LIGEROS APUNTES

DE LAS ESPLICACIONES DADAS Á SUS DISCÍPULOS EN SUS CLASES DE MATEMÁTICAS,

POR

DON JOSÉ DE GORRÍA Y GUTIÉRREZ.

SEGOVIA, 1875:
IMPRENTA DE PEDRO ONDERO, CALLE REAL, 12.

ARITMÉTICA.

PRELIMINARES.

CANTIDAD.... { Ejemplos materiales. | Contínua. | Medir una cantidad. | Unidad. | Cantidad contínua...... unidad arbitraria. |
{ Ejemplos inmateriales. | Discontínua. | Cantidad discontínua.. unidad no tan arbitraria |

NÚMERO ..... { Entero. | Abstracto. | Números concretos. { Homogéneos... mas ó menos homogéneos. | Matemáticas. |
{ Fraccionario.
{ Mixto. | Concreto... mas ó menos concreto. | Heterogéneos.

ARITMÉTICA .
- Formacion de los números.........} Numeracion. | Formacion de los números enteros. | Infinitos números enteros.—
- Expresion de los números..........} | Expresion de los números.......... { verbal... Numeracion verbal. / escrita... Numeracion escrita.
- Composicion de los números....... { Suma. / Multiplicacion. / Elevacion á potencias.
- Descomposicion de los números. { Resta. / Division. / Extraccion de raices.
- Propiedades de los números...

NUMERACION VERBAL.

No es posible dar nombres arbitrarios á todos los números enteros, ni seria conveniente en el caso de que nos limitásemos á dárselos á muchos de ellos solamente. | Se ha elegido un corto número de palabras que combinadas convenientemente sirvan para expresar todos los números. |

Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez | Decena |

Una decena,	dos decenas,	tres decenas,	cuatro decenas,	cinco decenas,	seis decenas,	siete decenas,	ocho decenas,	nueve decenas,	diez decenas	centena
diez ,	*veinte* ,	*treinta* ,	*cuarenta* ,	*cincuenta* ,	*sesenta* ,	*setenta* ,	*ochenta* ,	*noventa* ,	*ciento*	

Diez y uno,	diez y dos,	diez y tres,	diez y cuatro,	diez y cinco,	diez y seis,	diez y siete,	diez y ocho,	diez y nueve,	veinte,	veinte y uno,	veinte y dos,
once ,	*doce* ,	*trece* ,	*catorce* ,	*quince*						*veintiuno* ,	*veintidos* ,

veinte y tres,....., veinte y nueve, treinta, treinta y uno, treinta y dos,....., treinta y nueve, cuarenta, cuarenta y uno, cuarenta y dos,....., noventa, noventa
veintitres , *veintinueve* ,
y uno, noventa y dos,....., noventa y nueve, ciento. |

Una centena, dos centenas, tres centenas, cuatro centenas, cinco centenas, seis centenas, siete centenas, ocho centenas, nueve centenas, diez centenas. | Millar. |
ciento , *doscientos* , *trescientos* , *cuatrocientos* , *quinientos* , *seiscientos* , *setecientos* , *ochocientos* , *novecientos* , *mil*

Ciento y uno, ciento y dos, ciento y tres,....., ciento noventa y nueve, doscientos, doscientos y uno, doscientos y dos,....., doscientos noventa y nueve, trescientos, trescientos y uno, trescientos y dos,....., trescientos noventa y nueve, cuatrocientos,....., novecientos, novecientos y uno, novecientos y dos,....., novecientos noventa y nueve, mil. |

Un millar, dos millares, tres millares,......., nueve millares, diez millares, once millares, doce millares,......., noventa y nueve millares, cien millares,
mil , *dos mil* , *tres mil* , *nueve mil* , *diez mil* , *once mil* , *doce mil* , *noventa y nueve mil* , *cien mil* ,
ciento y un millares, ciento y dos millares,..............., novecientos noventa y nueve millares, mil millares. | Millon. |
ciento un mil , *ciento dos mil*................., *novecientos noventa y nueve mil* , *millon.*

Mil y uno, mil y dos, mil y tres,....., mil novecientos noventa y nueve, dos mil, dos mil y uno, dos mil y dos,....., dos mil novecientos noventa y nueve, tres mil,....., novecientos noventa y nueve mil, novecientos noventa y nueve mil y uno, novecientos noventa y nueve mil y dos,....., novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve, un millon. |

Un millon, dos millones, tres millones,....., nueve millones, diez millones, once millones,....., noventa y nueve millones, cien millones, ciento y un millones, ciento y dos millones,....., novecientos noventa y nueve millones, mil millones, mil y un millones, mil y dos millones,....., mil novecientos noventa y nueve millones, dos mil millones,....., novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve millones, un millon de millones ó billon. |

Un millon y uno, un millon y dos,....., un millon novecientas noventa y nueve mil novecientas noventa y nueve unidades, dos millones, dos millones y uno, dos millones y dos,....., dos millones novecientas noventa y nueve mil novecientas noventa y nueve unidades, tres millones,....., novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve millones, novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve millones y uno, novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve millones y dos,...., novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve millones novecientas noventa y nueve mil novecientas noventa y nueve unidades, un billon. |

Un billon, dos billones,......, novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve billones, un millon de billones ó trillon. |

Números comprendidos entre cada dos colecciones consecutivas de billones. |

Un trillon, dos trillones, tres trillones,......, novecientos noventa y nueve mil novecientos noventa y nueve trillones, un millon de trillones ó cuatrillon. |

Números comprendidos entre cada dos colecciones consecutivas de trillones. | .... | Quillon, seisillon, sieteillon, ochoillon, nueveillon, diezillon,......., veinte y sieteillon,......, trescientos cuarenta y ocho mil seiscientos setenta y dosillon,......, millonillon,......, cuarenta y cinco millones quinientos setenta y ocho mil trescientos sesenta y cuatroillon,......, billonillon,...... | La nomenclatura es ilimitada. | Con las palabras: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, ciento, mil y la terminacion *illon* se pueden expresar todos los infinitos números enteros.

NUMERACION ESCRITA.

No es conveniente la escritura usual ó fonética. | Inconvenientes de los signos arbitrarios. | Se ha elegido un corto número de signos que combinados convenientemente sirvan para expresar todos los números. |

1	2	3	4	5	6	7	8	9
uno	dos	tres	cuatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve

Trescientos setenta y cuatro; 3, 7, 4; 743; se ignora de qué clase son las unidades expresadas por cada cifra. | Se han establecido dos convenios. | Primer convenio: dos clases de valores. { valor de figura ó absoluto. | valor de posicion ó relativo. |

Segundo convenio. { La primera cifra de la derecha de un número expresa unidades sencillas. Toda cifra colocada inmediatamente á la izquierda de otra expresa unidades diez veces mayores que las que expresa esta. |

7	unidades.
3	decenas.
4	centenas.
7	unidades de millar.
1	decena de millar.
2	centenas de millar.
8	unidades de millon.
6	decenas de millon.
7	centenas de millon.
8	unidades de millar de millon.
4	decenas de millar de millon.
3	centenas de millar de millon.
9	unidades de billon.
8	decenas de billon.
2	centenas de billon.
7	unidades de millar de billon.
1	decena de millar de billon.
2	centenas de millar de billon.
3	unidades de trillon.
8	decenas de trillon.
4	centenas de trillon.
....	....

374 | Veinte y tres mil setecientos cuarenta y ocho; 23748 | Trescientos ocho; 3, 8; 38 que se leeria treinta y ocho. | 0..... cero; símbolo de la nada y sirve para ocupar el lugar de la cifra de unidades de los órdenes que falten | 308 | Veinte mil cuarenta; 24; 20040 |

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 { Dado un número escrito, leerle. Dado un número al dictado, escribirle. | Explicacion para la lectura de un número que se dé escrito | Leer los números siguientes, por ejemplo:

4 m 3 m 2 m 1 m — m 6 m 5 m 4 m 3 m 2 m 1 m
4,875,143,680,943,768,510,824,467 | 8,900,734,002,000,000,070,000,486,543,200,008,976,454 |

Explicacion para la escritura de un número que se dé al dictado. | Escribir el número: ochenta y tres mil novecientos cuarenta y siete trillones, seiscientos dos mil quinientos setenta y dos billones, ochocientos setenta y dos mil novecientos cuarenta y cinco millones, seiscientos treinta y siete mil cuatrocientas noventa y dos unidades; m 3 m 2 m 1 m 83,947,602,572,872,945,637,492 | Escribir el número: setenta mil ochenta y tres octillones, cuatro mil quinientos veinte y ocho sietillones, novecientos dos mil cuatro quillones, mil doscientos noventa y siete cuatrillones, seis cientos mil cuatrocientos dos trillones, mil veinte unidades; m 8 m 7 m 6 m 5 m 4 m 3 m 2 m 1 m 70,083,004,528,000,000,902,004,001,297,600,402,000,000,000,000,001,020 | Los ceros á la izquierda de un número no le alteran: 348 / 00348 | Los ceros á la derecha de un número le alteran: 874 / 87400 | Los ceros colocados entre las cifras de un número le alteran: 872 / 87002 | 453 / 40503

Números dígitos....... los que se expresan con una sola cifra. |
Números polidígitos... los que se expresan con mas de una cifra. |

Los signos empleados se llaman { cifras. guarismos. caractéres arábigos. |

SISTEMA DE NUMERACION ROMANA.

En qué consiste | Usos | I, V, X, L, C, D, M | Convenios | I, II, III, IV ó IIII, V, VI, VII, VIII, IX, X—
1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000

X, XI, XII, XIII, XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX	C, CI, CII,............................	M, MI, MII,.......MCCCLXVIII,............
XX, XXI, XXII,............................	CC,........CCLXXVIII,.....................	MM ó $\bar{M}$ ó II^m..............................
XXX, XXXI, XXXII,............................	CCC,............................	MMM ó $\bar{\bar{M}}$ ó III_m............................
XL,........VL,........................IL	CD,.......LD,........XD,.......VD,.......ID	IV_m............................
L, LI,......LIV,............................	D............................	V_m
LX,........................LXVIII..........	DC............................	⋮
LXX............................	DCC............................	$(LXXXVII)_m$............................
LXXX............................	DCCC............................	⋮
XC,...............VC,..................IC	CM......LM,.......XM,.......VM,.......IM	$(CDLXIV)_m$............................
C.	M.	⋮
		M_m

$(MM)_m$, $(MMM)_m$,....... | 894728; $(DCCCXCIV)_m$ DCCXXVIII | I_{m_m}, II_{m_m}.......$XXVII_{m_m}$.......$M_{m_{m_m}}$..............

Álgebra | $+$, $-$, $\times$ ó $\cdot$, $:$ ó $-$, $=$, $>$, $<$, $\sqrt{}$ | Las letras no tienen valor determinado, si no el que se las quiera asignar.
mas, menos, multiplicado por, dividido por, igual á, mayor que, menor que, raiz de

A, B, C, D,.......
a, b, c, d,.......
$\alpha, \epsilon, \gamma, \partial$,.......
A, B, Γ, Δ,.......
$a', a'', a''', a^{\text{iv}}$,...
$a_{,}, a_{,,}, a_{,,,}, a_{,\text{iv}}$,...
$'a, ''a, '''a, {}^{\text{iv}}a$,...
$_{,}a, _{,,}a, _{,,,}a, _{,\text{iv}}a$,...
a_0, a_1, a_2, a_3,....
$\bar{a}, \bar{\bar{a}}, \bar{\bar{\bar{a}}}$,.........
$\underline{a}, \underline{\underline{a}}, \underline{\underline{\underline{a}}}$,.........
$\frown{a}$, ...,.........
$\smile{a}$, ...,.........
....

Proposicion { Definicion | Teorema..... se demuestra | Problema { incógnitas, datos } solucion..... se resuelve } | Demostracion { á priori | á posteriori | por absurdo | á fortiori } | Resolucion de un problema. | Axioma. |

Ejemplos de axiomas | Postulado | Lema | Corolario | Escolio | Proposicion { sujeto | hipótesis | conclusion } | Proposicion inversa | Proposicion recíproca |

Las proposiciones inversas ó recíprocas de otras verdaderas pueden ser y pueden no ser verdaderas. | Hipótesis y conclusiones contradictorias. | Si hechas todas las hipótesis posibles sobre un sujeto las conclusiones que se obtienen son incompatibles, las recíprocas serán todas verdaderas:

H, H', H'', H'''......... | C, C', C'', C'''..........
C, C', C'', C'''......... | H, H', H'', H'''..........
| Círculo vicioso. | Peticion de principio. |

SUMA Ó ADICION.

Suma ó adicion. | Sumandos. | Suma ó total. | + ; 8 + 5 + 3 | Método elemental; 8 + 4 + 6 = 18 | Igualdad { Primer miembro. / Segundo miembro. | Método usual;

49148 + 91 + 5272 + 4 + 86143 + 4055 + 66146 = 210859;

49148	....
91	....
5272	....
4	....
86143	....
4055	....
66146	....
210859	3070674

25'4 / 25, 104'7 / 104, 180'6 / 180, 307'0 / 307 | Se puede empezar la suma por la izquierda ....

49148
91
5272
4
86143
4055
66146
180539
3 32
110859
1
210859

| Se puede hacer la suma en cualquier órden

$$\begin{array}{r} \overset{4}{4}\;\overset{1}{9}\;\overset{3}{1}\;\overset{2}{4}\;\overset{5}{8} \\ 9\;1 \\ 5\;2\;7\;2 \\ 4 \\ 8\;6\;1\;4\;3 \\ 4\;0\;5\;5 \\ 6\;6\;1\;4\;6 \\ \hline 3\;0\;8\;3\;9 \\ 1\;8\;\;\;\;\;2\;\; \\ \hline 2\;1\;0\;8\;5\;9 \end{array}$$

872 + 67 + 4 + 8983 + 47 + 672 + 8924 + 6074 + 586 + 43 + 94589 + 87 + 7362 + 872 + 45739 + 376 + 279 + 144 + 68 + 4965 = 180753.

872	8924			10645
67	6074	7362	279	110303
4	586	872	144	54349
8983	43	45739	68	5456
47	94589	376	4965	
672	87			
10645	110303	54349	5456	180753

Qué se hace para efectuar la suma cuando los sumandos se han de colocar en varias páginas. | Prueba de una operacion. | Indicios de la prueba. | El órden de sumandos no altera la suma. | Prueba de la suma. | Para sumar números concretos se necesita que sean homogéneos. | La suma de varios números concretos es de la misma especie que los sumandos. | Los números concretos homogéneos se suman lo mismo que los abstractos. | 438 lib.s + 49 lib.s + 7684 lib.s + 347 lib.s = 8518 lib.s

438 lib.s
49 lib.s
7684 lib.s
347 lib.s
8518 lib.s

RESTA Ó SUSTRACCION.

DEFINICION.. | Minuendo. / Sustraendo. / Resta ó resto, exceso ó diferencia. | Minuendo = Sustraendo + Resta | 2.ª definicion. | 3.ª definicion. | De cada definicion se deducen las otras dos. | — ; 12 — 7 | Método elemental; 12 — 7 = 5. | Método usual. | Alteracion de la resta al aumentar ó disminuir el minuendo ó el sustraendo ó ambos en una cantidad.

$$\left.\begin{array}{l} a \ldots \text{ minuendo.} \\ b \ldots \text{ sustraendo.} \\ c \ldots \text{ resta.} \end{array}\right\} a-b=c,\ a=b+c \left\{\begin{array}{l} a+m=(b+m)+c,\ (a+m)-(b+m)=c \\ a-m=(b-m)+c,\ (a-m)-(b-m)=c \\ a+m=\ b+(c+m),\ (a+m)-\ b=c+m \\ a-m=\ b+(c-m),\ (a-m)-b=c-m \\ a=(b+m)+(c-m),\ \ a-(b+m)=c-m \\ a=(b-m)+(c+m),\ \ a-(b-m)=c+m \end{array}\right.$$

$8547487 - 301424 = 8246063;$ $\begin{array}{r} 8547487 \\ 301424 \\ \hline 8246063 \end{array}$

$804842737 - 297056283 = 507786454;$ $\begin{array}{r} 804842737 \\ 297056283 \\ \hline 507786454 \end{array}$

Se puede empezar por la izquierda. $\begin{array}{r} 8547487 \\ 301424 \\ \hline 8246063 \end{array}$ $\begin{array}{r} 804842737 \\ 297056283 \\ \hline 617896554 \\ 11\ 11\ 1\ \ \\ \hline 507786454 \end{array}$ Se puede seguir cualquier órden. $\begin{array}{ccccccc} \overline{8}^{7} & \overline{5}^{2} & \overline{4}^{6} & \overline{7}^{1} & \overline{4}^{4} & \overline{8}^{3} & \overline{7}^{5} \\ & 3 & 0 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ \hline 8 & 2 & 4 & 6 & 0 & 6 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{ccccccccc} \overline{8}^{7} & \overline{0}^{4} & \overline{4}^{9} & \overline{8}^{1} & \overline{4}^{6} & \overline{2}^{8} & \overline{7}^{3} & \overline{3}^{2} & \overline{7}^{5} \\ 2 & 9 & 7 & 0 & 5 & 6 & 2 & 8 & 3 \\ \hline 6 & 1 & 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & & & & \\ \hline 5 & 0 & 7 & 7 & 8 & 6 & 4 & 5 & 4 \end{array}$

Para que se puedan restar los números concretos han de ser homogéneos. | La resta de números homogéneos es de la misma especie que el minuendo y el sustraendo. | Los números homogéneos se restan como los abstractos.

$4587\ @ - 2194\ @ = 2393\ @$ $\begin{array}{r} 4587\ @ \\ 2194\ @ \\ \hline 2393\ @ \end{array}$ Prueba de la resta. $\begin{array}{r} 804842737 \\ 297056283 \\ \hline 507786454 \\ \hline 804842737 \end{array}$ Prueba de la suma separando uno de los sumandos: $\begin{array}{r} 487467 \\ \hline 3876 \\ 49308 \\ 476843 \\ 18976 \\ 378564 \\ \hline 1415034 \\ 927567 \\ \hline 487467 \end{array}$ Prueba de la suma deshaciendo la operacion: $\begin{array}{r} 487467 \\ 3876 \\ 49308 \\ 476843 \\ 18976 \\ 378564 \\ \hline 1415034 \\ 344330 \end{array}$

$a+(b+c+d+\ldots)=a+b+c+d+\ldots$ | $a+(b-c)=a+b-c$ | $a-(b+c+d+\ldots)=a-b-c-d-\ldots$ |
$a-(b-c)=a-b+c$ | $a+(b-c+d-e+\ldots)=a+b-c-d+e-\ldots$ | $a-(b-c+d-e+\ldots)=a-b+c-d+e-\ldots$

MULTIPLICACION.

DEFINICION.. | Producto.......Multiplicando. / Multiplicador..........1 | Factores del producto | $\times$ ó $\cdot$ | 8×5 ó 8.5, $a\times b$ ó $a\cdot b$ | Cómo se formará el producto cuando el multiplicador sea entero. | 2.ª definicion para el caso en que el multiplicador sea entero. | $8\times4=8+8+8+8$; $a\times m=a+a+a+\ldots\ldots^{m}$ |
M.do ..... abstracto. / M.or ..... abstracto. } Producto abstracto. | M.do .... concreto. / M.or .... abstracto. } Producto concreto de la especie del multiplicando. | M.do ..... concreto. / M.or ..... concreto. } No puede existir este caso. 8 v.s á 7 r.s; 8 v.s $\times$ 7. Para el hecho de la multiplicacion se considera el multiplicador como abstracto y se estará en el segundo caso por lo que el producto será concreto de la especie del multiplicando. | M.do .... abstracto. / M.or .... concreto. } No puede existir este caso: 4 f.s á 7; 7×4. Para el hecho de la multiplicacion se considera el multiplicador como abstracto y se estará en el primer caso, por lo que el producto será abstracto. | El

multiplicador siempre es abstracto. | El producto de cualquier número por la unidad es igual al mismo número; $a \times 1 = a$. | El producto de la unidad por cualquier número es igual á este mismo número; $1 \times a = a$. | El producto de cualquier número por cero es igual á cero; $a \times 0 = 0$. | El producto de cero por cualquier número es igual á cero; $0 \times a = 0$. | Qué se entiende por ser un número n veces mayor que otro. | Qué se entiende por ser un número n veces menor que otro. | Multiplicar un número por la unidad seguida de ceros; $abcd \times 1000 \ldots\ldots^{m} = abcd000 \ldots\ldots^{m}$; $587 \times 1000 = 587000$. | Método elemental; $37 \times 6 = 37 + 37 + 37 + 37 + 37 + 37$. |

Multiplicar { Dígito por dígito | Polidígito por dígito | Cualquiera por polidígito } | 1.er caso. Tabla de Pitágoras. | Uso de la tabla de Pitágoras. | $6 \times 5 = 30$; $4 \times 8 = 32$ |

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12......
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24......
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36......
4	8	12	16	20	24	28	32	36			
5	10	15	20	25	30	35	40	45			
6	12	18	24	30	36	42	48	54			
7	14	21	28	35	42	49	56	63			
8	16	24	32	40	48	56	64	72			
9	18	27	36	45	54	63	72	81			
10	20	30	40	50	60	70	80	90			
11	22	33	44	55	66	77	88	99			
12	24	36	48	60	72	84	96	108			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			

La tabla de Pitágoras es ilimitada. | 2.º caso. $7843 \times 6 = 7843 + 7843 + 7843 + 7843 + 7843 + 7843 = 47058$.

```
 7 8 4 3
 7 8 4 3      7843
 7 8 4 3         6
 7 8 4 3     -----
 7 8 4 3     47058
 7 8 4 3
---------
 4 7.0 5 8
```

3.er caso. $35472 \times 6734 = \overbrace{35472 + 35472 + 35472 + \ldots\ldots\ldots\ldots}^{6734} = \left(\overbrace{35472 + 35472 + 35472 + \ldots\ldots\ldots\ldots}^{6000}\right) + \left(\overbrace{35472 + 35472 + 35472 + \ldots\ldots\ldots\ldots}^{700}\right) + \left(\overbrace{35472 + 35472 + 35472 + \ldots\ldots\ldots}^{30}\right) + \left(35472 + 35472 + 35472 + 35472\right) = \left(\overbrace{35472 \times 6 + 35472 \times 6 + 35472 \times 6 + \ldots\ldots}^{1000}\right) \left(\overbrace{35472 \times 7 + 35472 \times 7 + 35472 \times 7 + \ldots\ldots\ldots\ldots}^{100}\right) + \left(\overbrace{35472 \times 3 + 35472 \times 3 + 35472 \times 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}^{10}\right) + 35472 \times 4 = 35472 \times 6 \times 1000 + 35472 \times 7 \times 100 + 35472 \times 3 \times 10 + 35472 \times 4 = 35472 \times 4 + 35472 \times 3 \times 10 + 35472 \times 7 \times 100 + 35472 \times 6 \times 1000$;

```
    35472          35472
     6734           6734
   ------         ------
   141888         141888
  1064160         106416
 24830400         248304
212832000         212832
---------       ---------
238868448       238868448
```

$3 \times 367427 = 1102281$

```
 367427
      3
-------
     21
      6
     12
     21
     18
      9
-------
1102281
```

Abreviacion cuando hay ceros intermedios en el multiplicador.

```
      378              378
   400703           400703
   ------          -------
     1134             1134
     000             2646
    2646            1512
    000            ---------
   000             151465734
  1512
 ---------
 151465734
```

Abreviacion cuando el multiplicando termina en ceros.

$$\left.\begin{array}{l} 378000 \times 25 = \underbrace{378000 + 378000 + 378000 + \ldots\ldots}_{25} \\ 378 \times 25 = \underbrace{378 + 378 + 378 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{25} \end{array}\right\} 378000 \times 25 = 378 \times 25 \times 1000; \quad \begin{array}{r} 378000 \\ 25 \\ \hline 1134 \\ 756 \\ \hline 8694000 \end{array}$$

Abreviacion cuando el multiplicador termine en ceros.

$$\left.\begin{array}{l} 672 \times 47000 = \underbrace{672 + 672 + 672 + \ldots\ldots\ldots}_{47000} \\ 672 \times 47 = \underbrace{672 + 672 + 672 + \ldots\ldots\ldots\ldots}_{47} \end{array}\right\} 672 \times 47000 = 672 \times 47 \times 1000; \quad \begin{array}{r} 672 \\ 47000 \\ \hline 4704 \\ 2688 \\ \hline 31584000 \end{array}$$

Abreviacion cuando el multiplicando y el multiplicador terminan en ceros.

$$\left.\begin{array}{l} 893000 \times 4600 \\ 893000 \times 46 \\ 893 \times 46 \end{array}\right\} 893000 \times 4600 = 893 \times 46 \times 100000; \quad \begin{array}{r} 893000 \\ 4600 \\ \hline 5358 \\ 3572 \\ \hline 4107800000 \end{array}$$

El órden de dos factores no altera el producto de ellos;

$$7 \times 4 = 7 + 7 + 7 + 7; \quad \begin{array}{r} 1+1+1+1+1+1+1 = 7 \\ 1+1+1+1+1+1+1 = 7 \\ 1+1+1+1+1+1+1 = 7 \\ 1+1+1+1+1+1+1 = 7 \\ \hline 4+4+4+4+4+4+4 \end{array} \left\{\begin{array}{l} 7\times 4 \\ 4 \times 7 \end{array}\right\} 7 \times 4 = 4 \times 7$$

$$a \times b = \underbrace{a + a + a + \ldots}_{b}; \quad \begin{array}{l} \underbrace{1+1+1+1+1+\ldots}_{a} = a \\ \underbrace{1+1+1+1+\ldots}_{a} = a \\ \underbrace{1+1+1+1+\ldots}_{a} = a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b \\ \hline \underbrace{b + b + b + b + \ldots}_{a} \end{array} \left\{\begin{array}{l} a \times b \\ b \times a \end{array}\right\} a \times b = b \times a$$

Cómo se interpreta un producto de esta forma: $a \times b \times c \times d \times e \times f \times g \times \ldots\ldots$

Invertir el órden de dos factores consecutivos.

Cambiar de cualquier modo el órden de los factores.

Invertir el órden de los dos primeros.

Invertir el órden de los dos últimos.

Invertir el órden de dos consecutivos cualesquiera.

$a \times b \times c \times d \times e \times f \times g$; $a \times b = b \times a$; $a \times b \times c = b \times a \times c$; $a \times b \times c \times d = b \times a \times c \times d$; $a \times b \times c \times d \times e = b \times a \times c \times d \times e$; $a \times b \times c \times d \times e \times f = b \times a \times c \times d \times e \times f$; $a \times b \times c \times d \times e \times f \times g = b \times a \times c \times d \times e \times f \times g$ | $a \times b \times c \times d \times e \times f \times g$; $a \times b \times c \times d \times e = \mathrm{M}$; $\mathrm{M} \times f \times g$; $\mathrm{M} \times f = \underbrace{\mathrm{M} + \mathrm{M} + \mathrm{M} + \ldots\ldots\ldots}_{f}$; $\mathrm{M} \times f \times g = (\underbrace{\mathrm{M} + \mathrm{M} + \mathrm{M} + \ldots\ldots\ldots}_{f}) \times g = \underbrace{\mathrm{M} \times g + \mathrm{M} \times g + \mathrm{M} \times g + \ldots\ldots\ldots}_{f} = \mathrm{M} \times g \times f$; $\mathrm{M} \times f \times g = \mathrm{M} \times g \times f$; $a \times b \times c \times d \times e \times f \times g = a \times b \times c \times d \times e \times g \times f$ | $a \times b \times \bar{c} \times \bar{d} \times e \times f \times g$; $a \times b \times c \times d = a \times b \times d \times c$; $a \times b \times c \times d \times e = a \times b \times d \times c \times e$; $a \times b \times c \times d \times e \times f = a \times b \times d \times c \times e \times f$; $a \times b \times c \times d \times e \times f \times g = a \times b \times d \times c \times e \times f \times g$ | $a \times b \times c \times d \times e \times f \times g$, $f \times d \times g \times a \times c \times e \times b$; $f \times a \times b \times c \times d \times e \times g$, $f \times d \times a \times b \times c \times e \times g$, $f \times d \times g \times a \times b \times c \times e$, $f \times d \times g \times a \times c \times b \times e$, $f \times d \times g \times a \times c \times e \times b$ | Para multiplicar un producto por un número basta multiplicar uno de los factores del producto por el número conservando los demás: $(a\times b\times \bar{c}\times d\times e\times f)\times m = a\times b\times c\times d\times e\times f\times m = c\times m\times a\times b\times d\times e\times f = (c\times m)\times a\times b\times d\times e\times f = a\times b\times(c\times m)\times d\times e\times f$; $(a\times b\times c\times d\times e\times f)\times m = a\times b\times(c\times m)\times d\times e\times f$; $(2\times 5\times 3\times 7\times 6)\times 4 = 2\times 5\times 3\times \bar{7}\times 6\times 4 = 7\times 4\times 2\times 5\times 3\times 6 = 28\times 2\times 5\times 3\times 6 = 2\times 5\times 3\times 28\times 6$; $(2\times 5\times 3\times 7\times 6)\times 4 = 2\times 5\times 3\times 28\times 6$ | Multiplicando uno de los factores de un producto por un número, queda multiplicado el producto por este número. | Para multiplicar un número por un producto basta multiplicarle sucesivamente por los factores de este producto: $m\times(a\times b\times c\times d\times e\times f) = (a\times b\times c\times d\times e\times f)\times m = a\times b\times c\times d\times e\times f\times m = m\times a\times b\times c\times d\times e\times f$; $m\times(a\times b\times c\times d\times e\times f) = m\times a\times b\times c\times d\times e\times f$; $7\times(2\times 5\times 8\times 4\times 3) = (2\times 5\times 8\times 4\times 3)\times 7 = 2\times 5\times 8\times 4\times 3\times 7 = 7\times 2\times 5\times 8\times 4\times 3$; $7\times(2\times 5\times 8\times 4\times 3) = 7\times 2\times 5\times 8\times 4\times 3$ | Multiplicar á un número sucesivamente por varios factores equivale á multiplicarle por el producto de estos factores | $378000\times 25 = (378\times 1000)\times 25 = (378\times 25)\times 1000$;

$$\begin{array}{r} 378000 \\ 25 \\ \hline 1134 \\ 756 \\ \hline 8694000 \end{array}$$

$672\times 47000 = 672\times(47\times 1000) = 672\times 47\times 1000$;

$$\begin{array}{r} 672 \\ 47000 \\ \hline 4704 \\ 2688 \\ \hline 31584000 \end{array}$$

$895000\times 4600 = (895\times 1000)\times(46\times 100) = 895\times 1000\times 46\times 100 = 895\times 46\times 1000\times 100 = 895\times 46\times(1000\times 100) = 895\times 46\times 100000$;

$$\begin{array}{r} 895000 \\ 4600 \\ \hline 5358 \\ 3572 \\ \hline 4107800000 \end{array}$$

Multiplicar una suma por un número: $(a+b+c+d+\ldots..)\times m = a\times m + b\times m + c\times m + d\times m + \ldots..$ | Multiplicar la suma ó diferencia de varios números por un número: $(a+b-c-d+e+f-g+\ldots..)\times m = a\times m + b\times m - c\times m - d\times m + e\times m + f\times m - g\times m + \ldots..$ | Factor comun. | Sacar un factor comun. | $a\times m + b\times m + c\times m + \ldots = (a+b+c+\ldots)\times m = m\times(a+b+c+\ldots)$ | $a\times m - b\times m + c\times m + d\times m - e\times m + \ldots = (a-b+c+d-e+\ldots)\times m = m\times(a-b+c+d-e+\ldots)$ | Número mayor y número menor de cifras que tiene un producto de dos factores con relacion al número de cifras que tengan estos factores:

Multiplicando..... m cifras
Miltiplicador...... n cifras

$$\begin{array}{r} \overset{m}{9999\ldots..} \\ \underset{n}{999\ldots..} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{m}{9999\ldots\ldots} \\ \overset{n\ \text{ceros}}{100\ldots\ldots} \\ \hline \underset{m}{9999\ldots}\ \underset{n}{000\ldots} \end{array}$$

A lo mas $m+n$ cifras;

$$\begin{array}{r} \overset{m\ \text{cifras}}{1000\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \overset{n-1\ \text{ceros}}{100\ldots\ldots\ldots} \\ \hline \overset{m\ \text{cifras}}{1000\ldots\ldots}\overset{n\ \text{ceros}}{000\ldots\ldots\ldots} \end{array}$$

A lo menos $m+(n-1) = m+n-1$

A lo mas tantas cifras como tienen los dos factores.
A lo menos tantas cifras menos una como tienen los dos factores.

Prueba de la multiplicacion:

$$\begin{array}{r} 437 \\ 28 \\ \hline 3496 \\ 874 \\ \hline 12236 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ 437 \\ \hline 196 \\ 84 \\ 112 \\ \hline 12236 \end{array}$$

Múltiplos de un número; múltiplos de 3 $\left\{\begin{array}{l} 15 = 3 \times 5 \\ 12 = 3 \times 4 \\ 24 = 3 \times 8 \\ \dots\dots\dots \end{array}\right.$ múltiplo de $a \dots a \times m$ | Submúltiplos de un número; submúltiplos de 36 $\left\{\begin{array}{l} 2,\ 18 \times 2 = 36 \\ 9,\ \ 4 \times 9 = 36 \\ 3,\ 12 \times 3 = 36 \\ \dots\dots\dots \end{array}\right.$ Sub-múltiplo de $a \times m \left\{\begin{array}{l} a \\ m \end{array}\right.$ | Potencia de un número. | 1ª, 2ª, 3ª, 4ª,... potencia. | Elevacion á potencias. | $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^4$, $a \times a \times a \times \dots\dots = a^m$ |

Exponente. | Base ó raiz de una potencia. | Cuadrado: $9 \times 9 = 9^2$, $a \times a = a^2$ | Cubo: $8 \times 8 \times 8 = 8^3$, $a \times a \times a = a^3$ | Formar una potencia cualquiera de 10; $10^m = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times \dots\dots = 100000\dots\dots^m$; $10^7 = 10000000$ |

DIVISION DE NÚMEROS ENTEROS.

DEFINICION.. | Div.^do = Div.^or × Coc.^te | 2.ª definicion. | 3.ª definicion. | ($\vdots$) ó (—); $12 \vdots 4$ ó $\frac{12}{4}$ | $\left.\begin{array}{l} \text{Div.}^{do} \dots \text{ abstracto.} \\ \text{Div.}^{or} \dots \text{ abstracto.} \end{array}\right\}$ El cociente hace de multiplicando ó de multiplicador y es abstracto. $\left|\begin{array}{l} \text{Div.}^{do} \dots \text{ concreto.} \\ \text{Div.}^{or} \dots \text{ abstracto.} \end{array}\right\}$ El cociente hace de multiplicando y es concreto de la especie del dividendo | $\begin{array}{l} \text{Div.}^{do} \dots \text{ concreto} \\ \text{Div.}^{or} \dots \text{ concreto} \end{array}$ de igual especie $\}$ El cociente hace de multiplicador y es abstracto. $\left|\begin{array}{l} \text{Div.}^{do} \dots \text{ concreto} \\ \text{Div.}^{or} \dots \text{ concreto} \end{array}\right.$ de diferente especie. $\}$ No cabe este caso; 7 lib.^s han costado 28 r.^s ¿cuánto cada libra? 28 r.^s $\vdots$ 7 = 4 r.^s. Para el hecho de la division se considera al divisor como abstracto y se está en el segundo caso, por lo que el cociente hace de multiplicando y es concreto de la especie del dividendo. $\left|\begin{array}{l} \text{Div.}^{do} \dots \text{ abstracto.} \\ \text{Div.}^{or} \dots \text{ concreto.} \end{array}\right\}$ No es posible este caso. 6 v.^s han valido 30 ¿cuánto cada vara? $30 \vdots 6 = 5$. Para el hecho de la division se considera al divisor como abstracto y se está en el segundo caso, pero el cociente, que hace de multiplicando, es abstracto. | Método elemental, $48 \vdots 6$ $\begin{array}{r} 48 \\ 6 \\ \hline 42 \end{array}$ $\begin{array}{r} 42 \\ 6 \\ \hline 36 \end{array}$ $\begin{array}{r} 36 \\ 6 \\ \hline 30 \end{array}$ $\begin{array}{r} 30 \\ 6 \\ \hline 24 \end{array}$ $\begin{array}{r} 24 \\ 6 \\ \hline 18 \end{array}$ $\begin{array}{r} 18 \\ 6 \\ \hline 12 \end{array}$ $\begin{array}{r} 12 \\ 6 \\ \hline 6 \end{array}$ $\begin{array}{r} 6 \\ 6 \\ \hline 0 \end{array}$ $48 \vdots 6 = 8$; $38 \vdots 5$, $\begin{array}{r} 38 \\ 5 \\ \hline 33 \end{array}$ $\begin{array}{r} 33 \\ 5 \\ \hline 28 \end{array}$ $\begin{array}{r} 28 \\ 5 \\ \hline 23 \end{array}$ $\begin{array}{r} 23 \\ 5 \\ \hline 18 \end{array}$ $\begin{array}{r} 18 \\ 5 \\ \hline 13 \end{array}$ $\begin{array}{r} 13 \\ 5 \\ \hline 8 \end{array}$ $\begin{array}{r} 8 \\ 5 \\ \hline 3 \end{array}$ $38 \vdots 5 \dots\dots 7, 3.$ | División exacta. División inexacta. | Cociente entero. Resíduo. | Div.^do = Div.^or × Coc.^te entero + Resíduo | Cociente exacto. | El resíduo es siempre menor que el divisor. | El cociente de todo número dividido por la unidad es el mismo número; $a \vdots 1 = a$ | El cociente de todo número dividido por sí mismo es la unidad; $a \vdots a = 1$ | El cociente de cero dividido por cualquier número es cero; $0 \vdots a = 0$ | Decir que un número es n veces menor que otro equivale á decir que es cociente de este otro dividido por n.

Div.^{or} dígito y dividendo <10 veces el divisor.
Div.^{or} polidígito y dividendo <10 veces el divisor.
Div.^{or} cualquiera y dividendo >10 veces el divisor.

1.^{er} caso; Divisor dígito y dividendo menor que diez veces el divisor.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

El cociente entero será dígito y lo mismo el cociente exacto si la division lo fuere tambien.

Se hallarán uno ú otro por medio de la tabla de Pitágoras.

$48 \,\dot{:}\, 6 = 8;\ 60 \,\dot{:}\, 7;\ \left.\begin{array}{l}\text{coc.}^{te} > 8,\ 7\times 8 = 56 < 60.\\ \text{coc.}^{te} < 9,\ 7\times 9 = 63 > 60.\end{array}\right\}$ El cociente entero....8; el resto.....4; $60 = 7\times 8 + 4.$

2.° caso. Divisor polidígito y dividendo menor que 10 veces el divisor. El cociente exacto ó el entero serán dígitos. $25846 \,\dot{:}\, 3279;\ a,\ R;\ 25{,}846 =$

$$3279\times a + R = \left(\overset{\text{millares}}{3} + \overset{\text{centenas}}{2} + \overset{\text{decenas}}{7} + \overset{\text{unidades}}{9}\right)\times a + R = \overset{\text{mills.}}{3}\times a + \overset{\text{cents.}}{2}\times a + \overset{\text{decs.}}{7}\times a + \overset{\text{unids.}}{9}\times a + R;\ \overset{\text{mills.}}{3}\times a,\ \frac{\overset{\text{mills.}}{3}\times a}{3^{\text{mills.}}} = a;\ \frac{25}{3} \not< a;\ 25 = \overset{\text{mills.}}{3}\times a + \overset{\text{mills.}}{h},$$

$$\overset{\text{mills.}}{h} \begin{array}{c}<\\=\\>\end{array} \overset{\text{mills.}}{3}\qquad \begin{array}{r|l} 25{,}846 & 3279 \\ \underline{22953} & \overline{7} \\ 02893 & \end{array}$$

$R = 2893;\ 25846 = 3279\times 7 + 2893$ | 3.^{er} caso. Divisor cualquiera y dividendo mayor que 10 veces el divisor.

El cociente será polidígito. $9981272 \,\dot{:}\, 4196;$

$$\begin{array}{l} 4196\times 10 = 41960 < 9981272\\ 4196\times 100 = 419600 < 9981272\\ 4196\times 1000 = 4196000 < 9981272\\ 4196\times 10000 = 41960000 > 9981272 \end{array}$$

El cociente tendrá cuatro cifras, $m,\ c,\ d,\ u,$ R; $9981{,}272 =$

$$m\,c\,d\,u\times 4196 + R = \left(\overset{\text{mills.}}{m} + \overset{\text{cents.}}{c} + \overset{\text{decs.}}{d} + \overset{\text{unids.}}{u}\right)\times 4196 + R = \overset{\text{mills.}}{m}\times 4196 + \overset{\text{cents.}}{c}\times 4196 + \overset{\text{decs.}}{d}\times 4196 + \overset{\text{unids.}}{u}\times 4196 + R;\ \overset{\text{mills.}}{m}\times 4196,\ \frac{\overset{\text{mills.}}{m}\times 4196}{4196} = \overset{\text{mills.}}{m}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{9981}{4196} \not< m \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{9981272}{4196}\ \ldots\ldots\ \overset{\text{mills.}}{m} + \overset{\text{unids.}}{999} \\ \dfrac{9981000}{4196}\ \ldots\ldots\ (\overset{\text{mills.}}{m} + 1) = \overset{\text{mills.}}{m} + \overset{\text{unids.}}{1000} \end{array}\right\}\ \frac{9981}{4196} \not> m \left\{\ \frac{9981}{4196}\ \ldots \overset{\text{mills.}}{m}\right.$$

$15892{,}72 = \overset{\text{cents.}}{c}\times 4196 + \overset{\text{decs.}}{d}\times 4196 + \overset{\text{unids.}}{u}\times 4196 + R;\ \overset{\text{cents.}}{c}\times 4196;\ \dfrac{\overset{\text{cents.}}{c}\times 4196}{4196} = \overset{\text{cents.}}{c};$

$$\begin{array}{r|l}
9981,272 & 4196 \\ \cline{2-2}
8392 & 2378 \\ \cline{1-1}
15892,72 & \\
12588 & \\ \cline{1-1}
33047,2 & \\
29372 & \\ \cline{1-1}
03675\ 2 & \\
3356\ 8 & \\ \cline{1-1}
0318\ 4 &
\end{array}
\quad
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{15892}{4196} \not< c \ldots\ldots\ldots\ldots \\[2mm]
\dfrac{1589272}{4196} \ldots \overset{\text{cents.}}{c} + \overset{\text{unids.}}{99} \\[2mm]
\dfrac{1589200}{4196} \ldots (c+1)^{\text{cents.}} = \overset{\text{cents.}}{c} + \overset{\text{unids.}}{100}
\end{array}\right\} \left\{\dfrac{15892}{4196} \not> c\right.$$

$$\dfrac{15892}{4196} \ldots \overset{\text{cents.}}{c}\ ;\ 33047,2 = \overset{\text{decs.}}{d} \times 4196 + \overset{\text{unids.}}{u} \times 4196 + R;\ \overset{\text{decs.}}{d} \times 4196;\ \dfrac{\overset{\text{decs.}}{d} \times 4196}{4196} = \overset{\text{decs.}}{d}\ ;$$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{33047}{4196} \not< d \ldots\ldots\ldots\ldots \\[2mm]
\dfrac{330472}{4196} \ldots \overset{\text{decs.}}{d} + \overset{\text{unids.}}{9} \\[2mm]
\dfrac{330470}{4196} \ldots (d+1)^{\text{decs.}} = \overset{\text{decs.}}{d} + \overset{\text{unids.}}{10}
\end{array}\right\} \left\{\dfrac{33047}{4196} \not> d\right.$$

$$\dfrac{33047}{4196} \ldots \overset{\text{decs.}}{d}\ ;\ 36752 = \overset{\text{unids.}}{u} \times 4196 + R;\ 3184 = R;\ 9981272 = 4196 \times 2378 + 3184$$

$$\begin{array}{r|l}
9981,2,7,2 & 4196 \\ \cline{2-2}
8392 & 2378 \\ \cline{1-1}
15892 & \\
12588 & \\ \cline{1-1}
33047 & \\
29372 & \\ \cline{1-1}
036752 & \\
33568 & \\ \cline{1-1}
03184 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{c}{\text{Restas y multiplicaciones á la vez.}} \\
9981,2,7,2, & 4196 \\ \cline{2-2}
15892 & 2378 \\
\ \ 33047 & \\
\ \ \ 36752 & \\
\ \ \ \ 3184 &
\end{array}$$

$$\overset{\text{mills.}}{9981} = \overset{\text{mills.}}{m} \times 4196 + \overset{\text{mills.}}{h}\ ;\ h \text{ son á lo mas los mill.}^s \text{ de } (4196 \times 999 + 4195) \text{ que no llegan á ser 4196 mill.}^s$$

$$\overset{\text{cents.}}{15892} = \overset{\text{cents.}}{c} \times 4196 + \overset{\text{cents.}}{h'}\ ;\ h' \text{ son á lo mas las cent.}^s \text{ de } (4196 \times 99 + 4195) \text{ que no llegan á ser 4196 cent.}^s$$

$$\overset{\text{decs.}}{33047} = \overset{\text{decs.}}{d} \times 4196 + \overset{\text{decs}}{h''}\ ;\ h'' \text{ son á lo mas las dec.}^s \text{ de } (4196 \times 9 + 4195) \text{ que no llegan á ser 4196 dec.}^s$$

Si algun dividendo parcial es menor que el divisor, se pone la cifra 0 en el cociente y se baja á la derecha de aquel la cifra siguiente del dividendo.

Explicacion del modo de hacer el tanteo de las cifras empezando las multiplicaciones y restas por la izquierda, en este ejemplo:

$$\begin{array}{l|l}
398864,4,5,3,4 & 69486 \\ \cline{2-2}
\ 51434\ 4 & 57402 \\
\ \ 2794\ 2\ 5 & \\
\ \ 0014\ 8\ 1\ 5\ 4 & \\
\ \ \ \ 00\ 9\ 1\ 6\ 2 &
\end{array}$$

Abreviacion cuando el divisor es dígito.

$$\begin{array}{l|l}
48,5,6,7,8,4, & 7 \\ \cline{2-2}
\ 65 & 693826 \\
\ \ 26 & \\
\ \ \ 57 & \\
\ \ \ \ 18 & \\
\ \ \ \ \ 44 & \\
\ \ \ \ \ \ 2 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
4856784 & 7 \\
693826 & \\
2 &
\end{array}$$

Explicacion sobre *forzar la unidad* en la primera cifra de la izquierda del divisor y en las unidades de igual órden del dividendo parcial en los casos en que es conveniente; 987879698 : 1947;

$$\begin{array}{l|l}
9878,7,9,6,9,8, & 1947 \\ \cline{2-2}
0143\ 7\ 9 & 507385 \\
\ 007\ 5\ 0\ 6 & \\
\ \ \ 1\ 6\ 6\ 5\ 9 & \\
\ \ \ \ 1\ 0\ 8\ 3\ 8 & \\
\ \ \ \ \ 1\ 1\ 0\ 3 &
\end{array}$$

Cuando el divisor tiene bastantes cifras y el cociente ha de tener muchas, conviene formar los nueve primeros múltiplos del divisor ó sean sus productos por los nueve primeros números. **4270491797699 : 5897 ;**

```
5897......1    4 2 7 0 4,9,1,7,9,7,6,9,9, | 5897
11794......2   4 1 2 7 9                  |________
17691......3   ---------                  | 724180396
23588......4   0 1 4 2 5 9
29485......5     1 1 7 9 4
35382......6   -----------
41279......7     0 2 4 6 5 1
47176......8       2 3 5 8 8
53073......9     -----------
                   0 1 0 6 3 7
                       5 8 9 7
                   -----------
                     0 4 7 4 0 9
                       4 7 1 7 6
                     -----------
                       0 0 2 3 3 7 6
                           1 7 6 9 1
                       -------------
                           0 5 6 8 5 9
                             5 3 0 7 3
                           -----------
                             0 3 7 8 6 9
                               3 5 3 8 2
                             -----------
                               0 2 4 8 7
```

Para dividir un producto por un número basta dividir uno de sus factores por este número conservando los demás. $(a\times b\times c\times \bar{d}\times e\times f):m=a\times b\times c\times \frac{d}{m}\times e\times f$; $(a\times b\times c\times \frac{d}{m}\times e\times f)\times m=a\times b\times c\times\left(\frac{d}{m}\times m\right)\times e\times f=a\times b\times c\times d\times e\times f$; $(5\times 7\times \overline{12}\times 11\times 8):3=5\times 7\times \bar{4}\times 11\times 8$; $(5\times 7\times \bar{4}\times 11\times 8)\times 3=5\times 7\times 12\times 11\times 8$ | Dividiendo uno de los factores de un producto por un número queda dividido el producto por este número | Para dividir un número por un producto basta dividirle sucesivamente por los factores de este producto. $m:(a\times b\times c\times d\times e\times f)$; $\frac{m}{a}=m'$, $m=a\times m'$; $\frac{m'}{b}=m''$, $m'=b\times m''$; $\frac{m''}{c}=m'''$, $m''=c\times m'''$; $\frac{m'''}{d}=m^{\text{iv}}$, $m'''=d\times m^{\text{iv}}$; $\frac{m^{\text{iv}}}{e}=m^{\text{v}}$, $m^{\text{iv}}=e\times m^{\text{v}}$; $\frac{m^{\text{v}}}{f}=m^{\text{vi}}$, $m^{\text{v}}=f\times m^{\text{vi}}$; m^{vi} es el cociente; $(a\times b\times c\times d\times e\times f)\times m^{\text{vi}}=a\times b\times c\times d\times e\times(f\times m^{\text{vi}})=a\times b\times c\times d\times e\times m^{\text{v}}=a\times b\times c\times d\times(e\times m^{\text{v}})=a\times b\times c\times d\times m^{\text{iv}}=a\times b\times c\times(d\times m^{\text{iv}})=a\times b\times c\times m'''=a\times b\times(c\times m''')=a\times b\times m''=a\times(b\times m'')=a\times m'=m$; $3570:(3\times 2\times 7\times 5)$; $\frac{3570}{3}=1190$, $3570=3\times 1190$; $\frac{1190}{2}=595$, $1190=2\times 595$; $\frac{595}{7}=85$, $595=7\times 85$; $\frac{85}{5}=17$, $85=5\times 17$; 17 es el cociente; $(3\times 2\times 7\times 5)\times 17=3\times 2\times 7\times(5\times 17)=3\times 2\times 7\times 85=3\times 2\times(7\times 85)=3\times 2\times 595=3\times(2\times 595)=3\times 1190=3570$ | Dividir á un número sucesivamente por otros equivale á dividirle por el producto de estos otros. | Abreviacion cuando el dividendo y divisor terminan en ceros. $584786000:394700=C$, $584786000=394700\times C$; dividamos los dos miembros por la unidad seguida de tantos ceros como tiene el que menos; $584786000:100=(394700\times C):100$, $5847860=(394700:100)\times C$, $5847860=3947\times C$; $5847860:3947=C$; C representa el cociente exacto ó completo. Si la division no fuese exacta el cociente entero seria el mismo, pero no el resíduo que, segun se verá despues, quedará dividido por la unidad seguida de tantos ceros como tiene el que menos. | Alteraciones de la division.

Cuando es exacta:

N, D, C; $\frac{N}{D}=C$, $N=D\times C$; m; $N\times m=(D\times C)\times m$, $N\times m=(D\times m)\times C$; $\frac{N\times m}{D\times m}=C$

N, D, C; $\frac{N}{D}=C$, $N=D\times C$; m; $N:m=(D\times C):m$, $N:m=(D:m)\times C$; $\frac{N:m}{D:m}=C$

N, D, C; $\frac{N}{D}=C$, $N=D\times C$; m; $N\times m=(D\times C)\times m$, $N\times m=D\times(C\times m)$; $\frac{N\times m}{D}=C\times m$

N, D, C; $\frac{N}{D}=C$, $N=D\times C$; m; $N:m=(D\times C):m$, $N:m=D\times(C:m)$; $\frac{N:m}{D}=C:m$

N, D, C; $\frac{N}{D}=C$, $N=D\times C$; m; $N=(D\times m)\times(C:m)$; $\frac{N}{D\times m}=C:m$

N, D, C; $\frac{N}{D}=C$; $N=D\times C$; m; $N=(D:m)\times(C\times m)$; $\frac{N}{D:m}=C\times m$

Cuando es inexacta.

$$\mathrm{N, D, C, R};\quad \mathrm{N = D \times C + R};\quad m;\quad \mathrm{N} \times m = (\mathrm{D \times C + R}) \times m = (\mathrm{D \times C}) \times m + \mathrm{R} \times m = (\mathrm{D} \times m) \times \mathrm{C} + \mathrm{R} \times m;$$

$$\mathrm{N} \times m = (\mathrm{D} \times m) \times \mathrm{C} + \mathrm{R} \times m;\quad \begin{matrix} \mathrm{R < D} \\ \mathrm{R} \times m < \mathrm{D} \times m \end{matrix} \Bigg\} \frac{\mathrm{N} \times m}{\mathrm{D} \times m} \ldots \text{ C, cociente entero; } \mathrm{R} \times m \text{, resto.}$$

$$\mathrm{N, D, C, R};\quad \mathrm{N = D \times C + R};\quad m;\quad \mathrm{N} : m = (\mathrm{D \times C + R}) : m = (\mathrm{D \times C}) : m + \mathrm{R} : m = (\mathrm{D} : m) \times \mathrm{C} + \mathrm{R} : m;$$

$$\mathrm{N} : m = (\mathrm{D} : m) \times \mathrm{C} + \mathrm{R} : m;\quad \begin{matrix} \mathrm{R < D} \\ \mathrm{R} : m < \mathrm{D} : m \end{matrix} \Bigg\} \frac{\mathrm{N} : m}{\mathrm{D} : m} \ldots \text{ C, cociente entero; } \mathrm{R} : m \text{, resto.}$$

Prueba de la division exacta; 2086194 : 4763;

```
2 0 8 6 1,9,4, | 4763        4763
  1 8 0 9 9    |------        438
    3 8 1 0 4  | 438      -------
    0 0 0 0 0  |            38104
                           14289
                          19052
                         -------
                         2086194
```

Prueba de la division inexacta; 48949 : 327;

```
4 8 9,4,9 | 327        327
1 6 2 4   |-----       149
  3 1 6 9 | 149      -----
  0 2 2 6 |           2943
                     1308
                     327
                    -----
                    48723
                      226
                    -----
                    48949
```

Otra prueba de la multiplicacion; 4286 × 728;

```
    4286        3 1 2 0,2,0,8, | 728
     728          2 0 8 2      |------
 -------            6 2 6 0    | 4286
   34288              4 3 6 8
   8572                 0 0 0 0
 30002
 -------
 3120208
```

DIVISIBILIDAD.

Cuándo se dice que un número es divisor de otro ó que divide á otro. | Si un número divide á varios, divide á su suma: $m;\ a, b, c, d, \ldots;\ \frac{a}{m} = a',\ a = a' \times m;$ $\frac{b}{m} = b',\ b = b' \times m;\ \frac{c}{m} = c',\ c = c' \times m;\ \frac{d}{m} = d',\ d = d' \times m; \ldots;\ a + b + c + d + \ldots = a' \times m + b' \times m + c' \times m + d' \times m + \ldots = (a' + b' + c' + d' + \ldots) \times m;$ $\frac{a + b + c + d + \ldots\ldots}{m} = a' + b' + c' + d' + \ldots\ldots$ | Si un número divide á otro, divide á sus múltiplos; $m,\ a;\ a \times b = a + a + a + \ldots\ldots{}^{b}$ | Si un número divide á otros dos, divide á su diferencia. $m,\ a,\ b;\ \frac{a}{m} = a',\ a = a' \times m;\ \frac{b}{m} = b',\ b = b' \times m;\ a - b = a' \times m - b' \times m = (a' - b') \times m;$ $\frac{a - b}{m} = a' - b'$ | Si un número divide á varios, divide al resultado que se obtiene combinándolos entre sí por sumas y restas en cualquier órden. $m;\ a, b, c, d, e, f, \ldots;\ a + b - c - d + e - f + \ldots$ | Si un número divide á uno de dos sumandos y no al otro, no divide á su suma. $m;\ a,\ \overline{b};\ a + \overline{b} = s,\ b = s - a$ |

Si un número divide al sustraendo de una sustraccion y no al minuendo, no divide á la resta. m; $\overline{a}$, b; $a - b = d$; $\overline{a} = b + d$ | Si un número divide al minuendo de una sustraccion y no al sustraendo, no divide á la resta. m; a, $\overline{b}$; $a - b = d$, $a = b + d$; $a - d = \overline{b}$ | Si un número divide á varios que están combinados por sumas y restas de cualquier modo, excepto á uno solo de ellos, no divide al resultado. m; $a, b, c, \overline{d}, e, f, \ldots$; $a - b + c + \overline{d} - e - f + \ldots$ |

Divisibilidad por 2; $\begin{matrix}\text{número par} \\ \text{número impar}\end{matrix}$; $\left.\begin{matrix}\text{cifras pares}: 0, 2, 4, 6, 8 \\ \text{cifras impares}: 1, 3, 5, 7, 9\end{matrix}\right\}$ $5470 = 547 \times 10 = 547 \times (5 \times 2)$ | $a\,b\,c\,d\,0 = a\,b\,c\,d \times 10 = a\,b\,c\,d \times (5 \times 2)$ | $4358 = 4350 + 8$ | $a\,b\,c\,d\,e\,f$; f cifra par; $a\,b\,c\,d\,e\,f = a\,b\,c\,d\,e\,0 + f$ | $4687 = 4680 + 7$ | $a\,b\,c\,d\,e\,f$, f cifra impar; $a\,b\,c\,d\,e\,f = a\,b\,c\,d\,e\,0 + f$ | Divisibilidad por 4; $35700 = 357 \times 100 = 357 \times (10 \times 10) = 357 \times 10 \times 10 = 357 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 357 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 357 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 = 357 \times 5 \times 5 \times 4$ | $a\,b\,c\,d\,00 = a\,b\,c\,d \times 100 = a\,b\,c\,d \times (10 \times 10) = a\,b\,c\,d \times 10 \times 10 = a\,b\,c\,d \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = a\,b\,c\,d \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = a\,b\,c\,d \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 = a\,b\,c\,d \times 5 \times 5 \times 4$ | $3572 = 3500 + 72$ | $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g$, $f\,g$ es un múltiplo de 4; $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g = a\,b\,c\,d\,e\,00 + f\,g$ | $6842 = 6800 + 42$ | $a\,b\,c\,d\,e\,f$, $e\,f$ no es múltiplo de 4; $a\,b\,c\,d\,e\,f = a\,b\,c\,d\,e\,00 + e\,f$ | Divisibilidad por 8; $237000 = 237 \times 1000 = 237 \times (10 \times 10 \times 10) = 237 \times 10 \times 10 \times 10 = 237 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 237 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 237 \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 237 \times 5 \times 5 \times 5 \times 8$ | $a\,b\,c\,d\,000 = a\,b\,c\,d \times 1000 = a\,b\,c\,d \times (10 \times 10 \times 10) = a\,b\,c\,d \times 10 \times 10 \times 10 = a\,b\,c\,d \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = a\,b\,c\,d \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = a\,b\,c\,d \times 5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2 = a\,b\,c\,d \times 5 \times 5 \times 5 \times 8$ | $23296 = 23000 + 296$ | $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g$, $e\,f\,g$ es un múltiplo de 8; $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g = a\,b\,c\,d\,000 + e\,f\,g$ | $37642 = 37000 + 642$ | $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g$, $e\,f\,g$ no es múltiplo de 8; $a\,b\,c\,d\,e\,f\,g = a\,b\,c\,d\,000 + e\,f\,g$ | ..... | Divisibilidad por 2^n; $a\,b\,c\,d\,000\ldots^{n} = a\,b\,c\,d \times 1000\ldots^{n} = a\,b\,c\,d \times (10 \times 10 \times 10 \times \ldots^{n}) = a\,b\,c\,d \times 10 \times 10 \times 10 \times \ldots^{n} = a\,b\,c\,d \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times \ldots^{n} = a\,b\,c\,d \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times \ldots^{n} = a\,b\,c\,d \times 5 \times 5 \times 5 \times \ldots^{n} \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots^{n} = a\,b\,c\,d \times 5 \times 5 \times 5 \times \ldots^{n} \times 2^{n}$ | $\ldots a\,b\,c\,d^{n} \ldots p\,q\,r\,s$; $\ldots p\,q\,r\,s$ es un múltiplo de 2^{n}; $\ldots a\,b\,c\,d^{n} \ldots p\,q\,r\,s = \ldots a\,b\,c\,d^{n} \ldots 000 + \ldots p\,q\,r\,s$ | $\ldots a\,b\,c\,d^{n} \ldots p\,q\,r\,s$; $\ldots p\,q\,r\,s$ no es un múltiplo de 2^{n}; $\ldots a\,b\,c\,d^{n} \ldots p\,q\,r\,s = \ldots a\,b\,c\,d^{n} \ldots 000 + \ldots p\,q\,r\,s$ | Divisibilidad por 5; $370 = 37 \times 10 = 37 \times (2 \times 5)$ | $a\,b\,c\,d\,0 = a\,b\,c\,d \times 10 = a\,b\,c\,d \times (2 \times 5)$ | $3425 = 3420 + 5$ | $a\,b\,c\,d\,5 = a\,b\,c\,d\,0 + 5$ | $5678 = 5670 + 8$ | $a\,b\,c\,d\,e\,f$; f no es 0 ni 5; $a\,b\,c\,d\,e\,f = abcd\,0 + f$ | Divisibilidad por 25; $42700 = 427 \times 100 = 427 = \times (10 \times 10) = 427 \times 10 \times 10 = 427 \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = 427 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 427 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 427 \times 2 \times 2 \times 25$ | $a\,b\,c\,d\,00 = a\,b\,c\,d \times 100 = a\,b\,c\,d \times (10 \times 10) = a\,b\,c\,d \times 10 \times 10 = a\,b\,c\,d \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) = a\,b\,c\,d \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = a\,b\,c\,d \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 = a\,b\,c\,d \times 2 \times 2 \times 25$ | $42675 = 42600 + 75$ | $a\,b\,c\,d\,f$, $d\,f$ es múltiplo de 25; $a\,b\,c\,d\,f = a\,b\,c\,00 + d\,f$ | $43615 = 43600 + 15$ | $a\,b\,c\,d\,f$, $d\,f$ no es múltiplo de 25; $a\,b\,c\,d\,f = a\,b\,c\,00 + d\,f$ | ..... | Divisibilidad por 5^{n}; $a\,b\,c\,d\,000\ldots^{n} = a\,b\,c\,d \times 1000\ldots^{n} = a\,b\,c\,d \times (10 \times 10 \times 10 \times \ldots^{n}) = a\,b\,c\,d \times 10 \times 10 \times 10 \times \ldots^{n} = a\,b\,c\,d \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times \ldots^{n} = a\,b\,c\,d \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times \ldots^{n} = a\,b\,c\,d \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots^{n} \times 5 \times 5 \times 5 \times \ldots^{n} = a\,b\,c\,d \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots^{n} \times 5^{n}$ | $\ldots a\,b\,c\,d^{n} \ldots p\,q\,r\,s$; $\ldots p\,q\,r\,s$ es un múltiplo de 5^{n}; $\ldots a\,b\,c\,d^{n} \ldots p\,q\,r\,s = \ldots a\,b\,c\,d^{n} \ldots 000 + \ldots p\,q\,r\,s$ | $\ldots a\,b\,c\,d^{n} \ldots p\,q\,r\,s$; $\ldots p\,q\,r\,s$ no es un múltiplo de 5^{n}; $\ldots a\,b\,c\,d^{n} \ldots p\,q\,r\,s = \ldots a\,b\,c\,d^{n} \ldots 000 + \ldots p\,q\,r\,s$ | Divisibilidad por 10; $370 = 37 \times 10$ |

$abcd0 = abcd \times 10$ | $586 = 580 + 6$ | $abcd$, d no es cero; $abcd = abc0 + d$ | .... | Divisibilidad por 1000....^{n}; $abcd\,000....^n = abcd \times 1000....^n$ | .....$abcd^n$.... $pqrs$; .... $pqrs$ no se compone de n ceros; ....$abcd^n$.... $pqrs =$ .... $abcd^n$.... $000 +$ .... $pqrs$ | Divisibilidad por 9; $10000 = 9999 + 1 = 1111 \times 9 + 1 = m.^o$ de $9 + 1$ | $1000....^n = 999....^n + 1 = 111....^n \times 9 + 1 = m.^o$ de $9 + 1$ | $37000 = 37 \times 1000 = 37 \times (m.^o$ de $9 + 1) = 37 \times m.^o$ de $9 + 37 = m.^o$ de $9 + 37$ | $a\,000....^n = a \times 1000....^n = a \times (m.^o$ de $9 + 1) = a \times m.^o$ de $9 + a = m.^o$ de $9 + a$ | $abcdef = a00000 + b0000 + c000 + d00 + e0 + f = m.^o$ de $9 + a + m.^o$ de $9 + b + m.^o$ de $9 + c + m.^o$ de $9 + d + m.^o$ de $9 + e + f = m.^o$ de $9 + (a + b + c + d + e + f)$;

Si $a + b + c + d + e + f$ es divisible por 9, el número propuesto lo es tambien.
Si $a + b + c + d + e + f$ no es divisible por 9, el número propuesto no lo es tampoco. | $45792 = 40000 + 5000 + 700 + 90 + 2 = m.^o$ de $9 + 4 + m.^o$ de $9 + 5 + m.^o$ de $9 + 7 + m.^o$ de $9 + 9 + 2 = m.^o$ de $9 + 27$, es divisible por 9 | $5872 = 5000 + 800 + 70 + 2 = m.^o$ de $9 + 5 + m.^o$ de $9 + 8 + m.^o$ de $9 + 7 + 2 = m.^o$ de $9 + 20$ | Divisibilidad por 3; $1000 = 999 + 1 = 333 \times 3 + 1 = m.^o$ de $3 + 1$ | $1000....^n = 999....^n + 1 = 333....^n \times 3 + 1 = m.^o$ de $3 + 1$ | $4240000 = 424 \times 10000 = 424 \times (m.^o$ de $3 + 1) = 424 \times m.^o$ de $3 + 424 = m.^o$ de $3 + 424$ | $a\,000....^n = a \times 1000....^n = a \times (m.^o$ de $3 + 1) = a \times m.^o$ de $3 + a = m.^o$ de $3 + a$ | $abcdef = a00000 + b0000 + c000 + d00 + e0 + f = m.^o$ de $3 + a + m.^o$ de $3 + b + m.^o$ de $3 + c + m.^o$ de $3 + d + m.^o$ de $3 + e + f = m.^o$ de $3 + (a + b + c + d + e + f)$;
si $a + b + c + d + e + f$ es divisible por 3, el número propuesto lo es tambien.
si $a + b + c + d + e + f$ no es divisible por 3, el número propuesto no lo es tampoco.

$21768 = 20000 + 1000 + 700 + 60 + 8 = m.^o$ de $3 + 2 + m.^o$ de $3 + 1 + m.^o$ de $3 + 7 + m.^o$ de $3 + 6 + 8 = m.^o$ de $3 + 24$, es divisible por 3 | $58934 = 50000 + 8000 + 900 + 30 + 4 = m.^o$ de $3 + 5 + m.^o$ de $3 + 8 + m.^o$ de $3 + 9 + m.^o$ de $3 + 3 + 4 = m.^o$ de $3 + 29$, no es divisible por 3. | Divisibilidad por 6; $a, 2, 3$; $\frac{a}{3} = a'$, $a = a' \times 3$; $\frac{a'}{2}$, a'', 1; $a' = 2 \times a'' + 1$; $a = (2 \times a'' + 1) \times 3 = 2 \times a'' \times 3 + 3$; $\frac{a'}{2} = a''$, $a' = 2 \times a''$; $a = (2 \times a'') \times 3 = 6 \times a''$ | $a, 2, \overline{3}$; $\frac{a}{6} = a'$, $a = 6 \times a'$ | $a, \overline{2}, 3$; $\frac{a}{6} = a'$, $a = 6 \times a'$ | $a, \overline{2}, \overline{3}$; $\frac{a}{6} = a'$, $a = 6 \times a'$ | El dividendo de una division inexacta es igual al producto del divisor por el cociente entero aumentado en una unidad menos la diferencia que existe entre el divisor y el resto; N, D, C, R; $N = D \times C + R = D \times C + D - D + R = D \times (C + 1) - (D - R)$; $N = D \times (C + 1) - (D - R)$, | R... resto escedente | D—R... resto deficiente | R < mitad de D .... D — R > mitad de D | R > mitad de D .... D — R < mitad de D |

Divisibilidad por 11;

$$\begin{array}{l|l} 10,0,0,0,0,0,0,0... & 11 \\ \cline{2-2} 00\,1\,0\,0 & 009090909... \\ \quad 0\,0\,1\,0\,0 & \\ \qquad 0\,0\,1\,0\,0 & \\ \qquad\quad 0\,0\,1 & \\ \qquad\quad \vdots\;\; \vdots & \end{array}$$

$1 = m.^o$ de $11 + 1$
$10 = m.^o$ de $11 + 10 = m.^o$ de $11 - 1$
$100 = m.^o$ de $11 + 1$
$1000 = m.^o$ de $11 + 10 = m.^o$ de $11 - 1$
$10000 = m.^o$ de $11 + 1$
$100000 = m.^o$ de $11 + 10 = m.^o$ de $11 - 1$
....

