios*. (1)

(1) No insistimos en estas ideas, porque las principales definiciones cosmográficas, las suponemos estudiadas en Geografía astronómica.

105. *Coordenadas astronómicas.*—Para determinar sobre la esfera celeste la posición de un astro cualquiera, se calculan sus coordenadas, que pueden ser *primeras* ó *segundas*, según al sistema que se refieran. Las segundas coordenadas, se refieren á la eclíptica y círculo máximo perpendicular á ella, se denominan *longitud* y *latitud* y como no se emplean en los trabajos geodésicos, prescindimos de ellas por completo.

Las primeras coordenadas de un astro, se refieren al ecuador celeste y á un meridiano que toma también el nombre de *principal*; estas coordenadas, son la *declinación* y la *ascensión recta*.

La declinación de un astro es el arco del meridiano que pasa por él, comprendido entre el ecuador y dicho astro; las declinaciones se cuentan de 0° á 90° del ecuador á los polos y se llama *boreal* ó *austral* según el hemisferio en que se cuenta.

La ascensión recta, es el arco de ecuador comprendido entre el punto vernal del equinoccio de primavera y el pie de la declinación; las ascensiones rectas se cuentan de 0° á 360° , partiendo de dicho punto vernal y en sentido contrario del movimiento aparente de la esfera.

En la (fig. 24), el círculo $A C A' D$ representa el ecuador celeste, y la elipse $A E A' E'$ la eclíptica; la línea $A A'$ es la de los equinoccios y el punto A el de primavera. Según las definiciones anteriores, y representando S un astro cualquiera, los arcos de círculo $S P$ y $A P$, son respectivamente, su declinación y su ascensión recta.

Para las estrellas principales y en general para las más usadas en todas las observaciones, se determinan las coordenadas consultando los catálogos de estrellas que más crédito merezcan.

Entre estos, figura en primer lugar, y su consulta está recomendada por el Instituto, el catálogo de la Asociación Británica.

106. *Errores de refracción y paralaje.*—Cuando al dirigir una visual á un astro, se trata de medir en un limbo graduado vertical el ángulo de altura, y más generalmente la distancia zenital de dicho astro, deben tenerse en cuenta dos errores principales que se cometen y deben corregirse con esmero. Son estos, los errores de *refracción y paralaje*.

El primero consiste, en que al dirigir la visual á un astro y á causa de la refracción atmosférica, se le vé más alto que está en realidad; este error influye por defecto en las distancias zenitales y por exceso en los ángulos de altura; designando, pues, por z la distancia zenital aparente de un astro, y por r el error de refracción, se obtendrá la distancia zenital verdadera Z , por la fórmula,

$$Z = z + r.$$

El valor de r se encuentra en tablas calculadas al efecto para los distintos valores de la distancia zenital aparente; basta, pues, en la práctica consultar esta tabla. Si se opera con ángulos de altura, se buscará en esta tabla una distancia zenital complementaria del ángulo de altura, y se tomará el valor de r que le corresponda; pues se sabe que

$$A + Z = 90^\circ$$

siendo A el ángulo de altura; esta fórmula es aplicable á los valores aparentes por ser igual, y de signo contrario en ambos el error de refracción.

La fórmula de corrección de los ángulos de altura, será, pues, llamando respectivamente a y A los valores aparente y real,

$$A = a - r.$$

107. El error de paralaje, (fig. 25), se comete á causa de que un mismo astro tiene una posición distinta para cada lugar de la Tierra en que se le observe: en efecto, si desde el punto A miramos al astro S , se le vé en la direc-

ción $A S S'$, mientras que desde el punto opuesto se le vería en una dirección también opuesta. Para evitar este error, se supone que el observador está colocado en el centro de la tierra, en cuyo caso, la visual $C S$ es siempre la misma para un astro determinado; al ángulo $A S C$ que forman estas dos visuales y que no es otra cosa que la magnitud aparente del semidiámetro terrestre, visto desde el astro en cuestión, es á lo que se llama *paralaje*; si el astro observado está en el horizonte del lugar (segunda fig. 25), la paralaje se llama horizontal.

En uno y otro caso, el efecto que produce la paralaje es hacernos ver el astro más bajo que lo está en realidad, como indica la (fig. 25), y por lo tanto, debe restarse su valor en las distancias zenitales observadas, puesto que entre la paralaje α , la distancia zenital observada Z' y la verdadera Z existe la relación, que comprueba la figura

$$Z = Z' - \alpha$$

y en los ángulos de altura

$$A = A' + \alpha.$$

Debe notarse, que si la visual se dirige á una estrella, la paralaje puede considerarse nula en razón de la inmensa distancia que de la más próxima nos separa; más como no sucede lo mismo si los astros observados son el Sol y la Luna, en estos casos, se tendrá en cuenta la corrección por paralaje, que se determina también por tablas especiales en función de la distancia zenital aparente.

Reuniendo las dos fórmulas anteriormente halladas, para corregir una distancia zenital de los errores de paralaje y refracción, se tiene, para cuando se observe la distancia Z' correspondiente al centro del disco solar ó lunar, la expresión general

$$Z = Z' + r - \alpha.$$

dio y sideral.—Uno de los conocimientos más necesarios para las observaciones astronómicas, es el del tiempo; como el asunto es de por sí bastante complejo y la índole de estas nociones nos veda entrar en detalles, nos limitaremos simplemente á dar ligeras definiciones é ideas de lo que para nuestro objeto es absolutamente indispensable.

109. El tiempo empleado por el Sol en su revolución aparente alrededor de la Tierra, partiendo de un punto cualquiera de la eclíptica, se llama *tiempo verdadero*; el camino recorrido mientras que la tierra dá una vuelta sobre su eje, se llama *día verdadero*, ó en otros términos, se dá este nombre al tiempo que transcurre entre dos pasos sucesivos del sol verdadero por el meridiano de un lugar. Como las variaciones del Sol en ascensión recta no son iguales, porque el movimiento del astro en este sentido no es uniforme, resulta que los días verdaderos son desiguales, aunque perfectamente conocidos uno por uno, por cuya razón, el tiempo verdadero no se emplea en la práctica, ni para los cálculos ni para los usos de la vida.

110. Se ha sustituido el Sol verdadero para medir el tiempo, por uno ficticio llamado *Sol medio*, que recorre el ecuador con movimiento uniforme, siéndolo también, por lo tanto, sus ascensiones rectas; el tiempo que este Sol medio emplea en verificar su revolución diurna aparente alrededor de la Tierra, se llama *día medio*, y es el que se emplea usualmente considerándolo dividido en 24 horas; de á 60 minutos, y cada minuto en 60 segundos; por este tiempo están arreglados los relojes.

El día medio puede ser *civil* ó *astronómico*; el primero, se divide en dos períodos de doce horas y se cuenta á partir de la media noche; el astronómico se cuenta de una á veinticuatro horas, á partir desde el momento en que el sol pasa por el meridiano del lugar; como este paso tiene lugar sucesivamente por cada meridiano de la tierra, no tendrán todos á un tiempo la misma hora, y se denomina

hora local la contada á partir desde el paso del sol por el meridiano del lugar en cuestión.

III. La diferencia variable entre el día medio y el verdadero, se determina por el cálculo, llamándose *ecuación del tiempo*; como la marcha real del Sol ó sea el tiempo verdadero, es perfectamente conocida, se puede determinar la hora media de un instante cualquiera por la relación

$$\text{Hora media} = \text{Hora verdadera} + \text{Ecuación del tiempo}.$$

II2. En fin, se dá el nombre de *día sideral*, al tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos de una misma estrella por el meridiano de un lugar; como la rotación de la esfera celeste es uniforme, los días siderales serán de igual duración y se les considera divididos en 24 horas de 60 minutos, teniendo cada minuto 60 segundos. Puesto que el origen del día sideral variaría, por definición, con la estrella elejida, se ha convenido en tomar como punto fijo de partida, el signo de Aries ó punto vernal del equinoccio de primavera, contándose el tiempo sideral por los pasos de este signo por el meridiano. (1)

II3. *Círculo y ángulo horarios*.—Se dá el nombre de círculo horario de una estrella, al meridiano celeste que contiene al astro en todas sus diversas posiciones; *ángulo horario*, ú horario simplemente es el ángulo que en un instante cualquiera forma el círculo horario con el meridiano del lugar considerado: la ventaja del ángulo horario estriba en que con su conocimiento se deduce el de la hora sideral.

En efecto, representemos por A C, (fig. 26), el meridiano de un lugar cualquiera; el círculo E C que pasa por la estrella E es el círculo horario de esta, y representemos también por γ la posición del signo de Aries sobre el Ecuador celeste. Evidentemente γ E es la ascensión recta

(1) Véase Apéndice 4.*

de la estrella y A E el ángulo horario, y como γ A es, por definición, la hora sidereal, se tiene:

$$\gamma A = \gamma E + E A;$$

si la estrella ocupa la posición E' , se tendrá entonces:

$$\gamma A = \gamma E' - E' A.$$

Reuniendo ambas ecuaciones en una sola, llamando h_s la hora sidereal, A la ascensión recta y a el ángulo horario, tendríamos:

$$h_s = A \pm a$$

que nos dice, que la hora sidereal en un momento cualquiera, se obtiene sumando algebricamente á la ascensión recta el ángulo horario, que se considera positivo antes del paso de la estrella por el meridiano.

II4. Terminadas ya de exponer las ideas astronómicas que hemos conceptuado más indispensables para la mejor inteligencia de las operaciones de orientación, vamos á ocuparnos de ésta, reseñando los procedimientos por la polar y por el Sol, que según hemos dicho en otro lugar, son, especialmente el primero, más empleados en la práctica.

II5. *Azimuth por observaciones á la polar.*—La estrella polar, llamada así por su proximidad al polo celeste boreal, forma parte de la constelación de la Osa menor, y gira alrededor de dicho polo, describiendo un círculo cuyo radio esférico es de $1^{\circ} 30'$ próximamente. Se la encuentra con bastante facilidad en la bóveda ó esfera celeste, suponiendo prolongada la línea que une las dos estrellas posteriores del carro ú Osa mayor que es vulgar y generalmente conocida; sobre esta línea y á una distancia aparentemente igual á cinco veces la separación de dichas dos estrellas se encuentra la polar, que forma el extremo de la Osa menor.

En virtud de la rotación de la polar alrededor del eje

del mundo, pasará dos veces cada veinticuatro horas por el meridiano que corresponde á un extremo de la dirección que quiere orientarse; conociendo la hora sideral precisa en que la polar efectúa uno de estos pasos, y dirigiendo en dicho momento, con el anteojo de un teodolito, una visual á la estrella, bastaría combinar la lectura correspondiente del limbo azimutal con la perteneciente á la visual dirigida al otro extremo de la línea terrestre, para tener resuelto el problema.

Mas como quiera que la duración del momento de paso es muy pequeña y las visuales á la estrella no podrían reiterarse, ni por lo tanto, corregir hasta otro paso los errores cometidos, se prefiere observar la polar en posiciones convenientes, antes ó después del paso por el meridiano, y deducir por el cálculo el azimut de la polar, que, restado ó sumado con el valor gradual de la visual dirigida, dará la dirección de la meridiana.

De estas breves consideraciones arrancan los dos métodos principales que se emplean cuando por medio de observaciones á la polar, se trata de hallar el azimut de una dirección terrestre.

116. *Azimut en las digresiones máximas.*—Se llaman digresiones máximas, las posiciones de la polar más alejadas de los pasos superior é inferior por el meridiano; en estas posiciones, se presentan al observador los caminos recorridos por la polar, en la misma dirección que los rayos visuales extremos, por lo que la estrella aparecerá inmóvil durante un cierto tiempo, suficiente para poder dirigir tres ó cuatro visuales y tomar el promedio como valor definitivo de la visual dirigida.

Sea, (fig. 27), $Z Z'$ el arco terrestre cuyo azimut se busca; si P representa el polo visible de la esfera celeste, $P Z$ será el meridiano que pase por el punto Z y el ángulo $P Z Z' = x$ el azimut pedido; si trazamos el arco de círculo máximo $Z A$, tangente al menor que describe la

polar, el punto A será la posición de la estrella en una de las digresiones máximas, y basta ver la figura para deducir que el ángulo x se obtiene sumando el azimut α de la polar, con el α' que se obtendrá en el terreno, dirigiendo con un teodolito las visuales Z A y Z Z'.

Para determinar, ante todo, la hora en que la polar se encuentra en la posición A, tenemos el triángulo esférico P Z A, rectángulo en A, en virtud de las construcciones hechas, y en el que se conoce $AP = 90^\circ - \delta$ y $PZ = 90^\circ - L$, siendo δ y L la declinación de la polar y la latitud del punto Z, que se supone de antemano conocida. Aplicando á dicho triángulo el teorema fundamental de la trigonometría esférica, se obtiene

$$\cos. P = \frac{\cos. AZ - \cos. AP \cdot \cos. PZ}{\sin. AP \cdot \sin. PZ} =$$

$$\frac{\cos. AZ - \sin. \delta \cdot \sin. L}{\cos. L \cdot \cos. \delta}$$

pero, por ser rectángulo en A el triángulo considerado se tiene:

$$\cos. PZ = \cos. AP \cdot \cos. AZ$$

ó lo que es lo mismo

$$\sin. L = \cos. AZ \cdot \sin. \delta$$

despejando de esta fórmula el valor de $\cos. AZ$ y sustituyéndolo en el de $\cos. P$, se obtiene;

$$\cos. P = \frac{\sin. L (1 - \sin.^2 \delta)}{\cos. L \cdot \cos. \delta \cdot \sin. \delta} = \text{tang. } L \cdot \cot. \delta$$

Esta fórmula dá el valor del ángulo P que no es otra cosa que el horario de la polar, del cual y por la fórmula

$$h_s = A \pm \alpha$$

que dá la hora sidereal se deduce el momento en que la polar está A: en esta posición se mide con un teodolito, en la forma dicha, el ángulo α' .

Para hallar, en fin, el ángulo α , deduciremos del mismo triángulo P A Z, la proporción

$$\frac{\text{sen. } \alpha}{\text{sen. P A Z}} = \frac{\text{sen. P A}}{\text{sen. P Z}}$$

de la cual substituyendo valores y teniendo en cuenta que $\text{sen. P A Z} = 1$, se deduce

$$\text{sen. } \alpha = \frac{\cos. \delta}{\cos. L}.$$

En el caso en que la digresión de la polar fuese la opuesta á la considerada, no hay más diferencia sinó que el ángulo α se obtiene restando del α' medido en el terreno, el ángulo α deducido por la fórmula anterior.

117. *Azímüt por observaciones en un momento cualquiera.*—Este procedimiento difiere en esencia del anterior en que no exige para la polar posición determinada, y por lo tanto, puede hacerse cada série de observaciones, con la calma y precisión que se desee, y reiterar las séries las veces que se crea necesario; es, pues, el método de mayor precisión que puede seguirse y así lo prueba que es el único empleado por el Instituto Geográfico en las orientaciones de la red española de primer orden.

118. Cada série de observaciones necesarias para los cálculos del azímüt, se lleva á cabo con un teodolito geodésico reiterador, cuyo anteojo permite, á causa de su aumento, ver la polar en pleno día, no siendo por lo tanto necesaria hora especial para las observaciones; el conjunto de las operaciones que deben efectuarse para constituir una série, lo forman: 1.^o, cuatro punterías dirigidas al otro extremo de la dirección terrestre que se quiere orientar, cada dos en posición inversa del anteojo, para lo que se le hace girar primero 180° alrededor del eje vertical del aparato y se le invierte luego en sus muñones; en cada visual se anotan las lecturas de los limbos azímütal y zenital y las indicaciones del nivel: 2.^o, ocho visuales á la polar,

cuatro en cada posición del anteojo, anotando los mismos datos anteriores y además la hora sideral acusada por un cronómetro arreglado á este tiempo, al dirigir cada puntería: y 3.º, otras cuatro visuales al objeto terrestre, en las mismas condiciones que las anteriores.

119. El dirigir cada grupo de visuales de modo que se repartan por mitad entre cada posición del anteojo, tiene por objeto evitar el error de colimación del eje óptico, ó sea el ángulo que este eje forma con el de figura del anteojo; se comprende que si la colimación existe, actuará en sentidos contrarios en cada par de visuales simétricas, y su promedio dará el valor pedido sin que la colimación influya.

120. Las lecturas zenitales y las indicaciones del nivel, se hacen para corregir el error que proviene de que el eje de rotación del anteojo, no sea horizontal y describa un plano inclinado al cabecear el eje óptico; operando también en posiciones inversas este error, debe quedar compensado, mas como su valor puede ser bastante grande relativamente á la apreciación del aparato, se prefiere en la práctica *corregir por inclinación*, las graduaciones azimutales correspondientes á cada visual dirigida, tanto á la polar como al objeto terrestre; esta corrección se hace por la fórmula

$$x = i \cdot \cot. Z$$

en la que i , representa el ángulo de inclinación del eje, medido por el nivel, y Z la distancia zenital de la visual que se corrige.

121. Para obtener esta fórmula, supongamos (fig. 28), que $A A_1 A_2$ sea el limbo azimutal del aparato; $C C_1$ su eje vertical, y $H Z H'$ la posición verdadera del limbo zenital, sino hubiese el error de inclinación. Continuando en esta hipótesis, y suponiendo que $A A_1$ sea la recta que une los ceros de los nónios cuando coinciden con el diámetro $0^\circ - 180^\circ$ del limbo, es evidente, que $C_1 A_2$ sería la

posición de esta alidada cuando el plano vertical que describe el anteojo ocupase la posición $Z E E'$ que contiene á la visual verdadera $C E$, y que en este caso, la lectura azimutal sería $A A_2$; mas si el eje de rotación está inclinado de tal modo, que el muñón de la derecha sea el más alto, el plano que describe el anteojo quedará inclinado á la izquierda, y al girar alrededor de $C C_1$ contendrá á la visual $C E$ antes de lo debido, por lo que la alidada azimutal recorrerá el arco $A a$, menor que el verdadero; la diferencia $a A_2$ es, pues; la corrección buscada, que llamaremos x , y puede determinarse por el triángulo esférico rectángulo $E H_1 E'$, que dá:

$$\text{tang. } H_1 E' = \text{tang. } H_1 E \cdot \cos. E H_1 E';$$

observando que $H_1 E'$ es x ; que $H_1 E$ es el complemento de la distancia zenital aparente $Z_1 E$ que hemos observado; y, en fin, que el ángulo $E H_1 E'$ es complemento de la inclinación del eje, se tiene

$$\text{tang. } x = \text{sen. } i \times \cot. Z$$

y como, siendo x é i dos ángulos muy pequeños, puede tomarse por valor de los arcos las longitudes respectivas de su tangente y de su seno, se deduce por último,

$$x = i \cdot \cot. Z$$

que es la fórmula antes indicada.

122. Correjidas de inclinación las ocho visuales de la polar, se las reduce á lo que hubieran sido si la estrella se hubiera observado en el meridiano, calculando para cada una de ellas el azimut correspondiente de la polar, por la fórmula

$$\text{tang. } a = \frac{\text{sen. } t}{\cot. \varphi \cdot \text{tang. } \delta - \text{sen. } \varphi \cos. t}$$

en la cual, t representa el horario de la polar, igual como sabémos (113) á la hora sideral anotada, menos la ascensión recta; δ , la declinación de dicha estrella dada por los catá-

logos, y φ , la latitud del lugar que se supone conocida de antemano, Esta fórmula, que damos por encontrada por no permitir su desarrollo la índole especial de este tratado, se deduce resolviendo el triángulo esférico, formado por el complemento de la latitud, la visual á la polar y el radio esférico correspondiente á la posición que ésta ocupa; este triángulo es análogo al P A Z de la figura 27 y en él se conoce el primero y tercer lado y el ángulo que comprenden igual á $h_s - A$, según las posiciones de la estrella.

Sumando ó restando, según que se opere antes ó después del paso de la polar por el meridiano, de las ocho graduaciones azimutales observadas, los azimutes calculados de la polar, se obtienen ocho graduaciones meridianas de dicha estrella, cuatro mayores y cuatro menores que las verdaderas, por los errores de colimación que no han sido todavía corregidos; el promedio de las cuatro mayores de una parte, y el de los cuatro menores por otra, producen dos valores por defecto y por exeso de dicha graduación meridiana.

123. De las ocho punterías al objeto terrestre, corregidas de inclinación, se hace un promedio solo, que restado de las graduaciones meridianas, dá dos valores del azimut, cuyo promedio, en fin, produce el azimut verdadero y termina con esto lo referente á una serie de observaciones.

124. El ángulo así encontrado, tiene todavía los errores de puntería y graduación del limbo, y para atenuarles, se reiteran estas series un número de veces que no debe bajar de 30 ni exceder de 38, operando en distintas regiones del limbo azimutal. El promedio total de estas reiteraciones, produce el azimut definitivo que se modifica convenientemente para referirlo al sentido en que ordinariamente se emplean los azimutes, ó sea desde el S pasando por el O.

125. Un ejemplo numérico, aclarará todo lo expuesto en los párrafos anteriores y permitirá además fijar las ideas.

Supongamos, que corregidas de inclinación y referidas al meridiano por las fórmulas antes citadas, hayamos obtenido para graduaciones por defecto de las visuales á la polar, los valores

74.°	28'	12''
74.°	28'	11''
74.°	28'	12''
74.°	28'	13''

y para graduaciones por exceso

74.°	28'	14''
74.°	28'	15''
74.°	28'	14''
74.°	28'	15''

Calculando los promedios de cada grupo, se deduce:

Graduación meridiana por defecto...	74.°	28'	12''
Idem id. por exceso...	74.°	28'	14'',5.

Y si suponemos que al obtener el único promedio de las ocho lecturas del objeto terrestre, obtenemos:

$$15.° \ 12' \ 9''$$

se tendrán los valores,

$$\begin{aligned} \text{Azimut por defecto... } (74.° \ 28' \cdot 12'') - (15.° \ 12' \cdot 9'') &= \\ &= 59.° \ 16' \cdot 3''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Azimut por exceso... } (74.° \ 28' \cdot 14'',5) - (15.° \ 12' \cdot 9'') &= \\ &= 59.° \ 16' \cdot 5'',5. \end{aligned}$$

Y, por lo tanto, su promedio dará el azimut verdadero, cuyo valor es

$$59.° \ 16' \cdot 4'',25.$$

que se convertirá en definitivo por la expresión,

$$\begin{aligned}\text{Azimut definitivo} \dots 180^{\circ} + (59^{\circ} . 16' . 4'', 25) = \\ = 239^{\circ} . 16' . 4'', 25, \quad (I)\end{aligned}$$

126. *Azimut por observaciones al sol.* (2)—La marcha general de las operaciones, es la misma que se ha indicado en el segundo procedimiento de orientación por la polar, sin otra diferencia que la manera especial con que se dirigen las punterías al Sol, en razón á la dificultad de centrarlo exactamente en el retículo. Además y según se ha dicho anteriormente, se necesita conocer la latitud del lugar en que se opera y corregir de estado el reloj para anotar los horarios del Sol; como estas operaciones están entre sí muy enlazadas, y como, por otra parte, la determinación de la latitud por observaciones al Sol, solo se hace cuando se emplea este astro para hallar un azimut, estudiaremos por completo todas las operaciones aunque la determinación de la latitud no corresponda en realidad á este capítulo.

127. El conjunto de operaciones que, en resumen, son necesarias para orientar por el Sol una dirección terrestre, la forman las tres siguientes que estudiaremos por su orden: 1.^a, determinación aproximada de la latitud y estado del reloj; 2.^a, determinación precisa de la latitud y 3.^a, estado del reloj y orientación propiamente dicha.

128. *Determinación aproximada de la latitud y estado del reloj.*—Instalado en estación un teodolito de círculo vertical completo, resguardado de los rayos del sol, y cerca ya de la hora de mediodía, se determina el momento

(1) Debemos hacer notar que operándose con el anteojo en posiciones inversas, las ocho punterías á la polar han de ser, cuatro con el primer nónio ó índice en una región del limbo y cuatro en la opuesta; por esta causa, si cuatro lecturas empiezan por 74°, las otras han de empezar por 254°, ó sea diferir en 180°. Mas como nuestro objeto al poner un ejemplo numérico, es solo aclarar la marcha ú orden en que deben hacerse los promedios, hemos empleado siempre la graduación 74° que es la verdadera, porque suponemos es la que corresponde á la posición normal del anteojo y del índice ó primer nónio, respecto del observador.

(2) Véase Apéndice núm. 7, letra C.

de culminación de este astro del modo siguiente: se coloca detrás del ocular y á pequeña distancia de él, una cartulina, sobre la cual, modificando convenientemente la distancia del ocular al objetivo, se consigue proyectar con gran limpieza las imágenes del Sol y del retículo del anteojo; valiéndose de los movimientos generales del aparato y de los particulares del anteojo, se hace que uno de los bordes del sol, el inferior por ejemplo, sea tangente al hilo horizontal cerca del vertical, como indica la (fig. 29), en que a es el punto de contacto; conseguido esto, se anota la graduación del limbo vertical y la hora que marca el reloj. Como el Sol se separa de este hilo al ascender aparentemente por el espacio, se rectifica de tiempo en tiempo, el contacto de su imagen con el hilo horizontal, obteniéndose una serie de lecturas zenitales decrecientes y horas en que han sido efectuadas; así se continúa con intervalos de tiempo pequeños, hasta que empiecen á crecer las lecturas, lo que indica que el Sol ha pasado ya del instante de culminación y se sigue la operación del mismo modo, hasta obtener, por lo menos, tres ó cuatro lecturas antes y otras tantas después, de la más pequeña observada que indica aproximadamente el instante de culminación.

Hecho esto, se halla la graduación de la vertical, si, como sucede ordinariamente, el limbo zenital no tiene el cero en esta línea; para ello se elige un objeto terrestre bien definido, al que se dirijen dos visuales en posiciones inversas del limbo vertical, anotando las graduaciones de este; restando de la primera lectura la semi-diferencia de las dos, se obtiene la graduación que en el limbo corresponde á la vertical del punto de estación.

Para obtener la latitud aproximada, se utiliza, efectuadas las operaciones descritas, la graduación del limbo vertical correspondiente al instante de culminación y se la convierte en distancia zenital aparente, restándole la graduación de la vertical; la distancia zenital verdadera, co-

respondiente al centro del Sol, se obtiene de la aparente Z' por la fórmula

$$Z = Z' + r - p \pm d$$

en las que r y p son las correcciones por refracción y paralaje y d la de semidiámetro aparente del sol, puesto que se ha apuntado al borde del disco, debiendo hacerlo al centro; el signo de esta última corrección depende de la región del disco solar que haya sido observado, siendo positivo cuando se observa la región superior.

En fin, la latitud se obtiene ya por la expresión

$$L = \delta - Z$$

en la que δ representa la declinación del Sol.

El estado aproximado del reloj lo indica la diferencia entre las 12^h que debía marcar en el instante de culminación y la que realmente marcase en dicho momento; esta diferencia en más ó en menos indica si el reloj atrasa ó adelanta.

129. *Determinación precisa de la latitud.*—No difiere de la anterior sino en que se hace uso de todas las graduaciones verticales anotadas antes y después de la culminación del astro; restadas de estas lecturas la graduación de la vertical, y hechas en los resultados las correcciones de refracción, paralaje y semidiámetro, se obtiene una serie de distancias zenitales del centro del Sol, que se llaman *extrameridianas* porque corresponden á posiciones del sol en que no está en el meridiano; estas distancias se reducen á meridianas por medio de una fórmula (1) que dá el valor de la diferencia entre unas y otras. Con cada valor así obtenido para la distancia zenital meridiana y mediante la fórmula

$$L = \delta - Z$$

(1) Para esta fórmula y las que citaremos en el resto de este capítulo, consúltese el Apéndice 7.º letra C.

antes empleada, se obtienen otros tantos valores de la latitud que dán por su promedio el valor definitivo.

130. El objeto de la determinación aproximada de la latitud y estado del reloj, es proporcionar los datos necesarios para aplicar la fórmula antes citada que reduce al meridiano las distancias zenitales extrameridianas.

131. *Estado del reloj y orientación propiamente dicha.*—Las operaciones necesarias para la determinación precisa del estado del reloj, deben hacerse antes de las de orientación si se opera por la tarde ó después si se opera por la mañana. Para ello, se coloca el anteojo de manera que el hilo horizontal del retículo toque al disco inferior del Sol, anotando la hora y graduación vertical; enseguida se mueve el anteojo hasta que el contacto de dicho hilo sea con el borde superior anotando los mismos datos. Con estas graduaciones referidas á la vertical se obtienen dos distancias zenitales, de las que, por medio de una fórmula especial, se halla el horario del sol, y por lo tanto, (113), la hora que debe marcar el reloj; esta hora, comparada con la que marcaba realmente dá, por su diferencia, el estado que se busca.

132. Llegamos ya á la orientación propiamente dicha y como el objeto y orden de las operaciones, es el mismo indicado en la orientación por la polar, nos limitaremos á exponer este orden y los detalles en que difieren: 1.º, se dirijen cuatro punterías al objeto terrestre, dos en cada posición del anteojo, anotando las graduaciones azimutal y zenital é indicaciones del nivel del anteojo: 2.º, ocho punterías al Sol, cada cuatro en una posición de anteojo, haciendo siempre que el hilo vertical del retículo, sea tangente á la misma parte del disco del Sol, y que el punto de contacto esté precisamente en el cruce del retículo; se anotan los mismos datos anteriores y además la hora de observaciones corregidas de estado: 3.º, otras cuatro punterías al objeto terrestre en las mismas condiciones que la

primera série: 4.^o, con las ocho graduaciones del objeto terrestre correspondientes al limbo azimutal y corregidas de inclinación por la fórmula

$$x = i . \cot. Z$$

se hace un promedio para graduación horizontal de dicho objeto: 5.^o, corregidas también de inclinación las ocho graduaciones azimutales de las punterías al Sol, se calculan ocho valores del azimut de este astro, por fórmulas que dan respectivamente la tangente de la suma y de la diferencia del azimut buscado y del ángulo de posición del astro que no es preciso conocer, pues que por entrar con signos contrarios, desaparece en el promedio: 6.^o, convertidas así en meridianas las graduaciones horizontales de las punterías al Sol, se combinan con la correspondiente al objeto terrestre, obteniéndose ocho valores del azimut buscado, cuyo promedio se toma como definitivo, después de referirlo al sentido en que se cuentan los azimutes, según se dijo en el procedimiento por la polar.



CAPÍTULO QUINTO.

Medidas de los ángulos.

Correcciones y compensación de errores.

133. Al hacer en otro lugar (párrafos 39 á 44), las consideraciones generales sobre la medida de ángulos, estudiamos los distintos errores de que podían venir afectados cuando se medían por una sola observación, é indicamos que para atenuar estos errores se emplean dos métodos especiales, llamados de *repetición* y *reiteración*.

Vamos ahora á estudiar con más detalles ambos procedimientos, estableciendo la comparación entre ellos y reseñando los aparatos y métodos de observación empleados en la aplicación de cada procedimiento.

134. *Medida de los ángulos por repetición.*—El procedimiento de repetición consiste en esencia, en medir un ángulo varias veces, de tal modo, que los arcos determinados sobre el limbo azimutal, se sumen unos á otros sin solución de continuidad; no haciéndose más lecturas que la primera y la última y dividiendo el ángulo total obtenido por el número de repeticiones hechas.

135. Así, pues, si L C K (fig. 30), es el ángulo que se trata de medir y colocamos en el vértice un aparato repetidor de los que después describirémos, dirigiremos una visual al punto L anotando la graduación correspondiente del limbo; por los movimientos generales del aparato, trasladaremos limbo y anteojo unidos, hasta que la visual

pase por K, en cuyo caso la lectura hecha en A ocupará la posición B; si dejando inmóvil el limbo, trasladamos el anteojo otra vez hacia el punto L, el nonio unido á él marcará un arco B A que mide el ángulo pedido; repitiendo las operaciones en el mismo orden, el origen de lecturas que estaba en B se trasladará hacia la izquierda tantas veces la longitud B A como repeticiones se hagan y por lo tanto la última lectura, restándole la primera, dará un valor del ángulo que se busca multiplicado por el número de repeticiones; bastará, pues, dividir por este número para obtener el ángulo verdadero.

136. Tal es en esencia el método de repetición, prescindiendo por ahora de las modificaciones de detalle que introduzca la clase de aparato que se emplee. Veamos ahora como se atenúan con este método los errores de división, lectura y puntería que puedan cometerse.

137. *Atenuación de los errores de división.*—En realidad este error se comete lo mismo que en la medida del ángulo por una sola observación, puesto que en uno y en otro método solamente se efectúan dos lecturas; mas si se tiene en cuenta que al dividir el ángulo leído por el número n de repeticiones, se divide también el error cometido, se comprende que en el valor definitivo del ángulo influirá solo por su $n^{\text{ésima}}$ parte; y aún en el caso más desfavorable, es decir, cuando los errores de cada lectura fuesen máximos y en sentido contrario, no habrá que tener en cuenta en el ángulo repetido, sino su suma dividida por n ; por último, debe tenerse presente que siendo estos errores accidentales, en cuanto se refiere á la esencia de la medición, hay siempre la misma probabilidad de cometerlo en cualquiera de los dos procedimientos, y por lo tanto, en el de repetición siempre resultarán atenuados.

Sí, pues, representemos por ε_d el error probable de división en la medida simple de un ángulo, el error probable de este mismo ángulo obtenido por repetición, ten-

drá por fórmula,

$$\Sigma_d = \frac{\varepsilon_d}{n}.$$

138. *Atenuación del error del puntería.*—Este se cometerá tantas veces, como punterías se dirijan, y por lo tanto, á primera vista parece que lejos de disminuir aumentará; pero considerando que estos errores son verdaderamente accidentales, y se cometerán unas veces en más y otras en menos, y sin sujeción á ley determinada, se podrá aplicar la regla que dá el Cálculo de Probabilidades, para el error accidental de una série de observaciones cuyos errores accidentales se conocen. Por lo tanto, designando por ε_p el error probable de la medida simple,

$$\Sigma_p = \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{n}}$$

será el de la medida hecha por repetición, que resulta de este modo atenuada. Además, en la práctica, se afinan las punterías unas veces de derecha á izquierda y otras en sentido contrario para compensar así, en alguna parte, el error de la medida considerada como simple, y consiguiientemente disminuir aún más el valor de Σ_p .

139. *Atenuación del error de lectura.*—Todos los razonamientos hechos al ocuparnos de los errores de división son aplicables á los de lectura, puesto que también se cometen en el ángulo repetido tantas veces como en el simple. Designando, pues, por ε_l el error de esta última medida, el que se cometa en la repetición, será:

$$\Sigma_l = \frac{\varepsilon_l}{n}$$

Y reuniendo las tres conclusiones en una, el error total de que viene afectado un ángulo medido por repetición, será:

$$\Sigma = \frac{\varepsilon_d}{n} + \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{n}} + \frac{\varepsilon_l}{n}$$

cuando en la medida simple, sería:

$$\varepsilon = \varepsilon_d + \varepsilon_p + \varepsilon_t$$

luego se tiene

$$\Sigma < \varepsilon$$

que prueba se han atenuado los errores cometidos.

140. Como de todo lo expuesto y del exámen de las anteriores fórmulas, se deduce que el error total que se cometa por todos conceptos en la medida de un ángulo será tanto más pequeño, cuanto mayor sea el número de repeticiones, parece que la precisión del método es ilimitada; mas no sucede por varias causas que indicaremos someramente, y puede comprobarse prácticamente que midiendo un mismo ángulo por dos séries de repeticiones en número muy distinto, no aumenta la precisión alcanzada proporcionalmente al trabajo y tiempo que en la série mayor se emplea en exceso.

Entre las varias causas que influyen en esta limitación, pueden considerarse como principales las tres siguientes: primera, los puntos muertos de los tornillos de coincidencia, ó sea el tiempo que se tarda en vencer la inercia de los distintos órganos del aparato, que hace que el anteojo se desplace algo de la visual antes que el nóio se ponga en movimiento; segunda, la desigual temperatura de las distintas partes del aparato, pues aunque se le resguarde de los rayos directos del sol, no podrá evitarse que el calor influya en unas partes más que en otras, dilatándolas desigualmente, introduciendo un nuevo error en las divisiones; además la presencia del operador modifica también la temperatura del aparato en la parte más próxima á él; y tercera, el juego indispensable entre los diversos ejes y manguitos que no formando un sistema rígido introduce ángulos extraños.

El procedimiento de repetición tiene además el inconveniente de ser muy largo cuando, como generalmente sucede, hay que medir varios ángulos de vértice común;

en este caso, en efecto, hay que repetir la operación tantas veces como ángulos deban medirse.

141. Los aparatos empleados para medir los ángulos por repetición, se denominarán *círculos ó teodolitos repetidores*, según que los midan en el mismo plano de los objetos, ó ya reducidos al horizonte. Los segundos son los más empleados, porque evitan los cálculos de dicha reducción; mas como para mejor comprender los inconvenientes y ventajas de unos y otros aparatos, es necesario conocerlos ambos, reseñaremos muy lijeramente la composición y uso de los círculos repetidores.

142. *Círculo repetidor*. (1)—Consiste, (fig. 31), en un limbo graduado C, que puede girar alrededor de un eje perpendicular á su plano y que pasa por el centro; montados sobre el mismo eje, pero pudiendo girar á voluntad con el limbo ó independientes de él, y también independientes entre sí, hay dos anteojos A y A', uno por la cara superior, y otro por la inferior del limbo; al superior A', vá unida una alidada con dos nónios, y al A, un nivel de burbuja N; un eje paralelo al plano del limbo y unido á él, está montado sobre una horquilla H, permitiendo dar al aparato distintas inclinaciones; por último, esta horquilla, y con ella todo el aparato, gira alrededor del eje vertical E', sostenido por un pié con tornillos nivelantes. Todos los movimientos indicados pueden ser, á voluntad, rápidos ó lentos, por la acción combinada de los oportunos tornillos de presión y coincidencia.

143. Para usar el círculo repetidor, se empieza por colocar el limbo en el plano de los objetos, valiéndose para ello, de los movimientos alrededor del eje E', tornillos del pié y horquilla H. Conseguido esto, se opera como indica la figura 30; se supone en ella que las graduaciones del limbo crecen en el sentido de las rotaciones

(1) En las explicaciones en la clase puede prescindirse, si se quiere, de este aparato.

inversas; sea, pues, LCK el ángulo que se quiere medir; establecida la coincidencia de los ceros de nóio y limbo y por los movimientos generales de éste, se hace que la visual del anteojo superior AA' pase por L ; con el movimiento independiente del anteojo inferior BB' se dirige la puntería al objeto K , obteniéndose el arco BA que mide el ángulo pedido; pero que no puede apreciarse porque el anteojo inferior no lleva alidada; uniendo este anteojo al limbo y con los movimientos de éste, se lleva el anteojo BB' hasta enfilar el punto L , con lo que el AA' retrocederá una cantidad AD evidentemente igual AB , si, pues, dejando fijo el limbo y anteojo BB' llevamos solo el AA' á visar el punto K , la alidada marcará un arco DAB , doble del ángulo buscado. Para efectuar ahora la repetición de la medida, se hace que todo el aparato gire hasta que el anteojo AA' que miraba al punto K , enfile otra vez el L , con lo que el cero del limbo pasará de D á E ; el anteojo BB' solo se dirige otra vez al punto K y estamos en las mismas condiciones que al empezar; es decir, que moviendo todo el sistema hasta que BB' vuelva á L , el cero pasará de E á F , y al llevar de nuevo el anteojo AA' al punto K , determinaremos en el limbo un arco FDB igual al cuádruplo del ángulo buscado; así se continúa hasta terminar el número de repeticiones convenidas.

