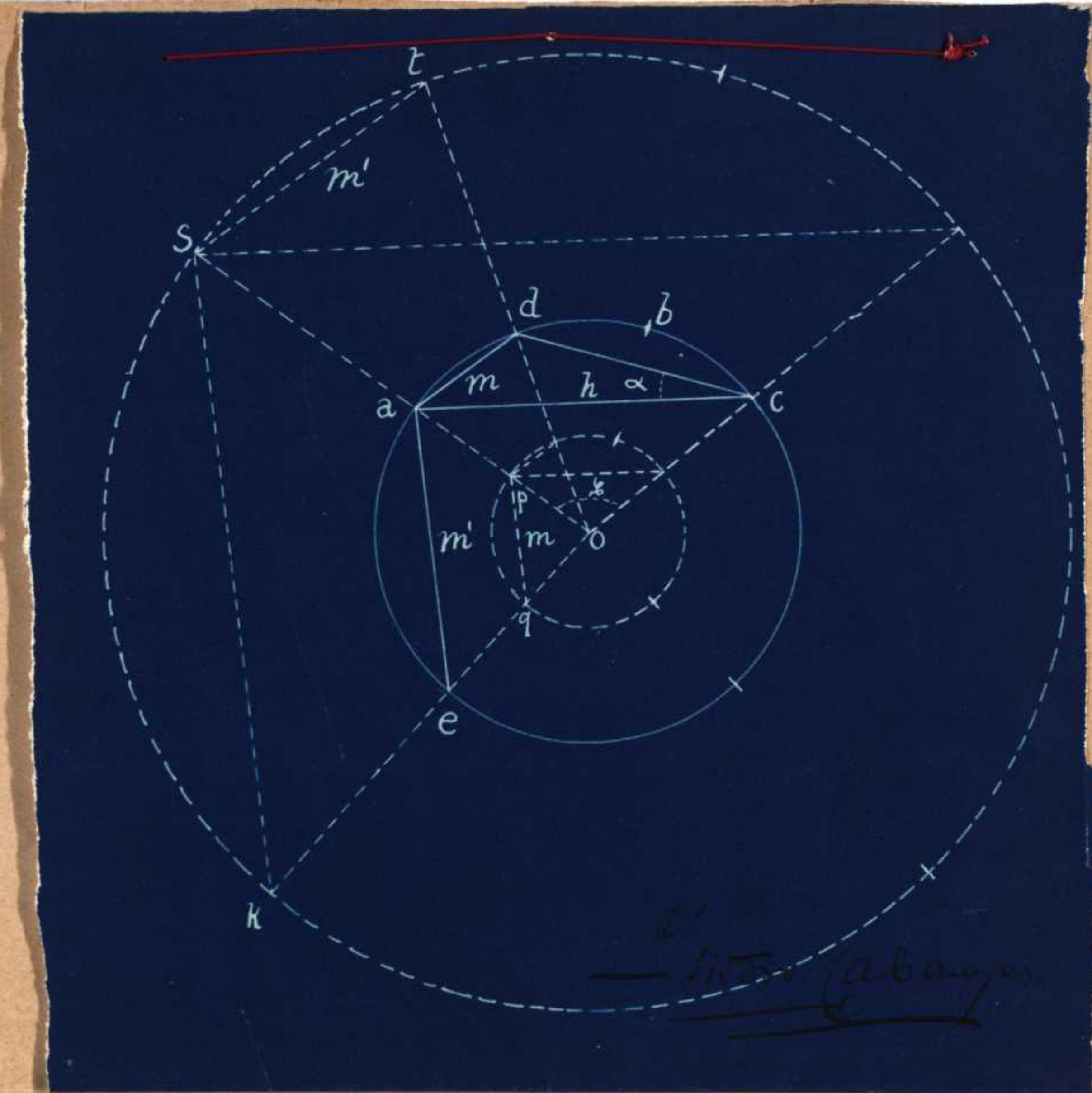
Presentado para su inscripcion en el Registro de la propiedad intelectual de Segovia el dia 14 de Octubre de 1895

El Jefe del Registro

[illegible]


t
m'
s
d
b
m
h
α
a
c
p
m'
m
o
q
e
k

ESTUDIO DE UN PROBLEMA GEOMÉTRICO.

La ley que determina las relaciones que existen entre la cuerda $a\,d$ que subtende un arco de circunferencia, y la de otro arco triple del mismo radio, es $m^3 - 3\,m\,r^2 + h\,r^2 = 0 \;.\,.\,.\,.\,.\; (1)$ siendo m y h las magnitudes respectivas de las referidas cuerdas.

