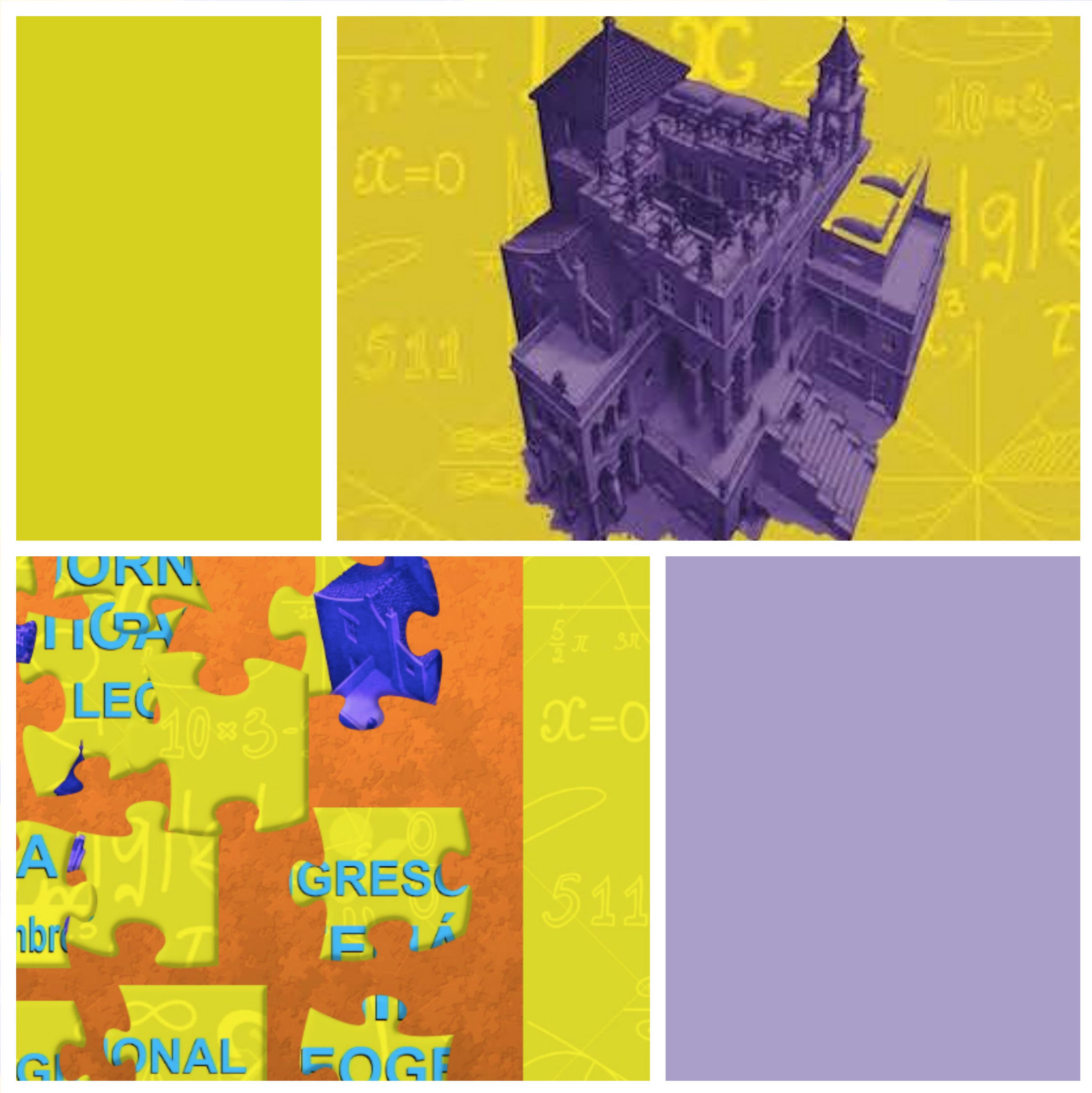


ACTAS

XIV CONGRESO REGIONAL DE MATEMÁTICAS DE CASTILLA Y LEÓN

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán"

Junta de Castilla y León

JORN
LEC
EBRA
noviembr
GRESO
REGI
ONAL
9 y 10 de
DE Cy
GE

XIV CONGRESO REGIONAL DE MATEMÁTICAS DE CASTILLA Y LEÓN

León, 9 y 10 de noviembre de 2018

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán"

Junta de Castilla y León

Editan: Junta de Castilla y León y Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán

Cítese como:
Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán” (2018). XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. Universidad de León.

Las comunicaciones aquí publicadas, han sido sometidas a evaluación y selección por parte de profesorado en activo de todos los niveles educativos.

Diseño del cartel del congreso:
Santos Javier Álvarez Valderrey
Diseño de la portada y contraportada:
Rosa Mª Ruíz Núñez

ISBN: 978-84-09-12456-5

ÍNDICE

PRESENTACIÓN Y PRÓLOGO **6**

Presentación 7
Prólogo 8

CONFERENCIA INAUGURAL **10**

Cuadriláteros con sorpresas. Investigando con GeoGebra 11

SEGUNDA CONFERENCIA PLENARIA **16**

Algunas ideas y reflexiones sobre la Matemática 17

PONENCIAS SIMULTÁNEAS **23**

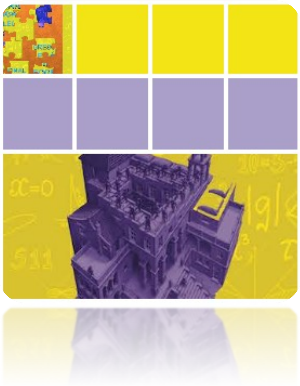
Orientaciones para el profesorado de Matemáticas a partir de las evaluaciones estandarizadas 24
Historias de π. El método de Arquímedes para aproximarlo 34
Matemáticas en educación infantil utilizando aplicaciones móviles como recurso didáctico 42
Va por mis alumnos: los del pasado, los del presente y los del futuro 55
Enseñando Matemáticas a través de su historia 61
GeoGebra como herramienta didáctica en la formación profesional de maestros de Educación Primaria 71
Reflexiones sobre la enseñanza de las matemáticas en educación infantil, primaria y secundaria 81
La papiroflexia, una herramienta lúdica para el aprendizaje de las matemáticas 90

TALLERES **100**

Potenciar la calculadora como recurso didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas . 101
Matemáticas, ¿fuera del aula? 110
Geometría, ¿juegas conmigo? 119
Primeros pasos con GeoGebra 3D 130
GeoGebra para andar por clase 142

COMUNICACIONES **157**

Escape room. Una experiencia de gamificación en las aulas 158
Viviendo las Matemáticas desde la escuela infantil. ¿Es lo cotidiano una ciencia exacta? 163
El necesario cambio curricular y metodológico 171
ABP para aprender probabilidad 177
Matemagia 184
El libro de texto interactivo frente al libro de texto tradicional 190
Matemáticas en los juegos grecorromanos: la casa áurea del Dios 199
Impresora 3D como recurso para las matemáticas 212
Las Matemáticas a través de Alicia 215
Una experiencia divulgativa basada en la teoría de grafos 221
Entornos virtuales para el aprendizaje de las matemáticas 230
Creación de material manipulativo para futuros docentes de infantil, primaria y secundaria para el aprendizaje de matemáticas 236
Conocimiento profesional y práctica de aula del profesor de matemáticas: la recta de Euler 245
Evaluación de matemáticas en títulos de grado en ingeniería 254
Del papel a las *apps* (...pasando por *Youtube*) 261
Las matemáticas en el arte salmantino 269



PRESENTACIÓN Y PRÓLOGO

PRESENTACIÓN

La Consejería de Educación, mantiene un interés constante por la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje, especialmente en el área de Matemáticas. Para ello, es imprescindible aunar ideas, esfuerzos, y sueños de toda la comunidad educativa. Por este motivo es ya larga y fructífera la relación con la Asociación "Miguel de Guzmán", que se ha plasmado en un convenio de colaboración, la creación del Instituto "Geogebra" de Castilla y León y tiene un espacio en el Grupo Regional para el Establecimiento de Sinergias en el Ámbito de las Matemáticas.

A la Asociación Miguel de Guzmán le avalan sus más de 25 años de trabajo por la mejora de la educación matemática en Castilla y León. Todo ello gracias a la motivación y el trabajo desinteresado de muchos docentes que iniciaron un camino que ha permitido celebrar el 9 y 10 de noviembre de 2018 el XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León, cuyas actas se recogen en esta publicación.

Además se contienen aquí las actas de la III Jornada Geogebra de Castilla y León, organizada por el Instituto Geogebra de Castilla y León, en simbiosis con el XIV Congreso Regional de Matemáticas. El Instituto Geogebra de Castilla y León, nace en 2014 de la iniciativa de profesorado de la Asociación Miguel de Guzmán y el aliento de la Consejería de Educación , con el objetivo de dar formación y apoyo en el uso didáctico de Geogebra, desarrollar y compartir recursos didácticos e investigar y colaborar con otros institutos de Geogebra.

Estamos por tanto ante el fruto maduro del trabajo del profesorado de Matemáticas de Castilla y León, que está disponible para todos los que tenéis la satisfacción de enseñar Matemáticas, hacer pensar, despertar la imaginación,… Como dijo Albert Einstein, "*la imaginación es más importante que el conocimiento*".