......$gfedcba =$ .... $+ g\,000000 + f\,00000 + e0000 + d000 + c00 + b0 + a =$ .... $+ g \times 1000000 + f \times 100000 + e \times 10000 + d \times 1000 + c \times 100 + b \times 10 + a = a + b \times$

$(m.^{o}\text{ de }11-1)+c\times(m.^{o}\text{ de }11+1)+d\times(m.^{o}\text{ de }11-1)+e\times(m.^{o}\text{ de }11+1)+f\times(m.^{o}\text{ de }11-1)+g\times(m.^{o}\text{ de }11+1)+\ldots=a+b\times m.^{o}\text{ de }11-b+$ $c\times m.^{o}\text{ de }11+c+d\times m.^{o}\text{ de }11-d+e\times m.^{o}\text{ de }11+e+f\times m.^{o}\text{ de }11-f+g\times m.^{o}\text{ de }11+g+\ldots=a+m.^{o}\text{ de }11-b+m.^{o}\text{ de }11+c+m.^{o}\text{ de }11-d+$ $m.^{o}\text{ de }11+e+m.^{o}\text{ de }11-f+m.^{o}\text{ de }11+g+\ldots=m.^{o}\text{ de }11+(a+c+e+g+\ldots)-(b+d+f+\ldots);$ $\left.\begin{matrix}a+c+e+g+\ldots=\text{Y}\\ b+d+f+\ldots\ldots\ldots=\text{P}\end{matrix}\right\}\ldots\; g\,f\,e\,d\,c\,b\,a=m.^{o}\text{ de }11+\text{Y}-\text{P};$

$\left.\begin{matrix}\text{Y}>\text{P},\ldots\; g\,f\,e\,d\,c\,b\,a=m.^{o}\text{ de }11+(\text{Y}-\text{P})\\ \text{P}>\text{Y},\ldots\; g\,f\,e\,d\,c\,b\,a=m.^{o}\text{ de }11-(\text{P}-\text{Y})\end{matrix}\right|$ $\bar{2}8\bar{0}6\bar{1}7\bar{0}9\bar{2}8=m.^{o}\text{ de }11+38-5=m.^{o}\text{ de }11+(38-5)=m.^{o}\text{ de }11+33$ | $8\bar{3}5\bar{6}1\bar{9}3\bar{8}2=m.^{o}\text{ de }11+$ $9-31=m.^{o}\text{ de }11-(31-9)=m.^{o}\text{ de }11-22$ | $4\bar{6}8\bar{7}5\bar{4}3\bar{8}=m.^{o}\text{ de }11+25-20=m.^{o}\text{ de }11+(25-20)=m.^{o}\text{ de }11+5$ | $8\bar{4}9\bar{8}7\bar{6}5\bar{4}=m.^{o}\text{ de }11$ $+22-29=m.^{o}\text{ de }11-(29-22)=m.^{o}\text{ de }11-7$ | Divisibilidad por 7;

$$\begin{array}{l|l}
1,0,0,0,0,0,0,0,0,\ldots\ldots & 7 \\
\;30 & \overline{014285714\ldots} \\
\;\;20 & \\
\;\;\;60 & \\
\;\;\;\;40 & \\
\;\;\;\;\;50 & \\
\;\;\;\;\;\;10 & \\
\;\;\;\;\;\;\;30 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;2 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\vdots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|l}
1=m.^{o}\text{ de }7+1\\
10=m.^{o}\text{ de }7+3\\
100=m.^{o}\text{ de }7+2\\
1000=m.^{o}\text{ de }7+6=m.^{o}\text{ de }7-1\\
10000=m.^{o}\text{ de }7+4=m.^{o}\text{ de }7-3\\
100000=m.^{o}\text{ de }7+5=m.^{o}\text{ de }7-2\\
1000000=m.^{o}\text{ de }7+1\\
10000000=m.^{o}\text{ de }7+3\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

$\ldots\overline{m\;l\;k\;j\;i\;h\;g\;f\;e\;d\;c\;b\;a}=\ldots+m000000000000+l00000000000+k0000000000+j000000000+i00000000+h0000000+g000000+f00000+e0000+d000+c00+b0+a=\ldots+m\times1000000000000+l\times100000000000+k\times10000000000+j\times1000000000+i\times100000000+h\times10000000+g\times1000000+f\times100000+e\times10000+d\times1000+c\times100+b\times10+a=a+b\times(m.^{o}\text{ de }7+3)+c\times(m.^{o}\text{ de }7+2)+d\times(m.^{o}\text{ de }7-1)+e\times(m.^{o}\text{ de }7-3)+f\times(m.^{o}\text{ de }7-2)+g\times(m.^{o}\text{ de }7+1)+h\times(m.^{o}\text{ de }7+3)+i\times(m.^{o}\text{ de }7+2)+$ $j\times(m.^{o}\text{ de }7-1)+k\times(m.^{o}\text{ de }7-3)+l\times(m.^{o}\text{ de }7-2)+m\times(m.^{o}\text{ de }7+1)+\ldots=a\times1+m.^{o}\text{ de }7+b\times3+m.^{o}\text{ de }7+c\times2+m.^{o}\text{ de }7-$ $d\times1+m.^{o}\text{ de }7-e\times3+m.^{o}\text{ de }7-f\times2+m.^{o}\text{ de }7+g\times1+m.^{o}\text{ de }7+h\times3+m.^{o}\text{ de }7+i\times2+m.^{o}\text{ de }7-j\times1+m.^{o}\text{ de }7-k\times3+m.^{o}\text{ de }7-$ $l\times2+m.^{o}\text{ de }7+m\times1+\ldots=m.^{o}\text{ de }7+(a\times1+b\times3+c\times2+g\times1+h\times3+i\times2+m\times1+\ldots)-(d\times1+e\times3+f\times2+j\times1+k\times3+$ $l\times2+\ldots);$ $\left.\begin{matrix}a\times1+b\times3+c\times2+g\times1+h\times3+i\times2+m\times1+\ldots=\text{Y}\\ d\times1+c\times3+f\times2+j\times1+k\times3+l\times2+\ldots\ldots\ldots=\text{P}\end{matrix}\right\}\ldots\; m\,l\,k\,j\,i\,h\,g\,f\,e\,d\,c\,b\,a=m.^{o}\text{ de }7+\text{Y}-\text{P};$

$\left.\begin{matrix}\text{Y}>\text{P},\ldots\; m\,l\,k\,j\,i\,h\,g\,f\,e\,d\,c\,b\,a=m.^{o}\text{ de }7+(\text{Y}-\text{P})\\ \text{P}>\text{Y},\ldots\; m\,l\,k\,j\,i\,h\,g\,f\,e\,d\,c\,b\,a=m.^{o}\text{ de }7-(\text{P}-\text{Y})\end{matrix}\right|$ $\underline{42\overline{897}234\overline{968}};$ $\begin{array}{r}8\times1=8\\6\times3=18\\9\times2=18\\7\times1=7\\9\times3=27\\8\times2=16\\\hline94\end{array}$ $\begin{array}{r}4\times1=4\\3\times3=9\\2\times2=4\\2\times1=2\\4\times3=12\\\hline31\end{array}$ $42897234968=m.^{o}\text{ de }7+94-31=m.^{o}\text{ de }7+(94-31)=m.^{o}\text{ de }7+63$ |

$$\begin{array}{lll} & 2\times1=\ 2 & \\ & 4\times3=12 & 9\times1=\ 9 \\ & 3\times2=\ 6 & 8\times3=24 \\ \underline{8}\overline{640}1\underline{6}89\overline{342}; & 1\times1=\ 1 & 6\times2=12 \\ & 0\times3=\ 0 & 6\times1=\ 6 \\ & 4\times2=\ 8 & 8\times3=24 \\ & \overline{\ \ 29} & \overline{\ \ 75} \end{array}$$

$86401689342 = m.^o$ de $7 + 29 - 75 = m.^o$ de $7 - (75 - 29) = m.^o$ de $7 - 46$ | Otras condiciones de divisibilidad por 7; ..... $\overline{pnm}\,\underline{lkj}\,\overline{ihg}\,\underline{fed}\,\overline{cba} = ... + pnm\,000000000000 + lkj\,000000000 + ihg\,000000 + fed\,000 + cba = ... + pnm \times 1000000000000 + lkj \times 1000000000 + ihg \times 1000000 + fed \times 1000 + cba = cba + fed \times (m.^o \text{ de } 7 - 1) + ihg \times (m.^o \text{ de } 7 + 1) + lkj \times (m.^o \text{ de } 7 - 1) + pnm \times (m.^o \text{ de } 7 + 1) + ... = cba + m.^o \text{ de } 7 - fed + m.^o \text{ de } 7 + ihg + m.^o \text{ de } 7 - lkj + m.^o \text{ de } 7 + pnm + ... = m.^o \text{ de } 7 + (cba + ihg + pnm + ...) - (fed + lkj + ...)$;

$$\left.\begin{array}{l} cba + ihg + pnm + ... = \mathrm{Y} \\ fed + lkj + ... = \mathrm{P} \end{array}\right\} .....pnmlkjihgfedcba = m.^o \text{ de } 7 + \mathrm{Y} - \mathrm{P};$$

$\mathrm{Y} > \mathrm{P}, ... pnmlkjihgfedcba = m.^o$ de $7 + (\mathrm{Y} - \mathrm{P})$

$\mathrm{P} > \mathrm{Y}, ... pnmlkjihgfedcba = m.^o$ de $7 - (\mathrm{P} - \mathrm{Y})$ | $\underline{9}\overline{218}7\underline{88}\overline{109}\underline{664}\overline{018}\underline{989}\overline{067}69$;

$$\begin{array}{rr} 769 & 906 \\ 898 & 401 \\ 966 & 810 \\ 878 & 921 \\ \hline 3511 & 3038 \end{array}$$

$921878810966401898906769 = m.^o$ de $7 + 3511 - 3038 = m.^o$ de $7 + (3511 - 3038)$;

$$\begin{array}{r} 3511 \\ 3038 \\ \hline 0473 \end{array}$$

$921878810966401898906769 = m.^o$ de $7 + 473$;

$$\begin{array}{l} 4\times1=\ 4 \\ 7\times3=21 \\ 4\times2=\ 8 \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ 33 \end{array}$$

$\underline{250}\overline{285}\underline{798}\overline{425}$;

$$\begin{array}{rr} 425 & 798 \\ 285 & 250 \\ \hline 706 & 1028 \end{array}$$

$250285798425 = m.^o$ de $7 + 706 - 1028 = m.^o$ de $7 - (1028 - 706)$;

$$\begin{array}{r} 1028 \\ 706 \\ \hline 322 \end{array}$$

$250285798425 = m.^o$ de $7 - 322$;

$$\begin{array}{l} 2\times1=2 \\ 2\times3=6 \\ 3\times2=6 \\ \hline \ \ \ \ \ \ \ 14 \end{array}$$

Condiciones generales de divisibilidad por un número cualquiera; n; $\frac{1}{n}$, 0,1; $1 = m.^o$ de $n + 1$; $\frac{10}{n}$, r, $10 = m.^o$ de $n \pm r$; $\frac{100}{n}$, r', $100 = m.^o$ de $n \pm r'$; $\frac{1000}{n}$, r'', $1000 = m.^o$ de $n \pm r''$; $\frac{10000}{n}$, r''', $10000 = m.^o$ de $n \pm r'''$; $\frac{100000}{n}$, r^{IV}, $100000 = m.^o$ de $n \pm r^{\text{IV}}$; .... ; ...... $gfedcba = ... + g\,000000 + f\,00000 + e\,0000 + d\,000 + c\,00 + b\,0 + a = a + b \times 10 + c \times 100 + d \times 1000 + e \times 10000 + f \times 100000 + g \times 1000000 + ... = a + b \times (m.^o \text{ de } n \pm r) + c \times (m.^o \text{ de } n \pm r') + d \times (m.^o \text{ de } n \pm r'') + e \times (m.^o \text{ de } n \pm r''') + f \times (m.^o \text{ de } n \pm r^{\text{IV}}) + g \times (m.^o \text{ de } n \pm r^{\text{V}}) + ... = a + m.^o \text{ de } n \pm b \times r + m.^o \text{ de } n \pm c \times r' + m.^o \text{ de } n \pm d \times r'' + m.^o \text{ de } 9 \pm e \times r''' + m.^o \text{ de } 9 \pm f \times r^{\text{IV}} + m.^o \text{ de } n \pm g \times r^{\text{V}} + ... = m.^o \text{ de } n + a \pm b \times r \pm c \times r' \pm d \times r'' \pm e \times r''' \pm f \times r^{\text{IV}} \pm g \times r^{\text{V}} + ... = m.^o \text{ de } n + \mathrm{H} - \mathrm{K}$;

$\mathrm{H} > \mathrm{K}, ... gfedcba = m.^o$ de $n + (\mathrm{H} - \mathrm{K})$

$\mathrm{K} > \mathrm{H}, ... gfedcba = m.^o$ de $n - (\mathrm{K} - \mathrm{H})$

Divisibilidad por 13;

$$\begin{array}{l|l} 1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,.... & 13 \\ \ \ 0\ 0\ 9\ 0 & \overline{007692307....} \\ \ \ \ \ \ \ 1\ 2\ 0 & \\ \ \ \ \ \ \ 0\ 0\ 3\ 0 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0\ 4\ 0 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0\ 1\ 0\ 0 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 0\ 0\ 9 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \vdots & \end{array}$$

$1 = m.^o$ de $13 + 1$
$10 = m.^o$ de $13 + 10 = m.^o$ de $13 - 3$
$100 = m.^o$ de $13 + 9 = m.^o$ de $13 - 4$
$1000 = m.^o$ de $13 + 12 = m.^o$ de $13 - 1$
$10000 = m.^o$ de $13 + 3$
$100000 = m.^o$ de $13 + 4$
$1000000 = m.^o$ de $13 + 1$
$10000000 = m.^o$ de $+ 10 = m.^o$ de $13 - 3$
....
....

$...nmlkjihgfedcba = ... + n \times 10000000000000 + m \times 1000000000000 + l \times 100000000000 + k \times 10000000000 + j \times 1000000000 + i \times 100000000 + h \times 10000000 + g \times$

$1000000 + f \times 100000 + e \times 10000 + d \times 1000 + c \times 100 + b \times 10 + a = a + b \times (m.^o \text{ de } 13 - 3) + c \times (m.^o \text{ de } 13 - 4) + d \times (m.^o \text{ de } 13 - 1) + e \times (m.^o \text{ de } 13 + 3) + f \times (m.^o \text{ de } 13 + 4) + g \times (m.^o \text{ de } 13 + 1) + h \times (m.^o \text{ de } 13 - 3) + i \times (m.^o \text{ de } 13 - 4) + j \times (m.^o \text{ de } 13 - 1) + k \times (m.^o \text{ de } 13 + 3) + l \times (m.^o \text{ de } 13 + 4) + m \times (m.^o \text{ de } 13 + 1) + n \times (m.^o \text{ de } 13 - 3) + \ldots = m.^o \text{ de } 13 + a - b \times 3 - c \times 4 - d \times 1 + e \times 3 + f \times 4 + g \times 1 - h \times 3 - i \times 4 - j \times 1 + k \times 3 + l \times 4 + m \times 1 - n \times 3 - \ldots = m.^o \text{ de } 13 + (a + e \times 3 + f \times 4 + g \times 1 + k \times 3 + l \times 4 + m \times 1 + \ldots) - (b \times 3 + c \times 4 + d \times 1 + h \times 3 + i \times 4 + j \times 1 + n \times 3 + \ldots);$

$$\left.\begin{array}{l} a + e \times 3 + f \times 4 + g \times 1 + k \times 3 + l \times 4 + m \times 1 + \ldots = Y \\ b \times 3 + c \times 4 + d \times 1 + h \times 3 + i \times 4 + j \times 1 + n \times 3 + \ldots = P \end{array}\right\} \ldots nmlkjihgfedcba = m.^o \text{ de } 13 + Y - P; \quad \left.\begin{array}{l} Y > P, \ldots nmlkjihgfedcba = m.^o \text{ de } 13 + (Y - P) \\ P > Y, \ldots nmlkjihgfedcba = m.^o \text{ de } 13 - (P - Y) \end{array}\right\}$$

$$\ldots \underline{n}\,\overline{ml}\,\underline{kj}\,\overline{i}\,\underline{hg}\,\overline{f}\,\underline{ed}\,\overline{c}\,\underline{ba} \;\Big|\; \overline{4}\underline{86}\overline{5}\underline{34}\overline{7}\underline{89}\overline{6}\underline{73};$$

$$\begin{array}{rr} 8 \times 3 = 24 & 7 \times 3 = 21 \\ 7 \times 4 = 28 & 6 \times 4 = 24 \\ 4 \times 1 = 4 & 9 \times 1 = 9 \\ 8 \times 3 = 24 & 3 \times 3 = 9 \\ 4 \times 4 = 16 & 5 \times 4 = 20 \\ \overline{99} & 6 \times 1 = 6 \\ & \overline{89} \end{array}$$

$486534789673 = m.^o \text{ de } 13 + 99 - 89 = m.^o \text{ de } 13 + 10$ Divisibilidad por 37;

$$\begin{array}{l|l} 1,0,0,0,0,0,0,0,\ldots & 37 \\ \;\;2\,6\,0 & \overline{002702702\ldots} \\ \;\;0\,0\,1\,0\,0 & \\ \;\;\;\;\;\;2\,6\,0 & \\ \;\;\;\;\;\;0\,0\,1\,0\,0 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;2\,6 & \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\vdots & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 = m.^o \text{ de } 37 + 1 \\ 10 = m.^o \text{ de } 37 + 10 \\ 100 = m.^o \text{ de } 37 + 26 = m.^o \text{ de } 37 - 11 \\ 1000 = m.^o \text{ de } 37 + 1 \\ 10000 = m.^o \text{ de } 37 + 10 \\ 100000 = m.^o \text{ de } 37 + 26 = m.^o \text{ de } 37 - 11 \\ 1000000 = m.^o \text{ de } 37 + 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

$\ldots\ldots nm,l,kj,i,hg,f,ed,c,ba = ba + c \times 100 + ed \times 1000 + f \times 100000 + hg \times 1000000 + i \times 100000000 + kj \times 1000000000 + l \times 100000000000 + nm \times 1000000000000 + \ldots\ldots = ba + c \times (m.^o \text{ de } 37 - 11) + ed \times (m.^o \text{ de } 37 + 1) + f \times (m.^o \text{ de } 37 - 11) + hg \times (m.^o \text{ de } 37 + 1) + i \times (m.^o \text{ de } 37 - 11) + kj \times (m.^o \text{ de } 37 + 1) + l \times (m.^o \text{ de } 37 - 11) + nm \times (m.^o \text{ de } 37 + 1) + \ldots\ldots = m.^o \text{ de } 37 + ba - c \times 11 + ed - f \times 11 + hg - i \times 11 + kj - l \times 11 + nm - \ldots = m.^o \text{ de } 37 + (ba + ed + hg + kj + nm + \ldots) - (c + f + i + l + \ldots.) \times 11;$

$$\left.\begin{array}{l} ba + ed + hg + kj + nm + \ldots = Y \\ (c + f + i + i + \ldots\ldots\ldots) \times 11 = P \end{array}\right\} \ldots nmlkjihgfedcba = m.^o \text{ de } 37 + Y - P; \quad \left.\begin{array}{l} Y > P, \ldots nmlkjihgfedcba = m.^o \text{ de } 37 + (Y - P) \\ P > Y, \ldots nmlkjihgfedcba = m.^o \text{ de } 37 - (P - Y) \end{array}\right| 9,14,6,21,9,10,8,12 =$$

$m.^o \text{ de } 37 + (12 + 10 + 21 + 14) - (8 + 9 + 6 + 9) \times 11 = m.^o \text{ de } 37 + 57 - 352 = m.^o \text{ de } 37 - (352 - 57) = m.^o \text{ de } 37 - 295;\ 2{,}95 = m.^o \text{ de } 37 + 95 - 2 \times 11 = m.^o \text{ de } 37 + 95 - 22 = m.^o \text{ de } 37 + 73.$

Hallar el resto de la division de un número por otro sin hacer la division, cuando se conocen las condiciones de divisibilidad por el divisor.

$$N, n, \left.\begin{array}{l} N = m.^o \text{ de } n + H, \\ N = m.^o \text{ de } n - H, \end{array}\right. \quad H > n,\ H = m.^o \text{ de } n + h, \quad \begin{array}{l} N = m.^o \text{ de } n + m.^o \text{ de } n + h = m.^o \text{ de } n + h \\ N = m.^o \text{ de } n - m.^o \text{ de } n - h = m.^o \text{ de } n - h \end{array} \quad H = m.^o \text{ de } n - h, \quad \begin{array}{l} N = m.^o \text{ de } n + m.^o \text{ de } n - h = m.^o \text{ de } n - h, \\ N = m.^o \text{ de } n - m.^o \text{ de } n + h = m.^o \text{ de } n + h, \end{array}$$

$$\ldots\ldots \begin{array}{l} N = m.^o \text{ de } n + s, \\ N = m.^o \text{ de } n - s, \end{array} \quad s < n, \quad \begin{array}{l} \text{El resto de la division será } s. \\ N = m.^o \text{ de } n - n + n - s = m.^o \text{ de } n + (n - s),\ n - s < n, \text{ El resto de la division será } n - s. \end{array}$$

Hallar el resto de la division por 7 del número siguiente: $\overline{98}\underline{253}\overline{889}\underline{012}\overline{768}\underline{342}\overline{865} = m.^{\circ}$ de $7 + 2620 - 607 = m.^{\circ}$ de $7 + \underline{2}\overline{013} = m.^{\circ}$ de $7 + (m.^{\circ}$ de $7 + 13 - 2) = m.^{\circ}$ de $7 + m.^{\circ}$ de $7 + 13 - 2 = m.^{\circ}$ de $7 + 11 = m.^{\circ}$ de $7 + (m.^{\circ}$ de $7 + 4) = m.^{\circ}$ de $7 + 4$; 4 será el resto. | Hallar el resto de la division por 7 del número siguiente: $\overline{21}\underline{837}\overline{111}\underline{968}\overline{012} = m.^{\circ}$ de $7 + 144 - 1805 = m.^{\circ}$ de $7 - (1805 - 144) = m.^{\circ}$ de $7 - 1661$; $\underline{1}\overline{661} = m.^{\circ}$ de $7 + 661 - 1 = m.^{\circ}$ de $7 + 660$; $21837111968012 = m.^{\circ}$ de $7 - (m.^{\circ}$ de $7 + 660) = m.^{\circ}$ de $7 - m.^{\circ}$ de $7 - 660 = m.^{\circ}$ de $7 - 660$; $660 = m.^{\circ}$ de $7 + 30$; $21837111968012 = m.^{\circ}$ de $7 - (m.^{\circ}$ de $7 + 30) = m.^{\circ}$ de $7 - m.^{\circ}$ de $7 - 30 = m.^{\circ}$ de $7 - 30$; $30 = m.^{\circ}$ de $7 + 9$; $21837111968012 = m.^{\circ}$ de $7 - (m.^{\circ}$ de $7 + 9) = m.^{\circ}$ de $7 - m.^{\circ}$ de $7 - 9 = m.^{\circ}$ de $7 - 9 = m.^{\circ}$ de $7 - (m.^{\circ}$ de $7 + 2) = m.^{\circ}$ de $7 - m.^{\circ}$ de $7 - 2 = m.^{\circ}$ de $7 - 2 = m.^{\circ}$ de $7 - 7 + 7 - 2 = m.^{\circ}$ de $7 + (7 - 2)$; $7 - 2 = 5$ será el resto. | Prueba de la suma por los restos correspondientes á un divisor cualquiera.

$$\left.\begin{array}{l} A = m.^{\circ} \text{ de } n + a,\ a < n \\ B = m.^{\circ} \text{ de } n + b,\ b < n \\ C = m.^{\circ} \text{ de } n + c,\ c < n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad A + B + C + \ldots\ldots = S;\ n;$$

$S = m.^{\circ}$ de $n + s$; $s < n$; $m.^{\circ}$ de $n + (a + b + c + \ldots\ldots) = m.^{\circ}$ de $n + s$; $a + b + c + \ldots\ldots = m.^{\circ}$ de $n + q$; $q < n$, $m.^{\circ}$ de $n + (m.^{\circ}$ de $n + q) = m.^{\circ}$ de $n + s$; $m.^{\circ}$ de $n + m.^{\circ}$ de $n + q = m.^{\circ}$ de $n + s$; $m.^{\circ}$ de $n + q = m.^{\circ}$ de $n + s$; $q = s$. Generalmente se emplea el divisor nueve como mas conveniente;

3782...2	
391...4	
9876...3	
8539...7	16...7
468...0	
23056...7	

Es conveniente, al ir sumando las cifras de cada número para hallar el resto, restar 9 unidades cada vez que la suma exceda de 9. Tambien se pueden sumar todas las cifras de todos los sumandos haciendo aquella sustraccion cada vez que hay lugar á ello para hallar el resto correspondiente al conjunto de los sumandos y luego hacer lo mismo con la suma obtenida. | Prueba de la resta por los restos correspondientes á un divisor cualquiera; $A - B = D$;

$$\left.\begin{array}{l} A = m.^{\circ} \text{ de } n + a,\ a < n \\ B = m.^{\circ} \text{ de } n + b,\ b < n \end{array}\right\} A - B = (m.^{\circ} \text{ de } n + a) - (m.^{\circ} \text{ de } n + b) = m.^{\circ} \text{ de } n + a - m.^{\circ} \text{ de } n - b = m.^{\circ} \text{ de } n + a - b;$$

$$\left.\begin{array}{l} a < b,\ A - B = m.^{\circ} \text{ de } n + (a - b) = m.^{\circ} \text{ de } n + h, \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a > b,\ A - B = m.^{\circ} \text{ de } n - (b - a) = m.^{\circ} \text{ de } n - h = m.^{\circ} \text{ de } n - n + n - h = m.^{\circ} \text{ de } n + (n - h) \end{array}\right\}$$

$D = m.^{\circ}$ de $n + d$, $d < n$, $\begin{array}{l} h = d \\ n - h = d \end{array}$

$$\left.\begin{array}{r} 751210 \ldots.\ 7 \\ 488938 \ldots.\ 4 \\ \hline 262272 \ldots.\ 3 \end{array}\right\} 7 - 4 = 3; \qquad \left.\begin{array}{r} 1502410 \ldots.\ 4 \\ 977875 \ldots.\ 7 \\ \hline 524535 \ldots.\ 6 \end{array}\right\} 7 - 4 = 3,\ 9 - 3 = 6$$

| Prueba de la multiplicacion por los restos correspondientes á un divisor cualquiera; $A \times B = P$;

$$\left.\begin{array}{l} A = m.^{\circ} \text{ de } n + a,\ a < n \\ B = m.^{\circ} \text{ de } n + b,\ b < n \end{array}\right\} A \times B = (m.^{\circ} \text{ de } n + a) \times (m.^{\circ} \text{ de } n + b) = (m.^{\circ} \text{ de } n + a) \times m.^{\circ} \text{ de } n + (m.^{\circ} \text{ de } n + a) \times b = (m.^{\circ} \text{ de } n) \times (m.^{\circ} \text{ de } n) + a \times m.^{\circ} \text{ de } n + (m.^{\circ} \text{ de } n) \times b + a \times b = m.^{\circ} \text{ de } n + a \times b;$$

$a \times b = m.^{\circ}$ de $n + q$; $A \times B = m.^{\circ}$ de $n + (m.^{\circ}$ de $n + q) = m.^{\circ}$ de $n + q$; $P = m.^{\circ}$ de $n + p$, $p < n$; $m.^{\circ}$ de $n + q = m.^{\circ}$ de $n + p$; $q = p$.

6748 .... 7 ⎫ 896 .... 5 ⎭ $7\times 5=35$ 8 40488 60732 53984 6046208 8	Prueba de la division por los restos correspondientes á un divisor cualquiera. Si la division es exacta teniendo presente que el dividendo es producto del divisor por el cociente se sigue la misma marcha que en la multiplicacion. Si es inexacta se resta del dividendo el resto y, como la diferencia ha de ser producto del divisor por el cociente entero, se opera con esta diferencia con el divisor y con el cociente entero como para la prueba de la multiplicacion.

1 7 6 1.0.2.4, | 384 ..... 6; 4586 ..... 5 ⎫ $6\times 5=30$ ..... 3; 1761024 ..... 3;
2 2 5 0
3 3 0 2
2 3 0 4
0 0 0 0

3 8 7 6.5.4 | 483 ..... 6; 802 ..... 1 ⎫ $6\times 1=6$ 6
0 0 1 2 5 4
2 8 8
3 8 7 3 6 6 6

NÚMEROS PRIMOS, MÁXIMO COMUN DIVISOR, MÍNIMO COMUN MÚLTIPLO Y PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS.

Todo número es divisible por sí mismo y por la unidad. | Número *primo.* | Número *compuesto.* | Si un número es divisible por otro, este por otro, este por otro, etc., el primero lo será por el último y por cualquiera de los antedichos;

A... B, A = *m.*º de B
B... C, B = *m.*º de C
C... D, C = *m.*º de D
D... E, D = *m.*º de E

Todo número compuesto es divisible por un número primo distinto de la unidad

$$\left.\begin{array}{l} A\ldots B,\ A:B=A',\ A=A'\times B \\ B\ldots C,\ B:C=B',\ B=B'\times C \\ C\ldots D,\ C:D=C',\ C=C'\times D \\ D\ldots E,\ D:E=D',\ D=D'\times E \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

$A=A'\times B=A'\times(B'\times C)=A'\times B'\times C=A'\times B'\times(C'\times D)=A'\times B'\times C'\times D=A'\times B'\times C'\times(D'\times E)=A'\times B'\times C'\times D'\times E=\ldots$; si no se llegase á un número primo, sería el número A equivalente al producto de infinitos factores moyores que la unidad, lo que no es posible. Se llegará, pues, á un número primo y A será divisible por él. | Todo número que no sea 1 es divisible por otro número primo distinto de la unidad. | Hay infinitos números primos; $1, 2, 3, 5, 7, 11, \ldots, n$; $1\times 2\times 3\times 5\times 7\times 11\times\ldots\times n$; $(1\times 2\times 3\times 5\times 7\times 11\times\ldots\times n)+1$ | Averiguar si un número dado es primo. | Basta ensayar la division por los números menores que N | Basta ensayar la division por los números primos menores que N | Basta ensayar la division por los números primos menores que la mitad de N; $2, 3, 5, 7, \ldots h$, $h >$ mitad de N; si se divide N por su mitad el cociente será 2 y si se divide por uno mayor que su mitad el cociente será menor que 2, de modo que para que sea entero tendrá que ser 1 y para ello habrá de ser divisor el mismo número N. Este número será, pues, primo. | Basta ensayar la division por todos los números primos cuyo cuadrado no sea mayor que el número propuesto; $2, 3, 5, 7, \ldots h$;

$h\times h>\mathrm{N}$; $h'>h$, $\mathrm{N}:h'=q$, $\mathrm{N}=h'\times q$, $h\times h>h'\times q$, $h>q$; N sería divisible por q que es menor que h, contra lo supuesto. | Basta ensayar la division por los números primos sucesivos hasta llegar á un cociente entero menor que el divisor correspondiente; 2, 3, 5, 7,... h; $\frac{\mathrm{N}}{h}$, q, r; $q<h$; $h'>h$; $\frac{\mathrm{N}}{h'}=q'$, $\mathrm{N}=h'\times q'$; $q'<q$, $q'<h$; sería divisible N por un número menor que h, contra lo supuesto; 433; 2, 3, 5, 7, 11, $\begin{array}{r|l} 43{,}3 & 13 \\ \cline{2-2} 043 & 33 \\ 04 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 43{,}3 & 17 \\ \cline{2-2} 093 & 25 \\ 08 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 43{,}3 & 19 \\ \cline{2-2} 053 & 22 \\ 15 & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 43{,}3 & 23 \\ \cline{2-2} 203 & 18 \\ 19 & \end{array}$ 433 es número primo. | Formar una tabla de números primos;

$1,2,3,5,7,\underline{9},11,13,\underline{15},17,19,\underline{21},23,\underline{25},\underline{27},29,31,\underline{33},\underline{35},37,\underline{39},41,43,\underline{45},47,\underline{49},\underline{51},53,\underline{55},\underline{57},59,61,\underline{63},\underline{65},67,\underline{69},71,73,\underline{75},\underline{77},79,\underline{81},83,\underline{85},\underline{87},89,\underline{91},\underline{93},\underline{95},97,\underline{99}$;

1,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97 | Criba de Eratóstenes. | n; $n\times n$; $n\times 2$, $n\times 3$, $n\times 5$,.... | Máximo comun divisor de varios números. | Todo número que divide al dividendo y al divisor de una division inexacta divide al resto de esta division; A, B, C, R; $\mathrm{A}=\mathrm{B}\times\mathrm{C}+\mathrm{R}$; $\mathrm{A}-\mathrm{B}\times\mathrm{C}=\mathrm{R}$; $m....\left.\begin{matrix}\mathrm{A}\\ \mathrm{B}\end{matrix}\right\}$ $m....$ R | Todo número que divide al divisor y al resto de una division inexacta divide al dividendo de esta division; A, B, C, R, $\mathrm{A}=\mathrm{B}\times\mathrm{C}+\mathrm{R}$; $m....\left.\begin{matrix}\mathrm{B}\\ \mathrm{R}\end{matrix}\right\}$ $m....$ A | El máximo comun divisor del dividendo y divisor de una division inexacta es el mismo del divisor y el resto; A, B, C, R; $\begin{matrix}\mathrm{A}.....\mathrm{B}.....\mathrm{R};\\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \mathrm{D} \quad\quad \mathrm{D}'\end{matrix}$ $\left.\begin{matrix}\mathrm{D}\not>\mathrm{D}'\\ \mathrm{D}'\not>\mathrm{D}\end{matrix}\right\}$ $\mathrm{D}=\mathrm{D}'$. | Hallar el *m.c.d.* de dos números. Esplicacion sobre ello.

A, B;		C	C'	C''	C'''	C'v
	A	B	R	R'	R''	R'''
	R	R'	R''	R'''	0	

Se llegará al resto 0

	9	1	4	1	1	2	3	6
246666	25116	20622	4494	2646	1848	798	252	42
20622	04494	2646	1848	0798	252	042	000	

Números primos entre sí. |

El *m. c. d.* de varios números primos entre sí es la unidad. | Si varios números tienen por *m. c. d.* la unidad son primos entre sí. | Si se obtiene el resto 1, no hay necesidad de pasarle á divisor pues la division será exacta, el *m. c. d.* la unidad y los números primos entre sí. | Si dos restos consecutivos difieren en una unidad, al pasar el menor á divisor se obtendrá de cociente entero 1 y de resto tambien 1, por lo que sin necesidad de continuar la operacion se sabrá que los números propuestos son primos entre sí. Se ve, pues, que solo el penúltimo y antepenúltimo resto pueden diferir en una unidad; los demas diferirán á lo menos en dos. De modo que hechas á lo mas tantas divisiones como indique la mitad del número menor si es par ó la mitad del precedente si es impar, se habrá llegado al resto 0 en el primer caso y al resto 1 en el segundo y en ambos quedará terminada la operacion. El número de divisiones que se necesita hacer para hallar el *m. c. d.* de dos números no escede, pues, á la mitad del menor de ellos. | Todo número n que divide á dos A y B, divide á su *m. c. d.*

	C	C'	C''	C'''	
A	B	R	R'	R''	n... R''
R	R'	R''	0		

| Hallar el *m.c.d.* de varios números;

$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{A \ldots\ldots B}_{m} \ldots\ldots C}_{m'} \ldots\ldots D}_{m''} \ldots\ldots E}_{m'''}$, M; $\left.\begin{matrix} M \not> m''' \\ m''' \not> M \end{matrix}\right\}$ $M = m'''$ | Conviene empezar por los números menores. |

1317030, 1141140, 1321710, 1021020, 1291290; $\begin{array}{r|r|r|r} & 1 & 8 & 2 \\ \hline 1141140 & 1021020 & 120120 & 60060 \\ 0120120 & 0060060 & 000000 & \end{array}$ $\begin{array}{r|r|r} & 21 & 2 \\ \hline 129129.0 & 60060 & 30030 \\ 009009\ 0 & 00000 & \\ 3003\ 0 & & \end{array}$

$\begin{array}{r|r|r|r} & 43 & 1 & 6 \\ \hline 131703,0 & 30030 & 25740 & 4290 \\ 11583\ 0 & 04290 & 00000 & \\ 2574\ 0 & & & \end{array}$ $\begin{array}{r|r|r} & 308 & 11 \\ \hline 13217,1,0 & 429,0 & 390 \\ 00347\ 1\ 0 & 039\ 0 & \\ 003\ 9\ 0 & 00\ 0 & \end{array}$ m. c. d. $\left.\begin{matrix} 1317030 \\ 1141140 \\ 1321710 \\ 1021020 \\ 1291290 \end{matrix}\right\} = 390.$ | Si un número divide á un producto de dos factores y es primo con uno de ellos, divide necesariamente al otro;

$c \ldots\ldots a \times b$; $\left.\begin{matrix} c \\ b \end{matrix}\right\}$ primos entre sí; m. c. d $\left.\begin{matrix} c \\ b \end{matrix}\right\} = 1$; $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & h & h' & h'' & h''' & h^{\text{iv}} & r''' \\ \hline c & b & r & r' & r'' & r''' & 1 \\ r & r' & r'' & r''' & 1 & 0 & \end{array}$, a, $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} & h & h' & h'' & h''' & h^{\text{iv}} & r''' \\ \hline c \times a & b \times a & r \times a & r' \times a & r'' \times a & r''' \times a & 1 \times a \\ r \times a & r' \times a & r'' \times a & r''' \times a & 1 \times a & 0 & \end{array}$

m. c. d $\left.\begin{matrix} c \times a \\ b \times a \end{matrix}\right\} = a$, $c \ldots\ldots \left.\begin{matrix} c \times a \\ b \times a \end{matrix}\right\}$ $c \ldots\ldots a$ | Si un número *primo* divide á un producto de varios factores divide necesariamente á uno de ellos; $p \ldots\ldots A \times B \times C \times D \times E$; p es número primo; $A \times B \times C \times D \times E = (A \times B \times C \times D) \times \overline{E}$, $p \ldots\ldots A \times B \times C \times D$; $A \times B \times C \times D = (A \times B \times C) \times \overline{D}$, $p \ldots\ldots A \times B \times C$; $A \times B \times C = (A \times B) \times \overline{C}$, $p \ldots\ldots A \times \overline{B}$; $p \ldots\ldots A$ | Todo número *primo* que divide á una potencia de un número, divide á este número; $p \ldots\ldots A^m$; p es número primo; $A^m = A \times A \times A \times \ldots\ldots {}^m$; $p \ldots\ldots A$ | Si dos números son primos entre sí sus potencias cualesquiera serán tambien primas entre sí; $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\}$ primos entre sí; $\left.\begin{matrix} a^m \\ b^n \end{matrix}\right\}$ h primo, $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\}$ h; $\left.\begin{matrix} a^m \\ b^n \end{matrix}\right\}$ primos entre sí. | Qué se entiende por ser varios números primos entre sí dos á dos. | Varios números primos absolutos son $\left\{\begin{matrix} \text{primos entre sí} \\ \text{y} \\ \text{primos entre sí dos á dos} \end{matrix}\right.$ 3, 5, 7, 11 | Varios números primos entre sí $\left\{\begin{matrix} \text{pueden no ser números primos absolutos;} \\ \text{pueden no ser números primos entre sí dos á dos} \end{matrix}\right.$ 6, 15, 35, 77 |

Varios números primos entre sí dos á dos $\left\{\begin{matrix} \text{pueden no ser números primos absolutos} \\ \text{son primos entre sí} \end{matrix}\right.$ 38, 51, 65, 77 | Si un número es divisible por varios que son primos entre sí dos á dos, es divisible por el producto de estos números; $N \ldots\ldots a, b, c, d, e$; $a, b, c, d, e \ldots\ldots$ primos entre sí dos á dos;

$$\left.\begin{array}{l}\frac{N}{a}=q\,,\ N=a\times q\\ \frac{q}{b}=q'\,,\ q=b\times q'\\ \frac{q'}{c}=q'',\ q'=c\times q''\\ \frac{q''}{d}=q''',\ q''=d\times q'''\\ \frac{q'''}{e}=q^{\text{IV}}\,,\ q'''=e\times q^{\text{IV}}\end{array}\right\}\begin{array}{l}N=a\times q=a\times b\times q'=a\times b\times c\times q''=\\ a\times b\times c\times d\times q'''=a\times b\times c\times d\times e\times q^{\text{IV}};\\ N=(a\times b\times c\times d\times e)\times q^{\text{IV}};\ \frac{N}{a\times b\times c\times d\times e}=q^{\text{IV}}\end{array}$$

Un número solo puede ser descompuesto en un sistema de factores primos;

$$\left.\begin{array}{l}N=A\times B\times C\times D\\ N=a\times b\times c\times d\times e\times f\end{array}\right\}A\times B\times C\times D=a\times b\times c\times d\times e\times f;$$

$A\ldots a$, $A=a$; $B\times C\times D=b\times c\times d\times e\times f$; $B\ldots b$, $B=b$; $C\times D=c\times d\times e\times f$; $C\ldots c$, $C=c$; $D=d\times e\times f$; $D\ldots d$, $D=d$; $1=e\times f$; $e=1$, $f=1$

Las condiciones necesarias y suficientes para que un número divida á un dividendo determinado son: que solo contenga factores primos de los que se hallen en este dividendo y que ninguno de estos factores esté elevado en el número á esponente mayor que en el dividendo;

$$\left.\begin{array}{l}N=a^m.b^n.c^p.d^q\\ D=a^r.c^s.f^t\end{array}\right\}r\not> m,\ s\not> p;\ \frac{N}{a^r.c^s.f^t}=Q,\quad N=a^r.c^s.f^t.Q$$

$$\left.\begin{array}{l}N=a^m.b^n.c^p.d^q\\ D=a^r.b^s.d^t\end{array}\right\}r\not> m,\ t\not> q,\ s>n;\ \frac{N}{a^r.b^s.d^t}=Q,\ N=a^r.b^s.d^t.Q$$

$$\left.\begin{array}{l}N=a^m.b^n.c^p.d^q\\ D=a^r.b^s.f^t\end{array}\right\}r\not> m,\ s>n;\quad \frac{N}{a^r.b^s.f^t}=Q,\ N=a^r.b^s.f^t.Q$$

$$\left.\begin{array}{l}N=a^m.b^n.c^p.d^q\\ D=a^r.c^p.d^t\end{array}\right\}r<m,\ t<q;\ N=a\times a\times a\times\ldots{}^m\times b^n\times c^p\times d\times d\times d\times\ldots{}^q=a\times a\times\ldots{}^r\times a\times a\times\ldots{}^{m-r}\times b^n\times c^p\times d\times d\times\ldots{}^t\times d\times d\times\ldots{}^{q-t}=$$

$$a^r\times a^{m-r}\times b^n\times c^p\times d^t\times d^{q-t}=(a^r\times c^p\times d^t)\times(a^{m-r}\times b^n\times d^{q-t});\ \frac{N}{a^r\times c^p\times d^t}=a^{m-r}\times b^n\times d^{q-t}$$

Las condiciones necesarias y suficientes para que un número sea divisible por un divisor determinado son: que contenga todos los factores primos de este divisor y que los contenga elevados por lo menos á igual esponente;

$$\left.\begin{array}{l}D=a^m.b^n.c^p\\ N=a^q.c^r.d^s.f^t\end{array}\right\}q\not< m,\ r\not< p;\ \frac{N}{a^m.b^n.c^p}=Q,\ N=a^m.b^n.c^p.Q\ \left|\begin{array}{l}D=a^m.b^n.c^p\\ N=a^q.b^r.c^s.d^t\end{array}\right\}$$

$$q\not< m,\ s\not< p,\ r<n;\ \frac{N}{a^m.b^n.c^p}=Q,\ N=a^m.b^n.c^p.Q\ \left|\begin{array}{l}D=a^m.b^n.c^p\\ N=a^q.c^r.d^s.f^t\end{array}\right\}q\not< m,\ r<p;\ \frac{N}{a^m.b^n.c^p}=Q,\ N=a^m.b^n.c^p.Q\ \left|\begin{array}{l}D=a^m.b^n.c^p\\ N=a^q.b^n.c^r.d^s\end{array}\right\}$$

$$q>m,\ r>p;\ N=a\times a\times a\times\ldots{}^q\times b^n\times c\times c\times c\times\ldots{}^r\times d^s=a\times a\times\ldots{}^m\times a\times a\times\ldots{}^{q-m}\times b^n\times c\times c\times\ldots{}^p\times c\times c\times\ldots{}^{r-p}\times d^s=a^m\times$$

$$a^{q-m}\times b^n\times c^p\times c^{r-p}\times d^s=(a^m\times b^n\times c^p)\times a^{q-m}\times c^{r-p}\times d^s;\ \frac{N}{a^m\times b^n\times c^p}=a^{q-m}\times c^{r-p}\times d^s$$

Descomponer un número A en sus factores primos. Esplicacion.

$\frac{A}{2} = A'$, $A = 2 \times A'$

$\frac{A'}{2} = A''$, $A' = 2 \times A''$

$\frac{A''}{2} = A'''$, $A'' = 2 \times A'''$

....

$\frac{B}{3} = B'$, $B = 3 \times B'$

$\frac{B'}{3} = B''$, $B' = 3 \times B''$

....

$\frac{C}{7} = C'$, $C = 7 \times C'$

$\frac{C'}{7} = C''$, $C' = 7 \times C''$

....

D

....

....

P

A	2
A'	2
A''	2
A'''	⋮
⋮	⋮
B	3
B'	3
B''	⋮
⋮	⋮
C	7
C'	7
C''	⋮
⋮	⋮
D	⋮
⋮	⋮
P	P
1	

$A = 2 \times A' = 2 \times 2 \times A'' = 2 \times 2 \times 2 \times A''' = \ldots = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times B = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 3 \times B' = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 3 \times 3 \times B'' =$

$\ldots = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 3 \times 3 \times \ldots \times C = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 3 \times 3 \times \ldots \times 7 \times C' = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 3 \times 3 \times \ldots \times 7 \times 7 \times C'' =$

$\ldots = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 3 \times 3 \times \ldots \times 7 \times 7 \times \ldots \times D = \ldots = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 3 \times 3 \times \ldots \times 7 \times 7 \times \ldots \times \ldots \times P$ |

No hay que ensayar otros divisores.

$N = a \times a \times a \times \ldots^{m} \times b \times b \times b \times \ldots^{n} \times c \times c \times c \times \ldots^{r} \times d \times d \times d \times \ldots^{q} \times \ldots$; $N = a^{m} \times b^{n} \times c^{p} \times d^{q} \times \ldots$ |

12600	2
6300	2
3150	2
1575	3
525	3
175	5
35	5
7	7
1	

$12600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$

Hallar todos los divisores simples y compuestos de un número; $N = a^{m} \times b^{n} \times c^{p} \times d^{q}$;

$$\left.\begin{array}{l} 1 \ldots a \ldots a^2 \ldots a^3 \ldots\ldots a^{m} \\ 1 \ldots b \ldots b^2 \ldots b^3 \ldots\ldots b^{n} \\ 1 \ldots c \ldots c^2 \ldots c^3 \ldots\ldots c^{p} \\ 1 \ldots d \ldots d^2 \ldots d^3 \ldots \ldots d^{q} \end{array}\right\}$$

Razonamiento para hacer ver que multiplicando todos los números de la primera fila por cada uno de los de la segunda, todos los productos así obtenidos por cada uno de los de la tercera fila, todos los productos así obtenidos por cada uno de los números de la cuarta, etc., los productos que se formen serán todos divisores del número propuesto. | Demostrar que se habrán formado todos los divisores del número;

$a^{h} \times b^{k} \times c^{s} \times d^{t}$; $h \not> m$, $k \not> n$, $s \not> p$, $t \not> q$; $a^{h} \times c^{s} \times d^{t}$; $h \not> m$, $s \not> p$, $t \not> q$; $b^{k} \times d^{t}$, $k \not> n$, $t \not> q$. | Demostrar que ningun divisor resultará repetido;

$a^{h} \times b^{k} \times c^{s} \times d^{t}$, $\quad a^{h} \times c^{s} \times d^{t} \quad b^{k} \times d^{t}$

$a^{h} \times b^{k} \times c^{s} \quad a^{h} \times c^{s}, \quad b^{k}$

$a^{h} \times b^{k} \quad a^{h}, \quad b^{k}$

$a^{h} \quad a^{h}, \quad 1$

Hallar el número total de divisores simples y compuestos que tendrá el número propuesto;

$$\begin{array}{ccc} m+1 & (m+1)\times(n+1) & (m+1)\times(n+1)\times(p+1) \\ m+1 & (m+1)\times(n+1) & (m+1)\times(n+1)\times(p+1) \\ m+1 & (m+1)\times(n+1) & (m+1)\times(n+1)\times(p+1) \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ n+1 & p+1 & q+1 \\ \hline (m+1)\times(n+1) & (m+1)\times(n+1)\times(p+1) & (m+1)\times(n+1)\times(p+1)\times(q+1) \end{array}$$

Número total de divisores $= (m+1)\times(n+1)\times(p+1)\times(q+1)$

Método práctico para hallar todos los divisores simples y compuestos de un número y esplicacion del mismo.

		1
12600	2	2
6300	2	4
3150	2	8
1575	3	3 ,6,12,24
525	3	9,18,36,72
175	5	5,10,20,40,15,30,60,120,45,90,180,360
35	5	25,50,100,200,75,150,300,600,225,450,900,1800
7	7	7,14,28,56,21,42,84,168,63,126,252,504,35,70,140,280,105,210,420,840,315,630,1260,2520,175,350,700,1400,525,1050,2100,4200,1575,3150,6300,12600
1		

$12600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$; número total de divisores $= (3+1)\times(2+1)\times(2+1)\times(1+1) = 4\times3\times3\times2 = 72$;

Factores de que se compone el *m.c.d.* de varios números. | Modo de hallar el *m.c.d.* de varios números por la descomposicion de estos en sus factores primos

3780	2	511830	2	29700	2
1890	2	255915	3	14850	2
945	3	85305	3	7425	3
315	3	28435	5	2475	3
105	3	5687	11	825	3
35	5	517	11	275	5
7	7	47	47	55	5
1		1		11	11
				1	

$$\left.\begin{aligned} 3780 &= 2^2\times3^3\times5\times7 \\ 511830 &= 2\times3^2\times5\times11^2\times47 \\ 29700 &= 2^2\times3^3\times5^2\times11 \end{aligned}\right\} m.c.d. = 2\times3^2\times5 = 90$$

El *m.c.d.* de dos números no se altera porque se multiplique ó divida el uno por un factor primo con el otro; A, B; m; $\left.\begin{matrix}A\\m\end{matrix}\right\}$ primos entre sí; $m.c.d.\left.\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\} = m.c.d.\left\{\begin{matrix}A\\B\times m\end{matrix}\right.$ $m.c.d.\left.\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\} = m.c.d.\left\{\begin{matrix}A\\ \frac{B}{m}\end{matrix}\right.$

Abreviaciones en el *m.c.d.* por las divisiones sucesivas. $\left\{\begin{array}{l}\text{Cuándo se llega á un resíduo que es número primo.}\\ \text{Cuándo uno de los números tiene un factor primo con el otro.}\\ \text{Cuándo un resíduo es mayor que la mitad del divisor correspondiente}\end{array}\right.$

N, D, C, R; $N = D\times C + R$, $N = D\times(C+1) - (D-R)$; $\left\{\begin{matrix} N \,\ldots\ldots\, D \,\ldots\ldots\, D - R; & m \not> m' \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \\ m \qquad\quad m' & m' \not> m \end{matrix}\right\} m = m'$

	2	11	5	3	1	3
106449	50948	4553	865	228	181	47
004553	05418	0228	181	047	40	
	0865					

	1	106	125	2
324008	2 1 3 5 6 8	1 0 0 4 0	8 0	8
110440	0 1 2 7 6 8	2 0 0 8	1 6	
	0 0 7 2 0	4 0 8	0	
		0 8 8		
		0 8		

	3,4	463	3,4	4,5	3
1570544	3 9 2 8 4 8	848	224	48	16
392000	5 3 6 4	176	32	00	
	2 7 6 8				
	2 2 4				

Mínimo comun múltiplo de varios números. | Factores de que se compone el M.C.M. de varios números. | Modo de hallar el M.C.M. de varios números por la descomposicion de estos en sus factores primos;

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} 90 = 2 . 3^2 . 5 \\ 252 = 2^2 . 3^2 . 7 \\ 270 = 2 . 3^3 . 5 \end{array}\right\} \text{M.C.M} = 2^2 . 3^3 . 5 . 7 = 3780$$ |

Todo múltiplo de dos números es producto de uno de ellos, del cociente de dividir el otro por el *m.c.d.* de ambos y de otro cualquier número;

A, B; *m.c.d.* $\left.\begin{array}{c} A \\ B \end{array}\right\} = D$, $\begin{array}{l} \frac{A}{D} = A', \ A = A' \times D; \\ \frac{B}{D} = B', \ B = B' \times D; \end{array}$ M; $\begin{array}{l} M = A \times h = A' \times D \times h; \\ M = B \times k = B' \times D \times k; \end{array}$ $A' \times D \times h = B' \times D \times k$, $A' \times h = B' \times k$; $k = \frac{A' \times h}{B'}$, $\left.\begin{array}{c} A' \\ B' \end{array}\right\}$ primos entre sí;

$B' \ldots h$; $\frac{h}{B'} = n$, $h = B' \times n$; $M = A \times B' \times n$ | Los múltiplos comunes á A y B son: $A \times B' \times 1$, $A \times B' \times 2$, $A \times B' \times 3, \ldots$, $A \times B' \times n$. El menor de todos es $A \times B'$. |

Todo múltiplo comun de dos números es múltiplo del M.C.M. suyo | Modo de hallar el M.C.M. de dos números; 658, 378; *m.c.d.* $\left.\begin{array}{c} 658 \\ 378 \end{array}\right\} = 14$; $\frac{378}{14} = 27$;

M.C.M. $\left.\begin{array}{c} 658 \\ 378 \end{array}\right\} = 658 \times 27 = 17766$ | Modo de hallar el M.C.M. de varios números; $\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{A \ldots\ldots B}_{m} \ldots\ldots C}_{m'} \ldots\ldots D}_{m''} \ldots\ldots E}_{m'''}$, M; $\left.\begin{array}{l} M \not< m''' \\ m''' \not< M \end{array}\right\} M = m'''$ |

Conviene empezar por los mayores; 16206, 6364, 2021, 1898; *m.c.d.* $\left.\begin{array}{c} 16206 \\ 6364 \end{array}\right\} = 74$, $\frac{6364}{74} = 86$, $16206 \times 86 = 1393716$; *m.c.d.* $\left.\begin{array}{c} 1393716 \\ 2021 \end{array}\right\} = 43$, $\frac{2021}{43} = 47$, $1393716 \times 47 = 65504652$; *m.c.d.* $\left.\begin{array}{c} 65504652 \\ 1898 \end{array}\right\} = 146$, $\frac{1898}{146} = 13$, $65504652 \times 13 = 851560476$; M.C.M. $= 851560476$ | Hallar el *m.c.d.* de un número y un producto sin efectuar este producto; $A \times B \times C \times D$, N; *m.c.d* $\left.\begin{array}{c} A \\ N \end{array}\right\} = h$; h; $\frac{N}{h} = N'$, *m.c.d.* $\left.\begin{array}{c} B \\ N' \end{array}\right\} = h'$; $h \times h'$; $\frac{N'}{h'} = N''$, *m.c.d* $\left.\begin{array}{c} C \\ N'' \end{array}\right\} = h''$; $h \times h' \times h''$; $\frac{N''}{h''} = N'''$, *m.c.d* $\left.\begin{array}{c} D \\ N''' \end{array}\right\} = h'''$; $h \times h' \times h'' \times h'''$; $242 \times 320 \times 49 \times 330$, 69300; *m.c.d* $\left.\begin{array}{c} 242 \\ 69300 \end{array}\right\} = 22$; 22; $\frac{69300}{22} = 3150$, *m.c.d.* $\left.\begin{array}{c} 320 \\ 3150 \end{array}\right\} = 10$; 22×10; $\frac{3150}{10} = 315$, *m.c.d.* $\left.\begin{array}{c} 49 \\ 315 \end{array}\right\} = 7$; $22 \times 10 \times 7$; $\frac{315}{7} = 45$, *m.c.d.* $\left.\begin{array}{c} 330 \\ 45 \end{array}\right\} = 15$; $22 \times 10 \times 7 \times 15$; *m.c.d.* $\left.\begin{array}{c} 242 \times 320 \times 49 \times 330 \\ 69300 \end{array}\right\} = 22 \times 10 \times 7 \times 15 = 23100$ |

FRACCIONES ORDINARIAS.

Definicion del número fraccionario, fraccion ó quebrado. | Medios ó mitades, tercios, cuartos, quintos, sextos, sétimos, octavos, novenos, décimos, onceavos, doceavos,...., treinta y siete avos,..., cuatrocientos setenta y ocho avos,...; *avos.* | De estas partes pueden tomarse mas ó menos: tres quintos, catorce novenos, ochenta y seis quinientos ochenta y tres avos,.... | Para expresar una fraccion hay pues que enunciar dos números: $\left.\begin{matrix}\textit{Numerador}\\ \textit{Denominador}\end{matrix}\right\}$

Términos. | $—$, $/$, $|$, $\frac{3}{5}$, $^3/_5$, $3|5$ | $\begin{matrix}\text{Numerador} < \text{Denominador ..... Fraccion} < \text{unidad ......} \textit{propia}\\ \text{Numerador} = \text{Denominador ..... Fraccion} = \text{unidad}\\ \text{Numerador} > \text{Denominador ..... Fraccion} > \text{unidad}\end{matrix}\Big\}\text{......}\textit{impropia}$ $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{24}{7}$ | De dos fracciones que tienen el mismo denominador es mayor la que tiene mayor numerador $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{b}$; $a > c,\ \frac{a}{b} > \frac{c}{b}$ | De dos fracciones que tienen el mismo numerador es mayor la que tiene menor denominador; $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$; $b < c,\ \frac{a}{b} > \frac{a}{c}$ | Para multiplicar una fraccion por un entero se multiplica el numerador de la fraccion por el entero conservando el denominador; $\frac{a}{b} \times m = \frac{a \times m}{b}$; $\frac{3}{8} \times 7 = \frac{3 \times 7}{8} = \frac{21}{8}$ | Para multiplicar una fraccion por un entero cuando el denominador es divisible por este, basta dividir el denominador por el entero conservando el numerador; $\frac{a}{b} \times m = \frac{a}{b : m}$; $\frac{4}{21} \times 3 = \frac{4}{21:3} = \frac{4}{7}$ | Para dividir una fraccion por un número entero se multiplica el denominador por el entero conservando el numerador; $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{b \times m}$; $\frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{4 \times 5} = \frac{3}{20}$ | Para dividir una fraccion por un número entero cuando el numerador de aquella es divisible por este, basta dividir el numerador por el entero conservando el denominador; $\frac{a}{b} : m = \frac{a : m}{b}$; $\frac{12}{17} : 4 = \frac{12:4}{17} = \frac{3}{17}$ | No se altera el valor de una fraccion multiplicando sus dos términos por un mismo número; $\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b} \times m\right) : m = \frac{a \times m}{b} : m = \frac{a \times m}{b \times m}$; $\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3} \times 7\right) : 7 = \frac{2 \times 7}{3} : 7 = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{14}{21}$ | No se altera el valor de una fraccion dividiendo sus dos términos por un mismo divisor comun á ambos; $\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b} : m\right) \times m = \frac{a : m}{b} \times m = \frac{a : m}{b : m}$; $\frac{12}{20} = \left(\frac{12}{20} : 4\right) \times 4 = \frac{12:4}{20} \times 4 = \frac{12:4}{20:4} = \frac{3}{5}$ | El producto de una fraccion por su denominador es igual á su numerador; $\frac{3}{8} \times 8 = 3$ octavos $\times 8 = (3 \times 8)$ octavos $= (8 \times 3)$ octavos $= 8$ octavos$\times 3 = 1\times 3 = 3$; $\frac{a}{b}\times b = a$ beavos $\times b = (a\times b)$ beavos $= (b\times a)$ beavos $= b$ beavos $\times a = 1\times a = a$ | Toda fraccion equivale al cociente de la division de su numerador por su denominador y viceversa toda division indicada equivale á una fraccion cuyo numerador es el dividendo y cuyo denominador es el divisor; $\frac{a}{b}\times b = a$, $\frac{a}{b} = a : b$ | Para completar el cociente de una division inexacta se añade al cociente entero una fraccion cuyo numerador es el resíduo de la division y cuyo denominador es el divisor; N, D, C, R; $N = D\times C + R$, $\begin{matrix} N > D\times C & \text{coc.}^{te} > C, \\ N < D\times (C+1), & \text{coc.}^{te} < C+1, \end{matrix}$ $C+\alpha$, $\alpha < 1$; $N : D = C+\alpha$, $N = (C+\alpha)\times D = C\times D + \alpha\times D$; $D\times C + R = C\times D + \alpha\times D$, $R = \alpha\times D$, $\alpha = R : D = \frac{R}{D}$; $N : D = C + \frac{R}{D}$ | Reducir una fraccion impropia á número entero ó mixto; $\frac{a}{b} = a : b = c$; $\frac{24}{3} = 24 : 3 = 8$; $\frac{a}{b} = a : b$; c, r; $\frac{a}{b} = a : b = c + \frac{r}{b}$; $\frac{34}{5} = 34 : 5 = 6\frac{4}{5}$ | La misma reduccion anterior esplicada por otras consideraciones; $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{b} = 1$, $a : b = c$, $\frac{a}{b} = c$; $\frac{24}{3}$, $\frac{3}{3} = 1$, $24 : 3 = 8$, $\frac{24}{3} = 8$; $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{b} = 1$, $a : b$, c, r; $\frac{a}{b} = c + \frac{r}{b}$; $\frac{34}{5}$, $\frac{5}{5} = 1$, $34 : 5$, 6, 4; $\frac{34}{5} = 6\frac{4}{5}$ | Se puede dar á un número entero la forma de fraccion poniéndole por denominador la unidad; $a = a : 1 = \frac{a}{1}$ | Dar á un número entero la forma de fraccion cuyo denominador sea determinado; a, c; $a = (a\times c) : c = \frac{a\times c}{c}$; $7, 9$; $7 = (7\times 9) : 9 = \frac{7\times 9}{9} = \frac{63}{9}$ | Reducir un número mixto á fraccionario; $a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} = \frac{a\times c}{c} + \frac{b}{c} = (a\times c)$ ceavos $+\, b$ ceavos $= (a\times c + b)$ ceavos $= \frac{a\times c + b}{c}$; $8\frac{3}{5} = 8 + \frac{3}{5} = \frac{8\times 5}{5} + \frac{3}{5} = (8\times 5)$ quintos $+\, 3$ quintos $= (8\times 5 + 3)$ quintos $= \frac{8\times 5 + 3}{5} = \frac{43}{5}$ | Simplificacion de fracciones; $\frac{840}{1290} = \frac{840:10}{1290:10} = \frac{84}{129} = \frac{84:3}{129:3} = \frac{28}{43}$ | Reducir una fraccion á su mas simple espresion; $\frac{A}{B}$, $m.c.d \left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = d$, $\frac{A}{B} = \frac{A:d}{B:d} = \frac{a}{b}$, $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\}$ primos entre sí, $\frac{a}{b}$ es una fraccion irreducible; $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$; $\frac{a}{b}\times b' = \frac{a'}{b'}\times b'$, $\frac{a\times b'}{b} = a'$, b divide $a\times b'$ y como es primo con a, habrá de dividir á b', $\frac{b'}{b} = m$, $b' = b\times m$; $a' = \frac{a\times b\times m}{b} = a\times m$; $\left.\begin{matrix} a' = a\times m \\ b' = b\times m \end{matrix}\right\}$ equimúltiplos. | Dos fracciones irreducibles é iguales son idénticas; $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$; $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\}$ primos entre sí, $\left.\begin{matrix} a' \\ b' \end{matrix}\right\}$ primos entre sí, $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$; $\begin{matrix} a' = a\times m, \\ b' = b\times m, \end{matrix}$ $m = 1$, $\begin{matrix} a' = a \\ b' = b \end{matrix}$ | Reducir fracciones á un comun denominador; $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$,....; $\frac{a\times b'\times b''\times\ldots}{b\times b'\times b''\times\ldots}$, $\frac{a'\times b\times b''\times\ldots}{b\times b'\times b''\times\ldots}$, $\frac{a''\times b\times b'\times\ldots}{b\times b'\times b''\times\ldots}$,.... | Por el M.C.M., $\frac{2}{121}$, $\frac{7}{520}$, $\frac{3}{320}$; $\left.\begin{matrix} 121 = 11^2 \\ 520 = 2^3\times 5\times 13 \\ 320 = 2^6\times 5 \end{matrix}\right\}$ M.C.M=

$2^6 \times 5 \times 11^2 \times 13$; $\dfrac{2\times 2^6\times 5\times 13}{2^6\times 5\times 11^2\times 13}, \dfrac{7\times 2^3\times 11^2}{2^6\times 5\times 11^2\times 13}, \dfrac{3\times 11^2\times 13}{2^6\times 5\times 11^2\times 13}$. | Para saber qué factores faltan á cada denominador para valer el M.C.M., cuando este no se ha encontrado por la descomposicion en factores primos, se le divide por cada denominador y el cociente será el producto de aquellos factores. |

Reducir fracciones á comun numerador; $\dfrac{a}{b}, \dfrac{a'}{b'}, \dfrac{a''}{b''}, \ldots$; $\dfrac{a\times a'\times a''\times\ldots}{b\times a'\times a''\times\ldots}, \dfrac{a\times a'\times a''\times\ldots}{b'\times a\times a''\times\ldots}, \dfrac{a\times a'\times a''\times\ldots}{b''\times a\times a'\times\ldots}, \ldots$ | Por el M.C.M.; $\dfrac{962}{7}, \dfrac{598}{5}, \dfrac{782}{4}$; M.C.M.$=376142$; $\dfrac{376142}{962}=391, \dfrac{376142}{598}=629, \dfrac{376142}{782}=481$; $\dfrac{376142}{7\times 391}, \dfrac{376142}{5\times 629}, \dfrac{376142}{4\times 481}$ | Averiguar cuál de dos fracciones es la mayor; $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}$; $\dfrac{a\times d}{b\times d}, \dfrac{b\times c}{b\times d}$; $a\times d \gtreqless b\times c$, $\dfrac{a\times d}{b\times d} \gtreqless \dfrac{b\times c}{b\times d}$, $\dfrac{a}{b} \gtreqless \dfrac{c}{d}$; $\dfrac{a\times c}{b\times c}, \dfrac{a\times c}{a\times d}$; $b\times c \lesseqgtr a\times d$, $\dfrac{a\times c}{b\times c} \gtreqless \dfrac{a\times c}{a\times d}$, $\dfrac{a}{b} \gtreqless \dfrac{b}{d}$ | Averiguar si se altera una fraccion aumentando ó disminuyendo sus dos términos en una misma cantidad;

$$\frac{a}{b},\ a<b,\ m;\ \frac{a+m}{b+m},\ a+m<b+m \left\{\begin{array}{l} 1-\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{b}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{b-a}{b} \\ 1-\dfrac{a+m}{b+m}=\dfrac{b+m}{b+m}-\dfrac{a+m}{b+m}=\dfrac{(b+m)-(a+m)}{b+m}=\dfrac{b+m-a-m}{b+m}=\dfrac{b-a}{b+m} \end{array}\right\} \frac{b-a}{b+m}<\frac{b-a}{b},\ \frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b};\ \text{aumenta.}$$

$$\frac{a}{b},\ a<b,\ m;\ \frac{a-m}{b-m},\ a-m<b-m \left\{\begin{array}{l} 1-\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{b}-\dfrac{a}{b}=\dfrac{b-a}{b} \\ 1-\dfrac{a-m}{b-m}=\dfrac{b-m}{b-m}-\dfrac{a-m}{b-m}=\dfrac{(b-m)-(a-m)}{b-m}=\dfrac{b-m-a+m}{b-m}=\dfrac{b-a}{b-m} \end{array}\right\} \frac{b-a}{b-m}>\frac{b-a}{b},\ \frac{a-m}{b-m}<\frac{a}{b};\ \text{disminuye.}$$

$$\frac{a}{b},\ a>b,\ m;\ \frac{a+m}{b+m},\ a+m>b+m \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{b}-1=\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{b}=\dfrac{a-b}{b} \\ \dfrac{a+m}{b+m}-1=\dfrac{a+m}{b+m}-\dfrac{b+m}{b+m}=\dfrac{(a+m)-(b+m)}{b+m}=\dfrac{a+m-b-m}{b+m}=\dfrac{a-b}{b+m} \end{array}\right\} \frac{a-b}{b+m}<\frac{a-b}{b},\ \frac{a+m}{b+m}<\frac{a}{b};\ \text{disminuye.}$$

$$\frac{a}{b},\ a>b,\ m;\ \frac{a-m}{b-m},\ a-m>b-m \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{b}-1=\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{b}=\dfrac{a-b}{b} \\ \dfrac{a-m}{b-m}-1=\dfrac{a-m}{b-m}-\dfrac{b-m}{b-m}=\dfrac{(a-m)-(b-m)}{b-m}=\dfrac{a-m-b+m}{b-m}=\dfrac{a-b}{b-m} \end{array}\right\} \frac{a-b}{b-m}>\frac{a-b}{b},\ \frac{a-m}{b-m}>\frac{a}{b};\ \text{aumenta.}$$

$$\frac{a}{b},\ a=b,\ m,\ \frac{a+m}{b+m},\ a+m=b+m \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{b}=1 \\ \dfrac{a+m}{b+m}=1 \end{array}\right\} \frac{a}{b}=\frac{a+m}{b+m};\ \text{no se altera.}$$

$$\frac{a}{b},\ a=b,\ m,\ \frac{a-m}{b-m},\ a-m=b-m \left\{\begin{array}{l} \dfrac{a}{b}=1 \\ \dfrac{a-m}{b-m}=1 \end{array}\right\} \frac{a}{b}=\frac{a-m}{b-m};\ \text{no se altera.}$$

$\frac{a}{b}$, m, $\frac{a+m}{b+m}$; $\frac{a\times(b+m)}{b\times(b+m)}$, $\frac{(a+m)\times b}{b\times(b+m)}$; $\frac{a\times b+a\times m}{b\times(b+m)}$, $\frac{a\times b+b\times m}{b\times(b+m)}$; $a \overset{<}{\underset{>}{=}} b$, $a\times m \overset{<}{\underset{>}{=}} b\times m$, $\frac{a}{b} \overset{<}{\underset{>}{=}} \frac{a+m}{b+m}$ $\begin{cases}\text{aumenta}\\ \text{no se altera}\\ \text{disminuye}\end{cases}$

$\frac{a}{b}$, m, $\frac{a-m}{b-m}$; $\frac{a\times(b-m)}{b\times(b-m)}$, $\frac{(a-m)\times b}{b\times(b-m)}$; $\frac{a\times b-a\times m}{b\times(b-m)}$, $\frac{a\times b-b\times m}{b\times(b-m)}$; $a \overset{<}{\underset{>}{=}} b$, $a\times m \overset{<}{\underset{>}{=}} b\times m$, $\frac{a}{b} \overset{>}{\underset{<}{=}} \frac{a-m}{b-m}$ $\begin{cases}\text{disminuye}\\ \text{no se altera}\\ \text{aumenta}\end{cases}$

Si se tienen varias fracciones iguales y se forma otra cuyo numerador sea la suma de los numeradores de aquellas y su denominador la suma de los denominadores de las mismas, la fraccion asi formada será equivalente á cualquiera de las primeras;

$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots\ldots=\frac{p}{q}$; $\left.\begin{matrix}p\\q\end{matrix}\right\}$primos entre si; $\begin{matrix}a=m\times p,\ a'=m'\times p,\ a''=m''\times p,\ldots;\ a+a'+a''+\ldots=m\times p+m'\times p+m''\times p+\ldots=(m+m'+m''+\ldots)\times p;\\ b=m\times q,\ b'=m'\times q,\ b''=m''\times q,\ldots;\ b+b'+b''+\ldots=m\times q+m'\times q+m''\times q+\ldots=(m+m'+m''+\ldots)\times q;\end{matrix}$

$\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots}=\frac{(m+m'+m''+\ldots)\times p}{(m+m'+m''+\ldots)\times q}=\frac{p}{q}=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots$

Reducir una fraccion á fraccion de otra especie, es decir, á fraccion cuyo denominador sea diferente del de la primera; $\frac{a}{b}$, c; $\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\times c\right):c=\frac{a\times c}{b}:c=\frac{\frac{a\times c}{b}}{c}$; $\frac{a\times c}{b}=m$; $\frac{a}{b}=\frac{m}{c}$; $\frac{a\times c}{b}\begin{matrix}>m\\<m+1,\end{matrix}$ $\frac{a}{b}\begin{matrix}>\frac{m}{c}\ \ldots\ldots\text{ defecto}\\ <\frac{m+1}{c}\ \ldots\ldots\text{ esceso}\end{matrix}$ $\frac{1}{c}$. Para que se pueda hacer exactamente la conversion, se necesita y basta que $\frac{a\times c}{b}$ sea entero, para ello que $a\times c$ contenga todos los factores de b y de consiguiente que el nuevo denominador c contenga todos los factores del antiguo b que no entren en el numerador a. $\frac{2}{5}$ á décimos; $\frac{2}{5}=\left(\frac{2}{5}\times 10\right):10=\frac{\frac{2\times10}{5}}{10}=\frac{\frac{20}{5}}{10}=\frac{4}{5}$; $\frac{3}{4}$ á sétimos; $\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\times7\right):7=\frac{\frac{3}{4}\times7}{7}=\frac{\frac{21}{4}}{7}$; $\frac{21}{4}\begin{matrix}>5,\\<6,\end{matrix}$ $\frac{3}{4}\begin{matrix}>\frac{5}{7}\\<\frac{6}{7}\end{matrix}$ $\frac{1}{7}$; $\frac{12}{15}$ á treinta y cinco avos; $\frac{12}{15}=\left(\frac{12}{15}\times35\right):35=\frac{\frac{12\times35}{15}}{35}=\frac{\frac{420}{15}}{35}=\frac{28}{35}$

SUMA DE FRACCIONES.