144. Basta lo dicho para comprender lo largo y expuesto á errores que es, en la práctica, el uso del círculo repetidor; hay que hacer uso constantemente de los distintos movimientos aislados ó de conjunto del limbo y de los anteojos, y es fácil equivocarse un tornillo y dar un movimiento indebido, que aunque produzca un error grosero y fácil de apereibir, obligará siempre á comenzar las operaciones. Esto, unido á la dificultad de conseguir que con tantos movimientos el limbo no se mueva ni se separe del plano de los objetos, y la necesidad de medir las distancias zenitales de los dos lados del ángulo, para efectuar

después su reducción al horizonte, ha hecho desechar los círculos repetidores en las medidas de los ángulos que exijan gran precisión.

145. *Teodolitos repetidores*.—Son los aparatos que dan el valor de la proyección horizontal del ángulo del terreno y están caracterizados, porque el círculo de los nonios, tanto solo, como unido al limbo azimutal, puede girar con movimiento rápido ó lento, según convenga. Se dividen los teodolitos en concéntricos y excéntricos, según que el plano vertical, que al cabecear describe el anteojo, pase ó nó por el centro del limbo azimutal; los primeros son más difíciles de construir, pero no obligan á hacer ninguna rectificación por excentricidad en las visuales; los excéntricos exigen para corregir dicha excentricidad una doble serie de repeticiones con el anteojo á la derecha y á la izquierda del eje vertical de rotación.

146. Como tipo general de teodolito repetidor, describirémos el que representa la figura 32 en que están englobados todos los detalles esenciales de esta clase de aparatos.

El círculo de los nonios *c*, de forma tronco-cónica y con los nonios *n*, trazados en su superficie lateral, lleva un eje macizo que atraviesa el limbo azimutal *c* y se introduce en un hueco del eje principal del aparato que, á su vez, está unido á un trípode con tornillos nivelantes *b*, *b'*, *b''*. Del limbo azimutal *C* arranca un manguito que rodea á dicho eje principal y en cuya superficie exterior hay dos canales de sección rectangular, cuyo objeto veremos enseguida; dicho limbo azimutal, también de forma tronco-cónica y con la graduación marcada en su superficie lateral, lleva en su base inferior una canal circular *r r* en que se aloja un saliente de la pieza *m*; otra canal *a*, practicada en la superficie lateral del limbo, puede alojar con bastante huelgo un saliente de la pieza *m'*; ésta y la *m* forman, por lo tanto, una mordaza que abarca ó sujeta al limbo azimu-

tal cuando se aprieta el tornillo de presión T; y como esta mordaza vá unida al círculo de los nónios por la pieza P y tornillo T', resulta que cuando se aprieta el T, los dos círculos forman cuerpo, y el movimiento rápido del que lleva los nónios queda detenido; el lento se consigue por la acción del tornillo T' que gira sin avanzar en e y cuya tuerca está en t; este tornillo T' se llama de aproximación ó coincidencia; cuando el tornillo T está suelto, el círculo de los nónios puede girar libremente arrastrando consigo el conjunto de las piezas descritas.

Un collar C_2 que abraza el manguito del limbo azimutal por la más inferior de las ranuras antes citadas, permite, cuando se aprieta el tornillo de presión $\mathcal{P}$, detener el movimiento rápido del limbo, obteniéndose el lento por el tornillo de coincidencia $\mathcal{Z}$, análogo al T'. A la otra ranura del manguito, se une un collar C_1 con su correspondiente tornillo de presión, al que vá unido el anteojo de referencia A' que puede así girar rápidamente con independencia del limbo, ó formar cuerpo con él.

Del círculo de los nónios arrancan dos montantes M que sostienen el eje de rotación del anteojo A; á uno de estos montantes vá fijada la regla de nónios A_1 de un limbo vertical C_1 unido al anteojo y móvil con éste; para detener los movimientos rápidos del círculo vertical, hay una pieza L terminada en un collar que abraza al eje del anteojo, con el que forma cuerpo apretando el tornillo de presión $\mathcal{Z}''$ de la mordaza m'' : los movimientos lentos se consiguen por un tornillo de coincidencia Z' que teniendo su esferilla e'' en el montante M, tiene su tuerca T'' en la pieza L. Los tornillos X y X' sirven para enfocar los anteojos, y en fin, tres niveles de burbuja N, N' y N'' sirven para las rectificaciones del aparato.

147. Las correcciones generales que deben efectuarse antes de operar con un teodolito, son: 1.^a, hacer que sea vertical el eje de rotación del aparato: 2.^a, obtener la coin-

cidencia del eje óptico del anteojo con el de figura, lo que puede hacerse por dos procedimientos distintos según que el anteojo pueda ó nó girar alrededor de su eje de figura; y 3.^a horizontalidad del eje de rotación del anteojo.

148. *Primera corrección*.—La verticalidad del eje principal se consigue por la acción combinada de los tres tornillos del pie y las indicaciones de los niveles N' y N'' , siguiéndose el mismo método y precauciones estudiadas en Topografía.

149. *Segunda corrección*.—*Primer caso*.—Para conseguir que el eje óptico coincida con el de figura, cuando el anteojo tiene giro alrededor de este último eje, ó dicho de otro modo, cuando tiene movimiento en sus collares, se dirige una visual á un objeto lejano bien definido, marcando el punto con que coincide el cruce de los hilos de retículo; si al girar el anteojo sobre su eje de figura, la coincidencia entre dichos dos puntos subsiste en todas las posiciones del anteojo, los dos ejes en cuestión coinciden y no hay que hacer rectificación alguna; pero si al empezar el giro la cruz filar se separa del punto visado, los ejes óptico y de figura no coinciden y la rectificación necesaria se hace como indica la figura 33; en ella, los diámetros perpendiculares $A A'$ y $B B'$ determinan por su intersección, la del eje de figura con el plano del retículo y el punto c es la cruz filar determinada, por los hilos $a a$ y $b b$; dirigida la visual y determinado el punto del objeto que coincide con c , se hace girar al anteojo 180° en sus collares, con lo que el retículo pasará á la posición $a' a'$, $b' b'$ y el punto c á la simétrica c' con respecto al eje de figura; con los tornillos de rectificación del retículo se desplaza el hilo vertical la mitad de la distancia $c c'$, hasta conseguir que en posiciones inversas del anteojo pase por el mismo punto del objeto visado; haciendo igual operación con el hilo $b' b'$, los dos coincidirán con los diámetros $A A'$ y $B B'$ y el eje óptico con el de figura.

150. *Segunda corrección.—Segundo caso.*—Si el anteojo no tiene movimiento en sus collares, que es el caso de la figura 32, la corrección por coincidencia de los ejes se hace como manifiesta la figura 34, en la que se supone que $a b$ es la posición del eje óptico, que corta oblicuamente al eje horizontal de rotación $x x'$; en esta posición, se dirige una visual á un punto h bien definido, anotando la graduación correspondiente en el limbo azimutal; se dá enseguida al aparato un giro de 180° alrededor de su eje vertical y se invierte el anteojo en sus muñones, con lo que el eje óptico ocupará la posición $a' b'$, divisándose un punto h' , distinto del anterior visado; con los tornillos del reticulose lleva la cruz filar á un punto m intermedio entre h y h' , quedando el aparato arreglado, cuando en posiciones inversas del anteojo pase siempre la visual por el mismo punto del terreno; esto solo se consigue después de algunos tanteos.

151. *Tercera corrección.*—Verificada la anterior, se ha conseguido que el eje de rotación del anteojo, que por construcción es perpendicular al de figura, lo sea también al óptico; si ahora se consigue que dicho eje de rotación sea horizontal, el plano que al cabecear describa el anteojo, será vertical y el instrumento quedará por completo rectificado.

Para conseguirlo, se dirige una visual á un punto cualquiera del terreno y haciendo cabecear el anteojo, se fija, eligiendo otro punto, el plano que describe el eje óptico. Si al invertir el anteojo, después de girar el aparato 180° , el nuevo plano descrito pasa por los dos puntos elejidos, dicho plano es vertical y no hay que hacer corrección alguna; si pasando por uno de los puntos no pasa por el otro, se corrige la mitad de la desviación, por los tornillos de altura de los soportes, si el aparato los tiene; si careciese de ellos, se tendrá en cuenta este error, que permiten medirlo las indicaciones del nivel y el empleo de la

fórmula

$$x = i \cot. Z$$

encontrada en otro lugar (121).

152. El manejo del aparato para medir un ángulo por repetición es bien sencillo; establecida la coincidencia de los ceros del limbo y del primer nóvio (que es el más próximo al observador), se afloja el collar C_2 (fig. 32), y con el movimiento de conjunto que esto permite se lleva el anteojo hacia el objeto de la derecha (ó al de la izquierda, según el sentido de las graduaciones del limbo), apretando el collar un poco antes de llegar á él y terminando la puntería con el tornillo Z ; soltando ahora el de presión T que une al limbo el círculo de los nóvios, y por el movimiento solo de éste, se dirige el anteojo al objeto de la izquierda, apretando el tornillo T antes de llegar y terminando la coincidencia con el T' ; de la misma manera que en la primera visual, vuelve á apuntarse al objeto de la derecha y con el círculo de nóvios solo se pasa el anteojo otra vez á la izquierda, continuándose las operaciones en el mismo orden hasta terminar el número de repeticiones fijado de antemano. De lo dicho, se desprende una regla general que evita las equivocaciones en el manejo de tornillos, y es: *todas las visuales al primer objeto, se dirijen valiéndose de los movimientos generales de todo el aparato: las visuales correspondientes al segundo objeto, se dirijen con los movimientos particulares del círculo de los nóvios.*

153. *Medida de los ángulos por reiteración.*—El procedimiento de reiteración consiste en esencia, en medir un ángulo en distintas partes del limbo para promediar así los errores sistemáticos de división. La práctica de este sistema queda reducida á medir el ángulo una primera vez por el medio general indicado para la medida simple, anotando la lectura de las dos visuales; enseguida se desplaza el limbo, sin mover el anteojo ni el círculo de los nóvios, un

número de grados en relación con el de reiteraciones, y se repite la medida sobre la nueva parte del limbo; se vuelve á desplazar éste, y así se continúa hasta terminar la serie de reiteraciones. Como en cada medida se ha obtenido un valor para el ángulo, por defecto ó por exceso, según el orden de la desigualdad sistemática, en el promedio de estos valores desaparecerá el error correspondiente.

El número de grados que debe correrse el limbo en cada determinación, se determina por la expresión

$$g = \frac{360^{\circ}}{n \cdot r}$$

siendo n el número de nónios que tenga el limbo y r el de reiteraciones que hayan de hacerse.

Así, pues, si el aparato tiene cuatro nónios y se quieren efectuar cuatro reiteraciones, se tendrá

$$g = \frac{360^{\circ}}{16} = 22^{\circ} . 30'$$

por lo que las lecturas empezarán respectivamente por

$$0^{\circ}; 22^{\circ} 30'; 45^{\circ}; 67^{\circ} 30'$$

y cada nónio recorrerá así todo un cuadrante del limbo y entre los cuatro toda la graduación.

Veamos ahora como este procedimiento atenúa los errores existentes de división, lectura y puntería, teniendo en cuenta que los tres son ya errores accidentales.

154. *Atenuación del error de división.*—El sistemático ya se ha dicho como queda compensado al operar; en cuanto al accidental se comete tantas veces como reiteraciones se hagan, y por lo tanto, llamando e_d al error accidental de la medida simple, el correspondiente á la reiterada, será:

$$\Sigma_d = \frac{e_d}{\sqrt{n}}$$

Como en el método de repetición hallamos para este

caso $\Sigma_l = \frac{\varepsilon_d}{n}$, se deduce que la reiteración atenúa menos que la repetición el error accidental del limbo, pero en cambio, puede decirse que suprime el sistemático y aumentando el número de reiteraciones tiende á compensar el accidental.

155. *Atenuación del error de puntería.*—Se presenta el mismo caso que en la repetición, pues también se hacen dos punterías por cada vez que el ángulo se repite ó reitera; el error total tendrá pues, el mismo valor y expresión antes hallada,

$$\Sigma'_p = \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{n}}$$

156. *Atenuación del error de lectura.*—También se comete tantas veces como reiteraciones se hagan, por lo que su fórmula, será:

$$\Sigma'_l = \frac{\varepsilon_l}{\sqrt{n}}$$

también mayor que en el caso análogo de la repetición.

Resumiendo, si llamamos ε el error total por todos conceptos en la medida simple, y Σ y Σ' los correspondientes de la repetida y reiterada, se tendrá:

$$\Sigma < \Sigma' < \varepsilon$$

157. Resultan, pues, para el método de repetición todas las ventajas en el caso de la medida de un solo ángulo; y sin embargo, el único procedimiento empleado hoy día en las operaciones geodésicas de primer orden y aún casi en las de segundo y tercero, es el de reiteración; esta predilección reconoce por causa, que la reiteración es el único procedimiento aceptable para medir varios ángulos reunidos en un mismo punto, caso que es el general en la práctica; se emplea para ello el procedimiento llamado *reiteración por vueltas de horizonte*, que proporciona ade-

más al observador medios de comprobar sus resultados que vienen con una precisión extremada.

158 Para efectuar una vuelta de horizonte, sean, (figura 35), B, C, D y E varios puntos del terreno cuyos ángulos en el punto O se quieren medir. Se empieza por dirigir una visual á un punto A que se llama de referencia, haciendo antes coincidir los ceros de nóvio y limbo; sin mover ahora este y con los giros particulares del círculo de los nóvios, se dirijen las visuales sucesivas á los puntos B, C,.... anotando en cada una las graduaciones correspondientes y terminando por una nueva visual al punto A sin cambiar el sentido del movimiento; partiendo otra vez de A pero en sentido contrario al anterior, se dirijen visuales á los puntos E, D, C, etc., anotando también las graduaciones, que deben ser sensiblemente iguales á las antes observadas, y volviendo, en fin al punto A.

Para hacer ahora la reiteración, se gira el limbo el número de grados conveniente y se repite la vuelta de horizonte como queda dicho.

159. Las graduaciones obtenidas para cada visual se llaman *direcciones angulares*, y para obtener de ellas el valor de los ángulos buscados, se resta de cada una la graduación del punto inicial A, que en la práctica no es exactamente 0^0 ; á esta operación se la llama *volver al cero*; restadas ahora cada dos direcciones angulares, se obtiene el valor de los ángulos. Repetidas estas operaciones con cada reiteración, el promedio de los valores obtenidos para un mismo ángulo, será el definitivo.

Supongamos, como ejemplo que fije las ideas, que las graduaciones anotadas en una reiteración, sean:

$$O A = 0^0 10' 10''$$

$$O B = 62^0 15' 23''$$

$$O C = 124^0 9' 12''$$

$$O D = 190^0 11' 18''$$

las direcciones angulares vueltas al cero, serán:

$$O A = 0^{\circ} \ 0' \ 0''$$

$$O B = 62^{\circ} \ 5' \ 13''$$

$$O C = 123^{\circ} \ 59' \ 2''$$

$$O D = 190^{\circ} \ 1' \ 8''$$

y por lo dicho, se tendrá para los ángulos pedidos:

$$A O B = O B - O A = 62^{\circ} \ 5' \ 13''$$

$$B O C = O C - O B = 61^{\circ} \ 53' \ 49''$$

$$C O D = O D - O C = 66^{\circ} \ 2' \ 6''$$

160. Esta manera especial de obtener los valores de los ángulos es otra causa que atenúa los errores accidentales que puedan cometerse; además la doble vuelta de horizonte hecha en las condiciones explicadas, permite afinar las punterías, unas veces de derecha á izquierda y otras de izquierda á derecha, evitándose así, ó compensándose cuando menos, los arrastres que el círculo de los nónios pueda, en su movimiento lento, producir sobre el limbo. Por todas estas razones, la precisión práctica alcanzada con la reiteración supera á la teórica estudiada y aún á la práctica del método de repetición; así se justifica la preferencia dada á aquélla sobre ésta.

161. Los aparatos destinados á la medida de los ángulos por reiteración, se llaman *círculos* ó *teodolitos reiteradores*; unos y otros dán los ángulos ya reducidos al horizonte, y solo se diferencian entre sí, en que los círculos carecen del limbo vertical que llevan los teodolitos.

Como, aparte de esta diferencia, todos los demás detalles del limbo azimutal son iguales en ambas clases de aparatos, describirémos únicamente el círculo azimutal reiterador, construído por Brunner y adquirido por el Instituto Geográfico, para los trabajos de la unión geodésica de España y Argelia.

La parte nueva y esencial de los modernos aparatos

reiteradores, estriba en que los nónios se han sustituido por microscópios micrométricos y cada aparato lleva una alidada con cuatro de estos microscópios situados en los extremos de dos diámetros perpendiculares; comenzaremos, pues, por la descripción, arreglo, manejo y apreciación de estos microscópios, lo que aclarará luego la descripción del conjunto del aparato.

162. *Microscópios micrométricos*.—Están constituidos por un microscópio y un retículo movable por la acción de un tornillo micrométrico. El microscópio consta de un ocular y un objetivo montados en un mismo tubo y que puede aproximarse más ó menos al limbo para obtener con limpieza la imagen de las divisiones.

El retículo móvil está constituido (fig. 36 y 37), por dos hilos verticales 1 y 2 equidistantes del diámetro correspondiente y separados á tal distancia que comprendan la imagen de una división del limbo, dejando entre ellos y los bordes de esta imagen unos pequeños filetes brillantes que han de ser iguales cuando la división quede centrada entre los hilos; un tercer hilo 3 coincide con el diámetro horizontal; este retículo vá montado sobre una placa rectangular (fig. 37), unida á un toraílo micrométrico M que se maneja por el botón A; un tambor graduado B vá unido á frotamiento dulce al vástago de este tornillo participando de sus movimientos, y, en fin, un índice fijo en la envuelta del micrómetro (no se vé en la figura) marca las graduaciones del tambor.

Sobre otra placa rectangular montada en la misma armadura, y que puede moverse lateralmente por la acción de un tornillo V, hay un peine que se proyecta en el campo del retículo y cuya anchura de dientes corresponde á una vuelta completa del tornillo micrométrico; este peine lleva practicada una ranura con un pequeño círculo vaciado o que hace las veces de cero, y cada cinco dientes, otra ranura para facilitar su cuenta.

163. El tambor del tornillo micrométrico, está dividido en cien partes iguales, y el paso del tornillo es tal, que mientras los hilos verticales del retículo pasan de centrar una división á centrar la siguiente, el tornillo dá dos vueltas y media ó sean 250 divisiones del tambor; como la distancia angular entre cada dos divisiones corresponde (en el círculo de Brunner) á 10' centesimales, cada vuelta del tornillo equivaldrá á

$$\frac{10'}{2^v,5} = 4' \text{ de arco}$$

y cada división del tambor á

$$\frac{4'}{100} = 4'' \text{ centesimales de arco.}$$

164. Para arreglar los microscópios antes de operar, supongamos una alidada con cuatro microscópios de esta clase y provista además de un brazo con un índice que señala las graduaciones del limbo; coloquemos este índice marcando el cero de la graduación y enfoquemos los cuatro microscópios; partiendo de uno de estos, se colocan sus dos hilos verticales de modo que comprendan bien centrada una división del limbo, valiéndose para ello del tornillo micrométrico; por medio del tornillo V, desplazaremos el peine hasta que la ranura que lleva el cero, quede también centrada entre dichos hilos, y, en fin, por el movimiento solo del tambor graduado, colóquese su cero enfrente del índice de la envuelta. En el segundo microscópio se repiten las mismas operaciones, pero de modo que la división comprendida entre los hilos difiera en 100'', exactos de la análoga del microscópio anterior, y así se hace también con los dos restantes.

De esta manera se tienen todos los índices del aparato señalando sus ceros respectivos, y los retículos de los microscópios y peines correspondientes en la posición que

indica la (fig. 36, I,) en la cual a b y c son tres divisiones consecutivas del limbo.

165. Para medir un ángulo con el aparato así arreglado, ó mejor dicho para hacer las lecturas, supongamos que se desplaza la alidada y con ella los microscópios, de modo que el índice de esta quede entre dos divisiones del limbo; por lo dicho antes se comprende que los hilos verticales de los cuatro microscópios quedarán también entre dos divisiones como indica la fig. 36. II, debemos advertir que la cabeza del tornillo micrométrico, queda siempre á la derecha del operador, y que el retículo debe moverse también hácia la derecha, pues que creciendo en el limbo las divisiones de izquierda á derecha y viéndose las imágenes invertidas, la imagen a de la izquierda será la mayor en realidad.

Sentado esto, efectuemos la lectura del índice de la alidada hasta la división más próxima á él, restándonos apreciar la fracción correspondiente, que será evidentemente igual á la n m (fig. 36, II), que separa el cero del peine de la división b que es la inferior; sí, pues, desplazamos el retículo hasta que los 1 y 2 abarquen bien centrada la división b , la lectura del peine y del tambor del tornillo dará la fracción de minutos y segundos correspondiente. Se hace la misma operación con los otros microscópios y la suma de las lecturas divididas por el número de microscópios, dará en general la fracción definitiva; pero en el caso particular del aparato que describimos, como la equivalencia de los dientes del peine y divisiones del tambor son, como hemos dicho, 4' y 4'' respectivamente, habría que multiplicar las lecturas por 4 para reducirlas á arco y después dividir las por 4 que son los microscópios, por lo que basta hacer la suma de las lecturas.

Supongamos, como ejemplo, que el índice de la alidada marque $74^{\circ} . 10'$ pero quedando comprendido entre

las divisiones 10' y 20' y que las lecturas de los microscópios sean:

1. ^o ...	2	vueltas y 15 divisiones del tambor.			
2. ^o ...	2	»	13	»	»
3. ^o ...	2	»	14	»	»
4. ^o ...	2	»	16	»	»

la suma de las cuatro lecturas es

8 vueltas y 58 divisiones

que por lo dicho antes equivalen á

8 minutos y 58 segundos

y, por lo tanto, el valor real del ángulo será:

$$74^{\circ} \quad 18' \quad 58''.$$

166. Para determinar el grado de precisión que con este método puede obtenerse en una lectura, diremos que puede apreciarse á simple vista, aún por un operador poco experimentado, hasta $\frac{1}{3}$ de cada división del tambor, ó sea en valor gradual $\frac{4''}{3}$ y como se opera con cuatro microscópios y el error de lectura es accidental, el que por este concepto pueda cometerse en el ángulo leído, tendrá por valor probable:

$$e = \pm \frac{\frac{4''}{3}}{\sqrt{2}} = \pm \frac{2''}{3} = \pm 0'',67.$$

167. Como la separación aparente entre las divisiones del limbo, depende de la distancia á que se coloquen los microscópios y esta no puede ser absolutamente igual en todos, las lecturas hechas en cada uno discreparán en pequeñas cantidades, pero como en realidad cada dos divisiones del limbo no corresponderán á las 250 divisiones del tambor, la equivalencia que hemos adoptado para las lecturas no es completamente cierta. Para conocer en cada

microscópio después de enfocado, cuanto discrepa la lectura del valor verdadero, se efectúa la operación llamada *tara de los microscópios*; para ello se mide con cada uno y en distintas partes del limbo, el número de divisiones del tambor necesarias para que los hilos verticales pasen de una división á otra, tomándose el promedio de todas las medidas que resultará ser $250 \pm x$, no debiendo exceder x de dos divisiones. Con este dato, se construye una tabla que dá las correcciones angulares que deben hacerse á cada lectura, para arcos comprendidos entre 0 y 10' que es el límite que han de apreciar los microscópios.

168. Terminada en todas sus partes la descripción y estudio de los microscópios micrométricos, podemos pasar ya á la descripción del conjunto del *círculo azimutal reiterador* de Brunner.

169. *Círculo de Brunner.* (Figura 38)—Del centro de una meseta con tornillos nivelantes u, v , arranca un eje de acero, de forma tronco-cónica A, con tres escalones en su base, el primero de ellos, s , más ancho que los demás; en éste descansa el limbo azimutal L con su borde en forma tronco-cónica y la graduación grabada en cinta de plata; el limbo azimutal no es macizo, sinó constituido por una especie de rueda, para hacerlo más ligero, y su altura es igual á la del segundo escalón del eje. En este escalón se apoya un disco R que puede oprimirse contra el limbo, por medio de unos tornillos de presión, deteniendo así los movimientos rápidos de éste. En el tercer escalón se apoya un manguito A' que rodea al eje, y del que arrancan cuatro brazos inclinados, que llevan los microscópios micrométricos M; este manguito termina, en su parte superior, por una corona circular, cerrada con una chapa con tres tornillos que la unen á la corona; un tornillo colocado en el centro de esta chapa constituye el verdadero apoyo del manguito sobre el eje, lo que hace muy fáciles y suaves los movimientos de la alidada.

De la parte superior del manguito se levantan dos montantes que sostienen un anteojo ordinario con un nivel *N* para colocar horizontal su eje de rotación; el retículo de este anteojo, formado por cuatro hilos dos á dos perpendiculares, es movable por la acción de un tornillo micromético análogo á los del limbo azimutal.

Del mismo manguito *A'* y en dirección de un diámetro del limbo, parte una alidada, que por un extremo termina en un índice *i* y un microscópio *l* para hacer las lecturas de los grados y decenas de minutos; por el otro extremo lleva esta alidada unas mordazas que tienen por objeto dar á los microscópios y al anteojo movimientos de giro rápido ó lento alrededor del eje *A*; para evitar que estos movimientos y en especial el lento puedan ejercer arrastre en el limbo, las mordazas no se unen á este sino á una corona circular *c* unida á los piés del aparato por las esquadras *t*.

La mordaza está constituida, (fig. 39), por dos piezas *a* y *b* de las que la *b* resbala á lo largo de la corona *c* y la *a* vá unida á la alidada; apretando el tornillo de presión *k*, la pieza *b* y la corona forman cuerpo, con lo que el movimiento rápido de la alidada queda detenido; para obtener el lento, hay un tornillo de coincidencia *m*, que teniendo su tuerca en un saliente de *a*, apoya su punta en la *b*, y por reacción hace mover á la alidada, ayudando á este movimiento un muelle en espiral *x* cuyo objeto es mantener siempre en contacto el tornillo *m* con dicha pieza *b*. Las diversas figuras 39 detallan suficientemente los diversos aspectos y forma de ambas piezas.

En fin, para iluminar de un modo igual y constante las divisiones del limbo, evitando el error de lectura por la proyección de sombras, se usa un procedimiento muy ingenioso que indica la figura 40. En el tubo de cada microscópio, por debajo del objetivo, hay un collar *c* de que parte una palanca *r r'*, articulada en sus dos extremos al

collar y á un prisma de reflexión total a, b, c , con la cara b, c estañada y encerrado en una envuelta metálica que solo deja libres dos orificios en las caras del ángulo recto; en el interior del tubo y colocado frente á una abertura de él, hay un espejito cóncavo e , giratorio en el punto o y con un pequeño orificio practicado en el vértice. Un rayo de luz zenital S , incidiendo normalmente á la cara a, b , sufre en N la reflexión y vá á incidir en el espejo e en un punto P , desde donde se refleja nuevamente é incide en dirección casi perpendicular á la arista $m n$ del contorno del limbo; en R es reflejado según el eje del microscópio, y pasando por la abertura a del espejo vá á parar al objetivo en la dirección S' . Como la luz empleada es zenital é incide casi normalmente en el contorno del limbo, no habrá sombras arrojadas y el error de lectura por esta causa, desaparece.

170. Antes de emplear por primera vez el círculo reiterador, y de cierto en cierto tiempo para precaver errores, debe hacerse la determinación de las llamadas *constantes instrumentales* y al empezar una série de observaciones se debe siempre determinar la graduación de la *colimación nula*. Estudiémos brevemente cómo se realizan estas operaciones.

171. *Primera constante.*—*Valor gradual de las divisiones del nivel.*—Se hace uso para ello del aparato representado en la figura 41, que se llama *probeta de nivel*; consiste en una regla R' que puede colocarse horizontal, por medio de tres tornillos nivelantes y sobre la cual vá situada otra regla R , que puede formar ángulo con la primera, girando alrededor de la charnela A ; este giro se consigue mediante un tornillo micrométrico V , cuya cabeza es un tambor graduado y dividido en cien partes iguales; sobre la regla móvil hay dos soportes cuya separación es variable, para adaptarse á la longitud del nivel que se vá á ensayar y que se coloca sobre ellos. Dispuesto ya el nivel en el aparato, se dá vueltas al tornillo, hasta que la burbu-

ja se coloque en un extremo del tubo; conseguido esto, se hace que el tambor del tornillo marque cero y entónces se mueve el tornillo hasta que la burbuja recorra un pequeño número de divisiones del tubo, anotando las lecturas del tambor y del nivel; así se continúa hasta conseguir que la burbuja recorra todo el tubo en dos direcciones opuestas, pero avanzando siempre el mismo número de divisiones del tambor; con estos datos y aplicando el método de los mínimos cuadrados, se deduce el número más probable de divisiones del nivel, correspondientes al de divisiones que avanza el tornillo y el valor correspondiente á una división lo dá la fórmula

$$\alpha'' = \frac{W t}{d \cdot T \cdot n \cdot \text{sen. } 1''}$$

que se encuentra del modo siguiente: representemos por W el paso del tornillo micrométrico y por d su distancia á la charnela de la regla, con lo que $\frac{W}{d}$ representará la tangente del ángulo que gira la regla cuando el tornillo avanza un paso; si designamos por T el número total de divisiones del tambor, $\frac{W}{d \cdot T}$ será el ángulo correspondiente á una de dichas divisiones, y por lo tanto, si t divisiones del tambor corresponden á n del nivel, el ángulo correspondiente á una división del nivel, será:

$$\frac{W t}{d \cdot T \cdot n}$$

bastando ya dividir esta expresión por $\text{sen. } 1''$ para obtener su valor gradual α , dado por la fórmula completa ántes citada.

172. *Segunda constante. Valor angular del paso del tornillo del ocular.*—Hemos dicho que el retículo del anteojo es movable merced á un tornillo micrométrico de cabeza graduada en cien partes y cuyas vueltas completas

cuenta un peine dispuesto del mismo modo que se ha dicho en los microscópios del limbo. Para determinar el valor angular del paso de este tornillo, se colocan en el terreno dos señales bastante lejanas del aparato, pero lo suficientemente próximas entre sí, para que se vean á un tiempo en el campo del ocular. Colocado el aparato en estación y sin tocar el retículo del anteojo, se mide por reiteración un cierto número de veces, el ángulo de las visuales dirigidas á cada señal y supongamos que el promedio obtenido para dicho ángulo sea 10', por ejemplo; dirigiendo la puntería á una de las señales, se mueve el retículo, sin variar la dirección del anteojo, hasta que la segunda señal quede centrada en el cuadrado de los hilos, anotando las lecturas del tornillo; repitiendo esta operación varias veces, y hallando el promedio de las lecturas obtenidas, se tendrá un valor bastante exacto del número de vueltas y fracciones de vuelta necesarias para que el cuadrado de los hilos pase de una á otra señal; si suponemos que este valor es 3 vueltas y 63 divisiones ó centésimas de vuelta, es evidente que el valor gradual correspondiente al paso del tornillo, será:

$$\frac{10'}{2,^v 63} = 3',8 = 3' 80'' \text{ cent.}$$

y el que corresponde á una división del tambor

$$\frac{10'}{263} = 0',038 \text{ centesimales.}$$

173. *Valor de la colimación nula.*—Este valor, que como se ha dicho antes, debe determinarse al empezar cada série de observaciones, corresponde á la graduación del tornillo del ocular, para la cual, el eje óptico del anteojo coincide con el de figura.

Para determinar este dato, se dirige una visual á un objeto cualquiera, centrando la imágen por los movimientos del retículo, anotando la graduación del tambor; repi-

tiendo esta operación se halla un promedio general de lecturas, que llamaremos V_1 , correspondiente á la posición del eje óptico cuando el tambor está á la derecha del observador. Invirtiendo el anteojo y operando del mismo modo, obtendremos otro promedio V_2 para cuando el tambor está á la izquierda; es evidente, que sea cualquiera la posición del tambor, la colimación será nula cuando se coloque el retículo de manera que el tornillo micrométrico marque una graduación V_0 dada por la fórmula

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

174. Las rectificaciones que deben efectuarse en el círculo repetidor al colocarlo en estación para operar, son: hacer que sea vertical el eje principal del aparato, lo que se consigue por las indicaciones de un nivel y con el empleo de los tres tornillos del pié; encontrar el valor de la colimación nula, como queda dicho, lo que equivale á suprimir dicha colimación; y, en fin, cerciorarse de que el eje de rotación del anteojo es horizontal, y si no lo es, conocer su inclinación con auxilio del nivel del anteojo.

175. El método que se emplea para usar este aparato, es el de reiteración por vueltas de horizonte, en la misma forma que se ha explicado en párrafos anteriores (157 á 160), sin más detalle particular que, para evitar en lo posible el error de puntería una vez dirigida la primera visual se centra varias al objeto, apuntando y desapuntando varias el retículo solo, para cerciorarse de que siempre que esto se verifique marca el tornillo la graduación de la colimación nula; esta precaución se tiene en todas las visuales.

176. *Teodolitos reiteradores.*—Habiendo descrito en todos sus detalles el círculo reiterador y los microscópios micrométricos, bastan breves palabras para hacer la descripción de los teodolitos reiteradores, alijando así el texto de largas y enojosas descripciones.

La parte azimutal de los teodolitos reiteradores es análoga al círculo de Brunner, difiriendo unos modelos de otros, solo en la apreciación de las divisiones del limbo y de los microscópios, y en el número de éstos, que pueden ser dos ó cuatro.

El anteojo es unas veces recto y otras acodado para poder aumentar sus condiciones de abertura sin perjudicar la buena estabilidad del aparato; en este último caso, el tubo del anteojo tiene la forma de ángulo recto con un prisma de reflexión total colocado en el vértice del ángulo, lo que hace que el observador pueda, mirando por un costado, que es donde está el ocular, ver el objeto á que apunta como si la visual fuera directa. El retículo es siempre móvil por la acción de un tornillo micrométrico; y para poderlos utilizar en las observaciones nocturnas, lleva un prisma que permite iluminar los hilos del retículo.

Unido á este anteojo y girando con él, vá un limbo vertical dotado de movimientos rápido y lento. Para hacer las lecturas en este limbo hay una alidada fija horizontal con dos microscópios micrométricos en sus extremos, y un puntero vertical fijo á esta alidada sirve para hacer las lecturas de los grados y decenas de minuto.

177. *Reducción de los ángulos al horizonte.*—Cuando se emplea para medir un ángulo, el aparato descrito en otro lugar con el nombre de círculo repetidor, se obtiene dicha medida en el plano de los objetos, y debe reducirse al horizonte, lo que se obtiene en función del ángulo encontrado y de los ángulos que con la vertical del punto de estación forman las visuales á los objetos lejanos, ó sean, las distancias zenitales de los dos lados del ángulo medido.

La figura 42 indica la marcha que para esta reducción debe seguirse; sea $A O B$ el ángulo medido y $A B$ el arco que dá su valor; con los rádios $O A$ y $O B$ arbitrarios, pero iguales entre sí, describamos los cuadrantes $C A'$ y $C B'$ en los planos verticales de cada objeto y punto de

estación; es evidente, que el ángulo $A' O B'$ será la reducción buscada del $A O B$; mas como el ángulo $A' O B'$ está medido por el arco $A' B'$, y éste á su vez mide el ángulo que en C forman los cuadrantes descritos, resolveremos la cuestión hallando el valor de dicho ángulo C en el triángulo esférico $A B C$ en que se conocen los tres lados, $A B$ que es el ángulo medido y $A C$ y $A B$ que son las distancias zenitales de los lados, $O A$ y $O B$, también medidas en el terreno.

178. *Reducción al centro de estación.*—Cuando por las condiciones del terreno en que se opera, no se pueden efectuar las observaciones angulares en el mismo vértice, hemos dicho (17) que el observatorio se coloca en otro punto próximo y conveniente; como los ángulos así obtenidos no son los verdaderos de la red, deben reducirse las direcciones angulares encontradas á lo que debían ser en realidad, si se hubiera estacionado en el vértice preciso.

Para efectuar esta reducción, recordemos que se ha llamado valor gradual de una dirección, ó dirección angular de una visual, al ángulo que esta línea forma con la línea del cero ó visual al punto de referencia; si corregimos estas direcciones, es evidente que restadas dos á dos, darán los ángulos verdaderos.

Sean, (figura 43), V el vértice y O el punto en que se ha hecho estación; se quiere reducir el valor gradual de la dirección $O D$ á lo que hubiera sido de observarse según $V D$; si representamos por $O H$ la dirección del cero, el ángulo $H O D = D'$ será la dirección angular observada y trazando $m n$ paralela á $O H$, el ángulo $m V D = D$ será la dirección corregida que se busca; supongamos trazada $V V'$ paralela á $O D$, y se tendrá:

$$D = D' + x$$

siendo x el ángulo $V' V D = V D O$.

Para determinar x apliquemos al triángulo $O V D$ la

proporcionalidad entre los lados y los senos de los ángulos opuestos, y será:

$$\frac{O V}{V D} = \frac{\text{sen. } x}{\text{sen. } V O D}$$

y designando para abreviar, por a , A y α respectivamente los valores de $O V$, $V D$ y ángulo $V O D$,

$$\frac{a}{A} = \frac{\text{sen. } x}{\text{sen. } \alpha}$$

de donde

$$\text{sen. } x = \frac{a \cdot \text{sen. } \alpha}{A}$$

y como x es en general un ángulo pequeño, se tendrá:

$$x'' = \frac{\text{sen. } x}{\text{sen. } 1''} = \frac{a \cdot \text{sen. } \alpha}{A \cdot \text{sen. } 1''}$$

y substituyendo por último en el valor de D ,

$$D = D' + \frac{a \cdot \text{sen. } \alpha}{A \cdot \text{sen. } 1''}.$$

En esta fórmula se conoce D' , se miden en el terreno la distancia a y el ángulo α que se llama de posición, y A se deduce resolviendo aproximadamente el triángulo de que forma parte la recta $V D$, con los ángulos observados sin corregir si en todos los vértices se ha operado fuera del punto verdadero, ó partiendo de aquéllos ángulos en que se halla hecho estación en el vértice.

Esta operación se efectúa con todas las direcciones observadas en el mismo punto O , y restándolas dos á dos se deducirán los ángulos como si se hubiesen observado en el punto V .