Adéntrense en las páginas de estas actas, imaginen, piensen, adapten y escojan lo que necesitan para su aula, para sus alumnos y alumnas, que tienen un rostro concreto, una historia de aprendizaje propia, y una forma de pensar y entender el mundo.

Y finalmente dispónganse a crear su forma de enseñar, de ser y estar en el aula, de entender y hacer entender las Matemáticas y compartan su experiencia con otros docentes porque solo sumando podremos mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Fernando Rey Martínez

Consejero de Educación

Consejería de Educación. Junta de Castilla y León

PRÓLOGO

En los pasados 9 y 10 de noviembre de 2018, en la ciudad de León, se celebraron conjuntamente el XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León y la III Jornada GeoGebra de Castilla y León.

El Congreso y la Jornada, abiertos a todo tipo de profesores, contaron con un número total de 161 asistentes, de los cuales, un 9% fueron del cuerpo de Maestros, un 12% profesores de Universidad y un 79% del cuerpo de profesores de Enseñanza Secundaria y Bachillerato. Participaron también profesores de Administraciones Educativas diferentes de Castilla y León, profesores interinos y profesores jubilados, en un número total de 32.

Habiendo hecho balance de ambas actividades y teniendo en cuenta las encuestas de valoración realizadas por los asistentes, se destacan los siguientes ítems:

1. Aspectos más positivos:
    - Innovación en clase, uso de aplicaciones y de materiales.
    - Geogebra y sus aplicaciones.
    - Reflexiones sobre las Matemáticas.
2. Lo que se ha echado en falta:
    - Más tiempo y descansos intermedios.
    - La posibilidad de hacer trabajos en grupos.
3. Opiniones respecto a la docencia en Matemáticas:
    - Es una labor bonita e importante, pero se necesitan cambios.
    - Es fundamental renovarse en la metodología a utilizar.

Los participantes inciden en que el Congreso fue muy interesante y felicitan a la Organización.

Como Presidenta de la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán" quiero transmitir la necesidad de que la Asociación siga organizando actividades de este tipo para contribuir a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas y al mismo tiempo trasmitir a la sociedad que esta Asociación de Profesores tiene gran vitalidad y ejerce un papel primordial en la educación matemática.

El Congreso Regional y el día Geogebra han sido una buena muestra del alto nivel científico y didáctico de los profesores conferenciantes, ponentes, autores de comunicaciones y talleres, así como de los asistentes en general.

Se debe seguir reforzando la presencia de profesores de Primaria y de Universidad en estas actividades para alcanzar los objetivos de coordinación y cooperación con todos los niveles de enseñanza.

Agradezco a la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León, a la Universidad de León, al Ayuntamiento de León, al Centro Superior de Formación del Profesorado JCyL, al Instituto Geogebra de Castilla y León, y a otras entidades colaboradoras, sin cuya ayuda habría sido imposible la celebración de estos eventos.

He de destacar a los Comités Organizador y Científico del Congreso Regional y del Día de Geogebra, así como a los profesores de la Asociación Provincial de León, por el excelente trabajo llevado a cabo, antes, durante y posteriormente a la realización de las acciones realizadas, lo que ha determinado un gran éxito en las mismas.

Esperando que esta publicación conjunta de la Consejería de Educación y de la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán" sirva de ayuda y referencia al trabajo futuro en las aulas y fuera de ellas, envío, a todos sus lectores, un cordial saludo.

Mª Encarnación Reyes Iglesias

Presidenta de la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán"

CONFERENCIA INAUGURAL

CUADRILÁTEROS CON SORPRESAS. INVESTIGANDO CON GEOGEBRA

José Luis Álvarez García

Catedrático de Matemáticas de Educación Secundaria jubilado

Resumen

En nuestras clases algunas investigaciones pueden surgir de manera natural cuando nos proponemos profundizar en un problema e indagar nuevas soluciones o nuevos retos en torno al mismo. GeoGebra es una poderosa herramienta para llevar esto a cabo. Con GeoGebra, una vez resuelto un problema, no resulta difícil modificar los datos del mismo y observar el efecto que tienen esos cambios en la solución. O imponer nuevas condiciones y obtener nuevos resultados. O ver el problema al revés: partir del resultado y ver cuáles deben ser los datos de partida. Se puede investigar, se pueden descubrir cosas a menudo sorprendentes. Cuando nos planteamos la pregunta "¿qué pasaría si...?" empieza un viaje fascinante. En esta ocasión ese viaje nos llevará a descubrir algunas propiedades sorprendentes de los cuadriláteros.

Palabras clave: *GeoGebra, cuadriláteros, investigación, Matemáticas, Secundaria.*

PERO, ¿QUÉ ES UN CUADRILÁTERO?

Cuando iniciaba mi carrera profesional, allá al inicio de la década de los 80 del siglo pasado, me impactaron mucho algunas lecturas sobre Geometría. Recuerdo, en particular, lo mucho que tuve que reaprender leyendo "Rompiendo las cadenas de Euclides" de David Fielker. Y recuerdo también el impacto de un artículo de Denis Crawforth que llevaba por título "Qué es un cuadrilátero". ¡Con lo sencillo que me resultaba hasta entonces definir lo que era un cuadrilátero! Claro, cuando construimos un cuadrilátero con GeoGebra, utilizando la herramienta Polígono, o también cuando lo construimos con piezas de mecano, el objeto que obtenemos no tiene la rigidez de un dibujo. Al mover los vértices (o, en su caso, las piezas de mecano) podemos obtener múltiples figuras: surgen de manera natural cuadriláteros convexos y cóncavos, pero también los entrelazados, aquellos que obtenemos cruzando lados. ¿También los podemos considerar cuadriláteros? ¿Qué es entonces un cuadrilátero? ¿Cómo los clasificamos?

PARALELOGRAMOS ASOCIADOS A UN CUADRILÁTERO

El punto de inicio de nuestras investigaciones será el Paralelogramo de Varignon: el que queda determinado por los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera. ¿Qué relación existe entre el área de este paralelogramo y la del cuadrilátero original? ¿Qué relación tiene el centro de este paralelogramo con el cuadrilátero original? Podemos descubrirlo con GeoGebra y buscar el por qué de dichas relaciones.

Ahora podemos generalizar lo que hemos hecho: hemos disecado los lados del cuadrilátero, pero, ¿por qué no dividirlo en 3, 4, 5… partes cada lado? ¿Qué pasaría si dividimos cada lado en n partes y unimos entre sí los puntos situados a 1/n de cada vértice?

Nos surge ya una duda de mano, ¿cómo interpretamos ese 1/n? ¿Podría ser, por ejemplo, a 1/n de cada vértice, en un mismo sentido? Pero, ¿importaría el sentido? ¿O bien a 1/n a partir de dos vértices extremos de una diagonal? ¿Y de qué diagonal? GeoGebra es el marco idóneo para tratar de ir buscando las respuestas a todas estas preguntas.

En su obra "Vitaminas matemáticas" cuenta Claudi Alsina cómo encontrar el centroide de un cuadrilátero. Más concretamente el punto donde estaría ubicado el centro de masa de un cuadrilátero si suponemos que su masa está distribuida uniformemente por toda su superficie. Dicho punto es el centro del Paralelogramo de Wittenbauer asociado a dicho cuadrilátero, que construimos con GeoGebra. ¿Es siempre un paralelogramo? ¿Qué relación hay entre el área de este paralelogramo y la del cuadrilátero inicial? Utilizaremos GeoGebra para tratar de encontrar la respuesta a las preguntas que nos hemos planteado.

La idea anterior también se puede generalizar, de manera análoga a como lo hemos hecho en el caso del paralelogramo de Varignon. ¿Qué pasaría si en vez de trisecar los lados y tomar los puntos situados a 1/3 del vértice, dividimos los lados en n partes y tomamos los puntos situados a 1/n de cada vértice? ¿Obtendremos paralelogramos? ¿Qué razón hay entre las áreas de estos cuadriláteros y la del cuadrilátero de partida? ¿Cambia dicha razón cuando modificamos el cuadrilátero inicial? ¿Y cuando cambiamos el valor de n? ¿Podríamos encontrar una fórmula que nos permita calcular dicha razón en función de n? Con ayuda de GeoGebra iremos buscando respuestas a estas y a otras preguntas análogas que nos podamos formular.

CUADRILÁTEROS CÍCLICOS Y TANGENCIALES

Todos los triángulos pueden inscribirse en una circunferencia: su circunferencia circunscrita. Pero, ¿podemos afirmar lo mismo de los cuadriláteros? Es evidente que no: tres vértices consecutivos del cuadrilátero, y por tanto tres puntos no alineados, siempre determinarán una circunferencia, pero el cuarto vértice no tiene por qué pertenecer a la misma. Llamamos cuadrilátero cíclico al que se puede inscribir en una circunferencia. El Teorema de Ptolomeo establece que un cuadrilátero es cíclico si y solo si el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de sus pares de lados opuestos. Además de la demostración clásica hay una interesante forma de demostrarlo utilizando GeoGebra.