Las definiciones dadas en primer término de la suma, resta, multiplicacion y division de números enteros son aplicables á toda clase de números. Estas operaciones se indican en todos los casos con los signos ya espresados.

Cuando todos los sumandos son fraccionarios.

Cuando hay en los sumandos fracciones y enteros.

Cuando todos los sumandos son fraccionarios y tienen igual denominador; $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{d}{b}+\ldots=a$ beavos$+c$ beavos$+d$ beavos$+\ldots=(a+c+d+\ldots)$ beavos$=\frac{a+c+d+\ldots}{b}$; $\frac{4}{5}+\frac{6}{5}+\frac{2}{5}=4$ quintos$+6$ quintos$+2$ quintos$=(4+6+2)$ quintos$=\frac{4+6+2}{5}=\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$ | Cuando todos los sumandos son fraccionarios y no tienen un mismo denominador; $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+\ldots=\frac{a\times d\times f\times\ldots}{b\times d\times f\times\ldots}+\frac{c\times b\times f\times\ldots}{b\times d\times f\times\ldots}+\frac{e\times b\times d\times\ldots}{b\times d\times f\times\ldots}+\ldots=\frac{a\times d\times f\times\ldots+c\times b\times f\times\ldots+e\times b\times d\times\ldots}{b\times d\times f\times\ldots}$; $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}=\frac{70}{105}+\frac{63}{105}+\frac{60}{105}=\frac{70+63+60}{105}=\frac{193}{105}=1\frac{88}{105}$; $\frac{7}{240}+\frac{11}{840}+\frac{19}{360}$, $\left.\begin{array}{l}240=2^4.3.5\\840=2^3.3.5.7\\360=2^3.3^2.5\end{array}\right\}$ M.C.M$=2^4.3^2.5.7$, $\frac{7}{240}+\frac{11}{840}+\frac{19}{360}=\frac{7.3.7+11.2.3+19.2.7}{2^4.3^2.5.7}=\frac{479}{5040}$ | Cuando hay en los sumandos enteros y fracciones; $4\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+12+6\frac{5}{6}+\frac{4}{15}+8+3\frac{9}{10}$; M.C.M$=2.3.5=30$; $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{5}{6}+\frac{4}{15}+\frac{9}{10}=\frac{20+18+25+8+27}{30}=\frac{98}{30}=3\frac{8}{30}=3\frac{4}{15}$; $4\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+12+6\frac{5}{6}+\frac{4}{15}+8+3\frac{9}{10}=36\frac{4}{15}$ |

SUSTRACCION DE FRACCIONES.

Todas las definiciones de la sustraccion de números enteros son aplicables á los números fraccionarios. | La esplicacion dada relativamente á las alteraciones que sufre la resta cuando el minuendo ó el sustraendo ó ambos se aumentan ó disminuyen en alguna cantidad es estensiva á toda clase de números. | $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=a$ beavos $-\,c$ beavos$=(a-c)$ beavos$=\frac{a-c}{b}$; $\frac{5}{9}-\frac{3}{9}=5$ novenos $-\,3$ novenos $=(5-3)$ novenos$=\frac{5-3}{9}=\frac{2}{9}$ | $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times d}-\frac{c\times b}{b\times d}=\frac{a\times d-c\times b}{b\times d}$; $\frac{2}{3}-\frac{3}{22}=\frac{2\times 22}{3\times 22}-\frac{3\times 3}{3\times 22}=\frac{44-9}{66}=\frac{35}{66}$; $\frac{45}{240}-\frac{3}{420}$, $\left.\begin{array}{l}240=2^4.3.5\\420=2^2.3.5.7\end{array}\right\}$ M.C.M$=2^4.3.5.7$, $\frac{45}{240}-\frac{3}{420}=\frac{45.7-3.2^2}{2^4.3.5.7}=\frac{315-12}{1680}=\frac{303}{1680}=\frac{101}{560}$ | $\frac{a}{b}-c$, $\frac{a}{b}$ impropia y mayor que c, $\frac{a}{b}-c=\frac{a}{b}-\frac{c\times b}{b}=\frac{a-c\times b}{b}$; $\frac{24}{5}-2=\frac{24}{5}-\frac{2\times 5}{5}=\frac{24-2\times 5}{5}=\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}$ | $\frac{a}{b}-c\frac{d}{f}$, $\frac{a}{b}$ impropia y mayor que $c\frac{d}{f}$, $\frac{a}{b}-c\frac{d}{f}=\frac{a}{b}-\frac{c\times f+d}{f}=\frac{a\times f}{b\times f}-\frac{(c\times f+d)\times b}{b\times f}=\frac{a\times f-(c\times f+d)\times b}{b\times f}$; $\frac{28}{3}-4\frac{3}{5}=\frac{28}{3}-\frac{23}{5}=\frac{140-69}{15}=\frac{71}{15}=4\frac{11}{15}$ | $a-\frac{b}{c}=\frac{a\times c}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a\times c-b}{c}$; $8-\frac{3}{5}=\frac{8\times 5}{5}-\frac{3}{5}=\frac{8\times 5-3}{5}=\frac{37}{5}=7\frac{2}{5}$ | $a-b\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{d}-\frac{b\times d+c}{d}=\frac{a\times d-(b\times d+c)}{d}$; $8-3\frac{2}{5}=\frac{40}{5}-\frac{17}{5}=$

$\frac{40-17}{5}=\frac{23}{5}=4\frac{3}{5}$ | $a\frac{b}{c}-d=(a-d)+\frac{b}{c}$; $8\frac{3}{5}-2=6\frac{3}{5}$ | $a\frac{b}{c}-\frac{d}{f}=\frac{a\times c+b}{c}-\frac{d}{f}=\frac{(a\times c+b)\times f}{c\times f}-\frac{d\times c}{c\times f}=\frac{(a\times c+b)\times f-d\times c}{c\times f}$; $8\frac{3}{7}-\frac{4}{5}=$

$\frac{59}{7}-\frac{4}{5}=\frac{295-28}{35}=\frac{267}{35}=7\frac{22}{35}$ | $a\frac{b}{c}-d\frac{e}{f}=\frac{a\times c+b}{c}-\frac{d\times f+e}{f}=\frac{(a\times c+b)\times f}{c\times f}-\frac{(d\times f+e)\times c}{c\times f}=\frac{(a\times c+b)\times f-(d\times f+e)\times c}{c\times f}$; $8\frac{3}{7}-4\frac{2}{5}=$

$\frac{59}{7}-\frac{22}{5}=\frac{295-154}{35}=\frac{141}{35}=4\frac{1}{35}$ | $a\frac{b}{c}-\frac{d}{f}=a+\left(\frac{b}{c}-\frac{d}{f}\right)$; $5\frac{7}{9}-\frac{3}{5}=5+\left(\frac{7}{9}-\frac{3}{5}\right)=5+\frac{35-27}{45}=5\frac{8}{45}$ | $a\frac{b}{c}-\frac{d}{f}$; $\frac{b}{c}<\frac{d}{f}$; $a\frac{b}{c}-\frac{d}{f}=$

$(a-1)+\left(\frac{c+b}{c}-\frac{d}{f}\right)=(a-1)+\frac{(c+b)\times f-c\times d}{c\times f}$; $8\frac{3}{7}-\frac{4}{5}=7+\left(\frac{10}{7}-\frac{4}{5}\right)=7+\frac{50-28}{35}=7\frac{22}{35}$ | $a\frac{b}{c}-d\frac{e}{f}=(a-d)+\left(\frac{b}{c}-\frac{e}{f}\right)$; $8\frac{3}{4}-2\frac{3}{5}=$

$(8-2)+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\right)=6+\frac{15-12}{20}=6\frac{3}{20}$ | $a\frac{b}{c}-d\frac{e}{f}$, $\frac{b}{c}<\frac{e}{f}$; $a\frac{b}{c}-d\frac{e}{f}=(a-1-d)+\left(\frac{c+b}{c}-\frac{e}{f}\right)$; $9\frac{2}{7}-5\frac{4}{5}=(8-5)+\left(\frac{9}{7}-\frac{4}{5}\right)=3+$

$\frac{45-28}{35}=3\frac{17}{35}$ | $a-b\frac{c}{d}=(a-1-b)+\left(\frac{d}{d}-\frac{c}{d}\right)=(a-1-b)+\frac{d-c}{d}$ | $8-3\frac{2}{5}=4+\left(\frac{5}{5}-\frac{2}{5}\right)=4\frac{3}{5}$ | $a-\frac{b}{c}=a-1+\left(\frac{c}{c}-\frac{b}{c}\right)=(a-1)+\frac{c-b}{c}$;

$8-\frac{3}{5}=7+\left(\frac{5}{5}-\frac{3}{5}\right)=7\frac{2}{5}$ | Para restar un entero de una fraccion impropia mayor que él se pueden sacar préviamente los enteros que contenga esta; $\frac{39}{5}-3=7\frac{4}{5}-3=4\frac{4}{5}$

MULTIPLICACION DE FRACCIONES.

$\frac{a}{b}\times m=\frac{a\times m}{b}$; $\frac{3}{4}\times 9=\frac{3\times 9}{4}=\frac{27}{4}=6\frac{3}{4}$. Este procedimiento es general | $\frac{a}{b}\times m=\frac{a}{b:m}$; $\frac{7}{12}\times 4=\frac{7}{12:4}=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$. Este procedimiento solo es aplicable cuando el denominador es divisible por el entero | $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}:d=\frac{a}{b\times d}$, $\frac{a}{b\times d}\times c=\frac{a\times c}{b\times d}$. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$; $\frac{8}{5}\times\frac{4}{7}$, $\frac{8}{5}:7=\frac{8}{5\times 7}$, $\frac{8}{5\times 7}\times 4=\frac{8\times 4}{5\times 7}$. $\frac{8}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{8\times 4}{5\times 7}=\frac{32}{35}$ | En el caso de que el numerador y denominador del multiplicando sean divisibles respectivamente por el denominador y numerador del multiplicador se pueden *dividir en cruz*; $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}:d=\frac{a:d}{b}$, $\frac{a:d}{b}\times c=\frac{a:d}{b:c}$, $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a:d}{b:c}$; $\frac{15}{28}\times\frac{7}{3}$, $\frac{15}{28}:3=\frac{15:3}{28}$,

$$\frac{15:3}{28}\times 7=\frac{15:3}{28:7},\ \frac{15}{28}\times\frac{7}{3}=\frac{15:3}{28:7}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}\ \Big|\ \frac{a}{b}\times c\frac{d}{f}=\frac{a}{b}\times\frac{c\times f+d}{f}=\frac{a\times(c\times f+d)}{b\times f};\ \frac{8}{3}\times 2\frac{5}{7}=\frac{8}{3}\times\frac{19}{7}=\frac{152}{21}=7\frac{5}{21}\ \Big|\ a\times\frac{b}{c},\ a:c=\frac{a}{c},\ \frac{a}{c}\times b=$$

$$\frac{a\times b}{c};\ a\times\frac{b}{c}=\frac{a\times b}{c};\ 8\times\frac{3}{7},\ 8:7=\frac{8}{7},\ \frac{8}{7}\times 3=\frac{8\times 3}{7},\ 8\times\frac{3}{7}=\frac{8\times 3}{7}=\frac{24}{7}=3\frac{3}{7}\ \Big|\ a\times b\frac{c}{d}=a\times\frac{b\times d+c}{d}=\frac{a\times(b\times d+c)}{d};\ 8\times 4\frac{3}{5}=8\times\frac{23}{5}=\frac{184}{5}=36\frac{4}{5}\ \Big|$$

$$a\frac{b}{c}\times d=\frac{a\times c+b}{c}\times d=\frac{(a\times c+b)\times d}{c};\ 5\frac{1}{2}\times 3=\frac{11}{2}\times 3=\frac{33}{2}=16\frac{1}{2}\ \Big|\ a\frac{b}{c}\times d=\frac{a\times c+b}{c}\times d=\frac{(a\times c+b)\times d}{c};\ 3\frac{2}{9}\times 4=\frac{29}{9}\times 4=\frac{116}{9}=12\frac{8}{9}\ \Big|\ a\frac{b}{c}\times d\frac{e}{f}=$$

$$\frac{a\times c+b}{c}\times\frac{d\times f+e}{f}=\frac{(a\times c+b)\times(d\times f+e)}{c\times f};\ 9\frac{3}{7}\times 5\frac{3}{4}=\frac{66}{7}\times\frac{23}{4}=\frac{1518}{28}=54\frac{6}{28}=54\frac{3}{14}\ \Big|\ \frac{a}{b}\times c\frac{d}{f}=\frac{a}{b}\times c+\frac{a}{b}\times\frac{d}{f}=\frac{a\times c}{b}+\frac{a\times d}{b\times f};\ \frac{2}{3}\times 9\frac{4}{7}=$$

$$\frac{2}{3}\times 9+\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{18}{3}+\frac{8}{21}=6\frac{8}{81}\ \Big|\ a\times b\frac{c}{d}=a\times b+a\times\frac{c}{d}=a\times b+\frac{a\times c}{d};\ 4\times 3\frac{5}{7}=12+\frac{20}{7}=14\frac{6}{7}\ \Big|\ a\frac{b}{c}\times d=a\times d+\frac{b}{c}\times d=a\times d+\frac{b\times d}{c};\ 8\frac{4}{7}\times 6=$$

$$48+\frac{24}{7}=51\frac{3}{7}\ \Big|\ a\frac{b}{c}\times\frac{d}{f}=a\times\frac{d}{f}+\frac{b}{c}\times\frac{d}{f}=\frac{a\times d}{f}+\frac{b\times d}{c\times f};\ 15\frac{3}{7}\times\frac{2}{5}=\frac{30}{5}+\frac{6}{35}=6\frac{6}{35}\ \Big|\ a\frac{b}{c}\times d\frac{e}{f}=a\frac{b}{c}\times d+a\frac{b}{c}\times\frac{e}{f}=a\times d+\frac{b}{c}\times d+a\times\frac{e}{f}+$$

$$\frac{b}{c}\times\frac{e}{f}=a\times d+\frac{b\times d}{c}+\frac{a\times e}{f}+\frac{b\times e}{c\times f};\ 97\frac{4}{7}\times 4\frac{2}{3}=97\times 4+\frac{4}{7}\times 4+97\times\frac{2}{3}+\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}=388+\frac{16}{7}+\frac{194}{3}+\frac{8}{21}=388+2\frac{2}{7}+64\frac{2}{3}+\frac{8}{21}=455\frac{1}{3};$$

$$\begin{array}{r} 97\frac{4}{7} \\ 4\frac{2}{3} \\ \hline 390\frac{2}{7} \\ \frac{8}{21} \\ 64\frac{2}{3} \\ \hline 455\frac{1}{3} \end{array}\qquad \begin{array}{l} 16\,|\,\underline{7}\quad 194\,|\,\underline{3}\quad \frac{2}{7}+\frac{8}{21}+\frac{2}{3}= \\ 2\ \ 2\qquad 14\ \ 64 \\ \qquad\qquad 2 \\ \frac{6+8+14}{21}=\frac{28}{21}=1\frac{7}{21}=1\frac{1}{3} \end{array}$$

El órden de factores no altera el producto aunque los factores sean enteros, fraccionarios ó mistos:

$$a\times\frac{b}{c}\times d\frac{e}{f}\times g\times\frac{m}{n}\times\ldots=a\times\frac{b}{c}\times\frac{d\times f+e}{f}\times g\times\frac{m}{n}\times\ldots=\frac{a\times b\times(d\times f+e)\times g\times m\times\ldots}{c\times f\times n\times\ldots},\ a\times b\times(d\times f+e)\times g\times m\times\ldots=m\times a\times b\times(d\times f+e)\times g\times\ldots,$$

$$\frac{m}{n}\times a\times\frac{b}{c}\times d\frac{e}{f}\times g\times\ldots=\frac{m}{n}\times a\times\frac{b}{c}\times\frac{d\times f+e}{f}\times g\times\ldots=\frac{m\times a\times b\times(d\times f+e)\times g\times\ldots}{n\times c\times f\times\ldots},\ c\times f\times n\times\ldots\ldots=n\times c\times f\times\ldots\ldots,$$

$$\frac{a\times b\times(d\times f+e)\times g\times m\times\ldots}{c\times f\times n\times\ldots}=\frac{m\times a\times b\times(d\times f+e)\times g\times\ldots}{n\times c\times f\times\ldots};\ a\times\frac{b}{c}\times d\frac{e}{f}\times g\times\frac{m}{n}\times\ldots=\frac{m}{n}\times a\times\frac{b}{c}\times d\frac{e}{f}\times g\times\ldots\ \Big|$$

Para multiplicar un producto por un número basta multiplicar uno de los factores del producto por el número conservando los demás, aun cuando los factores ó el número sean enteros, fraccionarios ó mistos: $(a\times b\times c\times d\times e\times f)\times m$; las letras representan números de cualquier clase; $(a\times b\times c\times d\times e\times f)\times m=a\times b\times c\times d\times e\times f\times m=d\times m\times a\times b\times c\times e\times f=(d\times m)\times a\times b\times c\times e\times f=a\times b\times c\times(d\times m)\times e\times f$; $(8\times 3\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}\times 5\frac{9}{11}\times 6)\times 3=8\times 3\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}\times$

$5\frac{9}{11}\times6\times3=\frac{4}{7}\times3\times8\times3\frac{2}{5}\times5\frac{9}{11}\times6=\frac{12}{7}\times8\times3\frac{2}{5}\times5\frac{9}{11}\times6=8\times3\frac{2}{5}\times\frac{12}{7}\times5\frac{9}{11}\times6$ | Para multiplicar un número por un producto basta multiplicar el número sucesivamente por los factores del producto, aunque estos factores ó el número sean enteros, fraccionarios ó mistos; $m\times(a\times b\times c\times d\times e\times f)$; las letras representan números de cualquier clase; $m\times(a\times b\times c\times d\times e\times f)=(a\times b\times c\times d\times e\times f)\times m=a\times b\times c\times d\times e\times f\times m=m\times a\times b\times c\times d\times e\times f$; $\frac{3}{7}\times(2\times4\frac{5}{9}\times\frac{4}{5}\times8)=(2\times4\frac{5}{9}\times\frac{4}{5}\times8)\times\frac{3}{7}=2\times4\frac{5}{9}\times\frac{4}{5}\times8\times\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\times2\times4\frac{5}{9}\times\frac{4}{5}\times8$ | Qué se entiende por *fraccion de fraccion:* $\frac{3}{7}$ de la unidad, $\frac{3}{7}$ de $\frac{5}{9}$, $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ | Convertir una fraccion de fraccion á fraccion de la unidad; $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$; $\frac{3}{7}$ de $\frac{5}{9}=\frac{5}{9}\times\frac{3}{7}=\frac{3}{7}\times\frac{5}{9}=\frac{3\times5}{7\times9}=\frac{15}{63}=\frac{5}{21}$ | *Fraccion de fraccion de fraccion;* $\frac{4}{5}$ de $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{7}$; $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ de $\frac{e}{f}$ | Convertir una fraccion de fraccion de fraccion á fraccion de la unidad; $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ de $\frac{e}{f}=\frac{a}{b}$ de $\left(\frac{c}{d}\text{ de }\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}$ de $\frac{c\times e}{d\times f}=\frac{a\times c\times e}{b\times d\times f}$; $\frac{4}{5}$ de $\frac{3}{8}$ de $\frac{5}{7}=\frac{4}{5}$ de $\left(\frac{3}{8}\text{ de }\frac{5}{7}\right)=\frac{4}{5}$ de $\frac{3\times5}{8\times7}=\frac{4\times3\times5}{5\times8\times7}=\frac{60}{280}=\frac{3}{14}$ | *Fraccion de fraccion de fraccion de.....;* $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ de $\frac{e}{f}$ de $\frac{g}{h}$ de....$=\frac{a}{b}$ de $\left(\frac{c}{d}\text{ de }\frac{e}{f}\text{ de }\frac{g}{h}\text{ de....}\right)=\frac{a}{b}$ de $\frac{c\times e\times g\times.....}{d\times f\times h\times.....}=\frac{a\times c\times e\times g\times.....}{b\times d\times f\times h\times.....}$ |

Para multiplicar la suma ó diferencia de varios números por otro número, ó al contrario, ya sean aquellos y este enteros, fraccionarios ó mistos, basta multiplicar cada uno de los primeros números por el último ó viceversa; $(a-b+c+d-e+.....)\times\frac{p}{q}$; los números $a, b, c, d, e, ...$ son de cualquier clase. $\frac{a-b+c+d-e+.....}{q}=\frac{a}{q}-\frac{b}{q}+\frac{c}{q}+\frac{d}{q}-\frac{e}{q}+.....$, $\left(\frac{a}{q}-\frac{b}{q}+\frac{c}{q}+\frac{d}{q}-\frac{e}{q}+.....\right)\times q=\frac{a}{q}\times q-\frac{b}{q}\times q+\frac{c}{q}\times q+\frac{d}{q}\times q-\frac{e}{q}\times q+.....=a-b+c+d-e+......$, $\left(\frac{a}{q}-\frac{b}{q}+\frac{c}{q}+\frac{d}{q}-\frac{e}{q}+.....\right)\times p=\frac{a}{q}\times p-\frac{b}{q}\times p+\frac{c}{q}\times p+\frac{d}{q}\times p-\frac{e}{q}\times p+.....=a\times\frac{p}{q}-b\times\frac{p}{q}+c\times\frac{p}{q}+d\times\frac{p}{q}-e\times\frac{p}{q}+.....$, $(a-b+c+d-e+.....)\times\frac{p}{q}=a\times\frac{p}{q}-b\times\frac{p}{q}+c\times\frac{p}{q}+d\times\frac{p}{q}-e\times\frac{p}{q}+.....$ | El caso de que el número sea misto se halla comprendido en este, pues se le podria reducir á fraccionario.

DIVISION DE FRACCIONES.

$\frac{a}{b}:m=\frac{a}{b\times m}$; $\frac{3}{7}:5=\frac{3}{7\times5}=\frac{3}{35}$ Este procedimiento es general | $\frac{a}{b}:m=\frac{a:m}{b}$; $\frac{24}{7}:6=\frac{24:6}{7}=\frac{4}{7}$. Este procedimiento solo es aplicable cuando el numerador es divisible por el entero | $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$, el cociente $\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$, c deavos del cociente $=\frac{a}{b}$, *un* deavo del cociente$=\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b\times c}$, *el* cociente$=\frac{a}{b\times c}\times d=\frac{a\times d}{b\times c}$, $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times c}$; $\frac{4}{7}:\frac{5}{9}$; el cociente $\times\frac{5}{9}=\frac{4}{7}$, 5 novenos del cociente $=\frac{4}{7}$, *un* noveno del cociente $=\frac{4}{7}:5=\frac{4}{7\times5}$, *el* cociente$=\frac{4}{7\times5}\times9=\frac{4\times9}{7\times5}$, $\frac{4}{7}:\frac{5}{9}=\frac{4\times9}{7\times5}=\frac{36}{35}=1\frac{1}{35}$ | Cuándo el numerador y el denominador del dividendo son divisibles por el numerador y el denominador del divisor se pueden dividir *término á término* $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$, el cociente $\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$, c deavos del cociente $=\frac{a}{b}$, *un* deavo del cociente $=\frac{a}{b}:c=\frac{a:c}{b}$, el cociente$=\frac{a:c}{b}\times d=\frac{a:c}{b:d}$; $\frac{30}{56}:\frac{6}{7}$, el cociente$\times\frac{6}{7}=\frac{30}{56}$, 6 sétimos del cociente $=\frac{30}{56}$, un sétimo del cociente $=\frac{30}{56}:6=\frac{30:6}{56}$, el cociente$=\frac{30:6}{56}\times7=\frac{30:6}{56:7}$, $\frac{30}{56}:\frac{6}{7}=\frac{30:6}{56:7}=\frac{5}{8}$; $\frac{a}{b}:c\frac{d}{f}=\frac{a}{b}:\frac{c\times f+d}{f}=\frac{a\times f}{b\times(c\times f+d)}$, $\frac{8}{5}:2\frac{4}{7}=\frac{8}{5}:\frac{18}{7}=\frac{56}{90}=\frac{28}{45}$ | $a:\frac{b}{c}$, el cociente $\times\frac{b}{c}=a$, b ceavos del cociente$=a$, *un* ceavo del cociente$=a:b=\frac{a}{b}$, el cociente$=\frac{a}{b}\times c=\frac{a\times c}{b}$, $a:\frac{b}{c}=\frac{a\times c}{b}$; $4:\frac{5}{6}$, el cociente$\times\frac{5}{6}=4$, 5 sestos del cociente $=4$, *un* sesto del cociente$=4:5=\frac{4}{5}$, el cociente $=\frac{4}{5}\times6=\frac{4\times6}{5}$, $4:\frac{5}{6}=\frac{4\times6}{5}=\frac{24}{5}=4\frac{4}{5}$ | $a:b\frac{c}{f}=a:\frac{b\times f+c}{f}=\frac{a\times f}{b\times f+c}$; $12:3\frac{2}{5}=12:\frac{17}{5}=\frac{60}{17}=3\frac{9}{17}$ | $a\frac{b}{c}:d=\frac{a\times c+b}{c}:d=\frac{a\times c+b}{c\times d}$; $2\frac{2}{7}:4=\frac{16}{7}:4=\frac{4}{7}$ | $a\frac{b}{c}:\frac{d}{f}=\frac{a\times c+b}{c}:\frac{d}{f}=\frac{(a\times c+b)\times f}{c\times d}$, $6\frac{3}{4}:\frac{5}{9}=\frac{27}{4}:\frac{5}{9}=\frac{243}{20}=12\frac{3}{20}$ | $a\frac{b}{c}:d\frac{e}{f}=\frac{a\times c+b}{c}:\frac{d\times f+e}{f}=\frac{(a\times c+b)\times f}{c\times(d\times f+e)}$; $5\frac{2}{3}:3\frac{2}{9}=\frac{17}{3}:\frac{29}{9}=\frac{153}{87}=1\frac{66}{87}=1\frac{22}{29}$ | $a\frac{b}{c}:d=(a:d)+\left(\frac{b}{c}:d\right)=(a:d)+\frac{b}{c\times d}$; $12\frac{6}{11}:3=4\frac{2}{11}$ | $a\frac{b}{c}:\frac{d}{f}=\left(a:\frac{d}{f}\right)+\left(\frac{b}{c}:\frac{d}{f}\right)=\frac{a\times f}{d}+\frac{b\times f}{c\times d}$; $6\frac{5}{9}:\frac{2}{7}=\frac{42}{2}+\frac{35}{18}=22\frac{17}{18}$ | $a\frac{b}{c}:d\frac{e}{f}=a\frac{b}{c}:\frac{d\times f+e}{f}=\left(a:\frac{d\times f+e}{f}\right)+\left(\frac{b}{c}:\frac{d\times f+e}{f}\right)=\frac{a\times f}{d\times f+e}+\frac{b\times f}{c\times(d\times f+e)}$; $16\frac{4}{3}$:

$1\frac{3}{5}=16\frac{4}{3}:\frac{8}{5}=\frac{80}{8}+\frac{20}{24}=10\frac{5}{6}$ | Para dividir un producto por un número basta dividir uno de los factores del producto por el número conservando los demás, aun cuando los factores ó el número sean enteros, fraccionarios ó mistos: $(a\times b\times c\times d\times e\times f):m=a\times b\times\frac{c}{m}\times d\times e\times f$, $(a\times b\times\frac{c}{m}\times d\times e\times f)\times m=a\times b\times\left(\frac{c}{m}\times m\right)\times d\times e\times f=a\times b\times c\times d\times e\times f$; $\left(\frac{3}{7}\times\overline{4}\times 4\frac{3}{5}\times\frac{9}{11}\right):\frac{4}{3}=\frac{3}{7}\times 3\times 4\frac{3}{5}\times\frac{9}{11}$, $\left(\frac{3}{7}\times\overline{3}\times 4\frac{3}{5}\times\frac{9}{11}\right)\times\frac{4}{3}=\frac{3}{7}\times\left(3\times\frac{4}{3}\right)\times 4\frac{3}{5}\times\frac{9}{11}=\frac{3}{7}\times 4\times 4\frac{3}{5}\times\frac{9}{11}$ | Para dividir un número por un producto basta dividir el número sucesivamente por los factores del producto, aunque estos factores ó el número sean enteros, fraccionarios ó mistos. $m:(a\times b\times c\times d)$; $\frac{m}{a}=m'$, $m=a\times m'$; $\frac{m'}{b}=m''$, $m'=b\times m''$; $\frac{m''}{c}=m'''$; $m''=c\times m'''$; $\frac{m'''}{d}=m^{\text{IV}}$, $m'''=d\times m^{\text{IV}}$; m^{IV} es el cociente; $(a\times b\times c\times d)\times m^{\text{IV}}=a\times b\times c\times(d\times m^{\text{IV}})=a\times b\times c\times m'''=a\times b\times(c\times m''')=a\times b\times m''=a\times(b\times m'')=a\times m'=m$; $210:\left(\frac{2}{3}\times 5\times\frac{3}{7}\times 2\frac{1}{3}\right)$; $210:\frac{2}{3}=\frac{630}{2}=315$, $210=\frac{2}{3}\times 315$; $315:5=63$, $315=5\times 63$; $63:\frac{3}{7}=\frac{441}{3}=147$; $63=\frac{3}{7}\times 147$; $147:2\frac{1}{3}=147:\frac{7}{3}=\frac{441}{7}=63$, $147=2\frac{1}{3}\times 63$; 63 es el cociente; $\left(\frac{2}{3}\times 5\times\frac{3}{7}\times 2\frac{1}{3}\right)\times 63=\frac{2}{3}\times 5\times\frac{3}{7}\times\left(2\frac{1}{3}\times 63\right)=\frac{2}{3}\times 5\times\frac{3}{7}\times 147=\frac{2}{3}\times 5\times\left(\frac{3}{7}\times 147\right)=\frac{2}{3}\times 5\times 63=\frac{2}{3}\times(5\times 63)=\frac{2}{3}\times 315=210.$ |

Para dividir la suma ó diferencia de varios números por otro número, ya sean aquellos y este enteros, fraccionarios ó mistos, basta dividir cada uno de los primeros por el último. $(a-b+c-d+e+\ldots\ldots):m=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}-\frac{d}{m}+\frac{e}{m}+\ldots\ldots$, $\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}-\frac{d}{m}+\frac{e}{m}+\ldots\ldots\right)\times m=\frac{a}{m}\times m-\frac{b}{m}\times m+\frac{c}{m}\times m-\frac{d}{m}\times m+\frac{e}{m}\times m+\ldots\ldots=a-b+c-d+e+\ldots.$

FRACCIONES DECIMALES.

Definicion de las fracciones decimales. | Décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas, cienmilésimas, etc. | Pueden tomarse mas ó menos de estas partes: siete décimas, treinta y cuatro centésimas, quinientas ochenta y seis milésimas. | Se espresarian estas fracciones como se tiene esplicado para las ordinarias: $\frac{7}{10}$, $\frac{34}{100}$, $\frac{586}{1000}$,.....; pero se puede considerar á estas partes de la unidad como nuevas unidades de órdenes inferiores á las unidades simples, por lo que, ampliando el convenio referente al valor *relativo* de las cifras segun el lugar que ocupan en fila de varias, cabe espresar de otro modo las fracciones ó *cantidades decimales* | 69 unidades, 7 décimas, 4 centésimas y 8 diezmilésimas; 697408. Para que no se confunda la cifra de unidades simples con la del órden decimal inferior, se pone una coma á la derecha de la primera, separando con ella la parte entera de la decimal: 69,7408 | Cuando no hay parte entera, se pone un cero antes de la coma: 0,26587 | Diferentes modos de leer un número decimal, por ejemplo: 347,5826;

La parte entera como se ha esplicado y las cifras decimales una por una, añadiendo á la lectura de cada una la denominacion de las unidades que representa.
La parte entera como se ha esplicado y la decimal como si fuera entera, añadiendo la denominacion de las unidades del último órden decimal.
Todo el número en un solo enunciado como si fuera entero, añadiendo la denominacion de las unidades del último órden decimal.
Las cifras enteras y decimales una por una, añadiendo á la lectura de cada una la denominacion de las unidades que representa.
Por grupos cualesquiera, añadiendo á la lectura de cada grupo la denominacion de las unidades que representa su última cifra.

Se acostumbra á usar el segundo procedimiento, para lo cual es necesario conocer la denominacion que corresponde á la última cifra decimal. | Las cifras, enteras las unas y decimales las otras, que se hallan colocadas á igual distancia á la izquierda y á la derecha de la de unidades simples representan unidades de nombres análogos; de modo que á la última decimal corresponde denominacion análoga á la que llevaría la entera que se encontrase tantos lugares á la izquierda de la de unidades como ella lo está á la derecha, $\bar{2}456729\,\bar{4},834756\bar{8}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Distancia del 8 á la derecha del 4}=\text{Distancia del 2 á la izquierda del 4}\\ \text{Distancia del 8 á la derecha del 4}=\text{Distancia del 4 á la izquierda del 8}\end{array}\right\}\text{Distancia del 2 á la izquierda del 4}=\text{Distancia del 4 á la izquierda del 8.}$$

A la cifra 8 corresponde denominacion análoga á la que llevaría la cifra 4 de unidades simples si la parte decimal fuese entera. Como para leer la parte decimal como entera se habrá hecho la conveniente division en grupos, se puede observar fácilmente cuál es aquella denominacion que correspondería á la cifra de unidades simples y la análoga que corresponde á la última decimal. Este procedimiento es preferible á ir nombrando los órdenes de las cifras decimales uno por uno hasta llegar á la última, sobre todo cuando son muchas las decimales. | Leer el número: $3578,00\overset{2}{'}876549\overset{1}{'}836743$ |

Para espresar por escrito un número decimal que se dé al dictado, se escribe la parte entera, á continuacion de ella una coma para separarla de la parte decimal y despues esta parte como si fuese entera, cuidando de que la última cifra ocupe el lugar que le corresponde segun la denominacion que lleve. Para ello, como esta denominacion es análoga á la que llevaria la cifra de unidades si á la parte decimal se la considerase como entera, se observará cuantas cifras siguen á la que lleva esta denominacion análoga y otras tantas serán las que debe haber despues de la coma, por lo que la diferencia entre este último número y el de las cifras que se necesitan para espresar la parte decimal como entera será el de ceros que deberán colocarse entre la coma y la primera cifra decimal significativa. Se llama cifras *significativas* á todas escepto á la cifra 0. Si no hubiere parte entera se pondria 0 antes de la coma. | Escribir el número: 34 enteros y 4583 cienmilbillonésimas $\left.\begin{array}{l}\text{Las centenas de millar de billon dejan á la derecha 17 cifras}\\ \text{4583 se escribe con 4 cifras}\end{array}\right\}17-4=13$ son los ceros que debe haber entre la coma y la primera cifra significativa decimal. El número propuesto será: $34,00\overset{2}{'}000\overset{}{'}000000\overset{1}{'}004583$ |

Se pueden colocar ceros á la izquierda de la parte entera y á la derecha de la decimal sin que varíe el número. Lo primero ya se ha demostrado y en cuanto á lo segundo, basta observar que los ceros á la derecha de la parte decimal espresarán solo que faltan unidades de los órdenes decimales posteriores á la última cifra significativa. Así pues, serán equivalentes los números 47,586 y 0047,586 y 47,58600 | Tambien se puede decir que en la lectura de la parte decimal del tercer número se enuncia uno *cien* veces mayor que en los dos anteriores, pero de unidades que son *cien* veces menores, por lo que será equivalente á ellos. Se puede demostrar tambien observando que: $47{,}58600 = 47\,\frac{58600}{100000} = 47\,\frac{586}{1000} = 47{,}586$ | Los ceros colocados entre la parte entera y la coma, entre esta y la parte decimal, entre las cifras enteras ó entre las decimales hacen variar el número: 47, 586; 4700,586; 47,00586; 407,586 y 47, 500806 son números diferentes. | Corriendo la coma n lugares á la derecha en un número decimal se le multiplica por la unidad seguida de n ceros. | Para multiplicar un número decimal por la unidad seguida de n ceros se corre la coma n lugares á la derecha: $0{,}6874 \times 100 = 68{,}74$ | Corriendo la coma n lugares á la izquierda en un número decimal se le divide por la unidad seguida de n ceros. | Para dividir un número decimal por la unidad seguida de n ceros se corre la coma n lugares á la izquierda. $2586{,}47 : 1000 = 2{,}58647$.

ADICION DE NÚMEROS DECIMALES.

Regla para efectuarla segun el procedimiento usual y esplicacion de la misma: $487{,}6579 + 43{,}5 + 0{,}6923 + 8{,}32 = 540{,}1702$;

$$\begin{array}{r} 487{,}6579 \\ 43{,}5 \\ 0{,}6923 \\ 8{,}32 \\ \hline 540{,}1702 \end{array}$$

Se puede empezar por la izquierda:

$$\begin{array}{r} 487{,}6579 \\ 43{,}5 \\ 0{,}6923 \\ 8{,}32 \\ \hline 428{,}0692 \\ 112\,1\,1 \\ \hline 530{,}1602 \\ 1\quad 1 \\ \hline 540{,}1702 \end{array}$$

Se puede hacer la suma en cualquier órden:

$$\begin{array}{r} \overline{4}\,\overline{1}\,\overline{6}\,\overline{7}\,\overline{5}\,\overline{3}\,\overline{2} \\ 487{,}6579 \\ 43{,}5 \\ 0{,}6923 \\ 8{,}32 \\ \hline 128{,}1102 \\ 412{,}06 \\ \hline 530{,}1702 \\ 1 \\ \hline 540{,}1702 \end{array}$$

Prueba de la suma.

SUSTRACCION DE NÚMEROS DECIMALES.

Todas las definiciones de la sustraccion de números enteros son aplicables á la de números decimales. | Las alteraciones que sufre la resta cuando el minuendo ó el sustraendo ó ambos se aumentan ó disminuyen en una misma cantidad son las mismas y se demuestran del mismo modo que en los números enteros. | Regla para efectuar la sustraccion de números decimales por el procedimiento usual y esplicacion del mismo:

37486,048384 — 635,97162:

```
 37486,048384
   635,97162
 ------------
 36850,076764
```

Si hubiese mas cifras decimales en el sustraendo que en el minuendo se considera que hay *ceros* á la derecha de este hasta completar tantas cifras decimales como tiene aquel. | Se puede empezar la sustraccion por la izquierda:

```
 37486,048384
   635,97162
 ------------
 37851,177764
  1   1 1 1
 ------------
 36850,076764
```

Se puede seguir cualquier órden:

```
 6 8 2 10 5 4 11 1 3 9 7
 3 7 4 8 6,0 4 8 3 8 4
     6 3 5,9 7 1 6 2
 ---------------------
 3 7 8 5 0,1 7 7 7 6 4
 1         1   1
 ---------------------
 3 6 8 5 0,0 7 6 7 6 4
```

Prueba de la resta:

```
 3698,489
 1680,79846
 ----------
 2017,69054
 ----------
 3698,48900
```

Prueba de la suma separando un sumando:

```
  744,668
 ---------
   35,5894
  370,69
    8,654
   86,5324
    0,998
 ---------
 1247,1318
  502,4638
 ---------
  744,6680
```

Prueba de la suma deshaciendo la operacion:

```
  744,668
   35,5894
  370,69
    8,654
   86,5324
    0,998
 ---------
 1247,1318
  224 4300
```

MULTIPLICACION DE NÚMEROS DECIMALES.

El órden de los factores no altera el producto aunque algunos de estos ó todos sean números decimales. | Los teoremas relativos á la multiplicacion de un producto por un número ó de un número por un producto son ciertos aun cuando el número ó algunos de los factores ó todos sean decimales. |

$47{,}586 \times 9{,}64 = P$

$47586 \times 9{,}64 = P \times 1000$

$47586 \times 964 = P \times 1000 \times 100$

$47586 \times 964 = P \times (1000 \times 100)$

$47586 \times 964 = P \times 100000$

```
   4 7,5 8 6
       9,6 4
 -----------
   1 9 0 3 4 4
  2 8 5 5 1 6
 4 2 8 2 7 4
 -------------
 4 5 8,7 2 9 0 4
```

$0{,}897 \times 62 = P$

$897 \times 62 = P \times 1000$

```
  0,8 9 7
      6 2
 --------
  1 7 9 4
 5 3 8 2
 --------
 5 5,6 1 4
```

$674 \times 2{,}89 = P$

$674 \times 289 = P \times 100$

```
     6 7 4
     2,8 9
 ---------
   6 0 6 6
  5 3 9 2
 1 3 4 8
 ---------
 1 9 4 7,8 6
```

Si no hubiese en el producto obtenido antes de separar las cifras decimales tantas cifras como se han de separar, se considerarán colocados á su izquierda los ceros que sean necesarios para que se pueda hacer esta separacion.

DIVISION DE NÚMEROS DECIMALES.

Se consideran tres casos. $\begin{cases}\text{Div.}^{do}\text{ entero ó decimal y divisor la unidad seguida de ceros.}\\ \text{Div.}^{do}\text{ decimal y divisor entero.}\\ \text{Div.}^{do}\text{ cualquiera y divisor decimal.}\end{cases}$

1.er caso. $3872 : 1000 = 3{,}872$; $4365{,}87 : 100 = 43{,}6587$; $5689 : 10000 = 0{,}5689$; $469{,}672 : 1000 = 0{,}469672$; $32 : 100000 = 0{,}00032$; $2{,}4583 : 1000 = 0{,}0024583$;

2.º caso. $1765{,}536 : 48 = C$; $1765{,}536 = 48 \times C$; $1765536 = (48 \times C) \times 1000 = 48 \times (C \times 1000)$; $1765536 : 48 = C \times 1000$. Si, prescindiendo de la coma en el dividendo, se hace la division como si fuesen enteros los números propuestos, para hallar el verdadero cociente hay que dividir el que se obtenga por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenia el dividendo, lo cual se conseguirá separando á la derecha con una coma este número de cifras, si la division ha sido exacta. La coma viene á quedar colocada á la derecha de la cifra del cociente que se obtuvo despues de bajar la de unidades del dividendo, por lo que puede ponerse desde luego tras de dicha cifra al hacer la division.

```
1765,536 | 48
 325     |------
  375    | 36,782
   393
   096
    00
```

Si la division fuese inexacta, el cociente se completaría añadiendo una fraccion cuyo numerador fuese el resíduo y el denominador el divisor y para dividir el cociente así completado por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el dividendo, habria que dividir cada una de sus partes; la última sería menor que una unidad del último órden decimal del dividendo y, tomando como cociente la primera, se cometería un error menor que una unidad de dicho último órden decimal del dividendo;

```
4365236 | 83
 215    |------
  492   | 52593
   773
   266
    17
```

$4365{,}236 : 83 = C$; $4365{,}236 = 83 \times C$; $4365236 = (83 \times C) \times 1000 = 83 \times (C \times 1000)$; $4365236 : 83 = C \times 1000$; $52593\frac{17}{83} = C \times 1000$;

$$C = \left(52593 + \frac{17}{83}\right) : 1000 = 52{,}593 + \frac{17}{83 \times 1000} = 52{,}593 + \frac{17}{83} \times \frac{1}{1000}$$

3.er caso. $62{,}4874 : 3{,}82 = C$; $62{,}4874 = 3{,}82 \times C$; $6248{,}74 = 382 \times C$; $6248{,}74 : 382 = C$ | De otro modo. $62{,}4874 : 3{,}82 = 62{,}4874 : 3{,}8200 = C$; $62{,}4874 = 3{,}8200 \times C$; $624874 = 38200 \times C$; $624874 : 38200 = C$. Es preferible el primero.

```
6248,74 | 382        624874 | 38200
2428    |------      242874 |------
 1367   | 16,35       13674 | 16
  2214
   304
```

Despues de haber hallado la parte entera del cociente, se puede continuar una division inexacta de números enteros ó decimales hasta llegar al resíduo cero ó hasta hallar el número de cifras decimales que se quiera, añadiendo ceros á los restos. Por igual procedimiento se puede hacer la division en números decimales de un número entero ó decimal por otro mayor.

```
34713,000 | 504       34713 | 504       498 | 37          489,674 | 32              3900 | 728            4,698 | 126
 4473     |-------    4473  |-------    128 |---------    169     |------------    2600 |-----------     0918  |----------
  4410    | 68,875     4410 | 68,875     170| 13,459...    096    | 15,302312...    4160 | 0,05357...      0360 | 0,0372...
   3780                 3780              220               0074                     5200                   108
    2520                 2520             350                 100                     104
     000                  000              17                  040
                                                                080
                                                                 16
```

Pruebas de la multiplicacion.

```
   42,37          5,28      22374,36 | 4237
    5,28         42,37      11863    |-----
  ------       ------        33896   | 5,28
   33896          3696        0000
   8474          1584
  21185         1056
  ---------     2112
  223,7136      --------
                223,7136
```

Pruebas de la division.

```
2593,71 | 483          5,37     376,834 | 429          429
1787    |-----          483     3363    |------      0,878
 3381   | 5,37        -------    3604   | 0,878     -------
 0000                  1611       172                 3432
                      4296                           3003
                     2148                           3432
                     --------                      --------
                     2593,71                       376,662
                                                       172
                                                   --------
                                                   376,834
```

APROXIMACION DE UN COCIENTE Á MENOS DE UNA UNIDAD DECIMAL DE UN ÓRDEN DETERMINADO.

Cuando en la division de un número entero ó decimal por otro entero, despues de haber hallado alguna ó algunas cifras decimales y quedando algun resto, se toma como cociente el conjunto de las cifras halladas, se comete un error por *defecto* ó falta menor que una unidad del último órden decimal tomado, es decir, menor que una unidad del último órden considerado en el dividendo. De consiguiente, para obtener el cociente de un número entero ó decimal por otro tambien entero ó decimal, se hará el divisor entero, si no lo es, prescindiendo de la coma, y se correrá esta en el dividendo tantos lugares á la derecha como cifras decimales tuviese el divisor. Hecho esto, se tomarán en el dividendo las cifras decimales que haya hasta la del órden determinado, prescindiendo de las que pudiera haber de órden inferior ó añadiendo ceros hasta llegar á la de dicho órden, y despues se hará la division como se tiene esplicado hasta emplear la última cifra considerada.

347,723 : 47 á menos de 0,001

```
347,723 | 47
187     |------
 462    | 7,398
  393
   17
```

3,489658 : 321 á menos de 0,0001

```
3,4896 | 321
0279 6 |-------
  228  | 0,0108
```

482,8 : 46 á menos de 0,001

```
482,800 | 46
0228    |-------
  440   | 10,495
   260
    30
```

78,3698 : 2,75 á menos de 0,01; 7836,98 : 275

```
7836,98 | 275
2336    |------
 1369   | 28,49
  2698
   223
```

87,694836 : 3,286 á menos de 0,1; 87694,836 : 3286

```
87694,8 | 3286
21974   |------
 22588  | 26,6
  2872
```

34 : 8,75 á menos de 0,001; 3400 : 875

```
3400,000 | 875
 7750    |-------
  7500   | 3,885
   5000
    625
```

REDUCCION DE FRACCIONES ORDINARIAS Á DECIMALES.

1.^{er} caso. Cuando el denominador es la unidad seguida de ceros. $\frac{abcd}{1000}=abcd:1000=a,bcd$; $\frac{37}{10000}=37:10000=0,0037$

2.° caso. Cuando el denominador es cualquiera. $\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{b}\times 1000...}{1000...}=\frac{\frac{a000...}{b}}{1000...}$; $\frac{7}{16}=\frac{\frac{7}{16}\times 1000...}{1000...}=\frac{\frac{7000...}{16}}{1000...}=\frac{4375}{10000}=0,4375.$

$$\begin{array}{l|l} 70000... & 16 \\ \hline 060 & 4375 \\ \ 120 & \\ \ \ 080 & \\ \ \ \ 00 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 70 & 16 \\ \hline 060 & 0,4375 \\ \ 120 & \\ \ \ 080 & \\ \ \ \ 00 & \end{array}$$

$$\frac{1931}{555}=\frac{\frac{1931}{555}\times 1000...}{1000...}=\frac{\frac{1931000...}{555}}{1000...}=\frac{3479279...}{1000000...}=3,479279...;$$

$$\begin{array}{l|l} 1931 & 555 \\ \hline 2660 & 3479279... \\ 4400 & \\ \ 5150 & \\ \ 1550 & \\ \ \ 4400 & \\ \ \ 5150 & \\ \ \ \ 155 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 1931 & 555 \\ \hline 2660 & 3,479279... \\ 4400 & \\ \ 5150 & \\ \ 1550 & \\ \ \ 4400 & \\ \ \ 5150 & \\ \ \ \ 155 & \end{array}$$

Fraccion decimal periódica. $\begin{cases}\text{periódica pura}\\ \text{periódica mista}\end{cases}$ | Período. | Las fracciones periódicas constan de infinitos períodos. | Otra demostracion. $\frac{63}{24}=2+\frac{15}{24}$ de la unidad $=2+\frac{150}{24}$ de décima $=2,6+\frac{6}{24}$ de décima $=2,6+\frac{60}{24}$ de centésima $=2,62+\frac{12}{24}$ de centésima $=2,62+\frac{120}{24}$ de milésima $=2,625$ | $\frac{3}{7}=0+\frac{3}{7}$ de la unidad $=0+\frac{30}{7}$ de décima $=0,4+\frac{2}{7}$ de décima $=0,4+\frac{20}{7}$ de centésima $=0,42+\frac{6}{7}$ de centésima $=0,42+\frac{60}{7}$ de milésima $=0,428+\frac{4}{7}$ de milésima $=0,428+\frac{40}{7}$ de diez milésima $=0,4285+\frac{5}{7}$ de diez milésima $=0,4285+\frac{50}{7}$ de cien milésima $=0,42857+\frac{1}{7}$ de cien milésima $=0,42857+\frac{10}{7}$ de millonésima $=0,428571+\frac{3}{7}$ de millonésima $=...$; $\frac{3}{7}=0,428571428571...$;

$$\begin{array}{l|l} 63 & 24 \\ \hline 150 & 2,625 \\ \ 060 & \\ \ \ 120 & \\ \ \ \ 00 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 30 & 7 \\ \hline 20 & 0,428571... \\ \ 60 & \\ \ \ 40 & \\ \ \ 50 & \\ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ 3 & \end{array}$$

REDUCCION DE FRACCIONES DECIMALES Á ORDINARIAS.

1.er caso. Fraccion exacta. $0,\overset{h\,\text{cifras}}{abc\ldots\ldots mn}=\left(0,abc\ldots\ldots mn\times \overset{h}{1000\ldots}\right):\overset{h}{1000\ldots}=\dfrac{abc\ldots\ldots mn}{\overset{h}{1000\ldots}}$; $0,683=(0,683\times 1000):1000=\dfrac{683}{1000}$ 2.º caso. Fraccion periódica pura. $0,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\ldots=f$; $\overset{h}{abc\ldots},\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\ldots=f\times 1000\ldots$; $\overset{h}{abc\ldots},\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\ldots-0,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\ldots=f\times \overset{h}{1000\ldots}-f=f\times(\overset{h}{1000\ldots}-1)$;

$$\begin{array}{r|l} \overset{h}{abc\ldots},\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\ldots\ldots & \overset{h}{1000\ldots} \\ 0,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\ldots & 1 \\ \hline \overset{h}{abc\ldots} & \overset{h}{999\ldots} \end{array}\left\{\overset{h}{abc\ldots}=f\times \overset{h}{999\ldots};\ f=\frac{\overset{h}{abc\ldots}}{\overset{h}{999\ldots}};\ 0,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\ldots=\frac{\overset{h}{abc\ldots}}{\overset{h}{999\ldots}};\right.$$

$0,697697697\ldots=f$; $697,697697\ldots=f\times 1000$;

$$697,697697\ldots-0,697697697\ldots=f\times 1000-f=f\times(1000-1)\ \begin{array}{r|l} 697,697697\ldots\ldots & 1000 \\ 0,697697697\ldots & 1 \\ \hline 697 & 999 \end{array}\left\{697=f\times 999;\ f=\frac{697}{999};\ 0,697697697\ldots=\frac{697}{999}\right.$$

3.er caso. Fraccion periódica mista. $0,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\ldots=f$; $\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots},\overset{k}{mnp\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\ldots=f\times \overset{h}{1000\ldots}\,\overset{k}{000\ldots}$; $\overset{h}{abc\ldots},\overset{k}{mnp\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\ldots=f\times \overset{h}{1000\ldots}$; $\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots},\overset{k}{mnp\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\ldots-\overset{h}{abc\ldots},\overset{k}{mnp\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\ldots=f\times \overset{h}{1000\ldots}\,\overset{k}{000\ldots}-f\times \overset{h}{1000\ldots}=f\times\left(\overset{h}{1000\ldots}\,\overset{k}{000\ldots}-\overset{h}{1000\ldots}\right)$;

$$\begin{array}{r|l} \overset{h}{abc\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots},\overset{k}{mnp\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\ldots\ldots & \overset{h}{1000\ldots}\,\overset{k}{000\ldots} \\ \overset{h}{abc\ldots},\overset{k}{mnp\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\ldots & \overset{h}{1000\ldots} \\ \hline \overset{h}{abc\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}-\overset{h}{abc\ldots}\ldots & \overset{k}{999\ldots}\,\overset{h}{000\ldots} \end{array}\left\{\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}-\overset{h}{abc\ldots}=f\times \overset{k}{999\ldots}\,\overset{h}{000\ldots};\ f=\frac{\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}-\overset{h}{abc\ldots}}{\overset{k}{999\ldots}\,\overset{h}{000\ldots}};\ 0,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}\ldots=\right.$$

$$\left.\frac{\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{k}{mnp\ldots}-\overset{h}{abc\ldots}}{\overset{k}{999\ldots}\,\overset{h}{000\ldots}}\right|$$

$0,63784784784\ldots=f$; $63784,784784\ldots=f\times 100000$; $63,784784784\ldots=f\times 100$; $63784,784784\ldots-63,784784784\ldots=f\times 100000-f\times 100=f\times(100000-100)$;

$$\begin{array}{r|l} 63784,784784\ldots\ldots & 100000 \\ 63,784784784\ldots & 100 \\ \hline 63784-63 & 99900 \end{array}\left\{63784-63=f\times 99900;\ f=\frac{63784-63}{99900};\ 0,63784784784\ldots=\frac{63784-63}{99900}=\frac{63721}{99900}\right.$$

Otra demostracion del 2.º caso. $0,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\ldots$ Tomemos n períodos y representemos su valor por f.

$0,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\overset{n}{\ldots\ldots}=f$; $\overset{h}{abc\ldots},\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\overset{n-1}{\ldots\ldots}=f\times \overset{h}{1000\ldots}$; $\overset{h}{abc\ldots},\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\overset{n-1}{\ldots\ldots}-0,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\overset{n}{\ldots\ldots}=f\times \overset{h}{1000\ldots}-f$;

$\overset{h}{abc\ldots},\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\overset{n-1}{\ldots\ldots}-\left(0,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\overset{n-1}{\ldots\ldots}+0,\overset{h}{000\ldots}\,\overset{h}{000\ldots}\overset{n-1}{\ldots\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\right)=f\times(\overset{h}{1000\ldots}-1)$; $\overset{h}{abc\ldots},\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\overset{n-1}{\ldots\ldots}-0,\overset{h}{abc\ldots}\,\overset{h}{abc\ldots}\overset{n-1}{\ldots\ldots}-$

$\dfrac{\overset{h}{abc\ldots}}{\overset{h}{1000\ldots}\overset{h}{000\ldots}\overset{h}{000\ldots}\overset{n}{\ldots\ldots}}=f\times\overset{h}{999\ldots};\ \overset{h}{abc\ldots}-\dfrac{\overset{h}{abc\ldots}}{(\overset{h}{1000\ldots})^n}=f\times\overset{h}{999\ldots};\ f=\dfrac{\overset{h}{abc\ldots}-\dfrac{\overset{h}{abc\ldots}}{(\overset{h}{1000\ldots})^n}}{\overset{h}{999\ldots}}$ Hagamos crecer á n hasta que sea infinitamente grande para tener el valor de la fraccion periódica, y resultará: $0,\overset{h}{abc\ldots}\overset{h}{abc\ldots}\overset{h}{abc\ldots}\ldots\ldots=\dfrac{\overset{h}{abc\ldots}}{\overset{h}{999\ldots}}$.

Otra demostracion del 3.^{er} caso. $0,\overset{h}{abc\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}\ldots\ldots$ Tomemos n períodos y representemos su valor por f.

$0,\overset{h}{abc\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k\ n}{pqr\ldots\ldots}=f;\ \overset{h}{abc\ldots}\overset{k}{pqr\ldots},\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k\ n\text{-}1}{pqr\ldots\ldots}=f\times\overset{h}{1000\ldots}\overset{k}{000\ldots};\ \overset{h}{abc\ldots},\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k\ n}{pqr\ldots\ldots}=f\times\overset{h}{1000\ldots};\ \overset{h}{abc\ldots}\overset{h}{pqr\ldots},\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k\ n\text{-}1}{pqr\ldots\ldots}-\overset{h}{abc\ldots},\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k\ n}{pqr\ldots\ldots}=f\times\overset{h}{1000\ldots}\overset{k}{000\ldots}-f\times\overset{h}{1000\ldots};\ \overset{h}{abc\ldots}\overset{k}{pqr\ldots},\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k\ n\text{-}1}{pqr\ldots\ldots}-\left(\overset{h}{abc\ldots},\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k\ n\text{-}1}{pqr\ldots\ldots}+0,\overset{k}{000\ldots}\overset{k\ n\text{-}1}{000\ldots\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}\right)=f\times\left(\overset{h}{1000\ldots}\overset{k}{000\ldots}-\overset{h}{1000\ldots}\right);\ \overset{h}{abc\ldots}\overset{k}{pqr\ldots},\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k\ n\text{-}1}{pqr\ldots\ldots}-\overset{h}{abc\ldots},\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k\ n\text{-}1}{pqr\ldots\ldots}-\dfrac{\overset{k}{pqr\ldots}}{\overset{k}{1000\ldots}\overset{k}{000\ldots}\overset{k\ n}{000\ldots\ldots}}=f\times\overset{h}{999\ldots}\overset{k}{000\ldots};\ \overset{h}{abc\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}-\overset{h}{abc\ldots}-\dfrac{\overset{k}{pqr\ldots}}{(\overset{k}{1000\ldots})^n}=f\times\overset{h}{999\ldots}\overset{k}{000\ldots};\ f=\dfrac{\overset{h}{abc\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}-\overset{h}{abc\ldots}-\dfrac{\overset{k}{pqr\ldots}}{(\overset{k}{1000\ldots})^n}}{\overset{h}{999\ldots}\overset{k}{000\ldots}}$ Hagamos crecer á n hasta que sea infinitamente grande para tener el valor de la fraccion periódica, y resultará: $0,\overset{h}{abc\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}\ldots=\dfrac{\overset{h}{abc\ldots}\overset{k}{pqr\ldots}-\overset{h}{abc\ldots}}{\overset{h}{999\ldots}\overset{k}{000\ldots}}$

PROPOSICIONES RELATIVAS Á LA CONVERSION DE FRACCIONES ORDINARIAS Á DECIMALES Y VICE-VERSA.