La fórmula anterior es solo aplicable cuando se miden los ángulos por el método de reiteración; pero como este método es el único que se emplea en las redes de primero y segundo y aún casi en la de tercero, puede considerarse

dicha fórmula como general; sin embargo, para cuando en esta última red, se emplee el método de repetición, se hará uso de las fórmulas encontradas en Topografía para efectuar la reducción al centro de estación.

179. *Compensación general de errores.*—*Nociones fundamentales.*—Cuando las observaciones angulares de primer orden, han de servir para el objeto que debe llenar la Geodesia superior, deben descartarse por el cálculo todos los errores de que aún quedan afectados los ángulos, antes de emplearlos para calcular los triángulos que forman dicha red. También habrán de compensarse los ángulos cuando la red de primer orden corresponda á un levantamiento geodésico de gran importancia.

Esta compensación de errores constituye, pues, uno de los trabajos de gabinete de mayor importancia, puesto que de su exactitud depende la de todo el resto de los cálculos que han de basarse en ella. Dentro de la índole restringida en que esta obra se encuentra, no caben los múltiples detalles y desarrollo de tan importante cuestión; nos ceñiremos á reseñar los hechos fundamentales en que descansa tan importante asunto.

180. La compensación de errores tiene por objeto hacer que desaparezcan en los ángulos los errores inevitables de observación, y que los triángulos y polígonos que con ellos se construyan, satisfagan á las condiciones geométricas de estas figuras; es decir, que la suma de los ángulos de cada polígono, sea igual á tantas veces dos rectas como lados tenga menos dos, y que el polígono se cierre, para lo que es preciso que sus lados tengan la misma longitud, sea cualquiera el camino que se siga para calcularlos.

Para llenar estas circunstancias, se establecen dos clases de ecuaciones que se llaman *de ángulo* y *de lado* respectivamente y cuyo planteo vamos á exponer brevemente.

181. *Ecuaciones de ángulo.*—Representando por A, B y C los ángulos observados de un triángulo y por u la suma del exceso esférico y los errores de observación, se verificará siempre

$$A + B + C = 180 + u.$$

Si designamos por A', B', C' los ángulos exactos y por ε el exceso esférico, debe tenerse según el teorema de Legendre,

$$A' + B' + C' = 180^\circ + \varepsilon.$$

De la comparación de estas ecuaciones, se deduce, que puesto que los errores de observación son muy pequeños, la diferencia entre los ángulos exactos y los observados también debe serlo; y como esta diferencia es, restando las anteriores,

$$u - \varepsilon$$

se deducirá que dicha diferencia es lo menor posible cuando se tenga

$$d \cdot A + d \cdot B + d \cdot C + (u - \varepsilon) = 0$$

representando por $d \cdot A$, $d \cdot B$, $d \cdot C$, las diferencias indicadas.

Tal es, pues, la ecuación de condición de ángulo que queda resuelta, en general, si se tiene:

$$d A = d B = d C = - \frac{u - \varepsilon}{3}$$

pues si á cada uno de los ángulos A, B y C, se le suma con un signo la corrección anterior, se hallarán los verdaderos A', B' y C'.

En la expresión

$$- \frac{u - \varepsilon}{3}$$

que hay que encontrar, en resumen, se conoce u por la

primera ecuación establecida, pues se tiene:

$$u = (A + B + C) - 180^\circ.$$

El exceso esférico ε se halla por la fórmula

$$\varepsilon = a b \text{ sen. } C' \times K$$

encontrada en otro lugar (52) siendo $C' = C - \frac{u}{3}$ y estando dado K por la fórmula

$$K = \frac{1}{2 R^2 \cdot \text{sen. } I''}$$

Este valor de K depende del radio de la tierra, y como esta no es esférica, se calcula en función del radio de curvatura del elipsoide hipotético y del de la esfera oscultriz, correspondientes ambos á la latitud y altitud media del triángulo que se considere.

En cuanto al número de ecuaciones que hay que establecer, se determina atendiendo á que no deje de entrar ningún ángulo, ni entre dos veces, y este número lo fija la relación

$$n = l - p + 1$$

siendo l las líneas observadas recíprocamente que enlazan á p puntos; así, por ejemplo; si suponemos seis puntos situados de manera que uno ocupe el centro del polígono formado por los otros cinco, serán enlazados por diez líneas y la condición anterior, teniendo en cuenta que diez líneas observadas recíprocamente equivalen á veinte, será:

$$20 - 6 + 1 = 15$$

que son los cinco triángulos á razón de tres condiciones por triángulo.

182. *Ecuaciones de lado.*— Supongamos, (fig. 44), que fijada la posición de tres puntos, A, B y C, queremos referir á ellos la de otro punto D; bastará desde luego, que venga dadopor la intersección de las tres líneas A B, B D

y C D, cuyos ángulos con las A B, A C y B C son conocidos; se comprende fácilmente que una vez compensados los ángulos, la condición que buscamos será satisfecha si cada una de las líneas A D, B D y C D, tienen una magnitud constante por cualquier camino que se encuentre.

Ahora bien, los triángulos A D C, A D B y B D C, dan sucesivamente;

$$\frac{\text{sen. } \gamma}{\text{sen. } \gamma'} = \frac{A D}{D C}$$

$$\frac{\text{sen. } \beta}{\text{sen. } \beta'} = \frac{D C}{D B}$$

$$\frac{\text{sen. } \alpha}{\text{sen. } \alpha'} = \frac{D B}{D A}$$

multiplicando término á término estas proporciones, resulta:

$$\frac{\text{sen. } \alpha \cdot \text{sen. } \beta \cdot \text{sen. } \gamma}{\text{sen. } \alpha' \cdot \text{sen. } \beta' \cdot \text{sen. } \gamma'} = \frac{D A \cdot D B \cdot D C}{D C \cdot D B \cdot D A}$$

y como la simple inspección de esta fórmula hace ver que la condición de lado quedará satisfecha si el segundo miembro es igual á la unidad, la ecuación de condición buscada será:

$$\frac{\text{sen. } \alpha \cdot \text{sen. } \beta \cdot \text{sen. } \gamma}{\text{sen. } \alpha' \cdot \text{sen. } \beta' \cdot \text{sen. } \gamma'} = 1.$$

El número de ecuaciones de lado, que tampoco deben tener datos repetidos, lo fija la relación

$$n' = l - 2 p + 3$$

en que l son líneas, que no hace falta estén observadas recíprocamente, que enlazan á p puntos.

La figura 44 hace ver, que para fijar un sólo punto y obtener, por lo tanto, una ecuación, han sido necesarias seis líneas enlazando á cuatro puntos; y se tiene con estos datos

$$6 - 8 + 3 = 1.$$

183. Resueltas las ecuaciones del ángulo y lado los triángulos de la red se convierten en planos y pueden calcularse sus elementos por las fórmulas de la Trigonometría rectilínea, como habíamos ya indicado en otro lugar de este libro (53).



CAPÍTULO SEXTO.

Determinación práctica de coordenadas geográficas.

184. *Determinación de latitudes.*—En el capítulo segundo (59), nos ocupamos ya de la esencia y principio fundamental en que descansa la determinación práctica de la latitud geográfica de un lugar, y dijimos que midiendo la distancia zenital de una estrella cuya distancia polar fuese conocida y en el momento de pasar por el meridiano, podría hallarse la latitud. No es esta, sin embargo, la expresión formular de la latitud de que generalmente se hace uso, sino de la

$$L = \delta \pm \zeta$$

en la que ζ representa la distancia zenital del astro, deducido de la observación, y δ la declinación tomada de los catálogos de estrellas que más crédito merezcan.

Esta fórmula se deduce de la figura 45; pues si A es el punto cuya latitud, expresada por el ángulo z ó su igual I , se quiere hallar, se tendrá.

$$DC = DS - SC = \delta - \zeta$$

cuando el astro observado esté en S; y

$$DC = DS' + S'C = \delta + \zeta$$

si está en S'.

Reuniendo ambas fórmulas en una, resulta la que

antes citamos, tomándose en ella el signo positivo, cuando la estrella observada culmine (1) al Sur del zénit y el signo negativo si culmina al Norte de dicho zénit.

Mas como la duración del paso de un astro por el meridiano que se considere, es muy pequeño, la obtención de un número de valores de la latitud, suficientes para dar, por su promedio, un valor aceptable y poco afectado de errores de observación, seria muy larga y enojosa de tomar siempre un mismo astro en el momento de su culminación; por esta causa se han ideado varios procedimientos basados todos en la misma fórmula (excepto el último), y que aunque brevemente, describirémos sucesivamente; estos procedimientos son:

1.^o Por la observación de distancias zenitales extrameridianas del astro.

2.^o Por distancias zenitales meridianas de varias estrellas, convenientemente elejidas.

Y 3.^o Por los pasos de un cierto número de estrellas por el primer vertical al Este y al Oeste del meridiano.

Los dos primeros procedimientos son, en esencia, idénticos, difiriendo solo en algunos detalles de ejecución; el tercero es el que más se diferencia de los anteriores, exijiendo fórmulas especiales.

185. *Por distancias zenitales extrameridianas.*—Al estudiar (128 á 131), la determinación de un azimut por observaciones al Sol, reseñamos un procedimiento para hallar la latitud del lugar por el empleo de distancias zenitales extrameridianas de dicho astro. El que ahora vamos á explicar es, en resumen, el mismo método aplicado á la estrella Polar, que es la que generalmente se emplea para la determinación precisa de una latitud por este primer procedimiento.

La ventaja de este método estriba en que no exijiendo

(1) Se llama *instante de culminación* de un astro, el momento de su paso por el meridiano del lugar en que se le observa.

para el astro posición alguna especial, puede operarse en cada noche de trabajo el número de veces que convenga según el grado de exactitud que pueda necesitarse.

186. Lo primero que debe hacerse es determinar la graduación del zénit ó de la vertical (que es lo mismo) puesto que, en general, el cero del limbo zenital del aparato empleado no corresponderá á dicha línea; para ello, puede tomarse como objeto la misma polar, un objeto terrestre bien definido ó una estrella cualquiera; en uno, indistintamente de estos casos, se opera como sigue: se determina la distancia zenital del objeto por dos visuales dirigidas en posiciones inversas del círculo; restando luego esta distancia zenital de la primera lectura hecha, se obtiene la graduación de la vertical.

187. Conseguido esto, se dirijen á la estrella polar ocho visuales consecutivas, cuatro en cada posición del círculo, anotando en todas ellas la hora de la observación y la graduación correspondiente del limbo vertical; si estas lecturas se corrijen de inclinación, valiéndose de las indicaciones del nivel, y se resta de cada una la graduación de la vertical, obtendremos ocho distancias zenitales de la polar en distintas posiciones de esta estrella fuera del meridiano.

Se reducen seguidamente estas distancias zenitales extrameridianas á meridianas, por medio de una fórmula que dá el valor de $\zeta - \varepsilon$, siendo ζ la distancia encontrada, y ε la reducida que se busca. Esta fórmula es la misma que hemos citado al determinar la latitud por el Sol. (1)

Y, por último, con estos valores, el dato conocido de la declinación de la Polar, y la aplicación de la fórmula

$$L = \delta \pm \zeta$$

antes citada, se hallan ocho valores distintos de la latitud que diferirán en pequeñas cantidades.

(1) Ver Apéndice 7.º, letra C.

188. El conjunto de estas operaciones constituye una série de observaciones; estas séries se reiteran, partiendo de distintas graduaciones del limbo vertical para amen-guar los errores de división, hasta completar treinta y seis séries de á ocho valores distribuidos simétricamente con respecto al meridiano.

189. Los valores así encontrados, están aún afectados de los errores de observación inevitables, pero en espe-cial del debido á la flexión del anteojo por razón del ma-yor peso del objetivo. Para eliminar este error, se elije una estrella que culmine muy cerca del zénit, observándola del modo siguiente: 1.^o ocho punterías á la estrella en posiciones inversas del círculo, unos veinte minutos antes de su culminación, anotando tiempos y graduaciones del limbo; 2.^o con el círculo en la última posición antes em-pleada y momentos antes de la culminación, cuatro visua-les, anotando los mismos datos; 3.^o otras cuatro visuales, invirtiendo el círculo, momentos después del paso; y 4.^o ocho visuales en posiciones inversas, veinte minutos des-pués de haber culminado. Convirtiendo las veinticuatro graduaciones obtenidas en distancias zenitales meridianas, por la aplicación de la fórmula $\zeta - \varepsilon$, previo restar la gra-duación de la vertical, se calculan otros veinticuatro valo-res de la latitud, en los que la flexión será muy pequeña é influirá en sentidos contrarios.

190. Por último, del promedio general de todos los valores encontrados para la latitud por la observación á la polar y á la estrella circunzenital, se deduce el valor defi-nitivo de la latitud suficientemente purgado de errores accidentales de observación.

191. *Por distancias zenitales meridianas de varias estrellas.*—Para el método anterior basta emplear un teo-dolito cualquiera; para el que vamos á estudiar ahora, se emplea un *anteojo de pasos*, que se coloca para operar, en el plano del meridiano, del modo que diremos ense-

guida: en esencia, un anteojo de pasos es un teodolito de gran estabilidad, y cuyo retículo lo forman varios hilos verticales fijos, cruzados por uno horizontal y dos hilos verticales móviles por la acción de un tornillo micrométrico. Para instalar un anteojo de esta especie en el plano del meridiano, se nivela el aparato y se corrige la colimación del eje óptico del anteojo; se dirige una visual á la polar, anotando la hora de la observación y calculando, en función de los datos obtenidos, el azimut correspondiente á la polar, se hace girar el aparato en el sentido conveniente, hasta que en el limbo horizontal se recorra el azimut calculado.

192. Las estrellas que se elijan para la observación deben cumplir las condiciones siguientes:

1.^a Culminar, por mitad, al norte y al sur del zenit.

2.^a Que sus declinaciones sean tales, que al efectuar los promedios de distancias zenitales, resulten estos promedios casi iguales para las que culminen al norte que al sur, con el fin de evitar cuanto se pueda la flexión del anteojo.

El número de estrellas que deben elegirse para una buena determinación de latitud, son cuarenta, distribuidas en cada noche de trabajo en grupos de á diez estrellas, de modo que culminen, en cada grupo, cinco al norte y cinco al sur; las observaciones se reiteran en seis ú ocho noches consecutivas, según lo permita el estado de la atmósfera.

193. El conjunto de las operaciones necesarias para constituir una série, lo forman para cada diez estrellas, las que reseñamos á continuación.

1.^o La lectura y observación de dos barómetros y de dos termómetros convenientemente instalados, para deducir, por su promedio, la temperatura del ambiente y la altura barométrica á dicha temperatura; estos datos son

necesarios para corregir de refracción, por la fórmula de Bessel, las distancias zenitales observadas. (1)

2.º Determinación de la graduación del zénit. Esta operación es necesaria por las razones expuestas en el procedimiento anterior. Para obtenerla, puede emplearse el método ya explicado ó el siguiente, mas lento pero más exacto; en la base del aparato se coloca firmemente asentado, un baño de mercurio, llamado *baño nadiral* (de nadir, opuesto á zénit); se mueve el anteojo hasta que el hilo horizontal del retículo, coincida con su imagen, formada por reflexión en dicho baño, y se hace la lectura correspondiente en el limbo zenital. Se repite esta operación cinco veces consecutivas y se toma el promedio de las lecturas como valor de la graduación del zénit.

3.º Enfilar cinco de las estrellas por orden de culminación, anotando las graduaciones que á cada visual correspondan en el limbo zenital.

4.º Nueva lectura de barómetros y termómetros.

5.º Enfilación de otras cinco estrellas, en las mismas condiciones del grupo anterior.

6.º Segunda determinación de la graduación del zénit.

194. Con cada uno de los tres grupos restantes de á diez estrellas, se efectúan las observaciones en el mismo orden, terminando así los trabajos de una noche.

(1) La fórmula de Bessel, es:

$$\log. \rho = \log. \text{tang. } \zeta_1 + \log. b + \log. \alpha_1 + \log. \alpha_2 + \log. \alpha_3 + \log. \alpha_4$$

En la que ρ es la corrección buscada, ζ_1 la distancia zenital observada y b la altura barométrica á la temperatura t del ambiente; en cuanto á los coeficientes α_1 , α_2 , α_3 y α_4 hay tablas que dan sus logaritmos para los datos ζ_1 , b y t ; teniendo en cuenta que del término $\log. \alpha_1$ debe hacerse uso solo desde 76° en adelante de distancia zenital, y del $\log. \alpha_3$ solo desde los 43°. Los otros valores de $\log. \alpha_1$, $\log. \alpha_2$ se emplean siempre.

En cada una de las demás noches se opera del mismo modo, sin otra diferencia que cambiar la posición del limbo unos 15° con respecto á la noche anterior, para evitar los errores de división, especialmente los sistemáticos. También se debe operar cada noche con el anteojo y círculo en posición inversa de la anterior, para eliminar los errores de flexión del anteojo, irregular caldeo del aparato por la lámpara que sirve para la iluminación de la caseta de los observadores, la influencia de la posición de este, etc.

195. Terminadas todas las observaciones, se efectúan con los datos obtenidos, las operaciones que siguen, para obtener por cada estrella y noche un valor de la latitud:

1.^o Restar de las graduaciones de puntería anotadas, la graduación del zénit, para referirlas á distancias zenitales aparentes. La graduación del zénit que se toma para cada grupo de cinco estrellas, es la deducida de la determinación correspondiente á aquél grupo.

2.^o Corregir de refracción las distancias zenitales aparentes, empleando la fórmula de Bessel con los datos de presión y temperatura correspondientes al grupo de estrellas que se considere.

3.^o Sumar algébricamente las distancias zenitales verdaderas de cada estrella con su declinación, para obtener la latitud; ya se sabe que el signo que en esta operación se dé á la distancia zenital, depende de que la estrella observada culmine al N. ó al S. del zénit.

4.^o Obtener la latitud definitiva por el promedio de todos los valores hallados, y calcular su error probable.

196. Por la aplicación de este procedimiento, tal como acaba de ser descrito, se determinó por el Instituto Geográfico, la latitud de la Mola de Formentera, deducción del valor

$$38^\circ - 39' - 54'',055 \pm 0'',069$$

que citamos como prueba del grado de precisión que puede alcanzarse. (1)

197. *Por observaciones en el primer vertical.*—Se dá este nombre, al plano que pasando por la vertical de un lugar, contiene además á la línea verdadera Este-Oeste; la intersección de este plano con la esfera terrestre, toma el nombre de *perpendicular á la meridiana*.

Para las operaciones que vamos á reseñar, se utilizan los teodolitos de Repsol ú otros análogos y también (y es mejor) los llamados anteojos de paso. Para colocar uno de estos aparatos en el primer vertical, se empieza por situarlo bien nivelado en el meridiano del lugar, procediendo para ello como se ha dicho en el método anterior (191), dando enseguida al aparato un giro de 90° de manera que el objetivo del anteojo quede al E. (puesto que hay que comenzar por la observación de pasos orientales) y previa una nueva rectificación y nivelación del eje horizontal del anteojo, queda el aparato emplazado; debe amordazársele fuertemente en azimut para que no varíe de posición en el curso de las observaciones.

198. Al comenzar los trabajos, debe, como preliminar, determinarse para cada estrella de las que hayan de observarse, á qué hora y con qué distancia zenital tendrá lugar su primer paso por el vertical; esto se obtiene por la aplicación de fórmulas especiales, que anotamos en el *Apéndice 7.º, letra D, grupo (a)*.

199. Conocidos estos datos y emplazado el anteojo en distancia zenital, se opera con cada estrella del modo siguiente:

1.º Se determina, antes del paso oriental, la pequeña inclinación del eje horizontal del anteojo, por la aplicación reiterada de un nivel en posiciones inversas, sobre los muñones del citado anteojo. Esta inclinación se considera

(1) Memorias del Instituto Geográfico. Tomo 6.º

positiva si el muñón norte resulta más elevado y es negativa en el caso contrario.

2.º Se anotan las horas en que la estrella verifica sus pasos por cada uno de los hilos del retículo, incluso los movibles, anotando en este caso la posición que ocupan por la lectura del tornillo micrométrico. Como los anteojos de paso suelen tener siete hilos verticales fijos en su retículo y además dos movibles, pueden obtenerse, cuando menos, nueve pasos orientales de una misma estrella. Las distancias, evaluadas en tiempo, á que cada hilo del retículo está del hilo central, son conocidas y determinadas de antemano, lo que facilita la observación de las horas de paso y permite además comprobarlas.

3.º Se vuelve á determinar, como antes se ha dicho, la inclinación del eje de rotación del anteojo.

4.º Se invierte con gran cuidado, para que el aparato no se mueva en azimut, la posición del anteojo en sus muñoneras.

Y 5.º Se observan del mismo modo que antes, los pasos occidentales de la estrella por los varios hilos del retículo.

200. En cada noche de trabajo deben observarse cuatro ó seis estrellas, elejidas de manera que culminen á lo más á tres ó cuatro grados del zénit, para evitar en lo posible la influencia del error que pudiera introducir una variación accidental en azimut al invertir el anteojo; el cálculo demuestra y la experiencia comprueba, en efecto, que dicha causa de error ejerce tanto menor influencia en los resultados cuanto mas cerca del zénit culmine la estrella observada.

Con este mismo objeto, conviene que una, por lo menos, de las estrellas observadas, sea común á todas las noches de trabajo.

Deben también elejirse las estrellas de cada noche, de tal modo, que los pasos orientales de todas ellas, sean

sucesivos y muy inmediatos y se verifiquen antes que lleguen los pasos occidentales de la primera estrella observada; con esta precaución se consigue no tener que invertir el anteojo más que una vez por noche, evitándose la contingencia de un cambio del aparato en azimut.

201. Terminados los trabajos prácticos, y agrupando los pasos oriental y occidental de cada estrella por un mismo hilo del retículo, se obtiene por el cálculo un valor de la latitud por cada hilo ó sean nueve valores por estrella; como se opera análogamente con los demás datos, se tiene una série numerosa de valores compuesta del producto de las estrellas por las noches de trabajo y por el de valores que proporciona cada estrella; en esta série de valores, los errores accidentales de observación, influirán con diversas magnitudes y sentidos, y su promedio dará un valor definitivo para la latitud suficientemente compensado y purgado de error.

Las fórmulas mediante las cuales y en función de las horas de paso, se obtiene la latitud, están anotadas en el *Apéndice 7.º, letra D, grupo (b)*.

202. Finalmente, debemos hacer constar, que para tener la debida comprobación y seguridad en los valores obtenidos, suelen utilizarse en cada estación en que vá á hallarse la latitud, los tres procedimientos indicados, ó á lo menos dos de ellos, multiplicando las observaciones en el que se tome como principal; esta regla, que puede considerarse como general, debe observarse tanto más escrupulosamente, cuanto mayor importancia tenga la operación geodésica de primer orden á que corresponda la observación verificada.

203. Creemos ocioso consignar que al manejar cada aparato, tanto en lo que se refiere á su instalación preliminar y rectificaciones, como á su empleo corriente, deben seguirse las prácticas y precauciones que hemos se-

ñalado al describir los teodolitos como aparatos medidores de ángulos.

Bastan, pues, las ligeras indicaciones hechas en cada procedimiento, para adquirir una idea suficientemente completa, de como, por observaciones astronómicas, puede llegarse á determinar la latitud geográfica de un vértice cualquiera de la red.

204. *Determinación de la diferencia de longitudes entre dos puntos.*—Al estudiar la parte general de coordenadas geográficas, (capítulo 2.^o) hemos definido lo que se entiende por primera longitud y por diferencia de longitudes entre dos puntos, y hemos dicho también como, conocidos ambos datos, pueden determinarse sucesivamente la longitud de los diversos puntos de la red. Como la práctica de las operaciones que deben efectuarse para hallar una primera longitud es la misma que para encontrar una diferencia de longitudes, estudiaremos únicamente esta cuestión como el epígrafe lo indica.

Las primeras determinaciones de longitudes geográficas hechas en España por los observadores del Instituto Geográfico, han sido: entre Madrid y Badajoz; Madrid y Lérida; y como comprobación, directamente entre Badajoz y Lérida. De la notable reseña que de estos trabajos ha publicado el mencionado centro científico en el tomo VI de sus "Memorias,, tomamos los lijeros apuntes que siguen.

Para allanar y facilitar el camino, comenzaremos por la descripción sucinta, de lo más indispensable á nuestro fin, de los aparatos empleados en cada estación ó meridiano de observación, á saber: un círculo meridiano, un péndulo regulador eléctrico y un cronógrafo ó aparato registrador de señales.

205. *Círculo meridiano.*—Este aparato, construido por Brunner, consta de un anteojo cuya forma exterior es la de dos troncos de cono, unidos por sus bases mayores;



el objetivo tiene una abertura de $0^m,067$ y $0^m,79$ de distancia focal; el ocular permite un aumento de ochenta diámetros. El retículo consta de quince hilos fijos y uno vertical movable por la acción de un tornillo micrométrico de cabeza graduada en cien partes. De los quince hilos fijos, uno coincide con el diámetro horizontal, y los otros catorce se distribuyen del modo siguiente: dos equidistantes del diámetro vertical (que toma el nombre de *hilo medio ideal*); dos grupos de á tres hilos equidistantes á cada lado de los anteriores; cada grupo dista del contiguo vez y media la separación entre dos hilos de un mismo grupo.

En los muñones del anteojo van implantados dos círculos de $0^m,415$ de diámetro, uno fijo invariablemente al anteojo para servir de contrapeso, y el otro, graduado de cinco en cinco minutos, y que puede girar ó nó con el anteojo, según se aprietan ó aflojen los tornillos que le unen al eje. El círculo que sirve de contrapeso, puede ser detenido en su movimiento rápido, y por lo tanto, el anteojo, por unas mordazas fijas á los soportes del aparato. Los movimientos lentos se consiguen por medio de un tornillo de coincidencia.

Una palanca acodada, unida al montante, lleva en un extremo un pequeño anteojo asestado contra el limbo y cuya ampliación es tal, que permite apreciar hasta un minuto en la lectura; el retículo de este anteojo lo forma un solo hilo horizontal que sirve de índice ó puntero; la otra extremidad de la palanca está situada entre dos tornillos que permiten rectificar convenientemente su posición inicial.

Los montantes son dos sólidos pilares de hierro, unidos á una base del mismo metal, con sus correspondientes tornillos nivelantes; el considerable peso de esta base de sustentación, asegura suficientemente la estabilidad del aparato.

Por medio de un prisma de reflexión total, instalado en

uno de los muñones, se consigue iluminar, durante las observaciones nocturnas, el retículo del anteojo; se iluminan también las graduaciones del limbo vertical.

206. Las constantes instrumentales que deben conocerse de antemano y que se determinan como ya se ha dicho al estudiar la medida de ángulos, son:

1.^a Valor angular de una vuelta del tornillo micrométrico del ocular, que en el aparato que nos ocupa, es:

$$I^v = 7^s, 1913.$$

2.^a Distancias ecuatoriales de los hilos fijos al hilo medio ideal, obtenidas por repetidas coincidencias del hilo móvil con cada uno de los fijos.

3.^a Desigualdad de muñones del eje del anteojo y valor de la inclinación constante que de ello resulta. En el aparato descrito, resulta ser $+ 0^s, 007$ con el círculo á la derecha y $- 0^s, 007$ con el círculo á la izquierda.

4.^a Valor angular de una división del nivel, determinada por la probeta y por observaciones con el mismo círculo meridiano, resulta ser

$$I^d = 0^s, 117.$$

207. *Péndulo eléctrico*.—El generalmente empleado es el regulador astronómico de Hipp, cuya descripción detallada omitimos por complicada y realmente innecesaria á nuestro objeto; está compuesto de las siguientes partes esenciales:

1.^a El péndulo propiamente dicho.

2.^a Un aparato de contactos, dispuesto para lanzar, á cada oscilación del péndulo, una corriente eléctrica á un reloj secundario ó cuadrante simpático y al cronógrafo, ó también á los dos aparatos á la vez.

3.^a Un electro-imán, que por su acción sobre una armadura fija al péndulo, mantiene las oscilaciones de éste.

Y 4.^a Un escape eléctrico para lanzar en determina-

dos momentos la corriente que debe activar dicho electro-imán.

Todos los movimientos son automáticos y están arreglados para conservar el isocronismo de las oscilaciones.

208. *Cronógrafo*.—En esencia es un aparato de relojería, movido por la acción de un peso, que sirve para desarrollar y dar movimiento de avance á una cinta de papel, análogamente á como sucede en el telégrafo de Morse. Dos electro-imanés independientes llevan unidas á sus respectivas armaduras, una pluma ó estilete que descansa sobre la cinta del papel y que cuando los electro-imanés no están en actividad marca una línea recta, siendo paralelos los trazados de ambas plumas; cuando uno de los electro-imanés, ó los dos, son circulados por la corriente, atraen sus armaduras, produciendo un trazado sinuoso. Una de las plumas, unida eléctricamente al péndulo local, registra las oscilaciones de este, segundo por segundo; la otra puede comunicar con el otro meridiano por medio de una línea telegráfica y por intermedio de la plancheta cronográfica con los aparatos de la propia estación; así, pues, esta segunda pluma marcará en la cinta de papel las señales transmitidas de la otra estación, las que á ella se transmitan y por último las observaciones locales.

En cada meridiano se determina la corrección llamada *paralaje de las plumas*, debida á la desigualdad de las abscisas trazadas por ambas plumas en el mismo instante físico, pues que ambas plumas son activadas por corrientes cuyos recorridos no son iguales y además la inercia de los distintos órganos del aparato que contribuye á destruir la simultaneidad de las señales que producen.

Los cronógrafos de ambas estaciones, se enlazan por una línea telegráfica, que puede ser la general del Estado, uno de cuyos hilos y el personal necesario se ponen á disposición de los observadores, cuando la importancia nacional de los trabajos así lo requiere.

209. *Fundamento de las operaciones.*—Los trabajos necesarios para la determinación de una diferencia de longitudes, se reducen en último extremo á encontrar la diferencia de horas que, en un mismo instante, corresponde á los dos meridianos en cuestión; de esta diferencia de horas se halla una numerosa série de valores, que por su promedio dan el valor definitivo; conocida ya esta diferencia de horas se halla el verdadero dato buscado, sabiendo que, según hemos dicho en otro lugar (60), á cada hora en tiempo corresponden 15° en longitud, á cada minuto $15'$ y á cada segundo $15''$ de arco.

La determinación de esta diferencia de horas comprende dos partes distintas, á saber:

- 1.^a Determinación de la hora local en cada estación.
- 2.^a Comparación de los péndulos locales por procedimiento electro-telégráfico.

Estudiaremos separadamente ambas operaciones, resumiendo después lo estudiado, bajo la forma en que ordinariamente se ejecutan los trabajos.

210. *Determinación de la hora local.*—Como quiera que la comunicación eléctrica de la plancheta cronográfica con el péndulo local, permite registrar en la cinta los tiempos de este, se puede conocer la hora local correspondiente á cada una de las trasmitidas desde la otra estación y que igualmente están registradas en la cinta.

De esta comparación, se obtendrá evidentemente, un valor de la diferencia de horas entre los dos meridianos, cuyo valor debe corregirse y se corrige en efecto, de dos errores principales, á saber: de la paralaje de las plumas, ya citada y del tiempo que la electricidad tarda en recorrer la distancia entre ambas estaciones. Resta, pues, para tener conocida la verdadera diferencia de horas, determinar en cada estación la corrección necesaria por *estado del péndulo*, para de su acertada combinación deducir el

movimiento horario de dicho péndulo y tener así las verdaderas horas locales simultáneas.

Resulta de lo expuesto, que la determinación de la hora local queda reducida á encontrar las correcciones que deben hacerse á las horas señaladas por el péndulo local y registradas en la cinta cronográfica; esto se verifica por medio de observaciones de estrellas, convenientemente elejidas, marcándose también en la cinta los instantes precisos de cada observación.

La de cada estrella, se reduce á determinar las horas de su paso, por todos ó algunos de los hilos del retículo y referir estos tiempos al de paso por el hilo medio ideal, tomando para ello el promedio de los tiempos anotados en el paso por cada hilo.

Conocidos estos tiempos y hallado su promedio, se encuentra la corrección por estado que le corresponde por la siguiente fórmula, debida al astrónomo Tobías Mayer: (1)

$$\alpha = T + \Delta T + a \cdot \frac{\text{sen. } (\varphi - \delta)}{\text{cos. } \delta} + b \cdot \frac{\text{cos. } (\varphi - \delta)}{\text{cos. } \delta} + \frac{c - 0^s 021 \cdot \text{cos. } \varphi}{\text{cos. } \delta}$$

en la que α y δ representan la ascensión recta y la declinación de la estrella observada; T , el tiempo de paso por el hilo medio ideal, hallado como queda dicho; ΔT , el estado del péndulo, verdadera incógnita del problema; φ , la latitud geográfica del lugar y a , b y c , tres coeficientes de corrección, cuya causa, signo y determinación, indicaremos brevemente y por el orden práctico, debiendo advertir que se determinan antes de empezar los trabajos de cada noche.

(1) En el Apéndice 4.º se explica detalladamente el fundamento de esta fórmula, que hemos puesto aquí, apartándonos de la regla seguida en los demás casos, para comprender mejor el método que se sigue y la influencia de los coeficientes a , b y c .

211. *Determinación de b.*—Este número es el ángulo de inclinación del eje de rotación del anteojo; se determina por la aplicación reiterada del nivel en posiciones inversas, y haciendo uso de las fórmulas consignadas en el *apéndice 7.º, letra E, grupo (a₁)*, que son útiles también para el caso general en que los muñones del anteojo no tienen igual diámetro. Este coeficiente se considera como positivo, cuando colocado el limbo vertical del aparato mirando al Este, el muñón de la izquierda resulta más elevado que el de la derecha; la corrección es negativa en el caso contrario.

212. *Determinación de c.*—Representa la corrección por colimación del eje óptico del anteojo y es positivo, cuando el ángulo de dicho eje con la parte occidental del de rotación sea mayor de 90º.

Se determina su valor por tres procedimientos distintos, á saber:

1.º Apuntando á un objeto terrestre bien definido, en posiciones inversas del anteojo y empleando la fórmula (1) del grupo *b₁*, del citado *apéndice 7.º, letra E*.

2.º Por observaciones nadirales, midiendo con el tornillo micrométrico del ocular, la distancia angular entre el hilo móvil (colocado en la posición del hilo medio ideal) y su imagen reflejada en el baño de mercurio citado en otro lugar (193); conocida dicha distancia angular, se determina el valor de *c*, por la fórmula (2) del mismo grupo, *apéndice y letra*.

3.º Observando una estrella circumpolar (á pequeña distancia del polo) en dos posiciones inversas del anteojo, anotando las inclinaciones del eje de rotación y empleando la fórmula (3) de los precitados grupo, *apéndice y letra*.

213. *Determinación de a.*—Es el ángulo correspondiente por variación azimutal del eje óptico y es positivo cuando el plano que al cabecear describe dicho eje pasa por los cuadrantes N. O. y S. E. Se determina observan-

do los tiempos de paso por el meridiano de dos estrellas, (una circumpolar y otra ecuatorial) que difieran pocos minutos en ascensión recta y muchos grados en declinación. Con los tiempos anotados, se encuentra el valor de a por la primera fórmula del grupo ϵ , del apéndice y letra citado, si ambas estrellas se observan en su paso superior; por la fórmula (2) del mismo grupo si la primera estrella fué observada en el paso superior, y la segunda en el inferior; y, en fin, por la fórmula (3), si los pasos fueron, inferior para la primera estrella y superior para la segunda.

214. Según hemos dicho ya, el tiempo T , que figura en la fórmula de Mayer, se obtiene por promedio de los tiempos de paso de cada estrella por todos ó algunos de los hilos del retículo; pero cuando por el estado atmosférico, ó por otras circunstancias fortuitas, las observaciones de paso no son completas, se utiliza para hallar el valor de T , el conocimiento de las distancias ecuatoriales de los hilos del retículo al hilo medio ideal, que se han determinado previamente como constantes del instrumento (206).

215. Estudiada ya en los pormenores necesarios la fórmula de Mayer, diremos que el orden y número de las observaciones que deben hacerse para una buena determinación de estado, son:

1.^a Observar una estrella circumpolar, anotando los tiempos de paso por los hilos de la mitad oriental (1) del campo del retículo; invertir después el anteojo y anotar los pasos por los mismos hilos, ocupando ahora la región occidental del mencionado campo.

2.^a La observación análoga de cinco estrellas comprendidas entre el zénit y el ecuador, en la última posición en que quedó el anteojo, y por todos los hilos.

(1) Como las imágenes se ven invertidas, esta mitad corresponde en realidad a la opuesta.

3.^a Inversión del anteojo y observación de otras cinco estrellas análogas á las anteriores.

Y 4.^a La observación de otra circumpolar en posiciones inversas del anteojo y con el mismo método que en la observación primera.

Así se obtiene una série de doce valores para el estado del reloj y puede deducirse el movimiento horario del péndulo.

216. Las estrellas elejidas, llamadas de estado, que son las diez de los grupos segundo y tercero de trabajo, deben cumplir las siguientes condiciones:

1.^a Ser de segunda á séptima magnitud.

2.^a Que sus declinaciones boreales estén comprendidas entre 0° y 45° .

3.^a Que sus ascensiones rectas discrepen en unos tres minutos, para que no pasen á un tiempo por el mismo meridiano.

Y 4.^a Que distribuidas entre las distintas noches de trabajo, no pasen por los respectivos meridianos á horas intempestivas.

Las dos estrellas circumpolares tienen por objeto evitar en lo posible la influencia de la flexión del anteojo, pues es evidente que ejercerá tanto ménos acción el peso del objetivo cuanto más vertical tienda á colocarse el anteojo.

A ser posible, se observarán desde los dos meridianos las mismas estrellas; pero de no ser así, se procurará, para las debidas comprobaciones y enlace de los trabajos que haya algunas estrellas comunes entre las observadas en cada estación.

217. *Comparación de los péndulos.*—En cada una de las noches de trabajo deben hacerse dos comparaciones ó una, de los péndulos, según que se hagan cuatro ó dos séries de determinación de estado.

El método que se sigue en cada comparación telegrá-

fica, es: se empieza por una señal de llamada para que cada observador se ponga en comunicación con el otro; acto seguido, el primer meridiano envía al segundo corriente continua por breves instantes y veinte señales de ensayo, dejándose un minuto de intervalo para que cada observador arregle y disponga sus aparatos eléctricos con la resistencia convenida; pasado este minuto, el primer meridiano hace un repique de atención y envía cincuenta señales de tiempo, en grupos de á diez, terminando por otro repique; enseguida se determina en cada estación la paralaje de las plumas. Pasado un minuto, el segundo meridiano trasmite á su vez al primero otras cincuenta señales de tiempo, con el mismo método que el anterior. Otro minuto de pausa, y se repiten las operaciones hasta completar cuatro series desde cada estación, ó sean doscientas señales de ida y otras doscientas de vuelta. El tiempo necesario para completar las cuatrocientas señales es de veinte minutos si la línea telegráfica está expedita.