En todos los triángulos se puede inscribir una circunferencia: su circunferencia inscrita. Pero, ¿podemos afirmar lo mismo con respecto a los cuadriláteros? Sólo imaginando la situación en un rectángulo somos conscientes de que no. Se llama cuadrilátero tangencial a un cuadrilátero en el que se puede inscribir una circunferencia. La condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero sea tangencial es que las sumas de las longitudes de los dos pares de lados opuestos deben ser iguales. Este resultado, conocido como Teorema de Pitot, es muy fácil de demostrar con GeoGebra.

También resulta interesante abordar con GeoGebra dos interesantes propiedades de los cuadriláteros, relativas a sus bisectrices y a sus áreas respectivamente.

Se atribuye a Napoleón un interesante teorema, relativo a los triángulos: si sobre los lados de un triángulo cualquiera construimos triángulos equiláteros, los centros de tales triángulos determinan siempre un triángulo equilátero. ¿Podremos generalizar este resultado a los cuadriláteros? Tratando de encontrar la respuesta a esta pregunta descubrí dos interesantes teoremas:

- El Teorema de Van Aubel: en un cuadrilátero convexo los segmentos que unen los centros de los cuadrados construidos sobre lados opuestos son iguales y perpendiculares.
- El Teorema de Thebault: en un paralelogramo los centros de los cuadrados construidos sobre sus lados determinan un cuadrado.

GeoGebra nos permite comprobar ambos teoremas y nos ofrece herramientas para ayudarnos en la demostración de los mismos.

CUADRILÁTERO COMPLETO

Al prolongar cuatro rectas, ninguna de ellas paralela a otra, se forma un cuadrilátero completo. Así definido, un cuadrilátero completo posee seis vértices (los puntos donde las rectas se cortan entre sí), cuatro lados (los segmentos que pasando por los vértices forman el mayor polígono posible) y tres diagonales. Los cuadriláteros completos se utilizan por sus propiedades en la Geometría Proyectiva y están relacionados con la construcción de curvas cónicas.

Con GeoGebra podemos comprobar que, en un cuadrilátero completo, los puntos medios de sus tres diagonales están alineados. La recta que los une se llama Recta de Newton-Gauss. También podemos comprobar que están alineados los ortocentros de los cuatro triángulos que determinan sus 6 vértices. Se llama Recta de Steiner a la recta que los une.

CENTROS DE UN CUADRILÁTERO

Los centros del triángulo constituyen un contenido clásico de la enseñanza de la Geometría en la Educación Secundaria. Normalmente se estudian el baricentro, el ortocentro, el incentro y el circuncentro. Pero no son estos los únicos puntos notables de un triángulo. Realmente, ¿cuántos puntos podemos considerar centros de un triángulo? La Enciclopedia de los Centros del Triángulo, conocida por sus iniciales en inglés ETC, recoge los puntos asociados a un triángulo con alguna peculiaridad, que investigadores de todo el mundo van descubriendo. Día a día se van añadiendo nuevos puntos, contando ya con más de 25000 puntos registrados.

En el caso de los cuadriláteros no existen analogías con el triángulo, en lo que respecta a los centros. En verdad no podemos hablar de circuncentro de un cuadrilátero, por ejemplo, porque no todos los cuadriláteros son inscribibles en una circunferencia. Aunque sí podemos hablar de cuasi-centros de un cuadrilátero convexo que podemos obtener a partir de los centros de los triángulos que las diagonales determinan en el cuadrilátero. Y además tendremos dos formas de hacerlo.

Si tenemos en cuenta que cada diagonal divide al cuadrilátero en dos triángulos, obtenemos así cuatro triángulos asociados al cuadrilátero. A partir de ellos veamos cómo podemos obtener los cuasi-centros del cuadrilátero. Lo primero que haremos será determinar los centros respectivos (baricentro, ortocentro o circuncentro) de cada par de triángulos correspondientes a una misma diagonal. A continuación uniremos entre sí por segmentos los centros de los triángulos correspondientes a cada diagonal. El punto de intersección de ambos segmentos determinará el cuasi-centro correspondiente del cuadrilátero. Obtenemos de ese modo los denominados primer cuasi-baricentro, primer cuasi-ortocentro y primer cuasi-circuncentro, respectivamente, del cuadrilátero. Al primer cuasi-baricentro también se le denomina centroide del cuadrilátero y se corresponde con el centro de masa del mismo, supuesto que la masa estuviera distribuida de forma uniforme por su superficie (coincide con el centro del paralelogramo de Wittenbauer del que hemos hablado anteriormente). Los tres cuasi-centros del cuadrilátero así obtenidos están alineados, como lo están los puntos de los que se obtienen en un triángulo, y determinan la Recta de Euler del cuadrilátero. Sorprendentemente la razón de distancias entre los cuasi-centros también es la misma que en el caso de los triángulos.

Pero también podemos observar que en conjunto las dos diagonales del cuadrilátero lo dividen en cuatro triángulos, cada uno de ellos determinado por uno de los lados del cuadrilátero y el punto de intersección de las diagonales. Hallando los centros respectivos (baricentro, ortocentro o circuncentro) de los cuatro triángulos y uniendo por segmentos los centros correspondientes a lados opuestos, el punto de intersección de ambos segmentos determina el segundo cuasi-centro del cuadrilátero. Obtenemos así el segundo cuasi-baricentro, segundo cuasi-ortocentro y segundo cuasi-circuncentro, respectivamente. Los tres cuasi-centros del cuadrilátero así obtenidos también están alineados y determinan la segunda Recta de Euler del cuadrilátero. La razón de distancias entre los segundos cuasi-centros también es la misma que en el caso de los triángulos.

Resulta más sorprendente aún comprobar que los respectivos cuasi-baricentros, cuasi-ortocentros y cuasi-circuncentros determinan 3 rectas concurrentes, siendo el punto de intersección de las mismas el punto de corte de las diagonales del cuadrilátero.

EL TESORO DEL ROMBO

Hace algunos años propusimos a los participantes en la Olimpiada Matemática para estudiantes de segundo curso de ESO de Asturias el siguiente problema:

"*En un desierto, un legendario aventurero cansado y al borde de la muerte ha enterrado un tesoro. En el plano que ha dejado, solamente está señalada una roca y un gran árbol. También ha anotado que la roca, el árbol y el punto donde está enterrado el tesoro son 3 vértices de un rombo. Del cuarto vértice solamente sabemos que está sobre la pista rectilínea cercana. ¿Dónde habría que cavar para encontrar el tesoro?*".

A los estudiantes se les entregaba una hoja en la que se había situado el emplazamiento de la roca, del árbol y de la pista, respectivamente. Debían resolver el problema sobre la misma hoja, utilizando regla y compás.

No resultó un problema demasiado difícil (lamentablemente, los problemas de Geometría resultan muy difíciles, demasiado a menudo) y fueron bastantes los estudiantes que lo resolvieron. ¿Que lo resolvieron? Más precisamente habría que decir, que encontraron UNA solución. Y eso fue precisamente lo que nos hizo reflexionar mucho sobre esto. Partiendo de la ubicación de la roca, el árbol y la pista, como se puede ver con GeoGebra, existen nada menos que cinco posibles soluciones,… pero ninguno de los estudiantes buscó más de una. En cuanto encontraron una solución dieron el problema por concluido. Eso resultaba muy preocupante. ¿No será que nuestros alumnos y alumnas tienen demasiado asumido que un problema solamente tiene una solución? ¿No será que rara vez se les insiste en la necesidad de indagar si hay más soluciones? ¿O, peor aún, que solamente se les proponen problemas con solución única?

En el Proyecto Gauss se plantea este problema para resolver con GeoGebra. Pero se añade algo que le da una perspectiva mucho más interesante. Una vez resuelto, se ofrece la posibilidad de cambiar la ubicación de la roca y del árbol para estudiar nuevamente las soluciones del problema. ¿Cómo tendrían que estar situados para que existan únicamente 4 soluciones? ¿Y para que sólo haya 3 soluciones? ¿Podría ocurrir que no hubiera ninguna solución? ¿Puede haber una sola solución?

TEOREMA DE LAS ALFOMBRAS

Imagina dos alfombras con las que cubres por completo el suelo de una habitación. Mueves una de ellas, de modo que una parte de la misma quede solapada sobre la otra y, en consecuencia, una parte del suelo destapada. La superficie de suelo que queda ahora al descubierto es igual a la superficie solapada por las dos alfombras. Este resultado es conocido como el Teorema de las Alfombras y es un recurso extraordinario para resolver algunos problemas geométricos.

Con ayuda de GeoGebra recorreremos algunas situaciones con cuadriláteros en las que tendremos que utilizar el Teorema de las Alfombras para llegar a la solución.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS WEB

Alsina, C. (2008). *Vitaminas matemáticas*. Ed. Ariel. Barcelona

Encyclopedia of quadri-figures (EQF)
https://chrisvantienhoven.nl/mathematics/encyclopedia

Encyclopedia of triangle centers (ETC)
http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html

Presentación y materiales complementarios http://www.jupenoma.es/leon2018/leon.html

Proyecto Gauss http://www.jupenoma.es/gauss/index.htm

Para hacer referencia al artículo:

Álvarez, J.L. (2018). Cuadriláteros con sorpresas. Investigando con Geogebra. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 11-15). Lugar: Universidad de León

SEGUNDA CONFERENCIA PLENARIA

ALGUNAS IDEAS Y REFLEXIONES SOBRE LA MATEMÁTICA

Manuel Fernando González Rodríguez

Catedrático de Escuela Universitaria. Universidad de León.