Para que una fraccion ordinaria se pueda reducir exactamente á decimal es condicion necesaria y suficiente que su numerador contenga los factores que haya en el denominador diferentes de 2 y de 5. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\frac{a}{b}\times 1000\ldots^{n}}{1000\ldots^{n}}=\dfrac{\frac{a000\ldots^{n}}{b}}{1000\ldots^{n}}=\dfrac{\frac{a\times10\times10\times10\times\ldots^{n}}{b}}{1000\ldots^{n}}=\dfrac{\frac{a\times2\times5\times2\times5\times2\times5\times\ldots^{n}}{b}}{1000\ldots^{n}}=\dfrac{\frac{a\times2^n\times5^n}{b}}{1000\ldots^{n}}$; $\dfrac{a\times2^n\times5^n}{b}$ ha de ser entero y, para ello, $a\times2^n\times5^n$ ha de contener todos los factores primos de b; pero los factores 2 y 5 que contenga b se pueden hacer entrar en el numerador haciendo n igual al mayor de los esponentes de estos factores, luego será necesario y bastará que si en b hay factores distintos de aquellos, los contenga a. | Si el denominador solo contiene factores 2 ó 5 ó 2 y 5 se podrá convertir la fraccion ordinaria exactamente á decimal. | Tanto en el caso de que solo contenga factores 2 y 5 el denominador de la fraccion ordinaria propuesta, como en el de que contenga otros que se hallen tambien en su numerador, en cuyos dos casos ya se ha dicho que la conversion se puede hacer exactamente, el número de cifras decimales que tendrá la equivalente será igual al mayor de los esponentes de los factores 2 ó 5 en el denominador, despues de haber hecho irreducible la fraccion ó cuando menos de haber suprimido los factores 2 y 5 que hubiese comunes á ambos términos. | Cuando una fraccion ordinaria no se puede convertir exactamente á decimal, la equivalente de esta clase será periódica. En efecto, continuando la division del numerador por el denominador, nunca se llegará á obtener de resto 0, de modo que la operacion no puede terminar; y debiendo ser todos los restos menores que el divisor, no podrá haber mas restos diferentes que tantos menos uno, á lo mas, como unidades tiene el divisor. De consiguiente, despues de haber obtenido á lo mas $b-1$ restos distintos, se reproducirá uno de los anteriores y á partir de él se irán reproduciendo tambien las mismas cifras que se obtuvieron despues del resto á quien es igual, resultando por lo tanto *periódica* la fraccion decimal. El período tendrá *á lo mas* tantas cifras menos una como unidades tiene el divisor. | El numerador de una fraccion ordinaria equivalente á una decimal periódica mista no puede terminar en cero. $0,ab...mnpq...rspq...rspq...rs... = \frac{ab...mnpq...rs-ab...mn}{999...000...}$ $\frac{ab...mnpq...rs}{ab...mn}$ $s=n$; $0,ab...mspq...rspq...rspq...rs...$; El período empezaría una cifra antes y la parte irregular tendria una cifra menos, por lo que estaría mal hecha la conversion á fraccion ordinaria. | Una fraccion irreducible cuyo denominador solo contiene factores distintos de 2 y 5, reducida á decimal producirá una fraccion periódica pura. En efecto, puesto que en el denominador hay factores distintos de 2 y de 5 y estos no se hallan en el numerador, por ser los dos términos primos entre sí, no se podrá convertir exactamente á decimal y la equivalente de esta clase será periódica. Si demostramos que no puede ser periódica mista, quedará probado que ha de ser periódica pura. $\frac{d}{g}$ irreducible y g solo contiene factores diferentes de 2 y de 5; $\frac{d}{g} = 0,\overset{h}{abc...}\overset{k}{mnp...}\overset{k}{mnp...}\overset{k}{mnp......} = \frac{\overset{h}{abc...}\overset{k}{mnp...} - \overset{h}{abc...}}{\overset{k}{999...}\overset{h}{000...}}$ Como el numerador de esta última fraccion no puede terminar en cero, segun se ha demostrado, no puede contener á la vez factores 2 y 5, de modo que, al hacer irreducible esta fraccion, quedará en el denominador alguno de los factores 2 ó 5 ó ambos, y como entonces tendriamos dos fracciones *irreducibles é iguales* que tendrian que ser *idénticas*, resultaría que g, que no contiene factores 2 ni 5, era igual á un número que contenía alguno de ellos ó los dos, lo que no es posible. La fraccion decimal será pues periódica pura. | Si el denominador de una fraccion irreducible contiene, además de otros, alguno de los factores 2 ó 5 ó ambos, la decimal equivalente será periódica mista. Por las mismas razones del caso anterior no podrá ser exacta y habrá de ser periódica. Demostrando que no puede ser periódica pura, quedará probado que ha de ser periódica mista. $\frac{d}{g}$ es irreducible y g contiene $\begin{cases}\text{factores distintos de 2 y de 5} \\ \text{y factores 2 ó 5 ó 2 y 5;}\end{cases}$

$\frac{d}{g}=0,\overset{h}{abc...}\,\overset{h}{abc...}\,\overset{h}{abc}......=\frac{\overset{h}{abc...}}{\overset{h}{999...}}$ Haciendo irreducible esta última fraccion se suprimirán los factores comunes á sus dos términos, pero no se introducirá ninguno nuevo en ellos, de modo que el denominador, que no contiene 2 ni 5, continuará sin ellos. Pero la nueva fraccion será *idéntica* á la propuesta por ser las dos irreducibles é iguales, luego el denominador de la propuesta, que contiene alguno de los factores 2 ó 5 ó ambos, resultaría igual á un número que carece de ellos, lo que es imposible. La fraccion decimal que se obtenga será, pues, periódica mista. | El número de cifras irregulares que tendrá, será igual al mayor de los esponentes de los factores 2 ó 5 en el denominador de la fraccion propuesta, $\frac{d}{g}=0,\overset{h}{abc...}\,\overset{k}{mnp...}\,\overset{k}{mnp...}\,\overset{k}{mnp...}\;.....=$ $\frac{\overset{h}{abc...}\,\overset{k}{mnp...}-\overset{h}{abc...}}{\overset{k}{999...}\,\overset{h}{000...}}=\frac{\overset{h}{abc...}\,\overset{k}{mnp...}-\overset{h}{abc...}}{\overset{k}{999...}\times\overset{h}{2\times5\times2\times5\times2\times5\times...}}=\frac{\overset{h}{abc...}\,\overset{k}{mnp...}-\overset{h}{abc...}}{\overset{k}{999...}\times2^{h}\times5^{h}}$; Como el numerador de la última fraccion no puede terminar en cero y no hay en él de consiguiente factores 2 y 5 á la vez, al hacerla irreducible no podrán suprimirse á la vez factores 2 y 5 de su denominador, de modo que quedarán en este h factores 2 y h factores 5 ó h factores 5 y menos ó ningun factor 2 ó h factores 2 y menos ó ningun factor 5. Pero este denominador será igual á g, luego el mayor de los esponentes de los factores 2 ó 5 en este denominador ó el comun á ellos, si tienen un mismo esponente, será h, que es precisamente el número de cifras irregulares de la fraccion decimal periódica mista. | Si se reduce á ordinaria la fraccion periódica pura cuyo período es la cifra 9, se tendrá: $0,999...=\frac{9}{9}=1$, resultado que sorprende, pues que no habiendo parte entera, no se concibe que pueda valer una unidad la fraccion decimal; pero observando que si se toman una, dos, tres, etc. cifras, las fracciones 0,9, 0,99, 0,999 etc. que resultan difieren de la unidad en una décima, en una centésima, en una milésima, etc., es decir, en una unidad del último órden decimal considerado, se comprenderá que cuando se tome toda la fraccion periódica, que consta de infinitas cifras, su valor diferirá de 1 en una cantidad infinitamente pequeña, de modo que será igual á 1. | Por aproximar un número decimal á menos de media unidad de un órden decimal dado, se entiende tomar solo sus cifras decimales hasta la de aquél órden, haciendo de modo que el valor tomado se diferencie del verdadero en menos de media unidad del órden dicho. Se consigue esto prescindiendo de las cifras que siguen á la del órden determinado y tomando el número que resulte, si la primera cifra de que se prescinde es menor que 5; pero añadiéndole una unidad del último órden que se conserve si la primera cifra que se desecha es 5 seguida de otras ó mayor que 5. En el primer caso, el error que se comete es por *defecto* y menor que la media unidad indicada, puesto que el valor de las cifras de que se prescinde es menor que dicha media unidad. En el segundo, el error es por *esceso* y tambien menor que la media unidad determinada, puesto que se quita del número propuesto el valor de las cifras de que se prescinde, que es mayor que media unidad del referido órden, y se añade una unidad del mismo, por lo que queda aumentado menos de media unidad. 9,67495 á menos de $\frac{1}{2}$ centésima... 9,67 | 0,342576... á menos de $\frac{1}{2}$ milésima... 0,343 | 6,276 á menos de $\frac{1}{2}$ décima... 6,3 | 0,799964 á menos de $\frac{1}{2}$ diez milésima... 0,8000 | Cuando la cifra de que se prescinde es un 5 sin estar seguida de otras, se cometerá un error por *defecto* exactamente de $\frac{1}{2}$ unidad del último órden decimal tomado si no se fuerza la unidad y por *esceso*, tambien de $\frac{1}{2}$ unidad exactamente, si se fuerza. | 83,6785 á menos de $\frac{1}{2}$ milésima... 83,678 con un error por defecto de $\frac{1}{2}$ milésima ó 83,679 con un error por esceso tambien de $\frac{1}{2}$ milésima.

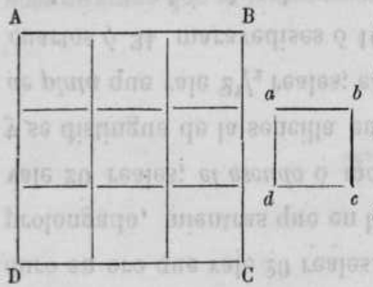
SISTEMAS DE UNIDADES CONCRETAS.

Cantidad. | Medir una cantidad. | Unidad. | La unidad ha de ser necesariamente de la misma especie que la cantidad con quien se compara. De esto se deduce que habrá tantas clases de unidades como de cantidades; pero solo nos vamos á ocupar ahora de las de *longitud, superficie, volúmen, capacidad, peso, tiempo y dinero.* | Para que se pueda formar concepto de una cantidad espresada en número, es necesario que se tenga tambien de la unidad, es decir que se *conozca* la unidad lo mas exactamente posible. | Conviene que de cada *clase ó especie* de unidades las haya de *órdenes* distintos, esto es, mayores y menores. De este modo puede evitarse, eligiéndolas convenientemente, que los números sean muy grandes ó fracciones muy pequeñas, como sucedería si para medir cantidades grandes se tomasen unidades pequeñas ó vice-versa, con lo cual, además de ser mas pesadas las operaciones á que se hubieren de someter los números, no nos formaríamos idea tan clara de ellos. | Entre estas unidades de una misma clase, pero de órdenes distintos, debe haber una *relacion sencilla*, es decir, que se formen las mayores repitiendo números exactos de veces las menores, y las menores subdividiendo en partes iguales las mayores, y esta relacion debe ser *constante* y *decimal*. | Convendrá que, en lo posible, haya dependencia entre las unidades de unas y otras especies; que si se consigue esto, la unidad *base* de todo el sistema no sea arbitraria, sino tomada de la naturaleza; y que la nomenclatura con que se espresen sea sistemática, de modo que el nombre de cada unidad indique desde luego su magnitud con referencia á la principal de su especie. | Todas estas condiciones se cumplen hasta donde es posible en el nuevo sistema de *medidas, pesas y monedas* llamado *métrico-decimal*, pero nó en el antiguo.

ANTIGUO SISTEMA DE MEDIDAS, PESAS Y MONEDAS DE ESPAÑA.

Medidas ó unidades de longitud, longitudinales ó lineales. *La legua* que tiene 20000 piés y se divide en 2 *medias leguas* y en 4 *cuartos de legua; la milla* que es próximamente la tercera parte de la legua; *el estadal* que tiene 2 brazas; *la braza* que tiene 2 varas; *la vara* que tiene 3 piés y se divide en 2 *medias varas ó codos* y en 4 *cuartas ó palmos*; el *pié ó tercia* que tiene 12 pulgadas; la *pulgada* que tiene 12 líneas; *el dedo* 9 líneas, y *la línea* 12 puntos. La *legua, media legua, milla y cuarto de legua* se llaman medidas *itinerarias*. Habia otras medidas ya empleadas en la marina, ya para usos especiales, pero no nos ocuparemos de ellas. |

Medidas ó unidades superficiales. Las superficies se miden con *unidades cuadradas. Cuadrado* es una figura terminada por cuatro lados iguales é igualmente inclinados, los cuales resultan de dos en dos paralelos. *Unidades cuadradas* son los cuadrados que tienen por lado las unidades lineales. Así pues, se emplean: *la legua cuadrada, la milla cuadrada, el estadal cuadrado, la braza cuadrada, la vara cuadrada, etc.* Para la medicion de los terrenos destinados al cultivo se emplea la *fanega superficial,* que es un cuadrado que tiene por lado 24 estadales y se divide en 12 *celemines superficiales,* y la *aranzada,* que es un cuadrado que tiene por lado 20 estadales. | Para hallar el número de unidades cuadradas de un órden que contiene una unidad cuadrada de otro órden, se eleva al cuadrado el número de unidades lineales del segundo órden que contiene la unidad lineal del primero.



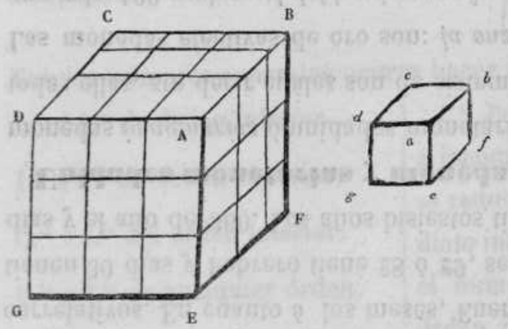
$AB = m.ab;$

$ABCD = m^2.abcd$

$ab = \frac{1}{m}.AB;$

$abcd = \left(\frac{1}{m}\right)^2.ABCD$

Unidades ó medidas de volúmen. Los volúmenes se miden con *unidades cúbicas. Cubo* es un cuerpo terminado por seis caras que son cuadrados iguales, las cuales resultan igualmente inclinadas y de dos en dos paralelas. *Unidades cúbicas* son los cubos que tienen por *aristas* ó lados de sus caras las unidades lineales. Las unidades cúbicas ó de volúmen del antiguo sistema son: *la legua cúbica, la milla cúbica, el estadal cúbico, la braza cúbica, la vara cúbica, etc.* | Para hallar el número de unidades cúbicas de un órden que contiene una unidad cúbica de otro órden, se eleva al cubo el número de unidades lineales del segundo órden que contiene la unidad lineal del primero.



$AD = m.ad;$

$ABCDEFG =$

$m^3.abcdefg;$

$ad = \frac{1}{m}AD;$

$abcdefg = \left(\frac{1}{m}\right)^3.$

$ABCDEFG$

UNIDADES Ó MEDIDAS DE CAPACIDAD. La capacidad es tambien un volúmen; pero se dá el nombre de *unidades de capacidad* á unas vasijas en que se echan, para medirlas, sustancias que no tienen forma constante y sí la del vaso que las contiene. Hay unidades de capacidad para *áridos* y para *líquidos.*

Medidas de capacidad para los áridos. *El cahiz* que tiene 12 fanegas; *la fanega* que tiene 12 celemines y se divide en 2 *medias fanegas* y en 4 *cuartillas; el celemin* que se divide en 2 *medios celemines* y en 4 *cuartillos; el cuartillo* que se divide en 2 *medios cuartillos.*

Unidades ó medidas de capacidad para los líquidos. *El moyo* que tiene 16 cántaras; *la cántara ó arroba* que tiene 8 *azumbres* y se divide en 2 *medias cántaras* y en 4 *cuartillas; la azumbre* que tiene 4 cuartillos y se divide en 2 *medias azumbres; el cuartillo* que se divide en 2 *medios cuartillos* y tiene 4 *copas.*

Unidades de peso ó pesas. *La tonelada* de peso tiene 20 quintales; el *quintal* 4 arrobas; *la arroba* 25 libras y se divide tambien en 2 *medias arrobas* y en 4 *cuartos de arrobas ó cuartillas; la libra* tiene 16 onzas y se divide en 2 *medias libras ó marcos* y en 4 *cuarterones; la onza* tiene 16 adarmes; *el adarme* 3 tomines, y *el tomin* 12 *granos.* Habia otras unidades de peso que se usaban en la farmacia, las unas y para las materias preciosas, las otras; pero no nos ocuparemos de ellas. | El aceite se mide por unidades de capacidad, escepto cuando es en gran cantidad, que se pesa; pero estas unidades de capacidad corresponden á pesos determinados y son: *la arroba* que se divide en 2 *medias arrobas* y en 4 *cuartillas; la cuartilla* que se divide en 2 *medias cuartillas; la libra* que se divide en 2 *medias libras* y en 4 panillas, y *la panilla* que se divide en 2 *medias panillas*.

Unidades de tiempo. Las mas usadas son: *el siglo* que se compone de cien años; *el año* civil, que es próximamente el tiempo que tarda la tierra en recorrer su órbita dando una vuelta alrededor del sol, consta de 365 dias, si es de los años llamados *comunes*, y de 366 si es *bisiesto*, y se divide en 12 meses; *el mes* que tiene 28, 29, 30 ó 31 dias; *la semana* que se compone de 7 dias; *el dia* que es el tiempo que tarda la tierra en dar una vuelta alrededor de su eje y se divide en 24 horas que se cuentan en dos grupos de á 12; *la hora* que tiene 60 minutos; *el minuto* que tiene 60 segundos; *el segundo* 60 terceros, etc. pues puede continuarse dividiendo sucesivamente las últimas unidades en 60 partes iguales dando á estas los nombres de órden correlativos. En cuanto á los meses, Enero, Marzo, Mayo, Julio, Agosto, Octubre y Diciembre, tienen 31 dias; Abril, Junio, Setiembre y Noviembre, tienen 30 dias y Febrero tiene 28 ó 29, segun el año sea comun ó bisiesto. En las cuestiones de Matemáticas y comerciales suelen contarse los meses de 30 dias y el año de 360. Los años bisiestos tienen lugar cada cuatro años y son aquellos cuyo número es divisible por 4.

Unidades monetarias y monedas. Qué se entiende por *unidades monetarias*. | Qué se entiende por *monedas ó piezas*. | Monedas *efectivas* y monedas *imaginarias* ó unidades monetarias. | Habiendo en circulacion ó uso monedas de sistemas diferentes, espresaremos ahora el nombre y valor de todas ellas, sin decir cuáles son de sistemas antiguos y cuáles constituyen el sistema legal. | Hay en circulacion monedas de *oro, plata, cobre y bronce.* | Las monedas efectivas de oro son: *la onza* que tiene 16 duros ó 320 reales; *la media onza* que tiene 8 duros ó 160 reales; *el centen* ó moneda de 5 duros que vale 100 reales, *el doblon* ó moneda de 4 duros que vale 80 reales; *el escudo* ó moneda de 2 duros que vale 40 reales y *el escudito* ó moneda de un duro en oro que vale 20 reales. Hay además el *escudito viejo* ó moneda de $21^1/_4$ reales, que se distingue de la anterior en la forma del escudo que es prolongado, mientras que en la otra es circular y en que esta es anterior al año 1785. | Las monedas efectivas de plata en circulacion son: *el duro* que vale 20 reales; *el escudo* ó moneda de *medio duro* que vale 10 reales; *la moneda de dos pesetas* que vale 8 reales; *la peseta columnaria* que vale 5 reales y se distingue de la sencilla en dos columnas que lleva al lado del escudo; *la peseta* que vale 4 reales ó 34 cuartos; *la media peseta columnaria ó real de plata* que vale $2^1/_2$ reales; *el real columnario* ó *medio real de plata* que vale $1^1/_4$ reales; *el real de vellon* ó *sencillo* ó simplemente *real* que vale $8^1/_2$ cuartos ó 34 maravedises ó 100 céntimos.

Las monedas, de cobre unas, de bronce otras y algunas de ellas acuñadas primero de aquel metal y despues de esta liga, que circulan, son: *la pieza de dos cuartos* que vale 8 maravedíses; *el cuarto* que vale 4 maravedíses y *el ochavo* que vale dos maravedíses; *la pieza de medio real* que vale 17 maravedises ó 50 céntimos de real, *la pieza de cuartillo* que vale $8^1/_2$ maravedises ó 25 céntimos de real, *la décima* que vale 3,4 maravedises ó 10 céntimos de real y *la media décima* que vale 1,7 maravedises ó 5 céntimos de real; y por último, la pieza de *diez céntimos de peseta* que vale 40 céntimos de real, la de *cinco céntimos de peseta* que vale 20 céntimos de real, la de *dos céntimos de peseta* que vale 8 céntimos de real, y la de *un céntimo de peseta* que vale 4 céntimos de real. | Además de las monedas citadas, hay otras imaginarias por las cuales se ha contado, por mas que no se hayan acuñado, como son: el *doblon* *sencillo* cuyo valor es de 60 reales, el *peso sencillo* que vale 15 reales, el *ducado* que son 11 reales, y el *céntimo de real.* El *maravedí* se puede considerar como moneda imaginaria, pues que si bien se acuñó, hace ya tiempo que dejó de hacerse y que ha desaparecido de la circulacion. | Otras monedas, además de las antes citadas, corren en escaso número en el comercio al por menor de provincias determinadas; pero ni de estas, ni de algunas estranjeras como la de 5 francos y la de un franco que, con el valor de 19 reales la primera y de 32 cuartos la segunda, han circulado y circulan aun en España, necesitamos hacer especial mencion. | Tampoco la haremos de otras unidades que se emplean, ya en ciertas provincias, ya para usos determinados. | Solo diremos que la *tonelada de arqueo*, unidad empleada para medir la capacidad de los buques, tenia 70,19 piés cúbicos en el antiguo sistema.

TRASFORMACIONES DE LOS NÚMEROS CONCRETOS.

Los números concretos ó *denominados* son
- *incomplejos* cuando constan de un solo órden de unidades, como 8 varas ó $\frac{2}{7}$ fanegas ó $4\frac{3}{5}$ moyos.
- *complejos* cuando constan de varios órdenes de unidades todas de la misma especie, como 8 libras, 14 onzas y $6\frac{3}{5}$ adar.s

Con los números concretos ocurre hacer las siguientes trasformaciones:

I.jo á I.jo de órden inferior.
I.jo á I.jo de órden superior.
C.jo á I.jo del órden inferior.
C.jo á I.jo de cualquier órden.
I.jo á C.jo de los órdenes inf.s
I.jo á C.jo de los órdenes sup.s
I.jo á C.jo de los órd.s sup.s é inf.s

1.ª Para reducir un incomplejo á incomplejo de órden inferior, se reduce primero al órden inmediato inferior multiplicándole por el número de unidades de este órden que contiene su unidad; desde este órden se reduce al inmediato inferior y así sucesivamente hasta llegar al que se quiera. Demostrarlo por los dos distintos razonamientos.

Reducir 7 cánt.s á copas.

$$\begin{array}{r l} 7 & \text{cántaras.} \\ 8 & \\ \hline 56 & \text{azumbres.} \\ 4 & \\ \hline 224 & \text{cuartillos.} \\ 4 & \\ \hline 896 & \text{copas.} \end{array}$$

Reducir $\frac{7}{11}$ de quintal á onzas. $\frac{7}{11}$ de quintal $=\left(\frac{7}{11}\times 4\right)$ arrobas $=$ $\frac{28}{11}$ arrobas $=\left(\frac{28}{11}\times 25\right)$ libras $=\frac{700}{11}$ libras $=\left(\frac{700}{11}\times 16\right)$ onzas $=$ $\frac{11200}{11}$ onzas $=1018\frac{2}{11}$ onzas.

Reducir $3\frac{2}{5}$ cahices á cuartillos. $3\frac{2}{5}$ cahices $=\left(\frac{17}{5}\times 12\right)$ fanegas $=$ $\frac{204}{5}$ fanegas $=\left(\frac{204}{5}\times 12\right)$ celem.s $=\frac{2448}{5}$ celem.s $=\left(\frac{2448}{5}\times 4\right)$ cuartillos $=\frac{9792}{5}$ cuartillos $=1958\frac{2}{5}$ cuartillos.

2.ª Para reducir un número incomplejo á incomplejo de órden superior, se averigua el número de unidades del órden inferior que contiene una del superior y se divide el incomplejo por este número, dando al cociente la denominacion superior. Demostrarlo por los dos razonamientos distintos.

Reducir 4328 líneas á varas.

3 piés
12
36 pulg.^{s}
12
72
36
432 líneas

4328 líneas $=\frac{4328}{432}$ varas $= 10\frac{1}{54}$ varas

Reducir $25613\frac{1}{3}$ maravedises á duros.

20 rs.
34
680 m.^{s}

$25613\frac{1}{3}$ m.$^s = \left(\frac{76840}{3} : 680\right)$ duros $= \frac{76840}{2040}$ duros $= 37\frac{2}{3}$ duros

3.ª Para reducir un número complejo á incomplejo del órden inferior se reducen sus unidades del órden superior al órden inmediato siguiente y se les añade las que haya de este órden; el número así formado se reduce al órden siguiente y se añaden las unidades que haya de este órden y así se continúa hasta terminar con todas.

Reducir 7 quintales, 3 arrobas, 14 libras y $12\frac{2}{9}$ onzas á incomplejo del último órden.

7 quintales
4
28 arrobas
3 arrobas
31 arrobas
25
155
62
775 libras
14 libras
789 libras
16
4734
789
12624 onzas
$12\frac{2}{9}$ onzas
$12636\frac{2}{9}$ onzas

4.ª Para reducir un número complejo á incomplejo de cualquier órden que no sea precisamente el último que contiene, se reduce á incomplejo de este último órden y desde él se reduce al órden que se haya pedido. Reducir 4 moyos, 10 cántaras y 6 azumbres á copas.

4 moyos
16
64 cánt.^{s}
10 cánt.^{s}
74 cánt.^{s}
8
592 azumb.^{s}
6 azumb.^{s}
598 azumb.^{s}
4
2392 cuart.^{s}
4
9568 copas

Reducir 3 varas, 2 piés, 8 pulgadas, 10 líneas á piés.

3 varas
3
9 piés
2 piés
11 piés
12
22
11
132 pulg.^{s}
8 pulg.^{s}
140 pulg.^{s}
12
28
14
1680 líneas
10 líneas
1690 líneas

12 pulg.^{s}
12
24
12
144 líneas

$\frac{1690}{144}$ piés $= 11\frac{53}{72}$ piés

Reducir 3 azumbres, 2 cuartillos y 3 copas á moyos.

3 azumbres
4
12 cuartillos
2 cuartillos
14 cuartillos
4
56 copas
3 copas
59 copas

16 cántaras
8
128 azumbres
4
512 cuartillos
4
2048 copas

$\frac{59}{2048}$ de moyo.

5.ª Para convertir un incomplejo en complejo de los órdenes inferiores, trasformacion que exige para ser posible que el número dado sea fraccionario ó misto, se reduce la parte fraccionaria despues de haber sacado los enteros, si hay lugar á ello, al órden inmediato inferior para ver cuantas unidades completas de este órden contiene; con la parte fraccionaria que pueda resultar de este último se vuelve á hacer lo mismo y así se continúa hasta terminar en el órden que se quiera.

Reducir $\frac{39}{9}$ de quintal á incomplejo. $\frac{39}{9}$ de quintal $= 4\frac{3}{9}$ quint.^{s} $=$ 4 quint.^{s} $+ \frac{3\times 4}{9}$ @ $=$ 4 quint.^{s} $+ \frac{12}{9}$ @ $=$ 4 quint.^{s}, $1\frac{3}{9}$ @ $=$ 4 quint.^{s}, 1@, $\frac{3\times 25}{9}$ libras $=$ 4 quint.^{s}, 1@, $\frac{75}{9}$ lib.^{s} $=$ 4 quint.^{s}, 1@, $8\frac{3}{9}$ lib.^{s} $=$ 4 quint.^{s}, 1@, 8 lib.^{s} $\frac{3\times 16}{9}$ onzas $=$ 4 quint.^{s}, 1@, 8 lib.^{s} $\frac{48}{9}$ onzas $=$ 4 quint.^{s}, 1@, 8 lib.^{s}, $5\frac{1}{3}$ onzas.

```
39 quint.s | 9
 3 quint.s |________________________
 4         | 4 quint.s, 1@, 8 lib.s, 5 1/3 onz.s
___
12 arrob.s
 3 arrob.s
25
___
75 libras
 3 libras
16
___
48 onzas
 3 onzas
```

Reducir $\frac{5}{24}$ de cahiz á complejo de los órd.s inf.s

```
  5 cahiz.s | 24
 12         |______________
___         | 2 faneg.s, 6 cel.s
 60 faneg.s
 12 faneg.s
 12
___
 24
 12
___
144 cel.s
 00
```

$\frac{5}{24}$ cahiz $=$ 2 faneg.s y 6 cel.s

Reducir $4\frac{2}{7}$ piés á complejo de los órdenes inferiores.

```
 2 piés   | 7
12        |____________________________
___       | 3 pulg.s 5 líneas, 1 5/7 puntos
24 pulg.s
 3 pulg.s
12
___
36 líneas
 1 línea
12
___
12 puntos
 5 puntos
```

$4\frac{2}{7}$ p.s $=$ 4 p.s, 3 pulg.s, 5 lín.s, $1\frac{5}{7}$ puntos

6.ª Para trasformar un número incomplejo en complejo de los órdenes superiores, se averigua cuántas unidades completas del órden inmediato superior contiene el número y cuántas sobran del órden en que viene espresado, con las unidades completas del órden inmediato superior se hace lo mismo y así se continúa hasta el órden que se desee. Es necesario que el número sea entero, misto ó fraccion *impropia,* y siempre mayor que el número de unidades de su órden que contiene la del inmediato superior, sin que sea divisible por este número.

Reducir á complejo de los órdenes superiores el número $4628\frac{2}{7}$ onzas.

```
4628 2/7 onz.s | 16
 142           |___________
 148           | 289 lib.s | 25
 04 2/7 onz.s  |  39       |______
               |  14 lib.s | 11@  | 4
               |           |  3@  |________
               |           |      | 2 quint.s
```

$4628\frac{2}{7}$ onz.s $=$ 2 q.s, 3@, 14 lib.s, $4\frac{2}{7}$ onz.s

7.ª Para que se pueda reducir un incomplejo á complejo de los órdenes superiores é inferiores, es necesario que sea un número misto ó una fraccion impropia que se convierta en número misto al sacar los enteros. La parte entera se reducirá á complejo de los órdenes superiores y la fraccionaria á complejo de los órdenes inferiores.

Reducir á complejo de los órdenes superiores é inferiores el número $\frac{4374}{11}$ lib.s; $\frac{4374}{11}$ lib.s $=$ 3 quint.s, 3 arrob.s, 22 lib.s, 10 onz.s, $2\frac{10}{11}$ ad.s

```
4374 lib.s | 11
 107       |________________________________
  084      | 397 lib.s, 10 onz.s, 2 10/11 ad.s
   7 lib.s
  16
 ___
 112 onz.s
  02 onz.s
  16
 ___
  32 ad.s
  10 ad.s

397 lib.s | 25
147       |______
 22 lib.s | 15@  | 4
          |  3@  |_________
          |      | 3 quint.s
```

SUMA DE NÚMEROS CONCRETOS.

Para que se puedan sumar es preciso que sean homogéneos. | Pueden ocurrir estos casos
1.º Que todos los sumandos sean incomplejos.
2.º Que todos los sumandos sean complejos.
3.º Que haya sumandos complejos y sumandos incomplejos.

1.º Cuando todos los sumandos son incomplejos, se reducen á un mismo órden de unidades y se suman como si fueran abstractos. 6742 cuart.s + 47 cánt.s $+ 589\frac{2}{3}$ azumb.s $+ \frac{2}{7}$ moyos $= \frac{3371}{16}$ cánt.s + 47cánt.s $+ \frac{1769}{24}$ cánt.s $+ \frac{32}{7}$ cánt.s $= 210\frac{11}{16}$ cánt.s + 47 cánt.s $+ 73\frac{17}{24}$ cánt.s $+ 4\frac{4}{7}$ cánt.s $= 335\frac{325}{336}$ cánt.s

2.º Cuando todos los sumandos son complejos, se colocan unos debajo de otros de modo que se correspondan las unidades del mismo órden y se sigue una marcha análoga á la esplicada para la suma de números enteros. Si los últimos incomplejos de algunos sumandos contuviesen parte fraccionaria, no siendo del órden mas inferior que apareciera en los diversos sumandos, habria que reducirla á complejo de los órdenes inferiores. Tambien se puede efectuar la suma reduciendo todos los sumandos á incomplejos de un mismo órden y se estará en el caso anterior. (3 quint.s, 2@, 12 onz.s, 2 ad.s) + (23@, 14 lib.s 6 onz.s) + (2 quint.s, $18\frac{4}{5}$ lib.s) + (476 lib.s, 9 onz.s, $6\frac{4}{7}$ ad.s) = 16 quint.s, 1 arroba, 10 libras, 8 onzas, $5\frac{13}{35}$ adarmes.

3 quintales,	2 arrobas,	0 libras,	12 onzas,	2 adarmes
	23	14	6	
2		18	12	$12\frac{4}{5}$
		476	9	$6\frac{4}{7}$
16 quintales	1 arroba	10 libras	8 onzas	$5\frac{13}{35}$ ad.s

$\frac{4}{5}$ lib.s $= \frac{64}{5}$ onz.s ... 4 lib.s, 16, 64 onz.s, 14, 4 onz.s, 16, 64 ad.s, 14, 4 ad.s

$64 \text{ onz.}^s \,|\, 5$; $\;4 \text{ onz.}^s$... 12 onz.s $12\frac{4}{5}$ ad.s;

$\frac{4}{5} + \frac{4}{7} = \frac{28+20}{35} = \frac{48}{35} = 1\frac{13}{35}$;

21 ad.s | 16 ; 5 ad.s | 1 onza

40 onzas | 16 ; 8 onzas | 2 libras

510 lib.s | 25 ; 10 lib.s | 20 @

45 @ | 4 ; 05 ; 1 @ | 11 quint.s

3.º Cuando los sumandos son unos complejos y otros incomplejos, se escriben los complejos unos debajo de otros como se ha dicho, y los incomplejos que no sean enteros, se reducen á complejos de los órdenes inferiores hasta llegar al último órden que en los sumandos aparezca, cuidando tambien de reducir á complejos de los órdenes inferiores las fracciones de los últimos órdenes que contengan los complejos, si en otros sumandos hay unidades inferiores. Tambien se pueden reducir todos los sumandos á incomplejos de un mismo órden y se estará en el primer caso. (8 moyos, 14 cánt.s 6 azumb.s 1 cuart.o 3 copas) $+ \frac{24}{7}$ cánt.s + (3 moyos, 2 cánt.s, $8\frac{4}{9}$ azumb.s) + 689 azumb.s + (45 cánt.s, 6 azumb.s 3 cuart.s 2 copas) $+ 6\frac{2}{5}$ cánt.s = 20 moy.s, 15 cánt.s, 5 az.s, 1 cuart.o $2\frac{53}{315}$ copas.

moyos	cántaras	azumbres	cuartillo	copas
8 moyos,	14 cántaras,	6 azumbres,	1 cuartillo,	3 copas
3	3		1	$2\frac{6}{7}$
3	2	8	1	$3\frac{1}{9}$
	689			
45	6		3	2
6	3		0	$3\frac{1}{5}$
20 moyos,	15 cántaras,	5 azumbres,	1 cuartillo,	$2\frac{53}{315}$cop.s

24 cánt.s | 7
3 cánt.s — 3 cánt.s, 3 az.s, 1 cuart.o, $2\frac{6}{7}$copas
8
24 azumb.s
3 azumb.s
4
12 cuart.s
5 cuart.s
4
20 copas
6 copas

4 azumb.s | 9
4 — 1 cuart.o, $3\frac{1}{9}$copas
16 cuart.s
7 cuart.s
4
28 copas
1 copa

2 cánt.s | 5
8 — 3 az.s, 0 c.llos, $3\frac{1}{5}$cop.s
16 az.s
1 az.e
4
4 c.llos
4
16 copas
1 copa

$$\frac{6}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{5}=\frac{270+35+63}{315}=\frac{368}{315}=1\frac{53}{315}$$

14 copas | 4 — 3 cuart.s
2 copas

9 cuart.s | 4 — 2 azumb.s
1 cuart.o

717 azumb.s | 8 — 89 cánt.s
77
5 azumb.s

159 cánt.s | 16 — 9 moyos
15 cánt.s

RESTA DE NÚMEROS CONCRETOS.

Todas las definiciones dadas anteriormente para la resta son aplicables á la de números concretos. | Las alteraciones que sufre la resta cuando el minuendo ó el sustraendo ó ambos se aumentan ó disminuyen en una misma cantidad son las mismas y se demuestran del mismo modo que en las restas antes esplicadas. | Para que se puedan restar números concretos han de ser homogéneos. | En la resta de números concretos se consideran los siguientes casos:

I.jo — I.jo
C.jo — C.jo
C.jo — I.jo
I.jo — C.jo

1.º Para restar de un número incomplejo otro incomplejo se reducen á un mismo órden de unidades y se restan como si fueran abstractos. $\frac{48}{7}$ v.s cúb.s — $34\frac{2}{3}$ p.s cúb.s $=\left(\frac{48}{7}\times 27\right)$ p.s cúb.s — $34\frac{2}{3}$ p.s cúb.s $=185\frac{1}{7}$ p.s cúb.s — $34\frac{2}{3}$ p.s cúb.s $=150\frac{10}{21}$ p.s cúb.s | 2.º Para restar de un número complejo otro complejo, se escribe el minuendo debajo del sustraendo de modo que se correspondan las unidades de igual órden y se van restando sucesivamente de los incomplejos que forman parte del minuendo los del mismo órden del sustraendo, empezando por los inferiores. Si alguno de estos incomplejos fuese mayor que el correspondiente del minuendo, se le añade una unidad del órden inmediato superior reducida á unidades de aquel órden, y para evitar que la resta quede aumentada en dicha unidad, se añade tambien al incomplejo del órden inmediato del sustraendo. La demostracion, como en los números enteros. Si el minuendo terminase en un incomplejo que contuviese fraccion de órden inferior al último del sustraendo, se reduciría este á complejo de los órdenes inferiores. Tambien se puede hacer la resta reduciéndolos á incomplejos de un mismo órden. (12 quint.s, 0@, 7 lib.s, $14\frac{2}{5}$ onz.s) — (5 quint.s, 3@, 12 lib.s, 2 onz.s, 6 ad.s, 0 tom.s, $1\frac{1}{3}$ grano) = 6 quintales, 0 arrobas, 20 libras, 12 onzas, 0 adarmes, 1 tomin, $1\frac{1}{15}$ granos.

12 quintales, 0 arrobas, 7 libras, 14 onzas, 6 adarmes, 1 tomin, $2\frac{2}{5}$ granos

5 3 12 2 6 0 $1\frac{1}{3}$

6 quintales, 0 arrobas, 20 libras, 12 onzas, 0 adarmes, 1 tomin, $1\frac{1}{15}$ granos

2 onzas | 5
16
32 adarms. 6 adarms., 1 tomin, $2\frac{2}{5}$ granos
2 adarms.
3
6 toms.
1 tomin
12
12 granos
2 granos

3.º Para restar de un número complejo otro incomplejo, pueden reducirse ambos á incomplejos de un mismo órden y se estará en el primer caso. Tambien se puede reducir el incomplejo á complejo de los órdenes inferiores ó de los superiores ó de unos y otros á menos que fuese entero y menor que el número de unidades de su órden que contuviese una del inmediato superior, en cuyo caso bastaba restarle de las unidades del mismo órden del minuendo. Aun siendo el sustraendo un entero mayor que el número de unidades de su órden que contiene la del inmediato superior, puede sustraerse de las unidades del mismo órden del minuendo, con tal de que se añadan á estas las del órden superior que sean necesarias para que pueda hacerse la resta y de que se quiten en igual número de las de dicho órden inmediato superior del minuendo, pero será preferible reducirle á complejo de los órdenes superiores ó los dos números á incomplejos de uno mismo.

(4 sem.^{s}, 19 dias, 7 hor.^{s}, 14′, 23″) — $\frac{3}{7}$ dias =

4, sem.^{s}, 18 dias, 20 hor.^{s}, 57′, $14\frac{3''}{7}$

4 sem.^{s}, 19 dias, 7 hor.^{s}, 14′, 23″

10 17 $8\frac{4}{7}$

4 sem.^{s}, 18 dias, 20 hor.^{s}, 57′, $14\frac{3''}{7}$

3 dias | 7
24
72 horas 10 horas, 17′, $8\frac{4''}{7}$
02 horas
60
120′
50
1′
60
60″
4″

(12 est.^{s} cuad.^{s}, 2 br.^{s} cuad.^{s}, 3 v.^{s} cuad.^{s}, 7 p.^{s} cuad.^{s}) — 688 p.^{s} cuad.^{s} =

7 est.^{s} cuad.^{s}, 3 br.^{s} cuad.^{s}, 3 v.^{s} cuad.^{s}, 3 p.^{s} cuad.^{s}

12 est.^{s} cuad.^{s}, 2 br.^{s} cuad.^{s}, 3 v.^{s} cuad.^{s}, 7 p.^{s} cuad.^{s}

4 3 0 4

7 est.^{s} cuad.^{s}, 3 br.^{s} cuad.^{s}, 3 v.^{s} cuad.^{s}, 3 p.^{s} cuad.^{s}

688 ps. cuads. | 9
58
4 ps. cuads. 76 vs. cuads. | 4
36
0 vs. cuads. 19 brs. cuads. | 4
3 brs. cuads, 4 ests. cuads.

(17 cah.^{s}, 8 f.^{s}, 9 cel.^{s}, 3 cuart.^{s}) — $\frac{167}{5}$ f.^{s} =

14 cah.^{s}, 11 f.^{s}, 4 cel.^{s}, $3\frac{4}{5}$ cuart.^{s}

17 cah.^{s}, 8 f.^{s}, 9 cel.^{s}, 3 cuart.^{s}

2 cah.^{s}, 9 f.^{s}, 4 cel.^{s}, $3\frac{1}{5}$ cuart.^{s}

14 cah.^{s}, 11 f.^{s}, 4 cel.^{s}, $3\frac{4}{5}$ cuart.^{s}

167 fs. | 5
017
2 fs. 33 fs., 4 cels., $3\frac{1}{5}$ cuarts.
12
24 cels.
4 cels.
4
16 cuarts.
1 cuart.

33 fs. | 12
9 fs. 2 cahs.

(14 p.^{s} cúb.^{s}, 968 pulg.^{s} cúb.^{s}, 462 lín.^{s} cúb.^{s}) — 583 pulg.^{s} cúb.^{s}

= 14 p.^{s} cúb.^{s}, 385 pulg.^{s} cúb.^{s}, 462 lín.^{s} cúb.^{s}

14 p.^{s} cúb.^{s}, 968 pulg.^{s} cúb.^{s}, 462 lín.^{s} cúb.^{s}

583

14 p.^{s} cúb.^{s}, 385 pulg.^{s} cúb.^{s}, 462 lín.^{s} cúb.^{s}

(7 @, 15 lib.^{s}, 12 onz.^{s}) — 86 lib.^{s} =

4 @, 4 lit.^{s}, 12 onz.^{s}

7 @, 15 lib.^{s}, 12 onz.^{s}

86

4 @, 4 lib.^{s}, 12 onz.^{s}

4.º Para restar de un número incomplejo otro complejo, se reduce el incomplejo á complejo de los órdenes inferiores ó los dos á incomplejos de un mismo órden y se estará en el primero ó segundo caso. $\frac{17}{7}$onzas—(20 duros, 15 rs., 32 m.s)=1 onza, 2 duros, 1 real, $6\frac{6}{7}$ marav.s $=\frac{42983}{38080}$ onza.

17 onzas | 7
3 onzas
16 | 2 onzas, 6 duros, 17 reales, $4\frac{6}{7}$ maravs.
48 duros
6 duros
20
120 reales
30
1 real
34
34 maravs.
6 maravs.

2 onzas, 6 duros, 17 reales, $4\frac{6}{7}$ marav.s
20 15 32
1 onza, 2 duros, 1 real, $6\frac{6}{7}$ marav.s

20 duros
20
400 reales
15 reales
415 reales
34
1660
1245
14110 maravs.
32 maravs.
14142 maravs.

16 duros
20
320 reales
34
128
96
10880 maravs.

$\frac{14142}{10880}$ onzas; $\frac{17}{7}$ onzas$-\frac{7071}{5440}$ onzas$=\frac{92480-49497}{38080}$ onzas$=\frac{42983}{38080}$ onzas

MULTIPLICACION DE NÚMEROS CONCRETOS.

Producto........ Multiplicando.
Multiplicador... Unidad principal. | Qué se entiende por *unidad principal.* | El multiplicador se ha de reducir á incomplejo del órden de la unidad principal y considerarle como abstracto. | En la multiplicacion de números concretos pueden ocurrir estos casos: $\left\{\begin{array}{l} \text{I.}^{\text{jo}}\times\text{I.}^{\text{jo}} \\ \text{C.}^{\text{jo}}\times\text{I.}^{\text{jo}} \\ \text{C.}^{\text{jo}}\times\text{C.}^{\text{jo}} \\ \text{I.}^{\text{jo}}\times\text{C.}^{\text{jo}} \end{array}\right|$ 1.º Se desea saber cuánto pesarán $47\frac{2}{7}$ varas, pesando $\frac{7}{5}$ de libra cada pié. Dispongamos los datos de manera que se hallen colocados unos debajo de otros los números de igual especie y unos al lado de otros los que se corresponden, poniendo comillas en el lugar que corresponderia al número que se busca.

»......... $47\frac{2}{7}$ varas
$\frac{7}{5}$libra... 1 pié

Si un pié pesa $\frac{7}{5}$ *de libra,* dos pesarán doble, tres pesarán triple, etc., y lo que se haga con *un pié* para formar $47\frac{2}{7}$ *varas,* habrá de hacerse con $\frac{7}{5}$ *de libra* para formar el número que se busca; de modo que estando formado el número que se busca con $\frac{7}{5}$ *de libra* como $47\frac{2}{7}$ *varas* está formado con *un pié,* será producto de $\frac{7}{5}$ *de libra,* que será el multiplicando y de $47\frac{2}{7}$ *varas* que será el multiplicador despues de reducido al órden de la unidad principal, que es el pié, y considerado como abstracto. Se reducirá, pues, $47\frac{2}{7}$ *varas* á piés y se multiplicará $\frac{7}{5}$ *libras* por el número que se obtenga considerado en su valor abstracto. $47\frac{2}{7}$ varas$=\left(\frac{331}{7}\times 3\right)$ piés$=\frac{993}{7}$ piés. $\frac{7}{5}$ libras$\times\frac{993}{7}=\frac{6951}{35}$ libras$=198\frac{3}{5}$ libras. | 2.° Se sabe que un azumbre ocupa en una tubería de diámetro determinado una longitud de 1 *vara*, 1 *pié*, 6 *pulgadas* y 8 *líneas* y se quiere saber qué longitud ocuparian $\frac{4}{7}$ de cántara. Dispondremos los números de la cuestion como en el caso anterior.

1 azumbre..... 1 vara, 1 pié, 6 pulg.^{s}, 8 lín.^{s}
$\frac{4}{7}$ cántaras...................... »

Razonando como en el caso precedente, se verá que es necesario reducir los $\frac{4}{7}$ de cántara á azumbres y multiplicar el número complejo por el valor que se obtenga considerado como abstracto, es decir, formar el producto: (1 vara, 1 pié, 6 pulg.^{s}, 8 lín.^{s})$\times\frac{32}{7}$. Para ello hay que hacer con el multiplicando lo que se haya hecho con la unidad para formar el multiplicador que es, ó bien repetirle 32 veces y dividir el resultado por 7, ó bien dividir el multiplicando por 7 y repetir el cociente 32 veces. Lo haremos de ambos modos, por mas que demos la preferencia al primero por seguirse en él la misma regla que en la multiplicacion de un número entero por una fraccion.

1 vara, 1 pié, 6 pulg.^{s}, 8 lín.^{s}
32
48 varas, 1 pié, 9 pulg.^{s}, 4 lín.^{s} | 7
6 varas, 2 piés, 9 pulg.^{s}, $10\frac{6}{7}$ lín.^{s}

6 varas
3
18 piés
1 pié
19 piés
5 piés
12
60 pulg.^{s}
9 pulg.^{s}
69 pulg.^{s}
6 pulg.^{s}
12
72 lín.^{s}
4 lín.^{s}
76 lín.^{s}
06 lín.^{s}

8 líns.
32
256 líns. | 12
16 | 21 pulgs.
4 líns

1 pié
32
32 piés
17 piés
49 piés | 3
19 | 16 varas
1 pié

6 pulgs.
32
192 pulgs.
21 pulgs.
213 pulgs. | 12
093 | 17 piés
09 pulgs.

1 vara
32
32 varas
16 varas
48 varas

1 vara, 1 pié, 6 pulg.^{s}, 8 lín.^{s} | 7
0 varas, 0 piés, 7 pulg.^{s}, $9\frac{5}{7}$ lín.^{s}
32
6 varas, 2 piés, 9 pulg.^{s}, $10\frac{6}{7}$ lín.^{s}

3
3 piés
1 pié
4 piés
12
48 pulg.^{s}
6 pulg.^{s}
54 pulg.^{s}
5 pulg.^{s}
12
60 lín.^{s}
8 lín.^{s}
68 lín.^{s}
5 lín.^{s}

5 líns.
32
160 líns. | 7
20 | 22 líns.
6 líns.

9 líns.
32
288 líns.
22 líns.
310 líns. | 12
070 | 25 pulgs.
10 líns.

7 pulgs.
32
224 pulgs.
25 pulgs.
249 pulgs. | 12
009 pulgs. | 20 piés | 3
2 piés | 6 varas

3.° Pesando 4 lib.^{s}, 14 onz.^{s}, 7 adarm.^{s}, $2\frac{2}{5}$ tom.^{s} cada azumbre, se quiere saber cuánto pesarán 3 cánt.^{s}, 5 az.^{s}, 1 c.^{llo} y 3 copas. Disponiendo el cálculo y razonando como anteriormente tendremos:

$$\left.\begin{array}{l}4\text{ lib.}^s,\ 14\text{ onz.}^s,\ 7\text{ ad.}^s,\ 2\tfrac{2}{5}\text{ tom.}^s\ldots\ldots 1\text{ azumbre}\\ \text{»}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 3\text{ cánt.}^s,\ 5\text{ az.}^s,\ 1\text{ c.}^{llo},\ 3\text{ copas}\end{array}\right\}\left(4\text{ lib.}^s,\ 14\text{ onz.}^s,\ 7\text{ ad.}^s,\ 2\tfrac{2}{5}\text{ tom.}^s\right)\times\frac{471}{16}=5@,\ 19\text{ lib.}^s,\ 6\text{ onz.}^s,\ 7\text{ ad.}^s,\ 1\tfrac{67}{80}\text{ tom.}^s$$

3 cánts.
8
24 azs.
5 azs.
29 azs.
4
116 cuarts.
1 cuart.
117 cuarts.
4
468 copas
3 copas
471 copas

4 cuarts.
4
16 copas

$\frac{471}{16}$ azs.

$4\text{ lib.}^s, 14\text{ onz.}^s, 7\text{ ad.}^s, 2\frac{2}{5}\text{ tom.}^s$
471
$92@, 10\text{ lib.}^s, 7\text{ onz.}^s, 9\text{ ad.}^s, 2\frac{2}{5}\text{ tom.}^s$ | 16
$5@, 19\text{ lib.}^s, 6\text{ onz.}^s, 7\text{ ad.}^s\ 1\frac{67}{80}\text{ tom.}^s$

12 @
25
60
24
300 lib.^{s}
10 lib.^{s}
310 lib.^{s}
150
06 lib.^{s}
16
96 onz.^{s}
7 onz.^{s}
103 onz.^{s}
07 onz.^{s}
16
112 ad.^{s}
9 ad.^{s}
121 ad.^{s}
09 ad.^{s}
3
27 tom.^{s}
$2\frac{2}{5}$ tom.^{s}
$29\frac{2}{5}$ tom.^{s}
$13\frac{2}{5}$ tom.^{s}

2 toms. × 471 = 942 toms.; 942 toms. : 5 = 188 toms.; 44; 42; 2 toms.

2 toms. × 471 = 942 toms.; 188 toms.; 1130 toms. : 3 = 376 ads.; 23; 20; 2 toms.

7 ads. × 471 = 3297 ads.; 376 ads.; 3673 ads. : 16 = 229 onzs.; 047; 153; 09 ads.

14 onzs. × 471; 14; 98; 56; 6594 onzs.; 229 onzs.; 6823 onzs. : 16 = 426 libs; 042; 103; 07 onzs.

4 libs. × 471 = 1884 libs.; 426 libs.; 2310 libs. : 25 = 92 arrobs.; 060; 10 libs.

4.° Valiendo *una fanega* $\frac{43}{23}$ de duro, cuánto valdrán 5 cahices, 7 fanegas, 5 celemines y 2 cuartillos?

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ fanega}\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{43}{23}\text{duros}\\ 5\text{ cah.}^s,\ 7\text{ f.}^s,\ 5\text{ cel.}^s,\ 2\text{ c.}^{llos}\ldots\text{ »}\end{array}\right\}\frac{43}{23}\text{ duros}\times\frac{1619}{24}=$$

$$\frac{69617}{552}\text{ duros}=126\frac{65}{552}\text{ duros.}$$

5 cah.^{s}
12
60 f.^{s}
7 f.^{s}
67 f.^{s}
12
134
67
804 cel.^{s}
5 cel.^{s}
809 cel.^{s}
4
3236 cuart.^{s}
2 cuart.^{s}
3238 cuart.^{s}

12 cel.^{s}
4
48 cuart.^{s}

$$\frac{3238}{48}\text{ f.}^s=\frac{1619}{24}\text{ f.}^s$$

MULTIPLICACION DE NÚMEROS CONCRETOS POR EL MÉTODO DE PARTES ALICUOTAS.

Se llama *unidad fraccionaria* á una de las partes que resultan de dividir á la unidad en varias iguales como *un sétimo, un treceavo, un cincuenta y ochoavo.* | *Parte alicuota* de un número es lo mismo que *factor ó divisor ó submúltiplo* de dicho número. | El método de *partes alicuotas* consiste en descomponer el multiplicador en un conjunto de unidades principales y de partes alicuotas de la unidad principal, y en ir averiguando los valores de la clase del multiplicando que corresponden á las unidades principales que haya y á las partes alicuotas de la unidad principal, sumando todos estos valores. Para hallar el correspondiente á las unidades principales, se multiplicará el multiplicando, que es el valor que corresponde á una unidad, por el número de las que haya y para hallar los correspondientes á las partes alicuotas, bastará ir dividiendo el multiplicando ú otras partes alicuotas anteriores por los números enteros convenientes. Si el multiplicando es complejo, no hay necesidad de hacer las reducciones á los órdenes superiores de los productos que se obtengan al multiplicar cada parte suya por el número de unidades principales que haya, pues que debiendo hacerse despues la suma de los valores encontrados, entonces se harán las reducciones. La descomposicion del multiplicador podrá hacerse de distintas maneras y del acierto del calculador al efectuarla depende que sea mas sencilla la operacion. Puede darse como regla general, que no siempre convendrá seguir, la siguiente. Si el multiplicador es incomplejo, se reduce al órden de la unidad principal y, si resulta alguna fraccion, se toman tantas partes de la unidad de las que espresa el denominador, como indique el mayor submúltiplo suyo contenido en el numerador; con las que queden se vuelve á hacer lo mismo y así sucesivamente hasta tomar todo el multiplicador. Como las fracciones tomadas tienen un numerador submúltiplo del denominador, simplificándolas quedarán con la unidad por numerador y serán, por lo tanto, partes alicuotas de la unidad principal. Si el multiplicador es complejo, se reducen las unidades de los órdenes superiores hasta el de la unidad principal inclusive, al órden de esta unidad y los incomplejos de órden inferior se van descomponiendo tomando de cada uno el mayor número de unidades de su órden que sea submúltiplo de las que contiene del mismo la unidad principal ó una de las posteriores, repitiendo esto hasta haber tomado todas las unidades que haya de cada órden. Cuando convenga, se calcularán como *auxiliares* para la determinacion de los demás, los valores correspondientes á una sola de las unidades de órdenes posteriores al de la principal, aunque no hayan de formar parte del valor total.

I.^{jo} × I.^{jo} Se tardan $8\frac{2}{3}$ *horas* en hacer *una vara*; ¿cuánto se tardará en hacer $5\frac{11}{12}$ v.^{s}?

$8\frac{2}{3}$ h.^{s}..... 1 vara
».......... $5\frac{11}{12}$ varas

$5\frac{11}{12}$ v.^{s} $= 5$ v.^{s} $+ \frac{6}{12}$ v.^{s} $+ \frac{3}{12}$ v.^{s} $+ \frac{2}{12}$ v.^{s} $= 5$ v.^{s} $+ \frac{1}{2}$ v.^{s} $+ \frac{1}{4}$ v.^{s} $+ \frac{1}{6}$ v.^{s}

$8\frac{2}{3}$ horas
$5\frac{11}{12}$ varas

5 v.^{s}......... $43\frac{1}{3}$ h.^{s}
$\frac{6}{12}$ v.^{s} $= \frac{1}{2}$ v.^{s}... $4\frac{1}{3}$
$\frac{3}{12}$ v.^{s} $= \frac{1}{4}$ v.^{s}... $2\frac{1}{6}$
$\frac{2}{12}$ v.^{s} $= \frac{1}{6}$ v.^{s}... $1\frac{4}{9}$
$51\frac{5}{18}$ h.^{s}

$$\frac{6+6+3+8}{18} = \frac{23}{18} = 1\frac{5}{18}$$

C.^{jo} × I.^{jo} ¿Cuánto se tardará en hacer $3\frac{23}{108}$ quint.^{s}, tardándose en hacer *una arroba* 17 dias, 11 h.^{s}, 37′ y 23″?

».......................... $3\frac{23}{108}$ quint.^{s}
17 dias, 11 h.^{s}, 37′, 23″.......... 1 arroba

$3\frac{23}{108}$ quints. $= 12\frac{25}{27}$ arrobas $= 12$ arrobas $+ \frac{9}{27}$ arroba $+ \frac{9}{27}$ arroba $+ \frac{5}{27}$ arroba $+ \frac{1}{27}$ arroba $+ \frac{1}{27}$ arroba $= 12$ arrobas $+ \frac{1}{3}$ arroba $+ \frac{1}{3}$ arroba $+ \frac{1}{9}$ arroba $+ \frac{1}{27}$ arroba $+ \frac{1}{27}$ arroba

17 dias, 11 h.^{s}, 37′, 23″
$12\frac{23}{27}$ arrob.^{s}

12 arrob.^{s}.....	204 dias,	132 horas,	444′	276″
$\frac{9}{27}$ arrob.^{s} $= \frac{1}{3}$ arrob.....	5	19	52	$27\frac{2}{3}$
$\frac{9}{27}$ arrob.^{s} $= \frac{1}{3}$ arrob.....	5	19	52	$27\frac{2}{3}$
$\frac{3}{27}$ arrob.^{s} $= \frac{1}{9}$ arrob.....	1	22	37	$29\frac{2}{9}$
$\frac{1}{27}$ arrob.^{s}............	0	15	32	$29\frac{20}{27}$
$\frac{1}{27}$ arrob.^{s}............	0	15	32	$29\frac{20}{27}$
	224 dias,	16 h.^{s},	56′,	$0\frac{1''}{27}$

$$\left(\frac{18+18+6+20+20}{27}\right)'' = \frac{82''}{27} = 3\frac{1''}{27}$$

420″ | 60
000 | 7′

656′ | 60
56 | 10 horas

252 horas | 24
16 horas | 9 dias

C.^{jo} × C.^{jo} Siendo 3 *quint.*^{s}, 3 *arrob.*^{s}, 14 *lib.*^{s}, 5 *onz.*^{s}, 12 *ad.*^{s} y 2 *tom.*^{s} el peso de *un moyo* ¿cuánto pesarán 20 moyos, 12 cánt.^{s}, 4 az.^{s} y 3 cuart.^{s}?

3 quint.^{s}, 3 arrob.^{s}, 14 lib.^{s}, 5 onz.^{s}, 12 ad.^{s}, 2 tom.^{s}............ 1 moyo
»................................ 20 moyos, 12 cánt.^{s}, 4 az.^{s} y 3 cuart.^{s}

$$\left(\frac{128+176+22+11}{256}\right)\text{tomines}=\frac{337}{256}\text{ tomines}=1\frac{81}{256}\text{ tomines}$$

47 tomines | 5
17 | 15 adarmes
2 tomines

295 adarmes | 16
135 | 18 onzas
05 adarmes

155 onzas | 16
11 onzas | 9 libras

345 libras | 25
095 | 13 arrobas
18 libras

79 arrobas | 4
39 | 19 quints.
3 arrobas

	quint.	arrobas	libras	onzas	adarmes	tom.
	3	3	14	5	12	2
	20 moyos,	12 cánt.^{s},	4 azumb.^{s},	3 cuart.^{s}		
20 moyos.........	60	60	280	100	240	40
8 cántaras......	1	3	19	10	14	1
4 cántaras......	0	3	22	5	7	$0\frac{1}{2}$
1 cántara.....	**0**	**0**	**24**	**5**	**5**	$\mathbf{2\frac{3}{8}}$
4 azumbres....	0	0	12	2	10	$2\frac{11}{16}$
1 azumbre...	**0**	**0**	**3**	**0**	**10**	$\mathbf{2\frac{11}{64}}$
2 cuartillos.....	0	0	1	8	5	$1\frac{11}{128}$
1 cuartillo......	0	0	0	12	2	$2\frac{11}{256}$
	80 quint.^{s},	3 arrobas,	18 libras,	11 onzas,	5 adarmes,	$2\frac{81}{256}$tom.^{s}

I.^{jo} × C.^{jo} Siendo el precio de *una arroba* $28\frac{2}{7}$ duros ¿cuál será el de 5 arrob.^{s}, 13 lib.^{s} y 13 onz.^{s}?

1 arroba........................$28\frac{2}{7}$duros
5 arrob.^{s}, 13 lib.^{s}, 13 onz.^{s}... »

$28\frac{2}{7}$ duros
5 arrob.^{s}, 13 lib.^{s}, 13 onzas

5 arrob.^{s}........	$141\frac{3}{7}$ duros
5 lib.^{s}..........	$5\frac{23}{35}$
5 lib.^{s}..........	$5\frac{23}{35}$
1 lib.^{s}..........	$1\frac{23}{175}$
2 lib.^{s}..........	$2\frac{46}{175}$
8 onz.^{s}.........	$0\frac{198}{350}$
4 onz.^{s}.........	$0\frac{99}{350}$
1 onza..........	$0\frac{99}{1400}$
	$157\frac{79}{1400}$ duros

$$\left(\frac{600+920+920+184+368+792+396+99}{1400}\right)\text{duros}=\frac{4279}{1400}\text{duros}=3\frac{79}{1400}\text{duros}$$

DIVISION DE NÚMEROS CONCRETOS.

Fundándonos en la definicion *general* de la division, se hizo ver al tratar de la de los números enteros: 1.° Que si el dividendo y el divisor son abstractos, el cociente puede hacer de multiplicando ó de multiplicador y es abstracto tambien. 2.° Que si el dividendo es concreto y el divisor abstracto, el cociente hace de multiplicando y es concreto de la especie del dividendo. 3.° Que si el dividendo y el divisor son concretos de una misma especie, el cociente hace de multiplicador y es abstracto. 4.° Que si el dividendo y el divisor son concretos de distinta especie, para el hecho de la division se ha de considerar al divisor, que ha de hacer de multiplicador, como abstracto y el cociente hará de multiplicando y será concreto de la especie del dividendo. 5.° Que si el dividendo es abstracto y el divisor concreto, este, que hará de multiplicador, se ha de considerar como abstracto y el cociente hará de multiplicando y será abstracto. | Del caso en que el dividendo y el divisor sean abstractos nos hemos ocupado ya. | Cuando sea el dividendo concreto y el divisor abstracto, la division se hará como si fuesen abstractos los dos, sin otra modificacion que la que exija la forma del dividendo, si es complejo. $28\frac{2}{7}$ v.s cúb.s : $\frac{3}{5} = \frac{198}{7}$ v.s cúb.s : $\frac{3}{5} = \frac{990}{21}$ v.s cúb.s $= 47\frac{1}{7}$ v.s cúb.s | (12 moyos, 1 cánt.a, 4 azumb.s, 2 cuart.s) : $\frac{23}{7}$ = C.te; C.te $\times \frac{23}{7}$ = 12 moyos, 1 cánt.a, 4 azumb.s, 2 cuart.s; 23 *sétimos del* C.te = 12 moyos, 1 cánt.a, 4 azumb.s, 2 cuart.s; *un sétimo del* C.te $= \frac{\text{12 moyos, 1 cánt.a, 4 azumb.s, 2 cuart.s}}{23}$; C.te $= \frac{\text{12 moyos, 1 cánt.a, 4 azumb.s, 2 cuart.s}}{23} \times 7 = \frac{\text{(12 moyos, 1 cánt.a, 4 azumb.s, 2 cuart.s)} \times 7}{23}$.

```
12 moyos, 1 cánt.s, 4 azumb.s, 2 cuart.s
                                      7
84 moyos, 10 cánt.s, 7 azumb.s, 2 cuart.s | 23
15 moyos                                  | 3 moyos, 10 cánt.s, 7 azumb.s, 1 c.llo, 0 12/23 cop.s
16
90
15            2 cuart.s             4 azumb.s             1 cánt.a
240 cánt.s    7                     7                     7
 10 cánt.s    14 cuart.s | 4        28 azumb.s            7 cánt.s
250 cánt.s     2 cuart.s | 3 azumb.s  3 azumb.s           3 cánt.s
020 cánt.s                          31 azumb.s | 8        10 cánt.s
  8                                  7 azumb.s | 3 cánt.s
160 azumb.s
  7 azumb.s
167 azumb.s
 06 azumb.s
  4
 24 cuart.s
  2 cuart.s
 26 cuart.s
  3 cuart.s
  4
 12 copas
```

```
12 moyos, 1 cánt.a, 4 azumb.s, 2 cuart.s | 23
16                                       | 8 cánt.s, 3 azumb.s, 1 c.llo, 1 5/23 copas
72                                                                            7
12                                         3 moyos, 10 cánt.s, 7 azumb.s, 1 c.llo, 0 12/23 copas
192 cánt.s
  1 cánt.a
193 cánt.s
 09 cánt.s     5 copas               1 copa               1 c.llo
  8            7                     7                    7
 72 azumb.s    35 copas | 23         7 copas              7 cuart.s
  4 azumb.s    12 copas | 1 copa     1 copa               2 cuart.s
 76 azumb.s                          8 copas | 4          9 cuart.s | 4
 07 azumb.s                          0 copas | 2 cuart.s  1 c.llo   | 2 az.s
  4
 28 cuart.s    3 azumb.s             8 cánt.s
  2 cuart.s    7                     7
 30 cuart.s    21 azumb.s            56 cánt.s
  7 cuart.s     2 azumb.s             2 cánt.s
  4            23 azumb.s | 8        58 cánt.s | 16
 28 copas       7 azumb.s | 2 cánt.s 10 cánt.s | 3 moyos
  5 copas
```

Es preferible el primer procedimiento por seguirse en él la misma regla que para dividir un entero por una fraccion. | Cuando para la resolucion de un problema ocurra hacer una division en que *el dividendo y el divisor sean concretos de distinta especie, se reducirá el divisor al órden de la unidad principal y se le considerará como abstracto,* quedando reducida la cuestion á dividir un número concreto por otro abstracto. |

Pueden ocurrir estos casos: I.^{jo} : I.^{jo}, C.^{jo} : I.^{jo}, C.^{jo} : C.^{jo}, I.^{jo} : C.^{jo} | I.^{jo} : I.^{jo} Siendo $8\frac{3}{5}$ *quintales* el peso de una barra de $2\frac{2}{7}$ *varas,* se quiere averiguar el peso de cada *pié* de la misma barra. Dispongamos los números del problema como se dijo en la multiplicacion de números concretos.

$8\frac{3}{5}$ quint.^{s}..... $2\frac{2}{7}$ v.^{s}
»................ 1 pié

Si un *pié* pesa el número que se busca, *dos* pesarán el doble, *tres* el *triple, dos quintos* de pié los *dos quintos* del número que se busca, etc., y lo que se haga con un *pié* para formar $2\frac{2}{7}$ *varas,* habrá de hacerse con el número que se busca para formar $8\frac{3}{5}$ *quintales;* de modo, que estando formados los $8\frac{3}{5}$ *quintales* con el número que se busca como $2\frac{2}{7}$ *varas* está formado con *un pié,* serán producto del número que se busca, que hará de multiplicando, y de $2\frac{2}{7}$ *varas,* que será el multiplicador cuando se le reduzca á *piés,* que son la unidad principal y se le considere como abstracto. Por lo tanto, para hallar el número que se pide hay que dividir el producto $8\frac{3}{5}$ *quintales* por el multiplicador ó sea por $2\frac{2}{7}$ *varas* reducido á piés y considerado como abstracto. $2\frac{2}{7}$ v.^{s}$=\left(\frac{16}{7}\times 3\right)$ *piés*$=\frac{48}{7}$ *piés.* $8\frac{3}{5}$ *quint.*^{s} : $\frac{48}{7}=\frac{43}{5}$ *quint.*^{s} : $\frac{48}{7}=\frac{301}{240}$ *quint.*^{s}$=1\frac{61}{240}$ *quintales.* | C.^{jo} : I.^{jo} ¿Qué cantidad de agua corresponderá á *un celemin,* correspondiendo 4 *moyos,* 6 *cántaras* y 7 *azumbres* á $2\frac{3}{5}$ *fanegas*? Dispongamos los números como ya se ha dicho.

».................... 1 celemin
4 moyos, 6 cántaras, 7 azumbres... $2\frac{3}{5}$ fanegas

Razonando como en el caso anterior se verá que se ha de dividir 4 *moyos,* 6 *cánt.*^{s}, 7 *azumb.*^{s} por el número $2\frac{3}{5}$ *fanegas* reducido á *celemines* y considerado como abstracto. $2\frac{3}{5}$ f.^{s}$=\left(\frac{13}{5}\times 12\right)$ celem.^{s}$=\frac{156}{5}$ cel.^{s}. (4 moyos, 6 cánt.^{s}, 7 azumb.^{s}) : $\frac{156}{5}$

4 moyos, 6 cánts., 7 azumbs.
5
22 moyos, 2 cánts., 3 azumbs. | 156
16 | 2 cánts., 2 azumbs., 0 cuartillos, $2\frac{10}{13}$ copas
152
22
352 cánts.
2 cánts.
354 cánts.
042 cánts.
8
336 azumbs.
3 azumbs.
339 azumbs.
027 azumbs.
4
108 cuartillos
4
432 copas
120

7 azumbs.
5
35 azumbs. | 8
3 azumbs. | 4 cánts.

4 moyos
5
20 moyos
2 moyos
22 moyos

6 cánts.
5
30 cánts.
4 cánts.
34 cánts. | 16
2 cánts. | 2 moyos

C.^{jo} : C.^{jo} Se tardan 5 *semanas,* 3 *dias,* 14 *horas* y 43′ en hacer 2 *varas,* 1 *pié* y 7 *pulgadas* y se quiere saber cuánto tiempo se tardará en hacer *un pié.*

5 sem.^{s}, 3 d.^{s}, 14 h.^{s}, 43′... 2 v.^{s}, 1 pié, 7 pulg.^{s}
»................ 1 pié.

2 varas
3
6 piés
1 pié
7 piés
12
84 pulgs.
7 pulgs.
91 pulgs.

$\frac{91}{12}$ pié. (5 sems., 3 dias, 14 horas, 43′) : $\frac{91}{12}$.