Operando de este modo, y comparando en cada estación la hora recibida con la local registrada correspondiente al mismo instante físico, se tienen cuatrocientos valores de la diferencia de horas, sin corregir más que de la paralaje de las plumas. Como en cada cinta cronográfica quedan registradas á un tiempo la hora del péndulo, la señal transmitida y la recibida, se puede conocer el tiempo que debe corregirse por transmisión de la electricidad, del modo siguiente: sean b y c en que una misma señal queda registrada en las dos cintas, y d la diferencia de horas entre los meridianos; si no hubiese ningún retardo por transmisiones se tendría:

$$b = c + d$$

mas como dicho retardo existe, se hallará su valor, que llamémos ε , por la expresión:

$$\varepsilon = b - (c + d).$$

218. *Conjunto de las operaciones.* Resueltos ya to-

dos los detalles relativos á las dos partes en que, según hemos dicho (209), se divide la determinación de una diferencia de longitudes, enunciaremos á manera de resúmen, el orden en que se combinan ambas partes para producir una noche completa de trabajo.

1.^o Determinación de los coeficientes a , b y c de la fórmula de Mayer.

2.^o Primera série de observaciones de estado, comprendiendo la de dos estrellas circumpolares y diez de estado, en la forma ya citada (215).

3.^o Segunda série de observaciones de estado en igual forma que la anterior.

4.^o Primera comparación de los péndulos, según se ha explicado (217), hasta completar las cuatrocientas señales.

5.^o Tercera série de observaciones astronómicas, empleando otras doce estrellas.

6.^o Cuarta série de estado, en igual forma.

7.^o Segunda comparación de los péndulos.

Las correcciones que por estado del péndulo y movimiento horario de éste hay que hacer en las diferencias de horas deducidas de la comparación de los péndulos, se sacan aplicando la fórmula de Mayer á las séries de observaciones astronómicas realizadas antes de la comparación de péndulos que se considere.

En las noches en que las condiciones atmosféricas ú otras circunstancias, no permitan realizar los trabajos tal como se han descrito en el resúmen anterior, se hará una sola comparación de péndulos y dos séries de observaciones astronómicas correspondientes.

El número de noches de trabajo necesarias para una determinación de diferencia de longitudes, depende, como es lógico, de la exactitud que quiera obtenerse; se consideran suficientes ocho noches útiles de trabajo, en que haya por lo menos una comparación de péndulos.

219. Para juzgar acertadamente del grado de exactitud que puede alcanzarse en estos trabajos, damos á continuación los resultados numéricos obtenidos por los observadores del Instituto Geográfico, en la determinación de las diferencias de longitudes entre Madrid y Badajoz, Madrid y Lérida; y por último, entre Badajoz y Lérida directamente.

Diferencia de longitudes. *Madrid-Badajoz*. $13^m - 10^s,367$
" " " *Madrid-Lérida* .. $17^m - 15^s,578$
cuya suma es

$$30^m - 25^s,945.$$

Y como la obtenida directamente, fué:

Diferencia de longitudes. *Badajoz-Lérida*. $30^m - 25^s,907$
el error resulta ser:

$$\varepsilon = + 0^s,038$$

grado de exactitud que puede muy bien calificarse de notable.



CAPÍTULO SÉPTIMO.

Nivelación geodésica por distancias zenitales.

Nivelación de precisión.

220. PRELIMINARES.—La nivelación geodésica tiene por objeto determinar la tercera coordenada ó altitud de los puntos del terreno. Esta determinación puede hacerse de dos maneras: 1.^a, encontrando las diferencias de nivel de los vértices geodésicos de los tres órdenes y como consecuencia sus altitudes aproximadas, partiendo de un punto de altitud conocida: 2.^a, encontrando las cotas de los puntos del terreno situados á lo largo de los caminos, sean de hierro ú ordinarios.

La primera parte, constituye la nivelación geodésica propiamente dicha y se aplica para realizarla, el procedimiento de diferencias de nivel por distancias zenitales, sean ó nó recíprocas: la segunda parte, forma la llamada nivelación de precisión, que se ejecuta por el procedimiento de visuales horizontales, mediante el empleo de niveles muy perfeccionados, de miras repetidas veces comprobadas y con todos los medios de observación más cuidadosos y exactos posibles.

Ambas nivelaciones pueden ejecutarse simultánea é independientemente, pero teniéndose en cuenta que en las líneas de la nivelación de precisión, deben comprenderse algunos vértices de la red general, cuyas altitudes precisas puedan así ser conocidas y servir de base para la deter-

minación y rectificación de las altitudes deducidas por la nivelación geodésica.

La superficie general de comparación, para una y otra nivelación, es la del nivel medio de los mares; por esto, la nivelación de precisión debe empezar por un punto muy próximo al mar, en la misma costa, ó mejor aún en un puerto y á partir de éste se ván determinando diferencias de nivel sucesivas. Conocido por los mareógrafos el nivel medio de los mares en el puerto en que está el punto de partida, se determina con precisión la cota de este punto y por lo tanto la de todos los demás.

Resulta, pues, de lo dicho, que aún cuando en realidad ambas nivelaciones son independientes, (en cuanto al modo de operar se refiere) hay entre ellas íntimo enlace, puesto que su reunión ha de servir para formar el conjunto del relieve de un terreno. Además de esto, el conocimiento del nivel medio de los mares es indispensable para fijar la superficie de comparación; este nivel medio lo supondremos en lo sucesivo ya determinado, pudiéndose ver en el *Apéndice núm. 5*, los métodos y aparatos que sirven á este objeto; réstanos, pues, ocuparnos por el órden citado, de los métodos y fórmulas empleadas en las dos clases de nivelación.

221. *Nivelación geodésica por distancias zenitales.*—

Si por cada uno de los puntos del terreno se considera trazada una superficie paralela á la de comparación, se obtienen las que se llaman *superficies de nivel*, que en el caso de la Geodesia son esferas concéntricas con la de la tierra; la distancia que separa las superficies de nivel de dos puntos, contada sobre la vertical de cualquiera de ellos, se denomina *diferencia de nivel*. En la práctica, estas son las que se determinan, y partiendo de un punto de altitud conocida, se hallan las cotas de los demás por la suma algébrica de la cota de un punto y su diferencia de nivel con el contíguo.

Para determinar este punto inicial de cota conocida, en el caso en que por la extensión y naturaleza del terreno no se haga nivelación de precisión, se prolonga la cadena de triángulos hasta un vértice próximo al mar; enseguida se realiza una pequeña nivelación topográfica por ángulos verticales ó por visuales horizontales, partiendo de un punto del nivel del mar, y por lo tanto, de cota cero; este punto se enlaza así con el último vértice de la cadena auxiliar, lo que hace hallar la cota de éste, que ha de servir de partida para todos los demás. En esta nivelación topográfica se debe proceder con todas las precauciones posibles, haciendo todas las correcciones necesarias, incluso la de refracción, para obtener la cota origen con el grado de precisión que requieren las operaciones geodésicas. Si hay nivelación de precisión, se enlaza la red general con las líneas de dicha nivelación, como en otro lugar queda dicho (220).

Los datos necesarios para encontrar una diferencia de nivel en el procedimiento que nos ocupa, son: distancia horizontal entre cada dos puntos y distancia zenital de la línea que los une; según que este último dato sea conocido para los dos extremos de la recta, ó para uno solo, el procedimiento se llama de distancias zenitales recíprocas, ó de una sola distancia zenital; mientras los dos puntos sean accesibles, se sigue el primer método. Puesto que la base de toda esta nivelación es la medida de una distancia zenital, por esta parte empezaremos, recordando que se llama distancia zenital de una línea, al ángulo que forma con la vertical de uno de sus extremos.

222. *Medición de distancias zenitales.*—Se utiliza para su determinación el limbo vertical que tienen los teodolitos, y supondremos, de acuerdo con lo que sucede en la práctica, que dicho limbo vá unido al anteojo, girando con él, y que su graduación crece de izquierda á derecha para un observador que dé frente al limbo.

La alidada que lleva los microscópios micrométricos es horizontal, sirviendo para rectificar su posición, un nivel de burbuja de tubo graduado, y cuya graduación crece de izquierda á derecha, teniendo el cero en el extremo izquierdo; un puntero vertical unido á la regla de los microscópios sirve para las lecturas sobre el limbo de los grados y decenas de minutos; las unidades de éstos, los segundos y fracciones de segundos se aprecian por los microscópios micrométricos de la alidada; todo conforme á lo que respecto de este punto se ha estudiado en la medida de ángulos (165).

Las constantes instrumentales que deben determinarse antes de operar, por los medios que ya se han explicado son:

- 1.^a Valor angular de las divisiones del nivel. (171)
- 2.^a Tara de los microscópios. (167)
- 3.^a Graduación de la colimación nula. (173)

223. La medición de una distancia zenital se obtiene dirigiendo dos visuales á la señal que designa el vértice, teniendo para ello el limbo una vez á la izquierda y otra á la derecha del observador; esto último se consigue si después de dirigida la primera visual con el limbo á la izquierda, se gira el aparato 180° alrededor del eje vertical y enseguida se hace girar el anteojo de manera que el objetivo vaya por la parte inferior.

Antes de reseñar la parte práctica de la operación, veamos como en función de estas dos lecturas y de las indicaciones del nivel se obtiene el valor de la distancia zenital. Supongamos para ello, (fig. 46), que sea $a b$ la posición del anteojo cuando el limbo está á la izquierda y las graduaciones crecen en el sentido que indica la flecha 1.^a; si $P P$ representa la línea de los microscópios, O , P' el puntero vertical y O , el cero del limbo que puede ocupar en la práctica una posición cualquiera, es claro que el arco $O P'$ representará la primera lectura, que designaremos

por I. Girando el aparato 180° , el sentido de las graduaciones del limbo aparecerá ser el de la flecha 2.^a, para un observador que no cambie de posición (1) y el anteojo ocupará la posición $a' b'$, teniendo el objetivo en a' ; si se mueve el anteojo y con él el limbo, de manera que el objetivo recorra el arco $a' b' a$, en el sentido de la flecha 3.^a, el cero de la graduación recorrerá el mismo arco, que es evidentemente igual á $360^\circ - 2 \zeta$, siendo ζ la distancia zenital buscada: la segunda lectura se compondrá, pues, de la primera mas el arco nuevamente descrito por el cero; si llamamos D á esta segunda lectura, se tendrá:

$$D = I + 360^\circ - 2 \zeta$$

de cuya igualdad, se deduce:

$$\zeta = \frac{I}{2} (360^\circ + I - D). \quad (a)$$

224. Se ha supuesto en esta fórmula, que la línea que une los ceros de los peines es horizontal; veamos cuando esto no sucede qué corrección debe introducirse. Si la línea de los ceros ocupase la posición 1 de la figura 47, (lo que sucederá cuando el eje general del aparato esté inclinado, pues por construcción la alidada es perpendicular á dicho eje, como lo indica el grupo (b) de la figura 48), la lectura hecha con el índice A_1 al terminar cada visual será mayor de la que corresponda en realidad, sucediendo lo contrario si dichas líneas ocupan la posición 2 y A_2 de la misma figura 47; sí, pues, representamos por γ el valor de la inclinación de esta línea, la fórmula antes hallada (a) se convierte para su uso práctico en

$$\zeta = \frac{I}{2} (360^\circ + I - D) \pm \gamma.$$

El valor de γ se determina por las indicaciones del

(1) Esta inmovilidad de posición que atribuimos al observador tiene por objeto explicar la medición con una sola figura; basta para esto suponer por un instante que el limbo es transparente.

nivel, según probaremos enseguida; de pso harémos ver que basta tomar el signo positivo en la fórmula anterior, como concepto general de suma algébrica, puesto que el mismo valor de y resultará en cada caso con el signo que deba tener. Supongamos la línea de los ceros en la posición 2 de la figura 47, y colocado sobre ella el nivel con el cero á la izquierda cuando el limbo ocupa esta misma posición, lo cual está indicado en la primera figura del grupo (a) de la 48; si $a' a''$ es la posición de la burbuja, es indudable que el arco $m y$ mide la inclinación del eje y la graduación correspondiente al punto y se obtiene por la fórmula

$$o y = \frac{o a' + o a''}{2} = \frac{a' + a''}{2}$$

llamando a' y a'' las lecturas de los extremos de la burbuja. Al girar el aparato, queda el nivel en la posición indicada en la segunda figura del grupo (a) de la 48, y la graduación y' del centro de la burbuja, se obtendrá análogamente, por la fórmula:

$$o' y' = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

siendo a_1 y a_2 las lecturas correspondientes.

Ahora bien, comparando ambas figuras, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} m y &= o y - o m \\ m' y' &= o' m' - o' y' \end{aligned} \right\} (b)$$

y como evidentemente

$$m y = m' y' \quad y \quad o m = o' m'$$

se deducirá, sumando las igualdades (b)

$$2 m y = o y - o' y'$$

de donde

$$m y = y = \frac{o y - o' y'}{2}$$

y poniendo en lugar de o y y o' y' sus valores antes hallados

$$y = \frac{1}{4} [(a' + a'') - (a_1 + a_2)]$$

Designando, finalmente, por m' el valor angular de una división del nivel y sustituyendo por y su valor en la fórmula (a), se tendrá en definitiva:

$$\tau = \frac{1}{2} (360^\circ + I - D) + \frac{1}{4} m'' [(a' + a'') - (a_1 + a_2)]$$

Cuando la inclinación de la línea de los ceros sea la que hemos considerado hasta aquí, el valor de y debe sumarse, y como en este caso, se tiene:

$$a' + a'' > a_1 + a_2$$

se vé que la fórmula anterior producirá, como debía ser:

$$y > 0.$$

Si la inclinación hubiera sido la de la posición 1 de la figura 47, la corrección debe ser sustractiva y efectivamente, como en este caso:

$$a' + a'' < a_1 + a_2$$

el valor de y resultará negativo. Queda comprobado que basta el signo positivo en el valor de y que figura en la fórmula (a) dándole solo el concepto de suma algébrica. (1)

225. La práctica de las observaciones para medir una distancia zenital, se reduce:

1.º A dirigir una visual con el limbo á la izquierda, ajustando la puntería con los movimientos lentos y de arriba abajo.

2.º Con el círculo á la derecha, una nueva visual que se afinará de abajo arriba.

3.º Desapuntar el anteojo y sin cambiar el limbo,

(1) Ver Apéndice número 6.

apuntar nuevamente ajustando la puntería de arriba abajo.

Y 4.º Girando al limbo, cuarta visual que se terminará de abajo arriba.

Las lecturas obtenidas en posiciones inversas del limbo darán, según hemos visto, dos valores para la distancia zenital en los que por la manera de operar se habrá reducido el error accidental de puntería.

Para eliminar los errores de división, se reiteran las operaciones partiendo de distintas graduaciones del limbo hasta completar veinticuatro ó doce valores de la distancia zenital, según la importancia del vértice.

Los datos que deben anotarse en los cuadernos de observaciones, son: lecturas del limbo por cada visual y posición de este; lecturas del nivel en ambas posiciones; altura sobre el terreno del eje de muñones del anteojo y altura de la señal visada; si ambas alturas son iguales, bastará efectuar el promedio de todas las distancias zenitales obtenidas para encontrar la verdadera. En el caso en que la altura del aparato y la de la señal no son iguales, la visual dirigida (prescindiendo de la refracción) no sería paralela al terreno y la distancia zenital hallada no correspondería á la verdadera; para encontrar ésta, se efectúa la corrección que se llama *reducción al vértice de la señal*. Hé aquí como se efectúa.

226. *Reducción al vértice.*—Sean (fig. 49), A y B los dos puntos del terreno, y A A', B B' las alturas del anteojo y de la señal, que designaremos respectivamente por a y a' ; designemos también por A la distancia horizontal entra los dos puntos, sensiblemente igual á A' C; en el triángulo A' B' C, el ángulo B' A' C = ϵ es el error de la distancia zenital ζ ; dicho triángulo dá la proporción:

$$\frac{\text{sen. } \epsilon}{\text{sen. B'}} = \frac{a' - a}{A}$$

y como el ángulo B' difiere de ζ solamente en el valor del

ángulo θ de las verticales, que en general es muy pequeño, se deducirá:

$$\text{sen. } \varepsilon = \frac{(a' - a) \text{ sen. } Z}{A}$$

de donde

$$\varepsilon'' = \frac{(a' - a) \text{ sen. } Z}{A \cdot \text{sen. } I'}$$

En esta fórmula, A es conocido por los datos de la triangulación, Z es el ángulo medido en el terreno sin corregir y $a' - a$, se deduce de los datos tomados en cada estación; el signo de ε depende solo del que tenga $a' - a$.

Correjidas las distancias zenitales, se encuentran las diferencias de nivel, mediante fórmulas que varían según que de la línea del terreno se conozcan ó nó las distancias zenitales recíprocas. Estudiarémos ambos casos.

227. *Fórmula de la diferencia de nivel en función de dos distancias zenitales.* (1)—Sean A y B , (fig. 50), los dos puntos cuya diferencia de nivel se quiere encontrar, para obtener sus cotas sobre la superficie de comparación MN ; supongamos que la distancia horizontal MN es lo suficientemente grande para que las normales VC y $V'C$, que son las verticales de ambos puntos, no puedan considerarse paralelas, ni tampoco prescindirse del error debido á la refracción atmosférica; designemos, en fin, por a y a' las cotas MA y NB cuya diferencia buscamos; por L la longitud del arco MN y por R el radio terrestre MC .

Al hacer estación en A , la refracción hace que el punto B se vea en B' , midiéndose una distancia zenital $VA B' = z$ y cometiéndose el error de refracción $BAB' = \theta$; análogamente, al situarse en B el punto A se vé en A' , obteniéndose $V'BA' = z'$ y como error de refracción $A'BA = \theta'$.

(1) Estudiamos con detalles estas fórmulas, por su importancia y por no exigir conocimientos especiales, razón que nos ha hecho prescindir de los planteos de otras fórmulas fundadas en conocimientos astronómicos.

Aplicando el triángulo $A B C$ la proporcionalidad de lados y senos de ángulos opuestos, se deducirá la relación:

$$\frac{A C}{B C} = \frac{\text{sen. } A B C}{\text{sen. } B A C}$$

de donde, por sencillas transformaciones que quedan suficientemente indicadas, se desprende:

$$\frac{A C + B C}{A C - B C} = \frac{\text{sen. } A B C + \text{sen. } B A C}{\text{sen. } A B C - \text{sen. } B A C} =$$

$$\frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (A B C + B A C)}{\text{tang. } \frac{1}{2} (A B C - B A C)}$$

sustituyendo valores,

$$\frac{a + a' + 2 R}{a - a'} = \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} (A B C + B A C)}{\text{tang. } \frac{1}{2} (A B C - B A C)}$$

y despejando $a - a'$ que llamaremos d ,

$$d = (a + a' + 2 R) \cdot \text{tang. } \frac{1}{2} (A B C - B A C).$$

$$\cot. \frac{1}{2} (A B C + B A C).$$

Observando la figura, se obtiene:

$$A B C + B A C = 180^\circ - C$$

de donde se deduce:

$$\cot. \frac{1}{2} (A B C + B A C) = \cot. \left(90^\circ - \frac{1}{2} C \right) =$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2} C.$$

Además de la figura, también se deduce:

$$A B C = 180^{\circ} - (\zeta' + \theta') = 180^{\circ} - \zeta' - \theta'.$$

$$B A C = 180^{\circ} - (\zeta + \theta) = 180^{\circ} - \zeta - \theta.$$

É introduciendo estos valores en el de d después de sacar en el primer término $2 R$ como factor común, se tiene:

$$d = \left(\frac{a + a'}{2 R} + 1 \right) \cdot 2 R \cdot \text{tang.} \frac{I}{2} C \cdot \text{tang.} \frac{I}{2} (\zeta - \zeta' + \theta - \theta')$$

y como la fracción $\frac{a + a'}{2 R}$ es muy pequeña, podrá prescindirse de ella sin gran error; por lo que se tendrá:

$$d = 2 R \cdot \text{tang.} \frac{I}{2} C \cdot \text{tang.} \frac{I}{2} (\zeta - \zeta' + \theta - \theta').$$

Para poner el ángulo en C de las verticales (que en la práctica no puede medirse) en función de la distancia horizontal L , considerémos trazada la tangente $a b$ en el punto medio del arco $M N$ y como este arco es pequeño, podremos tomar la longitud del arco por longitud de la tangente, con lo que $a b$ será sensiblemente igual á $\frac{I}{2} L$; esto sentado, en el triángulo rectángulo $a b C$, se tiene:

$$\frac{I}{2} L = R \cdot \text{tang.} \frac{I}{2} C$$

de donde,

$$L = 2 R \cdot \text{tang.} \frac{I}{2} C.$$

Sustituyendo este valor en la fórmula que dá el de d , considerando de pasada que operando simultáneamente en ambas estaciones, puede suponerse $\theta = \theta'$, se obtiene en definitiva como fórmula práctica, para cuando se conozcan las distancias zenitales recíprocas de una línea del terreno,

$$d = L \cdot \text{tang. } \frac{1}{2} (\zeta - \zeta').$$

228. *Coefficiente de refracción.*—Se dá este nombre al número por que debe multiplicarse al ángulo C de las verticales, para que el producto sea igual á $\theta + \theta'$. Designando por K este número, por definición, tendrá por fórmula

$$K = \frac{\theta + \theta'}{C}$$

y su conocimiento es indispensable cuando solo se puede medir una distancia zenital de la línea del terreno.

Para determinarlo, se observa en la figura 50, que

$$\zeta + \theta = A B C + C$$

y como, según hemos visto,

$$A B C = 180^\circ - \zeta' - \theta'$$

se tendrá:

$$\zeta + \theta = 180^\circ - \zeta' - \theta' + C$$

de donde:

$$\theta + \theta' = 180^\circ - \zeta - \zeta' + C$$

Dividiendo por C los dos miembros de esta igualdad,

$$\frac{\theta + \theta'}{C} = K = 1 + \frac{1}{C} (180^\circ - \zeta - \zeta');$$

si designamos por r'' el valor gradual del arco cuya longitud es igual al radio, tendremos:

$$\frac{L}{C} = \frac{R}{r''} \quad \text{ó sea} \quad \frac{1}{C} = \frac{R}{L r''}$$

y sustituyendo en la fórmula anterior, después de trasponer de término la unidad y de multiplicar por -1 , se deduce, en fin:

$$1 - K = \frac{R}{L r''} (\zeta + \zeta' - 180^\circ).$$

Como hemos dicho antes, este valor se utiliza en las fórmulas prácticas empleadas cuando solo se conoce una distancia zenital, caso que consideramos á continuación.

229. *Fórmula de la diferencia de nivel en función de una sola distancia zenital.*—Si del valor hallado para $1 - K$ despojamos ζ' y lo sustituímos en la fórmula encontrada para el primer caso, tendremos sucesivamente:

$$d = L \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} \left(2 \zeta - 180^\circ - \frac{(1 - K) L r''}{R} \right) =$$

$$L \cdot \operatorname{tang} \left(\zeta - 90^\circ - \frac{(1 - K) L r''}{2 R} \right)$$

y, por último, prescindiendo del signo que lo indicará en cada caso el valor de la cotangente

$$d = L \cdot \cot. \left(\zeta - \frac{(1 - K) L r''}{2 R} \right).$$

Para obtener el valor de $1 - K$ que entra en esta fórmula, se substituyen, en la expresión antes encontrada para dicho $1 - K$, en vez de ζ , ζ' y L los valores encontrados para las líneas observadas más próximas á aquella cuya diferencia de nivel se busca, obteniéndose así una serie de valores cuyo promedio se toma como valor definitivo de $1 - K$.

230. *Observaciones.*—I.^a Para conocer de antemano si al hallar ζ y ζ' se ha cometido algún error grosero que deba rectificarse, se tendrá en cuenta que entre ζ , ζ' y C ha de haber la relación evidente

$$\zeta + \zeta' = 180^\circ + C$$

el valor de C hemos dicho que era

$$C = \frac{L r''}{R}$$

y considerando que, en la circunferencia de radio unidad, se tiene:

$$r'' = \frac{I}{\text{sen. } i''}$$

se deducirá para C el valor

$$C = \frac{L}{R \cdot \text{sen. } i''}$$

expresión más sencilla de calcular en la práctica.

2.^a De la igualdad,

$$\zeta + \zeta' = 180^\circ + C$$

se puede deducir, cuando se tenga duda en ello, cual de los dos puntos es más alto, notando que si

$$\zeta = \zeta' \text{ se verificará } \zeta = \zeta' = 90^\circ + \frac{I}{2} C$$

y por lo tanto para

$$\zeta \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \zeta'$$

será necesario que

$$\zeta \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 90^\circ + \frac{I}{2} C.$$

Es indudable que la distancia zenital mayor, corresponderá al punto más alto.

231. *Cálculo de altitudes aproximadas.*—Obtenidas ya por la aplicación oportuna de las fórmulas anteriores, las diferencias de nivel entre cada dos vértices de la red general, se obtienen sus altitudes, partiendo de una conocida, por simples sumas algébricas. En efecto, sea O el punto de altitud conocida, y designemos por A, B y C tres vértices cuyas altitudes aproximadas se quiere determinar. Como las diferencias de nivel entre cada dos son conocidas, se tendrá como datos:

$$\begin{array}{lll} \text{Diferencia entre O y A} & = & + d \\ \text{" " A y B} & = & - d' \\ \text{" " B y C} & = & - d'' \end{array}$$

y por lo tanto, si llamamos D á la altitud conocida del punto O y X , X' y X'' á las de los A , B y C , se tendrá, evidentemente:

$$\text{Altitud de } A \dots X = D + d$$

$$\text{" " } B \dots X' = X - d' = D + d - d'$$

$$\text{" " } C \dots X'' = X' - d'' = D + d - d' - d''$$

La comprobación de valores que puede obtenerse está basada, en que si se conoce también la diferencia de nivel entre A y C que llamaremos $+d'''$, se tendrá:

$$\text{Altitud de } C \dots X'' = X + d''' = D + d + d'''$$

y por lo tanto, se deberá tener dentro de las tolerancias que se fijen,

$$D + d - d' - d'' = D + d + d'''.$$

Así se continuará con todos los demás vértices, comprobando mientras sea posible las altitudes obtenidas.

232. *Nivelación de precisión.*—Indicados ya (220), los puntos de enlace que esta nivelación tiene con la ya estudiada en los párrafos anteriores, harémos constar el plan con que vamos á proceder al estudio sucinto de la *nivelación de precisión*; dicho plan es el siguiente:

1.^o Direcciones que han de seguir las líneas de nivelación y manera de establecer las señales de los distintos puntos.

2.^o Descripción y estudio preliminar de los niveles y miras.

3.^o Práctica de la nivelación.

4.^o Tolerancias admitidas.

5.^o Cálculos de la nivelación.

233. *Direcciones de las líneas y colocación de señales*—Las líneas generales de la nivelación de precisión, las constituyen, por el orden de preferencia en que van colocadas: 1.^o las carreteras generales del país; 2.^o las carreteras provinciales; 3.^o las vías férreas (salvando los túneles);

4.º los caminos vecinales carreteros; y 5.º los caminos vecinales de herradura.

Las señales que se establezcan para marcar los puntos en que debe hacerse estación, se dividen en *principales* y *secundarias*. Las primeras se aplican para subdividir el trabajo en secciones independientes unas de otras, cuya nivelación se lleva á cabo por brigadas distintas, haciendo estación ambas en la señal comun, una al empezar y otra al concluir. Las señales ó referencias secundarias son de dos clases y obedecen á dos fines; las de *primera especie*, sirven para determinar las cotas de puntos importantes, como son: vértices de la red geodésica, cotas notables de poblaciones, puntos de empalme de otras líneas de nivelación, etc., etc.; las de *segunda especie* y al mismo tiempo todas las de primera (que tienen también este segundo objeto) sirven para dividir la sección comprendida entre dos señales principales, en trozos cuya longitud sea aproximadamente de un kilómetro. Además se emplean otras señales accidentales que sirven para marcar el fin del trabajo de cada día, ó el punto en que, por cualquier causa, se hayan interrumpido las observaciones.

Las referencias principales, consisten en un cilindro de bronce de un decímetro de longitud y de tres centímetros de diámetro, terminado por una placa circular del mismo metal, con ocho centímetros de diámetro y seis milímetros de espesor; en la cara exterior de esta placa se graban las iniciales N. P. (nivelación de precisión) y el número de órden de la señal. Este cilindro, se introduce y emploma en un taladro vertical hecho en la roca ó en un sillar de una construcción permanente cuya estabilidad ofrezca garantía; caso de no haberlo, se introduce la señal en un sillar enterrado y referido exactamente á tres puntos invariables del terreno, como se ha dicho en la elección de los vértices geodésicos (20).

Las señales secundarias de primera especie, están cons-

tituidas por un clavo de bronce de cabeza plana, cuya espiga tiene un decímetro y cuya cabeza es de 15 milímetros de diámetro; este clavo se introduce á golpe de mazo en un taladro practicado en la roca ó en un sillar enterrado; alrededor de la cabeza se pinta al óleo un círculo encarnado y el número de orden correspondiente.

Las secundarias de segunda especie, son pintadas al óleo en roca ó sillar, y las forma un cuadrado de ocho centímetros de lado, con una circunferencia interior de 15 milímetros de diámetro y el número correspondiente. El sitio en que se coloquen estas señales no necesita más caracteres de estabilidad que el preciso para que subsistan mientras se ejecutan las dos nivelaciones de cada trozo.

Las señales accidentales de fin de día no se numeran, pero conviene referirlas á tres puntos del terreno por si desaparecieran al día siguiente.

234. *Descripción y estudio preliminar de los niveles y miras.*—Los instrumentos empleados para los trabajos de la nivelación de precisión, son en general, niveles de anteojo, dotados de todas las rectificaciones necesarias de conjunto y de detalle; á cada nivel acompaña una mira parlante, también provista de elementos que permitan confiar en su buena instalación. En la imposibilidad de describir todos los niveles conocidos, tomaremos como tipo general el nivel de Kern y su mira, que son los aparatos empleados por el Instituto Geográfico en los trabajos de la nivelación española.

235. *Nivel.*—Lo forma una meseta circular con tres brazos, provistos de tornillos nivelantes; estos tornillos terminan en unas esferas que se sujetan al trípode por medio de unos corchetes, para que sin desmontar el aparato pueda ser trasladado de una estación á otra. A la meseta circular descrita, vá unido un eje vertical de acero, alrededor del cual puede girar todo el resto del aparato; sobre una placa metálica horizontal unida al eje por un

manguito que lo envuelve, hay una regla, también horizontal, de que parten dos armaduras verticales que se unen á otra regla horizontal, constituyendo un cuadrilátero vertical articulado; un tornillo de elevación situado en una de las armaduras verticales, sirve para conseguir la horizontalidad de la visual; á este cuadrilátero vertical se une, por collares de charnela, el anteojo, y sobre éste vá montado el nivel; estas piezas están sujetas por unos corchetes que permiten, según se desee, invertir el anteojo llevando consigo el nivel, invertir el nivel solo; y, por último, que sin moverse el nivel pueda el anteojo girar dentro de sus collares.

El tubo del nivel vá graduado, teniendo el cero en el punto medio; este nivel lleva los oportunos tornillos para la rectificación de sus apoyos; un espejo plano, inclinado convenientemente, permite hacer por reflexión la lectura del nivel sin que el observador se mueva de la posición en que observa la mira.

El anteojo es astronómico, de 36^{mm} de abertura en su objetivo, y con una amplificación de 60 diámetros en su ocular. El retículo lo forman cuatro hilos, tres horizontales y uno vertical; el punto de cruce de éste con el central horizontal, debe estar situado en el eje de figura del anteojo cuando el aparato está rectificado; para las oportunas correcciones del retículo, van los hilos de éste montados en un marco que se maneja desde el exterior por medio de tornillos; por último, un tope saliente que lleva el anteojo tropieza con otro colocado en la armadura vertical del collar, cuando los tres hilos paralelos son horizontales.

236. *Mira*.—Es de madera de pino del Norte, de unos 3^m de longitud, por 0^m,80 de ancho y 0^m,032 de grueso, reforzada en los cantos con costillas de madera. La mitad derecha de la cara anterior, está dividida en centímetros alternativamente pintados de blanco y negro

y numerados los pares con cifras horizontales de 1,5 centímetros de altura; en la mitad izquierda van indicados los decímetros por pequeños cuadrados negros y numerados en la parte central, los decímetros del segundo metro llevan encima un punto y dos los del tercero.

En la parte superior y al costado, lleva la mira un gancho del que pende una plomada cuya punta coincide con otra situada en la extremidad inferior del mismo costado, cuando la mira es vertical; también en la parte superior, pero al costado opuesto, va colocado un nivel esférico con sus tres tornillos de rectificación.

Por su extremo inferior, lleva la mira una armadura de hierro con un pivote pulimentado en prolongación del eje de la mira, este pivote se introduce en un taladro practicado al efecto en una gruesa plancha de hierro fundido que se coloca en el suelo y se fija en él por cuatro puntas agudas que lleva en su parte inferior; la mira puede girar, por lo tanto, sobre su eje de figura, supuesto vertical.

En algunas miras en que la numeración de los decímetros no lleva señal alguna al cambiar de metro, se utiliza para evitar un error grosero en las lecturas, un listón suplementario adosado á la mira por el costado de la graduación en decímetros: este listón también está dividido en decímetros y pintado cada uno de color distinto, alternativamente negro, blanco y rojo; como á cada decímetro de igual número corresponde color distinto, los errores se hacen difíciles y se puede saber en qué metro se está haciendo la lectura.

Por último, cerca de los extremos lleva la mira incrustadas unas planchitas de metal, en las que con un punzón muy fino se han marcado puntos que sirven para las comparaciones que se han de hacer con el fin de averiguar la variación que pueda experimentar la longitud absoluta de la mira y conocer en cada serie de observaciones la longitud media por metro.

Descritos los aparatos, pasemos á ocuparnos de su estudio preliminar, ó sea, determinación de las constantes instrumentales.

237. *Determinación de las constantes instrumentales.*

—Esta determinación debe hacerse antes de empezar una temporada de trabajos de campo y los valores encontrados se suponen realmente constantes, y se aplican á los datos correspondientes á dicha temporada; estas constantes son:

1.^a Valor angular de una división del nivel.

2.^a Separación angular entre cada dos hilos horizontales del retículo.

3.^a Longitud absoluta de la mira.

He aquí, brevemente explicado, como se hallan dichas constantes instrumentales.

238. *Primera constante.—Equivalencia del nivel.*—

Se ejecuta por medio del aparato descrito anteriormente (171), con el nombre de *probeta de nivel*, empleando el método y fórmulas que en los párrafos 171 á 172 quedó explicado.

239. *Segunda constante.—Separación de los hilos.*

—Para encontrar el valor de esta constante, se procede del modo siguiente: se elije un terreno algo inclinado y en él se mide, en línea recta, una longitud exacta de 100 metros, dividida en trozos de á 10 metros; se coloca el instrumento en un extremo de la distancia y la mira en el primer trozo y dirigiendo una visual por el anteojo se anotan las lecturas correspondientes en la mira á los hilos superior, central é inferior; esta operación se reitera doce veces por distintos observadores. Sin cambiar el aparato, se traslada la mira al segundo trozo y se repiten las operaciones en igual forma. Así se continúa hasta que la mira haya recorrido todos los trozos; entónces se lleva el aparato al otro extremo y vuelven á repetirse en el mismo orden todas las operaciones. Como el terreno se

ha elejido con alguna inclinación, es claro que los hilos del retículo se proyectarán en distintas partes de la mira, al colocar esta sucesivamente en cada trozo; así se consigue eliminar los errores de la división de ésta.

Para deducir ahora de las lecturas hechas las separaciones angulares buscadas, supongamos que sea d la distancia $A B$, (fig. 51), que separa el retículo de la mira y C, B, D las proyecciones visuales de los tres hilos sobre ella; si designamos respectivamente, por s, c é i las lecturas correspondientes á los hilos, superior, central é inferior y por A_1 y A_2 las separaciones angulares de cada dos, tendríamos evidentemente:

$$\text{tang. } A_1 = \frac{B C}{A B} = \frac{s - c}{d}$$

$$\text{tang. } A_2 = \frac{B D}{A B} = \frac{c - i}{d}$$

y en fin, el ángulo A de separación entre los hilos extremos, vendrá dado por la expresión:

$$A = A_1 + A_2.$$

Por último, para con las tres lecturas hechas en la mira obtener la correspondiente al hilo medio ideal entre los C y D , se calcula el valor de la separación angular entre el hilo central B y dicho hilo medio ideal, por la fórmula

$$\frac{A_2 - A_1}{3}$$

que dá dicho valor.

240. *Tercera constante.*—*Longitud absoluta de la mira.*—Se efectúa esta operación comparando la mira con la regla de hierro del aparato de medir bases, empleando un procedimiento análogo al indicado en la determinación de F_n (97). Cada comparación simple comprende dos partes: 1.^a coincidencia de los hilos micrométricos de cada microscópio con los trazos concernientes de la regla, ano-

tando las lecturas de los respectivos tambores; 2.^a sustitución de la regla por la mira y repetición de las operaciones haciendo las coincidencias con los puntos marcados en las chapitas incrustadas en los extremos de la mira (236); con estos datos, determinada la temperatura por el promedio de los cuatro termómetros de la regla, conocida la distancia entre los ejes de los microscópios y la longitud inicial de la regla á la temperatura encontrada como tipo (97), se deduce la longitud de cada mira y su variabilidad. Repitiendo las comparaciones hasta obtener cuarenta valores y aplicando las reglas del Cálculo de Probabilidades, se encuentra por fin la longitud media de cada mira, su variabilidad y el valor medio que corresponde á cada metro de longitud de mira, que es el dato práctico que se ha de utilizar después en las operaciones.

241. *Determinación de los errores instrumentales.*— Al empezar y concluir una série no interrumpida de observaciones, debe efectuarse la determinación de los errores instrumentales, cuyo promedio sirve para corregir los valores correspondientes á aquella série.

Los errores que deben determinarse, son:

- 1.º Por colimación del hilo horizontal central.
- 2.º Por falta de paralelismo entre el eje de figura del anteojo y la línea de nivel.
- 3.º Por error del nivel.

Para todas estas determinaciones debe entenderse que se designa por *posición normal* del instrumento, respecto al anteojo, cuando el ocular está del mismo lado que el tornillo de elevación de su collar y el tope del retículo en contacto con el de la armadura vertical; y respecto del nivel, cuando el tornillo de rectificaciones de su armadura se halle también del lado del tornillo de elevación citado; la posición contraria del instrumento se designará con el nombre de *posición inversa*, bien se refiera al anteojo ó al nivel.

242. *Corrección por colimación.*—Como según veremos mas adelante, la extensión media de cada nivelada varía entre 40 y 50 metros, tanto este error como los demás se determinarán colocando la mira en su tripode á 40 metros de distancia del nivel.

Hecho esto, y partiendo de la posición normal del anteojo, se hacen las lecturas que en la mira corresponden á los tres hilos del retículo, se refieren como luego veremos al hilo medio ideal y se corrigen de inclinación; colocado el anteojo en posición inversa se repiten las operaciones y vuelve á hacerse otro tanto por tercera vez volviendo á la posición normal. Si de la lectura media correspondiente á la posición inversa, restamos el promedio de las dos obtenidas en posición normal y se divide por dos esta diferencia, se obtendrá un número δ que sirve para obtener el valor de la colimación en segundos.