Nivel académico: Primaria, Secundaria y Bachillerato y Universidad.

Resumen

Se hace un repaso a los aspectos básicos de la Matemática, haciendo hincapié en las bases y su estructura, el rigor, los teoremas, etc.
Trataremos del significado que tienen algunos nombres que se utilizan en Matemáticas.
Hablaremos del concepto fundamental del Análisis Matemático: "el límite".
Además, reflexionaremos sobre la plausibilidad de ciertos resultados, así como lo que está subyacente a otros.
Finalmente, damos dos ejemplos de aplicaciones sencillas pero muy útiles: una a la Física y otra a la Química.

Palabras clave: *Álgebra, Topología, Análisis Matemático, Teorema, Límite.*

INTRODUCCIÓN

1. Las bases de la Matemática
2. Auditorio y rigor
3. Teoremas
4. Hipótesis explícitas e implícitas de los teoremas
5. Nombres
6. Sobre el concepto de límite
7. Resultados plausibles
8. El porqué de ciertos resultados
9. Epílogo

DESARROLLO:

En primer lugar, hablaremos de las bases de la Matemática, señalando que el Álgebra y la Topología, son las dos "patas" en las que se sustenta el edificio matemático.

El Álgebra trata fundamentalmente de los procesos finitos, basados en la propiedad más importante que puede tener una ley de composición interna: la asociativa. Comentaremos leyes de composición interna, asociativas y no conmutativas, de indudable interés. Unas se pueden modificar para ser conmutativas (multiplicación de matrices), perdiendo la utilidad, y otras que estructuralmente no pueden ser conmutativas si se pretende que sean de utilidad para nuestros propósitos (multiplicación de matrices y derivada de una función compuesta).

La Topología trata del concepto de proximidad, en cierto sentido el concepto de límite y, por eso, los procesos infinitos. Veremos que el que se pueda "deformar continuamente" un conjunto para obtener otro conjunto "topológicamente igual" al de partida, hace que esté prohibido "cortar" o "pegar" en las deformaciones continuas.

El problema reside en que cuando se "pega" puntos lejanos pasan a estar próximos, y cuando se "corta" se da el proceso inverso, lo cual "choca frontalmente" con el concepto de límite.

Una vez sentadas las bases de la Matemática, uno se pregunta ¿qué parte de la Matemática viene a continuación? Obviamente es el Análisis Matemático.

Una de las primeras apariciones del Análisis Matemático se da cuando en un conjunto tenemos una estructura algebraica, normalmente un espacio vectorial y añadimos una topología derivada de una norma. El estudio de las propiedades de un espacio vectorial dotado de una norma, ya es totalmente análisis matemático.

La idea final de este apartado sería la siguiente: si el Álgebra y la Topología son las bases de la Matemática, ¿por qué no se les da Topología, como una asignatura separada, a estudiantes universitarios, salvo a los matemáticos creo? La razón está en el poco tiempo que hay para dar toda la materia que tenemos que explicar, por eso se dedica un tiempo al Álgebra como asignatura separada y la Topología se mete (como se puede) sobre la marcha, sin indicar dónde usamos aspectos topológicos. Creo que, a ciertos niveles, es interesarte mostrar a los alumnos la parte topológica que subyace en los tópicos que se están tratando. Más adelante volveré sobre esta idea.

En el apartado segundo hablaremos del auditorio y el rigor.

La idea central es que siempre hay que ser riguroso, dentro de lo posible, pero adaptándonos al nivel del alumnado y, a mi entender, en algún momento comentarles un nivel superior de lo que se está tratando, aún a riesgo de que no se enteren de nada, o casi nada, en ese momento. Probablemente más adelante, si les aparece, recordarán las palabras que les dijimos.

Por ejemplo, creo que es interesante cuando se les habla de la derivada de una función en un punto, comentarles que la afirmación de que es un número es una versión suave, que una versión más general es que es una matriz y que, en realidad, la derivada es una aplicación lineal y continua.

En el apartado siguiente dedicado a los teoremas haremos las siguientes consideraciones.

Todos tenemos la idea de que un teorema es un resultado realmente importante, que añade algo clave en el desarrollo matemático; pero, a mi entender, no todos los teoremas son iguales.

Creo que se les debe comentar a los alumnos las diferencias fundamentales entre unos teoremas y otros.

Hay teoremas "perfectos" que cierran un camino o que dan una solución completa a un problema matemático. Por ejemplo, el teorema de Pitágoras, el teorema que afirma que los tres puntos importantes de un triángulo están alineados, o el que nos dice que un cuerpo es ordenado si, y sólo si, el -1 no se puede escribir como una suma de cuadrados.

Otros teoremas no cierran totalmente el problema a tratar. El teorema fundamental del Álgebra no remata la cuestión, pues no nos dice una forma para calcular las raíces que existen. En la misma línea, el teorema que afirma de existen infinitos números primos, no nos da un modo preciso de calcularlos.

Desde otro punto de vista algunos teoremas aparentan ser mucho mejores de lo que son. La regla de Cramer nos dice cuando un sistema de ecuaciones lineales tiene solución y en caso de tenerla como se calcula. Desgraciadamente la fórmula para obtener la solución es teórica y su aplicación práctica tiene muchas dificultades.

Otros teoremas, aún siendo extremadamente importantes, nos ponen límites a lo que los matemáticos podemos hacer, es el caso del teorema de Gödel o del teorema que afirma que no existe para un polinomio de grado mayor o igual que cinco, una fórmula general que nos de las raíces.

Para finalizar, otros teoremas afirman todo lo que pueden afirmar, por más que nos gustaría que afirmaran más cosas, tal es el caso del teorema del valor medio y, consecuentemente todos los teoremas que en él están basados, como es el caso del teorema de Taylor.

En el apartado cuarto hacemos notar la importancia de señalar a los alumnos los conceptos o hipótesis que aparecen en los enunciados de los teoremas y que no están claramente explicitados; normalmente conceptos topológicos.

Los dos ejemplos de hipótesis explícitas e implícitas en teoremas que daremos a continuación, nos sirven para presentar dos de los conceptos más importantes de la Topología: la compacidad y la conexión.

Por todos es conocido el teorema que afirma si f es continua en un conjunto cerrado y acotado, alcanza el máximo y el mínimo absoluto. Aunque no se diga explícitamente, la noción de compacidad está subyacente en este resultado.

Veamos ahora como la noción de conexo aparece implícitamente en un teorema al cual no se le da la suficiente importancia.

Si se le pregunta a un alumno ¿cuál es la derivada de una función constante?, inmediatamente nos dice que 0.

Si le preguntamos, ¿una función que en todos sus puntos tiene derivada 0, es constante?, casi seguro que nos dirá que sí.

Es fácil poner ejemplos de funciones derivables con derivada 0 en todos sus puntos y que no son constantes.

El problema radica en que el conjunto de partida no es conexo (en el caso de los números reales lo tenemos más sencillo, pues podemos asociarlo a conexo por caminos). Es decir, para poder afirmar que el recíproco es cierto hay que añadir la hipótesis de la conexión.

Es bueno plantearles esta situación pues cuando, más adelante, se calculan las primitivas de una función lo que se hace es calcular una de ellas y añadir una constante para calcular el resto, lo cual es cierto, a la vista de lo anterior, si trabajamos en un intervalo.

Una aplicación inmediata de esta situación se da en la Regla de Barrow, en realidad lo que subyace en su aplicación práctica son dos cosas.

En primer lugar, que conociendo una primitiva de una función en un intervalo, conocemos todas las demás, pues se van a diferenciar en una constante.

En segundo lugar, que una cualquiera de las primitivas nos sirve para aplicar la Regla de Barrow y que, por comodidad, usamos aquella en que la constante es 0.

El apartado quinto está dedicado a tratar los nombres que se les ponen a los conceptos matemáticos.

Muchas veces ocurre que el nombre que se las da a las cosas, nos puede dar una idea de qué propiedades tienen. Si hacemos hincapié en este hecho, mostraremos a los alumnos una vez más lo racional de La Matemática, así como tratar de que sea lo más accesible para todos.

Si aparece la palabra "producto" por ejemplo: en el producto vectorial, el producto de matrices o producto escalar, es de esperar que antes de definir dicha operación se haya definido otra operación llamada suma y que el producto distribuya respecto de la suma.

Algunas veces propiedades que parecen inverosímiles son ciertas debido a la estructura que subyace debajo del concepto. Por ejemplo, el que el determinante de un producto de matrices sea el producto de los determinantes se debe a que la base matemática del concepto de determinante es un producto.

Otro ejemplo ocurre con la palabra "equivalente" y algunas otras asociadas. Lo normal es que bajo un concepto definido con la palabra equivalente: infinitésimos equivalentes, matrices equivalentes, etc. haya una relación de equivalencia.

El apartado sexto está dedicado al concepto de límite.

El concepto de límite es la base del Análisis Matemático y para nada es obvio. A pesar de su aparente sencillez, basada en que su definición ocupa una línea, a los matemáticos les costó mucho dar con una definición precisa de dicho concepto.

Hablar en profundidad y sobre la profundidad, valga la redundancia, del concepto de límite daría para muchas horas, así que aquí voy a hacer algunos comentarios sucintos relacionados con él.