5 semanas, 3 dias, 14 horas, 43′
12
66 semanas, 1 dia, 8 horas, 56′ | 91
| 5 dias, 2 horas, $12\frac{24'}{91}$

7
462 dias
1 dia
463 dias
008 dias
24
192 horas
8 horas
200 horas
18 horas
60
1080′
36′
1116′
206
24′

43′
12
86
43
516′ | 60
36′ | 8 horas

3 dias
12
36 dias
7 dias
43 dias | 7
1 dia | 6 semanas

14 horas
12
28
14
168 horas
8 horas
176 horas | 24
08 horas | 7 dias

5 semanas
12
60 semanas
6 semanas
66 semanas

1.ro : C.ro A 4 *libras*, 9 *onzas* y 12 *adarmes* de una sustancia, se agregan, para un objeto determinado, 14 *onzas* de otra y se desea saber qué peso de la segunda se deberá añadir á una *tonelada* de la primera.

4 lib.s, 9 onz.s, 12 ad.s..... 14 onz.s
1 tonelada............... »

4 libras
16
64 onzas
9 onzas
73 onzas
16
438
73
1168 adarmes
12 adarmes
1180 adarmes

20 quintales
4
80 arrobas
25
2000 libras
16
32000 onzas
16
192
32
512000 adarmes

$\frac{1180}{512000}$ toneladas. 14 onz.s : $\frac{1180}{512000} = \frac{716800}{118}$ onz.s = 3 quint.s, 3@, 4 lib.s, $10\frac{34}{59}$ onz.s

716800 onzas | 118
00880 ...... $6074\frac{68}{118}$ onzas
0540
068 onzas

6074 onzas | 16
127 ...... 379 libras
154
$10\frac{34}{59}$ onzas

379 libras | 25
129 ...... 15 arrobas
04 libras

15 arrobas | 4
3 arrobas ...... 3 quintales

Cuando el dividendo y el divisor son concretos de una misma especie, se reducen á incomplejos de un mismo órden de unidades y se efectúa la division como si fueran abstractos; el cociente será abstracto como resultado inmediato de la division, toda vez que hace de multiplicador, pero el problema indicará el modo de concretarle, pues que espresará el número de unidades del órden principal que corresponderá al dividendo.

Ocurren los mismos casos que cuando el dividendo y el divisor son de distinta especie. | I.ro : I.ro ¿Cuánto se podrá comprar con $2\frac{3}{7}$ *duros*, costando $24\frac{2}{3}$ *reales* cada vara? Dispondremos los números como anteriormente.

$2\frac{3}{7}$ duros.......... »
$24\frac{2}{3}$ reales... 1 vara

Si una vara cuesta $24\frac{2}{3}$ reales, dos ó tres ó cuatro etc. costarán doble, triple, cuádruple, etc., y media vara, dos tercios de una vara etc. costarán la mitad ó los dos tercios etc. de $24\frac{2}{3}$ rs.; es decir, que lo que se haga con una vara para formar el número que se busca, habrá que hacer con $24\frac{2}{3}$ rs. para formar $2\frac{3}{7}$ duros; así, pues, $2\frac{3}{7}$ duros está formado con $24\frac{2}{3}$ reales como el número que se busca está formado con una vara y de consiguiente $2\frac{3}{7}$ duros será producto de $24\frac{2}{3}$ reales, que será el multiplicando, y del número que se busca, que será el multiplicador y por lo tanto abstracto. Dividiendo $2\frac{3}{7}$ duros por $24\frac{2}{3}$ reales, tendremos el número pedido, que será abstracto como resultado inmediato de la division, pero que espresará el número de varas que pueden comprarse con el dividendo; de modo que el problema, al espresar la unidad principal, indica la denominacion del cociente que es la misma de esta unidad.

$2\frac{3}{7}$ duros : $24\frac{2}{3}$ reales $=\left(\frac{17}{7}\times 20\right)$ rs. : $\frac{74}{3}$ rs. $=\frac{340}{7}$ rs. : $\frac{74}{3}$ rs. $=\frac{1020}{518}$; $\frac{1020}{518}$ varas $=\frac{510}{259}$ varas $=$ 1 vara, 2 piés, $10\frac{230}{259}$ pulgadas.

510 varas | 259
251 varas | 1 v.^{a}, 2 p.^{s}, $10\frac{230}{259}$ pulg.^{s}
3
753 p.^{s}
235 p.^{s}
12
470
235
2820 pulg.^{s}
0230 pulg.^{s}

C.^{jo} : I.^{jo} Qué tiempo se empleará en hacer 8 vs.^{2}, 4 ps.^{2} y 83 pulgs.^{2}, tardándose un *dia* en hacer $23\frac{2}{3}$ ps.^{2}?

Dispondremos los números y razonaremos como anteriormente.

»....... 8 vs.^{2}, 4 ps.^{2}, 83 pulgs.^{2}
1 dia........... $23\frac{2}{3}$ ps.^{2}

$$(8 \text{ vs.}^2, 4 \text{ ps.}^2, 83 \text{ pulgs.}^2) : 23\frac{2}{3} \text{ ps.}^2 = \frac{11027}{144} \text{ ps.}^2 : \frac{71}{3} \text{ ps.}^2 = \frac{33081}{10224};\ \frac{11027}{3408} \text{ dias} =$$

3 dias, 5 horas, $39\frac{21}{71}'$.

11027 dias | 3408
0803 dias | 3 dias, 5 h.^{s}, $39\frac{21}{71}'$
24
3212
1606
19272 horas
2232 horas
60
133920
31680
1008'

C.^{jo} : C.^{jo} Pesando *una fanega* 3 arrobas, 19 libras y 14 onzas, se quiere averiguar qué cantidad de grano habrá en un peso de 5 quintales, 2 arrobas y 15 libras.

1 fanega..... 3 @, 19 lib.^{s}, 14 onz.^{s}
»............ 5 quint.^{s}, 2 @, 15 lib.^{s}

$$(5 \text{ quint.}^s, 2\ @, 15 \text{ lib.}^s) : (3\ @, 19 \text{ lib.}^s, 14 \text{ onz.}^s) = 9040 \text{ onz.}^s : 1518 \text{ onz.}^s = \frac{9040}{1518};$$

$$\frac{4520}{759} \text{ faneg.}^s = 5 \text{ faneg.}^s, 11 \text{ cel.}^s, 1\frac{215}{253} \text{ cuart.}^{llos}$$

5 quints.
4
20 arrobas
2 arrobas
22 arrobas
25
110
44
550 libras
15 libras
565 libras
16
3390
565
9040 onzas.

3 arrobas
25
75 libras
19 libras
94 libras
16
564
94
1504 onzas
14 onzas
1518 onzas

4520 faneg.^{s} | 759
725 faneg.^{s} | 5 faneg.^{s}, 11 cel.^{s}, $1\frac{215}{253}$ cuart.^{llos}
12
1450
725
8700 cel.^{s}
1110
351 cel.^{s}
4
1404 cuart.^{llos}
645 cuart.^{llos}

I.^{jo} : C.^{jo} Qué tiempo se tardará en hacer 8 *estadales*, tardándose *un dia* en hacer 5 varas, 2 piés y 3 pulgadas.

»......... 8 estadales
1 dia... 5 v.^{s}, 2 p.^{s}, 3 pulg.^{s}

$$8 \text{ est.}^s : (5 \text{ v.}^s, 2 \text{ p.}^s, 3 \text{ pul.}^s) =$$

$$1152 \text{ pulg.}^s : 207 \text{ pulg.}^s = \frac{1152}{207};\ \frac{1152}{207} \text{ dias} = 5 \text{ dias}, 13 \text{ h.}^s, 33\frac{21}{23}'$$

8 estadales
2
16 brazas
2
32 varas
3
96 piés
12
192
96
1152 pulgs.

5 varas
3
15 piés
2 piés
17 piés
12
34
17
204 pulgs.
3 pulgs.
207 pulgs.

1152 dias | 207
117 dias | 5 dias, 13 horas, $33\frac{21}{23}'$
24
468
234
2808 horas
0738
117 horas
60
7020'
0810
189'

En el caso poco probable de que ocurriese dividir un número abstracto por otro concreto, se reduciria este, que habria de hacer de multiplicador, á incomplejo del órden de la unidad principal y se le consideraria como abstracto, por lo que la division quedaria reducida á la de dos números abstractos. El cociente, que habria hecho de multiplicando, seria abstracto.

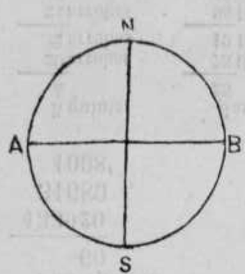
Siendo $28\frac{2}{3}$ el número correspondiente á 1 v.ª, 2 p.ˢ y 5 pulg.ˢ, cuál será el correspondiente á *un pié.*

$28\frac{2}{3}$..... 1 v.ª, 2 p.ˢ, 5 pulg.ˢ
»................... 1 pié.

3 piés
2 piés
5 piés
12
60 pulgs.
5 pulgs.
65 pulgs.

$\frac{65}{12}$ piés. $28\frac{2}{3} : \frac{65}{12} = \frac{86}{3} : \frac{65}{12} = \frac{1032}{195} = 5\frac{19}{65}$.

SISTEMA MÉTRICO DECIMAL.



La unidad *fundamental* ó base de este sistema, es la unidad principal de longitud llamada *metro.* | El *metro* es la diezmillonésima parte del cuadrante de meridiano terrestre comprendido entre el polo y el ecuador. | Meridiano terrestre. | Cuadrante. | Ecuador.

$\text{Metro} = \frac{NA}{10000000}$; $NA = 10000000$ m.ˢ; $NASBN = 40000000$ m.ˢ | Las unidades *principales* de las diversas clases usadas en el sistema métrico, con escepcion de las *cuadradas* y *cúbicas*, son:

- el *metro* para *longitud*
- el *área* para *superficie*
- el *litro* para *capacidad*
- el *gramo* para *peso*

Las unidades de los *órdenes superiores* se forman repitiendo sucesivamente diez veces cada una de dichas unidades *principales* y cada una de las que se van formando con ellas. Las unidades de los *órdenes inferiores* se forman subdividiendo sucesivamente en diez partes iguales cada una de las unidades *principales* y cada una de las que van resultando formadas. Los nombres de las unidades superiores, se forman anteponiendo al nombre de la unidad principal las palabras griegas: *deca, hecto, kilo* y *miria* equivalentes á *diez, ciento, mil* y *diezmil* y los de las unidades inferiores, anteponiendo al nombre de la unidad principal las palabras latinas: *deci, centi* y *mili* equivalentes á *décima, centésima* y *milésima.*

La notacion adoptada para designar abreviadamente estas unidades consiste en poner la inicial mayúscula de las palabras griegas ó la minúscula de las latinas y á la derecha de ella la inicial minúscula del nombre de la unidad principal; así: M*m*, H*a*, D*l*, *dg*, *cl*, y *mm*, querrán decir: *miriámetro, hectárea, decálitro, decígramo, centílitro* y *milímetro.* Claro es que solo se pondrá la inicial minúscula de la unidad principal cuando se cuénte por este órden de unidades.

Unidades lineales ó de longitud. La unidad principal es, como se ha dicho, el *metro.* Con esta unidad se forman las de los órdenes superiores é inferiores como se ve en el cuadro siguiente:

UNIDAD PRINCIPAL.

Metro.

—

Múltiplos.	Divisores.
Decámetro=10 metros	*Decímetro=0,1 de metro*
Hectómetro=10 decámetros=100 metros	*Centímetro=0,1 de decímetro=0,01 de metro*
Kilómetro=10 hectómetros=1000 metros	*Milímetro=0,1 de centímetro=0,001 de metro*
Miriámetro=10 kilómetros=10000 metros	

Unidades de superficie. Las superficies se miden, como se tiene manifestado, con *unidades cuadradas* ó sea con cuadrados que tienen por lado una *unidad lineal*. Se ha dicho que, para averiguar el número de unidades cuadradas de un órden que contiene una unidad cuadrada de otro órden, se eleva al cuadrado el número de unidades lineales del primer órden que contiene una unidad lineal del segnndo y, como en el sistema métrico cada unidad lineal contiene 10 del órden inmediato inferior, cada unidad cuadrada equivaldrá á $10^2=100$ unidades cuadradas del órden inmediato inferior. Así, pues, tendremos las unidades siguientes:

UNIDAD PRINCIPAL.

Metro cuadrado.

—

Múltiplos.	Divisores.
Decámetro cuadrado=100 metros cuadrados.	*Decímetro cuadrado=0,01 de metro cuadrado.*
Hectómetro cuadrado=100 decámetros cuadrados.	*Centímetro cuadrado=0,01 de decímetro cuadrado*
Kilómetro cuadrado=100 hectómetros cuadrados.	*Milímetro cuadrado=0,01 de centímetro cuadrado.*
Miriámetro cuadrado=100 kilómetros cuadrados.	

Además de estas unidades se emplean otras para la medicion de los campos. La principal de ellas es el *área* ó cuadrado que tiene de lado un decámetro, es decir, el *decámetro cuadrado*. Con esta unidad se forman las superiores é inferiores del modo siguiente:

UNIDAD PRINCIPAL.

Area.

—

Múltiplos.	Divisores.
Decárea=10 áreas	Deciárea = 0,1 de área
Hectáreas=10 decáreas=100 áreas	*Centiárea=0,1 de deciárea=0,01 de área*
Kiláreа=10 hectáreas=1000 áreas	Miliárea = 0,1 de centiárea = 0,001 de área
Miriárea=10 kiláreas=10000 áreas	

Solo se usan las unidades espresadas en letra bastardilla que son *unidades cuadradas*, pues el área es un decámetro cuadrado, la hectárea es un hectómetro cuadrado y la centiárea un metro cuadrado. Tambien la miriárea equivale á un kilómetro cuadrado, pero no se emplea. Las otras no son unidades cuadradas.

Unidades de volúmen. Ya se hadicho que los volúmenes se miden con *unidades cúbicas* ó cubos que tienen por lado una *unidad lineal*. Como, para averiguar el número de unidades cúbicas de un órden que contiene una unidad cúbica de otro órden, se eleva al cubo el número de unidades lineales del primer órden que contiene la unidad lineal del segundo, y en el sistema métrico cada unidad lineal de un órden contiene diez del inmediato inferior, cada unidad cúbica de un órden contendrá *mil* unidades cúbicas del órden inmediato inferior. Habrá, pues, las unidades siguientes:

UNIDAD PRINCIPAL.

Metro cúbico.

Múltiplos.	Divisores.
Decámetro cúbico=1000 metros cúbicos	*Decímetro cúbico=0,001 de metro cúbico*
Hectómetro cúbico=1000 decámetros cúbicos	*Centímetro cúbico=0,001 de decímetro cúbico*
Kilómetro cúbico=1000 hectómetros cúbicos	*Milímetro cúbico=0,001 de centímetro cúbico*
Miriámetro cúbico=1000 kilómetros cúbicos	

Unidades de capacidad. La unidad principal de capacidad es el *litro*. El litro es una vasija de forma cilíndrica cuya capacidad es un decímetro cúbico. Con esta unidad se forman las superiores é inferiores que se espresan á continuacion.

UNIDAD PRINCIPAL.

Litro.

Múltiplos.	Divisores.
Decálitro=10 litros	*Decilitro=0,1 de litro*
Hectólitro=10 decálitros=100 litros	*Centilitro=0,1 de decilitro=0,01 de litro*
Kilólitro=10 hectólitros=1000 litros	*Mililitro=0,1 de centilitro=0,001 de litro*
Miriálitro=10 kilólitros=10000 litros	

Para medir la capacidad de los buques, se toma como unidad el metro cúbico con el nombre de *tonelada métrica de arqueo*, equivalente tambien al kilólitro. El mililitro equivaldrá á un centímetro cúbico.

Unidades de peso. El *gramo* es el peso en el vacío de un centímetro cúbico de agua destilada á la temperatura de 4 grados centígrados. | Motivos para la fijacion de estas condiciones. | Con el gramo se forman las demás unidades que se espresan á continuacion.

UNIDAD PRINCIPAL.

Gramo.

Múltiplos.	Divisores.
Decágramo=10 gramos	*Decigramo=0,1 de gramo*
Hectógramo=10 decágramos=100 gramos	*Centigramo=0,1 de decigramo=0,01 de gramo*
Kilógramo=10 hectógramos=1000 gramos	*Miligramo=0,1 de centigramo=0,001 de gramo*
Miriágramo=10 kilógramos=10000 gramos	

Además de estas unidades, se usa el *quintal métrico* que vale 100 kilógramos y la *tonelada métrica* de peso que vale 1000 kilógramos.

Obsérvese que el *kilógramo* es el peso de *un litro* ó sea *un decímetro cúbico* de agua en las condiciones en que se determina el gramo, y que *la tonelada métrica de peso* es lo que pesaria un volúmen de agua, en las mismas condiciones, igual á *un metro cúbico* ó sea á *una tonelada métrica de arqueo*. La unidad usual es el kilógramo. El miriágramo es poco usado.

Está permitida la fabricacion de medidas y pesas que sean dobles ó mitades de las legales. | En las unidades de tiempo no se ha introducido modificacion alguna al establecer el sistema métrico decimal. |

Sistema monetario legal. La unidad principal es *la peseta* que se divide en 100 *céntimos de peseta*. La peseta es una moneda de plata que pesa 5 gramos y cuya ley es de 835 milésimas, es decir: que contiene 835 milésimas partes de plata y 165 milésimas partes de cobre. Se acuñarán las monedas de *oro, plata y bronce* que espresa el cuadro siguiente:

	MONEDAS.	Peso en gramos.	Diámetro en milímetros.	Aleacion de que están formadas.
Oro.	De 100 pesetas.......	32,25806	35	900 mil.s de oro. 100 mil.s de cobre.
	De 50 pesetas.......	16,12903	28	
	De 25 pesetas.......	8,06451	24	
	De 10 pesetas.......	3,22580	19	
	De 5 pesetas.......	1,61290	17	
Plata.	De 5 pesetas........	25	37	900 mil.s de plata. 100 mil.s de cobre.
	De 2 pesetas........	10	27	835 mil.s de plata. 165 mil.s de cobre.
	De 1 peseta.........	5	23	
	De 50 cént.s de peseta.	2,50	18	
	De 20 cént.s de peseta.	1	16	
Bronce.	De 10 cént.s de peseta.	10	30	950 mil.s de cobre. 40 mil.s de estaño. 10 mil.s de zinc.
	De 5 cént.s de peseta.	5	25	
	De 2 cént.s de peseta.	2	20	
	De 1 cént.o de peseta.	1	15	

En el sistema métrico-decimal se suelen espresar los números concretos en forma incompleja. | Llamaremos *números métricos* á los concretos espresados en unidades del sistema métrico-decimal. | Reduccion de números métricos á unidades de órden inferior. Reducir $347^{Kg},2869$ á decágramos. $347^{Kg},2869 = 34728^{Dg},69$. Reducir $84^{Dm^2},6985367$ á centímetros cuadrados. $84^{Dm^2},6985367 = 846985536^{cm^2},7$. Reducir $4^{m^3},85694836$ á centímetros cúbicos. $4^{m^3},85694836 = 4856948^{cm^3},36$. Reducir $6^{Hl},85$ á centílitros: $6^{Hl},85 = 68500^{cl}$. | Reduccion de números métricos á unidades de órden superior. Reducir $5864^{a},893$ á hectáreas. $5864^{a},893 = 58^{Ha},64893$. Reducir $6846897^{m^2},38$ á kilómetros cuadrados. $6846897^{m^2},38 = 6^{Km^2},84689738$. Reducir $38493^{cm^3},436$ á decámetros cúbicos. $38493^{cm^3},436 = 0^{Dm^3},000038493436$. | Espresar un incomplejo métrico en forma compleja. $48604^{Dl},8907684 = 48^{Ml}6^{Kl}0^{Hl}4^{Dl}8^{l}9^{dl}0^{cl}7^{ml},684$; $34809720025^{m^2},3702436 = 348^{Mm^2}\,9^{Km^2}\,72^{Hm^2}\,0^{Dm^2}\,25^{m^2}\,37^{dm^2}\,2^{cm^2}\,43^{mm^2},6$; $29648007652^{m^3},8003049 = 29^{Km^3}\,648^{Hm^3}\,7^{Dm^3}\,652^{m^3}\,800^{dm^3}\,304^{cm^3}\,900^{mm^3}$ | Reducir un número complejo métrico á incomplejo de un órden dado de unidades. Reducir á gramos el número: $3^{Kg}\,8^{Hg}\,9^{g}\,6^{dg},437$. $3^{Kg}\,8^{Hg}\,9^{g}\,6^{dg},437 = 3809^{g},6437$. Reducir el número: $7^{Km^2}\,9^{Hm^2}\,62^{m^2}\,37^{dm^2}\,8^{mm^2},62$ á metros cuadrados. $7^{Km^2}\,9^{Hm^2}\,62_{m}{}^{2}\,37^{dm^2}\,8^{mm^2},62 = 7090062^{m^2},37000862$. Reducir el número: $6^{Km^3}\,2^{Hm^3}\,89^{m^3}\,376^{dm^3}\,4^{mm^3}$ á decámetros cúbicos. $6^{Km^3}\,2^{Hm^3}\,89^{m^3}\,376^{dm^3}\,4^{mm^3} = 6002000^{Dm^3},089376000004$. | Se han elegido números convenientes para que se comprendan fácilmente las trasformaciones; pero, empezando los números por unidades tan grandes como los kilómetros cúbicos, por ejemplo, no se apreciarian otras tan pequeñas como los milímetros cúbicos. | En todo número complejo métrico el primer incomplejo podrá contener cualquier número de cifras, pero los siguientes solo deben tener á lo mas: tres si se trata de unidades cúbicas; dos, si de unidades cuadradas y una, si de otra clase de unidades; pues, si tuviesen más, formarian ya unidades del órden superior inmediato y deberian reducirse á este órden. Ninguno de ellos debe contener cifras decimales escepto el último por una razon análoga. Así, el número $2^{Dg}47^{g}4^{dg},3.6^{cg}$. se deberá espresar en la forma $6^{Dg}7^{g}4^{dg}9^{cg}$. | La adopcion del sistema métrico-decimal facilita las operaciones por hacerse en la generalidad de los casos con números incomplejos, pero no escluye por completo el cálculo de los números complejos, pues cuando en los problemas aparezcan cantidades de tiempo, podrá ser conveniente espresarlas en esta última forma.

SUMA Y RESTA DE NÚMEROS CONCRETOS.

Es necesario que los números sean homogéneos para que se puedan hacer estas operaciones. | Para sumar ó restar números métricos se reducen á un mismo órden de unidades y se efectúa la operacion como si fuesen abstractos. | $483^{Kg},689+82947^{g}+3^{Mg},6843+3867^{Dg},69=483^{Kg},689+82^{Kg},947+36^{Kg},843+38^{Kg},6769=642^{Kg},1559$.

$$\begin{array}{r} 483^{Kg},689 \\ 82\;,947 \\ 36\;,843 \\ 38\;,6769 \\ \hline 642^{Kg},1559 \end{array}$$

| $8724^{m},942-4^{Km},96243=8^{Km},724942-4^{Km},96243=3^{Km},762512$.

$$\begin{array}{r} 8^{Km},724942 \\ 4^{Km},96243 \\ \hline 3^{Km},762512 \end{array}$$

MULTIPLICACION DE NÚMEROS MÉTRICOS.

Se reducirá siempre el multiplicador al órden de la unidad principal y se le considerará como abstracto. | Si el multiplicando y el multiplicador son números métricos, habrá que efectuar una multiplicacion de números enteros ó decimales siguiendo las reglas dadas para los números abstractos. | Si el multiplicando fuese un número métrico y el multiplicador un número concreto de tiempo, reducido que sea este al órden de la unidad principal resultará un número entero ó fraccionario, pues si fuese mixto se le daria la forma de fraccion; en el primer caso se tratará de la multiplicacion de un número entero ó decimal por un entero, que ya sabemos efectuar; y en el segundo, ya sea entero ó decimal el multiplicando, se efectuará la multiplicacion como la de un entero por una fraccion, fundándose, si es decimal, en los mismos razonamientos que se hicieron para el caso de que fuese entero. | Si el multiplicando es un número complejo de tiempo y el multiplicador métrico, convendrá reducir aquel á incomplejo de cualquier órden de unidades cuando este sea decimal; pero, si fuese entero, se haria como si ambos estuviesen espresados en unidades del antiguo sistema. | Obtenido el producto se le dará forma de incomplejo métrico ó de complejo de tiempo, segun los casos. | ¿Cuál será el peso de $0^{Hl},3247$ pesando cada *litro* $0^{Kg},785$?

$$\left.\begin{array}{l} \text{»} \ldots\ldots\ldots\ldots 0^{Hl},3247 \\ 0^{Kg},785 \ldots\ldots 1 \textit{ litro} \end{array}\right\} 0^{Hl},3247 = 32^{l},47; \quad 0^{Kg},785 \times 32,47 = 25^{Kg},48895.$$

$$\begin{array}{r} 0^{Kg},785 \\ 32,47 \\ \hline 5495 \\ 3140 \\ 1570 \\ 2355 \\ \hline 25^{Kg},48895 \end{array}$$

Si en un *dia* se hacen $47^m,8$ de una obra ¿qué longitud de la misma obra se hará en 5 *dias*, 4 *horas* y 18'?

$$\left.\begin{array}{l} 1 \text{ dia} \ldots\ldots\ldots\ldots 47^m,8 \\ 5 \textit{ dias, 4 horas, } 18' \ldots\ldots \text{»} \end{array}\right\} 47^m,8 \times \frac{1243}{240} = \frac{59415,4}{240} \text{ metros} = 247^m,5641..$$

$$\begin{array}{r} 5 \text{ dias} \\ 24 \\ \hline 120 \text{ horas} \\ 4 \text{ horas} \\ \hline 124 \text{ horas} \\ 60 \\ \hline 7440' \\ 18' \\ \hline 7458' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \text{ horas} \\ 60 \\ \hline 1440' \end{array} \qquad \frac{7458}{1440} \text{horas} = \frac{1243}{240} \text{horas}$$

$$\begin{array}{r} 47^m,8 \\ 1243 \\ \hline 1434 \\ 1912 \\ 956 \\ 478 \\ \hline 59415^m,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 59415^m,4 & 240 \\ \cline{2-2} 1141 & 247^m,5641.. \\ 1815 & \\ 1354 & \\ 1540 & \\ 1000 & \\ 0400 & \\ 160 & \\ : & \end{array}$$

Se tardan 2 *dias* y 7 *horas* en hacer *un metro* ¿cuánto tiempo se tardará en hacer $0^{Hm},8793$?

$$\left.\begin{array}{l} 2 \textit{ dias, 7 horas} \ldots 1 \textit{ metro} \\ \text{»} \ldots\ldots\ldots\ldots 0^{Hm},8793 \end{array}\right\} 55^{\text{horas}} \times 87,93 = 28 \textit{ sem.}^s, 5 \textit{ dias}, 12 \textit{ h.}^s, 9'.$$

$$\begin{array}{r} 2 \text{ dias} \\ 24 \\ \hline 48 \text{ horas} \\ 7 \text{ horas} \\ \hline 55 \text{ horas} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 55 \text{ horas} \\ 87,93 \\ \hline 165 \\ 495 \\ 385 \\ 440 \\ \hline 4836^{h.s},15 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4836^{h.s},15 & 24 \\ \cline{2-2} 0036 & 201 \text{ dias} \\ 12^{h.s} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 201 \text{ dias} & 7 \\ \cline{2-2} 61 & 28 \text{ sem.}^s \\ 5 \text{ dias} & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0^{h.s},15 \\ 60 \\ \hline 9',00 \end{array}$$

DIVISION DE NÚMEROS MÉTRICOS.

Puede suceder que el dividendo y el divisor sean de diferente especie y que sean de la misma especie. En el primer caso se reducirá el divisor al órden de la unidad principal y hará de multiplicador; y el cociente, que hará de multiplicando, será de la misma especie que el dividendo. En el segundo hará el divisor de multiplicando, el cociente hará de multiplicador y será por lo tanto abstracto como resultado inmediato de la division, indicando el problema el modo de concretarle, pues que será el número de unidades de la especie y órden de la unidad principal que corresponde al dividendo. | En el caso primero puede ocurrir que el dividendo y el divisor sean métricos, que el dividendo sea métrico y el divisor sea un complejo de tiempo y que el dividendo sea un complejo de tiempo y el divisor métrico. | Siendo $283^{Kg},2437$ el peso de $4^{Hl},1383$ ¿cuánto pesará cada *litro*?

$$\left.\begin{array}{l} 283^{Kg},2437 \ldots 4^{Hl},1383 \\ \text{»} \ldots\ldots\ldots\ldots 1 \textit{ litro} \end{array}\right\} 4^{Hl},1383 = 413^{l},83;$$

$283^{Kg},2437 : 413,83 = 0^{Kg},6844$ |

$$\begin{array}{r|l} \overset{Kg}{28324,57} & 41385 \\ \hline 5494\ 57 & 0^{Kg},6844... \\ 185\ 950 & \\ 18\ 5980 & \\ 1\ 8448 & \\ .... & \end{array}$$

¿Qué número de litros se elaborará en cada dia habiéndose elaborado $243^{Hl},3$ en 2 *semanas, 4 dias* y 18 *horas?*

$$\left.\begin{array}{l} \text{»} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1\ \textit{dia} \\ 243^{Hl},3 \ldots 2\ \textit{semanas, 4 dias, 18 horas} \end{array}\right\} 243^{Hl},3 : \frac{450}{24} = \frac{5839^{Hl},2}{450} = 12^{Hl},976$$

2 semanas, 7, 14 dias, 4 dias, 18 dias, 24, 72, 36, 432 horas, 18 horas, 450 horas

$\frac{450}{24}$ horas; $243^{Hl},3 \times 24 = 9732$, 4866, $5839^{Hl},2$

$5839^{Hl},2 \mid 450$: 1339, 4392, 3420, 2700, 000 — $12^{Hl},976$

Cuando el dividendo sea complejo de tiempo y el divisor métrico, convendrá reducir aquel á incomplejo de cualquier órden, á menos que el divisor reducido al órden de la unidad principal resultase entero, en cuyo caso se podria hacer como en el antiguo sistema. Qué tiempo se empleará en hacer *un metro cuadrado* tardándose 12 *dias,* 22 *horas* y 37′ en hacer $0^{Dm^2},036$?

$$\left.\begin{array}{l} \text{»} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1^{m^2} \\ 12\ \textit{dias, 22 horas}\ 37' \ldots 0^{Dm^2},036 \end{array}\right\} 18637' : 3,6 = \frac{186370'}{36} = 3\ \textit{dias, 14 horas,}\ 16\frac{17'}{18}$$

12 dias, 24, 48, 24, 288 horas, 22 horas, 310 horas, 60, 18600, 37, 18637′

$0^{Dm^2},036 = 3^{m^2},6;$

$186370' \mid 36$: 065, 277, 250, 34′ — $5176\frac{17'}{18}$; 576; $16\frac{17'}{18}$; $5176 \mid 60$ — 86 horas, 14 horas; $86 \mid 24$ — 3 dias

Cuando el dividendo y el divisor sean de igual especie puede suceder que sean métricos y la unidad principal métrica tambien, que sean complejos ó incomplejos de tiempo y la unidad principal métrica y que sean métricos y la unidad principal de tiempo.

Si 1 *kilógramo* es el peso de una cuerda de $3^m,7$ de longitud, ¿cuál será el peso de $8^{Dm},7687$ de la misma cuerda?

$$\left.\begin{array}{l} 1\ \textit{kilógramo} \ldots\ldots 3^m,7 \\ \text{»} \ldots\ldots\ 8^{Dm},7687 \end{array}\right\} 8^{Dm},7687 : 3^m,7 = 87^m,687 : 3^m,7 = 876^m,87 : 37^m = 23,6991\ldots;\ 23^{Kg},6991\ldots$$

$876^m,87 \mid 37^m$: 136, 258, 367, 340, 070, 33 — $23,6991\ldots$

En 4 *horas,* 15′ y 23″ se hace 1 *hectólitro* y se desea saber qué cantidad se hará en 5 *dias,* 9 *horas* y 45′ suponiendo que se trabajen 12 *horas* cada dia. Se considerará compuesto el dia de *doce horas,* pues que son las que se emplean para el trabajo.

$$\left.\begin{array}{l} 4\ \textit{horas},\ 15',\ 23'' \ldots\ldots 1\ \textit{hectólitro} \\ 5\ \textit{dias, 9 horas},\ 45' \ldots\ldots \text{»} \end{array}\right\} (5\ \textit{dias, 9 horas},\ 45') : (4\ \textit{horas},\ 15',\ 23'') = 251100'' : 15323'' = 16,38713\ldots;\ 16^{Hl},38713\ldots$$

5 dias, 12, 60 horas, 9 horas, 69 horas, 60, 4140′, 45′, 4185′, 60, 251100″

4 horas, 60, 240′, 15′, 255′, 60, 15300″, 23″, 15323″

$251100'' \mid 15323''$: 097870, 059520, 135510, 109260, 019990, 046670, 00701 — $16,38713\ldots$

Tardándose *un dia* en hacer $5^{Kg},3$ se quiere saber cuánto se tardará en hacer $7^{quints.},68493$.

$$\left.\begin{array}{l} 1\ \text{dia} \ldots\ldots 5^{Kg},3 \\ \text{»} \ldots\ldots 7^{quints.},68493 \end{array}\right\} 7^{quints.},68493 : 5^{Kg},3$$

$$= 768^{Kg},493 : 5^{Kg},3 = 7684^{Kg},93 : 53^{Kg} = \frac{7684,93}{53} = \frac{768493}{5300};$$

$$\frac{768493}{5300}\ \textit{dias} = 144\ \textit{dias, 23 horas},\ 58',09.$$

768493 *dias* $\mid 5300$: 23849, 26493, 5293 *dias* — 144 *dias*, 23 *horas*, 58′,09...; 5293 × 24: 21172, 10586, 127032 *horas*, 21032, 5132 *horas*, 60, 307920′, 42920, 052000, 4300, ...

CONVERSION DE UNIDADES DEL ANTIGUO SISTEMA AL NUEVO Y VICE-VERSA.

Puede hacerse esta conversion empleando $\left\{\begin{array}{l}\text{las equivalencias exactas.}\\ \text{las tablas.}\\ \text{las equivalencias aproximadas.}\end{array}\right.$

Entendemos por *relaciones ó equivalencias exactas* las publicadas por la Comision de pesas y medidas, que espresan el valor de una unidad de un sistema en unidades enteras de un solo órden del otro y parte decimal de las mismas; por ejemplo: 1 vara $= 0^m,835905$.

Las *tablas* pueden ser mas ó menos completas, facilitando en consecuencia mas ó menos los cálculos; pero es suficiente que contengan el valor de *una, dos, tres,..... nueve,* unidades del un sistema en unidades de un solo órden del otro y parte decimal de las mismas, pues que corriendo uno, dos, tres, etc. lugares la coma en estos valores á la derecha ó izquierda, se tendrá el valor del mismo número de decenas, centenas, millares, etc. ó décimas, centésimas, milésimas, etc.

Sirvan de ejemplo las tablas siguientes:

Cuartillos de liquido.	*Litros.*	*Kilógramos.*	*Libras.*
1	0,5042	1	2,173474
2	1,0083	2	4,346948
3	1,5125	3	6,520422
4	2,0166	4	8,693896
5	2,5208	5	10,867370
6	3,0250	6	13,040844
7	3,5291	7	15,214318
8	4,0333	8	17,387792
9	4,5374	9	19,561266

Las *equivalencias aproximadas* espresan realmente la equivalencia entre un número entero de unidades de un sistema y otro número entero de unidades del otro, como 119 *cuartillos* $=$ 60 *litros.* Estas relaciones no tienen tanta exactitud como las llamadas exactas y como las tablas, pero dan la suficiente en la generalidad de los casos y son fáciles de retener en la memoria.

Reducir 1 *estadal*, 1 *vara*, 2 *piés* y 8 *pulg.*ˢ á unidades del sistema decimal por medio de la equivalencia exacta 1 *vara* $= 0^m,835905$.

1 *vara*.................................. $0^m,835905$
1 *estadal*, 1 *vara*, 2 *piés*, 8 *pulg.*ˢ......... »

$$0^m,835905 \times \frac{212}{36} = 4^m,92255\ldots$$

1 estadal
2
2 brazas
2
4 varas
1 vara
5 varas
3
15 piés
2 piés
17 piés
12
34
17
204 pulgadas
8 pulgadas
212 pulgadas

3 piés
12
36 pulgadas

$\frac{212}{36}$ varas

$$\begin{array}{r} 0^m,835905 \\ 212 \\ \hline 1\ 671810 \\ 8\ 35905 \\ 167\ 1810 \\ \hline 177^m,211860 \\ 33\ 2 \\ 0\ 81 \\ 091 \\ 198 \\ 186 \\ 06 \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{|l} 36 \\ \hline 4^m,92255\ldots \end{array}$$

Reducir $2433^{Dl}.82$ á unidades de capacidad para áridos del antiguo sistema por medio de la relacion: $1^{Hl} = 1^{f.a},801769$ que tomamos como exacta por ser deducida de las que ha dado como tales la Comision de pesas y medidas.

1^{Hl}....... $1^{f.a},801769$
$2433^{Dl},82$........... »

$2433^{Dl},82 = 243^{Hl},382$; $1^{f.a},801769 \times 243,382 = 36$ *cah.*ˢ, 6 *fan.*ˢ, 6 *cel.*ˢ, $0^{cuart.s},87$

$$\begin{array}{r} f.^a \\ 1,801769 \\ 243,382 \\ \hline 3603538 \\ 14414152 \\ 5405307 \\ 5\ 405307 \\ 72\ 07076 \\ 360\ 3538 \\ \hline f.^s \\ 438,518142758 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 438 \text{ fanegas} & 12 \\ 078 & \overline{36 \text{ cahices}} \\ 06 \text{ fanegas} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0^{f.s},518142758 \\ 12 \\ \hline 1036285516 \\ 518142758 \\ \hline 6^{cels.},217713096 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0^{cels},217713096 \\ 4 \\ \hline 0^{cuart.s},870852384 \end{array}$$

Prescindimos de las unidades inferiores á las centésimas de cuartillo.

Convertir *1 moyo, 2 cánt.*ˢ, *3 azumb.*ˢ, *1 cuartillo* y *1 copa* á unidades del sistema métrico por medio de las tablas.

16 cántaras
2 cántaras
18 cántaras
8
144 azumbres
3 azumbres
147 azumbres
4
588 cuartillos
1 cuartillo
589 cuartillos
4
2356 copas
1 copa
2357 copas

$$1 \textit{ moyo, } 2 \textit{ cánt.}^s, 3 \textit{ azumb.}^s, 1 \textit{ cuartillo, } 1 \textit{ copa} = \frac{2357 \text{ cuart.}^s}{4} = \frac{2000 \text{ cuart.}^s + 300 \text{ cuart.}^s + 50 \text{ cuart.}^s + 7 \text{ cuart.}^s}{4} =$$

$$\frac{1008^l,3 + 151^l,25 + 25^l,208 + 3^l,5291}{4} = \frac{1188^l,2871}{4} = 297^l,0717.....$$

Reducir $4723^{Hg},85$ á unidades del antiguo sistema por medio de las tablas. $4723^{Hg},85 = 472^{Kg},385 = 400^{Kg} + 70^{Kg} + 2^{Kg} + 0^{Kg},3 + 0^{Kg},08 + 0^{Kg},005 = 869^{libs.},3896 + 152^{libs.},14318 + 4^{libs.},346948 + 0^{libs.},6520422 + 0^{libs.},17387792 + 0^{libs.},010867370 = 1026^{libs.},71651549 = 10$ *quint.*ˢ, *1 arroba, 1 lib.*ᵃ, *11 onzas, 7 adarm.*ˢ, $1^{tomin},28$

libs.
869 , 3896
152 , 14318
4 , 346948
0 , 6520422
0 , 17387792
0 , 01086737
libs.
1026 , 71651549

1026 libras | 25
026 | 41 arrobas | 4
01 libra | 01 arroba | 10 quintales

libs.
0, 71651549
16
4 29909294
7 1651549
onzas
11, 46424784

onzas
0, 46424784
16
2 78548704
4 6424784
adarmes
7, 42796544

adarmes
0, 42796544
3
tomin
1, 28389632

Prescindimos de las cifras inferiores á las centésimas de tomin.

Las equivalencias aproximadas de que puede hacerse uso, son las siguientes, que se han escogido procurando conciliar la mayor aproximacion con su mas fácil conservacion en la memoria.

Equivalencias aproximadas.

61 varas = 51 metros
8 celemines = 37 litros
119 cuartillos = 60 litros
16 @ de aceite = 201 litros
100 libras = 46kilógramos
1288 piés cuadrados = 100 metros cuadrados
14 fanegas superficiales = 9 hectáreas
12 varas cúbicas = 7 metros cúbicos
7 leguas = 39 kilómetros

De cada una de estas equivalencias puede deducirse el valor de una unidad del antiguo sistema en unidades del nuevo, y el de una unidad del nuevo en unidades del antiguo. Por ejemplo: de la equivalencia *61 varas = 51 metros* obtendremos, dividiendo sus dos miembros por el número *abstracto 61*, $1 \textit{ vara} = \frac{51}{61} \textit{ metros}$; y, dividiéndolos por el número *abstracto* 51 é invirtiendo el órden de miembros, $1 \textit{ metro} = \frac{61}{51} \textit{ varas}$. Teniendo el valor de una unidad del sistema en que se dá el número en unidades del otro sistema, la trasformacion á este se hace como cuando se emplean las relaciones exactas.

Reducir *5 cánt.*ˢ, *7 azumb.*ˢ, *2 cuart.*ˢ y 3 *copas* á unidades del sistema métrico por medio de las equivalencias aproximadas. *119 cuart.*ˢ = 60 *litros*, 1 *cuart.*ᵒ $= \frac{60}{119}$ *litros.*

$$\left.\begin{array}{l} 1 \textit{ cuartillo}\ldots\ldots\ldots \frac{60}{119} \text{litros} \\ \frac{763}{4} \textit{ cuartillos}\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \frac{60}{119} \text{ litros} \times \frac{763}{4} = \frac{45780}{476} \text{ litros} = 96^l,176......$$

5 cántaras
8
40 azumbres
7 azumbres
47 azumbres
4
188 cuartillos
2 cuartillos
190 cuartillos
4
760 copas
5 copas
765 copas

$\frac{765}{4}$ cuartillos

45780 litros | 476
2940 | 96¹,476...
0840
5640
5080
224

Convertir el número $543^{\text{Hl}},2327$ á unidades del antiguo sistema por medio de las equivalencias aproximadas.

8 *celem.*$^s = 37$ *litros*, 1 *litro* $= \frac{8}{37}$ *celem.*^{s} $\left.\begin{array}{l} 1 \textit{ litro} \ldots\ldots\ldots \frac{8}{37} \textit{ celem.}^s \\ 543^{\text{Hl}},2327 \ldots\ldots\ldots \text{»} \end{array}\right\}$ $543^{\text{Hl}},2327 = 54323^{\text{l}},27$; $\frac{8}{37}$ celem.$^s \times 54323,27 =$

$\frac{434586,16}{37}$ celem.$^s = \frac{43458616}{3700}$ celem.$^s = 81$ cahices, 6 fanegas, 9 celemines, $2\frac{266}{925}$ cuartillos

43458616 celemines | 3700
06458 | 11745 celemines, $2\frac{266}{925}$ cuartillos
27586
16861
20616
2116 celemines
4
8464 cuartillos
1064 cuartillos

11745 celemines | 12
094 | 978 fanegas | 12
105 | 018 | 81 cahices
09 celemines | 06 fanegas

Para reducir un número de *cuartos*, que no llegue á los 34 que tiene la peseta á *céntimos de peseta*, se multiplicará por 3 y, si el producto escede de 50, se disminuye en una unidad, cometiéndose un error por *esceso* que no llegará á *un céntimo de peseta.* En efecto, el cuarto vale menos de 3 céntimos de peseta, pues dándole este valor resultan para la peseta 102 céntimos en vez de 100 que tiene en realidad; pero, cuidando de rebajar una unidad, el error es de un céntimo en los 34 cuartos, de modo que será menor, si el número de cuartos, como hemos supuesto, no llega á 34. | Exactamente lo mismo y por iguales razones se hará la reduccion de un número de *maravedises* que no llegue á los 34 que componen un real á *céntimos de real.* | Cuando el número de *cuartos* ó de *maravedises* pase de 34, se hallará primero el número de *pesetas* ó de *reales* que contiene, y los cuartos ó maravedises que sobraren, se reducirán como se ha dicho antes á *céntimos* de *peseta* ó de *real.* | Para reducir un número menor que 100 de *céntimos* de *peseta* ó de *real* á *cuartos* ó *maravedises* respectivamente, se dividirá por 3.

POTENCIAS Y RAICES.

Qué se entiende por *potencia* de un número. | 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª,..... m$^{\text{ésima}}$ potencia. | $7\times7\times7\times7\times7=7^5$; $a\times a\times a\times\ldots\ldots^{m}=a^m$ | *Esponente.* | Elevacion á potencias. | *Cuadrado.* $8\times8=8^2$; $a\times a=a^2$ | *Cubo.* $5\times5\times5=5^3$; $a\times a\times a=a^3$ | *Base* de una potencia. | A todo número se puede poner por esponente la unidad sin que varíe su valor y puede suprimirse dicho esponente siempre que esté espreso, sin que tampoco varíe el valor del número. $8=8^1$, $a=a^1$ | *Raiz.* | 1.ª, 2.ª, 3.ª, 4.ª,..... m$^{\text{ésima}}$ raiz. | Estraccion de raices. | $\sqrt{}$ | *Indice.* | $\sqrt[7]{2187}$, $\sqrt[m]{a}$ | Raiz *cuadrada.* $\sqrt{196}$, $\sqrt{a}$ | Raiz *cúbica.* $\sqrt[3]{1728}$, $\sqrt[3]{a}$ | Cantidad *subradical.* La raiz primera de todo número es el mismo número. | Para elevar un producto á una potencia, se eleva á dicha potencia cada uno de los factores. $(a\times b\times c\times\ldots)^m=(a\times b\times c\times\ldots)\times(a\times b\times c\times\ldots)\times(a\times b\times c\times\ldots)\times\ldots^{m}=a\times b\times c\times\ldots\times a\times b\times c\times\ldots\times a\times b\times c\times\ldots\times\ldots^{m}=a\times a\times a\times\ldots^{m}\times b\times b\times b\times\ldots^{m}\times c\times c\times c\times\ldots^{m}\times\ldots=a^m\times b^m\times c^m\ldots$ | Para elevar una division indicada ó fraccion á una potencia, se elevan sus dos términos á esta potencia. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots^m = \frac{a \times a \times a \times \ldots^m}{b \times b \times b \times \ldots^m} = \frac{a^m}{b^m}$ | Para elevar una potencia á otra potencia se eleva la base de la primera potencia al producto de los dos esponentes. $(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots{}^n = (a \times a \times a \times \ldots{}^m) \times (a \times a \times a \times \ldots{}^m) \times (a \times a \times a \times \ldots{}^m) \times \ldots{}^n = a \times a \times a \times \ldots{}^m \times a \times a \times a \times \ldots{}^m \times a \times a \times a \times \ldots{}^m \times \ldots{}^n = a^{m \times n}$ | El órden de elevacion á potencias no altera el resultado. $\left.\begin{matrix}(a^m)^n = a^{m \times n} \\ (a^n)^m = a^{n \times m}\end{matrix}\right\} a^{m \times n} = a^{n \times m}$, $(a^m)^n = (a^n)^m$ | $\left.\begin{matrix}\left(\left((a^m)^n\right)^p\right)^{\cdots} = a^{m \times n \times p \times \cdots} \\ \left(\left((a^p)^m\right)^n\right)^{\cdots} = a^{p \times m \times n \times \cdots}\end{matrix}\right\} a^{m \times n \times p \times \cdots} = a^{p \times m \times n \times \cdots}$; $\left(\left((a^m)^n\right)^p\right)^{\cdots} = \left(\left((a^p)^m\right)^n\right)^{\cdots}$ | Para estraer la raiz de un producto, se estrae la de cada uno de sus factores. $\sqrt[m]{a \times b \times c \times \ldots} = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c} \times \ldots$; $\left(\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} \times \sqrt[m]{c} \times \ldots\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m \times \left(\sqrt[m]{b}\right)^m \times \left(\sqrt[m]{c}\right)^m \times \ldots = a \times b \times c \times \ldots$ | Observacion relativa al caso en que las raices de los factores no sean exactas. | Para estraer la raiz de una division indicada ó fraccion, se estrae la de sus dos términos. $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$; $\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m} = \frac{a}{b}$ | Observacion relativa al caso en que las raices de los términos no sean exactas. | Para estraer una raiz de otra raiz se estrae la raiz, cuyo índice es el producto de los dos índices, de la cantidad subradical. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = h$, $h^m = \sqrt[n]{a}$, $h^{m \times n} = a$, $h = \sqrt[m.n]{a}$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$ | El órden de extraccion de raices no altera el resultado. $\left.\begin{matrix}\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a} \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}\end{matrix}\right\} \sqrt[m.n]{a} = \sqrt[n.m]{a}$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ | $\left.\begin{matrix}\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[m.n.p\ldots]{a} \\ \sqrt[p]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}} = \sqrt[p.m.n\ldots]{a}\end{matrix}\right\} \sqrt[m.n.p\ldots]{a} = \sqrt[p.m.n\ldots]{a}$ | $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}} = \sqrt[p]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}$ | Para elevar una raiz á una potencia se eleva á esta potencia la cantidad subradical. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{a} \times \ldots{}^n = \sqrt[m]{a \times a \times a \times \ldots{}^n} = \sqrt[m]{a^n}$ | Para estraer la raiz de una potencia basta elevar la base de la potencia al cociente de dividir su esponente por el índice del radical, siempre que esta division sea exacta. $\sqrt[m]{a^n}$; $n : m = h$, h entero; $n = m \times h$; $\sqrt[m]{a^n} = a^h$; $\left(a^h\right)^m = a^{h \times m} = a^n$; $\sqrt[m]{a^n} = a^{n:m}$

RAIZ CUADRADA DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

1....2....3....4....5....6....7....8....9....10....11....12..... | No todos los números enteros tienen raiz exacta entera. | $\sqrt{40}\ {>6,\ 6^2=36<40; \atop <7,\ 7^2=49>40;}$ $\sqrt{40}=6+\alpha,\ \alpha<1$. Si α se pudiese
1....4....9...16...25...36...49...64...81...100...121...144.....

espresar en forma de fraccion, $6+\alpha=\frac{a}{b},\ \left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}$ primos entre sí. $\sqrt{40}=\frac{a}{b},\ \left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}=40$; $\frac{a^2}{b^2}$ seria un número entero, lo que no es posible porque $\left.\begin{matrix}a\\b^2\end{matrix}\right\}$ primos entre sí. | La raiz cuadrada de 40 no se puede espresar exactamente en forma fraccionaria. | *Comun medida* de dos cantidades. *Cantidad inconmensurable.* | La raiz de 40 es incomensurable. $\dfrac{\sqrt{40}\ldots\ldots\ldots 1}{1 \text{ ó } \frac{1}{n}}$ | $\sqrt{A}\ {>m\ ,\quad m^2<A; \atop <m+1,\ (m+1)^2>A;}$ $\sqrt{A}=m+\alpha,\ \alpha<1$. Si α se pudiese espresar en forma fraccionaria, $m+\alpha=\frac{a}{b},\ \left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}$ primos entre sí. $\sqrt{A}=\frac{a}{b},\ \left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}=A$; $\frac{a^2}{b^2}$ seria un número entero, lo que no es posible porque $\left.\begin{matrix}a^2\\b^2\end{matrix}\right\}$ primos entre sí. | La raiz cuadrada de todo número que no la tiene exacta entera no se puede espresar tampoco exactamente en forma fraccionaria y es incomensurable. $\dfrac{\sqrt{A}\ldots\ldots\ldots 1}{1 \text{ ó } \frac{1}{n}}$ | *Raiz cuadrada entera.* | *Resíduo.* | Todo número es igual al cuadrado de su raiz cuadrada entera mas el resíduo. | La raiz cuadrada entera de 40 es 6 y el resíduo 4. | $40=6^2+4$. | La raiz cuadrada entera del número A anteriormente considerado seria m y, representando el resíduo por r, se tendria $A=m^2+r$. | $\sqrt{100}=10$ La raiz cuadrada entera de todo número <100 será menor que 10 y tendrá solo cifra de unidades. La raiz cuadrada entera de todo número >100 será mayor que 10 y tendrá cifra ó cifras de decenas y cifra de unidades. |

Estraer la raiz cuadrada de un número menor que 100

Estraer la raiz cuadrada de un número mayor que 100 $\left\{\begin{matrix}\text{que no tenga mas de 4 cifras}\\\text{que tenga mas de 4 cifras}\end{matrix}\right.$ | 1.er caso. $\sqrt{49}=7$; $\sqrt{71}$, 8 es la raiz entera y el resíduo $71-8^2=7$; $71=8^2+7$ | $(a+b)^2=(a+b)\times(a+b)=(a+b)\times a+(a+b)\times b=a^2+a\times b+a\times b+b^2$; $a\times b+a\times b=a\times b\times 2=2\times a\times b=2ab$; $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. | La diferencia entre los cuadrados de dos números que se diferencian en una unidad es igual al doble del menor mas una unidad. $(a+1)^2=a^2+2a+1$; $(a+1)^2-a^2=2a+1$ | En la estraccion de la raiz cuadrada, el resíduo es siempre menor que el doble de la raiz entera mas una unidad. $\sqrt{A},\ a,\ r$; $A=a^2+r$; $(a+1)^2>A$, $(a+1)^2>a^2+r$; $r<(a+1)^2-a^2$; $r<2a+1$ | Si de un número se resta el cuadrado de otro y la diferencia es igual al doble de este otro mas una unidad, falta al segundo número una unidad para ser la raiz exacta del primero. A, a; $A-a^2=r$; $r=2a+1$; $A=a^2+r=a^2+2a+1=(a+1)^2$; $\sqrt{A}=a+1$ | Si de un número se resta el cuadrado de otro y la diferencia es mayor que el doble de este otro mas una unidad, falta á lo menos una unidad al segundo número para ser la raiz entera ó la exacta del primero. A, a; $A-a^2=r$; $r>2a+1$; $A=a^2+r$; $A>a^2+2a+1=(a+1)^2$; $A>(a+1)^2$; $\sqrt{A}>a+1$ |

2.º caso. $\sqrt{1426}$; a, b, r; $1426=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2+r$; a^2, $\sqrt{a^2}=a$;
$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{14}\not< a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l}\sqrt{1426}\ldots a^{\text{decs.}}+9^{\text{unids.}} \\ \sqrt{1400}\ldots(a+1)^{\text{decs.}}=a^{\text{decs.}}+10^{\text{unids.}}\end{array}\right\}\sqrt{14}\not> a\end{array}\right\}\sqrt{14}\ldots a$$

$$\begin{array}{r|l} 14{,}26 & 37 \\ \hline 9 & 67\ldots\ldots\ldots 2a+b \\ \hline 52{,}6 & 7\ldots\ldots\ldots\ldots b \\ 46\,9 & \\ \hline 05\,7 & \end{array}$$

$526=2ab+b^2+r$; $2ab$. $\dfrac{2ab}{2a}=b$; $\dfrac{52}{2a}\not< b$; $52=2ab+h$, $h\lesseqgtr 2a$; h puede ser $\gtreqless 2a$; $r=57$; $1426=37^2+57$.

3.er caso. $\sqrt{12161742}$; a, b, r; $12161742=(a+b)^2+r=a^2+2ab+b^2+r$; a^2, $\sqrt{a^2}=a$;
$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{121617}\not< a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l}\sqrt{12161742}\ldots a^{\text{decs.}}+9^{\text{unids}} \\ \sqrt{12161700}\ldots(a+1)^{\text{decs.}}=a^{\text{decs.}}+10^{\text{unids.}}\end{array}\right\}\sqrt{121617}\not> a\end{array}\right\}\sqrt{121617}\ldots a$$

$\sqrt{121617}$; a', b', r'; $121617=(a'+b')^2+r'=a'^2+2a'b'+b'^2+r'$; a'^2, $\sqrt{a'^2}=a'$;
$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{1216}\not< a'\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l}\sqrt{121617}\ldots a'^{\text{decs.}}+9^{\text{unids.}} \\ \sqrt{121600}\ldots(a'+1)^{\text{decs.}}=a'^{\text{decs.}}+10^{\text{unids.}}\end{array}\right\}\sqrt{1216}\not> a'\end{array}\right\}\sqrt{1216}\ldots a'$$

$\sqrt{1216}$; a'', b'', r''; $1216=(a''+b'')^2+r''=a''^2+2a''b''+b''^2+r''$; a''^2, $\sqrt{a''^2}=a''$;
$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{12}\not< a''\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l}\sqrt{1216}\ldots a''^{\text{decs.}}+9^{\text{unids.}} \\ \sqrt{1200}\ldots(a''+1)^{\text{decs.}}=a''^{\text{decs.}}+10^{\text{unids.}}\end{array}\right\}\sqrt{12}\not> a''\end{array}\right\}\sqrt{12}\ldots a''$$

$$\begin{array}{r|l} 12{,}16{,}17{,}42 & 3487 \\ \hline 9 & 64\ldots 2a''+b'' \\ \hline 31{,}6 & 4\ldots\ldots b'' \\ 25\,6 & 688\;\; \overline{2a''+2b''}=2(a''+b'');\ 2a'+b' \\ \hline 060\,1{,}7 & 8\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b' \\ 550\,4 & 6967\;\; \overline{2a'+2b'}=2(a'+b');\ 2a+b \\ \hline 051\,34{,}2 & 7\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b \\ 4\,8\,7\,6\,9 & \\ \hline 0\,2\,5\,7\,3 & \end{array}$$

$316=2a''b''+b''^2+r''$; $2a''b''$, $\dfrac{2a''b''}{2a''}=b''$; $\dfrac{31}{2a''}\not< b''$; $31=2a''b''+h''$; $h''\lesseqgtr 2a''$; h'' puede ser $\gtreqless 2a''$

$6017=2a'b'+b'^2+r'$; $2a'b'$, $\dfrac{2a'b'}{2a'}=b'$; $\dfrac{601}{2a'}\not< b'$; $601=2a'b'+h'$; $h'\gtreqless 2a'$; h' puede ser $\gtreqless 2a'$

$51342=2ab+b^2+r$; $2ab$, $\dfrac{2ab}{2a}=b$; $\dfrac{5134}{2a}\not< b$; $5134=2ab+h$; $h\lesseqgtr 2a$; h puede ser $\gtreqless 2a$

$2573=r$.

$12161742=3487^2+2573$.

Restas y multiplicaciones á la vez

$$\begin{array}{l|l} 12{,}16{,}17{,}42 & 3487 \\ \;\;31{,}6 & \overline{64} \\ \;\;\;\;601{,}7 & \;\;4 \\ \;\;\;\;\;\;5134{,}2 & \overline{688} \\ \;\;\;\;\;\;\;\;2573 & \;\;\;8 \\ & \overline{6967} \\ & \;\;\;\;7 \end{array}$$

Esplicacion sobre el modo de hacer el tanteo de las cifras empezando las multiplicaciones y las restas por la izquierda. | Cuando las decenas del resto forman un número menor que el duplo de las de la raiz que se está hallando, se pondrá la cifra 0 á la derecha de este duplo y en la raiz, se bajará el período siguiente del número propuesto y, separando en él la cifra de unidades, se continuará la operacion dividiendo el número que quede á la izquierda por el duplo de la nueva raiz hallada, formado al colocar un cero á la derecha del duplo de la hallada anteriormente.

7 9,3 3,5 1,9 1 6 4 1 5 3,3 0 1 2 5,1 9,1 0 0 5 4 2	8907 169 9 17807 7	Se puede comprobar cada una de las raices halladas sucesivamente viendo si cada resto es menor, como lo debe ser, que el doble de la raiz hallada mas una unidad. En el ejemplo penúltimo se observa que: $3 < 2\times3+1 = 7$, $60 < 2\times34+1 = 69$, $513 < 2\times348+1 = 697$, $2573 < 2\times3487+1 = 6975$.

$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 = a^2+a+\frac{1}{4}$; $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 - a^2 = a+\frac{1}{4}$ | $\sqrt{A}$, a, r; $A = a^2+r$;
$r<a$, $r<a+\frac{1}{4}$; $A<a^2+a+\frac{1}{4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$; $\sqrt{A}<a+\frac{1}{2}$; a...error por *defecto* $<\frac{1}{2}$. No se fuerza la unidad
$r>a$, $r>a+\frac{1}{4}$; $A>a^2+a+\frac{1}{4}=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$; $\sqrt{A}>a+\frac{1}{2}$; $a+1$..error por *esceso* $<\frac{1}{2}$. Se fuerza la unidad

$\sqrt{121347}$; resulta por raiz cuadrada entera 348 y de resíduo $243 < 348$ por lo que 348 será la raiz con un error por defecto menor que $\frac{1}{2}$

$\sqrt{80562}$; resulta por raiz cuadrada entera 283 y de resíduo $473 > 283$ por lo que 284 será la raiz con un error por esceso menor que $\frac{1}{2}$

RAIZ CÚBICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS.

1....2....3....4.....5......6.......7.......8.......9.......10.......11.......12..........	No todos los números enteros	$\sqrt[3]{183} > 5$, $5^3 = 125 < 183$;
1....8...27...64...125...216...343...512...729...1000...1331...1728..........	tienen raiz exacta entera.	$\sqrt[3]{183} < 6$, $6^3 = 216 > 183$; $\sqrt[3]{183} = 5+\alpha$, $\alpha<1$;

Si α se pudiese espresar en forma de fraccion, $5+\alpha = \frac{a}{b}$, $\left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}$ primos entre sí. $\sqrt[3]{183} = \frac{a}{b}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3} = 183$; $\frac{a^3}{b^3}$ seria un número entero, lo que no es posible porque $\left.\begin{matrix}a^3\\b^3\end{matrix}\right\}$ primos entre sí. | La raiz cúbica 183 no se puede espresar exactamente en forma fraccionaria. | Dicha raiz es incómensurable

$\sqrt[3]{183}$........1 / 1 ó $\frac{1}{n}$ | $\sqrt[3]{A}$ $>m$, $m^3<A$; $<m+1$, $(m+1)^3>A$; $\sqrt[3]{A}=m+\alpha$, $\alpha<1$. Si α se pudiese espresar en forma fraccionaria, $m+\alpha=\frac{a}{b}$, $\left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}$ primos entre sí.

$\sqrt[3]{A}=\frac{a}{b}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3} = A$; $\frac{a^3}{b^3}$ seria un número entero, lo que no es posible porque $\left.\begin{matrix}a^3\\b^3\end{matrix}\right\}$ primos entre sí. La raiz cúbica de todo número entero que no la tiene entera exacta, no se puede espresar tampoco exactamente en forma fraccionaria.

$\sqrt[3]{A}$........1 / 1 ó $\frac{1}{n}$ | *Raiz cúbica entera.* | *Resíduo.* | Todo número es igual al cubo de su raiz cúbica entera mas el resíduo. | La raiz cúbica entera de 183 es 5 y el resíduo 58 | $183 = 5^3 + 58$ | La raiz cúbica entera del número A anteriormente considerado seria m y llamando r al resíduo se tendria: $A = m^3 + r$ |

$\sqrt[3]{1000} = 10$ La raiz cúbica de todo número < 1000 será menor que 10 y tendrá solo cifra de unidades.
La raiz cúbica de todo número > 1000 será mayor que 10 y tendrá cifra ó cifras de decenas y cifra de unidades. |

Estraer la raiz cúbica de un número < 1000

Estraer la raiz cúbica de un número > 1000 $\begin{cases} \text{que no tenga mas de 6 cifras} \\ \text{que tenga mas de 6 cifras} \end{cases}$ | 1.er caso. $\sqrt[3]{216} = 6$. $\sqrt[3]{627}$, 8 es la raiz cúbica entera y el resíduo $627 - 8^3 = 115$; $627 = 8^3 + 115$ | $(a+b)^3 = (a+b)\times(a+b)\times(a+b) = (a+b)^2\times(a+b) = (a^2+2ab+b^2)\times(a+b) = (a^2+2ab+b^2)\times a + (a^2+2ab+b^2)\times b = a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ | La diferencia entre los cubos de dos números que se diferencian en una unidad es igual al triplo del cuadrado del menor mas el triplo del mismo número mas una unidad. $(a+1)^3 = a^3+3a^2+3a+1$; $(a+1)^3 - a^3 = 3a^2+3a+1$ | En la estraccion de la raiz cúbica, el resíduo es siempre menor que el triplo del cuadrado de la raiz entera mas el triplo de la misma raiz mas una unidad. $\sqrt[3]{A}, a, r$; $A = a^3 + r$; $(a+1)^3 > A$; $(a+1)^3 > a^3 + r$; $r < (a+1)^3 - a^3$; $r < 3a^2 + 3a + 1$ | Si de un número se resta el cubo de otro y la diferencia es igual al triplo del cuadrado de este segundo número mas el triplo del mismo mas una unidad, falta al segundo número una unidad para ser la raiz cúbica exacta del primero. A, a; $A - a^3 = r$; $r = 3a^2+3a+1$; $A = a^3 + r = a^3+3a^2+3a+1 = (a+1)^3$; $\sqrt[3]{A} = a+1$ | Si de un número se resta el cubo de otro y la diferencia es mayor que el triplo del cuadrado de este segundo número mas el triplo del mismo mas una unidad, falta á lo menos una unidad al segundo número para ser la raiz entera ó la exacta del primero. A, a; $A - a^3 = r$; $r > 3a^2+3a+1$; $A = a^3 + r$; $A > a^3+3a^2+3a+1 = (a+1)^3$; $A > (a+1)^3$; $\sqrt[3]{A} > a+1$ |

2.º caso. $\sqrt[3]{109716}$; a, b, r; $109716 = (a+b)^3 + r = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + r$; a^3, $\sqrt[3]{a^3} = a$; $\left.\begin{matrix} \sqrt[3]{109} \nless a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sqrt[3]{109716}\ldots a^{\text{decs.}} + 9^{\text{unids.}} \\ \sqrt[3]{109000}\ldots (a+1)^{\text{decs.}} = a^{\text{decs.}} + 10^{\text{unids.}} \end{matrix}\right\} \sqrt[3]{109} \ngtr a \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \sqrt[3]{109}\ldots a$

$$\begin{array}{r|l|l}
109{,}716 & 47 & \\
64 & 48\ldots\ldots 3a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots 127\ldots 3a+b & \\
\hline
457{,}16 & 889..3ab+b^2 \qquad 7\ldots\ldots b & \\
39823 & 5689 \quad 3a^2+3ab+b^2 & \\
\hline
05893 & &
\end{array}$$

$45716 = 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + r$; $3a^2b$, $\frac{3a^2b}{3a^2} = b$; $\frac{457}{3a^2} \nless b$; $457 = 3a^2b + h$; $h \lesseqgtr 3a^2$; h puede ser $\gtreqless 3a^2$; $5893 = r$;

$109716 = 47^3 + 5893$.