En efecto, sean (fig. 52), B, C, D las proyecciones visuales de los hilos sobre la mira y C' la posición correspondiente al hilo C sin colimación; el ángulo $CAC' = C''$ expresará la colimación en segundos y la parte de mira CC' será el número δ antes hallado. En el triángulo ACC', se tiene:

$$\text{tang. } C'' = \frac{CC'}{AC} = \frac{\delta}{d}$$

Ahora bien, como, según sabemos (239), se verifica que

$$A = A_1 + A_2$$

y por la pequeñez de su valor, se tendrá asimismo un gran error

$$\text{tang. } A = \text{tang. } A_1 + \text{tang. } A_2$$

sustituyendo los valores encontrados para tang. A_1 y tang. A_2 (239), obtendremos:

$$\text{tang. } A = \frac{s - i}{d}$$

de donde

$$d = \frac{s - i}{\text{tang. } A}$$

y poniendo en la expresión de C'' por d este valor, y reduciéndolo á valor gradual, se tendrá:

$$C'' = \frac{\delta}{s - i} \times \frac{\text{tang. } A}{\text{tang. } 1''}$$

Si designamos ahora por n el número de segundos á que equivale una división del nivel, tendrémos que la colimación C expresada en divisiones de nivel, será:

$$C = \frac{\delta}{s - i} \times \frac{\text{tang. } A}{\text{tang. } 1''} \times \frac{1}{n}$$

243. *Corrección por paralelismo ó corrección de inclinación.*—Se obtiene leyendo las divisiones del nivel correspondientes á la posición normal de éste y del anteojo; se cambia la posición de éste sin variar la del nivel y se repiten las lecturas; y, en fin, vuelto el anteojo á la posición normal, se hace una tercera observación; la semi-diferencia entre la segunda lectura y el promedio de la primera y tercera, dá el error de paralelismo en divisiones del nivel.

Para encontrar la corrección lineal que por causa de este error debe introducirse en las lecturas obtenidas en la mira, supongamos, (fig. 53), que sea $A m$ la posición real del eje de figura y $A n$ la que debía tener, formando ambas posiciones el ángulo i_1 ; el error lineal será $m n$ y vendrá dado por la expresión

$$m n = A n \times \text{tang. } i_1 = d \cdot \text{tang. } i_1$$

y substituyendo por d su valor antes hallado

$$d = \frac{s - i}{\text{tang. } A} = (s - i) \cot. A$$

se deducirá

$$m n = X = (s - i) \cot. A \cdot \text{tang. } i_1$$

Y, si llamamos P al valor de la inclinación en divisiones del nivel, y n la equivalencia en segundos de una de éstas, se tendrá:

$$i_1 = P n$$

por lo que sustituyendo la tangente por el arco á causa de su pequeñez

$$X = (s - i) \cot. A . P n . \text{tang. } i''$$

244. *Corrección por error del nivel.*—Este se encuentra del modo siguiente: en la posición normal del anteojo y nivel, se hace la lectura de éste; se invierte el nivel, sin cambiar el anteojo y se anota la indicación de la burbuja; la semi-diferencia de ambas lecturas dá el error del nivel. Como esta determinación se hace al mismo tiempo que la anterior, es indudable que en cada posición del anteojo se obtendrá un valor para el error del nivel; el promedio de los tres errores así encontrados, dá el definitivo, que llamaremos α .

Si se representa por I el valor total que, en segundos, corresponde á las tres correcciones por colimación, paralelismo y nivel, ó sea,

$$I = (C + p + \alpha) n$$

obtendremos una fórmula análoga á la anterior (valor de X) que dará la corrección lineal que por razón de errores instrumentales hay que introducir en las alturas de mira correspondientes al hilo medio ideal. Representando por X' este error lineal, tendrá por expresión

$$X' = (s - i) . \cot. A . I . \text{tang. } i''.$$

245. *Reducción de las lecturas al hilo medio ideal.*

—Hemos dicho en otro lugar que del valor $\frac{A_2 - A_1}{3}$ se deduce la posición que corresponde al hilo medio ideal del retículo; para con este dato encontrar la altura de mira correspondiente, sea $A \alpha$; (fig. 54), la línea visual corres-

pondiente al hilo real central sin colimación, inclinación ni error de nivel, y $A b$ la que produciría el hilo medio ideal; la reducción pedida será $a b$ y representándola por R , se tendrá

$$R = d \cdot \text{tang. } \alpha_1 = (s - i) \cot. A \cdot \text{tang. } \frac{A_2 - A_1}{3}$$

246. *Distancia aproximada de la mira al nivel.*—Se puede deducir este dato en función de la diferencia de lecturas correspondientes á los hilos extremos del retículo, suponiendo que aproximadamente es igual á la línea $A i$, (fig. 55), que pasa por el hilo inferior y suponiendo (lo que aproximadamente se verifica también) que el triángulo $A i s$ es rectángulo en i . Se tendrá, por lo tanto.

$$D = (s - i) \cot. A.$$

247. *Observación.*—Creemos ocioso consignar que todos los cálculos á que dá lugar la aplicación de las fórmulas anteriores, se ejecutan en el gabinete, reduciéndose la parte de campo á anotar en los oportunos registros los datos numéricos necesarios. Hemos creído, sin embargo, conveniente unir en cada caso la parte práctica con la teórica, para dar más unidad al conjunto, para completar la idea de cada corrección y para evitar después estas que serían forzosas digresiones, al reseñar la práctica y cálculos de la nivelación. Con este último objeto, colocamos también en esta parte el estudio de las dos correcciones generales que siguen, por esfericidad y refracción.

248. *Reducción al nivel verdadero ó corrección de esfericidad.*—Como las superficies de nivel que pasan por los puntos en que se colocan el nivel y la mira son esféricas y la visual dirigida es lineal y tangente á la primera, resultará la diferencia de nivel entre ambos puntos afectada de un error que, dada la manera de operar, que luego estudiaremos, influirá bastante en el desnivel de cada trozo. Conviene, por lo tanto, eliminar este error,

que depende del radio terrestre y de la distancia entre los dos puntos; representémosle por γ y vamos á deducirlo.

Sean a y b (fig. 56), los puntos cuya diferencia de nivel se quiere hallar; la visual $d f$ siendo tangente á la superficie de nivel $d g$, produce el error $f g$ que se quiere determinar, pues que conocido dicho error, se tendrá:

$$h b = \text{desnivel} = b g - a d = \text{altura de mira} - \text{altura de aparato.}$$

Ahora bien, en el triángulo rectángulo $f d c$, se tiene sucesivamente:

$$\overline{d f^2} = \overline{c f^2} - \overline{d c^2} = (c g + g f)^2 - \overline{c d^2} = \\ (c d + g f)^2 - \overline{d c^2}$$

desarrollando el paréntesis y reduciendo

$$\overline{d f^2} = g f (2 c d + g f)$$

de donde

$$g f = \frac{\overline{d f^2}}{2 c d + g f} = \frac{\frac{\overline{d f^2}}{2 c d}}{1 + \frac{g f}{2 c d}} = \frac{\frac{D^2}{2 R}}{1 + \frac{g f}{2 R}}$$

y como la fracción $\frac{g f}{2 R}$ se puede despreciar sin error sensible, se deduce finalmente,

$$\gamma = \frac{D^2}{2 R}$$

249. *Corrección por refracción.*—Depende de que, á causa de la desviación que á los rayos luminosos imprime la refracción atmosférica, la división de la mira que se vé en f , ocupa realmente la posición m ; el valor $m f$, del error de refracción, se ha encontrado prácticamente que es igual, al valor hallado antes para γ multiplicado

por $2K$, siendo K el coeficiente de refracción hallado como se ha dicho en otro lugar (228 y 229).

El valor total de la corrección que por esfericidad y refracción debe hacerse á la altura de mira, ó mejor aún, al desnivel encontrado, tendrá, pues, por expresión, llamándolo Y é y' al de refracción,

$$Y = y - y' = \frac{D^2}{2R} - 2K \cdot \frac{D^2}{2R} = \frac{D^2}{2R} (1 - 2K)$$

Conocidos ya todos los datos de corrección, tanto constantes como instrumentales, necesarios para los cálculos de las cotas sucesivas, entraremos á reseñar la práctica que debe seguirse en la nivelación.

250. *Práctica de la nivelación.*—Según hemos dicho en otro lugar (233), la nivelación se ejecuta por secciones comprendidas entre dos señales principales, subdividiéndolas en trozos de un kilómetro próximamente, por medio de las señales secundarias de primera y segunda especie.

La nivelación de cada una de las secciones es doble, esto es, que se ejecuta dos veces por observadores distintos, debiendo llevar el segundo nota del itinerario seguido y señales puestas por el primero. Debe procurarse también que medie poco tiempo de una nivelación á otra, en la misma sección y trozo.

En cada una de las nivelaciones se operará desde el centro, es decir, que se coloca el instrumento en posición en un punto y la mira en dos sucesivos y equidistantes del nivel, haciéndose las que se llaman *niveladas de espalda* y *frente*; de este modo, basta hacer la diferencia de lecturas para cada posición de nivel para obtener la diferencia de cotas entre las dos posiciones de la mira.

La longitud máxima de cada nivelada es de 90^m que solo se emplea en la nivelación de vías férreas; la ordinaria, por carreteras poco accidentadas varía entre 30 y 70

metros; pudiéndose reducir á 15 en terrenos muy quebrados en que á distancias mayores los hilos del retículo podrían proyectarse fuera de la mira; por último, en bruscas hondonadas ó desniveles donde no pueda utilizarse el método directo, se procederá á encontrar la diferencia de cotas, por el procedimiento geométrico que parezca más exacto y de fácil aplicación.

251. Esto sentado, para efectuar una de las dobles nivelaciones se colocará el aparato en estación, procurando que el eje de rotación vertical ocupe lo más exactamente posible esta posición; se determinan (si es primera ó última estación de la série) los errores instrumentales como queda dicho; seguidamente se dirige la visual á la mira colocada en la posición de espalda en el primer punto de la sección ó trozo y se anotan primero las lecturas del nivel, y después las de la mira, volviendo á repetir ambas operaciones para cerciorarse de que no se ha cometido error grosero; pasando ahora la mira á la posición de frente, se rectifica la distancia de esta al instrumento, evaluándola por la lectura de los hilos extremos y consultando la tabla que da esta distancia por la fórmula $D = (s - i) \cot.$ A que antes hallamos (244); si se diferencia mucho de la primera distancia, se hace señas al portamira para que se aproxime ó aleje hasta que el error de equidistancia no llegue á 10 metros.

Sin cambiar la mira de esta posición al frente, que pasa ahora á ser de espalda, se traslada el nivel á otra estación y se repiten las observaciones; en la última posición de la série, se determinan de nuevo los errores instrumentales.

252. La misión del portamira es también de bastante importancia, pues de su cumplimiento depende la buena exactitud de la nivelación. Colocada la mira de manera que su plancha de apoyo descansa en el terreno y el pivote de la mira en el taladro correspondiente, cuidará el portamira de que quede vertical, atendiendo, para ello, á

Las indicaciones de la plomada y del nivel esférico; conseguida esta verticalidad permanecerá inmóvil hasta que el observador le haga seña y entonces pasará á la posición de mira al frente; para esto, contará los pasos que median desde la posición que ocupaba al nivel y partiendo de este y contando el mismo número de pasos, sentará la mira y seguirá las indicaciones que le haga el observador para obtener la buena equidistancia; enseguida colocará la mira vertical y cuando el nivel cambie de estación, hará girar la mira en su pivote para que ocupe su cara graduada la posición de mira á la espalda respecto del observador.

253. Debe tenerse en cuenta, como regla general, que cuando, por cualquier evento, se tenga que repetir alguna nivelada, por error ú otra causa, se comenzará la repetición desde la señal más próxima y no desde la última posición de la mira, por la dificultad de colocar esta exactamente como estaba en la primera nivelada.

Las horas de trabajo dependen de la estación del año y de la naturaleza del terreno, debiéndose tener como regla, que no debe operarse en condiciones de temperatura que hagan perezosa la burbuja del nivel.

Las indicaciones de este para las correcciones de inclinación, etc, se aprecian hasta décimas de división y las lecturas de la mira en centésimas de centímetros.

254. *Tolerancias admitidas.*—En la imposibilidad de operar con exactitud en todas las estaciones y con el fin de que los datos obtenidos en el terreno sirvan, por su precisión, para calcular en buenas condiciones las cotas sucesivas, se han fijado algunas tolerancias que deben tener presente los observadores para no salirse de ellas.

Para los trabajos de campo, estas tolerancias son; 1^{mm} , para la observación de la mira á la distancia de 100 metros; 0^m , 50 en la apreciación de la distancia de la mira al nivel, á 100 metros; $15''$ de inclinación en el nivel en cada estación; 1^{mm} de diferencia de lecturas que al hilo central

correspondan en las dos posiciones del anteojo, colocada la mira á 40^m; y por último, una división del tubo como error del nivel.

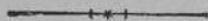
Como tolerancias para el cálculo, hay; 0^{mm}, 1 para el cálculo de las correcciones y reducciones que deben introducirse en las alturas observadas; y 5^{mm}. $\sqrt{K}$ por error de cierre en un polígono ó en una línea doblemente nivelada y que tenga K kilometros de extensión.

255. *Cálculos de las diferencias del nivel.*—Para facilitar el empleo de las fórmulas que dán los valores de C, X, X', R y D (242 á 247) se construyen previamente tablas, partiendo de los valores de A, A₁ y A₂ determinados al hacer el estudio preliminar de los aparatos, y dando á s — i valores convenientes según los usos de cada tabla y tolerancias correspondientes.

Como la determinación de los errores instrumentales se hace, en el campo, al principio y fin de cada série, se toma para corregir las alturas de dicha série el promedio de los valores encontrados para cada error.

Operando con separación en las niveladas de espalda y de frente, se reducen las lecturas de los tres hilos al hilo medio ideal, y se las corrige de los errores instrumentales mediante las tablas antes citadas. Se suman las distancias entre las posiciones de la mira comprendidas entre dos señales secundarias, obteniéndose así la longitud total de cada trozo. Restando ahora de la suma de alturas de frente, la suma de las correspondientes de espalda, se encuentra la diferencia de nivel entre las señales extremas del trozo; se corrijen estas diferencias, de esfericidad y refracción y se modifican en vista del valor correspondiente á cada 1^m de la mira (240).

Después de efectuados estos cálculos, se procede á la determinación del error medio y probable de cada trozo y se forman los estados generales por secciones y trozos.



CAPÍTULO OCTAVO.

Exposición de los varios sistemas de proyecciones.

256. PRELIMINARES.—Para obtener, con arreglo á una escala determinada, la representación de la superficie terrestre, el mejor procedimiento ó por lo menos el mas exacto, sería la construcción de globos en que se trazasen meridianos y paralelos bastante próximos y refiriendo á cada cuadrícula así formada, los puntos del levantamiento definidos por sus coordenadas geográficas. Pero como, si el globo era de pequeñas dimensiones, ciertos detalles necesarios no aparecerían y por el contrario, de figurar esos detalles sería preciso dar al globo dimensiones tales que dificultarían su manejo, se ha desechado este procedimiento, dejando limitado su empleo al estudio elemental de la Geografia; se prefiere la representación plana, con ciertas convenciones que irémos estudiando sucesivamente.

257. No siendo la Tierra, por su forma, superficie desarrollable, no puede obtenerse con exactitud su representación plana por lo que se recurre á dos procedimientos distintos, que considerados juntos toman el nombre de *proyecciones* y por separado los de *proyecciones perspectivas* y *por desarrollo*.

Las perspectivas representan la Tierra, tal como se la vería desde un punto de vista determinado; las *proyecciones por desarrollo*, sustituyen la superficie esférica por

una ó varias superficies cónicas ó cilíndricas circunscritas á la esfera.

Las proyecciones perspectivas se dividen en *ortogonales* y *stereográficas*, según que el observador se suponga ó no colocado á una distancia infinita. Tanto unas como otras se clasifican atendiendo, bien sea á la posición del observador ó bien á la situación del plano en que se hace la proyección; consideraremos solo el primer caso, por el que se dividen las proyecciones perspectivas en *polar*, *ecuatorial* y *horizontal*. Es *polar*, cuando el observador se sitúa en la línea de los polos y se toma por plano de proyección el ecuador; *ecuatorial*, cuando el observador está en el plano del Ecuador y para plano de proyección un meridiano cualquiera (generalmente el que pasa por la isla de Hierro, Canarias); y es *horizontal*, cuando el plano en que vá á hacerse la proyección es el horizonte de un lugar cualquiera; esta última es la menos empleada y prescindiremos de ella en estos lijeros apuntes (1). Existe, por último, la llamada *proyección central* en que se supone al observador colocado en el centro de la Tierra y se toma como plano, el tangente al terreno en su punto central; este sistema es, en resumen, el utilizado en los planos topográficos sin más restricción que considerar infinito el radio de la Tierra, y por lo tanto, la proyección ortogonal.

Las proyecciones ortogonales y las stereográficas difieren además entre sí, en que en las primeras, se obtiene el hemisferio convexo que mira hacia el observador, y en las segundas, se representa el hemisferio opuesto, considerándolo como si fuera transparente.

Las proyecciones *por desarrollo*, se subdividen en *cónicas* y *cilíndricas*, según la clase de superficie desarrollable por que se sustituya la esférica; existen además

(1) Cuando se clasifican las proyecciones perspectivas por el plano que se elige para de proyección, se llaman respectivamente *ecuatorial*, *meridiana* y *horizontal*.

procedimientos especiales, variantes solo de las proyecciones cónicas y cilíndricas, entre los que indicaremos el método de Cassini y los de Flamsteed, antiguo y modificado.

258. Según la extensión de terreno que se halla representado, los dibujos obtenidos, que en general se llaman *cartas ó mapas*, toman los nombres particulares de: *planisferio ó mapa-mundi*, si se proyecta toda la tierra en dos mitades; *cartas generales*, si comprenden una de las cinco partes del globo; Europa, por ejemplo; *cartas particulares*, que corresponden á una sola nación; *cartas corográficas*, cuando abarcan tan solo una provincia; existen además las *cartas orográficas*, y las *hidrográficas*, dedicadas exclusivamente al estudio de las grandes cordilleras y cadenas de montañas ó al de la parte líquida de nuestro planeta.

En los planisferios y algunas veces en las cartas generales se utilizan las proyecciones perspectivas, reservándose las por desarrollo para las cartas generales algunas veces, y siempre para las particulares y corográficas.

259. En todos los sistemas de proyecciones, se parte del trazado de paralelos y meridianos convenientemente distanciados, obteniéndose una especie de cuadrícula, en cada una de las cuales se fijan por sus coordenadas los puntos que deban representarse. Siendo también estas coordenadas arcos de paralelo y meridiano, resulta como esencial en el dibujo de las cartas el trazado de dichas líneas; á esto, pues, nos ceñiremos en las ligeras ideas que damos á continuación.

260. *Proyecciones perspectivas ortogonales.*—*Proyección polar.*—Según hemos dicho, el observador se supone colocado en la línea de los polos y á una distancia infinita del hemisferio que se quiere representar, de manera que este hemisferio presente su convexidad al observador; el plano de proyección es el del Ecuador.

Siendo los meridianos, planos que pasan por la línea de los polos y perpendiculares al de proyección, se proyectarán según rectas que serán diámetros del círculo que representa el ecuador; los paralelos se proyectarán en su verdadera magnitud y forma, constituyendo, por lo tanto, una serie de círculos concéntricos al Ecuador.

Sea, pues, (fig. 57), $A B C D$ la proyección del Ecuador, cuyo centro P será la del polo correspondiente al hemisferio representado. Dividiendo un cuadrante de Ecuador en partes iguales á la separación que se quiera establecer entre los meridianos (de 5 en 5 grados, por ejemplo), los diámetros $a P$, $b P$, etc, serán las proyecciones de dichos meridianos.

Para trazar los paralelos, con igual separación que los meridianos, supongamos rebatido sobre el plano de proyección el semi-meridiano $C P D$, que coincidirá con el semi-ecuador $C A D$; los puntos de división que antes hizimos en este, servirán para dividir el meridiano en partes iguales; luego proyectando los puntos $a, b, \dots$, sobre el meridiano $C P D$, obtendremos los puntos $a', b', c', \dots$ por que han de pasar los paralelos, bastando ya describir círculos con el radio $P b'$, por ejemplo, para obtener uno de ellos.

Para situar en esta proyección la de un punto cualquiera m , bastará tomar sobre el Ecuador y á partir de D (que suponemos sea el meridiano principal) un arco $D M$ igual á la longitud del punto m y trazar el diámetro $M P$; tomando ahora en el Ecuador; partiendo también de D , un arco $D a$ que sea la latitud de dicho punto, proyectando el punto a en a' y trazando el paralelo $P a'$, cortará al meridiano $P M$ en un punto m que es la proyección de el del terreno.

261. *Proyección ecuatorial.*—Tomando como plano de proyección el de un meridiano elegido previamente, se supone el observador situado, también á una distancia in-

finita, sobre una perpendicular á dicho meridiano levantada en su centro y contenida toda ella en el plano del Ecuador.

Todos los meridianos aparecerán según elipses cuyo eje mayor, común á todas, es la línea de los polos, excepto el meridiano principal que aparecerá como círculo y el que pase por el observador cuya proyección será rectilínea y coincidirá con la línea de los polos.

Los distintos paralelos se proyectarán según rectas perpendiculares á dicha línea de polos, coincidiendo el Ecuador con el diámetro horizontal del meridiano principal. Cada paralelo distará del Ecuador un arco igual á la latitud de dicho paralelo.

Así pues, (fig. 58), la circunferencia $EP E'P'$ representará el meridiano principal, $P P'$ la línea de los polos y $E E'$ la proyección del Ecuador. Para hallar la proyección de un paralelo $e e'$ basta tomar en la carta, un arco $E e$ igual á su latitud y trazar $e e'$ paralela á $E E'$.

Para hallar la proyección de un meridiano cualquiera, por ejemplo, el $P B P'$ de la figura del espacio, tenemos desde luego dos puntos, que son los P y P' ; el punto B en que dicho meridiano encuentra al Ecuador, se encuentra trazando $B b$ perpendicular á $E E'$, y si suponemos rebatido el semi-ecuador $EB E'$ sobre el plano de proyección, la perpendicular $B b$, tomará la posición $B' b$ y el arco EB' será igual á la longitud del meridiano considerado; en el plano de la carta, bastará, pues, tomar EB' igual á dicha longitud y trazar $B' b$ perpendicular á $E E'$, para obtener el punto b por donde ha de pasar la elipse; otro punto cualquiera como el A , en que corta al meridiano un paralelo $e e'$, se determinará bajando $A a$, perpendicular á $e e'$ trazando la semi-circunferencia $e A' e'$ rebatimiento del semi-paralelo; y en fin, trazando $a A'$ perpendicular á $e e'$ siendo también $e A'$ la longitud del meridiano; las construcciones en la carta, se deducen fá-

cilmente de lo expuesto, bastando consultar las dos figuras del espacio y de la carta. El arco de elipse $P a b P'$ que reuna todos estos puntos, será la proyección del meridiano considerado. Parece ocioso consignar que, á fin de aligerar las construcciones, se emplearán los mismos paralelos para todos los meridianos que deban trazarse.

La situación de un punto del terreno sobre la carta, se reduce (suponiendo sea el a) á tomar un arco $E e$ igual á la latitud, trazar el paralelo $e e'$, rebatirlo y tomar un arco $e A'$ igual á la longitud; bajando la perpendicular $A' a$ se tiene ya el problema resuelto.

262. *Observación.*—Como en las proyecciones ortogonales son todos los rayos visuales perpendiculares al plano de proyección, solo la parte de terreno próxima al polo, se proyectará sensiblemente en su verdadera magnitud y forma; el resto del hemisferio resultará deformado en sentido decreciente, tanto más, cuanto mayor sea la inclinación del elemento de superficie considerado con respecto á los rayos visuales; en las porciones próximas al Ecuador, todos los detalles aparecerán confusos por proyectarse unos sobre otros; este defecto hace que sean poco usadas las proyecciones ortogonales.

263. *Proyecciones perspectivas stereográficas. Proyección polar.*—Suponiendo, (fig 59), que el observador se coloca en P' y que se toma por plano del cuadro el Ecuador $E E'$, se quiere hallar la perspectiva de los meridianos y paralelos del hemisferio superior $E P E'$. Se comprende que la circunferencia $A B C D$, (figura de la carta) será la perspectiva del Ecuador y su centro P la proyección del punto de vista ó punto principal del cuadro; como los meridianos pasan todos por dicho punto de vista, sus perspectivas serán rectas que pasarán por el punto P , siendo por lo tanto, diámetros del Ecuador. Bastará, pues, suponer á este último dividido en partes iguales y trazar los diámetros correspondientes para obtener los meridianos.

Las perspectivas de los paralelos serán circunferencias concéntricas con el Ecuador, y para obtener uno de ellos, por ejemplo el $e e'$ (figura del espacio) basta trazar el cono perspectivo $e P' e'$ cuyas generatrices extremas cortan á la recta $E E'$ en dos puntos, uno de los cuales, m por ejemplo, determina el radio $o m$ de la perspectiva de dicho paralelo; para determinar este punto m , supongamos rebatido sobre el Ecuador el semi-meridiano $E P' E'$ que tomamos como principal; la recta $o P'$ tomará la dirección $o D$ y la $P' e$ la dirección $D m n$ siendo el arco $E n$ igual al $E e$, latitud del paralelo. En la figura de la carta, y suponiendo que $A B$ sea la perspectiva del meridiano principal, bastará tomar $A M$ igual á la citada latitud, unir M con D y trazar con el radio $P m$ una circunferencia que representará la perspectiva buscada.

Para situar un punto a en esta proyección, bastará tomar $A R =$ longitud del punto y trazar el diámetro $R P$ correspondiente; tomando ahora $A R' =$ latitud, uniendo R' con D y trazando la circunferencia de radio $P n$ dará por su intersección con $R P$ el punto a pedido.

264. *Proyección ecuatorial.*—En esta proyección se toma por cuadro un meridiano elejido como principal y el observador se supone colocado en el punto en que la perpendicular levantada por el centro del meridiano corta al Ecuador; en su consecuencia, solo el ecuador y el meridiano que pasa por el observador tendrán sus perspectivas rectilíneas según dos diámetros perpendiculares del círculo del cuadro; los demás meridianos y paralelos tendrán sus perspectivas curvilíneas y como proceden de la intersección del plano del cuadro con una superficie cónica de directriz circular, debemos probar que dichas intersecciones serán también circunferencias con lo que bastarán tres puntos para su trazado. Para demostrar esta proposición preliminar basta hacer ver que el plano del cuadro causa en estas superficies cónicas secciones antipa-

rales á la base y que dichas secciones son semejantes á la base.

265. Supongamos que $A S B$ sea la intersección de una superficie cónica de base circular por un plano que sea perpendicular á su base; si tomamos $S A' = S A$ y trazamos una sección $A' B'$ que forme con la generatriz $S B$ un ángulo igual al que forma la base con la $S A$, estas secciones $A B$ y $A' B'$ serán, por definición, antiparalelas y tendrán comunes dos puntos que unidos forman una cuerda de la circunferencia $A B$ proyectada en a ; si hacemos girar la sección $A' B'$ alrededor de dicha cuerda hasta que su plano coincida con el de la base, el punto A caerá en A' , el B en B' y sucesivamente todos los puntos de la una coincidirán con los de la otra; luego la sección $A' B'$ es un círculo; y como todas las secciones antiparalelas con la base son semejantes á la $A' B'$ por ser causadas por planos paralelos al de esta, todas serán de forma circular, según queríamos probar (fig. 60).

Esto sentado, supongamos, (fig. 61), que $M N$ es el meridiano que sirve de cuadro y V el punto de vista situado en el Ecuador; la perspectiva de un meridiano cualquiera $R S$, será la $F Q$ intersección del plano $M N$ con el cono $R V S$ perspectivo del meridiano en cuestión; demostrémos que $F Q$ es una sección anti-paralela á la base $R S$ y será una circunferencia; para ello, basta probar que el ángulo $V R S$ es igual al $S Q V$; en efecto, el primero tiene por medida la mitad del arco $V S$ y el segundo

$$\frac{M V - N S}{2} = \frac{N V - N S}{2} = \frac{V S}{2}$$

luego $F Q$ es una circunferencia.

Lo mismo operaríamos con un paralelo cualquiera, y probaríamos que sus perspectivas son también circulares.

266. Tratemos ya de resolver el trazado de la proyección ecuatorial; supongamos, (fig. 62), del espacio que

sea C la posición del observador y $P C P'$ el meridiano que pasa por el punto de vista; en la figura de la carta, $P P'$ será la proyección de este meridiano, $E E'$ el Ecuador y $P P' E E'$ el meridiano principal ó plano del cuadro.

Para hallar la perspectiva de un paralelo cualquiera $A A'$, tenemos ya dos puntos, que son los A y A' en que dicho paralelo corta al meridiano principal; tomando, en la carta, $E a = E' a'$ y ambos iguales á la latitud del paralelo, tendremos dos puntos a y a' de la circunferencia perspectiva; un tercer punto, por ejemplo, el m en que corta al paralelo el meridiano que pasa por el punto de vista, se determinará uniendo m con C y esta línea cortará á la $P P'$ en un punto c que será la perspectiva del m ; si giramos dicho meridiano hasta que coincida con el principal, los puntos C y m se colocarán en E' y A , por lo que, en la carta, bastará trazar la recta $E' a$ para obtener el punto c y la circunferencia $a c a'$ proyección del paralelo buscado.

Análogamente, los puntos P y P' pertenecerán á la proyección de un meridiano cualquiera, tal como $P n P'$ (figura del espacio); para hallar un tercer punto, tomemos el n en que dicho meridiano corta al Ecuador; uniendo n con C , la intersección p de esta línea con la $E E'$ será la perspectiva que se busca; rebatiendo el Ecuador sobre el meridiano principal, el punto C vendrá á P' y el n á un punto m' , tal, que el arco $E m'$ sea igual á la longitud del meridiano pedido, tomando, pues, en la carta, $E m'$ igual á dicha longitud y uniendo m' con P' , obtendremos el punto p y el arco de circunferencia $P p P'$, perspectiva del meridiano que se buscaba.

Para situar un punto cualquiera x en esta proyección, tómese $E \xi = E' \xi' =$ longitud del punto; únase ξ con E' y por los puntos ξ , ξ' y ξ'' hágase pasar el paralelo del punto. Tomando ahora $E \gamma$ igual á la longitud de x y uniendo γ con P' , tendremos el punto γ' que con los P y

P' determinará el meridiano del lugar; la intersección de $\tau \tau' \tau''$ con P γ' P' dará el punto x .

267. *Observación.*—Aunque en menor escala, á causa de ser los rayos visuales divergentes, estas proyecciones stereográficas producen la misma deformación que las ortogonales (262); pero como los rayos no son normales al elemento correspondiente de superficie, ni al plano de proyección, los detalles del contorno, que en las ortogonales, no se veían, aparecerán en las stereográficas, si bien reducidos en sentido decreciente.

268. *Proyecciones por desarrollo.*—*Proyección cónica ordinaria.*—Consiste en sustituir una porción ó zona de superficie esférica por un cono tangente á lo largo del paralelo medio; esta sustitución puede efectuarse si la zona es de poca altura, pues sabemos que la superficie cónica es uno de los medios de generación de las superficies de revolución. Puesto que cuanto menos altura tenga la zona, más exacta será la sustitución, se comprende que este método de proyección solo puede aplicarse en general para terrenos cuya extensión sea pequeña en sentido de los meridianos.

Supongamos, (fig. 63), que se desea proyectar la parte de esfera comprendida entre los paralelos a y b ; si M N es el paralelo medio, y trazamos la tangente M O al meridiano que pasa por M prolongada hasta que corte á la línea de los polos, dicha tangente será la generatriz del cono circunscrito y puede observarse que, por las construcciones hechas, dicha generatriz no es otra cosa que la cotangente de la latitud del paralelo; al desarrollar este cono, afectará la forma de un sector circular de radio M O y cuyo arco sea en longitud igual á la rectificación del paralelo; por lo tanto, trazando con el radio M O (figura de la carta) un arco indefinido y considerando á M O como proyección del meridiano central de la carta, bastará tomar á un lado y otro del punto M arcos cuyo valor res-

ponda á la mitad del trozo de paralelo comprendido en el levantamiento; para ello, aplicando la proporcionalidad entre los arcos y sus rádios, y teniendo presente que el rádio del paralelo es el coseno de la latitud, se tendrá (suponiendo 25  de paralelo)

$$\frac{\text{arco de } 12^{\circ} - 30'}{\text{arco del sector}} = \frac{M R = \cos. L}{\cot. L} = \text{sen. } L$$

de donde

$$\text{arco del sector} = \text{long. } 12^{\circ} . 30' \times \text{sen. } L,$$

que d   el arco buscado; uniendo los puntos así determinados con el O se tendrán los meridianos extremos del dibujo, obteniéndose los intermedios por el trazado de rádios convenientemente distanciados; para abreviar luego el manejo de la carta, se ponen en los puntos que los meridianos determinan en el arco central, los números    grados que tendrán en el globo con relación al que se tome por meridiano principal      r  gen de longitudes.

Los demás paralelos del levantamiento, estarán representados en la carta por arcos concéntricos al antes descrito y separados de él por longitudes iguales    la rectificación de sus diferencias de latitudes.

Para situar en la carta un punto R del terreno, se tomará    partir de *a* un arco igual    la diferencia de longitudes del meridiano central y el punto dado, obteniéndose así un punto *r'* que unido con O dará el meridiano O *r'* del lugar; tomando sobre *a* O y à partir de *a* una longitud *a r* igual al desarrollo de la diferencia de latitudes de *a* y R, se trazar   el arco de rádio O *r* que determinará el punto R por su intersección con O *r'*.

Observación.—Como las secciones planas del cono circunscrito son mayores que los paralelos correspondientes de la esfera, la proyección cónica trae consigo una

deformación en sentido creciente, simétrica con relación al paralelo medio. Algunas veces se toma como directriz del cono el paralelo inferior de la carta, lo que produce una deformación siempre creciente á partir de este paralelo; otras veces se toma como generatriz del cono la cuerda $a b$ del arco generador de la zona y entónces la deformación producida es decreciente desde ambos paralelos a y b hacia el centro de la carta. El mejor procedimiento es el que más hemos detallado, puesto que llevándose sobre la generatriz del cono el desarrollo de la diferencia de latitudes del paralelo que se vá á representar, este paralelo estará más bajo que la sección del cono que lo representa y las longitudes de ambas líneas se aproximarán más á ser iguales. El defecto general de las proyecciones cónicas consiste en que solo miden las verdaderas distancias en sentido de los meridianos.

269. *Proyección cilíndrica ordinaria.*—Si suponemos, (fig. 64), un cilindro circunscrito á la esfera, cuya curva de contacto sea el Ecuador, las generatrices de este cilindro serán tangentes á los meridianos y pueden tomarse como desarrollo de éstos, ó dicho mejor, como representación de dichos meridianos, si bien produciéndose en la carta una deformación decreciente, tanto más sensible cuanto más se aproximen á los polos los puntos considerados; en cambio el desarrollo de los paralelos siendo siempre una línea igual á la del desarrollo del Ecuador, producirá una deformación en sentido creciente.

Al desarrollar este cilindro circunscrito (figura de la carta) obtendremos un rectángulo cuya base es la rectificación del Ecuador y su altura la línea de los polos; las rectas $P P'$ y $E E'$ que dividen la carta en cuatro porciones iguales, representan dicha línea de polos y el mencionado Ecuador desarrollado; una paralela $A B$ á la $E E'$ será el desarrollo de un paralelo, comprobando la figura cuanto hemos dicho acerca de la deformación creciente en

este sentido producida. Análogamente, la recta CD , paralela á PP' , es desarrollo ó representación del semi-meridiano á que en el espacio es tangente, pudiéndose asimismo comprobar que resultará la deformación decreciente.

Para situar un punto en esta proyección, se toma sobre EE' y á partir de H (punto del meridiano central) una longitud Hr igual á la diferencia de longitudes de H y el punto dado; trazando por r la paralela á PP' se obtendrá el meridiano del lugar; tomando sobre este meridiano y á partir de r una magnitud igual á la proyección de la latitud del lugar, se obtendrá el punto R buscado; para encontrar esta proyección, se traza la semi-circunferencia auxiliar XEY , se toma el arco $E\zeta$ igual á la latitud, y la recta $E\zeta' = r$ R dará la proyección pedida.

De todo lo dicho resulta, que en la proyección cilíndrica aparece el terreno deformado, creciendo en sentido de las longitudes y decreciendo en el de las latitudes; y como esta deformación doble es tanto mayor y sensible cuanto más se alejen del Ecuador los límites del terreno, solo para pequeñas zonas á uno y otro lado de dicha línea principal será aplicable con ventaja la proyección cilíndrica.

Puede, sin embargo, quererse aplicar este procedimiento á una zona AB (tercera figura 64) muy alejada del Ecuador; puede conseguirse, substituyendo esta zona por cualquiera de las tres superficies cilíndricas cuyas generatrices sean Aa , Bb ó cc' , bastando ver la figura para comprender el sentido de la deformación que cada una producirá y para comprender que la última es la que dará resultados más conformes con la realidad,

Observación. — Si conservando la representación de los paralelos como queda explicado, se modifica el trazado de los meridianos, de tal modo, que la separación entre los paralelos vaya creciendo á medida que se acercan al polo en una relación inversa de la que expresa la disminución

de los grados de latitud, obtendremos una proyección cilíndrica modificada en que tanto los meridianos como los paralelos seguirán siendo rectilíneos y respectivamente perpendiculares, pero con la ventaja de que las distancias medidas en la carta, y sobre todo las coordenadas guardarán entre sí la misma relación que tienen sobre el globo. Esta modificación, aplicada á las llamadas *cartas marinas* ó *cartas de marear*, constituye la proyección de Mercator, usada por los marinos.

270. *Proyección de Cassini.*—En esencia es una proyección cilíndrica invertida, ideada por Cassini con ocasión del dibujo de la carta de Francia; como, según hemos visto, en la proyección cilíndrica ordinaria, las latitudes resultan disminuidas y las longitudes aumentadas, el primer efecto predominaba con exceso sobre el segundo, pues que Francia se extiende más de N. á S. que de E. á O.

En la modificación de Cassini, el cilindro se circunscribe á lo largo del meridiano central, siendo sus generatrices perpendiculares á la línea de los polos y tangentes á círculos máximos que cortan al Ecuador; el desarrollo se hace abriendo el cilindro por la generatriz opuesta al semiecuador del hemisferio contrario.

La figura 65 indica este sistema de representación; P P es el desarrollo del meridiano central y E E el del Ecuador; toda paralela á la primera línea, tal como la A B, es el desarrollo de un círculo menor paralelo al meridiano principal y la C D paralela á E E representa la rectificación de un círculo máximo perpendicular á dicho meridiano; la simple inspección de la figura hace ver que la deformación decreciente tendrá ahora lugar de E. á O que es donde menos influencia tiene en el caso que dió origen á esta proyección.