En primer lugar, sería bueno comentar a los alumnos que la definición de límite tiene cuatro partes, y que esta misma estructura la tienen muchas definiciones del Análisis Matemático, por ejemplo: las dos de límite de una sucesión, las cuatro de límite de una función, la definición de función Riemann integrable, etc.

Por otra parte, una de las cosas que a los analistas más les gusta es obtener condiciones en las que un límite se pueda permutar con algo.

Probablemente la primera vez que aparece el límite permutando con algo, es en la definición de función continua, pues la continuidad de una función en un punto no es más que la posibilidad de que el límite conmute con la función en dicho punto.

Un ejemplo inmediato de aplicación del concepto de continuidad es el siguiente.

Todos los alumnos cuando llegan a la universidad saben calcular límites de las formas 0^0 e ∞^0, tomando logaritmos e intercambiando el límite por el neperiano. Si se les pregunta el porqué de este posible cambio, no saben responder.

La respuesta es sencilla y es debida a que la "función neperiano" es continua.

Hay muchos teoremas interesantísimos de análisis basados en intercambiar el límite por otra cosa. Algunos sencillos como el que afirma que el límite de la suma es la suma de los límites y otros de mucha mayor profundidad, como el que afirma que, bajo ciertas condiciones, el límite de una suma infinita (una serie) se puede intercambiar con la suma infinita, o el que permita intercambiar una integral con una serie, etc.

El apartado séptimo está dedicado a mostrar a los alumnos que, en general, las Matemáticas se comportan de una forma correcta, salvo "casos patológicos" que, afortunadamente, son poco usuales.

Por ejemplo, si elegimos la función $f(x) = x^2$, podemos ver que es cóncava hacía arriba (aquí no hay unanimidad respecto al nombre que se les da a este tipo de funciones, pero creo que es suficientemente claro lo que quiero decir) y que su derivada es creciente. Nos podremos preguntar ¿una función cuya derivada es creciente será cóncava hacia arriba?

Además donde f' es positiva, f es creciente, y donde f' es negativa, f es decreciente, podemos preguntarnos entonces ¿esta situación se puede generalizar?

Hay muchas situaciones análogas, donde el estudio de algunos ejemplos nos puede indicar los posibles resultados que se pueden obtener en general.

El apartado octavo está destinado a indicar a los alumnos que los resultados que se obtienen en Matemáticas, tienen siempre un trasfondo que afectan y son fundamentales para poder afirmarlos. Además, en la mayoría de las demostraciones aparecen técnicas conocidas anteriormente que, pienso, es útil mostrarlas a los alumnos.

Veamos un ejemplo de esto. Si nos fijamos en las cuatro fórmulas siguientes:

Área:	$\int_a^b f$
Longitud de arco:	$\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}$
Volumen de revolución:	$\pi\int_a^b f^2$
Superficie de revolución:	$2\pi\int_a^b f\sqrt{1+(f')^2}$

Podemos observar que en la primera y tercera sólo aparece f, que en la segunda sólo aparece f' y que en la última aparecen fy f', y preguntarnos el porqué de la diferentes estructuras de dichas fórmulas.

A mi entender, esto es debido a que tanto el área como el volumen de revolución dependen de la distancia de la función el eje de abscisas, así que en ellas para nada debe aparecer la derivada.

En el lado opuesto, la longitud de una curva que va de un punto a otro, no depende para nada de la distancia de la curva al eje de abscisas, sino de las subidas y bajadas que tenga la curva, por eso sólo aparece la derivada en la fórmula.

Finalmente, la superficie de revolución depende tanto de la distancia de la curva al eje de abscisas como de las subidas y bajadas, de ahí que en la fórmula aparezcan la función y su derivada.

Podemos analizar con más detalle las fórmulas y, en este caso, podremos notar que, tanto en la fórmula de la longitud de arco, como en la de la superficie de revolución aparece el teorema de Pitágoras pues, en realidad, el 1 que figura dentro de la raíz, en un 1 al cuadrado, siendo esa raíz una aplicación de dicho teorema.

Además, podemos ver que en la fórmula del volumen, aparece un πf^2, que, en realidad, corresponde al área de un círculo, y que en la fórmula de la superficie de revolución aparece un $2\pi f$, que corresponde a la longitud de una circunferencia.

Para finalizar, en el epílogo, daremos dos ejemplos de aplicación de la Matemática a otras ciencias, más concretamente uno a la Química y otro a la Física.

Veremos cómo se puede ajustar cualquier reacción química por procedimientos matemáticos elementales.

En primer lugar, las reacciones químicas que se pide ajustar son reacciones químicas que se pueden ajustar, por lo que es muy fácil plantear un sistema de ecuaciones lineales que es compatible e indeterminado. Este sistema tiene muchas ecuaciones en las que las incógnitas están relacionadas entre sí de una forma inmediata, de tal forma que, sustituyendo unas incógnitas por otras, nos queda un sistema muy sencillo.

Si se tienen unos conocimientos básicos de ecuaciones diofánticas, se puede ver que hay soluciones con números naturales y obtenerlas, y si no se usan conocimientos de ecuaciones diofánticas, es inmediata su solución encontrando, en el peor de los casos, que algunas de las soluciones de las variables son racionales, en cuyo caso simplemente multiplicando las soluciones por el mínimo común múltiplo de los denominadores de ellas, obtenemos la menor de las soluciones que ajustan la ecuación.

En cuanto a la aplicación a la Física, utilizando el Polinomio de Taylor, o simplemente planteando el sistema del cual procede dicho polinomio, se pueden obtener, de nuevo utilizando sistemas de ecuaciones lineales, la existencia y unicidad del Polinomio de Taylor de distintos grados. Esto nos permite encontrar, de una forma matemática, las fórmulas físicas del movimiento rectilíneo y uniforme, así como la del movimiento uniformemente acelerado (veremos de paso que este nombre para nada es coherente y que lo normal sería llamarlo movimiento con aceleración constante).

Finalizaremos viendo como el Polinomio de Taylor nos permite obtener las fórmulas físicas que generalizan los movimientos anteriores.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

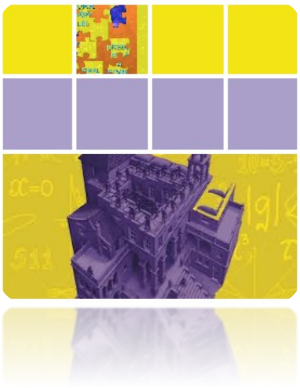
.- CÁLCULUS. CÁLCULO INFINITESIMAL. Michael Spivak. 2 tomos. Editorial Reverté, s.a. Barcelona MCMLXXIV. ISBN: 84-291-5141

.- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL. N. PISKUNOV. Editorial MONTANER Y SIMÓN, S.A. Barcelona. Reimpresión 1978 ISBN: 84-274-0296-1

.- http://afqfelsalvador.com/la-quimica-del-alcotest-analizador-del-aliento/

Para hacer referencia al artículo:

González, M.F. (2018). Algunas ideas y reflexiones sobre la Matemática. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 17-22). Lugar: Universidad de León



PONENCIAS SIMULTÁNEAS

ORIENTACIONES PARA EL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS A PARTIR DE LAS EVALUACIONES ESTANDARIZADAS

José María Santa Olalla Tovar[a]

[a]Consejería de Educación

Resumen

Sin perder de vista que quien mejor puede valorar y percibir el resultado de los procesos de enseñanza y aprendizaje son los propios docentes, las evaluaciones estandarizadas nos ofrecen puntos de vista a tener en cuenta, basados en la evidencia que nos proporcionan los datos. En esta ponencia voy a hacer un repaso de algunas de las conclusiones que podemos obtener, como profesores de Matemáticas, a partir de evaluaciones como PISA, TIMSS, o las evaluaciones de sistema realizadas por la Consejería de Educación.

Palabras clave: *evaluación estandarizada, Matemáticas, TIMSS, PISA, evaluación de diagnóstico, evaluación formativa, repetición, uso de las TIC, clima escolar*

EVALUACIONES ESTANDARIZADAS.

Las evaluaciones estandarizadas se realizan para medir una determinada competencia en una población objetivo. Se caracterizan porque se aplican exactamente en las mismas condiciones para todos los participantes. Los resultados cuentan con la garantía de organizaciones de reconocido prestigio como la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), la IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) o de Administraciones Educativas, como el Ministerio o las Consejerías de Educación. En el caso de las evaluaciones internacionales, se tiene gran cuidado en asegurar la homogeneidad en la aplicación de la prueba. Para ello, se revisan las traducciones con el fin de evitar sesgos debidos al idioma y se elaboran exhaustivas guías de aplicación para que todo el alumnado realice la prueba exactamente de la misma manera. Algunos de los centros participantes reciben visitas de control de calidad para asegurar que la aplicación se realiza correctamente. Además, se forma a los correctores de las pruebas, se utilizan guías de codificación muy precisas y se realizan dobles correcciones en una muestra de las pruebas para asegurar la imparcialidad.

TIMSS y PISA.