La síntesis del cálculo es como sigue, en la inteligencia de que el ángulo $a\,c\,d$, se le designa por α.

$$\left.\begin{array}{l} a\,d = 2\,r.\mathrm{sen}\,\alpha \\ a\,c = 2\,r.\mathrm{sen}\,3\,\alpha \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{sen}\,\alpha = \dfrac{m}{2\,r} \\ \mathrm{sen}\,3\,\alpha = \dfrac{h}{2\,r} \\ \mathrm{sen}^{-3}\,\alpha = \dfrac{m^3}{8.r^3} \end{array} \quad \mathrm{sen}\,3\,\alpha = \mathrm{sen}\,(2\,\alpha + \alpha) = \mathrm{sen}\,2\,\alpha.\cos\,\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha.\cos\,2\,\alpha = 2.\mathrm{sen}\,\alpha.\cos^{-2}\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha\sqrt{1 - \mathrm{sen}^{-2}\,2\,\alpha} = 2\,\mathrm{sen}\,\alpha.(1 - \mathrm{sen}^{-2}\,\alpha) + \mathrm{sen}\,\alpha.\sqrt{1 - 4.\mathrm{sen}^{-2}\,\alpha.\cos^{-2}\,\alpha} =$$

$$= 2.\mathrm{sen}\,\alpha - 2.\mathrm{sen}^{-3}\,\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha.\sqrt{1 - 4.\mathrm{sen}^{-2}\,\alpha + 4.\mathrm{sen}^{-4}\,\alpha} = 2.\mathrm{sen}\,\alpha - 2.\mathrm{sen}^{-3} + \mathrm{sen}\,\alpha\,(1 - 2.\mathrm{sen}^{-2}\,\alpha) = 3.\mathrm{sen}\,\alpha - 4.\mathrm{sen}^{-2}\,\alpha;$$ resúmen; $\mathrm{sen}\,3\,\alpha = 3.\mathrm{sen}\,\alpha - 4\,\mathrm{sen}^{-3}\,\alpha$; $\dfrac{h}{2r} = \dfrac{3\,m}{2\,r} - \dfrac{m^3}{2\,r^3}$ y por último, $m^3 - 3\,m\,r^2 + h\,r^2 = 0.$

La ecuación (1) de tercer grado, no es graficable, pero tiene dos raíces positivas y una negativa. Las dos raíces positivas, son por necesidad, las magnitudes $a\,d$ y $a\,e$, cuerdas respectivamente del tercio de los arcos $a\,d\,c$ y $a\,e\,c$. Por ser cero el coeficiente del segundo término, la raíz negativa equivale en extensión lineal, á la suma de las dos positivas.

Es indudable, que desde el mismo centro o, y con un rádio conveniente, podremos describir una circunferencia exterior, en la que al prolongar los rádios $o\,d$, $o\,a$ y $o\,e$, se obtenga $s\,t = a\,e$; ó lo que es lo mismo; existe un rádio $o\,t$, que desde ahora llamaremos r' que nos proporcionará para el mismo ángulo $a\,o\,c$ la ecuación siguiente:

$$m'^3 - 3\,.\,m'\,.\,r'^2 + h'\,.\,r'^2 = 0 \;.\,.\,.\,.\,.\quad (2)$$

Esta nueva ecuación (2), tiene también como la (1), dos raíces positivas, que serán las que representen las magnitudes $s\,t$, y $p\,k$, además de otra negativa, que poco nos interesa, pero sí lo suficiente para poder asegurar que las dos ecuaciones de tercer grado (1) y (2) tienen *una* raíz común, y cuya determinación es el objeto de este pequeño trabajo. Igualemos pues la letra de la incógnita en ambas ecuaciones y después de sustituir en vez de h y h', las expresiones $2.\mathrm{sen}\,{}^1\!/_2\,\beta.r$ y $2.\mathrm{sen}\,{}^1\!/_2\,\beta.r'$ por haber representado el ángulo $a\,o\,c$ para la letra β, tendremos

$$m^3 - 3\,m\,r^2 + 2.\mathrm{sen}\,{}^1\!/_2\,\beta.r^3 = 0 \;.\,.\,.\,.\,.\quad (3) \qquad\qquad m^3 - 3\,m\,r'^2 + 2.\mathrm{sen}\,{}^1\!/_2\,\beta\,r'^3 = 0 \;.\,.\,.\,.\,.\quad (4)$$

Si el primer miembro de cada una de estas ecuaciones, es el producto de tres factores binomios, de los cuales, uno es común á ambas, sugetemos dichos primeros miembros á la investigación del máximo común divisor, y por precisión, el último divisor de primer grado que se investigue, habrá de ser el m. c. d. buscado, y por consiguiente, el resíduo deberá ser igual á *cero*,

$$\begin{array}{l|l} m^3 - 3.m.r^2 + 2.\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.r^3 & m^3 - 3.m.r'^2 + 2.\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.r'^3 \\ \hline + 3.m.r'^2 - 2.\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.r'^3 & 1 \\ \hline 3\,m.(r'^2 - r^2) - 2.\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3), & \end{array}$$

Este resíduo es por necesidad el $m.c.d.$ buscado.