271. *Proyección antigua de Flamsteed.*—Es una modificación de la cónica ordinaria que se construye como indica la figura 66; supongamos que A B sea el meridiano

central de la carta; tomemos sobre él y á partir de un punto a que supondremos corresponda al Ecuador, magnitudes $a b, b c, c d$, etc., iguales al desarrollo de un grado de latitud; las perpendiculares á $A B$ levantadas en estos puntos, representan las proyecciones de los distintos paralelos.

Si se quieren determinar meridianos cuya equidistancia sea un número determinado de grados de longitud, se toman en dichas perpendiculares á partir de los puntos $a, b, c, d...$, distancias $a a', b b', c c'...$, iguales al desarrollo de dichos grados de longitud en los distintos paralelos; esto se consigue teniendo en cuenta que las longitudes de estos arcos serán proporcionales á sus radios, y como estos no son otra cosa que los cosenos de sus respectivas latitudes, tendremos:

$$\frac{\text{long.} - D \text{ grados de paralelo}}{\text{long.} - D \text{ grados de ecuador}} = \frac{\cos. L}{\cos. 0 = 1} = \cos. L$$

tomando, pues, una magnitud $a a'$ que con arreglo á escala sea la longitud de D grados de Ecuador, obtendremos la correspondiente de un paralelo por la proporción anterior y uniendo los puntos $a', b', c'...$, que así resultan, se tendrá un meridiano de la carta; para obtener el contiguo basta tomar:

$$a' a'' = a a' \quad b' b'' = b b' \quad c' c'' = c c' \dots$$

y unir los puntos que resulten.

La situación de un punto en esta proyección, se reduce á tomar sobre el meridiano central una magnitud $a x$ igual á la latitud y trazar el paralelo correspondiente $x x'$; tomando sobre este y á partir de x una magnitud $x R$ igual al desarrollo de la longitud deducido de la proporción anterior, se tendrá el punto R pedido.

272. *Proyección de Flamsteed modificada*—El procedimiento anterior tiene el defecto de que las proyec-

ciones de los meridianos no son perpendiculares á los paralelos como sucede en realidad, lo que produce inexactitudes en la situación de los puntos definidos por sus coordenadas.

Se ha modificado esta proyección como indica la figura 67; si M es el paralelo inferior de la carta, trazaremos la tangente M O que es la cotangente de la latitud del paralelo; si con el rádio O M trazamos en la carta un arco indefinido, los concéntricos á éste representarán las proyecciones de los demás paralelos; el rádio O N correspondiente á uno de ellos, se obtiene desarrollando el arco M N sobre la citada cotangente á partir de M.

En cuanto á los meridianos, se trazan por el mismo procedimiento que se ha dicho en la proyección antigua, sin más diferencia que tomar sobre cada arco el valor gradual que corresponda á la longitud apreciada como equidistancia, usando de una proporción análoga á la de la proyección cónica ordinaria. El rádio de cada arco de la carta es evidentemente

$$O N = O M - \text{long. arco } M N = \cot. L - \log. \text{ arc. } M N.$$

y en general menos longitudes sucesivas de los arcos de meridiano desarrollados.

273. *Observación general.*—De lo dicho en todos los sistemas de proyección estudiados, se desprende que en cada uno de ellos entrarán además de los errores de forma inherentes á cada sistema especial, los peculiares á los elementos gráficos de que puede disponerse; de aquí resulta, de conformidad con lo expuesto en otro lugar (2), que cuando los datos deducidos de la observación y del cálculo han de servir solo para el dibujo de un mapa ó carta, no deben extremarse las precisiones so pena de emplear un tiempo y trabajo que resultarán improductivos. En esta diferencia de precisión es en lo que difieren, aparte de su distinto objetivo, las dos ramas en que se divide

la aplicación de la Geodesia. Hemos tendido á compenetrar en lo posible ambas partes, estudiando cada operación con toda la precisión que puede exigir la Geodesia superior, pues es indudable que de este modo puede comprenderse mejor la manera de operar en cada caso.

❧FIN.❧

APÉNDICES.

INTRODUCCIÓN A LOS APÉNDICES.

NO habiendo permitido la índole especial de estas nociones dar desarrollo á todos los cálculos de la Geodesia, hemos esbozado solamente en el texto la marcha que podría seguirse, pasando desde luego á las fórmulas definitivas para deducir de ellas las consecuencias teóricas indispensables; en otros puntos hemos llegado hasta prescindir de las fórmulas por estar fundadas en conocimientos no adquiridos anteriormente por nuestros alumnos; y en otros asuntos importantes hemos delineado brevemente lo que á nuestro objeto convenia más, como sucede, por ejemplo, al estudiar el empleo del nivel de burbuja de aire para la medida de inclinaciones de ejes.

Con el fin de no dejar incompleto este trabajo, para que tanto el alumno estudioso como el profesor que haya de desempeñar la asignatura tengan elementos en este modesto libro para desarrollar los citados cálculos fundamentales y resolver los indicados puntos, si así lo juzga conveniente, hemos añadido los apéndices que siguen:

Por último, deseando dar á este trabajo algún valor práctico en lo sucesivo, añadimos un apéndice

que contiene las principales fórmulas necesarias en el curso de un levantamiento ordinario, haciendo las oportunas llamadas en el texto y conservando, como dijimos en la Introducción, las notaciones empleadas por el Instituto Geográfico, en las «Instrucciones para los trabajos Geodésicos» que hemos consultado frecuentemente en la redacción de estas nociones.



Apéndice número 1.

FORMA PREFERIBLE PARA LOS TRIÁNGULOS DE LA RED.

Representémos por a , b y c , (fig. 68), los tres lados de un triángulo de la red, cuyo lado b sea la base medida directamente. Si al medir los ángulos A y C de este triángulo, cometemos los errores α y γ y llamamos β al que trae consigo cada uno en el ángulo B , es indudable que esta falta de exactitud en los ángulos A y C , producirá en los lados opuestos, errores lineales que designamos por e_a y e_c y que debe tratarse de anular ó reducir á su mínimo valor. Calculemos uno de ellos, e_a por ejemplo, pues por analogía descubriremos las fórmulas correspondientes á e_c .

Pueden ocurrir tres casos principales, según que α y β sean ó nó de un mismo signo y los dos positivos ó negativos.

Primer caso.—Supongamos $\alpha > 0$. $\beta > 0$.

Reemplacémos en la fórmula conocida

$$a \text{ sen. } B = b \text{ sen. } A$$

en vez de B , A y a los valores encontrados, y se tendrá:

$$(a + e_a) \text{ sen. } (B + \beta) = b \text{ sen. } (A + \alpha)$$

y desarrollando esta expresión tendremos:

$$\begin{aligned} & a (\text{sen. } B \cos. \beta + \text{sen. } \beta \cos. B) + \\ & e_a (\text{sen. } B \cos. \beta + \text{sen. } \beta \cos. B) = \\ & b (\text{sen. } A \cos. \alpha + \text{sen. } \alpha \cos. A). \end{aligned}$$

Pero, teniendo en cuenta que α y β no exceden en general de la apreciación del aparato empleado, por lo que serán muy pequeños, se les puede considerar iguales entre

sí y además suponer sus cosenos iguales á la unidad y sus senos iguales á ellos mismos; introduciendo, pues las hipótesis

$$\alpha = \beta, \quad \cos. \alpha = \cos. \beta = 1 \quad \text{sen. } \alpha = \text{sen. } \beta = \alpha''$$

en la fórmula anterior, se obtiene:

$$a \text{ sen. } B + a \alpha \cos. B + e_a \text{ sen. } B + \\ e_a \alpha \cos. B = b \text{ sen. } A + b \alpha \cos. A.$$

Reemplazando a por su valor

$$a = \frac{b \cdot \text{sen. } A}{\text{sen. } B}$$

efectuando operaciones y reducción de términos iguales, resulta:

$$b \alpha \text{ sen. } A \cos. B + e_a \text{ sen.}^2 B + \\ e_a \alpha \text{ sen. } B \cos. B = b \alpha \cos. A \text{ sen. } B$$

y como el término

$$e_a \alpha \text{ sen. } B \cos. B$$

puede considerarse muy pequeño, pues los cuatro factores que lo forman son menores que la unidad y además e_a y α muy pequeños, se reduce la expresión anterior á

$$b \alpha \text{ sen. } A \cos. B + e_a \text{ sen.}^2 B = b \alpha \cos. A \text{ sen. } B$$

de donde se deduce finalmente:

$$e_a = \frac{b \alpha (\cos. A \text{ sen. } B - \text{sen. } A \cos. B)}{\text{sen.}^2 B} = \\ \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen. } (B - A).$$

Análogamente hubiéramos obtenido

$$e_c = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen. } (B - C)$$

De cuyas expresiones, razonando como queda dicho en el texto (9) se desprende la condición de forma equilateral,

$$A = B = C.$$

Segundo caso.—Se supone $\alpha < 0$ y $\beta < 0$. Solo difiere del caso anterior, en que la fórmula de partida es ahora

$$(a + e_a) \text{ sen. } (B - \beta) = b \text{ sen. } (A - \alpha)$$

deduciéndose por transformaciones iguales á las antes citadas

$$e_a = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen. } (A - B)$$

$$e_c = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen. } (C - B)$$

que conducen también á la condición de forma.

$$A = B = C$$

No cambia el signo de e_a en la fórmula inicial con respecto á la del caso anterior, pues que sea positivo ó negativo no depende de α y β sino de que B sea mayor ó menor que A ó C.

Tercer caso.—Se supone $\alpha > 0$ y $\beta < 0$. La fórmula de partida es,

$$(a + e_a) \text{ sen. } (B - \beta) = b \text{ sen. } (A + \alpha)$$

la cual conduce por iguales caminos á las

$$e_a = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen. } (A + B) = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen. } C$$

$$e_c = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen. } (C + B) = \frac{b}{\text{sen.}^2 B} \cdot \alpha \cdot \text{sen. } A$$

de las que ya hemos dicho como se deduce la condición de forma isósceles rectángulo

$$B = 90^\circ. \quad A = C.$$

Si $\alpha < 0$ y $\beta > 0$ las fórmulas finales son las mismas y solo difiere en que la partida es:

$$(a + e_a) \text{ sen. } (B + \beta) = b \text{ sen. } (A - \alpha).$$

Apéndice número 2.

TEORÉMA DE LEGENDRE.

Como en el texto se hacen (46 y 47), todos los razonamientos necesarios en este teorema, nos limitamos en este apéndice á desarrollar todo el cálculo para que de la comparación de ambas cosas se deduzca el estudio completo. Tomamos esta, que creemos buena, idea de la obra escrita con el título de "Curso de Topografía y Elementos de Geodesia,, por el hoy C. Teniente Coronel de Artillería D. Eusebio Sanz y Trigueros, antiguo y distinguido Profesor de esta asignatura en nuestra Academia.

Figura 69. (El cálculo en la hoja adjunta.)

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \cos. c}{\sin. b \sin. c}; \quad a = \frac{\alpha}{R}; \quad b = \frac{\beta}{R}; \quad c = \frac{\gamma}{R}; \quad \sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \dots; \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.3.4} - \dots;$$

$$\begin{aligned} \cos. A &= \frac{1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4.R^4} - \left(1 - \frac{\beta^2}{2R^2} + \frac{\beta^4}{2.3.4.R^4}\right) \left(1 - \frac{\gamma^2}{2R^2} + \frac{\gamma^4}{2.3.4.R^4}\right)}{\left(\frac{\beta}{R} - \frac{\beta^3}{2.3.R^3}\right) \left(\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma^3}{2.3.R^3}\right)} = \\ &= \frac{1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4.R^4} - \left(1 - \frac{\beta^2}{2R^2} + \frac{\beta^4}{2.3.4.R^4} - \frac{\gamma^2}{2R^2} + \frac{\beta^2\gamma^2}{4R^4} + \frac{\gamma^4}{2.3.4.R^4}\right)}{\frac{\beta\gamma}{R^2} - \frac{\beta^3\gamma}{2.3.R^4} - \frac{\beta\gamma^3}{2.3.R^4}} = \frac{\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2R^2} + \frac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{2.3.4.R^4} - \frac{\beta^2\gamma^2}{4R^4}}{\frac{\beta\gamma}{R^2} - \frac{\beta^3\gamma}{2.3.R^4} - \frac{\beta\gamma^3}{2.3.R^4}} = \\ &= \frac{\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2}{2.3.4.R^2}}{\beta\gamma \left(1 - \frac{\beta^2+\gamma^2}{2.3.R^2}\right)} = \left(\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} + \frac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2}{2.3.4.\beta\gamma.R^2} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{\beta^2+\gamma^2}{2.3.R^2}} \right); \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots; \quad \frac{1}{1 - \frac{\beta^2+\gamma^2}{2.3.R^2}} = 1 + \frac{\beta^2+\gamma^2}{2.3.R^2} + \frac{(\beta^2+\gamma^2)^2}{4.9.R^4} + \dots;$$

$$\begin{aligned} \cos. A &= \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} + \frac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2}{2.3.4.\beta\gamma.R^2} + \frac{\beta^4+\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^4-\alpha^2\gamma^2}{3.4.\beta\gamma.R^2} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} + \\ &+ \frac{\alpha^4-\beta^4-\gamma^4-6\beta^2\gamma^2+2\beta^4+4\beta^2\gamma^2-2\alpha^2\beta^2+2\gamma^4-2\alpha^2\gamma^2}{2.3.4.\beta\gamma.R^2} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} + \frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\beta^2\gamma^2-2\beta^2\alpha^2-2\alpha^2\gamma^2}{2.3.4.\beta\gamma.R^2} = \\ &= \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} + \frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\beta^2\gamma^2-2\beta^2\alpha^2-2\alpha^2\gamma^2}{4\beta^2\gamma^2} \times \frac{\beta\gamma}{2.3.R^2}; \quad R = \infty; \quad A \dots A'; \quad \cos. A' = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}; \\ \overline{\sin.}^2 A' &= 1 - \overline{\cos.}^2 A' = 1 - \frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\beta^2\gamma^2-2\beta^2\alpha^2-2\alpha^2\gamma^2}{4\beta^2\gamma^2} = \frac{4\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4+2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2+2\alpha^2\gamma^2}{4\beta^2\gamma^2} = \\ &= \frac{2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\alpha^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{4\beta^2\gamma^2}; \quad \cos A = \cos. A' - \frac{\overline{\sin.}^2 A' \cdot \beta\gamma}{2.3.R^2}; \quad S = \beta\gamma \frac{\sin. A'}{2}; \quad \cos. A = \cos. A' - \frac{S}{3.R^2} \sin. A'; \end{aligned}$$

$$\sin. \frac{S}{3.R^2} = \frac{S}{3.R^2}; \quad \cos. \frac{S}{3.R^2} = 1; \quad \left(\frac{e}{3}\right)'' = \text{arc. sen.} \left(\frac{S}{3.R^2}\right); \quad \frac{S}{3.R^2} = \text{sen.} \left(\frac{e}{3}\right)''; \quad \cos. \left(\frac{e}{3}\right)'' = 1.$$

$$\cos. A' = \cos. A' \times 1 - \sin. A' \cdot \text{sen.} \left(\frac{e}{3}\right)'' = \cos. A' \cdot \cos. \left(\frac{e}{3}\right)'' - \sin. A' \cdot \text{sen.} \left(\frac{e}{3}\right)'' = \cos. \left(A' + \left(\frac{e}{3}\right)''\right) \quad A = A' + \left(\frac{e}{3}\right)'';$$

$$A - A' = \frac{e}{3}; \quad B - B' = \frac{e}{3}; \quad C - C' = \frac{e}{3}; \quad A + B + C = A' + B' + C' + e = 180^\circ + e; \quad e = A + B + C - 180^\circ.$$

Apéndice número 3.

MEDICIÓN DE UN ARCO DE MERIDIANO Ó PARALELO TERRESTRE.

Al comenzar este trabajo hemos dicho (I), que la Geodesia superior tiene por objeto determinar con la mayor exactitud posible, la verdadera forma y dimensiones de la Tierra. Para conseguir este objeto científico, se llevan á cabo, por los centros en cada nación creados á este objeto, (en España, el Instituto Geográfico), grandes triangulaciones geodésicas de primer orden, formando cadenas á lo largo de los meridianos y paralelos terrestres convenientemente distanciados; estas triangulaciones se ejecutan por separado y se unen luego por trabajos combinados internacionales, como el de la unión de España y Argelia poco tiempo há efectuada. En estos trabajos se busca en las operaciones prácticas y en los cálculos de gabinete, la mayor precisión que sea dable alcanzar en el estado actual de los conocimientos geodésicos y con el auxilio de esos aparatos tan precisos que los adelantos de la mecánica y la industria han puesto al servicio de la ciencia.

Estas triangulaciones sirven para determinar la longitud de un grado de meridiano bajo diversas latitudes, y la de un grado de paralelo en distintas longitudes geográficas; así se puede llegar á conocer con gran exactitud los desarrollos que corresponden á cada paralelo y meridiano lo que unido á los estudios sobre la intensidad de la gravedad en múltiples estaciones y otras no menos importantes, permitirán calcular los elementos verdaderos del elip-

soide terrestre, como son, entre otros, las verdaderas longitudes de sus ejes y la dimensión real del achatamiento en los polos.

Este ligero bosquejo permite formarse idea algo exacta de la misión reservada á la Geodesia superior; y con el fin de acrecentar esta idea, dentro de los límites restringidos en que forzosamente se ha de encerrar nuestro trabajo, vamos á exponer someramente la marcha general que se sigue en la medición de un arco de meridiano ó paralelo.

Medición de un arco de meridiano.—Sea A B, (fig. 70), el arco que se quiere medir, entre dos puntos de antemano elejidos y partiendo del punto A. Si tomamos este punto como vértice de origen de una red de triángulos de primer órden A D C, D E C, E F D,, H L B, elejidos con arreglo á las condiciones que para esta clase de vértices se han fijado en otro lugar (6 y 12), y los preparamos para las observaciones angulares (18, 19 y 20), podremos medir por el procedimiento de reiteración todos los ángulos de esta red, extremando las precauciones para que los errores de observación sean mínimos; tomando por base el lado A C, por ejemplo, se le medirá con la mayor exactitud, empleando el aparato más preciso y la mayor escrupulosidad en las correcciones de temperatura é inclinación y en los cálculos relativos á su reducción al nivel del mar; esta última operación debe ser precedida de la determinación precisa de la latitud del punto A, de su altitud y del azimut de la dirección tomada como base, lo que permite de paso hallar la dirección del trozo de meridiana A M y la situación del punto M.

Efectuando con los ángulos medidos la compensación de errores, previo el cálculo de direcciones más probables y convertidos en planos los triángulos esféricos de la red, por la aplicación del teorema de Legendre, se podrán calcular todos los elementos lineales de la cadena, llevando estos cálculos al límite de precisión convenido.

Resueltos todos los triángulos pueden también resolverse los parciales $M A C$, $D N C$, $P E N$,..., $H S D$, previamente dibujados en escala conveniente y con los datos de la red y dirección del primer trozo de meridiana que por comprobación ha de pasar por el punto B , fijo en el plano por sus coordenadas y su relación de triángulo con los vértices inmediatos H y L ; estos triángulos parciales dan la longitud de los trozos $A M$, $M N$,..., $S B$ de meridiano, cuya suma dará la longitud total del arco $A B$; como en cada trozo se conoce el error medio y el probable cometido, se puede determinar asimismo ambos errores para el total de la medición.

Si se restan ahora las latitudes de los puntos extremos A y B , se conocerá el número de grados de meridiano á que corresponde la longitud encontrada, y por lo tanto, se deducirá la que le corresponde á un grado de meridiano á la latitud media entre A y B , por una simple división.

Pero este método, que puede dar bastante precisión, tiene el inconveniente de exigir una figura ó dibujo hecho con gran exactitud en la que se pueda ir viendo cuáles son los elementos que entran conocidos en cada triángulo parcial que hay que resolver.

Por esta razón se toma como procedimiento más científico y más exacto, el que sigue: elejida la cadena de triángulos; medidos y calculados sus elementos angulares y lineales, como asimismo los azimutes de las diversas líneas y las coordenadas de los vértices, se calcula la longitud de la proyección sobre la meridiana, de la parte $A C E G L B$ por un lado y de la $A D F H B$ por otro; con esto se obtienen dos valores para la longitud del arco $A B$ que sobre dar comprobación uno á otro, permiten deducir por su promedio el valor definitivo. La longitud correspondiente á cada grado se determina como antes.

Medición de un arco de paralelo.—Se emplea el segundo método que se acaba de estudiar, formando la

cadena de triángulos á lo largo del paralelo eijido. La doble proyección de la cadena dá por su promedio la longitud del arco buscada; conocida la diferencia de longitudes geográficas entre los extremos del arco medido; se determinará análogamente al caso anterior, la longitud de paralelo correspondiente á cada grado de longitud geográfica.



Apéndice número 4.

TIEMPOS MEDIO Y VERDADERO; FÓRMULA DE MAYER.

Tiempo verdadero.—El movimiento de los astros ha dado la idea racional para la medida del tiempo verdadero; y se ha tomado principalmente el Sol para esta medida, por ser el astro más fácilmente observable y en el que con más sencillez puede encontrarse sus momentos de paso por los meridianos celestes.

Se dá el nombre de *día verdadero*, al intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos del Sol verdadero por el meridiano de un mismo lugar. La expresión del día verdadero en función del día sideral, ó sea del tiempo constante que tarda una estrella en pasar dos veces por el mismo meridiano, puede hallarse fácilmente; sean, (fig. 71, lámina 7), EE , ee y PP' respectivamente el Ecuador celeste, la eclíptica y la línea de los polos celestes; si un día determinado suponemos que el Sol S y la estrella E , están comprendidos á un tiempo en el mismo meridiano PE , P' , como el Sol adelanta en su movimiento aparente en la eclíptica, al día siguiente se verificará que el meridiano considerado pasará antes por la estrella E , que por el Sol S' , y por lo tanto, el día verdadero será mayor que el sideral con quien era igual el anterior; la cantidad en que uno excede á otro la mide el arco DD que es la variación en ascensión recta que sufre el Sol al pasar de S á S' , por lo que se tendrá:

$$24^{h.v} = 24^{h.s} + \frac{\alpha}{360} \cdot 24^{h.s}$$

siendo α esta variación en ascensión recta.

Vemos, pues, que los días verdaderos se componen de una parte comun y constante, $24^{h.s}$, y de otra parte $\frac{\alpha}{360} \cdot 24^{h.s}$ que si fuera también constante produciría la igualdad de los días verdaderos.

Pero la fracción $\frac{\alpha}{360}$ no es constante, porque α , ó sea la variación diurna en ascensión recta, no lo es; en efecto, se demuestra en astronomía que, suponiendo el movimiento del Sol verdadero en la eclíptica perfectamente uniforme, no lo serían sus variaciones en ascensión recta; pero como tampoco es uniforme dicho movimiento, pudiera parecer que esto podría modificar la ley y hacer uniforme dicha variación en ascensión recta; ahora bien, las proyecciones sobre el ecuador de los caminos recorridos por el Sol en la eclíptica, disminuyen hacia los puntos equinocciales y aumentan hacia los solsticiales, y para que con estas bases pudieran resultar uniformes las variaciones en ascensión recta, sería preciso que el movimiento del Sol fuese acelerado hacia los equinoccios y retardado hacia los solsticios y precisamente el cálculo y la observación prueban que si bien el movimiento del Sol es retardado hacia el solsticio de estío, en cambio es acelerado y con la aceleración máxima en el Solsticio de invierno. Resulta, pues, de estas breves consideraciones que no siendo uniformes las variaciones diurnas del Sol verdadero en ascensión recta, no son iguales entre si los días verdaderos; esto trae consigo graves inconvenientes en el empleo usual del tiempo solar verdadero, y ha dado origen al empleo del llamado tiempo medio.

Tiempo medio.—Por las razones antes dichas, han

ideado los astrónomos la existencia de un Sol imaginario, llamado *Sol medio*, cuyo movimiento se liga con el *Sol ficticio*, (llamando así al que recorriese la eclíptica con movimiento uniforme) por medio de las condiciones siguientes:

1.^a El Sol medio describe el ecuador con movimiento uniforme.

2.^a Se encuentra en los equinoccios al mismo tiempo que el Sol ficticio.

Y 3.^a Tarda en describir el ecuador el mismo tiempo que el Sol ficticio en recorrer la eclíptica.

Como la órbita asignada á este Sol medio es el ecuador que recorre con movimiento uniforme y sobre esta línea se cuentan las ascensiones rectas, se deduce:

1.^o Las declinaciones del Sol medio son nulas.

2.^o Sus variaciones diurnas en ascensión recta son constantes.

Se llama *día medio* el tiempo transcurrido entre dos pasos sucesivos del Sol medio por el meridiano de un lugar; se le expresará en función del día sideral, por la fórmula:

$$24^{h.m} = 24^{h.s} + \frac{\alpha'}{360} \cdot 24^{h.s}$$

y como según lo dicho α' es constante, resultan los días medios iguales entre sí, y por lo tanto, de cómoda y sencilla aplicación en los usos de la vida práctica. Por esta razón, el tiempo medio es el que marcan los relojes ordinarios y á este tiempo se arreglan todas las cuestiones prácticas de la vida oficial y privada de las naciones.

Mas como en los cálculos astronómicos es preciso muchas veces hallar el tiempo verdadero conocido el medio y viceversa, vamos á estudiar ligeramente la relación que liga entre sí á ambas clases de tiempo.

Ecuación del tiempo.—Sean M y V, (fig. 72), las posiciones simultáneas en la eclíptica del Sol ficticio y del

verdadero; si describimos desde γ como polo el arco $M m$, en el punto m obtendremos la posición correspondiente del Sol medio, verificándose por la misma construcción

$$\gamma m = \gamma M$$

ó sea, puesto que

$$\gamma m = \text{ascensión recta media} = R_m$$

$$\gamma M = \text{longitud media} = L_m$$

sustituyendo

$$R_m = L_m$$

Proyectando el punto V sobre el ecuador en ν , el arco $\gamma \nu$ medirá la ascensión recta verdadera.

Se llama *ecuación del tiempo*, á la diferencia entre $\gamma \nu$ y γm ó sea entre las ascensiones rectas verdadera y media, y se determina por la expresión:

$$\varepsilon = R_\nu - R_m = R_\nu - L_m$$

cuyos datos son perfectamente conocidos en un momento cualquiera, por serlo también el movimiento aparente del Sol verdadero.

La ecuación del tiempo es nula cuatro veces al año; dos en primavera, 15 de Abril y 14 de Junio; una en estío, 31 de Agosto y una en invierno, 24 de Diciembre; el mayor valor de la ecuación del tiempo en cada período, es de $14^m 32^s$ el 11 de Febrero; $3^m 52^s$ el 14 de Mayo; $6^m 12^s$ el 26 de Julio y $16^m 19^s$ el 2 de Noviembre. En vista de estos datos, se deduce, que el mediodía medio es ántes del verdadero de Diciembre á Abril y de Junio á Agosto, lo que corresponde á un retardo ó aumento en la hora verdadera; y en cambio el mediodía medio es después del verdadero desde Abril á Junio y desde Agosto á Diciembre; esto puede servir para conocer en las conversiones de tiempo verdadero en medio y viceversa cual ha de ser el signo en la corrección.

Debe tenerse en cuenta que en los datos anteriores, hemos expresado la ecuación del tiempo en minutos y segundos de éste, cuando según su definición debía serlo en minutos y segundos de arco; pero como su empleo ha de ser en tiempo, se hace la conversión á razón de 15^0 por hora, $15'$ por minuto y $15''$ por segundo.

Tiempo medio en función del verdadero — Por los razonamientos anteriores, hemos deducido:

$$I^{d.v} = I^{d.s} + \frac{\alpha}{360} I^{d.s} = I^{d.s} + \text{variación en } R_v$$

$$I^{d.m} = I^{d.s} + \frac{\alpha'}{360} I^{d.s} = I^{d.s} + \text{variación en } R_m$$

Sustituyendo en el día verdadero el valor del día sideral, sacado de la segunda ecuación, se tiene:

$$I^{d.v} = I^{d.m} + \text{variación de } R_v - \text{variación de } R_m.$$

Y si suponemos, (fig. 73), que la línea $Q Q'$ representa el ecuador y m y ν la posición del Sol medio y proyección del verdadero en el día considerado, al día siguiente, cuando el meridiano pase por el Sol medio, m habrá venido á m' y ν á ν' ; por lo tanto, $m m'$ será la variación en ascensión recta media y $\nu \nu'$ en ascensión verdadera; hallando su diferencia, según indica la fórmula anterior, añadiendo y restando $m' \nu$, tendremos:

$$\begin{aligned} \nu \nu' - m m' &= \nu \nu' - m m' - m' \nu + m' \nu = (\nu \nu' + m' \nu) - \\ &\quad - (m m' + m' \nu) \end{aligned}$$

ó sea, efectuando operaciones

$$\nu \nu' - m m' = m' \nu' - m \nu$$

y como $m \nu$ es la ecuación del tiempo del día verdadero considerado y $m' \nu'$ la correspondiente al día siguiente, la diferencia $m' \nu' - m \nu$ en la variación diurna de la ecuación del tiempo; representando $m' \nu'$ por ϵ' y $m \nu$ por ϵ se obtiene:

variación R_v — variación $R_m = \varepsilon' - \varepsilon$
y la fórmula del día verdadero, será:

$$I^{d.v} = I^{d.m} + (\varepsilon' - \varepsilon)$$

expresada esta diferencia en tiempo medio.

En la práctica, cuando se quiere hallar la ecuación del tiempo en un momento cualquiera, siendo H_m y H_v las horas media y verdadera simultáneas, se hace uso de la expresión:

$$\varepsilon = H_m - H_v$$

de donde se deduce:

$$H_m = H_v + \varepsilon$$

que es la fórmula que hemos dado en el texto. (III)

Esta fórmula se deduce de la misma figura 73, considerando que si P P' representa, en un momento cualquiera, el meridiano del lugar, y m y v las posiciones simultáneas del Sol medio y proyección del verdadero, se tendrá: (II3)
Angulo horario de Sol = hora sideral — ascensión recta,
y sustituyendo los elementos de la figura

$$H_m = \gamma H - \gamma m$$

$$H_v = \gamma H - \gamma v$$

y como la ecuación del tiempo es

$$\varepsilon = \gamma v - \gamma m = m v$$

se tendrá:

$$\varepsilon = m v = H v - H m = H_v - H_m$$

Para conocer en cada día la ecuación del tiempo, debe consultarse en las Tablas del Sol que para París comprende el "Connaissance des Temps", la casilla encabezada "Temps moyen á midi vrai".

Ejemplo.—En un lugar cuya longitud geográfica y

tiempo medio es conocido, se quiere hallar el tiempo verdadero simultáneo.

Sea, por ejemplo, calcular la hora verdadera que en Segovia correspondió (1) á las diez de la mañana (tiempo medio) del 2 de Marzo de 1882.

Se tienen los datos siguientes:

Longitud de Segovia (Meridiano de París.)... $6^{\circ} - 27' - 18''$. O.

Ecuación del tiempo en París... $0^h - 12^m - 19^s$

Como la fecha indicada corresponde á la época en que el mediodía verdadero adelanta al medio, habrá que restar la ecuación del tiempo; además la longitud, reducida á tiempo, es

$$0^h, 25^m, 49^s$$

y como es occidental habrá que sumarla á la hora media; luego obtendremos:

$$\begin{array}{rcl} \text{hora media.} & \dots\dots\dots & 10^h - 0^m - 0^s \\ \text{longitud reducida.} & \dots\dots\dots + & 0 - 25 - 49 \\ & & \hline & & 10^h - 25^m - 49^s \\ \\ \text{ecuación del tiempo.} & \dots\dots\dots - & 0 - 12 - 19 \\ & & \hline \text{hora verdadera.} & \dots\dots\dots = & 10^h - 13^m - 30^s \end{array}$$

Procediendo de un modo análogo, se podría pasar de la hora verdadera á la media, utilizando para ello la columna de las tablas citadas que dice "Temps vrai á midi moyen".

Tiempo sideral.—*Fórmula de Mayer.*—Ya hemos dicho en el texto (II2), que la uniformidad del movimiento de rotación de la esfera celeste, ha sugerido la idea de contar el tiempo por el transcurrido entre dos pasos consecutivos de una misma estrella por un meridiano cual-

(1) Se dice *correspondió* porque hemos usado las tablas del año 1882.

quiera; obteniéndose así el llamado *día sideral* de 24 horas del cual hemos hecho uso en las fórmulas anteriores.

Hemos dicho también la razón porque se ha tomado como origen del día sideral, el paso por el meridiano del origen de ascensiones rectas ó punto vernal del equinoccio de primavera (Aries); y en fin, hemos definido lo que se entiende por círculo y ángulo horarios de una estrella y cual es su papel en la determinación de una hora sideral.

Recordados estos principios y teniendo en cuenta la aplicación que se ha de hacer de ella en la determinación de una diferencia de longitudes (Capítulo 6.^o), vamos á exponer los fundamentos de la fórmula de Mayer, que sirve para encontrar el estado de adelanto ó retraso de un péndulo, por las observaciones de estrellas de coordenadas celestes conocidas.

Fórmula de Mayer. — Sabemos (105), que la ascensión recta de un astro es el arco de ecuador celeste comprendido entre el punto vernal del equinoccio de primavera y el pie de la declinación (105) del mismo astro. Y como, por otra parte, sabemos que la hora sideral está ligada con el ángulo horario y la ascensión recta, por la relación

$$h_s = a \pm R,$$

es evidente, que cuando la estrella pase por el meridiano, se tendrá:

$$a = 0$$

y por lo tanto

$$h_s = R$$

Por otra parte, si el eje de rotación del anteojo con que se observa fuera perfectamente horizontal y el eje óptico, además de estar sin colimación, coincidiese en azimut con la verdadera línea N. S.; y en fin, si el péndulo marcase el tiempo exacto sin adelanto ni retraso, es evidente que se tendría, designando por T el tiempo de la obser-

vación en el momento del paso por el hilo medio ideal:

$$R = T$$

Mas como esto no se verifica, debe modificarse la expresión anterior, introduciendo en ella las correcciones siguientes:

- 1.^a Por estado del reloj, que llamaremos ΔT .
- 2.^a Por inclinación del eje de rotación que deberá coincidir ó ser paralelo al horizonte del lugar.
- 3.^a Por la colimación del eje óptico.
- 4.^a Por el azimut del indicado eje.

Además se introducirá la corrección por aberración diurna de la luz, ó sea, de la influencia que la velocidad de la luz combinada con la de la Tierra ejerce sobre la posición aparante de un astro en la bóveda celeste.

Como el estado del reloj ΔT es generalmente desconocido, y en cambio la ascensión recta del astro está determinada en los catálogos de estrellas, ΔT es la verdadera incógnita del problema cuando la fórmula se aplica á conocer la hora sidereal exacta. Mas, por ahora, supondremos conocido este dato, como igualmente las correcciones absolutas a , b , c , por azimut, inclinación y colimación, determinadas como se ha dicho en el texto (209 á 212).

Para obtener la fórmula modificada y completa, supongamos, (fig. 74), que sea Z el zénit del observador, P el polo, $H H'$ el horizonte y $C O$ la verdadera línea Este-Oeste. Representémos por $A C A'$ el eje de rotación del anteojo, inclinado sobre el horizonte el ángulo $m C A = b$ y cuyo azimut hacia el N. O. es el ángulo $m C O = a$.

Si consideramos trazado el círculo máximo $I a' K$ perpendicular á $A A'$ este plano pasará evidentemente por el hilo medio, supuesto sin colimación. Sea a' la posición de la estrella en este hilo; trazando el círculo menor $a' a''$ paralelo al Ecuador, $a' a''$ marcará el camino que ha de recorrer la estrella para llegar al meridiano; llamando δ la

declinación de la estrella y P el ángulo horario correspondiente á las posiciones a' y a'' , se tendrá:

$$P = \frac{a' a''}{\cos. \delta}$$

puesto que el ángulo tiene por medida la relación del arco al radio del círculo menor y este radio es el coseno de la declinación, según puede fácilmente comprobarse en la figura.

Tracemos el círculo máximo ZI que corta en o al arco $a' a''$ y unamos K con C ; podemos notar que CK es perpendicular á CA , y por lo tanto, que el ángulo ZCK ó el arco ZK es igual á la inclinación b . Asimismo se vé, que siendo el plano $Ia'K$ y el del horizonte ambos perpendiculares al ZKA , su intersección IC también lo será, y por lo tanto, $ICm = 90^\circ$ y como HCO también lo es, el ángulo $Z = HCI = Ocm = a$, representará la desviación azimutal del anteojo meridiano.

Por otra parte, de la figura se deduce:

$$a' a'' = a' o + a'' o$$

y considerando á $a'' o$ como arco perpendicular á $a'' Z$ en a'' , se tendrá el triángulo esférico rectángulo $a'' o Z$ en el cual

$$\text{sen. } a'' o = \text{sen. } Zo \times \text{sen. } Z$$

y como, según hemos visto, $Z = a$ y además llamando φ á la latitud del lugar, se tiene:

$$Zo = \varphi - \delta$$

se obtendrá, sustituyendo,

$$\text{sen. } a'' o = \text{sen. } (\varphi - \delta) \times \text{sen. } a$$

y por la pequeñez relativa de $a'' o$ y de a

$$a'' o = \text{sen. } (\varphi - \delta) \times a.$$

Como el punto I es polo del arco ZK , se tendrá:

$$a' o = Z K . \cos . Z o = b \cos . (\varphi - \delta)$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación que dá el valor de P, se obtiene:

$$P = a . \frac{\text{sen.} (\varphi - \delta)}{\cos. \delta} + b \frac{\cos. (\varphi - \delta)}{\cos. \delta}.$$

Y, como, suponiendo que no hay colimación ni atraso del reloj, es evidente que por ser

$$T = h_s = P \pm R$$

se tiene, (prescindiendo del signo de las correcciones)

$$R = T + P$$

obtendremos en definitiva

$$R = T + a . \frac{\text{sen.} (\varphi - \delta)}{\cos. \delta} + b . \frac{\cos. (\varphi - \delta)}{\cos. \delta}.$$

Y, por último, aumentando las correcciones que faltan por estado del reloj, colimación y aberración diurna

$$\begin{aligned} R = x = T + \Delta T + a . \frac{\text{sen.} (\varphi - \delta)}{\cos. \delta} + b . \frac{\cos. (\varphi - \delta)}{\cos. \delta} + \\ + \frac{c}{\cos. \delta} - 0^s,021 \frac{\cos. \varphi}{\cos. \delta} = T + \Delta T + a . \frac{\text{sen.} (\varphi - \delta)}{\cos. \delta} + \\ + b . \frac{\cos. (\varphi - \delta)}{\cos. \delta} + \frac{c - 0^s,021 . \cos. \varphi}{\cos. \delta} \end{aligned}$$

que es la fórmula completa de Mayer empleada en la determinación de una diferencia de longitudes.

La fórmula que se usa para la corrección por aberración diurna, es:

$$x = 0^s,021 \times \cos. \varphi . \sec. \delta = 0^s,021 \times \frac{\cos. \varphi}{\cos. \delta}.$$

Apéndice número 5.