3.er caso. $\sqrt[3]{83912694926}, a, b, r$; $83912694926 = (a+b)^3 + r = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + r$; a^3, $\sqrt[3]{a^3} = a$; $\left.\begin{matrix} \sqrt[3]{83912694} \nless a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sqrt[3]{83912694926}\ldots a^{\text{decs.}} + 9^{\text{unids.}} \\ \sqrt[3]{83912694000}\ldots (a+1)^{\text{decs.}} = a^{\text{decs.}} + 10^{\text{unids.}} \end{matrix}\right\} \sqrt[3]{83912694} \ngtr a \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \sqrt[3]{83912694}\ldots a$

$$\sqrt[3]{8391269 4},\ a',\ b',\ r';\ 83912694=(a'+b')^3+r'=a'^3+3a'^2b'+3a'b'^2+b'^3+r';\ a'^3,\ \sqrt[3]{a'^3}=a';\ \left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{83912}\nless a'.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{83912694}\ldots a'^{\text{decs.}}+9^{\text{unids.}} \\ \sqrt[3]{83912000}\ldots(a'+1)^{\text{decs.}}=a'^{\text{decs.}}+10^{\text{unids.}}\end{array}\right\}\sqrt[3]{83912}\ngtr a'\end{array}\right\}\sqrt[3]{83912}\ldots a'$$

$$\sqrt[3]{83912},\ a'',\ b'',\ r'';\ 83912=(a''+b'')^3+r''=a''^3+3a''^2b''+3a''b''^2+b''^3+r'';\ a''^3,\ \sqrt[3]{a''^3}=a'';\ \left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{83}\nless a''.\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{83912}\ldots a''^{\text{decs.}}+9^{\text{unids.}} \\ \sqrt[3]{83000}\ldots(a''+1)^{\text{decs.}}=a''^{\text{decs.}}+10^{\text{unids.}}\end{array}\right\}\sqrt[3]{83}\ngtr a''\end{array}\right\}\sqrt[3]{83}\ldots a''$$

$$\begin{array}{r|l|l}
8\,3{,}9\,1\,2{,}6\,9\,4{,}9\,2\,6 & 4378 & 123\ldots\ldots 3a''+b'' \\
6\,4 & 48\ldots\ldots 3a''^2 & 3\ldots\ldots\ldots\ldots b'' \\
\hline
1\,9\,9{,}1\,2 & 369\ldots 3a''b''+b''^2 & 3\ldots\ldots\ldots\ldots b'' \\
1\,5\,5\,0\,7 & 5169\ldots 3a''^2+3a''b''+b''^2 & 1297\quad 3a''+3b''=3(a''+b'');\ 3a'+b' \\
\hline
0\,4\,4\,0\,5\,6{,}9\,4 & 9\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b''^2 & 7\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b' \\
3\,9\,4\,6\,4\,5\,3 & 5547\ldots 3a''^2+6a''b''+3b''^2=3(a''^2+2a''b''+b''^2)=3(a''+b'')^2=3a'^2 & 7\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b' \\
\hline
0\,4\,5\,9\,2\,4\,1\,9{,}2\,6 & 9079\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3a'b'+b'^2 & 13118\ldots\ldots\ldots\ldots 3a'+3b'=3(a'+b');\ 3a+b \\
4\,5\,9\,1\,6\,5\,1\,5\,2 & 563779\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3a'^2+3a'b'+b'^2 & 8\qquad b \\
\hline
0\,0\,0\,0\,7\,6\,7\,7\,4 & 49\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b'^2 & \\
 & 572907\ldots 3a'^2+6a'b'+3b'^2=3(a'^2+2a'b'+b'^2)=3(a'+b')^2=3a^2 & \\
 & 104944\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3ab+b^2 & \\
 & 57395644\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3a^2+3ab+b^2 &
\end{array}$$

$$19912=3a''^2b''+3a''b''^2+b''^3+r'';\ 3a''^2b'',\ \frac{3a''^2b''}{3a''^2}=b'';\ \frac{199}{3a''^2}\nless b'';\ 199=3a''^2b''+h'';\ h''\lesseqgtr 3a''^2;\ h''\text{ puede ser }\overline{\gtrless}\,3a''^2$$

$$4405694=3a'^2b'+3a'b'^2+b'^3+r';\ 3a'^2b',\ \frac{3a'^2b'}{3a'^2}=b';\ \frac{44056}{3a'^2}\nless b';\ \ 44056=3a'^2b'+h';\ \ h'\lesseqgtr 3a'^2;\ h'\text{ puede ser }\overline{\gtrless}\,3a'^2$$

$$459241926=3a^2b+3ab^2+b^3+r;\ 3a^2b,\ \frac{3a^2b}{3a^2}=b;\ \frac{4592419}{3a^2}\nless b;\ \ 4592419=3a^2b+h;\ \ h\lesseqgtr 3a^2;\ h\text{ puede ser }\overline{\gtrless}\,3a^2$$

$$76774=r$$

$$83912694926=4378^3+76774$$

Pueden hacerse las restas y multiplicaciones á la vez. | Esplicacion sobre el modo de hacer el tanteo de las cifras empezando las multiplicaciones y restas por la izquierda. | Cuando las centenas del resto forman un número menor que el triplo del cuadrado de las decenas de la raiz que se está hallando, se pondrá la cifra 0 en esta y á la derecha del triplo de las decenas, y dos ceros á la derecha del triplo del cuadrado de las decenas, se bajará el período siguiente y, separando á su derecha dos cifras, se dividirá lo que queda á la izquierda por el triplo del cuadrado de la nueva raiz hallada que se ha formado al añadir los dos ceros á la derecha del triplo del cuadrado de la hallada anteriormente.

```
8 3,9 1 2,6 9 4,9 2 6 | 4378
6 4                   | 48        123
1 9 9,1 2             |  369        3
  4 4 0 5 6,9 4       | 5169        3
    4 5 9 2 4 1 9,2 6 |    9     1297
      0 0 0 7 6 7 7 4 | 5547        7
                      |  9079       7
                      | 563779  13118
                      |     49      8
                      | 572907
                      |  104944
                      | 57395644
```

```
2 7 5,5 1 3,2 1 0,4 2 6 | 6507
2 1 6                   | 108        185
0 5 9 5,1 3             |   925        5
  0 0 8 8 8 2,1 0 4,2 6 | 11725        5
      0 0 0 0 0 4 5 8 3 |    25    19507
                        | 1267500      7
                        |   136549
                        | 126886549
```

Se puede comprobar cada una de las raices que se van hallando sucesivamente viendo si cada resto es menor que el triplo del cuadrado de la raiz hallada mas el triplo de la misma raiz mas una unidad. En el ejemplo que ha servido para la esplicacion del 3.^{er} caso se ve que $19 < 3.4^2+3.4+1=61$, $4405 < 3.43^2+3.43+1=5677$, $459241 < 3.437^2+3.437+1=574219$, $76774 < 3.4378^2+3.4378+1=57513787$

APROXIMACION DE LAS RAICES CUADRADA Y CÚBICA DE LOS NÚMEROS ENTEROS Y ESTRACCION EXACTA Ó APROXIMADA DE LAS MISMAS CUANDO LOS NÚMEROS SON DECIMALES Ó FRACCIONES ORDINARIAS.

Aproximar el valor de una raiz inexacta *á menos* de un número dado, es hallar otro número que difiera del verdadero valor de la raiz en una cantidad menor que el primero, cometiéndose por lo tanto, al tomar este segundo número por valor verdadero de la raiz, un error *por defecto ó por esceso*, menor que el primer número. | *Estraer la raiz cuadrada ó cúbica de un número entero á menos de cualquier unidad fraccionaria.* $\sqrt{A}$ á menos de $\frac{1}{n}$.

$\sqrt{A}=\sqrt{\frac{A\times n^2}{n^2}}=\frac{\sqrt{A\times n^2}}{n}$; $\sqrt{A\times n^2}\ {>m \atop <m+1}$; $\sqrt{A}\ {> \frac{m}{n} \atop < \frac{m+1}{n}}$ si se toma $\frac{m}{n}$ como valor de la raiz se comete un error *por defecto*. si se toma $\frac{m+1}{n}$ como valor de la raiz se comete un error *por esceso*. En ambos casos el error es menor que $\frac{1}{n}$ | $\sqrt{39}$ á menos de $\frac{1}{5}$. $\sqrt{39}=\sqrt{\frac{39\times 5^2}{5^2}}=\frac{\sqrt{39\times 25}}{\sqrt{5^2}}=\frac{\sqrt{975}}{5}$; $\sqrt{975}\ {>31 \atop <32}$; $\sqrt{39}\ {> \frac{31}{5}\text{...defecto} \atop < \frac{32}{5}\text{... esceso}}$ $\frac{1}{5}$ | $\sqrt[3]{A}$ á menos de $\frac{1}{n}$. $\sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{\frac{A\times n^3}{n^3}}=\frac{\sqrt[3]{A\times n^3}}{n}$; $\sqrt[3]{A\times n^3}\ {>m \atop <m+1}$; $\sqrt[3]{A}\ {> \frac{m}{n}\text{... defecto} \atop < \frac{m+1}{n}\text{...esceso}}$ $\frac{1}{n}$ | $\sqrt[3]{23}$ á menos de $\frac{1}{7}$. $\sqrt[3]{23}=\sqrt[3]{\frac{23\times 7^3}{7^3}}=\frac{\sqrt[3]{7889}}{7}$; $\sqrt[3]{7889}\ {>19 \atop <20}$; $\sqrt[3]{23}\ {> \frac{19}{7}\text{...defecto} \atop < \frac{20}{7}\text{...esceso}}$ $\frac{1}{7}$ | *Regla práctica.* |

Estraer la raiz cuadrada ó cúbica de un número entero á menos de una unidad decimal. $\sqrt{A}$ á menos de $0{,}00\ldots{}^{n}001 = \frac{1}{100\ldots^{n}}$. $\sqrt{A} = \sqrt{\frac{A\times(100\ldots^{n})^2}{(100\ldots^{n})^2}} =$

$$\frac{\sqrt{A\times 100\ldots^{2n}}}{100\ldots^{n}} = \frac{\sqrt{A00\ldots^{2n}}}{100\ldots^{n}};\ \sqrt{A00\ldots^{2n}} \begin{matrix} > m \\ < m+1 \end{matrix};\ \sqrt{A} \begin{matrix} > \frac{m}{100\ldots^{n}}\ldots\text{defecto} \\ < \frac{m+1}{100\ldots^{n}}\ldots\text{esceso} \end{matrix}\quad \frac{1}{100\ldots^{n}} = 0{,}00\ldots{}^{n}001$$

| $\sqrt{19}$ á menos de $0{,}01 = \frac{1}{100}$. $\sqrt{19} = \sqrt{\frac{19\times 100^2}{100^2}} =$

$$\frac{\sqrt{19\times 10000}}{100} = \frac{\sqrt{190000}}{100};\ \sqrt{190000} \begin{matrix} > 435 \\ < 436 \end{matrix};\ \sqrt{19} \begin{matrix} > \frac{435}{100} \\ < \frac{436}{100} \end{matrix};\ \sqrt{19} \begin{matrix} > 4{,}35\ldots\text{defecto} \\ < 4{,}36\ldots\text{esceso} \end{matrix}\quad 0{,}01$$

| $\sqrt[3]{A}$ á menos de $0{,}00\ldots{}^{n}001 = \frac{1}{100\ldots^{n}}$. $\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{\frac{A\times(100\ldots^{n})^3}{(100\ldots^{n})^3}} =$

$$\frac{\sqrt[3]{A\times 100\ldots^{3n}}}{100\ldots^{n}} = \frac{\sqrt[3]{A00\ldots^{3n}}}{100\ldots^{n}};\ \sqrt[3]{A00\ldots^{3n}} \begin{matrix} > m \\ < m+1 \end{matrix};\ \sqrt[3]{A} \begin{matrix} > \frac{m}{100\ldots^{n}}\ldots\text{defecto} \\ < \frac{m+1}{100\ldots^{n}}\ldots\text{esceso} \end{matrix}\quad \frac{1}{100\ldots^{n}} = 0{,}00\ldots{}^{n}001$$

| $\sqrt[3]{32}$ á menos de $0{,}01 = \frac{1}{100}$. $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{\frac{32\times 100^3}{100^3}} =$

$$\frac{\sqrt[3]{32\times 1000000}}{100} = \frac{\sqrt[3]{32000000}}{100};\ \sqrt[3]{32000000} \begin{matrix} > 317 \\ < 318 \end{matrix};\ \sqrt[3]{32} \begin{matrix} > \frac{317}{100} \\ < \frac{318}{100} \end{matrix};\ \sqrt[3]{32} \begin{matrix} > 3{,}17\ldots\text{defecto} \\ < 3{,}18\ldots\text{esceso} \end{matrix}\quad 0{,}01$$

| *Regla práctica.* | Despues de haber hallado la raiz entera, cuadrada ó cúbica de un número, se puede obtener el valor de la raiz de dicho número aproximado á menos de cualquier unidad decimal, añadiendo á la derecha del resíduo dos ó tres ceros, segun la raiz sea cuadrada ó cúbica, como si se bajasen de la derecha del número propuesto, determinando por la marcha general otra cifra para la raiz, que se coloca, separada por una coma, á la derecha de las halladas anteriormente y repitiendo la agregacion de dos ó tres ceros á la derecha del último resto hallado para determinar otras cifras de la raiz, que se van colocando á la derecha de las anteriores, hasta obtener tantas cuantas se quiera. La aproximacion será *por defecto* á menos de una unidad decimal del último órden; y si se quiere que sea *por esceso* bastará forzar la unidad en la última cifra. Esta marcha es análoga á la seguida en la division cuando se agrega un cero á la derecha de cada resíduo para continuarla hasta llegar al resíduo cero, si es posible, ó hasta hallar el número de cifras que se desee; pero en la estraccion de raices nunca se llegará al resto cero, pues si se llegase á él, quedaria espresada exactamente la raiz de un número que no la tiene exacta entera, lo que es imposible. Resuélvanse ejemplos. | *Estraer la raiz cuadrada ó cúbica de un número decimal.* Si el número de cifras decimales no es par, en el primer caso, ó múltiplo de 3, en el segundo, se agrega en aquel un cero á la derecha y en este uno ó dos, para que sea lo uno ó lo otro respectivamente.

$$\sqrt{A,abc\ldots} = \sqrt{A,abc\ldots^{2n}} = \sqrt{\frac{A,abc\ldots^{2n}\times 100\ldots^{2n}}{100\ldots^{2n}}} = \frac{\sqrt{Aabc\ldots}}{\sqrt{100\ldots^{n}\times 100\ldots^{n}}} = \frac{\sqrt{Aabc\ldots}}{\sqrt{(100\ldots^{n})^2}} = \frac{\sqrt{Aabc\ldots}}{100\ldots^{n}};\ \sqrt{Aabc\ldots} = m;\ \sqrt{A,abc\ldots} = \frac{m}{100\ldots^{n}}$$

|

$\sqrt{5,6169}=\sqrt{\dfrac{5,6169\times 10000}{100\times 100}}=\dfrac{\sqrt{56169}}{\sqrt{100^2}}=\dfrac{\sqrt{56169}}{100}$; $\sqrt{56169}=237$; $\sqrt{5,6169}=\dfrac{237}{100}=2,37$ | $\sqrt{A,abc\ldots}=\sqrt{A,abc\ldots^{2n}}=\sqrt{\dfrac{A,abc\ldots^{2n}\times 100\ldots^{2n}}{100\ldots^{2n}}}=$

$\dfrac{\sqrt{A\,abc\ldots}}{\sqrt{100\ldots^{n}\times 100\ldots^{n}}}=\dfrac{\sqrt{A\,abc\ldots}}{\sqrt{(100\ldots^{n})^2}}=\dfrac{\sqrt{A\,abc\ldots}}{100\ldots^{n}}$; $\sqrt{A\,abc\ldots}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$; $\sqrt{A,abc\ldots}\begin{matrix}>\dfrac{m}{100\ldots^{n}}\ldots\ldots\text{defecto}\\<\dfrac{m+1}{100\ldots^{n}}\ldots\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ $\dfrac{1}{100\ldots^{n}}=0,00\ldots\ldots{}^{n}001$ | $\sqrt{29,735}=\sqrt{29,7350}=$

$\sqrt{\dfrac{29,7350\times 10000}{100\times 100}}=\dfrac{\sqrt{297350}}{100}$; $\sqrt{297350}\begin{matrix}>545\\<546\end{matrix}$; $\sqrt{29,735}\begin{matrix}>\dfrac{545}{100}\\<\dfrac{546}{100}\end{matrix}$; $\sqrt{29,735}\begin{matrix}>5,45\ldots\text{defecto}\\<5,46\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ 0,01 | $\sqrt[3]{A,abc\ldots}=\sqrt[3]{A,abc\ldots^{3n}}=\sqrt[3]{\dfrac{A,abc\ldots^{3n}\times 100\ldots^{3n}}{100\ldots^{3n}}}=$

$\dfrac{\sqrt[3]{A\,abc\ldots}}{\sqrt[3]{100\ldots^{n}\times 100\ldots^{n}\times 100\ldots^{n}}}=\dfrac{\sqrt[3]{A\,abc\ldots}}{\sqrt[3]{(100\ldots^{n})^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{A\,abc\ldots}}{100\ldots^{n}}$; $\sqrt[3]{A\,abc\ldots}=m$; $\sqrt[3]{A,abc\ldots}=\dfrac{m}{100\ldots^{n}}$ | $\sqrt[3]{13,312053}=\sqrt[3]{\dfrac{13,312053\times 1000000}{100\times 100\times 100}}=\dfrac{\sqrt[3]{13312053}}{100}$;

$\sqrt[3]{13312053}=237$; $\sqrt[3]{13,312053}=\dfrac{237}{100}=2,37$ | $\sqrt[3]{A,abc\ldots}=\sqrt[3]{A,abc\ldots^{3n}}=\sqrt[3]{\dfrac{A,abc\ldots^{3n}\times 100\ldots^{3n}}{100\ldots^{3n}}}=\dfrac{\sqrt[3]{A\,abc\ldots}}{\sqrt[3]{100\ldots^{n}\times 100\ldots^{n}\times 100\ldots^{n}}}=\dfrac{\sqrt[3]{A\,abc\ldots}}{\sqrt[3]{(100\ldots^{n})^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{A\,abc\ldots}}{100\ldots^{n}}$;

$\sqrt[3]{Aabc\ldots}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$; $\sqrt[3]{A,abc\ldots}\begin{matrix}>\dfrac{m}{100\ldots^{n}}\ldots\text{defecto}\\<\dfrac{m+1}{100\ldots^{n}}\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ $\dfrac{1}{100\ldots^{n}}=0,00\ldots{}^{n}001$ | $\sqrt[3]{5.3}=\sqrt[3]{5,300}=\sqrt[3]{\dfrac{5,300\times 1000}{10\times 10\times 10}}=\dfrac{\sqrt[3]{5300}}{10}$; $\sqrt[3]{5300}\begin{matrix}>17\\<18\end{matrix}$; $\sqrt[3]{5,3}\begin{matrix}>\dfrac{17}{10}\\<\dfrac{18}{10}\end{matrix}$; $\sqrt[3]{5,3}\begin{matrix}>1,7\ldots\text{defecto}\\<1,8\ldots\text{esceso}\end{matrix}$

Regla práctica. | *Estraer la raiz cuadrada ó cúbica de un número decimal á menos de una unidad decimal de órden determinado.* $\sqrt{A,abc\ldots^{2n}pqr\ldots}$ á menos de $0,00\ldots{}^{n}001$. $\sqrt{A,abc\ldots^{2n}pqr\ldots}=\sqrt{\dfrac{A\,abc\ldots,pqr\ldots}{100\ldots^{2n}}}=\dfrac{\sqrt{A\,abc\ldots,pqr\ldots}}{100\ldots^{n}}$; $\sqrt{A\,abc\ldots}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$; $\sqrt{A\,abc\ldots,pqr\ldots}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$; $\sqrt{A,abc\ldots^{2n}pqr\ldots}\begin{matrix}>\dfrac{m}{100\ldots^{n}}\ldots\text{defecto}\\<\dfrac{m+1}{100\ldots^{n}}\ldots\text{esceso}\end{matrix}$

$\dfrac{1}{100\ldots^{n}}=0,00\ldots{}^{n}001$ | $\sqrt{7,5683215}$ á menos de 0,01. $\sqrt{7,5683215}=\sqrt{\dfrac{75683,215}{100\times 100}}=\dfrac{\sqrt{75683,215}}{100}$; $\sqrt{75683}\begin{matrix}>275\\<276\end{matrix}$; $\sqrt{75683,215}\begin{matrix}>275\\<276\end{matrix}$; $\sqrt{7,5683215}\begin{matrix}>\dfrac{275}{100}\\<\dfrac{276}{100}\end{matrix}$;

$\sqrt{7,5683215}\begin{matrix}>2,75\ldots\text{defecto}\\<2,76\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ 0,01 | $\sqrt[3]{A,abc\ldots^{3n}pqr\ldots}$ á menos de $0,00\ldots{}^{n}001$. $\sqrt[3]{A,abc\ldots^{3n}pqr\ldots}=\sqrt[3]{\dfrac{Aabc\ldots,pqr\ldots}{100\ldots^{3n}}}=\dfrac{\sqrt[3]{Aabc\ldots,pqr\ldots}}{100\ldots^{n}}$; $\sqrt[3]{Aabc\ldots}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$;

$\sqrt[3]{A\,abc\ldots,pqr\ldots}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$; $\sqrt[3]{A,abc\ldots^{3n}pqr\ldots}\begin{matrix}>\dfrac{m}{100\ldots^{n}}\ldots\text{defecto}\\<\dfrac{m+1}{100\ldots^{n}}\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ $\dfrac{1}{100\ldots^{n}}=0,00\ldots^{n}001$ | $\sqrt[3]{48,654893532}$ á menos de 0,01. $\sqrt[3]{48,654893532}=\sqrt[3]{\dfrac{48654893,532}{100\times100\times100}}$ $=\dfrac{\sqrt[3]{48654893,532}}{100}$; $\sqrt[3]{48654893}\begin{matrix}>365\\<366\end{matrix}$; $\sqrt[3]{48654893,532}\begin{matrix}>365\\<366\end{matrix}$; $\sqrt[3]{48,654893532}\begin{matrix}>\dfrac{365}{100}\\<\dfrac{366}{100}\end{matrix}$; $\sqrt[3]{48,654893532}\begin{matrix}>3,65\ldots\text{defecto}\\<3,66\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ 0,01 | Puede suceder que la raiz cuadrada ó cúbica de la parte entera del número decimal que resulta sea exacta. $\sqrt{A,abc\ldots^{2n}pqr\ldots}=\dfrac{\sqrt{A\,abc\ldots,pqr\ldots}}{100\ldots^{n}}$; $\sqrt{A\,abc\ldots}=m$;

$\sqrt{A\,abc\ldots,pqr\ldots}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$; $\sqrt{A,abc\ldots^{2n}pqr\ldots}\begin{matrix}>\dfrac{m}{100\ldots^{n}}\ldots\text{defecto}\\<\dfrac{m+1}{100\ldots^{n}}\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ $\dfrac{1}{100\ldots^{n}}=0,00\ldots^{n}001$ | $\sqrt{0,289444832}$ á menos de 0,001. $\sqrt{0,289444832}=\sqrt{\dfrac{289444,832}{1000^{2}}}=$ $\dfrac{\sqrt{289444,832}}{1000}$; $\sqrt{289444}=538$; $\sqrt{289444,832}\begin{matrix}>538\\<539\end{matrix}$; $\sqrt{0,289444832}\begin{matrix}>0,538\ldots\text{defecto}\\<0,539\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ 0,001 | $\sqrt[3]{A,abc\ldots^{3n}pqr\ldots}=\dfrac{\sqrt[3]{Aabc\ldots,pqr\ldots}}{100\ldots^{n}}$; $\sqrt[3]{A\,abc\ldots}=m$;

$\sqrt[3]{Aabc\ldots,pqr\ldots}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$; $\sqrt[3]{A,abc\ldots^{3n}pqr\ldots}\begin{matrix}>\dfrac{m}{100\ldots^{n}}\ldots\text{defecto}\\<\dfrac{m+1}{100\ldots^{n}}\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ $\dfrac{1}{100\ldots^{n}}=0,00\ldots^{n}001$ | $\sqrt[3]{0,216345}$ á menos de 0,1. $\sqrt[3]{0,216345}=\sqrt[3]{\dfrac{216,345}{1000}}=\dfrac{\sqrt[3]{216,345}}{10}$;

$\sqrt[3]{216}=6$; $\sqrt[3]{216,345}\begin{matrix}>6\\<7\end{matrix}$; $\sqrt[3]{0,216345}\begin{matrix}>0,6\ldots\text{defecto}\\<0,7\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ 0,1 | Si al correr la coma doble ó triple número de lugares á la derecha que cifras decimales tiene la unidad de aproximacion, añadiendo ceros si es necesario, no resultase parte decimal en el número, el cálculo seria el mismo que cuando se pide simplemente que se estraiga la raiz de un número decimal sin fijar el grado de aproximacion. | En virtud de lo dicho, cuando haya que estraer la raiz cuadrada ó cúbica de un número decimal, se le dividirá en grupos de dos ó de tres cifras contando á partir de la coma, en uno y otro sentido. Hecho esto y prescindiendo de la coma, se irán hallando las cifras de la raiz por los procedimientos esplicados, cuidando de poner una coma despues de la cifra que corresponde al grupo que contiene la de unidades del número propuesto. Se continuarán bajando los grupos de dos ó de tres cifras decimales y determinando cifras decimales de la raiz hasta obtenerla exacta, si esto es posible, ó hasta hallar tantas como se quiera. El error cometido será por *defecto* y menor que una unidad del último órden decimal; y, si se quiere que sea por *esceso*, bastará forzar la unidad en la última cifra. Se ha de tener cuidado, despues que se haya puesto la coma en la raiz, de bajar grupos *precisamente* de dos ó de tres cifras, por lo que si el número de ellas no fuese par ó múltiplo de tres, habria que agregar uno ó dos ceros á la derecha para poder hacerlo. Despues de haber bajado las últimas cifras del número propuesto, bastará ir agregando á la derecha de los restos sucesivos grupos de dos ó de tres cifras, segun la raiz sea cuadrada ó cúbica.

```
2'4 8'6 5,4 8'7 3'4 0      | 157,6879...
1 4,8                      | 25
  2 3 6,5                  |  5
    2 1 6 4,8              | 307
      2 7 7 2 7,3          |   7
        2 5 0 4 9 4,0      | 3146
          2 9 7 3 7 1 0,0  |    6
            1 3 5 3 3 5 9  | 31528
            ...........    |     8
                           | 315367
                           |      7
                           | 3153749
                           |       9
                           |       :
```

```
1 8'4 3 7,6 5 7'2 0 0          | 26,418...
8                              | 12          66
1 0 4.3 7                      |  396         6
  0 8 6 1 6,5 7                | 1596         6
    0 3 7 9 1 3 2,0 0          |   36       784
      1 6 9 9 6 4 7 9 0,0 0    | 2028         4
        0 2 5 1 6 9 3 3 6 8    |  3136        4
        .................      | 205936    7921
                               |     16       1
                               | 209088       1
                               |   7921   79238
                               | 20916721     8
                               |        1     :
                               | 20924643     :
                               |   633904
                               | 2093098204
                               | ..........
```

Se ha demostrado que para estraer la raiz de una fraccion se estraen las de sus dos términos. La demostracion solo es admisible, por ahora, en el caso de que éstas raices sean exactas; pero, como haremos ver mas adelante que es estensiva á todos los casos, podemos admitir ya el principio como general. En su consecuencia $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ y $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$. Si los dos términos de la fraccion son cuadrados ó cubos perfectos, se tendrá, por ejemplo:

$\sqrt{A}=a$ ó $\sqrt[3]{A}=a$ y $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{a}{b}$ ó $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=\frac{a}{b}$ y entonces
$\sqrt{B}=b$ $\quad\sqrt[3]{B}=b$

será exacta la raiz cuadrada ó la cúbica de la fraccion. Si el denominador de la fraccion es cuadrado ó cubo perfecto y no lo es el numerador, seria: $\sqrt{B}=b$ ó $\sqrt[3]{B}=b$ y $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{b}$ y $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[3]{A}}{b}$. Si, por el contrario, fuese cuadrado ó cubo perfecto el numerador sin serlo el denominador, tendriamos v. g.: $\sqrt{A}=a$ ó $\sqrt[3]{A}=a$ y $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{a}{\sqrt{B}}$ ó $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=\frac{a}{\sqrt[3]{B}}$. Por último, si ni el numerador ni el denominador eran cuadrados ó cubos perfectos, quedaria simplemente: $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ ó $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}$. Conviene observar que, si la fraccion no es irreducible, aun cuando sus dos términos no sean cuadrados ó cubos perfectos podrá tal vez tener raiz cuadrada ó cúbica exacta si despues de simplificada son cuadrados ó cubos perfectos los dos términos de la nueva fraccion. $\sqrt{\frac{147}{243}}=\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{243}}$, $\sqrt{\frac{147}{243}}=\sqrt{\frac{49}{81}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}}=\frac{7}{9}$; $\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{243}}=\frac{7}{9}$ | $\sqrt[3]{\frac{108}{500}}=\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{500}}$; $\sqrt[3]{\frac{108}{500}}=\sqrt[3]{\frac{27}{125}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{3}{5}$; $\frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{500}}=\frac{3}{5}$ | Si no son cuadrados ó cubos perfectos los *dos* términos de una fraccion *irreducible*, la raiz cuadrada ó cúbica de dicha fraccion no se podrá espresar exactamente en forma fraccionaria ni en forma entera y será, de consiguiente, incomensurable. Sea, por ejemplo, $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$; $\left.\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\}$ primos entre sí y no son *los dos* cuadrados perfectos. Si se pudiese espresar exactamente esta raiz en forma de fraccion, á esta fraccion se la podria hacer irreducible. Supongamos, pues, que $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{a}{b}$ siendo $\left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}$ primos entre sí. $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}=\frac{A}{B}$. Dos fracciones irreducibles é iguales son idénticas, de modo que $\begin{matrix}A=a^2\\B=b^2\end{matrix}$ resultado absurdo, pues que habiamos supuesto que no eran cuadrados perfectos los dos términos de la fraccion. Sea ahora $\sqrt{\frac{A}{B}}=m$, $m^2=\frac{A}{B}$. Para que esto fuese posible, seria preciso que A fuese divisible por B, lo que no sucede porque A y B son primos entre sí. La raiz cuadrada de $\frac{A}{B}$ es incomensurable $\begin{matrix}\sqrt{\frac{A}{B}}\ldots\ldots\ldots 1\\ 1 \text{ ó } \frac{1}{n}\end{matrix}$ | Lo mismo se demostrará cuando la raiz sea cúbica. $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$, $\left.\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\}$ primos entre sí y no son *los dos* cubos perfectos. $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=\frac{a}{b}$, $\left.\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right\}$ primos entre sí. $\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a^3}{b^3}=\frac{A}{B}$, $\begin{matrix}A=a^3\\B=b^3\end{matrix}$ lo que es contrario á lo supuesto. $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=m$, $m^3=\frac{A}{B}$, lo que tampoco es posible porque A no es divisible por B, por ser A y B primos entre sí. La raiz cúbica de $\frac{A}{B}$ es incomensurable $\begin{matrix}\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\ldots\ldots\ldots 1\\ 1 \text{ ó } \frac{1}{n}\end{matrix}$ | Cuando se dé una fraccion para estraer su raiz cuadrada ó cúbica convendrá hacerla reducible sino lo fuese. | *Estraer aproximadamente la raiz cuadrada ó cúbica de una fraccion que no la tiene exacta haciendo cuadrado ó cubo perfecto su denominador* $\sqrt{\frac{A}{B}}=\sqrt{\frac{A\times B}{B^2}}=\frac{\sqrt{A\times B}}{B}$, $\sqrt{A\times B}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$

$\sqrt{\frac{A}{B}}\begin{matrix}>\frac{m}{B}\ldots\ldots\text{defecto}\\<\frac{m+1}{B}\ldots\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ $\frac{1}{B}$ | $\sqrt{\frac{8}{13}}=\sqrt{\frac{8\times 13}{13^2}}=\frac{\sqrt{104}}{13}$, $\sqrt{104}\begin{matrix}>10\\<11\end{matrix}$; $\sqrt{\frac{8}{13}}\begin{matrix}>\frac{10}{13}\ldots\ldots\text{defecto}\\<\frac{11}{13}\ldots\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ $\frac{1}{13}$ | $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=\sqrt[3]{\frac{A\times B^2}{B^3}}=\frac{\sqrt[3]{A\times B^2}}{B}$, $\sqrt[3]{A\times B^2}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$;

$\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\begin{matrix}>\frac{m}{B}\ldots\text{defecto}\\<\frac{m+1}{B}\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ $\frac{1}{B}$ | $\sqrt[3]{\frac{10}{14}}=\sqrt[3]{\frac{10\times 14^2}{14^3}}=\frac{\sqrt[3]{1960}}{14}$, $\sqrt[3]{1960}\begin{matrix}>12\\<13\end{matrix}$, $\sqrt[3]{\frac{10}{14}}\begin{matrix}>\frac{12}{14}\ldots\text{defecto}\\<\frac{13}{14}\ldots\text{esceso}\end{matrix}$ $\frac{1}{14}$ | Si el denominador de la fraccion dada fuese cuadrado ó cubo perfecto se estraeria la raiz cuadrada ó cúbica entera del numerador y á este número ó al inmediato superior, segun se quiera la raiz aproximada por defecto ó por esceso, se le pondrá por denominador la raiz cuadrada ó cúbica del denominador de la fraccion dada. $\sqrt{\frac{195}{64}} = \frac{\sqrt{195}}{8}$, $\sqrt{195} \begin{matrix} > 13 \\ < 14 \end{matrix}$, $\sqrt{\frac{195}{64}} \begin{matrix} > \frac{13}{8} \ldots \text{defecto} \\ < \frac{14}{8} \ldots \text{esceso} \end{matrix}$ $\frac{1}{8}$ | $\sqrt[3]{\frac{139}{729}} = \frac{\sqrt[3]{139}}{9}$, $\sqrt[3]{139} \begin{matrix} > 5 \\ < 6 \end{matrix}$, $\sqrt[3]{\frac{139}{729}} \begin{matrix} > \frac{5}{9} \ldots \text{defecto} \\ < \frac{6}{9} \ldots \text{esceso} \end{matrix}$ $\frac{1}{9}$ | *Regla práctica.* | *Estraer la raiz cuadrada ó cúbica de una fraccion que no la tiene exacta haciendo cuadrado ó cubo perfecto su denominador valiéndose de su descomposicion en factores primos.* $\sqrt{\frac{A}{B}}$, $B = a^5.b^4.c.d^7.f^6$;

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A}{a^5.b^4.c.d^7.f^6}};\quad a.c.d;\quad \sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A.a.c.d}{a^6.b^4.c^2.d^8.f^6}} = \frac{\sqrt{A.a.c.d}}{\sqrt{(a^3.b^2.c\,d^4.f^3).(a^3.b^2.c.d^4.f^3)}} = \frac{\sqrt{A.a.c.d}}{a^3.b^2.c.d^4.f^3};\quad \sqrt{A.a.c.d} \begin{matrix} > m \\ < m+1 \end{matrix};$$

$$\sqrt{\frac{A}{B}} \begin{matrix} > \frac{m}{a^3.b^2.c.d^4.f^3} \ldots \text{defecto} \\ < \frac{m+1}{a^3.b^2.c.d^4.f^3} \ldots \text{esceso} \end{matrix} \quad \frac{1}{a^3.b^2.c.d^4.f^3}$$

| $\sqrt{\frac{37}{360}}$, $360 = 2^3.3^2.5$; $\sqrt{\frac{37}{360}} = \sqrt{\frac{37}{2^3.3^2.5}}$; 2×5; $\sqrt{\frac{37}{360}} = \sqrt{\frac{37.2.5}{2^4.3^2.5^2}} = \frac{\sqrt{370}}{\sqrt{(2^2.3.5)(2^2.3.5)}} = \frac{\sqrt{370}}{2^2.3.5}$; $\sqrt{370} \begin{matrix} > 19 \\ < 20 \end{matrix}$; $\sqrt{\frac{37}{360}} \begin{matrix} > \frac{19}{2^2.3.5} = \frac{19}{60} \ldots\ldots \text{defecto} \\ < \frac{20}{2^2.3.5} = \frac{20}{60} \ldots\ldots \text{esceso} \end{matrix}$ $\frac{1}{2^2.3.5} = \frac{1}{60}$ | $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$, $B = a^7.b^6.c^2$; $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \sqrt[3]{\frac{A}{a^7.b^6.c^2}}$; $a^2.c$; $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \sqrt[3]{\frac{A.a^2.c}{a^9.b^6.c^3}} =$

$$\frac{\sqrt[3]{A.a^2.c}}{\sqrt[3]{(a^3.b^2.c).(a^3.b^2.c).(a^3.b^2.c)}} = \frac{\sqrt[3]{A.a^2.c}}{a^3.b^2.c};\quad \sqrt[3]{A.a^2.c} \begin{matrix} > m \\ < m+1 \end{matrix};\quad \sqrt[3]{\frac{A}{B}} \begin{matrix} > \frac{m}{a^3.b^2.c} \ldots \text{defecto} \\ < \frac{m+1}{a^3.b^2.c} \ldots \text{esceso} \end{matrix} \quad \frac{1}{a^3.b^2.c}$$

| $\sqrt[3]{\frac{43}{2250}}$; $2250 = 2.3^2.5^3$; $\sqrt[3]{\frac{43}{2250}} = \sqrt[3]{\frac{43}{2.3^2.5^3}}$; $2^2.3$;

$$\sqrt[3]{\frac{43}{2250}} = \sqrt[3]{\frac{43.2^2.3}{2^3.3^3.5^3}} = \frac{\sqrt[3]{516}}{\sqrt[3]{(2.3.5).(2.3.5).(2.3.5)}} = \frac{\sqrt[3]{516}}{2.3.5};\quad \sqrt[3]{516} \begin{matrix} > 8 \\ < 9 \end{matrix};\quad \sqrt[3]{\frac{43}{2250}} \begin{matrix} > \frac{8}{2.3.5} = \frac{8}{30} \ldots \text{defecto} \\ < \frac{9}{2.3.5} = \frac{9}{30} \ldots \text{esceso} \end{matrix} \quad \frac{1}{2.3.5} = \frac{1}{30}$$

| *Regla práctica.* | Por este procedimiento se harán en general las operaciones con números menores, pero no hay seguridad de obtener valores tan aproximados al verdadero como por el otro, pues que el límite del error será en general mayor. | En vez de hacer cuadrado ó cubo perfecto el denominador de la fraccion cuando no lo sea, se puede

hacer cuadrado ó cubo perfecto el numerador. $\sqrt{\frac{A}{B}}=\sqrt{\frac{A^2}{B\times A}}=\frac{A}{\sqrt{B\times A}}$; $\sqrt{B\times A}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$; $\sqrt{\frac{A}{B}}\begin{matrix}<\frac{A}{m}\ldots\text{esceso}\\>\frac{A}{m+1}\ldots\text{defecto}\end{matrix}$; $\frac{A}{m}-\frac{A}{m+1}=\frac{A\times(m+1)-A\times m}{m\times(m+1)}=$ $\frac{A\times m+A-A\times m}{m\times(m+1)}=\frac{A}{m\times(m+1)}$; $\frac{A}{m}=\frac{A}{m+1}+\frac{A}{m\times(m+1)}$. El error es menor que $\frac{A}{m\times(m+1)}$ ya se tome el valor aproximado por defecto ó por esceso. | $\sqrt{\frac{23}{7}}=\sqrt{\frac{23^2}{7\times 23}}=\frac{23}{\sqrt{161}}$; $\sqrt{161}\begin{matrix}>12\\<13\end{matrix}$; $\sqrt{\frac{23}{7}}\begin{matrix}<\frac{23}{12}\ldots\text{esceso}\\>\frac{23}{13}\ldots\text{defecto}\end{matrix}$; $\frac{23}{12}-\frac{23}{13}=\frac{299-276}{156}=\frac{23}{156}$; $\frac{23}{12}=\frac{23}{13}+\frac{23}{156}$. El error que se comete es menor que $\frac{23}{156}$ ya se tome un valor ú otro. $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=\sqrt[3]{\frac{A^3}{B\times A^2}}=\frac{A}{\sqrt[3]{B\times A^2}}$; $\sqrt[3]{B\times A^2}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$; $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\begin{matrix}<\frac{A}{m}\ldots\ldots\text{esceso}\\>\frac{A}{m+1}\ldots\text{defecto}\end{matrix}$; $\frac{A}{m}-\frac{A}{m+1}=\frac{A\times(m+1)-A\times m}{m\times(m+1)}=\frac{A\times m+A-A\times m}{m\times(m+1)}=$ $\frac{A}{m\times(m+1)}$; $\frac{A}{m}=\frac{A}{m+1}+\frac{A}{m\times(m+1)}$. El error es menor que $\frac{A}{m\times(m+1)}$ ya se tome por valor de la raiz cúbica el valor aproximado por defecto ó el aproximado por esceso. | $\sqrt[3]{\frac{4}{11}}=\sqrt[3]{\frac{4^3}{11\times 4^2}}=\frac{4}{\sqrt[3]{176}}$; $\sqrt[3]{176}\begin{matrix}>5\\<6\end{matrix}$; $\sqrt[3]{\frac{4}{11}}\begin{matrix}<\frac{4}{5}\ldots\text{esceso}\\>\frac{4}{6}\ldots\text{defecto}\end{matrix}$; $\frac{4}{5}-\frac{4}{6}=\frac{24-20}{30}=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}$. El error que se comete es menor que $\frac{2}{15}$ ya se tome uno ú otro valor por el verdadero de la raiz. | Se podria hacer cuadrado ó cubo perfecto el numerador de la fraccion valiéndose de la descomposicion en factores primos. | Es preferible hacer cuadro ó cubo perfecto el denominador, si no lo es, aun en el caso de que lo fuese el numerador. | Si en el caso de ser el numerador cuadrado ó cubo perfecto estraemos la raiz cuadrada ó cúbica del numerador y la dividimos por la raiz cuadrada ó cúbica entera del denominador ó por el número inmediato superior á estas raices segun se quiera por esceso ó por defecto, seria posible que el error cometido fuese mayor que una unidad. $\sqrt{\frac{2304}{11}}=\frac{48}{\sqrt{11}}$; $\sqrt{11}\begin{matrix}>3\\<4\end{matrix}$; $\sqrt{\frac{2304}{11}}\begin{matrix}<\frac{48}{3}=16\ldots\text{esceso}\\>\frac{48}{4}=12\ldots\text{defecto}\end{matrix}$; $16-12=4$. Ya se tome 16 ó 12 por valor de la raiz, el error que se cometerá será menor que 4, pero podria ser mayor que una unidad. | $\sqrt[3]{\frac{74088}{13}}=\frac{42}{\sqrt[3]{13}}$; $\sqrt[3]{13}\begin{matrix}>2\\<3\end{matrix}$; $\sqrt[3]{\frac{74088}{13}}\begin{matrix}<\frac{42}{2}=21\ldots\text{esceso}\\>\frac{42}{3}=14\ldots\text{defecto}\end{matrix}$ $21-14=7$.

El error será menor que 7, ya se tome 21 ó 14 por valor de la raiz, pero podria ser mayor que una unidad. | *Hallar el valor aproximado de la raiz cuadrada ó cúbica de una fraccion con un error menor que una unidad fraccionaria distinta de la que determina su denominador.* $\sqrt{\frac{A}{B}}$ á menos de $\frac{1}{n}$.

$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{\frac{A}{B}\times n^2}{n^2}} = \frac{\sqrt{\frac{A\times n^2}{B}}}{n}$; $\frac{A\times n^2}{B} = C+\frac{r}{B}$; $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{C+\frac{r}{B}}}{n}$; $\sqrt{C}\,\substack{>m\\<m+1}$; $\sqrt{C+\frac{r}{B}}\,\substack{>m\\<m+1}$; $\sqrt{\frac{A}{B}}\,\substack{>\frac{m}{n}\text{......defecto}\\<\frac{m+1}{n}\text{.....esceso}}\ \frac{1}{n}$ | Si $\sqrt{C}=m$, $\sqrt{C+\frac{r}{B}}\,\substack{>m\\<m+1}$; $\sqrt{\frac{A}{B}}\,\substack{>\frac{m}{n}\text{....defecto}\\<\frac{m+1}{n}\text{...esceso}}\ \frac{1}{n}$ | Puede ser $\frac{A\times n^2}{B}=C$. Entonces $\sqrt{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt{C}}{n}$; $\sqrt{C}\,\substack{>m\\<m+1}$; $\sqrt{\frac{A}{B}}\,\substack{>\frac{m}{n}\text{....defecto}\\<\frac{m+1}{n}\text{...esceso}}\ \frac{1}{n}$ | No puede suceder á la vez que $\frac{A\times n^2}{B}$ sea igual á un número entero C y que $\sqrt{C}$ sea exacta, porque entonces $\sqrt{\frac{A}{B}}$ se podria espresar exactamente en forma fraccionaria, lo cual no es posible si esta raiz es inexacta, como debe serlo puesto que se quiere hallar su valor aproximado. | $\sqrt{\frac{17}{3}}$ á menos de $\frac{1}{7}$. $\sqrt{\frac{17}{3}} = \sqrt{\frac{\frac{17}{3}\times 7^2}{7^2}} = \frac{\sqrt{\frac{833}{3}}}{7} = \frac{\sqrt{277\frac{2}{3}}}{7}$; $\sqrt{277}\,\substack{>16\\<17}$; $\sqrt{\frac{17}{3}}\,\substack{>\frac{16}{7}\text{...defecto}\\<\frac{17}{7}\text{...esceso}}\ \frac{1}{7}$ | $\sqrt{\frac{2}{3}}$ á menos de $\frac{1}{5}$. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}\times 5^2}{5^2}} = \frac{\sqrt{\frac{50}{3}}}{5} = \frac{\sqrt{16\frac{2}{3}}}{5}$; $\sqrt{16}=4$; $\sqrt{16\frac{2}{3}}\,\substack{>4\\<5}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}\,\substack{>\frac{4}{5}\text{... defecto}\\<\frac{5}{5}\text{... esceso}}\ \frac{1}{5}$ | $\sqrt{\frac{11}{3}}$ á menos de $\frac{1}{6}$. $\sqrt{\frac{11}{3}} = \sqrt{\frac{\frac{11}{3}\times 6^2}{6^2}} = \frac{\sqrt{\frac{396}{3}}}{6} = \frac{\sqrt{132}}{6}$; $\sqrt{132}\,\substack{>11\\<12}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}\,\substack{>\frac{11}{6}\text{... defecto}\\<\frac{12}{6}\text{... esceso}}\ \frac{1}{6}$ | $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$ á menos de $\frac{1}{n}$.

$\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{A}{B}\times n^3}{n^3}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{A\times n^3}{B}}}{n}$; $\frac{A\times n^3}{B} = C+\frac{r}{B}$; $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{C+\frac{r}{B}}}{n}$; $\sqrt[3]{C}\,\substack{>m\\<m+1}$; $\sqrt[3]{C+\frac{r}{B}}\,\substack{>m\\<m+1}$; $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\,\substack{>\frac{m}{n}\text{....defecto}\\<\frac{m+1}{n}\text{...esceso}}\ \frac{1}{n}$ | Si $\sqrt[3]{C}=m$, $\sqrt[3]{C+\frac{r}{B}}\,\substack{>m\\<m+1}$; $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\,\substack{>\frac{m}{n}\text{.... defecto}\\<\frac{m+1}{n}\text{...esceso}}\ \frac{1}{n}$ | Puede ser $\frac{A\times n^3}{B}=C$. Entonces $\sqrt[3]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[3]{C}}{n}$; $\sqrt[3]{C}\,\substack{>m\\<m+1}$; $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\,\substack{>\frac{m}{n}\text{.... defecto}\\<\frac{m+1}{n}\text{...esceso}}\ \frac{1}{n}$ | No puede suceder á la vez que $\frac{A\times n^3}{B}$ sea igual á un número entero C y que $\sqrt[3]{C}$ sea exacta, porque entonces $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$ se podria espresar exactamente en forma fraccionaria, lo cual no es posible si esta raiz es inexacta, como debe serlo puesto que se quiere hallar su valor aproximado. $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ á menos de $\frac{1}{7}$. $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{5}\times 7^3}{7^3}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1029}{5}}}{7} = \frac{\sqrt[3]{205\frac{4}{5}}}{7}$; $\sqrt[3]{205} \begin{matrix} >5 \\ <6 \end{matrix}$; $\sqrt[3]{205\frac{4}{5}} \begin{matrix} >5 \\ <6 \end{matrix}$; $\sqrt[3]{\frac{3}{5}} \begin{matrix} >\frac{5}{7}\text{... defecto} \\ <\frac{6}{7}\text{... esceso} \end{matrix}$ $\frac{1}{7}$ | $\sqrt[3]{\frac{11}{4}}$ á menos de $\frac{1}{5}$. $\sqrt[3]{\frac{11}{4}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{11}{4}\times 5^3}{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{1375}{4}}}{5} = \frac{\sqrt[3]{343\frac{3}{4}}}{5}$; $\sqrt[3]{343} = 7$: $\sqrt[3]{343\frac{3}{4}} \begin{matrix} >7 \\ <8 \end{matrix}$; $\sqrt[3]{\frac{11}{4}} \begin{matrix} >\frac{7}{5}\text{..... defecto} \\ <\frac{8}{5}\text{..... esceso} \end{matrix}$ $\frac{1}{5}$ | $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$ á menos de $\frac{1}{15}$. $\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \sqrt[3]{\frac{\frac{4}{5}\times 15^3}{15^3}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{13500}{5}}}{15} = \frac{\sqrt[3]{2700}}{15}$; $\sqrt[3]{2700} \begin{matrix} >13 \\ <14 \end{matrix}$; $\sqrt[3]{\frac{4}{5}} \begin{matrix} >\frac{13}{15}\text{... defecto} \\ <\frac{14}{15}\text{... esceso} \end{matrix}$ $\frac{1}{15}$ | *Regla práctica.* | Puesto que haciendo cuadrado ó cubo perfecto el denominador de una fraccion se puede obtener su raiz con un error menor que una unidad fraccionaria determinada por el denominador, siendo el procedimiento que para ello se sigue mas sencillo que el necesario para obtener un valor aproximado á menos de una unidad fraccionaria distinta, es lo probable que cuando se emplee este último sea para obtener mas aproximacion ó lo que es lo mismo, que el denominador de la unidad de aproximacion sea mayor que el de la fraccion dada. | *Estraer la raiz cuadrada ó cúbica de una fraccion ordinaria á menos de una unidad decimal determinada.* $\sqrt{\frac{A}{B}}$ á menos de $0{,}00\ldots\overset{n}{0}01$; $\frac{A}{B} = \mathrm{H}, acb\ldots^{2n} pqr\ldots$; $\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\mathrm{H}, abc\ldots^{2n} pqr\ldots} = \sqrt{\frac{\mathrm{H}abc\ldots, pqr\ldots}{100\ldots^{2n}}} = \frac{\sqrt{\mathrm{H}abc\ldots, pqr\ldots}}{100\ldots^{n}}$; $\sqrt{\mathrm{H}abc\ldots} \begin{matrix} >m \\ <m+1 \end{matrix}$; $\sqrt{\mathrm{H}abc\ldots, pqr\ldots} \begin{matrix} >m \\ <m+1 \end{matrix}$; $\sqrt{\frac{A}{B}} \begin{matrix} >\frac{m}{100\ldots^{n}}\text{... defecto} \\ <\frac{m+1}{100\ldots^{n}}\text{... esceso} \end{matrix}$ $\frac{1}{100\ldots^{n}} = 0{,}00\ldots\overset{n}{0}01$ | Si $\sqrt{\mathrm{H}abc\ldots} = m$, $\sqrt{\mathrm{H}abc\ldots, pqr\ldots} \begin{matrix} >m \\ <m+1 \end{matrix}$; $\sqrt{\frac{A}{B}} \begin{matrix} >\frac{m}{100\ldots^{n}}\text{... defecto} \\ <\frac{m+1}{100\ldots^{n}}\text{... esceso} \end{matrix}$ $\frac{1}{100\ldots^{n}} = 0{,}00\ldots\overset{n}{0}01$ | Puede suceder que $\frac{A}{B} = \mathrm{H}, abc\ldots^{2n}$. Entonces $\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\mathrm{H}, abc\ldots^{2n}} = \sqrt{\frac{\mathrm{H}abc\ldots}{100\ldots^{2n}}} = \frac{\sqrt{\mathrm{H}abc\ldots}}{100\ldots^{n}}$; $\sqrt{\mathrm{H}abc\ldots} \begin{matrix} >m \\ <m+1 \end{matrix}$; $\sqrt{\frac{A}{B}} \begin{matrix} >\frac{m}{100\ldots^{n}}\text{... defecto} \\ <\frac{m+1}{100\ldots^{n}}\text{... esceso} \end{matrix}$ $\frac{1}{100\ldots^{n}} = 0{,}00\ldots\overset{n}{0}01$ | Si $\sqrt{\frac{A}{B}}$ es inexacta, como es de suponer, puesto que se quiere hallar aproximadamente su valor, no puede suceder á la vez que $\frac{A}{B} = \mathrm{H}, abc\ldots^{2n}$ y que $\sqrt{\mathrm{H}abc\ldots}$ sea exacta, porque si así fuese se podria espresar exactamente en forma fraccionaria la raiz pedida. | $\sqrt{\frac{3}{7}}$ á menos de 0,1. $\sqrt{\frac{3}{7}}=\sqrt{0,4285714\ldots}=\sqrt{\frac{42,85714\ldots}{100}}=\frac{\sqrt{42,85714\ldots}}{10}$; $\sqrt{42}\begin{smallmatrix}>6\\<7\end{smallmatrix}$; $\sqrt{42,85714\ldots}\begin{smallmatrix}>6\\<7\end{smallmatrix}$; $\sqrt{\frac{3}{7}}\begin{smallmatrix}>\frac{6}{10}\\<\frac{7}{10}\end{smallmatrix}$; $\sqrt{\frac{3}{7}}\begin{smallmatrix}>0,6\ldots\text{defecto}\\<0,7\ldots\text{esceso}\end{smallmatrix}$ 0,1 | $\sqrt{\frac{144}{1111}}$ á menos de 0,01. $\sqrt{\frac{144}{1111}}=\sqrt{0,12961296\ldots}=\sqrt{\frac{1296,1296\ldots}{10000}}=\frac{\sqrt{1296,1296\ldots}}{100}$; $\sqrt{1296}=36$; $\sqrt{1296,1296\ldots}\begin{smallmatrix}>36\\<37\end{smallmatrix}$; $\sqrt{\frac{144}{1111}}\begin{smallmatrix}>\frac{36}{100}\\<\frac{37}{100}\end{smallmatrix}$; $\sqrt{\frac{144}{1111}}\begin{smallmatrix}>0,36\ldots\text{defecto}\\<0,37\ldots\text{esceso}\end{smallmatrix}$ 0,01 | $\sqrt{\frac{3}{4}}$ á menos de 0,001. $\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{0,75}=\sqrt{0,750000}=\sqrt{\frac{750000}{1000000}}=\frac{\sqrt{750000}}{1000}$; $\sqrt{750000}\begin{smallmatrix}>866\\<867\end{smallmatrix}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}\begin{smallmatrix}>\frac{866}{1000}\\<\frac{867}{1000}\end{smallmatrix}$; $\sqrt{\frac{3}{4}}\begin{smallmatrix}>0,866\ldots\text{defecto}\\<0,867\ldots\text{esceso}\end{smallmatrix}$ 0,001 | $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$ á menos de $0,00\overset{n}{\ldots}001$. $\frac{A}{B}=H,abc\ldots^{3n}pqr\ldots$; $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=\sqrt[3]{H,abc\ldots^{3n}pqr\ldots}=\sqrt[3]{\frac{H\,abc\ldots,pqr\ldots}{100\ldots^{3n}}}=\frac{\sqrt[3]{H\,abc\ldots,pqr\ldots}}{100\ldots^{n}}$; $\sqrt[3]{H\,abc\ldots}\begin{smallmatrix}>m\\<m+1\end{smallmatrix}$; $\sqrt[3]{H\,abc\ldots,pqr\ldots}\begin{smallmatrix}>m\\<m+1\end{smallmatrix}$; $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\begin{smallmatrix}>\frac{m}{100\ldots^{n}}\ldots\text{defecto}\\<\frac{m+1}{100\ldots^{n}}\ldots\text{esceso}\end{smallmatrix}$ $\frac{1}{1000\ldots^{n}}=0,00\overset{n}{\ldots}001$ | Si $\sqrt[3]{H\,abc\ldots}=m$, $\sqrt[3]{H\,abc\ldots,pqr\ldots}\begin{smallmatrix}>m\\<m+1\end{smallmatrix}$; $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\begin{smallmatrix}>\frac{m}{100\ldots^{n}}\ldots\text{defecto}\\<\frac{m+1}{100\ldots^{n}}\ldots\text{esceso}\end{smallmatrix}$ $\frac{1}{100\ldots^{n}}=0,00\overset{n}{\ldots}001$ | Puede suceder que $\frac{A}{B}=H,abc\ldots^{3n}$. Entonces $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=\sqrt[3]{H,abc\ldots^{3n}}=\sqrt[3]{\frac{H\,abc\ldots}{100\ldots^{3n}}}=\frac{\sqrt[3]{H\,abc\ldots}}{100\ldots^{n}}$; $\sqrt[3]{H\,abc\ldots}\begin{smallmatrix}>m\\<m+1\end{smallmatrix}$; $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\begin{smallmatrix}>\frac{m}{100\ldots^{n}}\ldots\text{defecto}\\<\frac{m+1}{100\ldots^{n}}\ldots\text{esceso}\end{smallmatrix}$ $\frac{1}{100\ldots^{n}}=0,00\overset{n}{\ldots}001$ | Si $\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$ es inexacta, como es de suponer, puesto que se quiere hallar aproximadamente su valor, no puede suceder á la vez que $\frac{A}{B}=H,abc\ldots^{3n}$ y que $\sqrt[3]{H\,abc\ldots}=m$, porque si así fuese, se podria espresar exactamente en forma fraccionaria la raiz pedida. | $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ á menos de 0,01. $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{1,66666666\ldots}=\sqrt[3]{\frac{1666666,66\ldots}{1000000}}=\frac{\sqrt[3]{1666666,66\ldots}}{100}$; $\sqrt[3]{1666666\ldots}\begin{smallmatrix}>118\\<119\end{smallmatrix}$; $\sqrt[3]{1666666,66\ldots}\begin{smallmatrix}>118\\<119\end{smallmatrix}$; $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\begin{smallmatrix}>\frac{118}{100}\\<\frac{119}{100}\end{smallmatrix}$; $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\begin{smallmatrix}>1,18\ldots\text{defecto}\\<1,19\ldots\text{esceso}\end{smallmatrix}$ 0,01 | $\sqrt[3]{\frac{389}{225}}$ á menos de 0,1. $\sqrt[3]{\frac{389}{225}}=\sqrt[3]{1,72888\ldots}=\sqrt[3]{\frac{1728,88\ldots}{1000}}=$

$\frac{\sqrt[3]{1728,88...}}{10}$; $\sqrt[3]{1728}=12$; $\sqrt[3]{1728,88...}\begin{array}{l}>12\\<13\end{array}$; $\sqrt[3]{\frac{389}{225}}\begin{array}{l}>\frac{12}{10}\\<\frac{13}{10}\end{array}$; $\sqrt[3]{\frac{389}{225}}\begin{array}{l}>1,2...\text{defecto}\\<1,3...\text{esceso}\end{array}$ 0,1 | $\sqrt[3]{\frac{20407}{15625}}$ á menos de 0,01. $\sqrt[3]{\frac{20407}{15625}}=\sqrt[3]{1,306048}=$

$\sqrt[3]{\frac{1306048}{1000000}}=\frac{\sqrt[3]{1306048}}{100}$; $\sqrt[3]{1306048}\begin{array}{l}>109\\<110\end{array}$; $\sqrt[3]{\frac{20407}{15625}}\begin{array}{l}>\frac{109}{100}\\<\frac{110}{100}\end{array}$; $\sqrt[3]{\frac{20407}{15625}}\begin{array}{l}>1,09...\text{defecto}\\<1,10...\text{esceso}\end{array}$ 0,01 | *Regla práctica.* | *Estraer la raiz cuadrada ó cúbica de un número decimal á menos de cualquier unidad fraccionaria.* $\sqrt{A,abc...}$ á menos de $\frac{1}{n}$. $\sqrt{A,abc...}=\sqrt{\frac{A.abc...\times n^2}{n^2}}=\frac{\sqrt{A,abc...\times n^2}}{n}$; $A,abc...\times n^2=H,pqr...$; $\sqrt{A,abc...}=\frac{\sqrt{H,pqr...}}{n}$; $\sqrt{H}\begin{array}{l}>m\\<m+1\end{array}$; $\sqrt{H,pqr...}\begin{array}{l}>m\\<m+1\end{array}$; $\sqrt{A,abc...}\begin{array}{l}>\frac{m}{n}......\text{defecto}\\<\frac{m+1}{n}.....\text{esceso}\end{array}\ \frac{1}{n}$ | Si $\sqrt{H}=m$, $\sqrt{H,pqr...}\begin{array}{l}>m\\<m+1\end{array}$; $\sqrt{A,abc...}\begin{array}{l}>\frac{m}{n}....\text{defecto}\\<\frac{m+1}{n}...\text{esceso}\end{array}\ \frac{1}{n}$ | Puede suceder que $A,abc...\times n^2=H$. Entonces $\sqrt{A,abc...}=\frac{\sqrt{H}}{n}$; $\sqrt{H}\begin{array}{l}>m\\<m+1\end{array}$; $\sqrt{A,abc...}\begin{array}{l}>\frac{m}{n}....\text{defecto}\\<\frac{m+1}{n}...\text{esceso}\end{array}\ \frac{1}{n}$ |

Solo en el caso de que $\sqrt{A,abc...}$ fuese exacta podria suceder á la vez que $A,abc...\times n^2=H$ y que $\sqrt{H}=m$, pues cuando así sucediere la raiz pedida se podria espresar exactamente en forma fraccionaria. | $\sqrt{3,234}$ á menos de $\frac{1}{11}$. $\sqrt{3,234}=\sqrt{\frac{3,234\times 11^2}{11^2}}=\frac{\sqrt{391,314}}{11}$; $\sqrt{391}\begin{array}{l}>19\\<20\end{array}$; $\sqrt{391,314}\begin{array}{l}>19\\<20\end{array}$; $\sqrt{3,234}\begin{array}{l}>\frac{19}{11}...\text{defecto}\\<\frac{20}{11}...\text{esceso}\end{array}\ \frac{1}{11}$ | $\sqrt{4,0106}$ á menos de $\frac{1}{6}$. $\sqrt{4,0106}=\sqrt{\frac{4,0106\times 6^2}{6^2}}=\frac{\sqrt{144,3816}}{6}$; $\sqrt{144}=12$; $\sqrt{144,3816}\begin{array}{l}>12\\<13\end{array}$; $\sqrt{4,0106}\begin{array}{l}>\frac{12}{6}...\text{defecto}\\<\frac{13}{6}...\text{esceso}\end{array}\ \frac{1}{6}$ |

$\sqrt{20,5625}$ á menos de $\frac{1}{4}$. $\sqrt{20,5625}=\sqrt{\frac{20,5625\times 4^2}{4^2}}=\frac{\sqrt{329}}{4}$; $\sqrt{329}\begin{array}{l}>18\\<19\end{array}$; $\sqrt{20,5625}\begin{array}{l}>\frac{18}{4}...\text{defecto}\\<\frac{19}{4}...\text{esceso}\end{array}\ \frac{1}{4}$ | $\sqrt[3]{A,abc...}$ á menos de $\frac{1}{n}$. $\sqrt[3]{A,abc...}=\sqrt[3]{\frac{A,abc...\times n^3}{n^3}}=\frac{\sqrt[3]{A,abc...\times n^3}}{n}$; $A,abc...\times n^3=H,pqr...$; $\sqrt[3]{A,abc...}=\frac{\sqrt[3]{H,pqr...}}{n}$; $\sqrt[3]{H}\begin{array}{l}>m\\<m+1\end{array}$; $\sqrt[3]{H,pqr...}\begin{array}{l}>m\\<m+1\end{array}$; $\sqrt[3]{A,abc...}\begin{array}{l}>\frac{m}{n}....\text{defecto}\\<\frac{m+1}{n}...\text{esceso}\end{array}\ \frac{1}{n}$ |

Si $\sqrt[3]{H}=m$, $\sqrt[3]{H,pqr\ldots}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$; $\sqrt[3]{A,abc\ldots}\begin{matrix}>\frac{m}{n}\ldots\ldots\text{defecto}\\<\frac{m+1}{n}\ldots\ldots\text{esceso}\end{matrix}\ \frac{1}{n}$ | Puede suceder que $A,abc\ldots\times n^3=H$. Entonces será $\sqrt[3]{A,abc\ldots}=\frac{\sqrt[3]{H}}{n}$; $\sqrt[3]{H}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$; $\sqrt[3]{A,abc\ldots}\begin{matrix}>\frac{m}{n}\ldots\text{defecto}\\<\frac{m+1}{n}\ldots\text{esceso}\end{matrix}\ \frac{1}{n}$ | No puede ser á la vez $A,abc\ldots\times n^3=H$ y $\sqrt[3]{H}=m$, á menos de que $\sqrt[3]{A,abc\ldots}$ sea exacta, pues si aquello sucediese se podria espresar exactamente en forma fraccionaria la raiz pedida. | $\sqrt[3]{7,1456}$ á menos de $\frac{1}{6}\cdot\sqrt[3]{7,1456}=\sqrt[3]{\frac{7,1456\times6^3}{6^3}}=\frac{\sqrt[3]{1543,4496}}{6}$; $\sqrt[3]{1543}\begin{matrix}>11\\<12\end{matrix}$; $\sqrt[3]{1543,4496}\begin{matrix}>11\\<12\end{matrix}$; $\sqrt[3]{7,1456}\begin{matrix}>\frac{11}{6}\ldots\text{defecto}\\<\frac{12}{6}\ldots\text{esceso}\end{matrix}\ \frac{1}{6}$ | $\sqrt[3]{42,9439}$ á menos de $\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{42,9439}=\sqrt[3]{\frac{42,9439\times2^3}{2^3}}=\frac{\sqrt[3]{343,5512}}{2}$; $\sqrt[3]{343}=7$; $\sqrt[3]{343,5512}\begin{matrix}>7\\<8\end{matrix}$; $\sqrt[3]{42,9439}\begin{matrix}>\frac{7}{2}\ldots\text{defecto}\\<\frac{8}{2}\ldots\text{esceso}\end{matrix}\ \frac{1}{2}$ | $\sqrt[3]{0,184}$ á menos de $\frac{1}{5}\cdot\sqrt[3]{0,184}=\sqrt[3]{\frac{0,184\times5^3}{5^3}}=\frac{\sqrt[3]{23}}{5}$; $\sqrt[3]{23}\begin{matrix}>2\\<3\end{matrix}$; $\sqrt[3]{0,184}\begin{matrix}>\frac{2}{5}\ldots\text{defecto}\\<\frac{3}{5}\ldots\text{esceso}\end{matrix}\ \frac{1}{5}$ |

Regla práctica. | Si se quisiera estraer la raiz cuadrada ó cúbica de un número misto no habria mas que convertirle en fraccionario y aplicariamos los procedimientos ya esplicados. | La raiz cuadrada ó cúbica de un número entero aproximada á menos de *una unidad* es su raiz cuadrada ó cúbica entera ó el número inmediato siguiente. | La raiz cuadrada ó cúbica de un número misto á menos de *una unidad* es la raiz cuadrada ó cúbica entera ó exacta de su parte entera. $\sqrt[3]{A\frac{B}{C}}$, $\sqrt[3]{A}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix}$, $\sqrt[3]{A\frac{B}{C}}\begin{matrix}>m\ldots\ldots\text{defecto}\\<m+1\ldots\text{esceso}\end{matrix}\ 1$ | $\sqrt[3]{8\frac{3}{5}}$, $\sqrt[3]{8}\begin{matrix}>2\\<3\end{matrix}$, $\sqrt[3]{8\frac{3}{5}}\begin{matrix}>2\ldots\text{defecto}\\<3\ldots\text{esceso}\end{matrix}\ 1$ | $\sqrt[3]{A\frac{B}{C}}$, $\sqrt[3]{A}=m$, $\sqrt[3]{A\frac{B}{C}}\begin{matrix}>m\ldots\ldots\text{defecto}\\<m+1\ldots\text{esceso}\end{matrix}\ 1$ | $\sqrt[3]{216\frac{5}{7}}$, $\sqrt[3]{216}=6$, $\sqrt[3]{216\frac{5}{7}}\begin{matrix}>6\\<7\end{matrix}\ 1$ | Lo mismo será cuando la parte fraccionaria venga espresada en forma decimal. | *Estraer la raiz cuadrada ó cúbica de cualquier número á menos de una fraccion dada.* $\sqrt[3]{A}$ á menos de $\frac{m}{n}$. A es un número cualquiera. $\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n}{m}}$. $\sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{\frac{A\times\left(\frac{n}{m}\right)^3}{\left(\frac{n}{m}\right)^3}}=$

$$\frac{\sqrt[3]{A\times\frac{n^3}{m^3}}}{\sqrt[3]{\left(\frac{n}{m}\right)^3}}=\frac{\sqrt[3]{\frac{A\times n^3}{m^3}}}{\frac{n}{m}};\quad \frac{A\times n^3}{m^3}=C+\frac{r}{m^3};\quad \sqrt[3]{A}=\frac{\sqrt[3]{C+\frac{r}{m^3}}}{\frac{n}{m}};\quad \sqrt[3]{C}\begin{matrix}>p\\<p+1\end{matrix};\quad \sqrt[3]{C+\frac{r}{m^3}}\begin{matrix}>p\\<p+1\end{matrix};\quad \sqrt[3]{A}\begin{matrix}>\frac{p}{\frac{n}{m}}\\<\frac{p+1}{\frac{n}{m}}\end{matrix};\quad \sqrt[3]{A}\begin{matrix}>\frac{p\times m}{n}\text{.........defecto}\\<\frac{(p+1)\times m}{n}\text{... esceso}\end{matrix}\quad \frac{1}{\frac{n}{m}}=\frac{m}{n}\ \Big|$$

Si $\sqrt[3]{C}=p$, $\sqrt[3]{C+\frac{r}{m^3}}\begin{matrix}>p\\<p+1\end{matrix}$; $\sqrt[3]{A}\begin{matrix}>\frac{p}{\frac{n}{m}}=\frac{p\times m}{n}\text{.........defecto}\\<\frac{p+1}{\frac{n}{m}}=\frac{(p+1)\times m}{n}\text{.....esceso}\end{matrix}$ $\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n}{m}}$ | Puede ser $\frac{A\times n^3}{m^3}=C$ y entonces $\sqrt[3]{A}=\frac{\sqrt[3]{C}}{\frac{n}{m}}$; $\sqrt[3]{C}\begin{matrix}>p\\<p+1\end{matrix}$;

$\sqrt[3]{A}\begin{matrix}>\frac{p}{\frac{n}{m}}=\frac{p\times m}{n}\text{.......defecto}\\<\frac{p+1}{\frac{n}{m}}=\frac{(p+1)\times m}{n}\text{...esceso}\end{matrix}$ $\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n}{m}}$ | $\sqrt{48{,}23}$ á menos de $\frac{3}{7}=\frac{1}{\frac{7}{3}}$. $\sqrt{48{,}23}=\sqrt{\frac{48{,}23\times\left(\frac{7}{3}\right)^2}{\left(\frac{7}{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{48{,}23\times\frac{49}{9}}}{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{262{,}58...}}{\frac{7}{3}}$; $\sqrt{262}\begin{matrix}>16\\<17\end{matrix}$;

$\sqrt{262{,}58...}\begin{matrix}>16\\<17\end{matrix}$; $\sqrt{48{,}23}\begin{matrix}>\frac{16}{\frac{7}{3}}=\frac{48}{7}\text{...defecto}\\<\frac{17}{\frac{7}{3}}=\frac{51}{7}\text{...esceso}\end{matrix}$ $\frac{3}{7}$ | $\sqrt[3]{2745}$ á menos de $\frac{7}{6}=\frac{1}{\frac{6}{7}}$. $\sqrt[3]{2745}=\sqrt[3]{\frac{2745\times\left(\frac{6}{7}\right)^3}{\left(\frac{6}{7}\right)^3}}=\frac{\sqrt[3]{2745\times\frac{216}{343}}}{\frac{6}{7}}=\frac{\sqrt[3]{1728\frac{216}{343}}}{\frac{6}{7}}$; $\sqrt[3]{1728}=12$;

$\sqrt[3]{1728\frac{216}{343}}\begin{matrix}>12\\<13\end{matrix}$; $\sqrt[3]{2745}\begin{matrix}>\frac{12}{\frac{6}{7}}=\frac{84}{6}\text{...defecto}\\<\frac{13}{\frac{6}{7}}=\frac{91}{6}\text{...esceso}\end{matrix}$ $\frac{7}{6}$ | $\sqrt{666}$ á menos de $\frac{3}{2}=\frac{1}{\frac{2}{3}}$. $\sqrt{666}=\sqrt{\frac{666\times\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}}=\frac{\sqrt{666\times\frac{4}{9}}}{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{296}}{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{296}\begin{matrix}>17\\<18\end{matrix}$; $\sqrt{666}\begin{matrix}>\frac{17}{\frac{2}{3}}=\\<\frac{18}{\frac{2}{3}}=\end{matrix}$

$\begin{matrix}\frac{51}{2}\text{...defecto}\\\frac{54}{2}\text{... esceso}\end{matrix}$ $\frac{3}{2}$ | *Estraer la raiz cuadrada ó cúbica de cualquier número á menos de un número entero.* $\sqrt{A}$ á menos de m. $m=\frac{m}{1}=\frac{1}{\frac{1}{m}}$. $\sqrt{A}=$

$$\sqrt{\frac{A\times\left(\frac{1}{m}\right)^2}{\left(\frac{1}{m}\right)^2}}=\frac{\sqrt{\frac{A}{m^2}}}{\frac{1}{m}};\quad \frac{A}{m^2}=C+\frac{r}{m^2};\quad \sqrt{A}=\frac{\sqrt{C+\frac{r}{m^2}}}{\frac{1}{m}};\quad \sqrt{C}\begin{matrix}>p\\<p+1\end{matrix};\quad \sqrt{C+\frac{r}{m^2}}\begin{matrix}>p\\<p+1\end{matrix};\quad \sqrt{A}\begin{matrix}>\frac{p}{\frac{1}{m}}=p\times m\text{...........................defecto}\\<\frac{p+1}{\frac{1}{m}}=(p+1)\times m=p\times m+m\text{......esceso}\end{matrix}\quad m\ \Big|$$

Si $\sqrt{C}=p,\ \sqrt{C+\frac{r}{m^2}}\begin{array}{l}>p\\<p+1\end{array};\ \sqrt{A}\begin{array}{l}>\frac{p}{\frac{1}{m}}=p\times m\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{defecto}\\<\frac{p+1}{\frac{1}{m}}=(p+1)\times m=p\times m+m\ldots\ldots\text{esceso}\end{array}$ m | Puede ser $\frac{A}{m^2}=C$ y entonces $\sqrt{A}=\frac{\sqrt{C}}{\frac{1}{m}};\ \sqrt{C}\begin{array}{l}>p\\<p+1\end{array};$

$$\sqrt{A}\begin{array}{l}>\frac{p}{\frac{1}{m}}=p\times m\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{defecto}\\<\frac{p+1}{\frac{1}{m}}=(p+1)\times m=p\times m+m\ldots\text{esceso}\end{array}$$

m | $\sqrt[3]{\frac{4456897}{7}}$ á menos de $4=\frac{1}{\frac{1}{4}}$. $\sqrt[3]{\frac{4456897}{7}}=\sqrt[3]{\frac{\frac{4456897}{7}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\left(\frac{1}{4}\right)^3}}=\frac{\sqrt[3]{\frac{4456897}{448}}}{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt[3]{9948\frac{193}{448}}}{\frac{1}{4}};$

$$\sqrt[3]{9948}\begin{array}{l}>21\\<22\end{array};\ \sqrt[3]{9948\frac{193}{448}}\begin{array}{l}>21\\<22\end{array};\ \sqrt[3]{\frac{4456897}{7}}\begin{array}{l}>\frac{21}{\frac{1}{4}}=84\ldots\text{defecto}\\<\frac{22}{\frac{1}{4}}=88\ldots\text{esceso}\end{array}$$

4 | La aproximacion de una raiz á menos de $\frac{m}{n}$ de su valor verdadero, podria efectuarse tambien hallando el valor á menos de $\frac{1}{n}$, y claro es que si el error era menor que $\frac{1}{n}$, con mayor razon lo seria que $\frac{m}{n}$. Análogamente, para tener el valor de una raiz á menos de m unidades enteras, bastaria estraer dicha raiz á menos de una unidad y el error sería con mayor razon menor que m unidades. | La aproximacion de la raiz cuadrada ó cúbica á menos de una fraccion cualquiera ó de un número entero, rara vez tendrá aplicacion, pues que se pueden obtener valores mas aproximados por procedimientos mas sencillos; pero se esplica porque en los exámenes se han puesto á veces ejemplos de esta clase. Lo que sí pudiera ocurrir, es tener que estraer la raiz cuadrada ó cúbica de un número entero á menos de una unidad décupla cualquiera como *una decena, una centena, un millar*, etc., operacion que está comprendida en el caso de aproximar la raiz á menos de un número entero cualquiera.