$$\begin{array}{l|l} m^3 - 3\,m\,r^2 + 2.\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.r^3 & 3\,m.(r'^2 - r^2) - 2.\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3) \\ \quad + \dfrac{m^2.2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3)}{3\,(r'^2 - r^2)} & \hline \hline \dfrac{m^2.2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta\,(r'^3 - r^3)}{3.(r'^2 - r^2)} - 3\,m\,r^2 + 2.\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.r^3 & \dfrac{m^2}{3.(r'^2 - r^2)} + \dfrac{m.2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3)}{9.(r'^2 - r^2)^2} + \dfrac{\dfrac{4\,\mathrm{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3)^2}{9.(r'^2 - r^2)^2} - 3\,r^2}{3.(r'^2 - r^2)} \end{array}$$

$$+ \dfrac{\dfrac{m.4.\mathrm{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3)^2}{9.(r'^2 - r^2)^2}}{} $$

$$m.\left(\dfrac{4.\mathrm{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3)^2}{9.(r'^2 - r^2)^2} - 3.r^2\right) + 2.\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.r^3$$

$$+ \dfrac{\dfrac{8.\mathrm{sen}^{-3}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3)^3}{9.(r'^2 - r^2)^2} - 6.r^2.\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3)}{3.(r'^2 - r^2)}$$

$$\text{Resíduo} = \dfrac{\dfrac{8.\mathrm{sen}^{-3}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3)^3}{9.(r'^2 - r^2)^2} - 6.r^2.\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3)}{3.(r'^2 - r^2)} + 2.\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.r^3;$$ Iguálesele á cero,

$$4.\mathrm{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3)^3 - 27.r^2.(r'^3 - r^3).(r'^2 - r^2)^2 + 27.r^3.(r'^2 - r^2)^3 = 0 \;.\,.\,.\,.\,.\quad (5).$$

Un trabajo análogo, y á una ecuación semejante á esta ecuación (5) encontrada hubiésemos llegado, si en vez de hacer el trazado de la circunferencia exterior de rádio r' lo hubiésemos hecho con la circunferencia interior que también de puntos se consigna en la figura..

En este segundo caso, manipularíamos para gestionar la segunda de las dos raíces positivas á que nos referíamos poco há.

De acuerdo con lo antes expresado, iguálese á cero, el último divisor; $3\,m\,(r'^2 - r^2) - 2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3) = 0 \;.\,.\,.\,.\,.\; (6)$ de donde se deduce que $m = \dfrac{2.\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\,\beta.(r'^3 - r^3)}{3.(r'^2 - r^2)};\;.\,.\,.\,.\,.\;(7).$

Iguálese á cero el cociente de aquélla división;

$$m^2 + m.\frac{2.\text{sen}\,\frac{1}{2}\beta.(r'^3 - r^3)}{3.(r'^2 - r^2)} + \left(\frac{4.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta\,(r'^3 - r^3)^2}{9.(r'^2 - r^2)^2} - 3\,r^2\right) = 0,$$

de la que igualmente se deduce que

$$m = -\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\beta.(r'^3 - r^3)}{3.(r'^2 - r^2)} \pm \sqrt{\frac{\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.(r'^3 - r^3)^2}{9.(r'^2 - r^2)^2} - \frac{4.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.(r'^3 - r^3)^2}{9.(r'^2 - r^2)^2} + 3\,r^2} = -\frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}\beta.(r'^3 - r^3)}{3.(r'^2 - r^2)} \pm \sqrt{3.r^2 - \frac{\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.(r'^3 - r^3)^2}{3.(r'^2 - r^2)^2}} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Los tres valores de m, consignados en las fórmulas (7) y (8), son las raíces de la ecuación de tercer grado (1), si bien aparecen en función de r', cantidad no solo desconocida, sinó que enclavada en la ecuación (5) que es del grado noveno. Desde este momento dedicaremos todas nuestras gestiones á poner de relieve el valor de r' y cuando creamos haber llegado á ello, daremos por terminado nuestro trabajo.

En presencia de la figura, podemos establecer la siguiente relación:

$$\frac{r}{r'} = \frac{a\,d}{s\,t} = \frac{2.\text{sen}\,\frac{1}{2}\beta.(r'^3 - r^3)}{-\text{sen}\,\frac{1}{2}\beta.(r'^3 - r^3) + \sqrt{27.r^2 \times (r'^2 - r^2)^2 - 3.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.(r'^3 - r^3)^2}}$$

toda vez que $a\,d$ y $s\,t$, equivalen á las raíces positivas; Véase fórmulas (7) y (8).