DETERMINACIÓN DEL NIVEL MEDIO DE LOS MARES.

El conocimiento del nivel medio de los mares en determinada región, es de gran importancia en los trabajos geodésicos para encontrar las altitudes reales, con respecto al mar, de todos los puntos que forman las líneas de la nivelación de precisión. En España existen dos estaciones de estudio instaladas en Alicante y en Santander, y se sigue en ambas el procedimiento de observación que vamos á estudiar lijaramente.

El fundamento de la observación es el siguiente; por un procedimiento mecánico adecuado se consigue que un trazador, que obedece á las fluctuaciones del nivel de las aguas, marque, (fig. 75), una curva $h_1 h' H h_2$, referida á un sistema coordenado rectangular $h o t$, cuyos ejes son: el de abscisas $o t$, correspondiente á los tiempos de observación, y el de ordenadas $o h$, las alturas variables del nivel simultáneas con dichos tiempos. Con esta curva, conocemos: 1.º la altura mínima $t' h'$ del nivel y hora $o t'$ correspondiente: 2.º altura máxima $T H$ y tiempo $o T$ á que corresponde: 3.º variación total del nivel entre los tiempos anotados ó en el transcurso del día.

De esta curva puede también deducirse el nivel medio del día, muy sencillamente y del modo que sigue: por procedimiento analítico ó con el empleo de un planímetro, se determina el área encerrada entre el eje de abscisas $t_1 t_2$, la curva $h_1 h_2$ trazada por el aparato y las ordenadas ex-

tremas h_1 , t_1 y h_2 , t_2 correspondientes á los tiempos inicial y final de la observación; si se calculan ahora, la altura del rectángulo que teniendo por base la parte de eje de abscisas t_1 , t_2 , fuese equivalente al área anterior, es evidente que dicha altura representaría la media de todas las ordenadas, ó lo que es igual, el nivel medio buscado; ahora bien, es asimismo evidente que dividiendo el área antes encontradas con los planímetros, por la longitud del eje t_1 , t_2 , obtendremos de una vez la altura del rectángulo equivalente. Tal es, en resumen, el fundamento teórico de la determinación que nos ocupa.

Para obtener este resultado, se dividen los trabajos en dos partes: 1.^a observaciones prácticas; 2.^a cálculo de dichas observaciones. La primera parte se realiza con auxilio de los aparatos llamados *mareógrafos*; la segunda, corresponde á los trabajos de gabinete y se efectúa con los datos obtenidos en la observación. Indicaremos cada una de estas dos partes.

Parte práctica. Descripción, estudio preliminar y uso de los mareógrafos.—El mareógrafo de Adié, representado en sus detalles esenciales en la figura 76, consiste en un flotador hueco F, unido á una cadena C que pasa por una polea R de periferia dentada, para que los movimientos verticales del flotador se transmitan á la polea sin que haya resbalamiento en la cadena; al otro extremo de esta, pende un contrapeso P que sirve para asegurar esta transmisión y cambio de movimiento. Al mismo eje de la polea vá unida otra r , en cuya garganta se arrolla un cordón metálico h , unido por un extremo á la armadura de un lapicero l , que puede desplazarse, marcando una línea horizontal, para lo que vá entre dos guías horizontales g y g' ; otro cordón h' provisto de un contrapeso p' se une al lapicero y sirve para arreglar la tensión del primer cordón. La punta del lápiz se apoya siempre, por su propio peso, sobre un cilindro c de eje horizontal, que gira por medio

de un aparato de relojería M, empleando 24 horas en una revolución completa.

Se comprende, con lo expuesto, la manera de funcionar el aparato; cuando el flotador sube, la polea dentada R gira y con ella la r ; el cordón h se desarrolla y el lápiz avanza por la acción del contrapeso p' ; si el flotador baja, las poleas giran en sentido contrario y el lápiz se mueve en dirección opuesta á la anterior por la tracción del cordón h , que venciendo la acción del contrapeso, se arrolla á la polea r .

Sobre el cilindro giratorio se arrolla una hoja de papel cuadriculado al centímetro, y la punta del lápiz, apoyándose constantemente en el papel, marca una línea curva cuyas ordenadas en sentido de las generatrices corresponden á la variación del nivel de las aguas, y cuyas abscisas (que son los desarrollos de la parte correspondiente de sección recta) corresponden á los tiempos de la observación; el desarrollo de la sección del cilindro mide $1^m,20$.

Es evidente, que representando por H la altura del mar sobre el nivel de partida ó referencia y por h la longitud de la línea correspondiente trazada por el lápiz, se tendrá, siendo R y r los radios de las poleas respectivas:

$$\frac{h}{H} = \frac{r}{R}$$

de donde

$$H = h \cdot \times \frac{R}{r}$$

La relación $\frac{R}{r}$ es conocida de antemano y en los aparatos instalados en España, vale 3,97 en Alicante y 5,102 en Santander; por este número hay, pues, que multiplicar las ordenadas de la curva para obtener las variaciones de las aguas.

Al instalar el aparato, deben determinarse sus constan-

tes ó valores fundamentales, á saber: 1.^a determinación de la escala, ó sea, relación entre los radios de las poleas; 2.^a variación por inercia, en los cambios de movimiento; 3.^a determinación del cero del trazador ó línea de referencia de la curva.

Primera constante.—Es preciso determinarla, pues que por ella se han de multiplicar las ordenadas para obtener las alturas del nivel; al mismo tiempo, esta determinación comprueba la constante proporcionalidad entre las variaciones del flotador y las distancias recorridas por el lápiz. Para ello, se instala provisionalmente el mareógrafo sobre una mesilla de altura conveniente, colocando el flotador en un depósito de agua cuyo nivel se pueda variar á voluntad por medio de llaves de desagüe y de alimentación y cuyas variaciones se conozcan por un tubo indicador graduado, situado en el exterior del depósito y en comunicación con él.

Detenido el giro del cilindro que lleva la hoja de papel, se hace variar en cantidades conocidas el nivel del depósito y se observan y miden las líneas marcadas por el lápiz; esta operación, repetida un cierto número de veces, sirve para probar la constancia de proporcionalidad y su valor de relación dá la magnitud de la escala. Puede obtenerse el mismo resultado sin necesidad de depósito de agua, haciendo pasar por la polea cantidades determinadas de cadena y midiendo los desplazamientos del lápiz.

Segunda constante—Variando alternativamente en más y en menos el nivel del agua en el depósito, puede estudiarse si el lápiz obedece ó nó con precisión á estas variaciones de movimiento; generalmente se encuentra una pequeña diferencia, esto es, que al cambiar de sentido el movimiento del flotador, hay una cierta porción de recorrido que no acusa el lápiz, lo que es debido á la inercia de los distintos órganos del aparato; esta diferencia en más ó en menos se determina por numerosas experien-

cias y proporciona la corrección que debe introducirse en las alturas máxima y mínima observadas para obtener las verdaderas.

Tercera constante.—La determinación del cero del lápiz, y por lo tanto de la línea de referencia (que es la sección recta del cilindro, que pasa por este cero) sirve para referir los puntos de la curva á una línea que permita acusar las variaciones del nivel crecientes ó decrecientes.

Este cero, es la posición que corresponde sobre el papel á la punta del lápiz, cuando una señal fija en la cadena pasa á la altura de la mesilla que sustenta el mareógrafo; este punto de la cadena se elije de manera que la punta del lápiz marque el cero próximamente en el centro del papel; conocido el nivel del agua necesario para obtener este cero, se hace una nivelación muy precisa para enlazar dicho nivel con un punto fijo instalado en el mismo edificio del mareógrafo y próximo á él; por último, este punto fijo se enlaza con uno bien elegido en el mismo puerto y éste á su vez con el vértice más próximo de la nivelación de precisión, quedando así intimamente ligadas ambas partes, nivelación y nivel medio del mar.

Instalación y marcha.—El mareógrafo se instala definitivamente de manera que el flotador se sumerja en un pozo puesto en comunicación con el mar por medio de una tubería de mediano diámetro, con objeto de que sobre el flotador no ejerza gran influencia el oleaje y movimiento superficial del agua exterior.

El reloj que hace marchar al cilindro, tiene ordinariamente cuerda para ocho días y debe procurarse que marche acorde con la hora local.

El cambio del papel se hace cada veinticuatro horas, generalmente á las doce del día, y este cambio debe efectuarse rápidamente para no perder indicaciones del trazador; se tendrá siempre preparados un lápiz y una hoja de

repuesto para caso de accidente impensado durante las veinticuatro horas; el grueso de la línea que marque el lápiz indicará la presión de este y servirá para regularla.

Si por cualquier evento, una misma hoja de papel hubiese de servir varios días, se emplearán lápices de distintos colores, anotando la fecha á que corresponde cada color.

Las hojas del mareógrafo se remiten cada diez días al centro encargado de efectuar los cálculos, anotando en cada una el encargado del mareógrafo, el estado del mar y demás indicaciones particulares que juzgue de importancia, referentes al día de la observación.

Parte segunda.—Cálculo del nivel medio.—Estos cálculos se efectúan sobre la misma hoja del mareógrafo, valiéndose de las indicaciones de la curva y del fundamento de la operación, llenándose las casillas del formulario adjunto, (página 221 bis.) (1), por medio de las operaciones siguientes:

Casilla núm. 1.—Es la fecha del día de la observación.

Casilla núm. 2.—Corresponde á la superficie medida por dos caminos y á su promedio tomado como definitivo.

La evaluación de esta superficie se hace como sigue: sea rs , (fig. 77), la curva marcada por el trazador; paralelamente á la línea central de referencia y distando de ella un número exacto de centímetros, se trazan dos líneas ab y cd que dejen la curva entre ellas y de los extremos r y s de la curva se bajan las perpendiculares ar y bs á dichas paralelas; así se obtienen dos superficies desiguales $arbs$ y $crds$ que se evalúan separadamente con un planímetro, inscribiendo el valor de la superficie $crds$ en la columna secundaria encabezada *1.ª medición*; mul-

(1) Acompañamos este formulario, único en el texto, por creer que la serie de operaciones numéricas necesarias se aprenderán y comprenderán mejor con él á la vista.

tiplicando sus dimensiones $c d$ y $a c$ se obtiene el área del rectángulo $a b c d$ y restando de ella la encontrada para la superficie $a r b s$ se obtendrá un nuevo valor que debe diferir poco del anteriormente hallado para la $c r d s$ y que se inscribe en la columna encabezada *2.ª medición*; el promedio de estos dos valores da el definitivo del área $c r d s$ que se inscribe en la columna *Promedio*.

Casilla núm. 3.—Como la revolución del cilindro tarda 24 horas en ser completa y la sección recta del cilindro tiene de desarrollo $1^m, 20$, tenemos así los tiempos reducidos á longitud, ó sea la base del rectángulo que ha de dar la altura media.

Casilla núm. 4.—Efectuando la división del área promedio, por el tiempo en longitud (casillas 2 y 3) se obtiene, conforme hemos dicho al empezar, la altura u ordenada media del trazador.

Casilla núm. 5.—El número obtenido en la anterior, es la ordenada media contada desde la base $c d$ del rectángulo; para referirla á la línea central que contiene al cero del trazador, debe sumársele algébricamente la distancia entre estas dos líneas; esta distancia, evaluada sobre la hoja de papel, forma el número que se inscribe en la casilla 5.^a

Casilla núm. 6.—Es el resultado de la suma citada y constituye el verdadero nivel medio.

Las casillas que siguen no hacen realmente referencia al nivel verdadero, más que en la reducción de escala y referencia al punto fijo; en lo demás se estudian las alturas máxima y mínima de cada día, horas á que tuvieron lugar y variación diurna del nivel; hé aquí ahora la explicación de cómo se forma.

Casilla núm. 7.—Los números situados en las casillas secundarias de *altura*, tanto máxima como mínima, resultan de medir con toda escrupulosidad las ordenadas $x' y'$ y $x'' y''$ que les corresponden; en cuanto á las horas

en que tuvieron lugar y figuran en las casillas encabezadas *horas*, se determinan del modo siguiente; se mide la abscisa $x x'$ ó $x x''$ correspondientes y se reducen á tiempo, por la proporción

$$\frac{x x'}{t} = \frac{1^m \cdot 20}{24}$$

de donde

$$t = \frac{x x' \cdot 24}{1 \cdot 20} = 2^h \cdot 6^m \text{ (por ejemplo).}$$

Añadiendo á este tiempo la hora á que empezó la observación, se tendrá la hora del día á que tuvo lugar la altura observada; el tiempo es el medio astronómico que se cuenta de 0 á 24 á partir de las doce del día y como á esta hora empieza la observación, se tendrá:

$$\text{hora de observación} = 0^h + 2^h \cdot 6^m = 2^h \cdot 6^m$$

Casilla núm. 8.—Lleva inscrito el valor de la escala de reducción ó relación de los radios de las poleas.

Casilla núm. 9.—Comprende los productos de las ordenadas media, máxima y mínima por la escala, para obtener los desplazamientos reales del flotador.

Casilla núm. 10.—Lleva inscrito el valor de la cota que corresponde al nivel del agua cuando el trazador marca el cero, con respecto al punto fijo elegido en el edificio.

Casilla núm. 11.—Contiene la corrección que, por inercia de los órganos del aparato, (segunda constante) hay que introducir en los valores anteriores para obtener los verdaderos.

Casilla núm. 12.—Dá los valores verdaderos del nivel máximo y mínimo, sobre el nivel de referencia y se obtienen combinando por suma algébrica los números de las casillas 9, 10 y 11.

Ejemplo sacado del formulario:

$$\begin{aligned}\text{altura máxima} &= + 0,8240 - 6,295 + 0,031 = \\ &= 0,8550 - 6,295 = - 5,4400\end{aligned}$$

Casilla núm. 13.—Dá la oscilación diurna, combinando por resta los dos últimos números de la casilla anterior.

$$- 5,4400 + 7,6496 = + 2,2096.$$

Casilla núm. 14.—Indica, por los datos remitidos desde el mareógrafo, el estado del mar el día de la observación.

Finalmente, de estos cálculos se deducen promedios mensuales, trimestrales y anuales para el estudio de las variaciones y deducción del nivel medio tipo.



FORMULARIO PARA EL CÁLCULO DEL NIVEL MEDIO DEL MAR.

1	2			3	4	5	6	7				8	9			10	11	12			13	14
DÍA.	SUPERFICIES MEDIDAS.			Tiempo em-pleado. — Abcisa.	Cociente.	Distancia de la base de la superficie á la línea de referencia.	Altura media. — Suma.	ALTURAS EXTREMAS DE LA CURVA				Valor de un metro en el dibujo. — (1) Escala.	PRODUCTOS.			Altura del agua cuando el trazador pasa por el centro del papel. (2)	Corrección para las alturas máxi-mas. (2)	ALTURAS DEL AGUA SOBRE EL PUNTO DE COMPARACIÓN.			Oscilación	Estado del mar.
	Primera medición.	Segunda medición.	Promedio.					MÁXIMA.		MÍNIMA.			MEDIA.	MÁXIMA.	MÍNIMA.			MEDIA.	MÁXIMA.	MÍNIMA.		
	m.c.	m.c.	m.c.					HORA.	ALTURA	HORA.	ALTURA		m.	m.	m.			m.	m.	m.		
1	0,293140	0,295935	0,293037	1.200	+0.247	—0,30	—0,053	7-24	+16,15	0—54	—26,55	5,102	—0,2704	+0,8240	—1,3545	—6,295	+0,031	—6,5654	—5,4400	—7,6496	2,2096	Calma.

Unidades. $\pm$ (m.c)... metros cuadrados. $\pm$ (m)... metros. $\pm$ (h.m)... horas minutos. $\pm$ (c.m)... centímetros y milímetros.

(1) Se pone la escala del mareógrafo de Santander. En el de Alicante, es 3,97.

(2) Los datos anotados en estas casillas, se refieren al mareógrafo de Santander.



Apéndice número 6.

FÓRMULAS PARA EL EMPLEO DEL NIVEL DE BURBUJA.

La fórmula

$$r = \frac{1}{4} n'' [(a' + a'') - (a_1 + a_2)]$$

encontrada como se ha dicho en otro lugar (224), y usada por el Instituto Geográfico en sus *Instrucciones para los trabajos geodésicos*, es solo utilizable para el caso en que las inclinaciones que deban medirse sean tales, que el punto medio del arco del nivel, lleve ó no el cero, salga fuera de la burbuja en las distintas posiciones en que dicho nivel se coloque. Pero dicha fórmula no sirve para los casos en que el citado punto medio quede siempre entre los extremos de la burbuja, ni dá tampoco el valor que corresponde á la falta de igualdad en la altura de los apoyos del nivel cuando este descansa sobre un eje horizontal ó inclinado.

Para completar lo que se refiere al manejo del nivel de burbuja, vamos á estudiar las fórmulas empleadas en los casos en que la primera no sirve, suponiendo el cero de la graduación del nivel bien sea en el punto medio del arco, ó bien en el extremo izquierdo (que es lo normal y general).

Primer caso.—El cero en el punto medio.—Partirémos de la base de que la verticalidad del eje principal del aparato está conseguida, y se trata de medir la inclinación del eje horizontal M N, (fig. 78), alrededor del cual gira el antejo; esta inclinación se considera positiva cuando el

muñón de la derecha N, resulta más elevado, como indica la figura.

Se supone además que el nivel no está rectificado, es decir, que su base $a b$ forma con la recta M N un ángulo x que también se quiere determinar.

En la primera posición del nivel (I de la figura) siendo o , el cero de la graduación y G y D las graduaciones correspondientes á los extremos derecho é izquierdo de la burbuja, el ángulo $x \zeta y$ representa la inclinación verdadera del eje M N y el $o \zeta x$ el error del nivel. Representando por B el número de divisiones que abarca la mitad de la burbuja, se tiene:

$$O D = y D + x y + o x$$

$$- O G = - (y G - G o) = - (y G - o x - x y)$$

ó multiplicando por -1 la segunda igualdad y sustituyendo valores:

$$\left. \begin{aligned} D &= B + y + x \\ G &= B - y - x \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

En la segunda posición del nivel (II) se tendrá, análogamente:

$$O' D' = y' D' + o' y' = y' D' + y' x' - o' x'$$

$$- O' G' = - (y' G' - o' y') = - (y' G' - x' y' + o' x')$$

y sustituyendo los valores simbólicos

$$\left. \begin{aligned} D' &= B + y - x \\ G' &= B - y + x \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Combinando por suma, dos á dos, las igualdades (1) y (2) se obtiene:

$$D + D' = 2 B + 2 y$$

$$G + G' = 2 B - 2 y$$

y restando estas, miembro á miembro,

$$(D + D') - (G + G') = 4 y$$

de donde

$$y = \frac{1}{4} [(D + D') - (G + G')] \quad (3)$$

Restando las dos igualdades (1) por una parte y las (2) por otra, se deduce:

$$D - G = 2x.$$

$$D' - G' = -2x.$$

que restadas á su vez, dan:

$$(D - G) - (D' - G') = 4x$$

de donde,

$$x = \frac{1}{4} [(D - G) - (D' - G')]$$

que dá á conocer el error x del nivel.

Comparando la fórmula (3) con la empleada en el texto y encabeza este apéndice, se vé que de esta puede deducirse la (3) sin más que cambiar a'' y a_2 por $-a''$ y $-a_2$ puesto que queda cada extremo de la burbuja á distinto lado del origen.

Segundo caso.—El cero en el extremo izquierdo.—El cero ocupa el punto m y se designa por M la parte de arco comprendida entre el cero y el punto medio o .

En la primera posición del nivel (I), se tiene:

$$MD = my + yD = mo + ox + xy + yD$$

$$mG = my - yG = mo + ox + xy - yG$$

ó sea, sustituyendo valores:

$$\left. \begin{aligned} D &= M + x + y + B \\ G &= M + x + y - B \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

En la segunda posición del nivel (II) se deduce:

$$m'D' = m'o' - o'D' = m'o' + o'x' - x'y' - y'D'$$

$$m'G' = m'o' + o'G' = m'o' + o'x' - x'y' + y'G'$$

ó sustituyendo

$$\left. \begin{aligned} D' &= M + x - y + B. \\ G' &= M + x - y - B. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Combinando por sustracción dos á dos las fórmulas (4) y (5), producen:

$$\begin{aligned} D - D' &= 2y + 2B \\ G' - G &= -2y + 2B \end{aligned}$$

y restando estas

$$(D - D') - (G' - G) = 4y$$

de donde

$$y = \frac{1}{4} [(D - D') - (G' - G)] \quad (6)$$

Combinando por suma las citadas igualdades (4) y (5)

$$\begin{aligned} D + D' &= 2M + 2x \\ G + G' &= 2M + 2x \end{aligned}$$

que sumadas á su vez, dan:

$$(D + D') + (G + G') = 4M + 4x$$

de donde

$$x = \frac{1}{4} [(D + D') + (G + G')] - M$$

que dá, como en el caso anterior, el error del nivel.

Para obtener los valores graduales de y y de x , basta multiplicar las cuatro fórmulas encontradas, por el número n de segundos á que equivalga cada división del nivel.

Observación.—Si la inclinación del MN fuese en sentido contrario, los valores de y , dados por las expresiones (3) y (6) serian negativas, pues que evidentemente se tendría:

$$\left. \begin{aligned} \text{Para la (3)... } D + D' &< G + G'. \\ \text{Para la (6)... } D - D' &< G' - G. \end{aligned} \right\} \text{ y de ambas } y < 0.$$

Si la graduación del nivel es anormal solo varía la cuestión en que γ será positivo ó negativo en los casos inversos de cuando lo era antes, lo que se concibe fácilmente sin más que suponer el cero en el extremo derecho y consultar las figuras I y II de la 58.



Apéndice número 7.

FÓRMULAS PRÁCTICAS NECESARIAS EN UN LEVANTAMIENTO,
NO COMPRENDIDAS EN EL TEXTO.

LETRA A.

Fórmulas para calcular las latitudes, diferencias de longitudes y azimutes aproximados, partiendo de los valores conocidos de un primer punto. Párrafos del texto 63 á 65.

$$\text{Latitud} \dots L' = L - P.K.\cos.Z - Q.K^2\text{sen.}^2Z.$$

$$\text{Longitud} \dots M' = M - \frac{R.K.\text{sen.}Z}{\cos.L'}.$$

$$\text{Azimut} \dots Z' = 180^\circ + Z - (M - M')\text{sen.}\frac{1}{2}(L + L')$$

En cuyas fórmulas, P, Q y R vienen dados por las expresiones siguientes:

$$R = \frac{(1 - e^2.\text{sen.}^2L)^{\frac{1}{2}}}{E \text{ sen. } l''}.$$

$$P = R(1 + e^2.\cos.^2L).$$

$$Q = P.R.\text{tang.}L.\frac{\text{sen.}l''}{2}.$$

En estas expresiones E y e^2 son, respectivamente, el semieje mayor y el cuadrado de la excentricidad del clip-

sóide de hipotético, cuyos valores, calculados por Struve, son:

$$E = 6378298^m, 3... \quad \log. E = 6,80470482.$$

$$e^2 = 0,00677436... \quad \log. e^2 = \bar{3},83086828.$$

Y, por fin, en todas estas fórmulas, las letras que entran en ellas, representan:

L, M y Z.... la latitud, longitud y azimut conocidos del punto de partida.

L', M' y Z'.... los mismos datos del vértice que se calcula.

K.... longitud de la línea que une ambos vértices, conocida por los cálculos anteriores de la red.

Existen calculadas tablas que dán los valores de P, Q y R de cinco en cinco minutos para los 8º de latitud que comprende la Península; cuando la latitud conocida no esté en las tablas se hallan los valores por interpolación entre los correspondientes á las latitudes de la tabla, que comprendan á la dada.

LETRA B.

Fórmulas para reducir una base al nivel del mar.—
Párrafos del texto 101 á 102.

Conservando las notaciones del Instituto Geográfico, esta fórmula es:

$$L - l = \frac{L \cdot a_m}{R_L} \left(1 - \frac{a_m}{R_L} \right)$$

en la que representan

L longitud de la línea medida.

l longitud reducida al nivel del mar.

a_m altitud media de la línea medida.

R_L radio de curvatura terrestre correspondiente á la latitud y azimut de L.

Este valor de R_L viene dado por la fórmula

$$R_L = \frac{G_\alpha}{3600 \cdot \text{sen. } 1''}$$

en que G_α es la longitud de un grado del círculo máximo de la tierra en la dirección α , azimut de la base.

Y, por fin, el valor de G_α necesario, lo dá la expresión

$$G_\alpha = G_M + (G_p - G_M) \text{sen.}^2 \alpha$$

en la que G_m es la longitud de un grado de meridiano á la latitud media de L y G_p el de un grado de círculo máximo perpendicular al meridiano.

LETRA C.

Fórmulas para la orientación de una base por observaciones al Sol.—Párrafos del texto 126 á 133.

(a) En la determinación precisa de la latitud, se convierten en meridianas las distancias zenitales extrameridianas, por la fórmula:

$$\zeta - \zeta = \frac{\cos. \varphi \cos. \delta}{\text{sen. } \frac{1}{2} (\zeta + \zeta)} \times \frac{2 \text{sen.}^2 \frac{1}{2} t}{\text{sen. } 1''}$$

En cuyo primer miembro ζ y ζ representan las distancias zenitales extrameridiana y meridiana cuya conversión quiere efectuarse.

En el segundo miembro representan:

- ζ distancia zenital extrameridiana.
 ζ " " meridiana deducida del instante de culminación.
 δ declinación del Sol.
 φ latitud aproximada, previamente calculada como se dice en el texto.
 t horario del Sol, igual á la hora de la observación corregida de estado, menos la ascensión recta del Sol.

(b) Para calcular con precisión el estado del reloj, se hace uso de la fórmula

$$\cos. t = \frac{\cos. \zeta - \text{sen. } \varphi \text{ sen. } \delta}{\cos. \varphi \cos. \delta}$$

cuyo fundamento teórico puede verse en el texto, en el párrafo II6, y en la que representan

- ζ la distancia zenital observada.
 φ la latitud precisa.
 δ la declinación del Sol.
 t el horario buscado del astro, del cual se ha de deducir la hora que debía marcar el péndulo por su combinación con la ascensión recta.

(c) Y, en fin, para calcular el azimut del Sol que ha de reducir al meridiano las graduaciones horizontales obtenidas en las punterías al Sol, en el momento de la orientación propiamente dicha, se emplean las fórmulas

$$\text{tang. } \frac{1}{2}(a+q) = \text{tang. } \frac{1}{2}t \times \frac{\text{sen. } \frac{1}{2}(\varphi+\delta)}{\cos. \frac{1}{2}(\varphi-\delta)}$$

$$\text{tang. } \frac{1}{2}(a-q) = \text{tang. } \frac{1}{2}t \times \frac{\cos. \frac{1}{2}(\varphi+\delta)}{\cos. \frac{1}{2}(\varphi-\delta)}$$



En las que φ , δ y t representan los mismos valores antes expresados; a el azimut buscado del astro y q el ángulo de posición del Sol que no es preciso conocer por las razones dichas en otro lugar (132).

LETRA D.

Fórmulas para la determinación de una latitud geográfica. —Párrafos del texto (184 á 202).

(a) Por observaciones extrameridianas de la Polar. Se usan las expresiones:

$$\zeta - \zeta = \frac{\cos. \varphi \cdot \cos. \delta}{\text{sen. } \frac{1}{2}(\zeta - \zeta)} \times \frac{2 \text{sen.}^2 \frac{1}{2} t}{\text{sen. } 1''}$$

$$\cos. t = \frac{\cos. \zeta - \text{sen. } \varphi \text{sen. } \delta}{\cos. \varphi \cos. \delta}$$

cuya significación queda dicha en la letra C (a) y (b).

(b) Por observaciones en el primer vertical.

Para determinar, como dato preparatorio, la hora y distancia zenital á que tendrá lugar el paso de cada estrella por el primer vertical, se usan las expresiones

$$\cos. 15t = \frac{\text{tang } \delta}{\text{tang. } \varphi} \quad \cos. \zeta = \frac{\text{sen. } \delta}{\text{sen. } \varphi}$$

en las que t y ζ son, respectivamente, el horario y la distancia zenital de la estrella en el momento del paso; δ su declinación y φ un valor aproximado de la latitud conocido por cualquiera de los métodos anteriores.

Hallado el valor de t (positivo al O. y negativo al E.) y conocida la ascensión recta α , se tendrá el tiempo sidéreo

reo del paso por la expresión $\alpha + t$; este tiempo debe diferir del marcado por el cronómetro en el momento del paso por el hilo central, solo en el estado, de antemano conocido, de dicho instrumento.

Efectuadas las observaciones, se halla un valor de la latitud para cada hilo y par de observaciones oriental y occidental, usando sucesivamente las fórmulas que siguen:

$$u = \frac{1}{2}(s_2 - s_1).$$

$$v = \frac{1}{2}(s_2 + s_1) - \frac{1}{2}(s^0_2 + s^0_1).$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(s^0_2 + s^0_1) - \alpha.$$

$$\tan. \varphi' = \tan. \delta. \sec. u. \sec. v. \cos. \lambda.$$

y, en fin,

$$\varphi = \varphi' + \frac{1}{2}(b_2 + b_1).$$

En las cuales las letras representan:

s_2 y s_1 los tiempos sidéreos de los pasos *oriental* y *occidental* de la estrella por el mismo hilo.

s^0_2 y s^0_1 los tiempos de ambos pasos de la misma estrella por el hilo central.

α y δ las coordenadas de la estrella en el momento de la observación.

b_2 y b_1 las inclinaciones del eje de rotación del antejo, correspondientes á cada posición del círculo empleada, determinadas por el nivel y precedidas del signo $+$ si el muñón del N. es el mas elevado, y del signo $-$ en el caso contrario.

Debe notarse que en la fórmula que ha de dar el valor de $\tan. \varphi'$ se emplearán logaritmos de siete cifras decimales.

LETRA E.

Fórmulas para hallar el estado del péndulo en la determinación de una diferencia de longitudes. — Párrafos del texto (208 á 215).

La fórmula que sirve para hallar dicho estado del péndulo, es la de Mayer.

$$\alpha = T + \Delta T + a \cdot \frac{\text{sen.}(\varphi - \delta)}{\text{cos.} \delta} + b \cdot \frac{\text{cos.}(\varphi - \delta)}{\text{cos.} \delta} + \frac{c - 0^s,021 \text{cos.} \varphi}{\text{cos.} \delta} \quad (\text{X})$$

cuyo fundamento se ha explicado detalladamente en el apéndice número 4 y en la que representan:

T..... tiempo señalado por el péndulo en el instante de la observación.

ΔT estado, que se busca, de dicho péndulo.

α y δ coordenadas de la estrella observada.

φ latitud geográfica del lugar.

a, b y c ... coeficientes de corrección por azimut, inclinación y colimación, que se determinan, según se dice en el texto, por los grupos de fórmulas que siguen:

Determinación de b (inclinación del eje de rotación).

$$\text{Grupo } (a_1) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad b_1 = \beta_1 - \frac{\frac{1}{2} (\beta_1 - \beta_2) \text{sen.} q}{\text{sen.} p + \text{sen.} q} \\ (2) \quad b_2 = \beta_2 + \frac{\frac{1}{2} (\beta_1 - \beta_2) \text{sen.} q}{\text{sen.} p + \text{sen.} q} \end{array} \right.$$

En las que:

β_1 y β_2 ... representan las *inclinaciones aparentes* del nivel, no corregido, en las posiciones inversas del anteojo.

b_1 y b_2 ... las *inclinaciones absolutas* correspondientes.

$2p$ y $2q$... los ángulos de las horquillas ó colgantes del nivel y las muñoneras del eje de rotación.

En la fórmula fundamental (X) se sustituirá por b , el valor b_1 ó b_2 correspondiente á la posición del anteojo y nivel empleada.

Determinación de c. (Colimación del eje óptico.)— Grupo (b_1).

(I) $c = V \left(\frac{l_1 + l_2}{2} - l_0 \right) \dots$ Para el procedimiento de punterías á un objeto definido; siendo en esta fórmula, V valor en segundos de una vuelta del tornillo micrométrico del ocular.

l_1 y l_2 .. lecturas en el tambor correspondientes á las punterías en posiciones inversas del anteojo.

l_0 lectura del tambor correspondiente al hilo ideal.

(2) $c = b - \frac{D}{2} \dots$ Para el procedimiento de observaciones nadirales, representando:

b inclinación medida con el nivel, antes y después de las enfilaciones.

D distancia angular entre el hilo y su imagen.

$$(3) \begin{cases} c = \frac{T_2 - T_1}{2} \cos. \delta + \frac{b_2 - b_1}{2} \cos. (\varphi - \delta) \dots \text{paso superior.} \\ -c = \frac{T_2 - T_1}{2} \cos. \delta + \frac{b_2 - b_1}{2} \cos. (\varphi + \delta) \dots \text{paso inferior.} \end{cases}$$

Para el procedimiento de observación de pasos de una estrella circumpolar en posiciones inversas, en esta fórmula representan:

T_1 y T_2 .. los tiempos de las observaciones señalados por el péndulo y reducidos al hilo ideal.

b_1 y b_2 .. inclinaciones del eje en ambas posiciones.

φ ... latitud del lugar.

δ ... declinación de la estrella observada.

Determinación de a. (Azimut del eje óptico).—

Grupo (c_1).

Por el procedimiento de observaciones de pasos de dos estrellas, una circumpolar y otra ecuatorial, empleando las fórmulas que siguen:

(1) Si ambos pasos son superiores:

$$a = [(\alpha_2 - \alpha_1) - (T_2 - T_1)] \frac{\cos. \delta_1 \cdot \cos. \delta_2}{\cos. \varphi \cdot \sin. (\delta_1 - \delta_2)}.$$

(2) Si el primer paso es superior y el segundo inferior:

$$a = [(12^h + \alpha_2 - \alpha_1) - (T_2 - T_1)] \frac{\cos. \delta_1 \cdot \cos. \delta_2}{\cos. \varphi \cdot \sin. (\delta_1 + \delta_2)}.$$

(3) Si el primer paso fué inferior y el segundo superior:

$$a = [(\alpha_2 - \alpha_1 - 12^h) - (T_2 - T_1)] \frac{-\cos. \delta_1 \cdot \cos. \delta_2}{\cos. \varphi \cdot \sin. (\delta_1 + \delta_2)}.$$

En todas ellas, representan:

α_1 y α_2 Las ascensiones rectas de las estrellas primera y segunda observadas.

δ_1 y δ_2 las declinaciones de las mismas.

T_1 y T_2 los tiempos de los pasos, referidos al hilo ideal y corregidos de inclinación y colimación.

φ la latitud del lugar.

FIN DE LOS APÉNDICES.

NOTA FINAL.

BIBLIOGRAFÍA.

INSTITUTO GEOGRÁFICO.—*Instrucciones para los trabajos Geodésicos.*

INSTITUTO GEOGRÁFICO.—*Memorias.* (Tomos I á 6.)

FRANCŒUR — *Geodésie.*

PERRIER.—*Notes sur les appareils et les méthodes d'observation.*

SALNEUVE.—*Topografia y Geodesia.*

SANZ.—*Curso de Topografia y elementos de Geodesia.*

DUBOIS.—*Cours d'Astronomie.*

IBAÑEZ.—*Nuevo aparato de medir bases geodésicas.*

LÉHAGRE.—*Cours de Topographie et de Geodesie.*

VARIOS.—*Catálogos ilustrados de instrumentos de Topografia y de Geodesia.*

VOREPIERRE.—*Dictionnaire universel illustré.*

PUCCI.—*Fondamenti di Geodesia.*

ÍNDICE.

	PÁGINAS.
INTRODUCCIÓN.....	III
PRÓLOGO.....	V
<i>Capítulo primero.</i> —Plan general de un levantamiento geodésico.....	7
<i>Capítulo segundo.</i> —Id. íd. íd. (Conclusión).....	27
<i>Capítulo tercero.</i> —Medida precisa de una base..	47
<i>Capítulo cuarto.</i> —Determinación del azimut de una línea.....	70
<i>Capítulo quinto.</i> —Medida de los ángulos.=Corrección y compensación de errores.....	90
<i>Capítulo sexto.</i> —Determinación práctica de coordenadas geográficas.....	123
<i>Capítulo séptimo.</i> —Nivelación geodésica por distancias zenitales.=Nivelación de precisión...	145
<i>Capítulo octavo.</i> —Exposición de los varios sistemas de proyecciones.....	176
<i>Apéndice núm. 1.</i> —Forma preferible de los triángulos.....	197
<i>Apéndice núm. 2.</i> —Teorema de Legendre.....	200
<i>Apéndice núm. 3.</i> —Medición de un arco de meridiano ó paralelo.....	201
<i>Apéndice núm. 4.</i> —Tiempos medio y verdadero. =Fórmula de Mayer	205
<i>Apéndice núm. 5.</i> —Nivel medio de los mares...	216
<i>Apéndice núm. 6.</i> —Fórmulas del nivel.....	225
<i>Apéndice núm. 7.</i> —Fórmulas prácticas.....	230
BIBLIOGRAFÍA.....	239

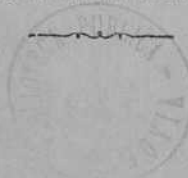


Fig.^a 1.

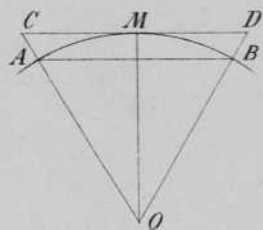


Fig.^a 2.

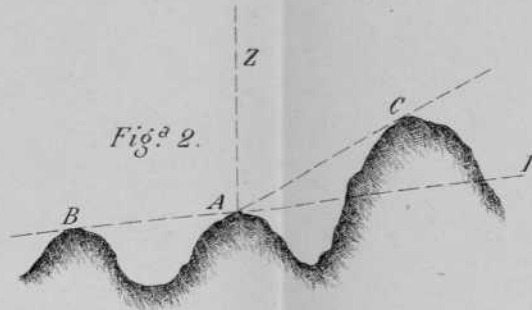


Fig.^a 3.

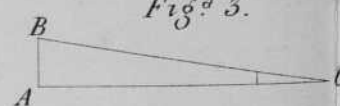


Fig.^a 4.

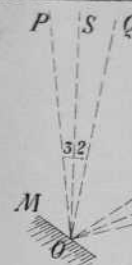
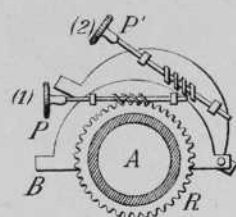
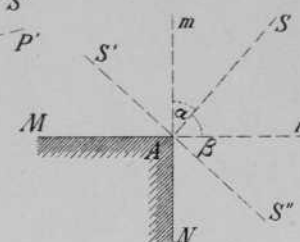


Fig.^a 5.