La IEA fue la primera organización internacional que se preocupó por medir el desempeño educativo. En 1960 realizó su primer estudio en 12 países dirigido a alumnos de 13 años, en el que entre otras áreas se evaluaron las Matemáticas. Desde aquel primer estudio ha seguido realizando otros hasta 1995 en que se aplica por primera vez TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study). El estudio se aplica cada 4 años. Castilla y León participó con una muestra representativa por primera vez en 2015 y en 2019 participará[1] en eTIMSS 2019, la primera versión en Tablet de TIMSS. Este estudio se

[1] En el momento de escribir este documento, aún no se ha aplicado eTIMSS 2019. La aplicación de esta evaluación está prevista para los meses de abril y mayo de 2019.

basa en el currículo común de todos los países participantes. Se aplica al alumnado de 4º y 8º grado. Aunque en España solo se evalúa al alumnado de 4º de Primaria.

Por su parte, la OCDE organiza PISA (Programme for International Student Assessment) desde 2000. La prueba se aplica cada 3 años, aunque cada edición hay una competencia que es evaluada con mayor profundidad y en la que se actualiza el marco de evaluación. Además, se evalúan sub-competencias y procesos. Por ejemplo en 2012, además del desempeño en Matemáticas, se evaluó el desempeño en 4 sub-competencias: Cambio y Relaciones, Cantidad, Incertidumbre y Datos y Espacio y Forma y en 3 procesos: Interpretar, Emplear y Formular. Castilla y León participó por primera vez en PISA en 2003, año en que la competencia principal evaluada fue Matemáticas. Desde entonces, Matemáticas ha sido la competencia principal en 2012 y lo volverá a ser en 2021. En 2021 se prevé que se incluyan ítems interactivos en formato digital y que se realice una revisión profunda del marco de evaluación que se centrará en evaluar la capacidad de razonar del alumnado.

La prueba PISA pretende medir en qué medida el alumnado ha adquirido las habilidades necesarias para desenvolverse en la sociedad. Por tanto, no se centra en el currículo, sino en las competencias que define en su marco teórico y, además, no se realiza en un determinado curso, sino que se aplica al alumnado que cumple 16 años el año de aplicación de la prueba, independientemente del curso en el que esté matriculado.

A pesar de algunas diferencias obvias en cuanto a su enfoque más curricular o más competencial o a la población objetivo, ambas pruebas tienen muchos puntos en común.

Ambas expresan sus resultados en una escala en la que la media es 500[2] puntos y la desviación típica es 100.

Ambas están sujetas al error. En primer lugar el error estadístico, ya que se realizan sobre una muestra representativa de la población. A este error hay que sumar el error que se deriva de utilizar la Teoría de la Respuesta al Ítem (TRI) como herramienta para medir el nivel de desempeño del alumnado. En general los medios de comunicación y el ciudadano no formado obvian el error típico, sin advertir que, en muchas ocasiones, distintas puntuaciones pueden considerarse iguales o sin diferencias estadísticamente significativas.

Ambas pruebas están diseñadas para evaluar los sistemas educativos, pero no alumnos concretos ni centros educativos[3]. Aunque es posible obtener el nivel de desempeño de un determinado centro, vendría asociado a un error estadístico tan grande que sería como decir que una persona mide 1,5 metros con un error de medio metro por arriba o medio metro por abajo. Por tanto, los centros no deben temer ser evaluados en estas pruebas ni tampoco estas pruebas podrían ser nunca una certificación del buen rendimiento de un centro educativo.

Ambas pruebas permiten establecer tendencias y comparar la evolución de los resultados de las administraciones educativas que participan regularmente en ellas. Esto es posible

[2] En PISA, 500 fue la media de la OCDE en la primera edición del estudio, y desde entonces la media de la OCDE, ha variado respecto a este punto de referencia. En TIMSS, todos los años las puntuaciones se escalan a media 500 y desviación típica 100.

[3] La OCDE ha desarrollado el programa PISA for Schools, (PISA para centros educativos), que permite comparar los resultados de un centro con los del último PISA publicado y que ofrece un detallado informe de diagnóstico del centro. Se puede encontrar información sobre este programa en la siguiente URL: http://www.pisaparacentroseducativos.es .

porque tienen "*ítems de anclaje*" que se repiten en ediciones consecutivas de la prueba y que permiten escalar los resultados de la prueba de distintas ediciones. La existencia de ítems de anclaje hace que no se liberen las pruebas completas, sino tan solo aquellos ítems que no volverán a ser utilizados en siguientes ediciones[4].

Tanto PISA como TIMSS miden los resultados utilizando la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI). La TRI se desarrolla en la segunda mitad del siglo XX, de la mano del aumento de la potencia de cálculo de los ordenadores. La gran ventaja de la TRI es que permite medir la competencia del alumnado y la dificultad de los ítems en la misma escala. De esta forma se establecen niveles de rendimiento de forma empírica y surge la posibilidad de realizar una evaluación referida a los descriptores de estos niveles de rendimiento (criterios) y no a los resultados obtenidos por una muestra de alumnos (norma). En este punto, el desarrollo matemático de la TRI modeliza perfectamente la teoría de expertos en Psicología de la Educación, como Robert Glaser, que considera el aprendizaje como un continuo, en el que la persona que aprende va evolucionando desde una primer acercamiento como neófito y, poco a poco, va adquiriendo competencias y habilidades que le llevarán a un nivel avanzado. En este paradigma aparece, de forma natural, la necesidad de la evaluación orientada a criterios para determinar en qué punto de la escalera del aprendizaje se encuentra el alumno. Esta evaluación nos permite ver qué habilidades tiene el alumno y pensar qué está en condiciones de aprender con ayuda de otros, enlazando así con la zona de desarrollo próximo de Vygotski. Sin embargo, las evaluaciones de sistema educativo no van a evaluar alumnos concretos, pero sí que van a dar una idea de qué sabe hacer el alumno medio y qué está en condiciones de aprender.

Por ejemplo en la prueba de Matemáticas de PISA, se establecen los siguientes 7 niveles de rendimiento: <1, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Tabla 1. Puntuaciones asociadas a cada nivel de rendimiento en PISA 2012, 2015 y 2018.

Inferior al Nivel 1 menos de 357,77	Nivel 1 [357,77; 420,07)	Nivel 2 [420,07; 482,38)	Nivel 3 [482,38; 544,68)	Nivel 4 [544,68; 606,99)	Nivel 5 [606,99; 669,30)	Nivel 6 Desde 669,30

De forma similar en TIMSS 2015 se establecen 5 niveles de rendimiento:

Nivel muy bajo. Menos de 400.	Nivel bajo [400; 475)	Nivel intermedio [475;550)	Nivel alto [550; 625)	Nivel avanzado Desde 625.

Las competencias asociadas a cada nivel de desempeño vienen determinadas por los ítems a los que se ha asignado este nivel de dificultad y un alumno está en un determinado nivel de desempeño si es capaz de responder correctamente al 50% de los ITEMS de este nivel. Además si un alumno está en un determinado nivel de desempeño, entonces es capaz de superar los ítems de los niveles inferiores.

Al utilizar la TRI, las pruebas asumen las siguientes limitaciones:

- Cada ítem mide un único rasgo.
- Para un alumno con un determinado nivel de competencia, la respuesta a un ítem no está influida por sus respuestas en los otros.

[4] Se pueden consultar los ítems liberados en la web del Instituto Nacional de Evaluación Educativa: https://www.mecd.gob.es/inee/publicaciones/items-liberados.html

Estos aspectos se tienen en cuenta en el momento de elaborar los ítems y las guías de codificación. Además se realizan análisis de unidimensionalidad e independencia para asegurar que se cumplen estos criterios tras los pilotajes de la pruebas. Mientras que en una pregunta de una prueba escolar ordinaria podemos evaluar varias destrezas, en una pregunta de una prueba como PISA o TIMSS solo estamos evaluando un aspecto. Además nunca hay preguntas encadenadas, en las que sea necesario responder a la primera correctamente para hacer después la segunda.

Evaluaciones de sistema en España.

A partir de la publicación de la LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, las administraciones educativas comenzaron a realizar evaluaciones de diagnóstico en 4º de primaria y 2º de ESO, con carácter formativo e interno para los centros. Además, estas evaluaciones fueron también utilizadas como herramientas para la evaluación del sistema educativo en las diferentes Comunidades Autónomas.

Actualmente, desde el curso 2016-2017 se realizan evaluaciones de diagnóstico al final de la etapa, tanto en 6º de primaria como en 4º de ESO. Una de las novedades de estas evaluaciones es que, por normativa, tienen asociados cuestionarios de contexto para poder analizar qué factores están influyendo en el nivel de rendimiento del alumnado.

Seguramente, nuevos desarrollos legislativos propondrán nuevos panoramas de evaluación para las administraciones educativas, pero lo más importante es que, poco a poco, la evaluación se ha introducido en el sistema educativo como herramienta de diagnóstico para la mejora.

CASTILLA Y LEÓN SEGÚN TIMSS Y PISA.

Nivel de desempeño. ¿Qué sabe hacer el alumnado de Castilla y León?

En TIMSS 2015, el alumnado de 4º de Primaria de Castilla y León alcanza un nivel de desempeño en Matemáticas de 531, con un error típico de 4,5 , lo que nos permite asegurar que, a un nivel de confianza del 95%, Castilla y León alcanza un nivel de desempeño de entre 522 y 540 puntos. Podemos decir que Castilla y León no tiene diferencias estadísticamente significativas con Países Bajos (530) o con Finlandia (535). Entre las Comunidades alcanza la mayor puntuación, aunque sin diferencias estadísticamente significativas con Madrid (525) o Asturias y la Rioja (518 ambas).