Quitando denominadores, y haciendo racional la expresión, sacando factores comunes, y desarrollando, se llega á las ecuaciones siguientes:

$$4.r'^2..\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.(r'^3 - r^3)^2 + r^2.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.(r'^3 - r^3)^2 + 4.r'.r.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta\,(r'^3 - r^3)^2 = 27.r^4.(r'^2 - r^2)^2 - 3.r^2.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.(r'^3 - r^3)^2$$

$$\left(4.r'^2.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta + 4\,r^2.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta + 4.r.r'\,\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta\right).(r'^6 - 2\,r'^3.r^3 + r^6) - 27.r^4\,(r'^4 - 2\,r'^2.r^2 + r^4) = 0;$$

Ordénese y quedará lo que sigue:

$$4.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.r'^8 + 4.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.r.r'^7 + 4.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.r^2.r'^6 - 8.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.r^3.r'^5 - (8.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta + 27)\,r^4.r'^4 - 8.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.r^5.r'^3 + (4.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta + 54)\,r^6.r'^2 + 4.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.r^7.r' + (4.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta - 27.)\,r^8 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (9).$$

Desarróllese y ordénese igualmente por las potencias de r' la ecuación (5), y tendremos

$$4.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta.r'^9 - 27.r^2.r'^7 - (12.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta - 27).r^3.r'^6 + 54.r^4.r'^5 - 54.r^5.r'^4 + (12.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta - 27)\,r^6.r'^3 + 27.r^7.r'^2 - 4.\text{sen}^{-2}\,\frac{1}{2}\beta\,r^9 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (10);$$

Encuéntrese el m. c. d. entre estas dos ecuaciones (9) y (10), si bien, despójeseles antes del factor $(r' - r)^2$ á la primera, y del $r' - r$ á la segunda, puesto que lo tienen, como puede verse á continuación.

Advertencia. Siendo muy extensos los cálculos que hasta el final habremos de desarrollar, y no entrando en ellos más línea trigonométrica que sen $\frac{1}{2}\beta$ en sus diferentes potencias, suprimiremos en lo subcesivo el $\frac{1}{2}\beta$, dejando solo la denominación de *seno* en gracia á la brevedad.

$4.\text{sen}^{-2}$	$r'^8 + 4\,\text{sen}^{-2}$	$r.r'^7 + 4\,\text{sen}^{-2}$	$r^2.r'^6 - 8.\text{sen}^{-2}$	$r^3.r'^5 - 8.\text{sen}^{-2}$	$r^4.r'^4 - 8.\text{sen}^{-2}$	$r^5.r'^3 + 4.\text{sen}^{-2}$	$r^6.r'^2 + 4.\text{sen}^{-2}$	$r^7.r' + 4\,\text{sen}^{-2}$	r^8
——	....	....	....	-27	....	$+54$—	....	-27	
	$+8\,\text{sen}^{-2}$	$-4\,\text{sen}^{-2}$	$-12.\text{sen}^{-2}$	....	$-28.\text{sen}^{-2}$	....	$-12.\text{sen}^{-2}$	....	
	$+12.\text{sen}^{-2}$	$+24\,\text{sen}^{-2}$	$+48\,\text{sen}^{-2}$	$-24.\text{sen}^{-2}$	$+48.\text{sen}^{-2}$	$-24.\text{sen}^{-2}$	$+54$	$-4\,\text{sen}^{-2}$	
	——	$+24.\text{sen}^{-2}$	$+28.\text{sen}^{-2}$	$+56.\text{sen}^{-2}$	-54	$+27$	$+8.\text{sen}^{-2}$	$+27$	
		——	——	$+24.\text{sen}^{-2}$	$+12.\text{sen}^{-2}$	$+24\,\text{sen}^{-2}$	-54	—θ—	
				-27	-54	-108	—θ—		
				——	——	$+4.\text{sen}^{-2}$			
						-27			
						——			

$r'^2 - 2\,r.r' + r^2$

$4.\text{sen}^{-2}$	$r'^6 + 12.\text{sen}^{-2}$	$r.r'^5 + 24.\text{sen}^{-2}$	$r^2.r'^4 + 28.\text{sen}^{-2}$	$r^3.r'^3 + 24.\text{sen}^{-2}$	$r^4.r'^2 + 12.\text{sen}^{-2}$	$r^5.r' + 4.\text{sen}^{-2}$	r^6
				-27	-54	-27	

$4.\text{sen}^{-2}$	$r'^9 + 0$	$r.r'^8 - 27$	$r^2.r'^7 - 12.\text{sen}^{-2}$	$r^3.r'^6 + 54$	$r^4.r'^5 - 54$	$r^5.r'^4 + 12.\text{sen}^{-2}$	$r^6.r'^3 + 27$	$r^7.r'^2 + 0$	$r^8.r' - 4.\text{sen}^{-2}$	r^9
——	$+4.\text{sen}^{-2}$	....	$+27$	....	....	-27	....	$+4\,\text{sen}^{-2}$	....	
	——	$+4.\text{sen}^{-2}$	....	$-8.\text{sen}^{-2}$	$-8.\text{sen}^{-2}$	....	$+4.\text{sen}^{-2}$	——	$+4.\text{sen}^{-2}$	
		——	$+4.\text{sen}^{-2}$	——	-54	$-8.\text{sen}^{-2}$	-27		—θ—	
			-27		$-8.\text{sen}^{-2}$	$+4.\text{sen}^{-2}$	$+4.\text{sen}^{-2}$			
			$-8.\text{sen}^{-2}$		——	-27	——			
			——			——				