Corte por XY

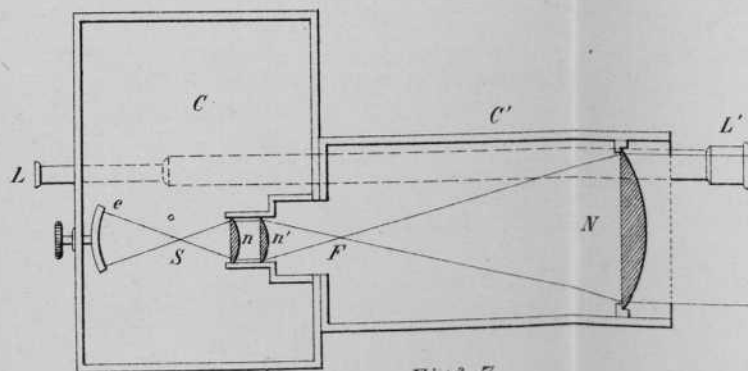
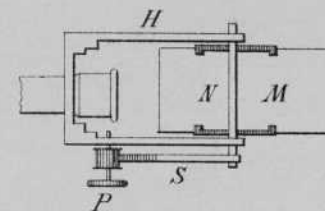
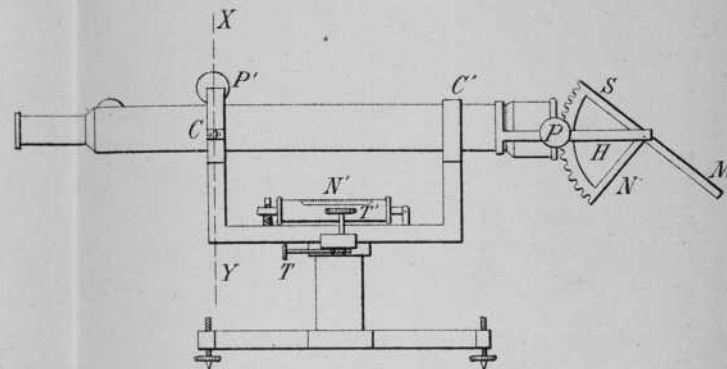


Fig.^a 7.

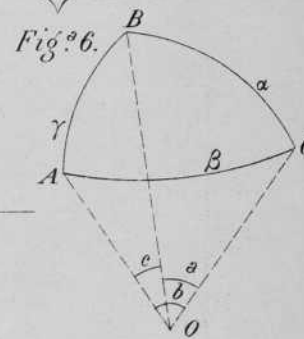


Fig.^a 8.

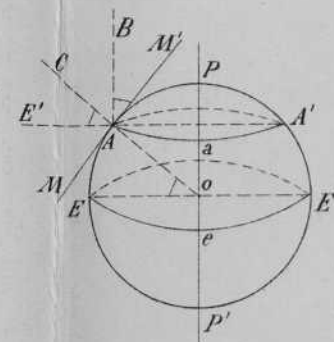


Fig.^a 9.

Fig.^a 10.

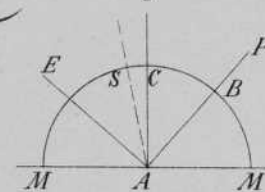


Fig.^a 11.



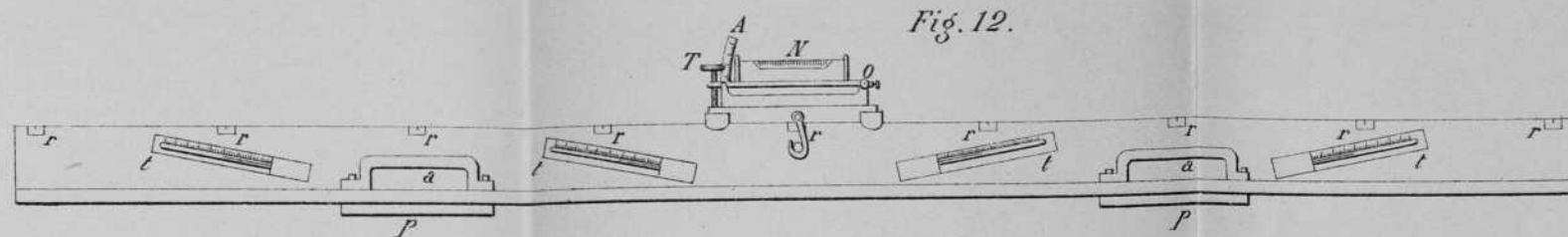


Fig. 12.

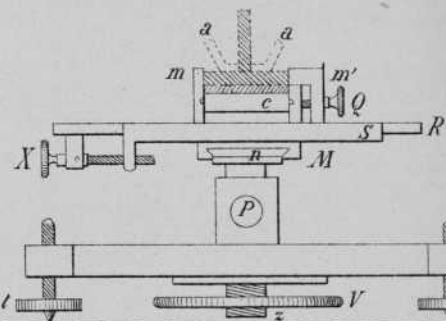
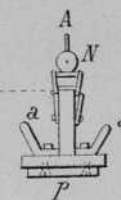


Fig. 13.

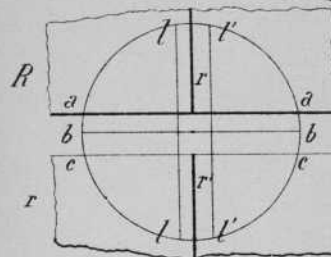
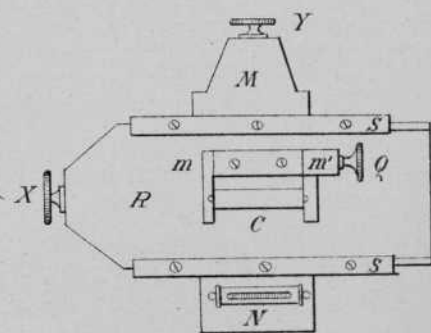


Fig. 14.

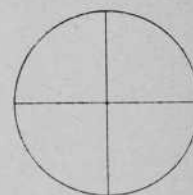
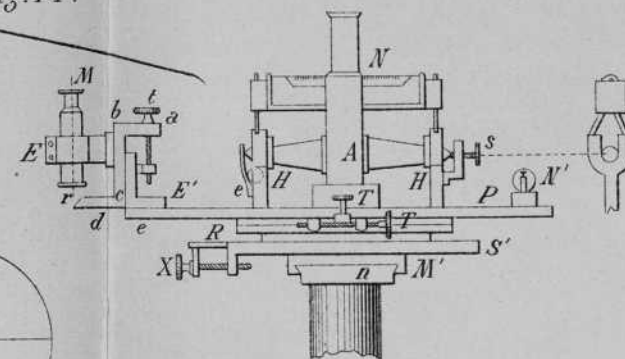


Fig. 17.

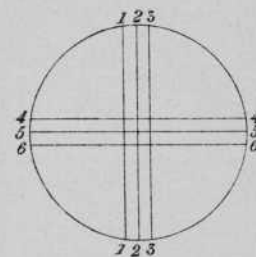


Fig. 18.

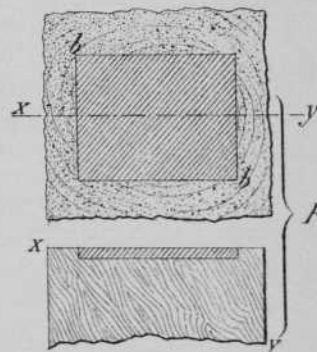


Fig. 19.

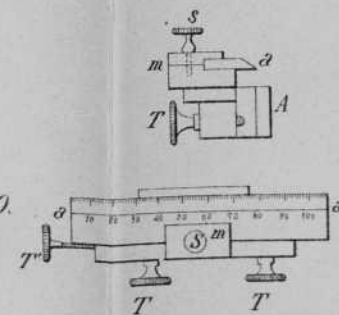


Fig. 20.

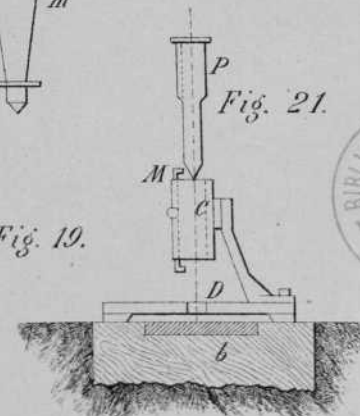


Fig. 21.

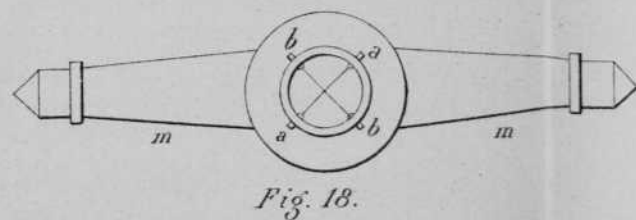
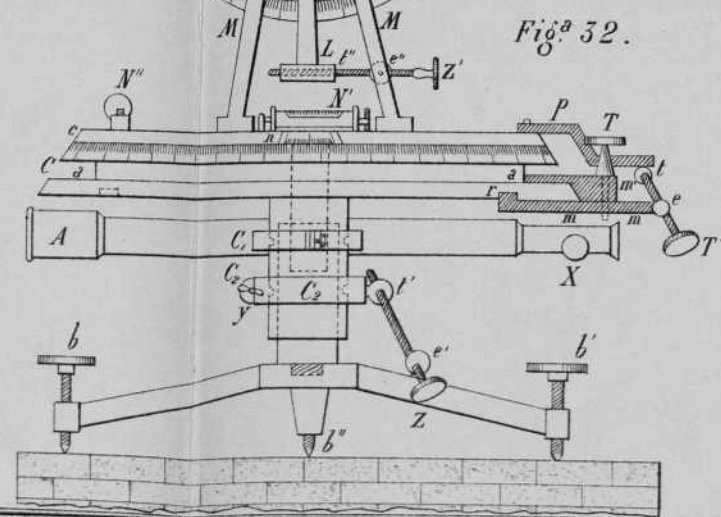
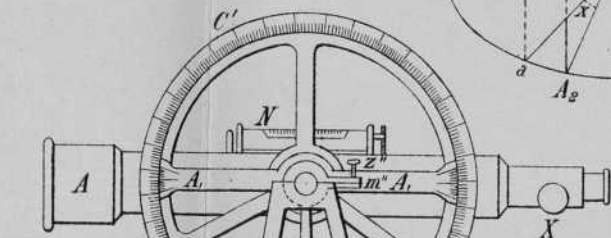
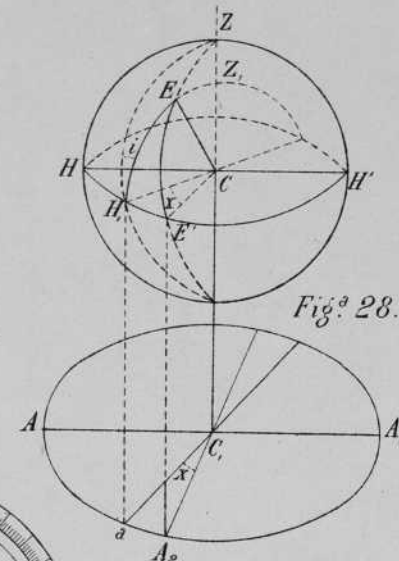
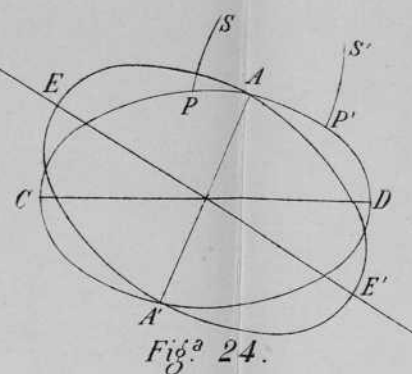
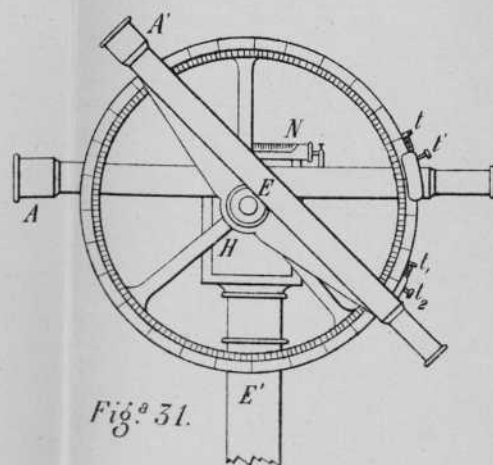
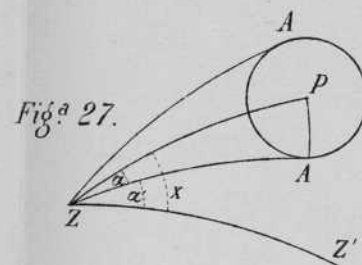
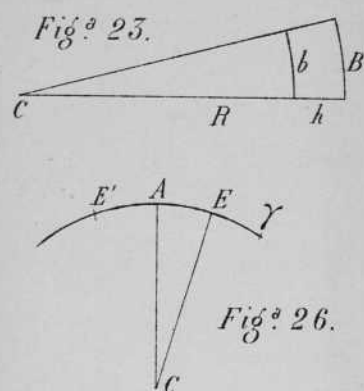
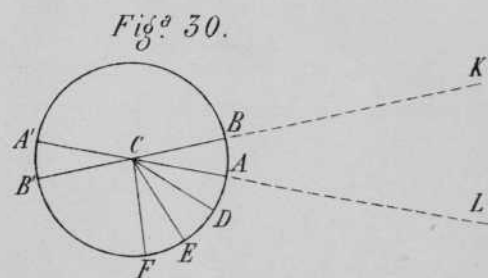
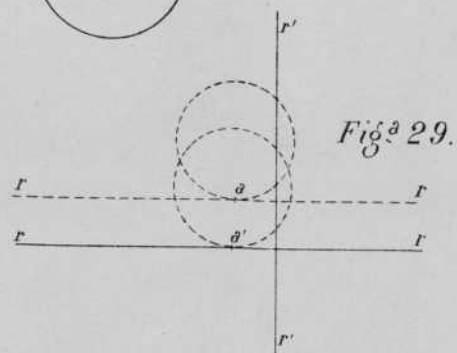
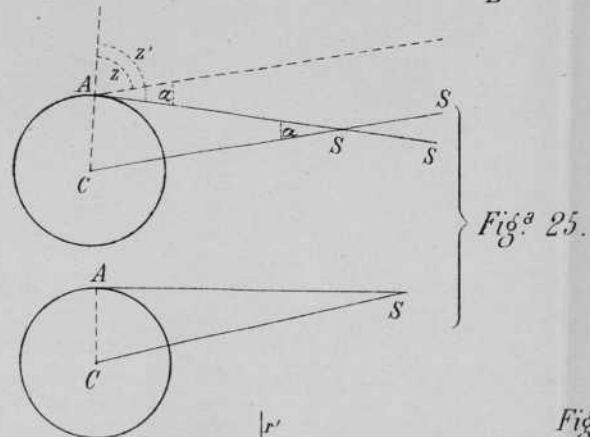
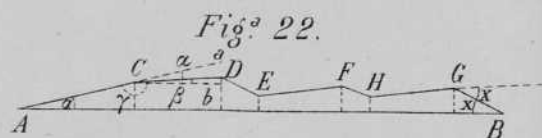
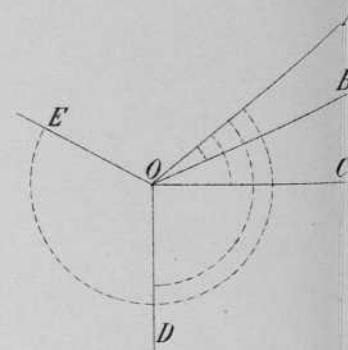
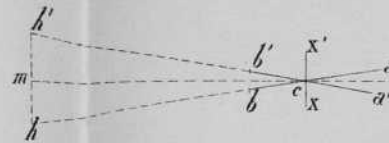
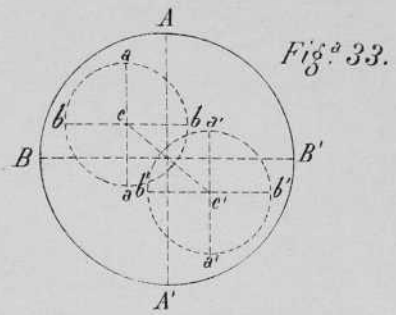
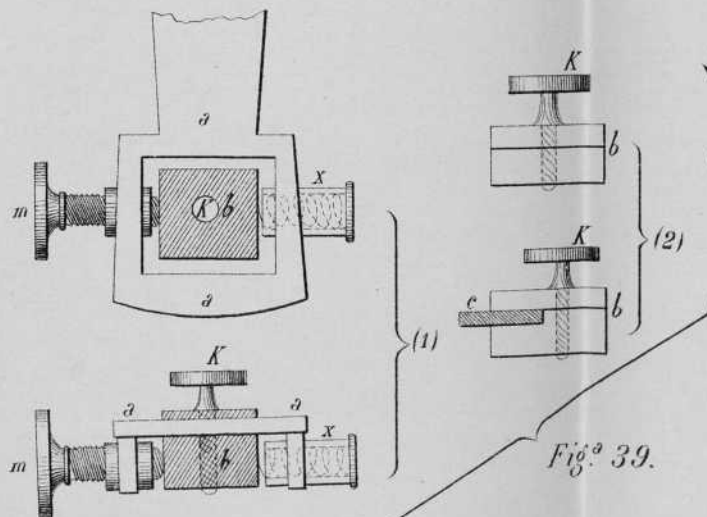
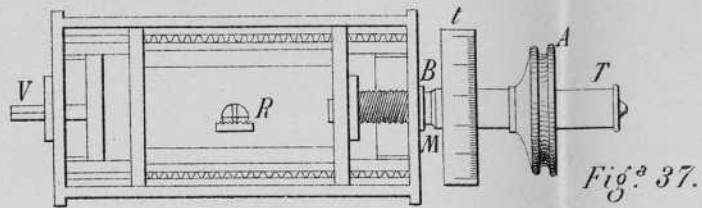
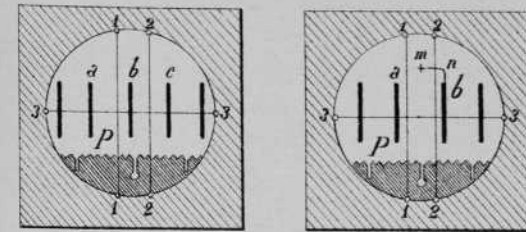
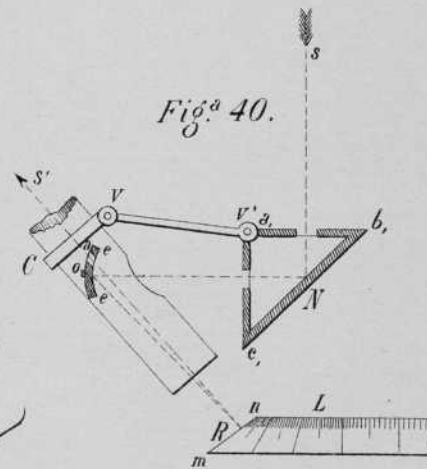
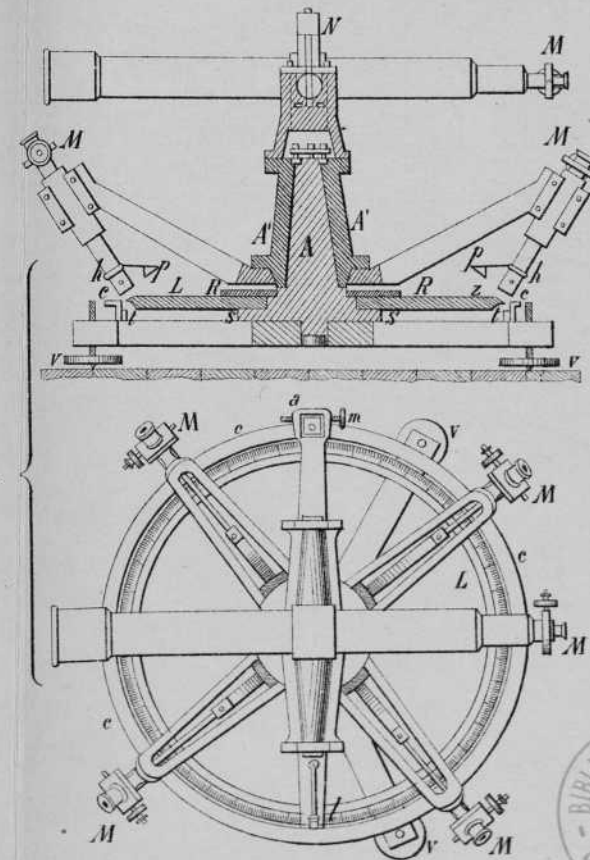
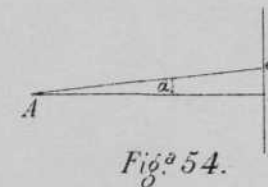
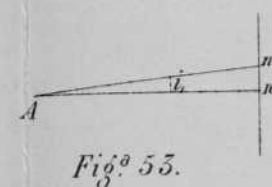
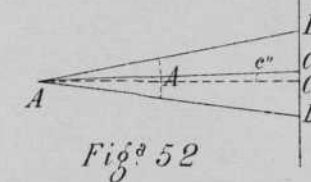
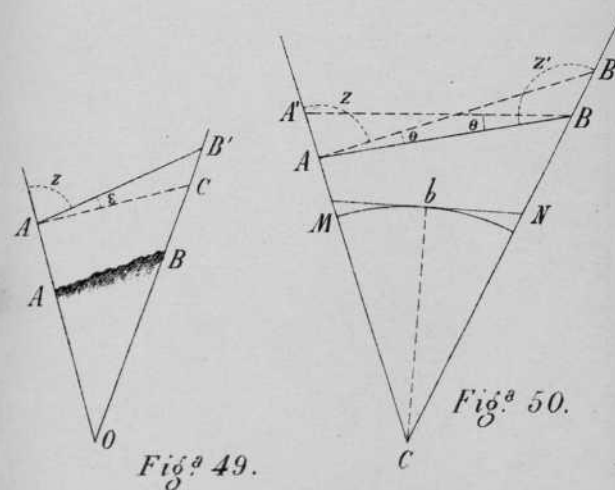
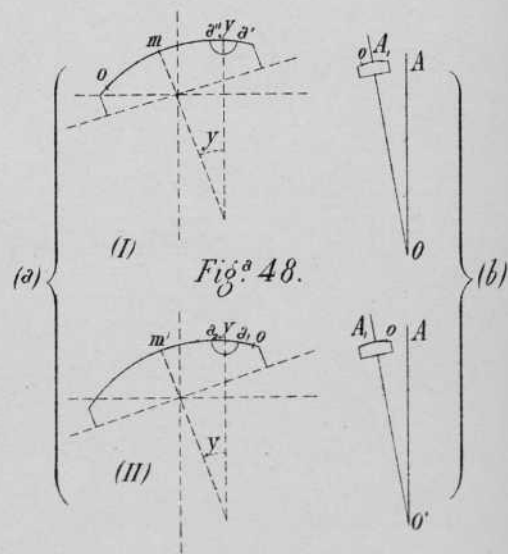
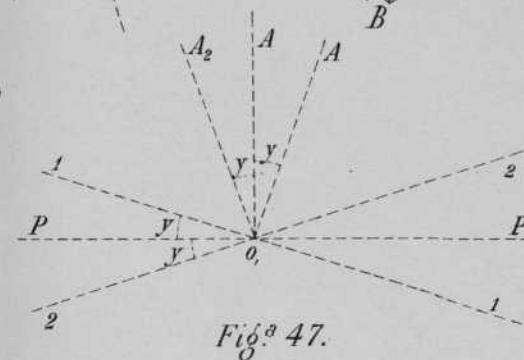
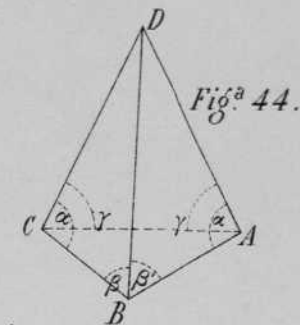
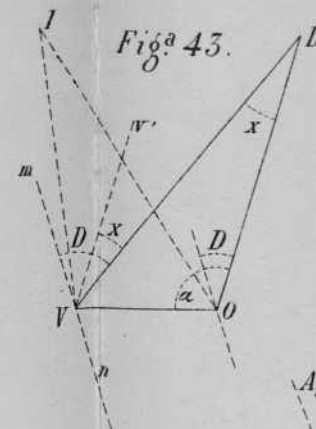
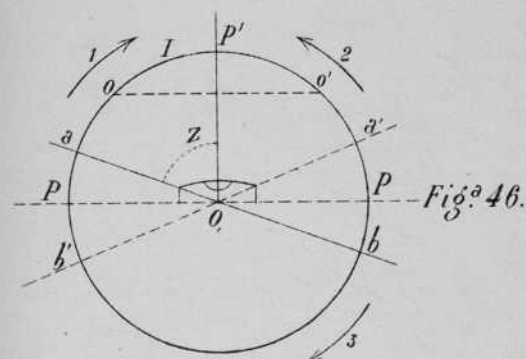
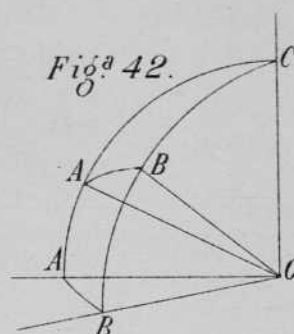
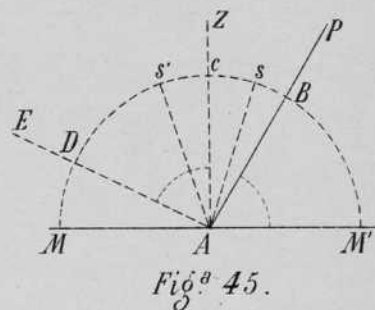
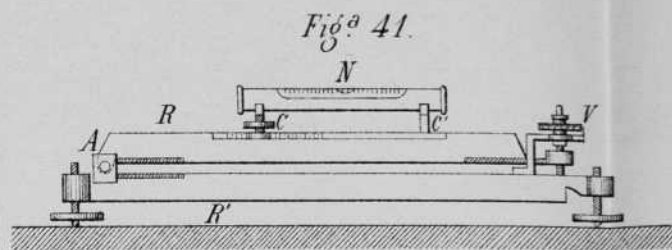
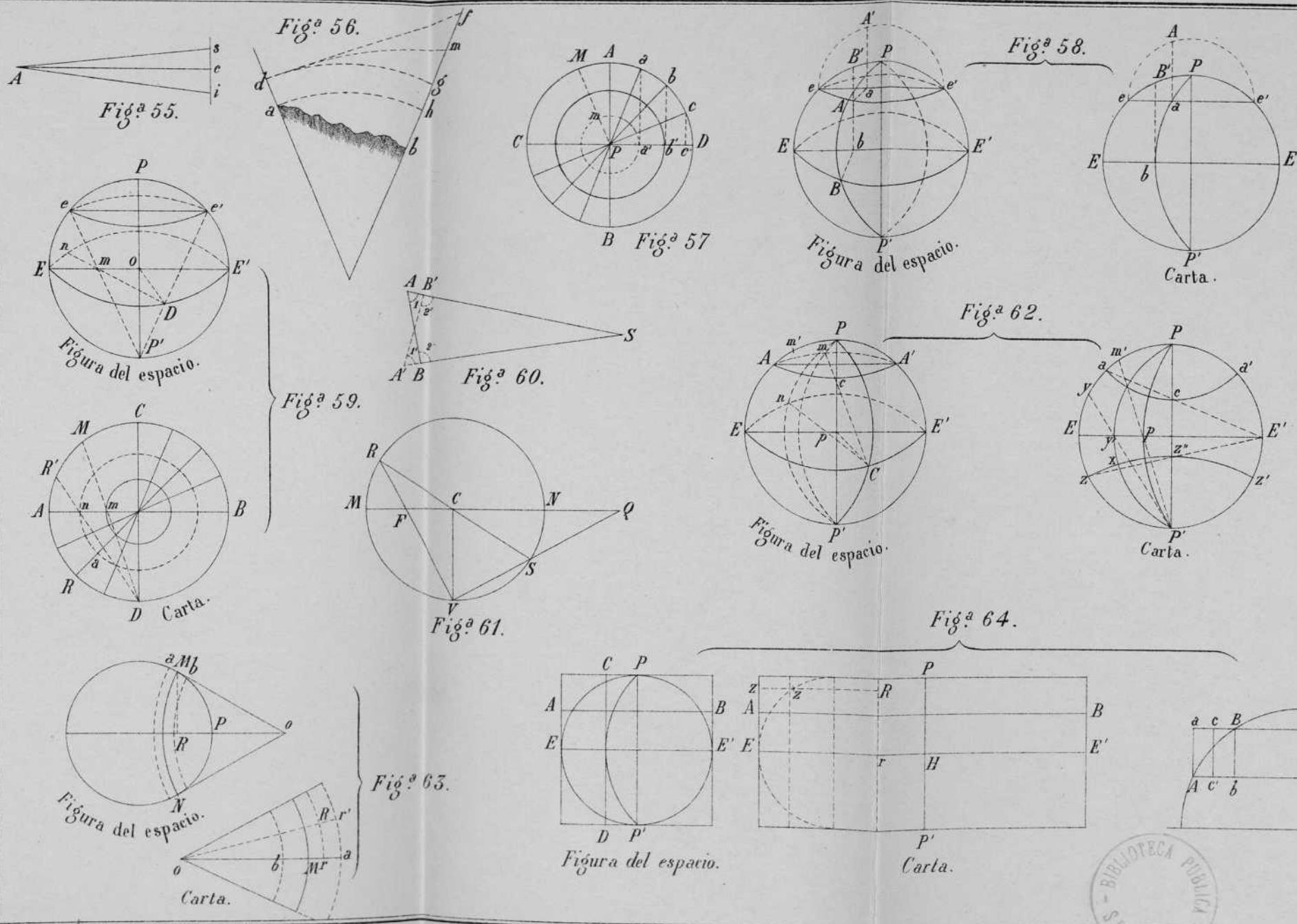


Fig. 22.



*Fig.^a 36**Fig.^a 40.**Fig.^a 38.*





1884



1884



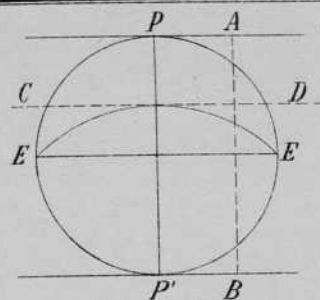
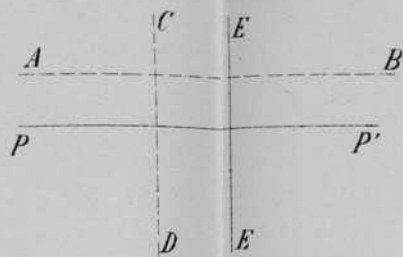


Figura del espacio.



Carta.

Fig.^a 65.

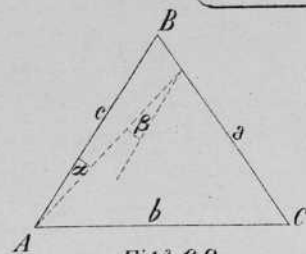


Fig.^a 68.

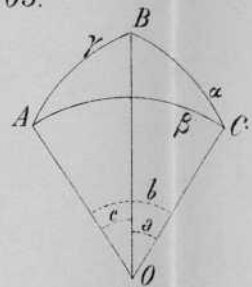


Fig.^a 69.



Fig.^a 70.

Fig.^a 66.

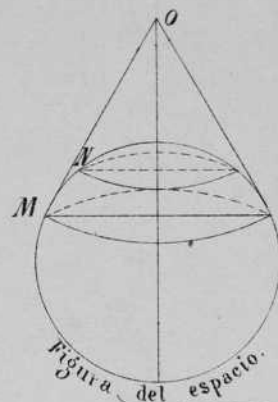
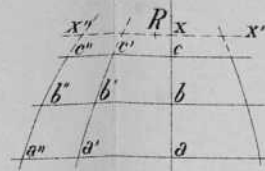
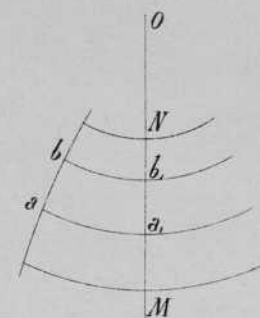


Figura del espacio.



Carta



Carta.

Fig.^a 67.

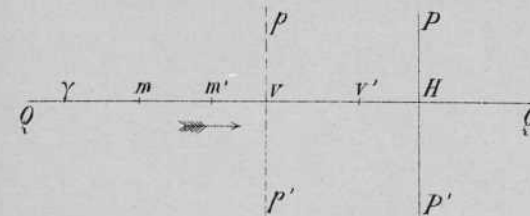


Fig.^a 73.

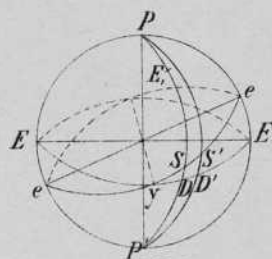


Fig.^a 71.

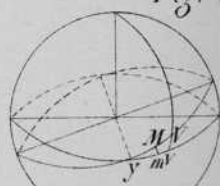


Fig.^a 72.

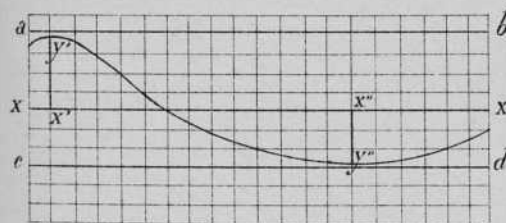


Fig.^a 77.

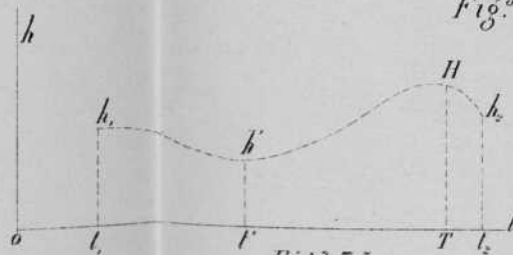


Fig.^a 75.

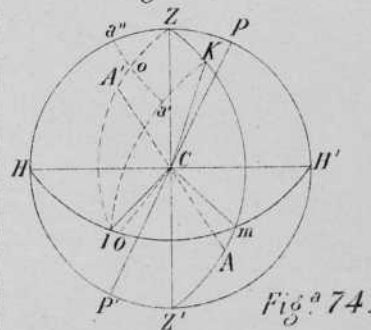


Fig.^a 74.

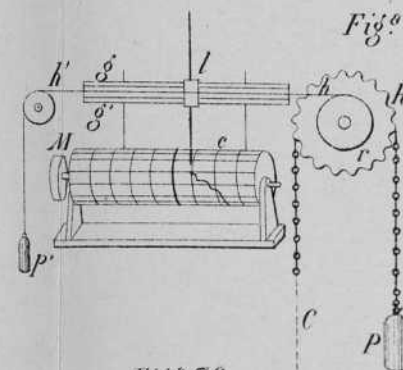


Fig.^a 76.

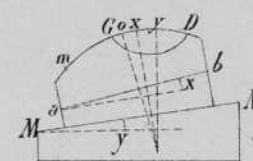
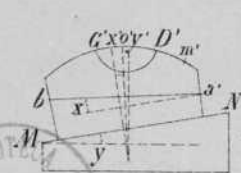
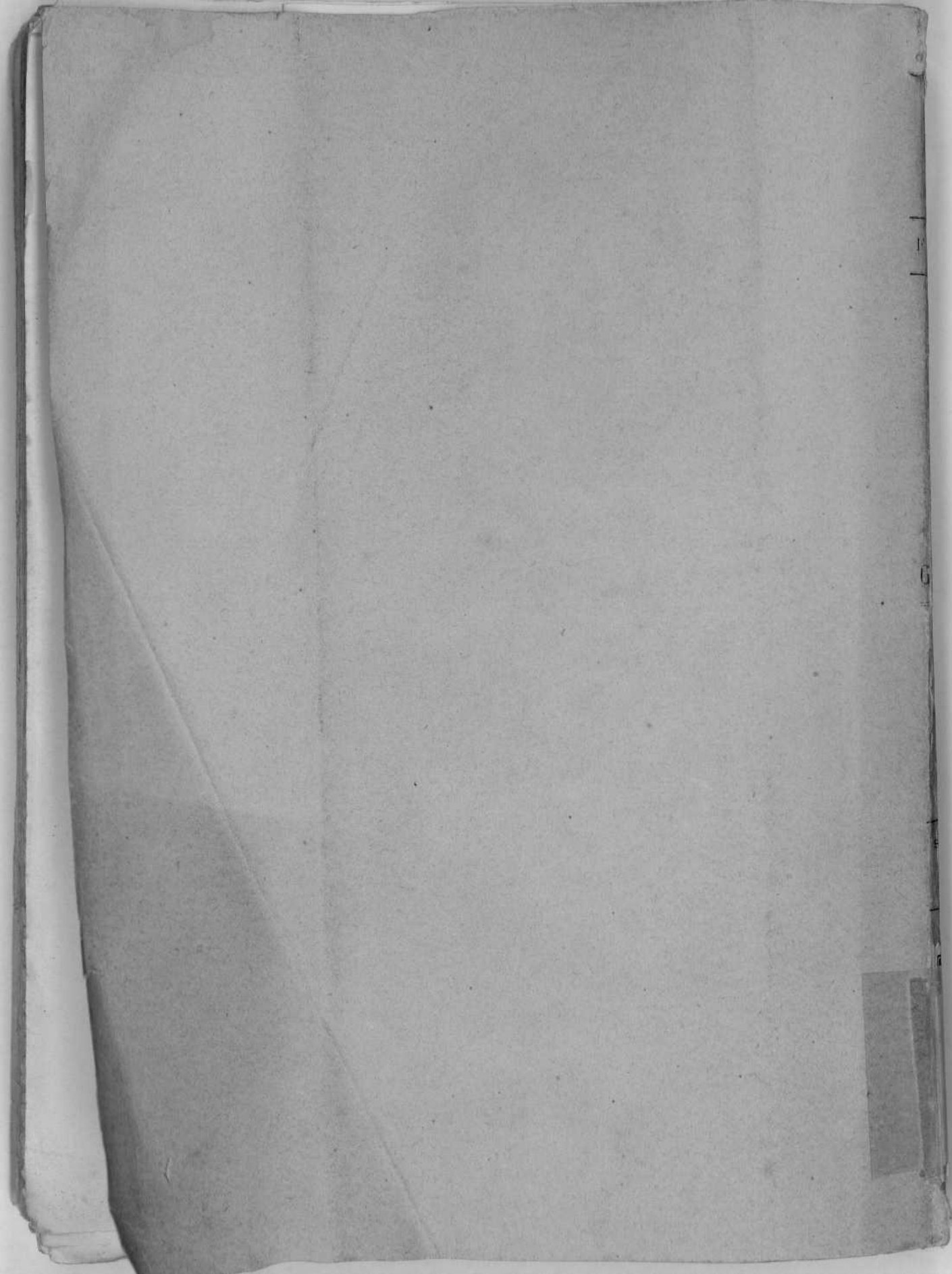


Fig.^a 78







ORTEGA.

ELEMENTOS

DE

GEODESIA

SEGOVIA.

1891.

1851-12