La puntuación media de Castilla y León se encuentra en la zona superior del nivel intermedio de TIMSS. El alumno medio de 4º de Primaria de Castilla y León, por tanto, es capaz de aplicar conocimientos matemáticos básicos en situaciones sencillas: comprender los números enteros, cierta comprensión de fracciones y decimales, visualizar formas en 3 dimensiones a partir de su representación en 2 dimensiones, identificar y dibujar formas con propiedades sencillas y leer e interpretar diagramas de barras y tablas. Su zona de desarrollo próximo está en el nivel alto y para alcanzar este nivel el alumnado debe profundizar más en el razonamiento y la resolución de problemas. En el nivel alto, los alumnos son capaces de utilizar sus conocimientos y comprensión para resolver problemas: Problemas que incluyan operaciones con enteros, fracciones sencillas y números con dos cifras decimales, problemas que incluyan comprender las propiedades geométricas de las formas y de los ángulos y, finalmente, problemas que supongan interpretar y utilizar datos de una tabla o de una variedad de gráficos.

Por tanto, según TIMSS, el reto para el alumno medio de 4º de Primaria en Castilla y León será adquirir estrategias de razonamiento para la resolución de problemas aritméticos, geométricos y basados en tablas y gráficos.

Según PISA, la situación es bastante similar. En PISA 2015, el alumnado de 16 años de Castilla y León alcanza un nivel de desempeño de 506 puntos, sin diferencias estadísticamente significativas con Canadá (516), Finlandia (511) o Alemania (506). Entre las comunidades autónomas le supera Navarra (516) aunque las diferencias no son estadísticamente significativas.

La puntuación de Castilla y León se encuentra en la zona media del nivel 3 de PISA. Por tanto, el alumno medio debe seguir trabajando las competencias de este nivel e ir integrando poco a poco las competencias del nivel 4. Aquí hay que tener en cuenta que el alumno medio alcanza este nivel tan solo en Singapur.

En el nivel 3, los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren decisiones secuenciales. También pueden seleccionar y aplicar estrategias de resolución de problemas sencillos. Saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Son también capaces de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y razonamientos.

Para alcanzar el nivel 4, el alumno medio de Castilla y León tendría que ser capaz de trabajar con eficacia modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluidas las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Utilizar habilidades bien desarrolladas y razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia en estos contextos. Y finalmente elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones.

En otras palabras deben ser capaces de razonar para modelizar y resolver problemas del mundo real y explicar y comunicar correctamente el proceso y sus conclusiones.

Tanto, TIMSS como PISA señalan la importancia de incidir en el razonamiento y, además, PISA incide en la resolución de problemas reales y en la argumentación o explicación de procesos y resultados.

Una de las dificultades, en España, para que el alumno medio sea capaz de razonar y de hacer explícito ese razonamiento en una argumentación es el currículo, demasiado extenso. Frente al temor de que adelgazando el currículo pueda bajar el nivel académico del alumnado, está la oportunidad de hacer una propuesta metodológica más activa, que incida en el razonamiento y la resolución de problemas y que permita un aprendizaje real más profundo y no basado en la memoria o la mera repetición. Un ejemplo de ello es Singapur. Ciertamente tiene unas condiciones de contexto muy favorables que no le hacen comparable a ninguna región española, sin embargo han realizado una reforma en la que han aligerado su currículo, se han centrado en el razonamiento y la resolución de problemas y su evolución solo es ascendente. En 2015 obtuvieron la puntuación más alta, tanto en TIMSS (618 puntos) como en PISA (564).

Niveles Altos y niveles bajos.

El porcentaje de alumnado en los niveles bajos es moderado, tanto en TIMSS como en PISA.

En TIMSS 2015 el alumnado en el nivel bajo suma y resta números enteros, entiende la multiplicación por números de una cifra, resuelve problemas sencillos, tiene cierta comprensión de las fracciones sencillas, las formas geométricas y las medidas y, finalmente, es capaz de leer y completar diagramas de barras y tablas básicos. Los alumnos en el nivel muy bajo, simplemente no llegan a completar al menos el 50% de los ítems de nivel bajo.

En TIMSS 2015 Castilla y León tuvo un 3% del alumnado en el nivel muy bajo de Matemáticas y un 17% en el nivel bajo. En este caso obtuvimos resultados similares a Finlandia, con un 3% en el nivel muy bajo y un 15% en el nivel bajo o Dinamarca 4% en el nivel muy bajo y 16% en el bajo. Entre las comunidades, es la comunidad con menos porcentaje de alumnado en los niveles bajo.

En PISA se consideran bajos los niveles <1 y 1. En el nivel 1, los alumnos saben responder a preguntas relacionadas con contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo procedimientos rutinarios siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar acciones obvias que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.

La Unión Europea, dentro de su agenda estratégica para el periodo 2010-2020, establece como uno de sus puntos de referencia no tener más del 15% del alumnado en los niveles bajos de PISA. La Comisión Europea ha estimado que un país con más del 15% del alumnado en los niveles bajos de PISA tendrá problemas de crecimiento y empleabilidad, ya que la población en los niveles bajos de PISA tendrá muchas dificultades para su integración social.

Castilla y León cumplió el objetivo europeo tanto en PISA 2012 como en PISA 2015. En 2015 Castilla y León obtuvo un 4% en el nivel <1 y un 11% en el nivel 1 en la prueba PISA de Matemáticas. Exactamente los mismos porcentajes que Canadá o Irlanda y un porcentaje similar a Finlandia, que obtuvo un 4% en el nivel <1 y un 10% en el nivel 1. España tiene un 7% del alumnado en el nivel <1 y un 15% en el nivel 1, porcentajes similares a los obtenidos por la Unión Europea o la OCDE.

En los niveles altos, Castilla y León obtiene resultados similares a algunos de los sistemas educativos de referencia en el ámbito internacional, aunque con un margen de mejora. En TIMSS tiene un 7% del alumnado en el nivel avanzado, porcentaje similar al 8% de Finlandia o al 6% de Canadá aunque lejos del 50% de Singapur, el 27% de Irlanda del Norte, o el 17% de Inglaterra.

En el nivel avanzado de TIMSS, un alumno es capaz de aplicar la comprensión y el razonamiento en una variedad de situaciones relativamente complejas y explicar su razonamiento

En PISA se considera que los niveles altos son el 5 y el 6. En PISA 2015, Castilla y León tiene un 9% del alumnado en el nivel 5 y un 2% en el nivel 6. Exactamente el mismo porcentaje que Finlandia y Noruega aunque por debajo de Canadá, con 11% en el nivel 5 y un 4% en el nivel 6, o Bélgica, con un 12% en el nivel 5 y un 4% en el nivel 6. Entre las comunidades autónomas tan solo Navarra supera a Castilla y León, con un 11% en el nivel 5 y un 2% en el nivel 6.

Por tanto, atendiendo a la distribución del alumnado por niveles de desempeño, Castilla y León obtiene unos resultados en Matemáticas comparables con otros sistemas educativos de referencia mundial pero también con margen de mejora. Además Castilla y León siempre obtiene muy buenos resultados en los indicadores de equidad del sistema. El reto es mejorar el nivel de desempeño del alumnado sin renunciar a la equidad. El objetivo no debe ser centrarse en aumentar el porcentaje del alumnado en los niveles altos, sino aumentar el nivel de todo el alumnado con un enfoque curricular y metodológico que proponga un aprendizaje activo, basado en el razonamiento y no la mera memorización.

FACTORES ASOCIADOS AL RENDIMIENTO.

Los cuestionarios de contexto que se realizan con las evaluaciones permiten analizar junto al desempeño otras variables de contexto. Me voy a centrar en las variables que considero de mayor interés para la mejora del sistema educativo.

Repetición de Curso.

La OCDE advierte que la repetición es costosa para las administraciones, porque supone aportar recursos económicos un año o dos más en el sistema educativo para el alumnado que repite y, además, retrasa y dificulta la incorporación del alumno que repite al mundo laboral.

Según datos de PISA 2009, los países como España, "*con elevadas tases de repetición, son los que muestran bajos desempeños del alumnado. Aproximadamente el 15% de la varianza de rendimiento entre los países de la OCDE es explicada por diferencias en las tasas de repetición."* (OCDE, 2011).

Una mirada a los resultados de las evaluaciones de final de etapa en Castilla y León correspondientes al curso 2016-2017, nos muestran que, en 6º de Primaria, el alumnado repetidor obtuvo 417 puntos frente a los 518 puntos que obtuvieron los que no habían repetido. En 4º de ESO, el alumnado que había repetido dos años obtuvo 454 puntos en Matemáticas Académicas, el que había repetido un curso, 444, no existiendo diferencias estadísticamente significativas entre estos resultados, mientras que el alumnado no repetidor, obtuvo 509 puntos. Estos 100 puntos de diferencia en Primaria y más de 50 en Secundaria nos muestran que existe una brecha, que la repetición no logra salvar entre el alumnado repetidor y no repetidor. Tampoco parece que una segunda repetición mejore los resultados.