$r' - r.$

$4\,\text{sen}^{-2}$	$r'^8 + 4.\text{sen}^{-2}$	$r.r'^7 + 4.\text{sen}^{-2}$	$r^2.r'^6 - 8.\text{sen}^{-2}$	$r^3.r'^5 - 8.\text{sen}^{-2}$	$r^4.r'^4 - 8.\text{sen}^{-2}$	$r^5.r'^3 + 4.\text{sen}^{-2}$	$r^6.r^2 + 4.\text{sen}^{-2}$	$r^7.r' + 4.\text{sen}^{-2}$	r^8
		-27		$+54$		-27			

PRIMERA DIVISIÓN.

$4.\text{sen}^{-2}$	$r'^{8}+4.\text{sen}^{-2}$	$r.r'^{7}+4.\text{sen}^{-2}$	$r^2.r'^{6}-8.\text{sen}^{-2}$	$r^3.r'^{5}-8.\text{sen}^{-2}$	$r^4.r'^{4}-8.\text{sen}^{-2}$	$r^5.r^3+4\ \text{sen}^{-2}$	$r^6.r'^{2}+4.\text{sen}^{-2}$	$r^7.r'+.4\text{sen}^{-2}$	r^8
——	.... $-12.\text{sen}^{-2}$ $-8.\text{sen}^{-2}$ ——	-27 .... $-24.\text{sen}^{-2}$ $+24.\text{sen}^{-2}$ $+4.\text{sen}^{-2}$ -27 ——	.... $-28.\text{sen}^{-2}$ $+48.\text{sen}^{-2}$ $+12.\text{sen}^{-2}$ $-12.\text{sen}^{-2}$ $+81$ $+81$	$+54$ .... $-24.\text{sen}^{-2}$ $+27$ $+56.\text{sen}^{-2}$ $+24.\text{sen}^{-2}$ $+81$ $-24.\text{sen}^{-2}$ $+162$ $+243$	.... $-12.\text{sen}^{-2}$ $+54$ $+48.\text{sen}^{-2}$ -54 $+28.\text{sen}^{-2}$ $-28.\text{sen}^{-2}$ $+189$ $+189$	-27 .... $-4.\text{sen}^{-2}$ $+27$ $+24\ \text{sen}^{-2}$ -108 $+24.\text{sen}^{-2}$ -108 $+24.\text{sen}^{-2}$ -189 $+\frac{729}{4.\text{sen}^{-2}}$ $+48.\text{sen}^{-2}$ -297 $+\frac{729}{4.\text{sen}^{-2}}$	.... $+8.\text{sen}^{-2}$ -54 $+12.\text{sen}^{-2}$ -54 $+12.\text{sen}^{-2}$ -135 $+\frac{1458}{4.\text{sen}^{-2}}$ $+24.\text{sen}^{-2}$ -189 $+\frac{1458}{4.\text{sen}^{-2}}$	.... $+4.\text{sen}^{-2}$ -54 $+\frac{729}{4.\text{sen}^{-2}}$ $+8.\text{sen}^{-2}$ -54 $+\frac{729}{4.\text{sen}^{-2}}$	

$4.\text{sen}^{-2}$	$r'^{6}+12.\text{sen}^{-2}$	$r.r'^{5}+24.\text{sen}^{-2}$	$r^2.r'^{4}+28\ \text{sen}^{-2}$	$r^3.r'^{3}+24.\text{sen}^{-2}$	$r^4.r'^{2}+12\ \text{sen}^{-2}$	$r^5.r'+4.\text{sen}^{-2}$	r^5
				-27	-54	-27	

$$r'^2-2.r.r'+\frac{4.\text{sen}^{-2}-27}{4.\text{sen}^{-2}}.r^2$$

$$\left\{\begin{array}{l}
96.\text{sen}^{-4}-108.\text{sen}^{-2}\\
\qquad -648.\text{sen}^{-2}+729\\
(96.\text{sen}^{-4}-756.\text{sen}^{-2}+729):4.\text{sen}^{-2}\\
48.\text{sen}^{-4}-216.\text{sen}^{-2}\\
\qquad -324.\text{sen}^{-2}+1458\\
(48.\text{sen}^{-4}-540.\text{sen}^{-2}+1458):4.\text{sen}^{-2}\\
16.\text{sen}^{-4}-108.\text{sen}^{-2}\\
\qquad -208.\text{sen}^{-2}+729\\
(15.\text{sen}^{-4}-216.\text{sen}^{-2}+729):4.\text{sen}^{-2}
\end{array}\right.$$

SEGUNDA DIVISION.

Multiplíquese el anterior residuo por $4.\text{sen}^{-2}$.