$\sqrt{83427521}$ á menos de *una centena*. $100=\frac{1}{\frac{1}{100}}$. $\sqrt{83427521}=\sqrt{\frac{83427521\times\left(\frac{1}{100}\right)^2}{\left(\frac{1}{100}\right)^2}}=\frac{\sqrt{\frac{83427521}{10000}}}{\frac{1}{100}}=\frac{\sqrt{8342{,}7521}}{\frac{1}{100}};\ \sqrt{8342}\begin{array}{l}>91\\<92\end{array};\ \sqrt{8342{,}7521}\begin{array}{l}>91\\<92\end{array};$

$$\sqrt{83427521}\begin{array}{l}>\frac{91}{\frac{1}{100}}=9100\ldots\text{defecto}\\<\frac{92}{\frac{1}{100}}=9200\ldots\text{esceso}\end{array}$$

100 | $\sqrt[3]{52573247645763}$ á menos de *un millar*. $1000=\frac{1}{\frac{1}{1000}}$. $\sqrt[3]{52573247645763}=\sqrt[3]{\frac{52573247645763\times\left(\frac{1}{1000}\right)^3}{\left(\frac{1}{1000}\right)^3}}=$

$$\frac{\sqrt[3]{52573{,}247645763}}{\frac{1}{1000}};\ \sqrt[3]{52573}\begin{array}{l}>37\\<38\end{array};\ \sqrt[3]{52573{,}247645763}\begin{array}{l}>\frac{37}{\frac{1}{1000}}=37000\ldots\text{defecto}\\<\frac{38}{\frac{1}{1000}}=38000\ldots\text{esceso}\end{array}$$

1000 | *Regla práctica.* |

83,4 27521 | 9100 ó 9200 | 52,573,247645763 | 37000 ó 38000 | $\sqrt[6]{A}=\sqrt[3]{\sqrt{A}}$; $\sqrt[2^h.3^k]{A}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{\overset{k}{\cdots}\sqrt{\overset{h}{\cdots}\sqrt{A}}}}$ | $\sqrt[2^h.3^k]{A}$ á menos de $\frac{1}{n}$. $\sqrt[2^h.3^k]{A}=$

2 4,2 | 181 | 27 | 27   97

0 6 1 | 1 | 255,73 | 679   7

| | 19 20 | 3379

$$\sqrt[2^h.3^k]{\frac{A\times n^{2^h.3^k}}{n^{2^h.3^k}}}=\frac{\sqrt[2^h.3^k]{A\times n^{2^h.3^k}}}{n};\ A\times n^{2^h.3^k}=C+\frac{D}{F};\ \sqrt[2^h.3^k]{A}=\frac{\sqrt[2^h.3^k]{C+\frac{D}{F}}}{n};\ \sqrt[2^h.3^k]{C}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix};\ \sqrt[2^h.3^k]{C+\frac{D}{F}}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix};\ \sqrt[2^h.3^k]{A}\begin{matrix}>\frac{m}{n}\ldots\text{defecto}\\<\frac{m+1}{n}\ldots\text{esceso}\end{matrix}\ \frac{1}{n}\ \Big|\ \text{Si}\ \sqrt[2^h.3^k]{C}=m,$$

$$\sqrt[2^h.3^k]{C+\frac{D}{F}}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix};\ \sqrt[2^h.3^k]{A}\begin{matrix}>\frac{m}{n}\ldots\text{defecto}\\<\frac{m+1}{n}\ldots\text{esceso}\end{matrix}\ \frac{1}{n}\ \Big|\ \text{Si}\ A\times n^{2^h.3^k}=C,\ \text{se tendrá:}\ \sqrt[2^h.3^k]{A}=\frac{\sqrt[2^h.3^k]{C}}{n};\ \sqrt[2^h.3^k]{C}\begin{matrix}>m\\<m+1\end{matrix};\ \sqrt[2^h.3^k]{A}\begin{matrix}>\frac{m}{n}\ldots\text{defecto}\\<\frac{m+1}{n}\ldots\text{esceso}\end{matrix}\ \frac{1}{n}$$

Todo número que es cuadrado perfecto tiene número impar de divisores y todo número que no lo es, tiene número par de ellos.

$N=a^p\times b^q\times c^r\times\ldots;\ n=(p+1)\times(q+1)\times(r+1)\times\ldots$ { Si N es cuadrado perfecto, todos los esponentes son pares y aumentados en una unidad serán impares... n será impar
Si N no es cuadrado perfecto, al menos uno de los esponentes será impar y aumentado en una unidad será par... n será par.

LÍMITES.

Cantidad constante. | *Cantidad variable.* | *Límite* de una cantidad variable. | Límite *superior*. Límite *inferior*.

$a-\frac{h}{x}$. Si x crece, $\frac{h}{x}$ decrece, $a-\frac{h}{x}$ crece y se acerca al valor de a constante é indefinidamente, puesto que la diferencia $a-(a-\frac{h}{x})=a-a+\frac{h}{x}=\frac{h}{x}$ puede llegar á ser menor que cualquier cantidad por pequeña que esta sea, por lo que lím. de $(a-\frac{h}{x})=a$, siendo límite superior.

$a-\frac{x}{h}$. Si x decrece, $\frac{x}{h}$ decrece, $a-\frac{x}{h}$ crece y se acerca al valor de a constante é indefinidamente, puesto que la diferencia $a-(a-\frac{x}{h})=a-a+\frac{x}{h}=\frac{x}{h}$ puede llegar á ser menor que cualquier cantidad por pequeña que sea, por lo que lím. de $(a-\frac{x}{h})=a$, siendo límite superior.

$a+\frac{h}{x}$. Si x crece, $\frac{h}{x}$ decrece, $a+\frac{h}{x}$ decrece y se acerca al valor de a constante é indefinidamente, puesto que la diferencia $(a+\frac{h}{x})-a=\frac{h}{x}$ puede llegar á ser menor que cualquier cantidad por pequeña que esta sea, por lo que lím. de $(a+\frac{h}{x})=a$, siendo límite inferior.

$a+\frac{x}{h}$. Si x decrece, $\frac{x}{h}$ decrece, $a+\frac{x}{h}$ decrece y se acerca al valor de a constante é indefinidamente, puesto que la diferencia $(a+\frac{x}{h})-a=\frac{x}{h}$ puede llegar á ser menor que cualquier cantidad por pequeña que esta sea, por lo que lím. de $(a+\frac{x}{h})=a$, siendo límite inferior.

Para que una cantidad constante sea límite de otra variable, no basta que el valor de esta se acerque al de la primera *constantemente,* sino que ha de hacerlo, además, *indefinidamente*; es decir, que la diferencia entre las dos ha de poder llegar á ser menor que cualquier cantidad por pequeña que esta sea. Así, aun cuando el valor de $a+b+\frac{h}{x}$ se acerca constantemente al de a, si x crece constantemente, porque $\frac{h}{x}$ decrece lo mismo y tambien $a+b+\frac{h}{x}$, no es su límite a, porque la diferencia $a+b+\frac{h}{x}-a=b+\frac{h}{x}$ no decrece indefinidamente, sino que el menor valor que puede tener es b. El límite de $a+h+\frac{h}{x}$ es $a+b$, á cuyo valor se acerca constantemente y además indefinidamente, pues que su diferencia $(a+b+\frac{h}{x})-(a+b)=\frac{h}{x}$ puede llegar á ser menor que cualquier cantidad, creciendo x. | Pueden tambien servir como ejemplo de cantidades variables que tienden hácia un límite determinado, los valores que toma una fraccion decimal cuyas cifras se reproducen periódicamente á medida que se toma mayor número de ellas, valores que tienen por límite el de la fraccion ordinaria equivalente á la decimal, suponiendo que el número de períodos de esta sea infinito. Lo son tambien los valores de una raiz incomensurable, aproximados por defecto ó por esceso á menos de unidades fraccionarias indefinidamente decrecientes, cuyo límite es el valor verdadero de esta raiz que, aun cuando no pueda espresarse exactamente, no por eso deja de ser completamente determinado.

Si dos cantidades variables que pasan por distintos estados de magnitud, tendiendo hácia ciertos límites, son constantemente iguales en todos aquellos estados de magnitud, sus límites serán iguales.

Sean a y b dos cantidades que pasan por los estados de magnitud $\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_m \ldots\ldots \text{ que tienden hácia el límite A} \\ b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots b_m \ldots\ldots \text{ que tienden hácia el límite B} \end{matrix}$ verificándose que

$$\left.\begin{matrix} a_1=b_1 \\ a_2=b_2 \\ a_3=b_3 \\ \vdots \quad \vdots \\ \text{A} \quad \text{B} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{A será límite, no solo de los valores } a_1, a_2, a_3, \ldots a_m \ldots, \text{ sino de los } b_1, b_2, b_3, \ldots b_m \ldots \\ \text{y} \\ \text{B será límite, no solo de los valores } b_1, b_2, b_3, \ldots b_m \ldots, \text{ sino de los } a_1, a_2, a_3, \ldots a_m \ldots \end{matrix} \Bigg\} \text{ puesto que se cumplen las condiciones necesarias para ello.}$$

Las cantidades A y B pueden ser límites superiores, en cuyo caso $\begin{matrix} a_1<a_2<a_3<\ldots<a_m<\ldots\ldots \\ b_1<b_2<b_3<\ldots<b_m<\ldots\ldots \end{matrix}$ ó límites inferiores, en cuyo caso $\begin{matrix} a_1>a_2>a_3>\ldots>a_m>\ldots\ldots \\ b_1>b_2>b_3>\ldots>b_m>\ldots\ldots \end{matrix}$ |

1.er caso. Si $A \mp B \begin{cases} A > B,\ A - B = h. & \text{Entre los valores de la 2.ª cantidad variable habrá uno } b_p \text{ que difiera en menos de } h \text{ de A que es lím. de todos ellos.} \\ B > A,\ B - A = k. & \text{Entre los valores de la 1.ª cantidad variable habrá uno } a_p \text{ que difiera en menos de } k \text{ de B que es lím. de todos ellos.} \end{cases}$

$A - b_p < h$, $A - b_p < A - B$, $b_p > B$, lo que es imposible, porque los valores de la 2.ª cant.d no pueden igualar y menos esceder á su lím. Así pues, $A \not> B$
$B - a_p < k$, $B - a_p < A - B$, $a_p > A$, lo que es imposible, porque los valores de la 1.ª cant.d no pueden igualar y menos esceder á su lím. Así pues, $B \not> A$ $\Big\} A = B$

2.º caso. Si $A \mp B \begin{cases} A > B,\ A - B = h. & \text{Entre los valores de la 1.ª cantidad variable habrá uno } a_p \text{ que difiera en menos de } h \text{ de B que es lím. de todos ellos.} \\ B > A,\ B - A = k. & \text{Entre los valores de la 2.ª cantidad variable habrá uno } b_p \text{ que difiera en menos de } k \text{ de A que es lím. de todos ellos.} \end{cases}$

$a_p - B < h$, $a_p - B < A - B$, $a_p < A$, lo que es imposible, porque los valores de la 1.ª cant.d no pueden igualar y menos esceder á su lím. Así pues, $A \not> B$
$b_p - A < k$, $b_p - A < A - B$, $b_p < B$, lo que es imposible, porque los valores de la 2.ª cant.d no pueden igualar y menos esceder á su lím. Así pues, $B \not> A$ $\Big\} A = B.$

Recordando la definicion de la multiplicacion y suponiendo que en el producto $A \times B$ sea A...incomensurable y B...incomensurable ó A...comensurable y B...incomensurable ó A...incomensurable y B...comensurable se verá que para dichos casos no tiene interpretacion alguna. Hay, pues, que esplicar cómo se interpreta un producto en el que hay factores incomensurables y, en general, toda operacion en la que aparezcan cantidades de dicha clase. El resultado de toda operacion en la cual entren cantidades incomenrables se considera como el límite de los valores que se obtienen reemplazando dichas cantidades incomensurables por otras comensurables *con el mismo grado de aproximacion* que tiendan hácia el valor de las incomensurables.

$A \times B$, A, B incomen.s		
a_1	b_1	$a_1 \times b_1$
a_2	b_2	$a_2 \times b_2$
a_3	b_3	$a_3 \times b_3$
⋮	⋮	⋮
A	B	$A \times B$

$A \times B$, A...comen.ble B...incom.ble	
b_1	$A \times b_1$
b_2	$A \times b_2$
b_3	$A \times b_3$
⋮	⋮
B	$A \times B$

$A \times B$, A...incom.ble B...comen.ble	
a_1	$a_1 \times B$
a_2	$a_2 \times B$
a_3	$a_3 \times B$
⋮	⋮
A	$A \times B$

El órden de factores no altera el producto aun cuando los dos factores ó uno de ellos sean incomensurables.

$A \times B$, A, B incomen.s		
a_1	b_1	$a_1 \times b_1 = b_1 \times a_1$
a_2	b_2	$a_2 \times b_2 = b_2 \times a_1$
a_3	b_3	$a_3 \times b_2 = b_3 \times a_1$
⋮	⋮	⋮
A	B	$A \times B = B \times A$

$A \times B$, A...comen.ble B...incom.ble	
b_1	$A \times b_1 = b_1 \times A$
b_2	$A \times b_2 = b_2 \times A$
b_3	$A \times b_3 = b_3 \times A$
⋮	⋮
B	$A \times B = B \times A$

$A \times B$, A...incom.ble B...comen.ble	
a_1	$a_1 \times B = B \times a_1$
a_2	$a_2 \times B = B \times a_2$
a_3	$a_3 \times B = B \times a_3$
⋮	⋮
A	$A \times B = B \times A$

Lo mismo se demostraria si el número de factores fuese mayor. | Los dos teoremas de la multiplicacion y los dos de la division relativos á la multiplicacion ó division de un número por un producto ó de un producto por un número, quedan ya demostrados aun cuando alguno de los factores ó el número ó todos ellos sean incomensurables, toda vez que se apoyaban en que el órden de factores no altera el producto y este principio está ya demostrado para todos los casos. Tambien queda demostrado que, para elevar un producto de varios factores á una potencia, se eleva á dicha potencia cada uno de los factores, aun cuando los factores sean todos ó parte incomensurables, y asimismo que para estraer la raiz de cualquier grado de un producto se estrae la raiz del mismo grado de cada factor, aunque estas raices no sean exactas, pues que la primera de estas proposiciones se funda en los dos teoremas citados de la multiplicacion y la segunda en la primera. | Para multiplicar divisiones indicadas, aunque sus términos sean todos ó algunos incomensurables, se sigue la misma regla que para multiplicar fracciones. $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}$. A, B, C y D son incomensurables.

$$\begin{array}{llll l}
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \frac{a_1}{b_1}\times\frac{c_1}{d_1}=\frac{a_1\times c_1}{b_1\times d_1}\\
a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \frac{a_2}{b_2}\times\frac{c_2}{d_2}=\frac{a_2\times c_2}{b_2\times d_2}\\
a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & \frac{a_3}{b_3}\times\frac{c_3}{d_3}=\frac{a_3\times c_3}{b_3\times d_3}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
A & B & C & D & \frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{A\times C}{B\times D}
\end{array}$$

Si alguno ó algunos de los términos de las divisiones dadas fuese comensurable, permaneceria constante en el cálculo anterior la letra que le representa y la demostracion se haria lo mismo. | La regla para elevar una fraccion ó un cociente indicado á una potencia se fundaba en la multiplicacion de fracciones ó divisiones indicadas, y como acabamos de hacer ver que esta operacion se efectúa lo mismo aun cuando los términos de las divisiones sean incomensurables, queda ya demostrada aquella regla para todos los casos y tambien la que se dió para estraer la raiz de cualquier grado de una fraccion ó cociente indicado. | Interpretando como se ha dicho el resultado de una operacion indicada entre cantidades incomensurables, se puede demostrar de un modo general que las reglas de cálculo de las cantidades comensurables pueden aplicarse tambien á las incomensurables. Representemos por F(A, B, C,...) una operacion cualquiera indicada entre las cantidades A, B, C... y supongamos que, siendo dichas cantidades comensurables, se trasforma por las reglas de cálculo de estas cantidades en f(A, B, C,...). Vamos á hacer ver que se trasformará del mismo modo, aun cuando todas ó parte de estas cantidades sean incomensurables, ó lo que es igual, que aquellas reglas de cálculo son tambien aplicables cuando las cantidades sean incomensurables.

$$\begin{array}{l}
a_1,\ b_1,\ c_1,\ldots;\quad F(a_1, b_1, c_1,\ldots)=f(a_1, b_1, c_1,\ldots)\\
a_2,\ b_2,\ c_2,\ldots;\quad F(a_2, b_2, c_2,\ldots)=f(a_2, b_2, c_2,\ldots)\\
a_3,\ b_3,\ c_3,\ldots;\quad F(a_3, b_3, c_3,\ldots)=f(a_3, b_3, c_3,\ldots)\\
\vdots\\
A,\ B,\ C;\ldots;\quad F(A, B, C,\ldots)=f(A, B, C,\ldots)
\end{array}$$

Si alguna ó algunas de las cantidades fuese comensurable, permanecerian constantes en el cálculo anterior las letras que las representan y la demostracion se haria del mismo modo.

La suma de un número finito de cantidades variables que tienden hácia límites determinados, tiene por límite la suma de estos límites. Sean $a, b, c,\ldots n$ varias cantidades variables en *número finito* que tienden respectivamente hácia los límites A, B, C,... N y representemos por $\alpha, \beta, \gamma,\ldots \mu$ las diferencias tambien variables y decrecientes indefinidamente que hay entre aquellas cantidades y sus límites. Tendremos, segun estos sean superiores ó inferiores,

$$\begin{array}{lcl}
a=A\mp\alpha & & \lim.\ a=A\\
b=B\mp\beta & & \lim.\ b=B\\
c=C\mp\gamma & \text{y} & \lim.\ c=C\\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots\\
n=N\mp\mu & & \lim.\ n=N
\end{array}$$

$a+b+c+\ldots+n=A+B+C+\ldots+N\mp\alpha\mp\beta\mp\gamma\mp\ldots\mp\mu$. Representemos por s la suma de las cantidades variables, y por S la suma de sus límites, con lo que la igualdad anterior se convertirá en $s=S\mp\alpha\mp\beta\mp\gamma\mp\ldots\mp\mu$. Como estas dos cantidades variables serán constantemente iguales en todos los estados de magnitud por los cuales pasen, sus límites serán iguales, por lo que $\lim.\ s=\lim.\ (S\mp\alpha\mp\beta\mp\gamma\mp\ldots\mp\mu)$. La diferencia entre S y s será lo mayor posible para cada estado particular de magnitud de las cantidades $\alpha, \beta, \gamma,\ldots \mu$ cuando estas cantidades se hayan de sumar todas á s ó cuando todas se hayan de restar; pero, aun en este caso, esta diferencia será menor que $\lambda\times m$, siendo λ la mayor de aquellas diferencias y m el número de las cantidades variables que se consideran. Mas esta cantidad $\lambda\times m$ decrece indefinidamente cuando las cantidades se aproximan á sus límites y se reduciria á 0 cuando las cantidades llegasen á ellos. Con mas razon se reducirá á cero aquella diferencia entre S y s, aun en el caso de que fuera lo mayor posible y aun con mayor motivo cuando las diferencias entre las cantidades y sus límites estuviesen sumadas las unas y restadas las otras. Tendremos pues que $\text{lím. } s=S$ ó bien $\text{lím. }(a+b+c+...+n)=A+B+C+...+N$ ó $\text{lím. }(a+b+c+...+n)=\text{lím. } a+\text{lím. } b+\text{lím. } c+...+\text{lím. } n$ | *La diferencia entre dos cantidades variables que se aproximan á límites determinados, tiene por límite la diferencia de estos límites.* $a,\ b;\ a-b=d;\ a=b+d;$ $\text{lím. } a=\text{lím. } b+\text{lím. } d;$ $\text{lím. } d=\text{lím. } a-\text{lím. } b;$ $\text{lím. }(a-b)=\text{lím. } a-\text{lím. } b$ | *El límite del producto de dos cantidades variables que tienden hácia ciertos límites es el producto de estos límites.* Sean a y b las dos cantidades variables, A y B sus límites y α y β las diferencias tambien variables entre aquellas y estos. Siguiendo una marcha parecida á la de la demostracion penúltima, tendremos: $\begin{matrix} a=A\mp\alpha & \text{lím. } a=A \\ b=B\mp\beta & \text{lím. } b=B \end{matrix}$; $a\times b=(A\mp\alpha)\times(B\mp\beta);$ $a\times b=A\times B\mp\alpha\times B\mp A\times\beta\mp\alpha\times\beta;$ $\text{lím. }(a\times b)=\text{lím. }(A\times B\mp\alpha\times B\mp A\times\beta\mp\alpha\times\beta);$ $\text{lím. }(a\times b)=A\times B=\text{lím. } a\times\text{lím. } b$ | *El límite del producto de varios factores variables es el producto de los límites de dichos factores.* $\text{lím. }(a\times b\times c\times...\times h\times k)=\text{lím. }\{a\times(b\times c\times.....\times h\times k)\}=\text{lím. } a\times\text{lím. }(b\times c\times.....\times h\times k)=\text{lím. } a\times\text{lím. }\{b\times(c\times.....\times h\times k)\}=\text{lím. } a\times\text{lím. } b\times\text{lím. }(c\times.....\times h\times k)=\text{lím. } a\times\text{lím. } b\times\text{lím. }\{c\times(....\times h\times k)\}=\text{lím. } a\times\text{lím. } b\times\text{lím. } c\times\text{lím. }(....\times h\times k)=...=\text{lím. } a\times\text{lím. } b\times\text{lím. } c\times....\times\text{lím. }(h\times k)=\text{lím. } a\times\text{lím. } b\times\text{lím. } c\times....\times\text{lím. } h\times\text{lím. } k$ | *El cociente de dos cantidades variables que se aproximan á límites determinados tiene por límite el cociente de estos límites.* $a,\ b;\ \frac{a}{b}=c;\ a=b\times c;$ $\text{lím. } a=\text{lím. }(b\times c)=\text{lím. } b\times\text{lím. } c;$ $\text{lím. } c=\frac{\text{lím. } a}{\text{lím. } b};$ $\text{lím. }\frac{a}{b}=\frac{\text{lím. } a}{\text{lím. } b}$ | *Toda potencia de una cantidad variable tiene por límite el resultado de elevar al mismo esponente el límite de aquella cantidad.* $\text{lím. } a^m=\text{lím. }(a\times a\times a\times...^m)=\text{lím. } a\times\text{lím. } a\times\text{lím. } a\times...^m=(\text{lím. } a)^m$ Se supone que el esponente es entero, única clase de esponentes que se conoce hasta ahora. | *La raiz de una cantidad variable tiene por límite el resultado de estraer la raiz del mismo índice del límite de aquella cantidad.* $\sqrt[m]{a}=h;\ a=h^m;$ $\text{lím. } a=\text{lím. }(h^m)=(\text{lím. } h)^m;$ $\text{lím. } h=\sqrt[m]{\text{lím. } a};$ $\text{lím. }\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{\text{lím. } a}.$ Se supone que m es número entero.

RAZONES Y PROPORCIONES.

Razon $\begin{cases}\text{Razon por } \textit{diferencia} \\ \text{Razon por } \textit{cociente}\end{cases}$ $24,6;\ \begin{matrix}24-6=18 \\ \frac{24}{6}=4\end{matrix};\ 3,15;\ \begin{matrix}15-3=12 \\ \frac{3}{15}=\frac{1}{5}\end{matrix};\ a,\ b;\ \begin{matrix}a-b=9 \text{ ó } b-a=9 \\ \frac{a}{b}=r\end{matrix};$ $\begin{matrix}24.6,\ 3.15,\ a.b \\ 24:6,\ 3:15,\ a:b\end{matrix}$ | *Antecedente.* | *Consecuente.* | La razon por diferencia entre dos números es la diferencia entre el antecedente y el consecuente ó entre el consecuente y el antecedente, segun sea uno ú otro mayor. La razon por cociente entre dos números es *siempre* el cociente de la division del antecedente por el consecuente.

Proporcion $\begin{cases}\text{Proporcion por } \textit{diferencia} \text{ ó } \textit{aritmética} \text{ ó } \textit{equidiferencia}. \\ \text{Proporcion por } \textit{cociente} \text{ ó } \textit{geométrica} \text{ ó simplemente } \textit{proporcion}.\end{cases}$ | $\begin{matrix}16-4=12 \\ 20-8=12\end{matrix};$ $16-4=20-8;$ $16.4:20.8$ ó $4.16:8:20$ |

$\left.\begin{matrix} a-b=q \\ c-d=q \end{matrix}\right\}$; $a-b=c-d$; $a.b:c.d$ ó $b.a:d.c$ | $\left.\begin{matrix} \frac{12}{4}=3 \\ \frac{18}{6}=3 \end{matrix}\right\}$; $\frac{12}{4}=\frac{18}{6}$; $12:4::18:6$ | $\left.\begin{matrix} \frac{a}{b}=r \\ \frac{c}{d}=r \end{matrix}\right\}$; $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $a:b::c:d$ | *Términos.* | ***Medios.*** *Estremos.* | Dos *razones.*

Dos *antecedentes.* Dos *medios.* Dos *consecuentes.* Dos *estremos.* | Proporcion *continua.* | $\left.\begin{matrix} 22-17=5 \\ 17-12=5 \end{matrix}\right\}$; $22-17=17-12$; $22.17:17.12$; $\div 22.17.12$ | $\left.\begin{matrix} 14-10=4 \\ 18-14=4 \end{matrix}\right\}$; $14-10=18-14$;

$10.14:14.8$; $\div 10.14:18$ | $\left.\begin{matrix} a-b=q \\ b-c=q \end{matrix}\right\}$; $a-b=b-c$; $a.b:b.c$; $\div a.b.c$ | $\left.\begin{matrix} b-a=q \\ c-b=q \end{matrix}\right\}$; $b-a=c-b$; $a.b:b.c$; $\div a.b.c$ | $\left.\begin{matrix} \frac{15}{30}=\frac{1}{2} \\ \frac{30}{60}=\frac{1}{2} \end{matrix}\right\}$; $\frac{15}{30}=\frac{30}{60}$, $15:30::30:60$;

$∺ 15:30:60$ | $\left.\begin{matrix} \frac{a}{b}=r \\ \frac{b}{c}=r \end{matrix}\right\}$; $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$; $a:b::b:c$; $∺ a:b:c$ | *Medio ó media diferencial.* *Medio ó media proporcional.* |

EQUIDIFERENCIAS.

En toda equidiferencia la suma de estremos es igual á la suma de medios. $17.7:14.4$; 10; $17.17:14.14$; $17+14=17+14$; $17+4=7+14$; $5.8:12.15$; 3; $8.8:15.15$; $8+15=8+15$; $5+15=8+12$ | Otra demostracion. $a.b:c.d$. Si va de mayor á menor, $a-b=c-d$; $b+d$; $a-b+b+d=c-d+b+d$; $a+d=c+b$. Si va de menor á mayor, $b-a=d-c$; $a+c$; $b-a+a+c=d-c+a+c$; $b+c=d+a$ | *Si cuatro números no forman equidiferencia, la suma de estremos no es igual á la de medios.* 12.4, 18.7; 8; 12.12, 18.15; $12+15\neq 12+18$; $12+7\neq 4+18$; 3.7, 5.19; 4; 7.7, 9.19; $7+19\neq 7+9$; $3+19\neq 7+5$ | Otra demostracion. $a.b$, $c.d$. Si la primera razon va de mayor á menor, se tendrá que $a-b\neq c-d$; $b+d$; $a-b+b+d\neq c-d+b+d$; $a+d\neq c+b$. Si la primera razon va de menor á mayor, tendremos que $b-a\neq d-c$; $a+c$; $b-a+a+c\neq d-c+a+c$; $b+c\neq d+a$ | *Si cuatro números son tales que la suma de los estremos es igual á la de los medios, los cuatro números forman equidiferencia.* | *Si cuatro números son tales que la suma de los estremos no es igual á la de los medios, los cuatro números no forman equidiferencia.* | *En toda equidiferencia continua la suma de estremos es igual al doble del término medio.* $\div a.b.c$; $a.b:b.c$; $a+c=b+b$; $a+c=2b$ | $\div 14.8.2$; $14.8:8.2$; $14+2=8+8$; $14+2=2\times 8$ | $\div 5.8.11$; $5.8:8.11$; $5+11=8+8$; $5+11=2\times 8$ | Razonamiento para encontrar un estremo ó un medio de una equidiferencia en que se conocen los otros tres términos. $a.b:c.x$, $x=b+c-a$; $8.4:10.x$, $x=4+10-8=6$ | $x.b:c.d$, $x=b+c-d$; $x.12:6.2$; $x=12+6-2=16$ $a.b:x.d$, $x=a+d-b$; $10.3:x.8$, $x=10+8-3=15$ | $a.x:c.d$, $x=a+d-c$; $20.x:14.4$, $x=20+4-14=10$ | Razonamiento para encontrar el valor de uno de los estremos de una equidiferencia contínua cuando se conoce el otro y el término medio. $\div a.b.x$, $x=2b-a$; $\div 8.10.x$, $x=2\times 10-8=12$ | $\div x.b.c$, $x=2b-c$; $\div x.10.3$, $x=2\times 10-3=17$ | Razonamiento para encontrar el término medio de una equidiferencia contínua cuando se conocen los estremos ó sea para hallar una *media diferencial* entre dos números dados. $\div a.x.c$, $x=\frac{a+c}{2}$; $\div 9.x.5$, $x=\frac{9+5}{2}=7$ | Trasformaciones que se pueden hacer en una equidiferencia sin que esta deje de subsistir y razonamiento para demostrarlo.

	$a.b:c.d$; $a+d=b+c$	$7.10:11.14$; $7+14=10+11$
Alternar los medios.	$a.c:b.d$; $a+d$, $c+b$	$7.11:10.14$; $7+14$, $11+10$
Alternar los estremos.	$d.b:c.a$; $d+a$, $b+c$	$14.10:11.7$; $14+7$, $10+11$
Invertir la equidiferencia.	$b.a:d.c$; $b+c$, $a+d$	$10.7:14.11$; $10+11$, $7+14$
Aumentar ó disminuir un medio y un estremo en una misma cantidad...	$a\pm m.b\pm m:c.d$; $(a\pm m)+d$, $(b\pm m)+c$	$7\pm 2.10\pm 2:11.14$; $(7\pm 2)+14$, $(10\pm 2)+11$
	$a\pm m.b:c\pm m.d$; $(a\pm m)+d$, $b+(c\pm m)$	$7\pm 2.10:11\pm 2.14$; $(7\pm 2)+14$, $10+(11\pm 2)$
	$a.b\pm m:c.d\pm m$; $a+(d\pm m)$, $(b\pm m)+c$	$7.10\pm 2:11.14\pm 2$; $7+(14\pm 2)$, $(10\pm 2)+11$
	$a.b:c\pm m.d\pm m$; $a+(d\pm m)$, $b+(c\pm m)$	$7.10:11\pm 2.14\pm 2$; $7+(14\pm 2)$, $10+(11\pm 2)$
Multiplicar ó dividir todos los términos por una misma cantidad......	$a\times m.b\times m:c\times m.d\times m$; $a\times m+d\times m$, $b\times m+c\times m$	$7\times 3.10\times 3:11\times 3.14\times 3$; $7\times 3+14\times 3$, $10\times 3+11\times 3$
	$\frac{a}{m}.\frac{b}{m}:\frac{c}{m}.\frac{d}{m}$; $\frac{a}{m}+\frac{d}{m}$, $\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$	$\frac{7}{8}.\frac{10}{8}:\frac{11}{8}.\frac{14}{8}$; $\frac{7}{8}+\frac{14}{8}$, $\frac{10}{8}+\frac{11}{8}$

Si se suman ordenadamente los términos de varias equidiferencias, las sumas forman equidiferencia tambien.

$$\left.\begin{array}{l} a.b:c.d;\ a+d=b+c \\ a'.b':c'.d';\ a'+d'=b'+c' \\ a''.b'':c''.d'';\ a''+d''=b''+c'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} a+a'+a''+\ldots.b+b'+b''+\ldots:c+c'+c''+\ldots.d+d'+d''+\ldots;\ a+a'+a''+\ldots+d+d'+d''+\ldots,\ b+b'+b''+\ldots+c+c'+c''+\ldots$$ |

$$\left.\begin{array}{l} 3.5:7.9;\ 3+9=5+7 \\ 1.4:5.8;\ 1+8=4+5 \\ 2.7:4:9;\ 2+9=7+4 \end{array}\right\} 3+1+2.5+4+7:7+5+4.9+8+9;\ 3+1+2+9+8+9,\ 5+4+7+7+5+4$$

| Si se restan ordenadamente dos equidiferencias, las restas forman equidiferencia tambien.

$$\left.\begin{array}{l} a.b:c.d;\ a+d=b+c \\ a'.b':c'.d';\ a'+d'=b'+c' \end{array}\right\} a-a'.b-b':c-c'.d-d';\ a-a'+d-d';\ b-b'+c-c'$$ |

$$\left.\begin{array}{l} 12.8:17.13;\ 12+13=8+17 \\ 3.5:6.8;\ 3+8=5+6 \end{array}\right\} 12-3.8-5:17-6.13-8;\ 12-3+13-8;\ 8-5+17-6$$

| Cuando dos proporciones por diferencia tienen una razon

comun, las otras dos forman equidiferencia. $\left.\begin{matrix} a.b:c.d \\ a'.b':c.d \end{matrix}\right\}$ Si van de mayor á menor $\begin{matrix} a-b=c-d \\ a'-b'=c-d \end{matrix}$; $a-b=a'-b'$; $a.b:a'.b'$. Si las equidiferencias van de menor á mayor $\begin{matrix} b-a=d-c \\ b'-a'=d-c \end{matrix}$; $b-a=b'-a'$; $a.b:a'.b'$ | $\begin{matrix} 14.9:17.12 \\ 23.18:17.12 \end{matrix}$; $\begin{matrix} 14-9=17-12 \\ 23-18=17-12 \end{matrix}$; $14-9=23-18$; $14.9:23.18$ | $\begin{matrix} 4.10:1.7 \\ 4.10:8.14 \end{matrix}$; $\begin{matrix} 10-4=7-1 \\ 10-4=14-8 \end{matrix}$; $7-1=14-8$; $1.7:8.14$ | Cuando dos proporciones por diferencia tienen los antecedentes ó los consecuentes iguales, los otros cuatro términos forman equidiferencia. $\begin{matrix} a.b:c.d \\ a.b':c.d' \end{matrix}$; $\begin{matrix} a.c:b.d \\ a.c:b'.d' \end{matrix}$; $b.d:b'.d'$ | $\begin{matrix} 3.8:7.12 \\ 3.10:7.14 \end{matrix}$; $\begin{matrix} 3.7:8.12 \\ 3.7:10.14 \end{matrix}$; $8.12:10.14$ | $\begin{matrix} a.b:c.d \\ a'.b:c'.d \end{matrix}$; $\begin{matrix} a.c:b.d \\ a'.c':b.d \end{matrix}$; $a.c:a'.c'$ | $\begin{matrix} 17.10:12.5 \\ 24.10:19.5 \end{matrix}$; $\begin{matrix} 17.12:10.5 \\ 24.19:10.5 \end{matrix}$; $17.12:24.19$ |

PROPORCIONES POR COCIENTE.

En toda proporcion por cociente el producto de estremos es igual al producto de medios. $21:7::12:4$; 3; $21:21::12:12$; $21\times12=21\times12$; $21\times4=7\times12$; Otra demostracion. $a:b::c:d$; $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $b\times d$; $\frac{a\times b\times d}{b}=\frac{c\times b\times d}{d}$; $a\times d=c\times b$ | *Si cuatro números no forman proporcion, el producto de estremos no es igual al de medios.* $30:6$, $23:7$; 5; $30:30$, $23:21$; $30\times21\neq30\times23$; $30\times7\neq6\times23$ | Otra demostracion. $a:b$, $c:d$; $\frac{a}{b}\neq\frac{c}{d}$; $b\times d$; $\frac{a\times b\times d}{b}\neq\frac{c\times b\times d}{d}$; $a\times d\neq c\times b$ | *Si cuatro números son tales que el producto de los estremos es igual al de los medios, los cuatro números forman proporcion.* | *Si cuatro números son tales que el producto de los estremos no es igual al de los medios, los cuatro números no forman proporcion.* | *En toda proporcion contínua por cociente el producto de estremos es igual al cuadrado del término medio.* $\div a:b:c$; $a:b::b:c$; $a\times c=b\times b$; $a\times c=b^2$ | $\div 8:4:2$; $8:4::4:2$; $8\times2=4\times4$; $8\times2=4^2$ | Razonamiento para encontrar un estremo ó un medio de una proporcion en que se conocen los otros tres términos. $a:b::c:x$, $x=\frac{b\times c}{a}$; $14:7::16:x$, $x=\frac{7\times16}{14}=8$ | $x:b::c:d$, $x=\frac{b\times c}{d}$; $x:8::15:3$, $x=\frac{8\times15}{3}=40$ | $a:b::x:d$, $x=\frac{a\times d}{b}$; $14:3::x:7$, $x=\frac{14\times7}{3}=\frac{98}{3}$ | $a:x::c:d$, $x=\frac{a\times d}{c}$; $24:x::3:15$ $x=\frac{24\times15}{3}=120$ | Razonamiento para encontrar uno de los estremos de una proporcion contínua cuando se conoce el otro y el término medio. $\div a:b:x$, $x=\frac{b^2}{a}$; $\div 20:10:x$, $x=\frac{10^2}{20}=5$ | $\div x:b:c$, $x=\frac{b^2}{c}$; $\div x:8:4$, $x=\frac{8^2}{4}=16$ | Razonamiento para encontrar el término medio de una proporcion contínua por cociente cuando se conocen los estremos, ó sea para hallar una *media proporcional* entre dos números dados. $\div a:x:b$, $x=\sqrt{a\times b}$; $\div 5:x:180$, $x=\sqrt{5\times180}=30$ | Trasformaciones que se pueden hacer en una proporcion sin que esta deje de subsistir y razonamiento para demostrarlo.

entre las cantidades y sus límites estuviesen sumadas las unas y restadas las otras. Tendremos pues que lím. $s=S$ ó bien lím. $(a+b+c+...+n)=A+B+C+...+N$ ó lím. $(a+b+c+...+n)=$ lím. $a+$lím. $b+$lím. $c+...+$lím. n | *La diferencia entre dos cantidades variables que se aproximan á límites determinados, tiene por límite la diferencia de estos límites.* a, b; $a-b=d$; $a=b+d$; lím. $a=$ lím. $b+$lím. d; lím. $d=$ lím. $a-$lím. b; lím. $(a-b)=$ lím. $a-$lím. b | *El límite del producto de dos cantidades variables que tienden hácia ciertos límites es el producto de estos límites.* Sean a y b las dos cantidades variables, A y B sus límites y α y β las diferencias tambien variables entre aquellas y estos. Siguiendo una marcha parecida á la de la demostracion penúltima, tendremos: $\begin{matrix} a=A\mp\alpha \\ b=B\mp\beta \end{matrix}$; $\begin{matrix} \text{lím. } a=A \\ \text{lím. } b=B \end{matrix}$; $a\times b=(A\mp\alpha)\times(B\mp\beta)$; $a\times b=A\times B\mp\alpha\times B\mp A\times\beta\mp\alpha\times\beta$; lím. $(a\times b)=$ lím. $(A\times B\mp\alpha\times B\mp A\times\beta\mp\alpha\times\beta)$; lím. $(a\times b)=A\times B=$ lím. $a\times$lím. b | *El límite del producto de varios factores variables es el producto de los límites de dichos factores.* lím. $(a\times b\times c\times...\times h\times k)=$ lím. $\{a\times(b\times c\times.....\times h\times k)\}=$ lím. $a\times$lím. $(b\times c\times.....\times h\times k)=$ lím. $a\times$lím. $\{b\times(c\times.....\times h\times k)\}=$ lím. $a\times$lím. $b\times$lím. $(c\times.....\times h\times k)=$ lím. $a\times$lím. $b\times$ lím. $\{c\times(....\times h\times k)\}=$ lím. $a\times$lím. $b\times$lím. $c\times$lím. $(....\times h\times k)=....=$ lím. $a\times$lím. $b\times$lím. $c\times....\times$lím. $(h\times k)=$ lím. $a\times$lím. $b\times$lím. $c\times....\times$lím. $h\times$lím. k | *El cociente de dos cantidades variables que se aproximan á límites determinados tiene por límite el cociente de estos límites.* a, b; $\frac{a}{b}=c$; $a=b\times c$; lím. $a=$ lím. $(b\times c)=$ lím. $b\times$lím. c; lím. $c=\frac{\text{lím. } a}{\text{lím. } b}$; lím. $\frac{a}{b}=\frac{\text{lím. } a}{\text{lím. } b}$ | *Toda potencia de una cantidad variable tiene por límite el resultado de elevar al mismo esponente el límite de aquella cantidad.* lím. $a^m=$ lím. $(a\times a\times a\times...^m)=$ lím. $a\times$lím. $a\times$lím. $a\times...^m=(\text{lím. } a)^m$ Se supone que el esponente es entero, única clase de esponentes que se conoce hasta ahora. | *La raiz de una cantidad variable tiene por límite el resultado de estraer la raiz del mismo índice del límite de aquella cantidad.* $\sqrt[m]{a}=h$; $a=h^m$; lím. $a=$ lím. $(h^m)=(\text{lím. } h)^m$; lím. $h=\sqrt[m]{\text{lím. } a}$; lím. $\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{\text{lím. } a}$. Se supone que m es número entero.

RAZONES Y PROPORCIONES.

Razon $\begin{cases} \text{Razon por } \textit{diferencia} \\ \text{Razon por } \textit{cociente} \end{cases}$ 24,6; $\begin{matrix} 24-6=18 \\ \frac{24}{6}=4 \end{matrix}$; 3,15; $\begin{matrix} 15-3=12 \\ \frac{3}{15}=\frac{1}{5} \end{matrix}$; a, b; $\begin{matrix} a-b=9 \text{ ó } b-a=9 \\ \frac{a}{b}=r \end{matrix}$; $\begin{matrix} 24.6,\ 3.15,\ a.b \\ 24:6,\ 3:15,\ a:b \end{matrix}$ | *Antecedente.* | *Consecuente.* | La razon por diferencia entre dos números es la diferencia entre el antecedente y el consecuente ó entre el consecuente y el antecedente, segun sea uno ú otro mayor. La razon por cociente entre dos números es *siempre* el cociente de la division del antecedente por el consecuente.

Proporcion $\begin{cases} \text{Proporcion por } \textit{diferencia} \text{ ó } \textit{aritmética} \text{ ó } \textit{equidiferencia.} \\ \text{Proporcion por } \textit{cociente} \text{ ó } \textit{geométrica} \text{ ó simplemente } \textit{proporcion.} \end{cases}$ | $\begin{matrix} 16-4=12 \\ 20-8=12 \end{matrix}$; $16-4=20-8$; $16.4:20.8$ ó $4.16:8:20$ |

$\begin{matrix} a-b=q \\ c-d=q \end{matrix}$; $a-b=c-d$; $a.b:c.d$ ó $b.a:d.c$ | $\frac{12}{4}=3$, $\frac{18}{6}=3$; $\frac{12}{4}=\frac{18}{6}$; $12:4::18:6$ | $\frac{a}{b}=r$, $\frac{c}{d}=r$; $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $a:b::c:d$ | *Términos.* | *Medios.* *Estremos.* | Dos *razones.*

Dos *antecedentes.* Dos *medios.* Dos *consecuentes.* Dos *estremos.* | Proporcion *contínua.* | $\begin{matrix} 22-17=5 \\ 17-12=5 \end{matrix}$; $22-17=17-12$; $22.17:17.12$; $\div 22.17.12$ | $\begin{matrix} 14-10=4 \\ 18-14=4 \end{matrix}$; $14-10=18-14$;

$10.14:14.8$; $\div 10.14:18$ | $\begin{matrix} a-b=q \\ b-c=q \end{matrix}$; $a-b=b-c$; $a.b:b.c$; $\div a.b.c$ | $\begin{matrix} b-a=q \\ c-b=q \end{matrix}$; $b-a=c-b$; $a.b:b.c$; $\div a.b.c$ | $\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$, $\frac{30}{60}=\frac{1}{2}$; $\frac{15}{30}=\frac{30}{60}$; $15:30::30:60$;

$\div\div 15:30:60$ | $\frac{a}{b}=r$, $\frac{b}{c}=r$; $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$; $a:b::b:c$; $\div\div a:b:c$ | *Medio ó media diferencial.* *Medio ó media proporcional.* |

EQUIDIFERENCIAS.

En toda equidiferencia la suma de estremos es igual á la suma de medios. $17.7:14.4$; 10; $17.17:14.14$; $17+14=17+14$; $17+4=7+14$; $5.8:12.15$; 3; $8.8:15.15$; $8+15=8+15$; $5+15=8+12$ | Otra demostracion. $a.b:c.d$. Si va de mayor á menor, $a-b=c-d$; $b+d$; $a-b+b+d=c-d+b+d$; $a+d=c+b$. Si va de menor á mayor, $b-a=d-c$; $a+c$; $b-a+a+c=d-c+a+c$; $b+c=d+a$ | *Si cuatro números no forman equidiferencia, la suma de estremos no es igual á la de medios.* 12.4, 18.7; 8; 12.12, 18.15; $12+15\neq 12+18$; $12+7\neq 4+18$; 3.7, 5.19; 4; 7.7, 9.19; $7+19\neq 7+9$; $3+19\neq 7+5$ | Otra demostracion. $a.b$, $c.d$. Si la primera razon va de mayor á menor, se tendrá que $a-b\neq c-d$; $b+d$; $a-b+b+d\neq c-d+b+d$; $a+d\neq c+b$. Si la primera razon va de menor á mayor, tendremos que $b-a\neq d-c$; $a+c$; $b-a+a+c\neq d-c+a+c$; $b+c\neq d+a$ | *Si cuatro números son tales que la suma de los estremos es igual á la de los medios, los cuatro números forman equidiferencia.* | *Si cuatro números son tales que la suma de los estremos no es igual á la de los medios, los cuatro números no forman equidiferencia.* | *En toda equidiferencia contínua la suma de estremos es igual al doble del término medio.* $\div a.b.c$; $a.b:b.c$; $a+c=b+b$; $a+c=2b$ | $\div 14.8.2$; $12.8:8.2$; $12+2=8+8$; $12+2=2\times 8$ | $\div 5.8.11$; $5.8:8.11$; $5+11=8+8$; $5+11=2\times 8$ | Razonamiento para encontrar un estremo ó un medio de una equidiferencia en que se conocen los otros tres términos. $a.b:c.x$, $x=b+c-a$; $8.4:10.x$, $x=4+10-8=6$ | $x.b:c.d$, $x=b+c-d$; $x.12:6.2$; $x=12+6-2=16$ $a.b:x.d$, $x=a+d-b$; $10.3:x.8$, $x=10+8-3=15$ | $a.x:c.d$, $x=a+d-c$; $20.x:14.4$, $x=20+4-14=10$ | Razonamiento para encontrar el valor de uno de los estremos de una equidiferencia contínua cuando se conoce el otro y el término medio. $\div a.b.x$, $x=2b-a$; $\div 8.10.x$, $x=2\times10-8=12$ | $\div x.b.c$, $x=2b-c$; $\div x.10.3$, $x=2\times10-3=17$ | Razonamiento para encontrar el término medio de una equidiferencia contínua cuando se conocen los estremos ó sea para hallar una *media diferencial* entre dos números dados. $\div a.x.c$, $x=\frac{a+c}{2}$; $\div 9.x.5$, $x=\frac{9+5}{2}=7$ | Trasformaciones que se pueden hacer en una equidiferencia sin que esta deje de subsistir y razonamiento para demostrarlo.

	$a.b:c.d$; $a+d=b+c$	$7.10:11.14$; $7+14=10+11$
Alternar los medios.	$a.c:b.d$; $a+d$, $c+b$	$7.11:10.14$; $7+14$, $11+10$
Alternar los estremos.	$d.b:c.a$; $d+a$, $b+c$	$14.10:11.7$; $14+7$, $10+11$
Invertir la equidiferencia.	$b.a:d.c$; $b+c$, $a+d$	$10.7:14.11$; $10+11$, $7+14$
Aumentar ó disminuir un medio y un estremo en una misma cantidad..	$a\pm m.b\pm m:c.d$; $(a\pm m)+d$, $(b\pm m)+c$	$7\pm2.10\pm2:11.14$; $(7\pm2)+14$, $(10\pm2)+11$
	$a\pm m.b:c\pm m.d$; $(a\pm m)+d$, $b+(c\pm m)$	$7\pm2.10:11\pm2.14$; $(7\pm2)+14$, $10+(11\pm2)$
	$a.b\pm m:c.d\pm m$; $a+(d\pm m)$, $(b\pm m)+c$	$7.10\pm2:11.14\pm2$; $7+(14\pm2)$, $(10\pm2)+11$
	$a.b:c\pm m.d\pm m$; $a+(d\pm m)$, $b+(c\pm m)$	$7.10:11\pm2.14\pm2$; $7+(14\pm2)$, $10+(11\pm2)$
Multiplicar ó dividir todos los términos por una misma cantidad.......	$a\times m.b\times m:c\times m.d\times m$; $a\times m+d\times m$, $b\times m+c\times m$	$7\times3.10\times3:11\times3.14\times3$; $7\times3+14\times3$, $10\times3+11\times3$
	$\frac{a}{m}.\frac{b}{m}:\frac{c}{m}.\frac{d}{m}$; $\frac{a}{m}+\frac{d}{m}$, $\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$	$\frac{7}{8}.\frac{10}{8}:\frac{11}{8}.\frac{14}{8}$; $\frac{7}{8}+\frac{14}{8}$, $\frac{10}{8}+\frac{11}{8}$

Si se suman ordenadamente los términos de varias equidiferencias, las sumas forman equidiferencia tambien.

$$\left.\begin{array}{l} a.b:c.d;\ a+d=b+c \\ a'.b':c'.d';\ a'+d'=b'+c' \\ a''.b'':c''.d'';\ a''+d''=b''+c'' \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} a+a'+a''+\dots b+b'+b''+\dots : c+c'+c''+\dots d+d'+d''+\dots;\ a+a'+a''+\dots+d+d'+d''+\dots,\ b+b'+b''+\dots+c+c'+c''+\dots$$

|

$$\left.\begin{array}{l} 3.5:7.9;\ 3+9=5+7 \\ 1.4:5.8;\ 1+8=4+5 \\ 2.7:4:9;\ 2+9=7+4 \end{array}\right\} 3+1+2.5+4+7:7+5+4.9+8+9;\ 3+1+2+9+8+9,\ 5+4+7+7+5+4$$

| Si se restan ordenadamente dos equidiferencias, las restas forman equidiferencia tambien.

$$\left.\begin{array}{l} a.b:c.d;\ a+d=b+c \\ a'.b':c'.d';\ a'+d'=b'+c' \end{array}\right\} a-a'.b-b':c-c'.d-d';\ a-a'+d-d';\ b-b'+c-c'$$

|

$$\left.\begin{array}{l} 12.8:17.13;\ 12+13=8+17 \\ 3.5:6.8;\ 3+8=5+6 \end{array}\right\} 12-3.8-5:17-6.13-8;\ 12-3+13-8;\ 8-5+17-6$$

| Cuando dos proporciones por diferencia tienen una razon

comun, las otras dos forman equidiferencia. $\left.\begin{matrix}a.b:c.d\\ a'.b':c.d\end{matrix}\right\}$ Si van de mayor á menor $\begin{matrix}a-b=c-d\\ a'-b'=c-d\end{matrix}$; $a-b=a'-b'$; $a.b:a'.b'$. Si las equidiferencias van de menor á mayor $\begin{matrix}b-a=d-c\\ b'-a'=d-c\end{matrix}$; $b-a=b'-a'$; $a.b:a'.b'$ | $\begin{matrix}14.9:17.12 & 14-9=17-12\\ 23.18:17.12 & 23-18=17-12\end{matrix}$; $14-9=23-18$; $14.9:23.18$ | $\begin{matrix}4.10:1.7 & 10-4=7-1\\ 4.10:8.14 & 10-4=14-8\end{matrix}$; $7-1=14-8$; $1.7:8.14$ | Cuando dos proporciones por diferencia tienen los antecedentes ó los consecuentes iguales, los otros cuatro términos forman equidiferencia. $\begin{matrix}a.b:c.d & a.c:b.d\\ a.b':c.d' & a.c:b'.d'\end{matrix}$; $b.d:b'.d'$ | $\begin{matrix}3.8:7.12 & 3.7:8.12\\ 3.10:7.14 & 3.7:10.14\end{matrix}$; $8.12:10.14$ | $\begin{matrix}a.b:c.d & a.c:b.d\\ a'.b:c'.d & a'.c':b.d\end{matrix}$; $a.c:a'.c'$ | $\begin{matrix}17.10:12.5 & 17.12:10.5\\ 24.10:19.5 & 24.19:10.5\end{matrix}$; $17.12:24.19$ |

PROPORCIONES POR COCIENTE.

En toda proporcion por cociente el producto de estremos es igual al producto de medios. $21:7::12:4$; 3; $21:21::12:12$; $21\times12=21\times12$; $21\times4=7\times12$; Otra demostracion. $a:b::c:d$; $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $b\times d$; $\frac{a\times b\times d}{b}=\frac{c\times b\times d}{d}$; $a\times d=c\times b$ | *Si cuatro números no forman proporcion, el producto de estremos no es igual al de medios.* $30:6$, $23:7$; 5; $30:30$, $23:21$; $30\times21 \mp 30\times23$; $30\times7\mp6\times23$ | Otra demostracion. $a:b$, $c:d$; $\frac{a}{b}\mp\frac{c}{d}$; $b\times d$; $\frac{a\times b\times d}{b}\mp\frac{c\times b\times d}{d}$; $a\times d\mp c\times b$ | *Si cuatro números son tales que el producto de los estremos es igual al de los medios, los cuatro números forman proporcion.* | *Si cuatro números son tales que el producto de los estremos no es igual al de los medios, los cuatro números no forman proporcion.* | *En toda proporcion contínua por cociente el producto de estremos es igual al cuadrado del término medio.* $\div a:b:c$; $a:b::b:c$; $a\times c=b\times b$; $a\times c=b^2$ | $\div 8:4:2$; $8:4::4:2$; $8\times2=4\times4$; $8\times2=4^2$ |

Razonamiento para encontrar un estremo ó un medio de una proporcion en que se conocen los otros tres términos. $a:b::c:x$, $x=\frac{b\times c}{a}$; $14:7::16:x$, $x=\frac{7\times16}{14}=8$ | $x:b::c:d$, $x=\frac{b\times c}{d}$; $x:8::15:3$, $x=\frac{8\times15}{3}=40$ | $a:b::x:d$, $x=\frac{a\times d}{b}$; $14:3::x:7$, $x=\frac{14\times7}{3}=\frac{98}{3}$ | $a:x::c:d$, $x=\frac{a\times d}{c}$; $24:x::3:15$ $x=\frac{24\times15}{3}=120$ | Razonamiento para encontrar uno de los estremos de una proporcion contínua cuando se conoce el otro y el término medio. $\div a:b:x$, $x=\frac{b^2}{a}$; $\div 20:10:x$, $x=\frac{10^2}{20}=5$ | $\div x:b:c$, $x=\frac{b^2}{c}$; $\div x:8:4$, $x=\frac{8^2}{4}=16$ | Razonamiento para encontrar el término medio de una proporcion contínua por cociente cuando se conocen los estremos, ó sea para hallar una *media proporcional* entre dos números dados. $\div a:x:b$, $x=\sqrt{a\times b}$; $\div 5:x:180$, $x=\sqrt{5\times180}=30$ | Trasformaciones que se pueden hacer en una proporcion sin que esta deje de subsistir y razonamiento para demostrarlo.

	$a:b::c:d;\quad a\times d=b\times c;$	$4:\ 9::16:36;\quad 4\times 36=9\times 16$
Alternar los medios.....	$a:c::b:d;\quad a\times d,\quad c\times b;$	$4:16::\ 9:36;\quad 4\times 36;\ 16\times\ 9$
Alternar los estremos...	$d:c::b:a;\quad d\times a,\quad c\times b;$	$36:\ 9::16:\ 4;\quad 36\times\ 4;\quad 9\times 16$
Invertir la proporcion..	$b:a::d:c;\quad b\times c,\quad a\times d;$	$9:\ 4::36:16;\quad 9\times 16;\quad 4\times 36$
Multiplicar un medio y un estremo por un mismo número......	$a\times m:b\times m::c:d;\quad (a\times m)\times d,\quad (b\times m)\times c;$	$4\times 5:9\times 5::16:36;\ (4\times 5)\times 36;\ (9\times 5)\times 16$
	$a\times m:b::c\times m:d;\quad (a\times m)\times d,\quad b\times(c\times m);$	$4\times 5:9::16\times 5:36;\ (4\times 5)\times 36;\ 9\times(16\times 5)$
	$a:b\times m::c:d\times m;\quad a\times(d\times m),\quad (b\times m)\times c;$	$4:9\times 5::16:36\times 5;\ 4\times(36\times 5);\ (9\times 5)\times 16$
	$a:b::c\times m:d\times m;\quad a\times(d\times m),\quad b\times(c\times m);$	$4:9::16\times 5:36\times 5;\ 4\times(36\times 5);\ 9\times(16\times 5)$
Dividir un medio y un estremo por un mismo número........	$\frac{a}{m}:\frac{b}{m}::c:d;\quad \frac{a}{m}\times d,\quad \frac{b}{m}\times c;$	$\frac{4}{2}:\frac{9}{2}::16:36;\quad \frac{4}{2}\times 36;\quad \frac{9}{2}\times 16$
	$\frac{a}{m}:b::\frac{c}{m}:d;\quad \frac{a}{m}\times d,\quad b\times\frac{c}{m};$	$\frac{4}{2}:9::\frac{16}{2}:36;\quad \frac{4}{2}\times 36;\quad 9\times\frac{16}{2}$
	$a:\frac{b}{m}::c:\frac{d}{m};\quad a\times\frac{d}{m},\quad \frac{b}{m}\times c;$	$4:\frac{9}{2}::16:\frac{36}{2};\quad 4\times\frac{36}{2};\quad \frac{9}{2}\times 16$
	$a:b::\frac{c}{m}:\frac{d}{m};\quad a\times\frac{d}{m},\quad b\times\frac{c}{m};$	$4:9::\frac{16}{2}:\frac{36}{2};\quad 4\times\frac{36}{2};\quad 9\times\frac{16}{2}$
Elevar á una misma potencia todos los términos ó estraer su raiz de un mismo grado..	$a^m:b^m::c^m:d^m;\quad a^m\times d^m,\quad b^m\times c^m;$	$4^3:9^3::16^3:36^3;\quad 4^3\times 36^3;\quad 9^3\times 16^3$
	$\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}::\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d};\ \sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{d},\ \sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c};$	$\sqrt{4}:\sqrt{9}::\sqrt{16}:\sqrt{36};\ \sqrt{4}\times\sqrt{36},\ \sqrt{9}\times\sqrt{16}$

Si se multiplican ordenadamente los términos de varias proporciones, los productos forman tambien proporcion.

$$\left.\begin{array}{l} a:b::c:d;\ a\times d=b\times c \\ a':b'::c':d';\ a'\times d'=b'\times c' \\ a'':b''::c'':d'';\ a''\times d''=b''\times c'' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} a\times a'\times a''\times\ldots:b\times b'\times b''\times\ldots::c\times c'\times c''\times\ldots:d\times d'\times d''\times\ldots;\ a\times a'\times a''\times\ldots\times d\times d'\times d''\times\ldots,\ b\times b'\times b''\times\ldots\times c\times c'\times c''\times\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} 3:5::\ 6:10;\quad 3\times 10=5\times\ 6 \\ 5:4::15:12;\quad 5\times 12=4\times 15 \\ 8:2::20:\ 5;\quad 8\times\ 5=2\times 20 \end{array}\right\} 3\times 5\times 8:5\times 4\times 2::6\times 15\times 20:10\times 12\times 5;\ 3\times 5\times 8\times 10\times 12\times 5,\ 5\times 4\times 2\times 6\times 15\times 20$$

Si se dividen ordenadamente dos proporciones, los cocientes forman tambien proporcion. $\left.\begin{matrix} a:b::c:d;\ a\times d=b\times c \\ a':b'::c':d';\ a'\times d'=b'\times c' \end{matrix}\right\} \frac{a}{a'}:\frac{b}{b'}::\frac{c}{c'}:\frac{d}{d'};\ \frac{a}{a'}\times\frac{d}{d'},\ \frac{b}{b'}\times\frac{c}{c'};$

$\begin{matrix} 3:5::\ 9:15;\ 3\times 15=5\times\ 9 \\ 9:3::24:\ 8;\ 9\times\ 8=3\times 24 \end{matrix};\ \frac{3}{9}:\frac{5}{3}::\frac{9}{24}:\frac{15}{8};\ \frac{3}{9}\times\frac{15}{8},\ \frac{5}{3}\times\frac{9}{24}$ | Cuando dos proporciones tienen una razon comun, las otras dos razones forman proporcion. $\left.\begin{matrix} a:b::c:d;\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \\ a:b::c':d';\ \frac{a}{b}=\frac{c'}{d'} \end{matrix}\right\} \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'};\ c:d::c':d';$ $\begin{matrix} 5:\ 7::15:21;\ \frac{5}{7}=\frac{15}{21} \\ 40:56::\ 5:\ 7;\ \frac{40}{56}=\frac{5}{7} \end{matrix} \Bigg\} \frac{15}{21}=\frac{40}{50};\ 15:21::40:50$ | Cuando dos proporciones tienen los antecedentes ó los consecuentes iguales, los otros cuatro términos forman proporcion. $\begin{matrix} a:b::c:d;\ \ a:c::b:d \\ a:b'::c:d';\ \ a:c::b':d' \end{matrix};\ b:d::b':d'$ | $\begin{matrix} 3:12::5:20;\ 3:5::12:20 \\ 3:21::5:35;\ 3:5::21:35 \end{matrix};$ $12:20::21:35$ | $\begin{matrix} a:b::c:d;\ \ a:c::b:d \\ a':b::c':d;\ \ a':c'::b:d \end{matrix};\ a:c::a':c'$ | $\begin{matrix} 7:2::28:8;\ \ 7:28::2:8 \\ 6:2::24:8;\ \ 6:24::2:8 \end{matrix};\ 7:28::6:24$ | *En toda proporcion se verifica que la suma ó la diferencia de los dos primeros términos es á la suma ó á la diferencia de los dos últimos, como el primero es al tercero y como el segundo es al cuarto.* $a:b::c:d;\ a\pm b:b::c\pm d:d;\ a\pm b:c\pm d::b:d;\ a:c::b:d;\ a\pm b:c\pm d::a:c::b:d$ | $20:5::16:4,\ 20\pm 5:5::16\pm 4:4,\ 20\pm 5:16\pm 4::5:4;$ $20:16::5:4;\ 20\pm 5:16\pm 4::20:16::5:4$ | *En toda proporcion la suma de los dos primeros términos es á su diferencia, como la suma de los dos últimos es á su diferencia.* $a:b::c:d,\ a\pm b:c\pm d::a:c;$ $\left.\begin{matrix} a+b:c+d:a:c \\ a-b:c-d:a:c \end{matrix}\right\} a+b:c+d::a-b:c-d,\ a+b:a-b::c+d:c-d;\ 8:5::24:15;\ 8\pm 5:24\pm 15::8:24;$ $\left.\begin{matrix} 8+5:24+15::8:24 \\ 8-5:24-15::8:24 \end{matrix}\right\} 8+5:24+15::8-5:24-15;\ 8+5:8-5::24+15:24-15$ | *En toda proporcion la suma ó la diferencia de los antecedentes es á la suma ó á la diferencia de los consecuentes, como cada antecedente es á su consecuente.* $a:b::c:d,\ a:c::b:d;\ a\pm c:b\pm d::a:b::c:d$ | $28:8::7:2,$ $28:7::8:2,\ 28\pm 7:8\pm 2::28:8::7:2$ | *En toda sucesion de razones iguales se verifica que el resultado que se obtiene sumando ó restando un cierto número de antecedentes es al que se obtiene sumando ó restando en el mismo órden los respectivos consecuentes, como cada antecedente es á su consecuente.* $a:b::a':b'::a'':b''::a''':b'''::\ldots;\ a:b::a':b',\ a\pm a':b\pm b'::a':b';\ a\pm a':b\pm b'::a'':b'',\ a\pm a'\pm a'':b\pm b'\pm b''::a'':b'';\ a\pm a'\pm a'':b\pm b'\pm b''::a''':b''',$ $a\pm a'\pm a''\pm a''':b\pm b'\pm b''\pm b'''::a''':b''';\ldots;\ a\pm a'\pm a''\pm a'''\pm\ldots:b\pm b'\pm b''\pm b'''\pm\ldots::a:b::a':b'::a'':b'':a''':b'''::\ldots$ | $27:45::24:40::3:5::12:20::18:30;\ 27:45::24:40,\ 27+24:45+40::24:40;\ 27+24:45+40::3:5,\ 27+24-3:45+40-5::3:5;\ 27+24-3:45+40-5::12:20,$ $27+24-3-12:45+40-5-20::12:20;\ \ 27+24-3-12:45+40-5-20::18:30,\ \ 27+24-3-12+18:45+40-5-20+30::18:30;$ $27+24-3-12+18:45+40-5-20+30::27:45::24:40::3:5::12:20::18:30$ | *En toda proporcion, la suma ó la diferencia del antecedente y del consecuente de la primera razon es al antecedente ó al consecuente de la misma, como la suma ó la diferencia del antecedente y del consecuente de la segunda* *razon es á su antecedente ó á su consecuente; y viceversa, el antecedente ó el consecuente de la primera razon es á la suma ó á la diferencia del antecedente y del consecuente de la misma, como el antecedente ó el consecuente de la segunda razon es á la suma del antecedente y del consecuente de esta.*

$a:b::c:d;\ a\pm b:c\pm d::a:c::b:d \begin{cases} a\pm b:c\pm d::a:c;\ a\pm b:a::c\pm d:c \quad a:a\pm b::c:c\pm d \\ a\pm b:c\pm d::b:d;\ a\pm b:b::c\pm d:d \ \text{y}\ b:a\pm b::d:c\pm d \end{cases}$ | *En toda proporcion por cociente, la suma ó la diferencia de los productos del antecedente y del consecuente de la primera razon multiplicados respectivamente por dos factores* m *y* n *es á la suma ó á la diferencia de los productos del antecedente y del consecuente de la segunda razon multiplicados por estos mismos factores, como la suma ó la diferencia de los productos del antecedente y del consecuente de la primera razon multiplicados respectivamente por otros dos factores* p *y* q *es á la suma ó á la diferencia de los productos del antecedente y del consecuente de la segunda razon multiplicados por estos segundos factores; es decir, que si se verifica* $a:b::c:d$, *se verificará* $ma\pm nb:mc\pm nd::pa\pm qb:pc\pm qd$.