$4\ \text{sen}^{-2}$	$r'^{6}+12.\text{sen}^{-2}$	$r.r'^{5}+24.\text{sen}^{-2}$	$r^2.r'^{4}+28.\text{sen}^{-2}$	$r^3.r'^{3}+24.\text{sen}^{-2}$	$r^4.r'^{2}+12.\text{sen}^{-2}$	$r^5.r'+4.\text{sen}^{-2}$	r^6
——	.... $-12.\text{sen}^{-2}$ ——	.... $-\frac{28}{3}\ \text{sen}^{-2}$ $+\frac{44}{3}.\text{sen}^{-2}$	.... $-\frac{64}{27}.\text{sen}^{-4}$ $-\frac{132}{9}.\text{sen}^{-2}$ -9 $-\frac{64}{27}.\text{sen}^{-4}$ $+\frac{128}{3}.\text{sen}^{-2}$ -9	-27 .... $-\frac{32}{27}.\text{sen}^{-4}$ $+\frac{28}{3}.\text{sen}^{-2}$ -18 $-\frac{32}{27}.\text{sen}^{-4}$ $+\frac{100}{3}.\text{sen}^{-2}$ -45	-54 .... $-\frac{32}{81}.\text{sen}^{-4}$ $+\frac{24}{9}.\text{sen}^{-2}$ -9 $-\frac{32}{81}.\text{sen}^{-4}$ $+\frac{44}{3}.\text{sen}^{-2}$ -63	-27	

$324.\text{sen}^{-2}$	$r'^{5}+972.\text{sen}^{-2}$	$r.r'^{4}+756.\text{sen}^{-3}$	$r^2.r'^{3}+192.\text{sen}^{-4}$ $-1188.\text{sen}^{-2}$ $+729$	$r^3.r'^{2}+96.\text{sen}^{-4}$ $-756.\text{sen}^{-2}$ $+1458$	$r^4.r'+32.\text{sen}^{-4}$ $-216.\text{sen}^{-2}$ $+729$	r^5
$\frac{r'}{81}$						

TERCERA DIVISION.

$324.\text{sen}^{-2}$	$r'^{5}+972.\text{sen}^{-2}$	$r.r'^{4}+756.\text{sen}^{-2}$	$r^2.r'^{3}+192.\text{sen}^{-4}$ $-1188.\text{sen}^{-2}$ $+729$	$r^2.r'^{2}+96.\text{sen}^{-4}$ $-756.\text{sen}^{-2}$ $+1458$	$r^4.r'+32.\text{sen}^{-4}$ $-216.\text{sen}^{-2}$ $+729$	r^4
——	.... $+\frac{576}{11}.\text{sen}^{-4}$ $-\frac{10368}{11}.\text{sen}^{-2}$ $+\frac{2187}{11}$ ——	.... $+\frac{288}{11}.\text{sen}^{-4}$ $-\frac{8100}{11}.\text{sen}^{-2}$ $+\frac{10935}{11}$ $-\frac{4096}{484}.\text{sen}^{-8}$ $+\frac{71424}{484}.\text{sen}^{-6}$ $+\frac{10368}{484}.\text{sen}^{-4}$ $+\frac{271188}{484}.\text{sen}^{-2}$ $-\frac{59049}{484}$	.... $+\frac{96}{11}.\text{sen}^{-4}$ $-324.\text{sen}^{-2}$ $+\frac{15309}{11}$ $+\frac{2048}{484}.\text{sen}^{-8}$ $+\frac{56448}{484}.\text{sen}^{-6}$ $-\frac{53136}{484}.\text{sen}^{-4}$ $+\frac{174960}{484}.\text{sen}^{-2}$ $-\frac{295245}{484}$	.... $-\frac{972}{11}.\text{sen}^{-2}$ $+\frac{6561}{11}$ $-\frac{2048}{1452}.\text{sen}^{-8}$ $+\frac{24960}{484}.\text{sen}^{-6}$ $-\frac{97200}{484}.\text{sen}^{-4}$ $+\frac{34992}{484}.\text{sen}^{-2}$ $-\frac{413343}{484}$	.... $+\frac{6912}{484}.\text{sen}^{-6}$ $-\frac{39768}{484}.\text{sen}^{-4}$ $-\frac{177147}{484}$	

$\frac{44}{3}.\text{sen}^{-2}$	$r'^{4}-\frac{64}{27}.\text{sen}^{-4}$ $+\frac{128}{3}.\text{sen}^{-2}$ -9	$r.r'^{3}-\frac{32}{27}.\text{sen}^{-4}$ $+\frac{100}{3}.\text{sen}^{-2}$ -45	$r^2.r'^{2}-\frac{32}{81}.\text{sen}^{-4}$ $+\frac{44}{3}.\text{sen}^{-2}$ -63	$r^3.r'+4.\text{sen}^{-2}$ -27	r^4

$$\frac{243}{11}.r'+\left(\frac{576.\text{sen}^{-4}+324.\text{sen}^{-2}+2187}{11}\right)\times\frac{3}{44}.r$$

DEMOSTRACIÓN DE LAS OPERACIONES DE LA TERCERA DIVISIÓN.

$$
\begin{array}{r}
576.\text{sen}^{-4}+324.\text{sen}^{-2}+2187 \\
-\frac{64}{27}.\text{sen}^{-4}+\frac{128}{3}.\text{sen}^{-2}-9. \\
\hline
-5184.\text{sen}^{-4}-2916.\text{sen}^{-2}-19683 \\
+24576.\text{sen}^{-6}+13824 \quad +92312 \\
-\frac{4096}{3}.\text{sen}^{-8}-\ 768 \quad -5184
\end{array}
$$

$$\frac{3}{484}\times\left(-\frac{4096}{3}.\text{sen}^{-8}+23808.\text{sen}^{-6}+3456.\text{sen}^{-4}\times 90396.\text{sen}^{-2}-19683\right)=-\frac{4096}{484}.\text{sen}^{-8}+\frac{71424}{484}.\text{sen}^{-6}+\frac{10368}{484}.\text{sen}^{-4}+\frac{271188}{484}.\text{sen}^{-2}-\frac{59049}{484}.$$

$$
\begin{array}{r}
576.\text{sen}^{-4}+324.\text{sen}^{-2}+2187 \\
+\frac{32}{27}.\text{sen}^{-4}+\frac{100}{3}.\text{sen}^{-2}-45 \\
\hline
-25920.\text{sen}^{-4}-14580.\text{sen}^{-2}-98415 \\
+19200.\text{sen}^{-6}+10800 \quad +72900 \\
-\frac{2048}{3}.\text{sen}^{-8}-\ 384 \quad +2592
\end{array}
$$

$$\frac{3}{484}\times\left(-\frac{2040}{3}.\text{sen}^{-8}+18816.\text{sen}^{-6}-17712.\text{sen}^{-4}+58320.\text{sen}^{-2}-98415\right)=-\frac{2048}{484}.\text{sen}^{-8}+\frac{56448}{484}.\text{sen}^{-6}-\frac{53136}{484}.\text{sen}^{-4}+\frac{174960}{484}.\text{sen}^{-2}-\frac{295245}{484}$$

$$
\begin{array}{r}
576.\text{sen}^{-4}+324.\text{sen}^{-2}+2187 \\
-\frac{32}{81}.\text{sen}^{-4}+\frac{100}{3}.\text{sen}^{-2}-63 \\
\hline
-36288.\text{sen}^{-2}-20412.\text{sen}^{-2}-137781 \\
+8448.\text{sen}^{-6}+4752 \quad +32076 \\
-\frac{2048}{9}.\text{sen}^{-6}-\ 128 \quad -864
\end{array}
$$

$$\frac{3}{484}\times\left(\frac{2048}{9}.\text{sen}^{-8}+8320.\text{sen}^{-6}-32400.\text{sen}^{-4}+11664.\text{sen}^{-2}-137781\right)=-\frac{2048}{1452}.\text{sen}^{-8}+\frac{24960}{484}.\text{sen}^{-6}-\frac{97200}{484}.\text{sen}^{-4}+\frac{34992}{484}.\text{sen}^{-2}-\frac{413343}{484}$$

$$
\begin{array}{r}
576.\text{sen}^{-4}+324.\text{sen}^{-2}-2187 \\
+\ 4.\text{sen}^{-2}-\ 27 \\
\hline
-15552.\text{sen}^{-4}-8748.\text{sen}^{-2}-59049 \\
+2304.\text{sen}^{-6}+\ 1296 \quad +8748
\end{array}
$$

$$\frac{3}{484}\times(+2304.\text{sen}^{-6}-13256^{4}.\text{sen}^{-4}+0.\text{sen}^{-2}-59049)=\frac{6912}{484}.\text{sen}^{-6}-\frac{39768}{484}.\text{sen}^{-4}+0.\text{sen}^{-2}-\frac{177147}{484}.$$

Después de la reducción de términos semejantes, el resto de la **tercera división**, se convierte en lo que sigue:

$$
\begin{array}{l|l|l|l|l}
-\frac{4096}{484}.\text{sen}^{-8} & r'^{3}-\frac{2048}{484}.\text{sen}^{-8} & r.r'^{2}-\frac{2048}{1452}.\text{sen}^{-8} & r^{2}.r'+\frac{6912}{484}.\text{sen}^{-6} & r^{3} \\
-\frac{71424}{484}.\text{sen}^{-6} & +\frac{56448}{484}.\text{sen}^{-6} & +\frac{24960}{484}.\text{sen}^{-6} & +\left(32-\frac{39768}{484}\right).\text{sen}^{-4} & \\
+\left(\frac{10368}{484}+\frac{288}{11}\right).\text{sen}^{-4} & +\left(192+\frac{96}{11}-\frac{53136}{484}\right).\text{sen}^{-4} & +\left(96-\frac{97200}{484}\right).\text{sen}^{-4} & -216.\text{sen}^{-2} & \\
+\left(\frac{271188}{484}-\frac{8100}{11}+756\right).\text{sen}^{-2} & +\left(\frac{174960}{484}-324-1118\right).\text{sen}^{-2} & +\left(\frac{34992}{484}-\frac{972}{11}-756\right).\text{sen}^{-2} & +\left(729-\frac{177147}{484}\right) & \\
+\left(\frac{10935}{11}-\frac{59049}{484}\right) & +\left(\frac{15309}{11}-\frac{295245}{484}\right) & +\left(1458+\frac{6561}{11}-\frac{413343}{484}\right) & &
\end{array}
$$