$a:b::c:d \begin{cases} ma:nb::mc:nd;\ ma\pm nb:mc\pm nd::ma:mc::a:c \\ pa:qb::pc:qd;\ pa\pm qb:pc\pm qd::pa:pc::a:c \end{cases} ma\pm nb:mc\pm nd::pa\pm qb:pc\pm qd$ |

Se puede hacer que desaparezcan los denominadores de una proporcion en la que haya un término desconocido, sin que este venga multiplicado por ningun factor, lo cual facilita la determinacion de dicho término. $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::\frac{c}{p}:x;\ m\times n;\ a\times n:b\times m::\frac{c}{p}:x;\ p;\ a\times n\times p:b\times m::c:x;\ x=\frac{b\times m\times c}{a\times n\times p}$ |

$\frac{3}{10}:\frac{2}{15}::\frac{108}{6}:x;\ 30;\ 9:4::\frac{108}{6}:x;\ 6;\ 54:4::108:x;\ x=\frac{4\times 108}{54}=8$ | $\frac{5}{8}:2::\frac{3}{6}:x;\ 24;\ 15:2::12:x;\ x=\frac{2\times 12}{15}=\frac{8}{5}$ | $x:\frac{b}{n}::\frac{c}{p}:\frac{d}{q};\ n\times q;$ $x:b\times q::\frac{c}{p}:d\times n;\ p;\ x:b\times q::c:d\times n\times p;\ x=\frac{b\times q\times c}{d\times n\times p}$ | $x:\frac{3}{4}::\frac{15}{9}:\frac{5}{6};\ 12;\ x:9::\frac{15}{9}:10;\ 9;\ x:9::15:90;\ x=\frac{9\times 15}{90}=\frac{3}{2}$ | $x:\frac{4}{9}::\frac{7}{6}:2;\ 9;$ $x:4::\frac{7}{6}:18;\ 6;\ x:4::7:108;\ x=\frac{4\times 7}{108}=\frac{7}{27}$ | $\frac{a}{m}:\frac{b}{n}::x:\frac{d}{q};\ m\times n;\ a\times n:b\times m::x:\frac{d}{q};\ q;\ a\times n:b\times m\times q::x:d;\ x=\frac{b\times m\times q}{a\times n\times d}$ | $\frac{12}{5}:\frac{1}{6}::x:\frac{3}{2};$ $30;\ 72:5::x:\frac{3}{2};\ 2;\ 72:10::x:3;\ x=\frac{72\times 3}{10}=\frac{108}{5}$ | $4:\frac{5}{2}::x:20;\ 2;\ 8:5::x:20;\ x=\frac{8\times 20}{5}=32$ | $\frac{a}{m}:x::\frac{c}{p}:\frac{d}{q};\ m\times p;\ a\times p:x::c\times m:\frac{d}{q};\ d;$ $a\times p:x::c\times m\times q:d;\ x=\frac{a\times p\times d}{c\times m\times q}$ | $\frac{28}{3}:x::\frac{1}{9}:\frac{5}{4};\ 9;\ 84:x::1:\frac{5}{4};\ 4;\ 84:x::4:5;\ x=\frac{84\times 5}{4}=105$ | $\frac{5}{6}:x::\frac{7}{9}:2;\ 18;\ 15:x::14:2;\ x=\frac{15\times 2}{14}=$ $\frac{30}{14}=\frac{15}{7}$ | Se considera como *razon* ó *relacion* de dos cantidades, cuando una de ellas ó las dos son *incomensurables* y bien sea aquella relacion por diferencia ó por cociente, el límite de las razones de la misma clase que se obtienen reemplazando las cantidades incomensurables por valores comensurables que se aproximen á ellas indefinidamente. Sean **A** y **B** dos cantidades incomensurables.

$$\begin{array}{llll} a\,,\,b\,; & a-b\,; & \frac{a}{b} \\ a',\,b'; & a'-b'; & \frac{a'}{b'} \\ a'',\,b''; & a''-b''; & \frac{a''}{b''} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{A},\,\mathrm{B}; & \mathrm{A}-\mathrm{B}; & \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} \end{array}$$

Se dice que cuatro cantidades, todas ó algunas de ellas incomensurables, forman proporcion por diferencia ó por cociente, cuando reemplazando las cantidades incomensurables por valores comensurables que se aproximen á ellas indefinidamente, para el mismo grado de aproximacion forman constantemente estos valores, entre sí ó con las cantidades que sean comensurables, proporcion por diferencia ó por cociente. Sean A, B, C, D.

$$\begin{array}{l} a\,,\,b\,,\,c\,,\,d \\ a',\,b',\,c',\,d' \\ a'',\,b'',\,c'',\,d'' \\ \vdots \\ \mathrm{A}\;\;\mathrm{B}\;\;\mathrm{C}\;\;\mathrm{D} \end{array} \text{ si se verifica que } \begin{array}{l} a-b=c-d \text{ ó } b-a=d-c\,,\; a\,.\,b:c\,.\,d \\ a'-b'=c'-d' \text{ ó } b'-a'=d'-c',\; a'\,.\,b':c'\,.\,d' \\ a''-b''=c''-d'' \text{ ó } b''-a''=d''-c'',\; a''\,.\,b'':c''\,.\,d'' \\ \vdots \\ \mathrm{A}-\mathrm{B}=\mathrm{C}-\mathrm{D} \text{ ó } \mathrm{B}-\mathrm{A}=\mathrm{D}-\mathrm{C},\; \mathrm{A}\,.\,\mathrm{B}:\mathrm{C}\,.\,\mathrm{D} \end{array} \text{ y si se verifica que } \begin{array}{l} \frac{a}{b}=\frac{c}{d},\; a:b::c:d \\ \frac{a'}{b'}=\frac{c'}{d'},\; a':b'::c':d' \\ \frac{a''}{b''}=\frac{c''}{d''},\; a'':b''::c'':d'' \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}},\; \mathrm{A}:\mathrm{B}::\mathrm{C}:\mathrm{D} \end{array}$$

Todo cuanto se ha dicho relativo á las proporciones por diferencia ó por cociente cuando las cantidades que las forman son comensurables, es aplicable al caso en que algunas ó todas no lo sean, pues reemplazando estas por valores comensurables que se aproximen indefinidamente á las mismas, podriamos aplicar las trasformaciones esplicadas á cada una de las equidiferencias ó de las proporciones por cociente que resultasen y, como las nuevas equidiferencias ó proporciones espresarian la igualdad constante entre dos cantidades variables que pasaban por distintos estados de magnitud, los límites de estas cantidades serian iguales, por lo que, espresando en forma de proporcion esta igualdad, quedaria aplicada la transformacion de que se tratase á las cantidades propuestas. | La razon por cociente entre dos números, es el resultado de su comparacion, hecha con objeto de averiguar las veces que el antecedente contiene al consecuente, si este se halla contenido un número exacto de veces en aquel, ó el resultado de la comparacion de ambos con una cantidad que en los dos se halle contenida exacto número de veces, cuando el antecedente sea menor que el consecuente ó cuando, siendo mayor, no lo contenga exactamente. Así la *razon* de **12** á **4** es el cociente de 12 dividido por 4 ó sea la *fraccion* doce cuartos. Si se trata de hallar la *razon* de 3 á 7, como 3 es menor que 7, hay que buscar un número que se halle contenido en aquellos dos y este número puede ser la unidad, que está contenida en 7 siete veces por lo que es un sétimo de 7; y como en 3 se halla contenida tres veces, vemos que 3 vale $\frac{3}{7}$ de 7 ó lo que es igual que la *razon* de 3 á 7 es la *fraccion* $\frac{3}{7}$ ó bien el *cociente* de 3 dividido por 7. De igual modo hariamos ver, por ejemplo, que la *razon* de 27 á 6 es la *fraccion* $\frac{27}{6}$ ó el *cociente* de 27 dividido por 6. Vemos pues que en todos los casos las palabras *razon, cociente* y *fraccion* espresan en realidad la misma cosa. | Todo cuanto hemos demostrado relativamente á las proporciones por cociente, puede demostrarse tambien con gran sencillez considerándolas como espresion de la igualdad de dos fracciones ó divisiones indicadas. Sirvan estos ejemplos. $a:b::c:d;\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d};\ \frac{a\times d}{b\times d}=\frac{c\times b}{b\times d};\ a\times d=c\times b$ | $a:b,\ c:d;\ \frac{a}{b}\mp\frac{c}{d};\ \frac{a\times d}{b\times d}\mp\frac{c\times b}{b\times d};\ a\times d\mp c\times b$ | $a:b::a':b'::a'':b''::\ldots;\ \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots;$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{a}{b};\ a=\frac{a}{b}\times b\\ \frac{a'}{b'}=\frac{a}{b};\ a'=\frac{a}{b}\times b'\\ \frac{a''}{b''}=\frac{a}{b};\ a''=\frac{a}{b}\times b''\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} a+a'+a''+\ldots=\frac{a}{b}\times(b+b'+b''+\ldots);\ \frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots}=\frac{a}{b};\ a+a'+a''+\ldots\ldots:b+b'+b''+\ldots\ldots::a:b::a':b'::a'':b''::\ldots\ldots$$

PROGRESIONES POR DIFERENCIA.

Progresion por diferencia ó aritmética. | *Razon de la progresion.* | *Términos de la progresion.* $\begin{cases}\textit{Creciente}\ldots\ldots \text{ ilimitada.}\\ \textit{Decreciente}\ldots \text{ limitada en aritmética.}\end{cases}$ |

$\div$3.5.7.9.11.13.15.... La razon es 2
$\div$38.31.24.17.10.3.... La razon es 7 | $\div a.b.c.d.e\ldots$ si $b-a=q,\ c-b=q,\ d-c=q,\ e-d=q,\ldots$ creciente. ó bien si $a-b=q,\ b-c=q,\ c-d=q,\ d-e=q,\ldots$ decreciente. | *En toda progresion por diferencia cada término es media diferencial entre el que le precede y el que le sigue.* $\div a.b.c.d\ldots.h.k.l\ldots;$ sea q la razon y creciente la progresion. $\begin{array}{l}k-h=q\\ l-k=q\end{array};\ k-h=l-k;\ h.k:k.l;\ \div h.k.l$ | Supongamos que la progresion es decreciente. $\begin{array}{l}h-k=q\\ k-l=q\end{array};\ h-k=k-l;\ h.k:k.l;\ \div h.k.l$ | La progresion por diferencia es una sucesion de razones por diferencia iguales en las que el antecedente de cada una es igual al consecuente de la anterior, puesto que se tendrá, $a.b:b.c:c.d:\ldots:h.k:k.l:\ldots$ | $\div 4.\frac{23}{5}.\frac{26}{5}.\frac{29}{5}.\frac{32}{5}.\frac{35}{5}\ldots;\ \begin{array}{l}\frac{32}{5}-\frac{29}{5}=\frac{3}{5}\\ \frac{35}{5}-\frac{32}{5}=\frac{3}{5}\end{array};\ \frac{32}{5}-\frac{29}{5}=\frac{35}{5}-\frac{32}{5};\ \frac{29}{5}.\frac{32}{5}:\frac{32}{5}.\frac{35}{5};\ \div\frac{29}{5}.\frac{32}{5}.\frac{35}{5};\ 4.\frac{23}{5}:\frac{23}{5}.\frac{26}{5}:\frac{26}{5}.\frac{29}{5}:\frac{29}{5}.\frac{32}{5}:\frac{32}{5}.\frac{35}{5}:\ldots$ | $\div\frac{50}{3}.\frac{38}{3}.\frac{26}{3}.\frac{14}{3}.\frac{2}{3}\ldots;\ \begin{array}{l}\frac{26}{3}-\frac{14}{3}=4\\ \frac{14}{3}-\frac{2}{3}=4\end{array};\ \frac{26}{3}-\frac{14}{3}=\frac{14}{3}-\frac{2}{3};\ \frac{26}{3}.\frac{14}{3}:\frac{14}{3}.\frac{2}{3};\ \div\frac{26}{3}.\frac{14}{3}.\frac{2}{3};\ \frac{50}{3}.\frac{38}{3}:\frac{38}{3}.\frac{26}{3}:\frac{26}{3}.\frac{14}{3}:\frac{14}{3}.\frac{2}{3}:\ldots$ | *Término general* de una progresion. | *Un término cualquiera de una progresion por diferencia es igual,* segun aquella sea creciente ó decreciente, *al primero aumentado ó disminuido en tantas veces la razon como términos le precedan.* $\div a.b.c.d.e\ldots.k.l\ldots$ Representemos la razon por q y, segun sea creciente ó decreciente la progresion, tendremos;

1.º... a
2.º... $b=a+q$
3.º... $c=b+q=a+2q$
4.º... $d=c+q=a+3q$
5.º... $e=d+q=a+4q$
....
....
$(n-1)^{\text{ésimo}}$...... $k=a+(n-2)q$
$n^{\text{ésimo}}$...... $l=k+q=a+(n-1)q$

ó

1.º... a
2.º... $b=a-q$
3.º... $c=b-q=a-2q$
4.º... $d=c-q=a-3q$
5.º... $e=d-q=a-4q$
....
....
$(n-1)^{\text{ésimo}}$...... $k=a-(n-2)q$
$n^{\text{ésimo}}$...... $l=k-q=a-(n-1)q$

$$l=a\pm(n-1)q$$

$\div 7.10.13.16.19.....k.l....$
1.º... 7
2.º... $10=7+3$
3.º... $13=10+3=7+2\times 3$
4.º... $16=13+3=7+3\times 3$
5.º... $19=16+3=7+4\times 3$
....
....
$(n-1)^{\text{ésimo}}$...... $k=7+(n-2)\times 3$
$n^{\text{ésimo}}$...... $l=k+3=7+(n-1)\times 3$
48º... $l=7+47\times 3=148$

$\div 67.61.55.49.43.37.....k.l....$
1.º... 67
2.º... $61=67-6$
3.º... $55=61-6=67-2\times 6$
4.º... $49=55-6=67-3\times 6$
5.º... $43=49-6=67-4\times 6$
....
....
$(n-1)^{\text{ésimo}}$...... $k=67-(n-2)\times 6$
$n^{\text{ésimo}}$...... $l=k-6=67-(n-1)\times 6$
12º... $l=67-11\times 6=1$

Interpolar varios medios diferenciales entre dos números dados. $a\overset{n}{.....}l$; $a<l$; q; $l=a+(n+1)q$; $l-a=(n+1)q$; $q=\dfrac{l-a}{n+1}$; $5\overset{6}{.....}33$; q; $33=5+7\times q$; $33-5=7\times q$; $q=\dfrac{33-5}{7}=4$; $\div 5.9.13.17.21.25.29.33$ | $a\overset{n}{.....}l$; $a>l$; q; $l=a-(n+1)q$; $l+(n+1)q=a$; $(n+1)q=a-l$; $q=\dfrac{a-l}{n}$; $47\overset{8}{.....}20$; q; $20=47-9\times q$; $20+9\times q=47$; $9\times q=47-20$; $q=\dfrac{47-20}{9}=3$; $\div 47.44.41.38.35.32.29.26.23.20$ | *Si entre cada dos términos consecutivos de una progresion por diferencia se interpola el mismo número de medios diferenciales, las progresiones parciales que se formen serán continuacion las unas de las otras, formando entre todas una sola progresion.* Sea la progresion $\div a\overset{n}{.}b\overset{n}{.}c\overset{n}{.}d....$ y q su razon. Segun sea $a<b<c<d<...$ ó $a>b>c>d>...$ tendremos:

$b=a+(n+1)q'$, $b-a=(n+1)q'$, $q'=\dfrac{b-a}{n+1}$,
$c=b+(n+1)q''$, $c-b=(n+1)q''$, $q''=\dfrac{c-b}{n+1}$
$d=c+(n+1)q'''$, $d-c=(n+1)q'''$, $q'''=\dfrac{d-c}{n+1}$
....
....
$q'=q''=q'''=$..............

ó

$b=a-(n+1)q'$, $b+(n+1)q'=a$, $(n+1)q'=a-b$, $q'=\dfrac{a-b}{n+1}$
$c=b-(n+1)q''$, $c+(n+1)q''=b$, $(n+1)q''=b-c$, $q''=\dfrac{b-c}{n+1}$
$d=c-(n+1)q'''$, $d+(n+1)q'''=c$, $(n+1)q'''=c-d$, $q'''=\dfrac{c-d}{n+1}$
....
....
$q'=q''=q'''=$..............

Como el último término de cada progresion parcial es el primero de la que sigue y la razon de todas ellas es la misma, serán las unas continuacion de las otras, constituyendo entre todas una sola progresion.

$\div 3\overset{4}{.}13\overset{4}{.}23\overset{4}{.}33......$
$13=3+5\times q'$, $13-3=5\times q'$, $q'=\dfrac{13-3}{5}$
$23=13+5\times q''$, $23-13=5\times q''$, $q''=\dfrac{23-13}{5}$
$33=23+5\times q'''$, $33-23=5\times q'''$, $q'''=\dfrac{33-23}{5}$
....
....
$q'=q''=q'''=.....=2$
$\div 3.5.7.9.11.\overline{13}.15.17.19.21.\overline{23}.25.27.29.31.\overline{33}....$

$\div 83\overset{3}{.}71\overset{3}{.}59\overset{3}{.}47......$
$71=83-4\times q'$, $71+4\times q'=83$, $4\times q'=83-71$, $q'=\dfrac{83-71}{4}$
$59=71-4\times q''$, $59+4\times q''=71$, $4\times q''=71-59$, $q''=\dfrac{71-59}{4}$
$47=59-4\times q'''$, $47+4\times q'''=59$, $4\times q'''=59-47$, $q'''=\dfrac{59-47}{4}$
....
....
$q'=q''=q'''=.....=3$
$\div \overline{83}.80.77.74.\overline{71}.68.65.62.\overline{59}.56.53.50.\overline{47}$

En toda progresion por diferencia la suma de dos términos equidistantes de los estremos es igual á la suma de estos; y, si hay un término medio ó que equidiste de dichos estremos, su duplo es igual á la suma de los mismos.

$\div a.b.c.\overset{n}{\ldots}.h.\ldots.\overset{n}{l}.\ldots.p.r.t.$ Si la progresion es creciente, $\begin{matrix} h=a+n\times q \\ t=l+n\times q \end{matrix};\ \begin{matrix} h-a=n\times q \\ t-l=n\times q \end{matrix};\ h-a=t-l;\ a.h:l.t;\ a+t=h+l.$ Si es decreciente la progresion, $\begin{matrix} h=a-n\times q \\ t=l-n\times q \end{matrix};\ \begin{matrix} h+n\times q=a \\ t+n\times q=l \end{matrix};\ \begin{matrix} n\times q=a-h \\ n\times q=l-t \end{matrix};\ a-h=l-t;\ a.h:l.t;\ a+t=h+l.$ En ambos casos se verificará, pues, que $a+t=b+r=c+p=\ldots=h+l=\ldots$ | La equidiferencia $a.h:l.t$ nos dice que *dos términos equidistantes de los estremos forman equidiferencia con estos.* Y como puede considerarse que la progresion empieza y termina en dos términos cualesquiera, se deduce que *si se consideran cuatro términos de la progresion con la condicion de que los dos primeros comprendan entre si tantos como comprenden los dos últimos, estos cuatro términos formarán equidiferencia.* | Supongamos que hay un término medio. $\div a\ b.c.\ldots.h.\overset{n}{\ldots}.k.\overset{n}{\ldots}.l.\ldots.p.r.t.$ Si la progresion es creciente $\begin{matrix} k=a+n\times q \\ t=k+n\times q \end{matrix};\ \begin{matrix} k-a=n\times q \\ t-k=n\times q \end{matrix};\ k-a=t-k;\ a.k:k.t;\ \div a.k.t;\ a+t=2k.$ Si es decreciente la progresion $\begin{matrix} k=a-n\times q \\ t=k-n\times q \end{matrix};\ \begin{matrix} k+n\times q=a \\ t+n\times q=k \end{matrix};\ \begin{matrix} n\times q=a-k \\ n\times q=k-t \end{matrix};\ a-k=k-t;\ a.k:k.t;\ \div a.k.t;\ a+t=2k.$ En ambos casos tendremos: $a+t=b+r=c+p=\ldots=h+l=\ldots=2k.$ | La equidiferencia contínua $\div a.h.t$ indica que *el término medio es media diferencial entre los dos estremos.* Y como puede considerarse que la progresion empieza y concluye en dos términos cualesquiera, se deduce que *cada término de la progresion es media diferencial entre dos cualesquiera equidistantes de él.* | $\div 2.6.10.\overline{14}.18.22.\overline{26}.30.34.\overline{38}.42.46.50$ $\begin{matrix} 14=2+3\times 4 \\ 50=38+3\times 4 \end{matrix};\ \begin{matrix} 14-2=3\times 4 \\ 50-38=3\times 4 \end{matrix};\ 14-2=50-38;$ $14.2:50.38;\ 14+38=2+50$ | $\begin{matrix} 26=2+6\times 4 \\ 50=26+6\times 4 \end{matrix};\ \begin{matrix} 26-2=6\times 4 \\ 50-26=6\times 4 \end{matrix};\ 26-2=50-26;\ 2.26:26.50;\ \div 2.26.50;\ 2+50=2\times 26$ | $2+50=6+46=10+42=14+38=18+34=22+30=2\times 26$ | $\div 37.34.\overline{31}.28.\overline{25}.22.\overline{19}.16.13$ $\begin{matrix} 31=37-2\times 3 \\ 13=19-2\times 3 \end{matrix};\ \begin{matrix} 31+2\times 3=37 \\ 13+2\times 3=19 \end{matrix};\ \begin{matrix} 2\times 3=37-31 \\ 2\times 3=19-13 \end{matrix};\ 37-31=19-13;\ 37.31:19.13;$ $37+13=31+19$ | $\begin{matrix} 25=37-4\times 3 \\ 13=25-4\times 3 \end{matrix};\ \begin{matrix} 25+4\times 3=37 \\ 13+4\times 3=25 \end{matrix};\ \begin{matrix} 4\times 3=37-25 \\ 4\times 3=25-13 \end{matrix};\ 37-25=25-13;\ 37.25:25.13;\ \div 37.25.13;\ 37+13=2\times 25$ | $37+13=34+16=31+19=28+22=2\times 25$ | *La suma de un número de términos sucesivos de una progresion por diferencia es igual á la mitad del producto que resulta de multiplicar la suma de los términos estremos por el número de los que se consideren.* $\div a.b.c.\ldots\ldots h.\ldots\ldots k.\ldots\ldots l.\ldots\ldots p.q.t$

$$\left.\begin{matrix} s=a+b+c+\ldots.+h+\ldots.+k+\ldots.+l+\ldots.+p+q+t \\ s=t+q+p+\ldots.+l+\ldots.+k+\ldots.+h+\ldots.+c+b+a \end{matrix}\right\} 2s=(a+t)+(b+q)+(c+p)+\ldots..+(h+l)+\ldots..+2k+\ldots..+(l+h)+\ldots..+(p+c)+(q+b)+(t+a)=$$

$(a+t)\times n;\ 2s=(a+t)\times n;\ s=\dfrac{(a+t)\times n}{2}.$ | $\div 5.8.11.14.17.20.23.26$ $\left.\begin{matrix} s=5+8+11+14+17+20+23+26 \\ s=26+23+20+17+14+11+8+5 \end{matrix}\right\} 2s=(5+26)+(8+23)+(11+20)+(14+17)+(17+14)+(20+11)+(23+8)+(26+5)=(5+26)\times 8;\ s=\dfrac{(5+26)\times 8}{2}=124$ | Término general de la progresion natural de los números enteros y suma de un cierto número sucesivo de estos á partir de la unidad. $\div 1.2.3.4.\overset{n-1}{\ldots\ldots}l$; $l=1+(n-1)\times 1=n$; $s=\frac{(1+n)\times n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$. | Término general de la progresion de los números pares y suma de un cierto número sucesivo de ellos á partir del primero. $\div 2.4.6.\overset{n-1}{\ldots\ldots}l$; $l=2+(n-1)\times 2=2+2n-2=2n$; $s=\frac{(2+2n)\times n}{2}=n(n+1)$ | Término general de la progresion de los números impares y suma de un cierto número sucesivo de ellos á partir del primero. $\div 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.21.23.\overline{25}.27.29.\overset{n-1}{\ldots\ldots}l$; $l=1+(n-1)\times 2=1+2n-2=2n-1$; $s=\frac{(1+2n-1)\times n}{2}=\frac{2n^2}{2}=n^2$ | *Encontrar dos cuadrados perfectos cuya suma sea tambien cuadrado perfecto*. Tomando cualquier término de la progresion de los números impares que sea cuadrado perfecto como uno de los sumandos y el cuadrado del número de términos que precedan á aquel en dicha progresion, como otro sumando, quedará resuelto el problema; porque este último sumando espresa la suma de todos los términos hasta el elegido, y como se le añade dicho número elegido, el resultado será la suma de todos los términos hasta dicho número inclusive, cuya suma viene espresada por el cuadrado del número de términos que se consideran, inclusive el que se eligió. $\left.\begin{matrix}25=5^2\\ 12\ldots 12^2\end{matrix}\right\}5^2+12^2=13^2$. Como comprobacion general de la regla dada, observemos que si n es un número impar cualquiera, su cuadrado n^2 será tambien impar y se encontrará en la progresion de todos los números impares; en la de todos los números enteros le precederán n^2-1 números, de los cuales serán pares la mitad é impares la otra mitad; por lo que en la progresion de los impares le precederán $\frac{n^2-1}{2}$ términos; y añadiendo á aquel número el cuadrado de este, resulta: $n^2+\left(\frac{n^2-1}{2}\right)^2=\frac{4n^2+n^4-2n^2+1}{4}=\frac{n^4+2n^2+1}{4}=\left(\frac{n^2+1}{2}\right)^2$, que es el cuadrado de $\frac{n^2-1}{2}+1=\frac{n^2-1+2}{2}=\frac{n^2+1}{2}$ ó sea del número de términos hasta el n^2 inclusive. | Se puede determinar el valor de cada una de las cantidades que figuran en la fórmula ó espresion del término general así como en la de la suma, dados que sean en cada caso los valores de las demás cantidades que en la correspondiente espresion aparezcan. $l=a+(n-1)\times r$; l, a, r, n | $\left.\begin{matrix}a\\r\\n\end{matrix}\right\}l$; $l=a+(n-1)\times r$ | $\left.\begin{matrix}l\\r\\n\end{matrix}\right\}a$; $a=l-(n-1)\times r$ | $\left.\begin{matrix}l\\a\\n\end{matrix}\right\}r$; $l-a=(n-1)\times r$; $r=\frac{l-a}{n-1}$ | $\left.\begin{matrix}l\\a\\r\end{matrix}\right\}n$; $l-a=(n-1)\times r$; $n-1=\frac{l-a}{r}$; $n=\frac{l-a}{r}+$ | $l=a-(n-1)\times r$; l, a, r, n | $\left.\begin{matrix}a\\r\\n\end{matrix}\right\}l$; $l=a-(n-1)\times r$ | $\left.\begin{matrix}l\\r\\n\end{matrix}\right\}a$; $a=l+(n-1)\times r$ | $\left.\begin{matrix}l\\a\\n\end{matrix}\right\}r$; $l+(n-1)\times r=a$; $(n-1)\times r=a-l$; $r=\frac{a-l}{n-1}$ | $\left.\begin{matrix}l\\a\\r\end{matrix}\right\}n$; $l+(n-1)\times r=a$; $(n-1)\times r=a-l$; $n-1=\frac{a-l}{r}$; $n=\frac{a-l}{r}+1$ | $\left.\begin{matrix}a=5\\r=3\\n=7\end{matrix}\right\}l$; $l=5+6\times 3=23$ | $\left.\begin{matrix}n=7\\l=23\\r=3\end{matrix}\right\}a$; $23=a+6\times 3$; $a=23-6\times 3=5$ | $\left.\begin{matrix}a=5\\n=7\\l=23\end{matrix}\right\}r$; $23=5+6\times r$; $23-5=6\times r$; $r=\frac{23-5}{6}=3$ | $\left.\begin{matrix}l=23\\a=5\\r=3\end{matrix}\right\}n$; $23=5+(n-1)\times 3$; $23-5=(n-1)\times 3$; $n-1=\frac{23-5}{3}$; $n=\frac{23-5}{3}+1=7$ ||

$\left.\begin{matrix} n=10 \\ a=42 \\ q=\ 4 \end{matrix}\right\} l;\ l=42-9\times4=6$ | $\left.\begin{matrix} l=\ 6 \\ n=10 \\ q=\ 4 \end{matrix}\right\} a;\ 6=a-9\times4;\ a=6+9\times4=42$ | $\left.\begin{matrix} a=42 \\ n=10 \\ l=\ 6 \end{matrix}\right\} q;\ 6=42-9\times q;\ 6+9\times q=42;\ 9\times q=42-6;\ q=\frac{42-6}{9}=4$ |

$\left.\begin{matrix} l=\ 6 \\ a=42 \\ q=\ 4 \end{matrix}\right\} n;\ 6=42-(n-1)\times4;\ 6+(n-1)\times4=42;\ (n-1)\times4=42-6;\ n-1=\frac{42-6}{4};\ n=\frac{42-6}{4}+1=10$ | $s=\frac{(a+l)\times n}{2};\ s,\ a,\ l,\ n$ | $\left.\begin{matrix} a \\ l \\ n \end{matrix}\right\} s;\ s=\frac{(a+l)\times n}{2}$ |

$\left.\begin{matrix} s \\ l \\ n \end{matrix}\right\} a;\ 2s=a\times n+l\times n;\ a\times n=2s-l\times n;\ a=\frac{2s-l\times n}{n}$ | $\left.\begin{matrix} s \\ a \\ n \end{matrix}\right\} l;\ 2s=a\times n+l\times n;\ l\times n=2s-a\times n;\ l=\frac{2s-a\times n}{n}$ | $\left.\begin{matrix} s \\ a \\ l \end{matrix}\right\} n;\ 2s=(a+l)\times n;\ n=\frac{2s}{a+l}$ |

$\left.\begin{matrix} n=\ 7 \\ a=\ 5 \\ l=23 \end{matrix}\right\} s;\ s=\frac{(5+23)\times7}{2}=98$ | $\left.\begin{matrix} n=\ 7 \\ l=23 \\ s=98 \end{matrix}\right\} a;\ 98=\frac{(a+23)\times7}{2};\ 196=a\times7+161;\ a\times7=196-161;\ a=\frac{35}{7}=5$ | $\left.\begin{matrix} n=\ 7 \\ s=98 \\ a=\ 5 \end{matrix}\right\} l;\ 98=\frac{(5+l)\times7}{2};\ 196=35+l\times7;$

$l\times7=196-35;\ l=\frac{161}{7}=23$ | $\left.\begin{matrix} a=\ 5 \\ l=23 \\ s=98 \end{matrix}\right\} n;\ 98=\frac{(5+23)\times n}{2};\ 196=28\times n;\ n=\frac{196}{28}=7$ || $\left.\begin{matrix} a=42 \\ n=10 \\ l=\ 6 \end{matrix}\right\} s;\ s=\frac{(42+6)\times10}{2}=240$ | $\left.\begin{matrix} n=\ 10 \\ s=240 \\ l=\ \ 6 \end{matrix}\right\} a;\ 240=\frac{(a+6)\times10}{2};$

$480=a\times10+60;\ a\times10=480-60;\ a=\frac{480-60}{10}=\frac{420}{10}=42$ | $\left.\begin{matrix} s=240 \\ n=\ 10 \\ a=\ 42 \end{matrix}\right\} l;\ 240=\frac{(42+l)\times10}{2};\ 480=420+l\times10;\ l\times10=480-420;\ l=\frac{480-420}{10}=$

$\frac{60}{10}=6$ | $\left.\begin{matrix} a=\ 42 \\ l=\ \ 6 \\ s=240 \end{matrix}\right\} n;\ 240=\frac{(42+6)\times n}{2};\ 480=48\times n;\ n=\frac{480}{48}=10$ | Segun lo que n representa, ha de ser forzosamente número entero, por lo que, si al determinar este valor resultase fraccionario, serían incompatibles los datos. | Se pueden combinar las dos espresiones del término general y de la suma para determinar en ellas dos de las cinco cantidades $l,\ a,\ q,\ n,\ s$ dados los valores de las otras tres; pero esta determinacion se hace mas fácil y propiamente por consideraciones algébricas.

PROGRESIONES POR COCIENTE.

Progresion por cociente ó geométrica. | *Razon de la progresion.* | *Términos de la progresion.* | Las progresiones por cociente son siempre *ilimitadas.* |

Razon mayor que la unidad... *Progresion creciente.* | $\div 3:12:48:192:768:3072:\ldots$ La razon es 4 | $\div a:b:c:d:e:\ldots$, si $b=a\times r,\ c=b\times r,\ d=c\times r,\ldots$

Razon menor que la unidad... *Progresion decreciente.* | $\div 5:\frac{10}{3}:\frac{20}{9}:\frac{40}{27}:\frac{80}{81}:\frac{160}{243}:\ldots$ La razon es $\frac{2}{3}$ |

En toda proporcion por cociente cada término es media proporcional entre el que le precede y el que le sigue. $\div a:b:c:d:\ldots:h:k:l:\ldots\ldots\ldots$

Representando por r la razon, tendremos: $\begin{matrix} k=h\times r \\ l=k\times r \end{matrix};\ \begin{matrix} r=\frac{k}{h} \\ r=\frac{l}{k} \end{matrix};\ \frac{k}{h}=\frac{l}{k};\ k:h::l:k;\ h:k::k:l;\ \div h:k:l$ | La progresion por cociente es una sucesion de razones iguales en las que el antecedente de cada una es igual al consecuente de la que precede, pues se verificará: $a:b::b:c::c:d::\ldots::h:k::k:l::\ldots$

$\div 2:6:18:54:\overline{162}:486:\ldots$; $\begin{matrix}162=54\times 3\\ 486=162\times 3\end{matrix}$; $\begin{matrix}\frac{162}{54}=3\\ \frac{486}{162}=3\end{matrix}$; $\frac{162}{54}=\frac{486}{162}$; $162:54::486:162$; $54:162::162:486$; $\div 54:162:486$; $2:6::6:18::18:54::54:162::162:486::\ldots$

Un término cualquiera de una progresion por cociente es igual al primero multiplicado por la razon elevada al número de términos que le preceden.

$\div a:b:c:d:e:\ldots:k:l:\ldots$ Sea r la razon

1.º... a

2.º... $b=a\times r$

3.º... $c=b\times r=a\times r^2$

4.º... $d=c\times r=a\times r^3$ $\quad\div\frac{3}{5}:\frac{6}{15}:\frac{12}{45}:\frac{24}{135}:\frac{48}{405}:\ldots$

5.º... $e=d\times r=a\times r^4$

....

$(n-1)^{\text{ésimo}}\ldots k=a\times r^{n-2}$

$n^{\text{ésimo}}\ldots l=k\times r=a\times r^{n-1}$

1.º... $\frac{3}{5}$

2.º... $\frac{6}{15}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}$

3.º... $\frac{12}{45}=\frac{6}{15}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$

4.º... $\frac{24}{135}=\frac{12}{45}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^3$

5.º... $\frac{48}{405}=\frac{24}{135}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^4$

....

$(n-1)^{\text{ésimo}}\ldots k=\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

$n^{\text{ésimo}}\ldots l=k\times\frac{2}{3}=\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

12º... $l=\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{11}=\frac{6144}{885735}$

Interpolar varios medios proporcionales entre dos números dados. $a\overset{n}{\ldots}l$; r; $l=a\times r^{n+1}$; $\frac{l}{a}=r^{n+1}$; $r=\sqrt[n+1]{\frac{l}{a}}$; $192\overset{5}{\ldots}3$;

$3=192\times r^6$; $\frac{3}{192}=r^6$; $r=\sqrt[6]{\frac{3}{192}}=\sqrt[6]{\frac{1}{64}}=\frac{1}{2}$; $\div 192:96:48:24:12:6:3$

Si entre cada dos términos consecutivos de una progresion por cociente se interpola el mismo número de medios proporcionales, las progresiones parciales que se formen serán continuacion las unas de las otras formando entre todas una sola progresion.

Sea la progresion $\div a\overset{n}{:}b\overset{n}{:}c\overset{n}{:}d:\ldots\ldots$

$b=a\times r'^{n+1}$; $\frac{b}{a}=r'^{n+1}$; $r'=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$

$c=b\times r''^{n+1}$; $\frac{c}{b}=r''^{n+1}$; $r''=\sqrt[n+1]{\frac{c}{b}}$

$d=c\times r'''^{n+1}$; $\frac{d}{c}=r'''^{n+1}$; $r'''=\sqrt[n+1]{\frac{d}{c}}$

....

$r'=r''=r'''=\ldots$

Como el último término de cada progresion parcial es el primero de la siguiente y la razon de todas ellas es la misma, serán las unas continuacion de las otras, y entre todas compondrán una sola progresion.

Sea ahora la progresion $\div 3\overset{3}{:}48\overset{3}{:}768\overset{3}{:}12288:\ldots$

$48=3\times r'^4$; $\frac{48}{3}=r'^4$; $r'=\sqrt[4]{\frac{48}{3}}$

$768=48\times r''^4$; $\frac{768}{48}=r''^4$; $r''=\sqrt[4]{\frac{768}{48}}$

$12288=768\times r'''^4$; $\frac{12288}{768}=r'''^4$; $r'''=\sqrt[4]{\frac{12288}{768}}$

$r'=r''=r'''=\ldots=2$

$\div\overline{3}:6:12:24:\overline{48}:96:192:384:\overline{768}:1536:3072:6144:\overline{12288}$

En toda progresion por cociente el producto de dos términos equidistantes de los estremos es igual al producto de estos; y, si hay un término medio ó que equidiste de dichos estremos, su cuadrado es igual al producto de los mismos.

∺ $a:b:c:\overset{n}{\dots}:h:\dots:l:\overset{n}{\dots}:p:q:t$. Representemos por r la razon. $\left.\begin{array}{l} h=a\times r^n \\ t=l\times r^n \end{array}\right.$; $\left.\begin{array}{l} \frac{h}{a}=r^n \\ \frac{t}{l}=r^n \end{array}\right.$; $\frac{h}{a}=\frac{t}{l}$; $h:a::t:l$; $h\times l=a\times t$. Se verificará pues: $a\times t=b\times q=c\times p=\dots=h\times l=\dots.$. | La proporcion última hace ver que *dos términos equidistantes de los estremos forman proporcion con estos.* Y como puede considerarse que la proporcion empieza y concluye en dos términos cualesquiera, resulta que, *si se consideran cuatro términos de la progresion con la condicion de que los dos primeros comprendan entre sí tantos como comprenden los dos últimos, estos cuatro térmimos formarán proporcion.* | Supongamos que hay un término medio. ∺ $a:b:c:\dots:h:\overset{n}{\dots}:k:\overset{n}{\dots}:l:\dots:p:q:t$; $\left.\begin{array}{l} k=a\times r^n \\ t=k\times r^n \end{array}\right.$; $\left.\begin{array}{l} \frac{k}{a}=r^n \\ \frac{t}{k}=r^n \end{array}\right.$; $\frac{k}{a}=\frac{t}{k}$; $k:a::t:k$; $a:k::k:t$; ∺ $a:k:t$; $a\times t=k^2$. La proporcion continua ∺ $a:k:t$ indica que *el término medio es media proporcional entre los dos estremos.* Y como puede considerarse que la progresion empieza y termina en dos términos cualesquiera, se deduce *que cada término de la progresion es media proporcional entre dos cualesquiera que equidisten del mismo.* |

∺ $5:10:20:\overline{40}:80:160:320:640:\overline{1280}:2560:5120:10240$; $\left.\begin{array}{l} 40=5\times 2^3 \\ 10240=1280\times 2^3 \end{array}\right.$; $\left.\begin{array}{l} \frac{40}{5}=2^3 \\ \frac{10240}{1280}=2^3 \end{array}\right.$; $\frac{40}{5}=\frac{10240}{1280}$; $40:5::10240:1280$; $40\times 1280=5\times 10240$; $5\times 10240=10\times 5120=20\times 2560=40\times 1280=80\times 640=160\times 320$; ∺ $1:3:9:27:\overline{81}:243:729:2187:6561$; $\left.\begin{array}{l} 81=1\times 3^4 \\ 6561=81\times 3^4 \end{array}\right.$; $\left.\begin{array}{l} \frac{81}{1}=3^4 \\ \frac{6561}{81}=3^4 \end{array}\right.$; $\frac{81}{1}=\frac{6561}{81}$; $81:1::6561:81$; $1:81::81:6561$; ∺ $1:81:6561$; $1\times 6561=81^2$; $1\times 6561=3\times 2187=9\times 729=27\times 243=81^2$ | *El producto de un número sucesivo de términos de una progresion por cociente es igual á la raiz cuadrada del resultado que se obtiene elevando el producto de los dos estremos al número de términos que se considera.* ∺ $a:b:c:\dots:h:k:\dots:p:q:t$; $\left.\begin{array}{l} P=a\times b\times c\times\dots\times h\times k\times\dots\times p\times q\times t \\ P=t\times q\times p\times\dots\times k\times h\times\dots\times c\times b\times a \end{array}\right\}P^2=(a\times t)\times(b\times q)\times(c\times p)\times\dots\times(h\times k)\times(k\times h)\times\dots\times(p\times c)\times(q\times b)\times(t\times a)=(a\times t)^n$; $P=\sqrt{(a\times t)^n}$ | ∺ $324:108:36:12:4$; $\left.\begin{array}{l} P=324\times 108\times 36\times 12\times 4 \\ P=4\times 12\times 36\times 108\times 324 \end{array}\right\}P^2=(324\times 4)\times(108\times 12)\times 36^2\times(12\times 108)\times(4\times 324)=(324\times 4)^5$; $P^2=(324\times 4)^5$; $P=\sqrt{(324\times 4)^5}=60466176$ | *La suma de un número sucesivo de términos de una progresion por cociente es igual á la diferencia entre el producto del último multiplicado por la razon y el primero, dividida por la diferencia entre la razon y la unidad.* ∺ $a:b:c:\dots:p:q:t$;

$$\left.\begin{array}{l} s=a+b+c+\dots+p+q+t \\ s\times r=b+c+d+\dots+q+t+t\times r \end{array}\right\{\begin{array}{l} \text{creciente}\dots\dots\ r>1,\ s\times r>s;\ s\times r-s=t\times r-a;\ s\times(r-1)=t\times r-a;\ s=\dfrac{t\times r-a}{r-1} \\ \text{decreciente}\dots\ r<1,\ s\times r<s;\ s-s\times r=a-t\times r;\ s\times(1-r)=a-t\times r;\ s=\dfrac{a-t\times r}{1-r} \end{array}$$

| ∺ $3:15:75:375:1875:9375:46875$;

$$\left.\begin{array}{l} s=3+15+75+375+1875+9375+46875 \\ s\times5=15+75+375+1875+9375+46875+46875\times5 \end{array}\right\} s\times5-s=46875\times5-3;\ s\times(5-1)=46875\times5-3;\ s=\frac{46875\times5-3}{5-1}=58593$$

| $\because 3072:768:192:$ 48 : 12 : 3;

$$\left.\begin{array}{l} s=3072+768+192+48+12+3 \\ s\times\frac{1}{4}=768+192+48+12+3+3\times\frac{1}{4} \end{array}\right\} s-s\times\frac{1}{4}=3072-3\times\frac{1}{4};\ s\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=3072-3\times\frac{1}{4};\ s=\frac{3072-3\times\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=4095$$

| *Las potencias sucesivas de una cantidad mayor que la unidad crecen* CONSTANTE *é* INDEFINIDAMENTE, *pudiendo llegar á ser mayores que cualquier cantidad dada por grande que sea.* a^m, $a>1$; $a^1=a$; $a^2=a\times a>a$; $a^3=a^2\times a>a^2$; $a^4=a^3\times a>a^3$;..... $a^m=a^{m-1}\times a>a^{m-1}$. Crecen, pues, *constantemente.* Vamos á demostrar que crecen *indefinidamente.*

$$\left.\begin{array}{l} a-1=b\ ,\ a-1=b \\ (a-1)\times a>b,\ a^2-a>b \\ (a-1)\times a^2>b,\ a^3-a^2>b \\ (a-1)\times a^3>b,\ a^4-a^3>b \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a-1)\times a^{m-1}>b,\ a^m-a^{m-1}>b \end{array}\right\}$$

Sumando ordenadamente la igualdad y las desigualdades de la columna última, resultará $a^m-1>b\times m$; $a^m>b\times m+1$. Se quiere hacer $a^m>c$ siendo c tan grande como se quiera; pues establézcase la desigualdad $b\times m+1>c$ y si se verifica esta, con mayor razon se verificará la anterior. La última se verifica si $b\times m>c-1$ y esta si $m>\frac{c-1}{b}$ ó bien si $m>\frac{c-1}{b-1}$; y como m puede recibir un valor que cumpla con la última condicion, queda demostrado lo que se queria. | $7^m>83593$; $m>\frac{83593-1}{7-1}=13932$. Haciendo $m=13933$ hay seguridad de que $7^{13933}>83593$; sin que por esto se asegure que la desigualdad propuesta no podria verificarse con un valor menor de m | *Las potencias sucesivas de una cantidad menor que la unidad decrecen* CONSTANTE *é* INDEFINIDAMENTE, *pudiendo llegar á ser menores que cualquier cantidad por pequeña que esta sea.* a^m, $a<1$; $a^1=a$; $a^2=a\times a<a$; $a^3=a^2\times a<a^2$; $a^4=a^3\times a<a^3$;... $a^m=a^{m-1}\times a<a^{m-1}$. Decrecen, pues, *constantemente* y vamos á demostrar que lo hacen tambien *indefinidamente.* Dividamos la unidad por a y representemos por a' el cociente; tendremos $\frac{1}{a}=a'$ y $1=a\times a'$. Como el producto 1 es mayor que el multiplicando a, el multiplicador será mayor que la unidad, por lo que $a'>1$. Elevando á la *emésima* potencia los dos miembros de la última igualdad, resultará: $1=a^m\times a'^m$, de donde se deduce que $a^m=\frac{1}{a'^m}$. Si se quiere, pues que $a^m<\frac{1}{c}$, siendo c un valor entero, fraccionario ó de cualquier clase, pero tan grande como sea necesario para que $\frac{1}{c}$ sea tan pequeño como se quiera, bastará hacer que $\frac{1}{a'^m}<\frac{1}{c}$, lo que sucederá siendo $a'^m>c$; y esto se puede conseguir en virtud de lo demostrado anteriormente, toda vez que a' es mayor que la unidad; luego tambien se conseguirá que $a^m<\frac{1}{c}$. Se tendrá seguridad de que la desigualdad anterior se verifica, haciendo $m>\frac{c-1}{a'-1}$ ó sea $m>\frac{c-1}{\frac{1}{a}-1}$, aunque pudiera quizá verificarse con un valor menor de m. | $\left(\frac{2}{3}\right)^m<\frac{7}{5468}$; $m>\frac{\frac{5468}{7}-1}{\frac{3}{2}-1}=\frac{10922}{7}=1560\frac{2}{7}$. Haciendo $m=1561$ hay seguridad de que $\left(\frac{2}{3}\right)^{1561}<\frac{7}{5468}$; sin que esto suponga que no se pudiera conseguir la desigualdad propuesta con un valor menor de m. | Si en la fórmula de la suma de un cierto número de términos consecutivos de la progresion por cociente decreciente, se sustituye en vez del último término su valor según la fórmula del término general, se tendrá: $s=\frac{a-a\times r^n}{1-r}$; y si se supone que n va creciendo hasta ser infinitamente grande, como r es menor que la unidad, r^n irá decreciendo constante é indefinidamente, teniendo cero por límite, y lo mismo sucederá al producto $a\times r^n$, por lo que, representando por S la suma de los infinitos términos de la progresion decreciente, tendrá por espresion $S=\frac{a}{1-r}$, esto es: *el primer término dividido por el esceso de la unidad sobre la razon.* Así, la suma de los infinitos términos de la progresion $\div 24:8:\frac{8}{3}:\frac{8}{9}:\ldots$, cuya razon es $\frac{1}{3}$, será: $S=\frac{24}{1-\frac{1}{3}}=\frac{72}{2}=36$ |

Se puede considerar el valor de una fraccion decimal periódica pura, como la suma de los infinitos términos de una progresion por cociente decreciente que tiene por razon una unidad fraccionaria cuyo denominador es la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene el período. Calculado dicho valor bajo este concepto, se obtiene la misma regla ya esplicada para la conversion á ordinarias de dicha clase de fracciones. $0{,}347347347347\ldots\ldots=0{,}347+0{,}000347+0{,}000000347+0{,}000000000347+\ldots\ldots=\frac{0{,}347}{1-\frac{1}{1000}}=\frac{347}{999}$ | Habiéndose determinado en las espresiones del término general y de la suma de varios términos consecutivos de una progresion por diferencia cada una de las cantidades que en ellas figuran, cuando se conoce el valor de todas las demás que entran en cada una de dichas espresiones, ocurre que se podrá hacer lo mismo en las progresiones por cociente, y así es en efecto; pero como para algunas de estas determinaciones se necesitan conocimientos todavia no adquiridos, las dejamos para despues de haber tratado de los logaritmos.

REGLA DE TRES.

Se dice que dos cantidades son dependientes la una de la otra cuando, variando el valor de cualquiera de ellas, varia necesariamente el que le corresponde de la restante. | Entre las cantidades relacionadas de este modo las hay tales, que la razon entre dos valores cualesquiera de la una es igual á la razon entre los valores correspondientes de la otra, y entonces se dice que dichas cantidades son *proporcionales.* | Si la razon entre dos valores cualesquiera de la una es igual á la razon entre los valores correspondientes de la otra considerados en el *mismo órden,* se llama á las cantidades *directamente proporcionales.* Cuando la razon entre dos valores cualesquiera de la una es equivalente á la razon entre los correspondientes de la otra, pero considerados en *órden contrario*, las cantidades se llaman *inversamente proporcionales* ó *recíprocamente proporcionales.* | La proporcionalidad de dos cantidades es evidente respecto á algunas de ellas, resulta de convenios establecidos en cuanto á otras y se demuestra en diversas ciencias relativamente á las demás. | Se podrá, sin embargo, asegurar que dos cantidades son *directamente proporcionales*, cuando se sepa que al hacerse el valor de la una *cualquier* número de veces *mayor ó menor*, el valor correspondiente de la otra se hace el mismo número de veces *mayor ó menor*, y que son *inversamente proporcionales*, cuando al hacerse el valor de la una *cualquier* número de veces *mayor* ó *menor* el correspondiente de la otra se hace el mismo número de veces *menor* ó *mayor*. Sean, para demostrar lo primero, A y B dos clases de cantidades, como *metros* y *dias*, *libras* y *reales* etc., que suponemos se encuentran en el primer caso. Supongamos tambien que al valor a de la primera corresponde el valor b de la segunda y al a' de aquella el b' de esta. Dispongámoslas para mayor claridad de este modo: $\begin{array}{cc} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline a \ldots\ldots & b \\ a' \ldots\ldots & b' \end{array}$ Hallemos la razon entre a y a' y representémosla por $\frac{m}{n}$, cuya forma puede darse á todo número, si ya no la tiene. Será $\frac{a}{a'} = \frac{m}{n}$ y $a = a' \times \frac{m}{n} = \frac{a' \times m}{n}$; de modo que se pasará del valor a' al valor a haciendo á aquel m veces mayor y despues n veces menor, y como los valores correspondientes de la otra cantidad siguen la misma marcha, segun lo supuesto, se corresponderán las cantidades $\begin{array}{l} a' \ldots a' \times m' \ldots \frac{a' \times m}{n} = a \\ b' \ldots b' \times m \ldots \frac{b' \times m}{n} = b \end{array}$. Pero de las últimas igualdades se deduce $\begin{array}{l} \frac{m}{n} = \frac{a}{a'} \\ \frac{m}{n} = \frac{b}{b'} \end{array}$, por lo que $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ y $a : a' :: b : b'$. Se ve, pues, que las dos cantidades son directamente proporcionales. | Supongamos ahora, para demostrar lo segundo, que siendo A y B otras dos clases de cantidades, al hacerse un valor de la una cualquier número de veces *mayor* ó *menor* el valor correspondiente de la otra se hace el mismo número de veces *menor* ó *mayor* y que al valor a de la primera corresponde al b de la segunda y al a' de la primera el b' de la segunda. Disponiendo el cálculo como antes, haciendo análogos razonamientos y observando que las cantidades siguen marcha contraria, tendremos $\begin{array}{cc} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline a \ldots\ldots & b \\ a' \ldots\ldots & b' \end{array}$; $\frac{a}{a'} = \frac{m}{n}$; $a = a' \times \frac{m}{n} = \frac{a' \times m}{n}$; $\begin{array}{l} a' \ldots a' \times m \ldots \frac{a' \times m}{n} = a \\ b' \ldots\ldots \frac{b'}{m} \ldots\ldots \frac{b' \times n}{m} = b \end{array}$; $\begin{array}{l} \frac{m}{n} = \frac{a}{a'} \\ \frac{n}{m} = \frac{b}{b'};\ \frac{m}{n} = \frac{b'}{b} \end{array}$; $\frac{a}{a'} = \frac{b'}{b}$ y $a : a' :: b' : b$ en cuya última espresion queda demostrado que las cantidades son inversamente proporcionales. | Se dá el nombre de *regla de tres* á la operacion que tiene por objeto determinar el valor de una clase de cantidad correspondiente á varios conocidos de otras clases de cantidades, cuando se conoce el valor de la misma que corresponde á otros distintos de aquellas, con tal de que sean proporcionales todas estas con la primera. Cuando se trata únicamente de dos cantidades, la regla de tres es *simple* y cuando de más de dos *compuesta.* | El problema que se resuelve en la regla de *tres simple* se espresa en general de este modo: *sabiendo que al valor* a *de la clase de cantidad* A *corresponde el valor* b *de la clase de cantidad* B, *se quiere averiguar qué valor de esta clase corresponderá al* a' *de la primera.* Representaremos, segun se acostumbra, el valor que se busca por la letra x y dispondremos todos estos valores de modo que estén uno debajo de otro los de igual especie y cada uno de ellos al lado del que le corresponde, en esta forma: $\begin{array}{cc} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline a \ldots\ldots & b \\ a' \ldots\ldots & x \end{array}$ Si las cantidades son directamente proporcionales, se establecerá la proporcion: $a : a' :: b : x$, de donde $x = \frac{a' \times b}{a}$ que es el valor que se buscaba. Si las cantidades son inversamente proporcionales la proporcion será: $a' : a :: b : x$ y de aquí se deduce el valor que se pedia $x = \frac{a \times b}{a'}$. Se establece, pues, la proporcion, espresando que la relacion entre dos valores de la misma especie es igual á la relacion entre los otros dos, tomados en el mismo órden cuando las cantidades son directamente proporcionales y en órden contrario cuando lo son inversamente. Generalmente se cuida de que la letra que representa el valor desconocido sea el último término de la proporcion. | Si 18 hombres hacen 60 metros de una obra en ciertas condiciones, 45 hombres, en las mismas ¿cuántos metros harán?

Hombres.	Metros.
18......	60
45......	x

Es evidente que, á igualdad de condiciones, si el número de hombres se hace cualquier número de veces *mayor* ó *menor* el de metros construidos se hará el mismo número de veces *mayor* ó *menor*, por lo que las cantidades serán directamente proporcionales y tendremos: $18:45::60:x$ y $x=\frac{45\times 60}{18}=150$. Los 45 hombres harian, pues, 150 metros. | Si, trabajando un cierto número de hombres 12 horas al dia, tardan 63 dias en hacer una obra ¿cuánto tardarán en hacer la misma trabajando 9 horas al dia?

Horas.	Dias.
12.....	63
9......	x

Si el número de horas de trabajo en cada dia, á igualdad de las demás circunstancias, se hace cualquier número de veces *mayor* ó *menor*, es evidente que el número de dias que se tardará en hacer la obra se hará el mismo número de veces *menor* ó *mayor*, y por lo tanto las cantidades son inversamente proporcionales. Tendremos, pues: $9:12::63:x$, y $x=\frac{12\times 63}{9}=84$ es el número de dias que se buscaba. | Hay otro método llamado de *reduccion á la unidad* para resolver la regla de tres simple. Este método consiste en averiguar primero el valor de la clase del que se busca que corresponde á una unidad de la otra clase de cantidad y, conocido que sea, determinar despues el valor de aquella clase que corresponde al nuevo de esta. Refiriéndonos al problema general en el caso de que las cantidades sean directamente proporcionales, diremos: si al valor a de la clase de cantidad A corresponde b de la clase B, á una unidad de aquella clase, que es a veces *menor*, corresponderá a veces *menos* ó sea $\frac{b}{a}$. Y si á una unidad de la clase de cantidad A corresponde $\frac{b}{a}$ de la clase B, al valor a', que es a' veces *mayor* que 1, corresponderá un valor a' veces *mayor* ó sea $\frac{b}{a}\times a'=\frac{b\times a'}{a}$. El valor buscado será pues como antes $x=\frac{b\times a'}{a}$. | En el caso de que las cantidades sean inversamente proporcionales, diremos: si al valor a de la clase de cantidad A corresponde el valor b de la clase B, á una unidad, que es a veces *menor*, corresponderá un valor a veces *mayor* ó sea $b\times a$. Y si á una unidad de la clase A corresponde $b\times a$ de la clase B, á a', que es un número a' veces *mayor*, corresponderá a' veces *menos* ó sea $\frac{b\times a}{a'}$. De modo que el valor que se buscaba es $x=\frac{b\times a}{a'}$. | Para resolver el primer ejemplo numérico por el método de reduccion á la unidad, diremos: si 18 *hombres* hacen 60 *metros*, *un hombre* en las mismas circunstancias hará 18 *veces menos* ó sea $\frac{60}{18}$ *de metro*; y si *un hombre* hace $\frac{60}{18}$ *de metro*, 45 *hombres* harán 45 *veces mas* ó $\left(\frac{60}{18}\times 45\right)$ *metros*. De modo que el valor buscado es $x=\left(\frac{60}{48}\times 45\right)$ *metros* $=150$ *metros*. | En la resolucion del segundo problema numérico por el método de reduccion á la unidad, se dirá: si trabajando 12 *horas* cada dia se tardan 63 *dias* en hacer cierta obra, trabajando *una hora* cada dia se tardarán 12 *veces mas* dias ó sean (63×12) *dias*; y, si trabajando *una hora* cada dia se tardaba este número de dias, trabajando 9 *horas* se tardaria 9 *veces menos* ó sea $\frac{63\times 12}{9}$ dias. El número buscado es, segun esto, $x=\frac{63\times 12}{9}$ dias $=84$ dias. | Observando que cuando las cantidades son directamente proporcionales el valor de x en el problema general es $x = b \times \frac{a'}{a}$ y que cuando son inversamente proporcionales es $x = b \times \frac{a}{a'}$, podemos inferir la regla práctica siguiente, bajo el supuesto de que se han colocado los valores como se tiene dicho y cuidando de que el desconocido quede en el segundo renglon: para encontrar el valor desconocido en la regla de tres simple, se multiplica el valor conocido de la especie de aquel por la relacion que existe entre los dos valores de la otra especie, tomando por *antecedente* el que corresponde al *desconocido* ó sea al de abajo, cuando son *directamente* proporcionales y el que corresponde al *conocido* ó sea el de arriba, cuando lo sean *inversamente*. | Ocupémonos ahora de la regla de tres compuesta, resolviendo el problema general siguiente. Suponiendo que á los valores a de la clase de cantidad A, b de la clase B, c de C, e de E y f de F corresponde el valor d de la clase de cantidad D, se quiere averiguar qué valor de esta clase de cantidad corresponderá á los a', b', c', e' y f' respectivamente de aquellas. Representemos por x el valor buscado y dispongamos los datos como anteriormente, colocando unos debajo de otros los valores de igual especie y enfila los que se corresponden y cuidando tambien, aunque no sea indispensable, de que el valor desconocido se encuentre en el segundo renglon:

$$\begin{array}{cccccc} \underline{A} & \underline{B} & \underline{C} & \underline{D} & \underline{E} & \underline{F} \\ a\ldots\ldots & b\ldots\ldots & c\ldots\ldots & d\ldots\ldots & e\ldots\ldots & f \\ a'\ldots\ldots & b'\ldots\ldots & c'\ldots\ldots & x\ldots\ldots & e'\ldots\ldots & f' \end{array}$$

Supongamos además que las cantidades A y D son proporcionales *directamente*, B y D *inversamente*, C y D *inversamente*, E y D *directamente* y F y D *directamente*. Se determinará el valor desconocido resolviendo varias reglas de tres simples en cada una de las cuales, conociendo el valor de la clase de cantidad D que corresponde á ciertos valores de las otras, se averigüe el que corresponde á los mismos, pero cambiando sucesivamente uno de los datos antiguos por uno nuevo hasta que todos queden cambiados, en cuyo caso se tendrá ya el valor que se buscaba. Así iremos diciendo:

Si al valor a de la clase de cantidad A con los b, c, e y f de las clases de cantidades B, C, E y F corresponde el valor d de la clase de cantidad D, al valor a' de la clase de cantidad A con los mismos valores de las otras clases ¿qué valor x' de la clase de cantidad D corresponderá? $\left\{\begin{array}{l} a\ldots.d \\ a'\ldots.x' \end{array}\right.$; $a : a' : d : x'$

Si al valor b de la clase de cantidad B con los a', c, e y f de las otras clases corresponde el valor x' de la clase de cantidad D, al valor b' de la clase de cantidad B con los mismos valores de las otras ¿qué valor x'' corresponderá de la clase de cantidad D? $\left\{\begin{array}{l} b\ldots.x' \\ b'\ldots.x'' \end{array}\right.$; $b' : b :: x' : x''$

Si al valor c de la clase de cantidad C con los a', b', e y f de las demás clases corresponde el valor x'' de la clase de cantidad D, al valor c' de aquella clase con los mismos a', b', e y f ¿cuál será el valor x''' de la clase de cantidad D que corresponderá? $\left\{\begin{array}{l} c\ldots x'' \\ c'\ldots x''' \end{array}\right.$; $c' : c :: x'' : x'''$

Si al valor e de la clase de cantidad E con los a', b', c' y f de las clases de cantidades A, B, C y F corresponde el valor x''' de la clase D, al valor e' de la clase de cantidad D con los mismos a', b', c' y f de las otras ¿qué valor x^{iv} corresponderá? $\left\{\begin{array}{l} e\ldots x''' \\ e'\ldots x^{\text{iv}} \end{array}\right.$; $e : e' :: x''' : x^{\text{iv}}$

Y, por último, si al valor f de la clase de cantidad F con los a', b', c' y e' de las otras clases corresponde el valor x^{iv} de la clase D, al valor f' de aquella clase con los mismos de las otras ¿qué valor, representado ya por x, corresponderá? $\left\{\begin{array}{l} f\ldots.x^{\text{iv}} \\ f'\ldots.x \end{array}\right.$; $f : f :: x^{\text{iv}} : x$

Pudiéramos determinar el valor desconocido en la primera proporcion, sustituirle en la segunda y determinar el valor desconocido que en aquella aparece, poner este valor en la tercera y determinar x''' y así sucesivamente; pero es preferible multiplicar ordenadamente dichas proporciones y dividir despues el último medio y el último estremo por el producto $x' \times x'' \times x''' \times x^{\text{iv}}$, con lo que solo quedará en la proporcion última el valor desconocido x que se