Multiplíquese este resto por 484 y pase á ser divisor de la **cuarta división.**

CUARTA DIVISIÓN.

$$
\begin{array}{l|l|l|l|l|}
\frac{44}{3}.\text{sen}^{-2} & r'^4. -\frac{64}{27}.\text{sen}^{-4} & r.r'^3 -\frac{32}{27}.\text{sen}^{-4} & r^2.r'^2 -\frac{32}{81}.\text{sen}^{-4} & r^3.r' + 4.\text{sen}^{-2} \; r^4 \\
-- & +\frac{128}{3}.\text{sen}^{-2} & +\frac{100}{3}.\text{sen}^{-2} & +\frac{44}{3}.\text{sen}^{-2} & -27 \\
 & -9 & -45 & -63 & \cdots\cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & +M.D \\
 & -\frac{44.B}{3.A}.\text{sen}^{-2} & -\frac{44.C}{3.A}\text{sen}^{-2} & -\frac{44.D}{3.A}.\text{sen}^{-2} & \cdots\cdots\cdots \\
 & -- & & & \\
 & & +M.B & +M.C & \\
 & & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \\
 & & <\ldots +P\ldots> & <\ldots +Q\ldots> & <\ldots +R\ldots>
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|l|l|l|l|}
<\ldots +A\ldots> & <\ldots +B\ldots> & <\ldots +C\ldots> & <\ldots +D\ldots> \\
-4096.\text{sen}^{-8} \; r'^3 & -2048.\text{sen}^{-8} \; r.r'^2 & -\frac{2048}{3}.\text{sen}^{-8} \; r^2.r' & +6912.\text{sen}^{-6} \; r^3 \\
-71424.\text{sen}^{-6} & +56448.\text{sen}^{-6} & +24960.\text{sen}^{-6} & -24280.\text{sen}^{-4} \\
+23040.\text{sen}^{-4} & +44016.\text{sen}^{-4} & -50736.\text{sen}^{-4} & -216.\text{sen}^{-2} \\
+9540.\text{sen}^{-2} & -756848\,\text{sen}^{-2} & -363680.\text{sen}^{-2} & +175689 \\
+422091 & +378341 & +581013 &
\end{array}
$$

$$
\frac{44}{3.A}.\text{sen}^{-2}.r' - \frac{\frac{64}{27}.\text{sen}^{-4} - \frac{128}{3}.\text{sen}^{-2} + 9 + \frac{44.B}{3.A}.\text{sen}^{-2}}{A} \times r
$$

$$
<\ldots\ldots\ldots\ldots +M\ldots\ldots\ldots\ldots>
$$

Como se vé, y para mayor sencillez, hemos reemplazado los términos del divisor, y el segundo del cociente respectivamente, por las letras A, B, C, D y M; así como también las del resíduo por las P, Q y R.

Si este resíduo hubiese resultado igual á cero, el problema que perseguimos, habría quedado sin posibilidad de solución, por que siendo de tercer grado el divisor, no tendríamos medio de graficar su valor de r'; pero el resíduo en cuestión no es cero, como puede comprobarse de un modo sencillo, sustituyendo en el último término, en vez de M y D, sus valores, y suponer el caso especial de que sen. $\frac{1}{2}$ 6 sea igual á cero. Con efecto

$$
+4.\text{sen}^{-2} - 27 + M.D = -27 + \frac{9 + \frac{44 \times 378341}{3 \times 422091}}{422091} = -27 + \frac{\frac{11406457 + 16647004}{1266273}}{422091} = \frac{28053461}{534482436843} - 27;
$$

cantidad que evidentemente no es cero, y por lo tanto, ya no es necesario continuar las subcesivas divisiones, bastará tan solo resolver la ecuación de segundo grado que resulta al igualar á *cero* el resíduo, de la **cuarta división**.

$$
P.r'^2 + Q.r.r' + R.r^2 = 0. \qquad r' = r.\frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4.P.R}}{2.P},
$$

expresión graficable para todos los ángulos.

Las fórmulas (7) y (8) complementarían la resolución del problema, si las consideraciones y cálculos que dejamos consignados fueran rigurosamente exactas.

Segovia 30 de Agosto de 1895.

Isidoro Cabanyes.

Establecimiento Tipográfico de S. Rueda.