Cómo atender a la diversidad del alumnado y cómo mejorar la actitud, la motivación, el interés y el rendimiento es uno de los temas clave en el debate educativo. La alternativa a la repetición como medida de atención al alumnado que no completa los objetivos del curso, pasa por el apoyo educativo dentro del aula, la adaptación del currículo y el uso de metodologías activas que aumenten la motivación y el interés. Todo esto requiere una apuesta de la administración, que aporte recursos humanos y de formación, pero también requiere un profesorado concienciado y con la motivación y formación suficiente para llevar a cabo este cambio.

Uso de ordenadores y Tablet.

Vivimos en un mundo cada vez más digital. Hoy la mayor parte del alumnado tiene un pequeño ordenador en el bolsillo. No cabe duda que la competencia digital es básica en la sociedad actual y perece que lo seguirá siendo en el futuro.

También es evidente la cantidad de aplicaciones y recursos didácticos digitales, que han proliferado en las últimas décadas.

No obstante cabe preguntarnos si el uso de ordenadores y Tablets en el aula mejora el nivel de desempeño del alumnado. Un estudio realizado por el Ministerio de Educación danés entre 2010 y 2014 alertaba de los riesgos de que el alumnado utilice internet en el aula. El alumnado tenía que luchar contra la tentación de consultar en las redes sociales las noticias o ver un mensaje. Decía un alumno: "*Tú puedes tener una pequeña* *conversación en Facebook en clase de Mates y, cuando vuelves a mirar, la pizarra está cubierta con símbolos y números*".

A partir de la base de datos de PISA 2012 y otras evaluaciones como TALIS, la OCDE ha publicado el volumen "Students, computers and learning" donde analiza el uso de las TIC en el aula en los distintos países. En el estudio se dedica un apartado a evaluar el efecto que tiene el uso de las TIC en el aula en el rendimiento en Matemáticas. Para ello se consideró la base de datos de PISA 2012. Se elaboró un índice de uso de las TIC en el aula de Matemáticas. Entre los países de la OCDE, los alumnos que no utilizaron los ordenadores en clase de Matemáticas tienden a alcanzar mayor nivel de desempeño tanto en la prueba de Matemáticas en papel, como en la prueba realizada con el Ordenador[5]. El informe señala que hay tres países donde se produce una asociación positiva entre el uso de las TIC en la clase de Matemáticas y el nivel de desempeño en la prueba de Matemáticas por ordenador, especialmente cuando se descuenta el efecto del nivel socio-económico y cultural: Bélgica, Dinamarca y Noruega.

En Primaria, el cuestionario del alumnado de TIMSS 2015 preguntaba con qué frecuencia se utilizaba el ordenador o Tablet en el colegio para realizar tareas escolares: todos o casi todos los días, una o dos veces a la semana, una o dos veces al mes, nunca o casi nunca. En Castilla y León obtuvieron mejor nivel de desempeño, 538 puntos, aquellos alumnos que dijeron utilizar el ordenador en el colegio una o dos veces al mes, mientras que los que manifestaron utilizar ordenador o Tablet todos los días alcanzaron el peor nivel de desempeño, 508 puntos; además estos últimos tuvieron diferencias estadísticamente significativas con el resto de los grupos.

Sin duda, las TIC son parte de la vida del ciudadano del siglo XXI y por tanto no podemos cerrar los ojos y mirar para otro lado; es necesaria la formación y la motivación de los docentes pero también la evaluación o al menos la valoración interna sobre qué aporta a los procesos de aprendizaje el uso de las TIC. Cada docente y cada centro debería valorar si la implementación de recursos digitales en el aula está incidiendo o no, de forma positiva, en los procesos de aprendizaje del alumnado.

Clima escolar.

El bienestar del alumnado, su sentido de pertenencia al centro, el nivel de acoso escolar al que pueda estar sometido son variables que influyen en el desempeño en áreas como Matemáticas.

Las pruebas de final de etapa de 6º de primaria y de 4º de ESO de Castilla y León del curso 2016-2017, demostraba que el alumnado con un índice de clima escolar más alto alcanzaba un rendimiento en Matemáticas superior al del alumnado con un clima escolar más bajo, con diferencias estadísticamente significativas[6].

---

[5] En 2012, la OCDE ofertó como opción para los países participar en una prueba de Matemáticas utilizando el ordenador, que incluía algunos ítems interactivos.

[6] El índice de clima escolar en primaria se construyó con las variables extraídas tanto del cuestionario de contexto del alumnado a partir de preguntas en las que se les pedía como era la relación con sus compañeros de clase, como del cuestionario de Directores, en el que se les pidió que contestaran cómo influían en la convivencia diaria del centro una serie de situaciones como por ejemplo al perturbación del orden en clase. En Secundaria se creó un índice de satisfacción con el centro a partir del cuestionario de contexto del alumnado y preguntas como si les gusta estar en el colegio y si tienen buena relación con sus compañeros. En ambos casos para el clima escolar alto se ha considerado el cuartil superior y, para el clima escolar bajo, se ha considerado el primer cuartil del índice.

Analizando los resultados de TIMSS 2015, los alumnos de Castilla y León, que dijeron tener un sentido de pertenencia alto con el centro educativo, obtuvieron un desempeño de 533 puntos, frente a los 488 de los que manifestaron poco sentido de pertenencia, resultando estas diferencias estadísticamente significativas.

CONCLUSIÓN.

Las evaluaciones estandarizadas ofrecen información relevante para la mejora del sistema educativo. Ofrecen información referida a niveles de desempeño que nos permiten conocer qué se ha logrado hasta el momento y qué nivel podemos alcanzar próximamente.

Un repaso por las evaluaciones nos muestra la importancia de incidir en el razonamiento y en la capacidad del alumnado para resolver problemas del mundo real y para expresar cómo ha resuelto un problema y cuál es la solución.

Finalmente, las evaluaciones nos muestran la influencia de otros factores asociados al rendimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Garmendia, M., Jiménez, E., Casado, M.A. y Mascheroni, G. (2016). Net Children Go Mobile: Riesgos y oportunidades en internet y el uso de dispositivos móviles entre menores españoles (2010-2015). Madrid: *Red.es/Universidad del País Vasco/EuskalHerrikoUnibertsitatea*. http://www.ontsi.red.es/ontsi/es/content/net-children-go-mobile-riesgos-y-oportunidades-en-internet-y-uso-de-dispositivos-m%C3%B3viles

Hambleton, R. K., Swaminathan H. (1985) Item Response Theory. Principles and Aplications. Boston: *Kluwer – Nijhoff Publishing.*

IEA. (2016) TIMSS 2015. Marcos de la evaluación. *MECD.* (Disponible en https://www.mecd.gob.es/inee).

MECD. (2013) Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias. *MECD.* (Disponible en https://www.mecd.gob.es/inee).

MECD. (2015) PISA 2015. Programa para la evaluación Internacional de los alumnos. Informe Español. *MECD.* (Disponible en https://www.mecd.gob.es/inee).

MECD. (2015) TIMSS 2015. Estudio internacional y tendencias en Matemáticas y Ciencias. IEA. Informe Español: Resultados y Contexto. *MECD.* (Disponible en https://www.mecd.gob.es/inee)

MEFP. (2018). Análisis de las pruebas de evaluación del curso 2016-17. 3º y 6º de Educación Primaria y 4º de Educación Secundaria Obligatoria. Secretaría General Técnica. MEFP: -Centro de Publicaciones. Ministerio de Educación y Formación Profesional. (Disponible en https://www.mecd.gob.es/inee).

OCDE (2011) PISA in focus nº 6. Cuando los alumnos repiten un curso o son transferidos a otros centros: ¿Qué repercusiones tiene esto en los sistemas educativos? https://www.mecd.gob.es/inee/dam/jcr:90396981-a034-4d82-b70a-b7065e9c48e8/pif6-esp.pdf

OCDE.(2013) PISA 2012. Programa para la evaluación Internacional de los alumnos. Informe Español. Volumen I: Resultados y contexto. *MECD.* (Disponible en https://www.mecd.gob.es/inee).

OECD (2015), Students, Computers and Learning: Making the Connection, *PISA, OECD Publishing*.https://doi.org/10.1787/9789264239555-en

Para hacer referencia al artículo:

Santa Olalla, J. Mª. (2018). Orientaciones para el profesorado de Matemáticas, a partir de las evaluaciones estandarizadas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 24-33). Lugar: Universidad de León

HISTORIAS DE π. EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES PARA APROXIMARLO

Mari Paz Calvo Cabrero

Instituto de Investigación en Matemáticas. Universidad de Valladolid

Resumen

Tras mostrar varios ejemplos de nuestro entorno en los que interviene el número π, se revisarán algunos procedimientos sencillos y muy visuales que permiten dar una primera aproximación a su valor. A continuación, se presentará el método que, basado en consideraciones geométricas, utilizó Arquímedes en el siglo III a.C. para aproximar el valor de π y, en la parte final, se verá cómo dicho método puede ser implementado fácilmente en un ordenador para obtener el valor de π con más precisión.

Palabras clave: *π, aproximación, recurrencia, análisis numérico.*

ALGUNOS EJEMPLOS DE NUESTRO ENTORNO EN LOS QUE INTERVIENE π.

Aunque nunca hayamos pensado sobre ello, son numerosos y variados los ejemplos de nuestro entorno en los que interviene el número π. Mencionamos aquí algunos.

En el etiquetado de botes de conserva y botellas de vino, los fabricantes de los envases aportan entre las características técnicas el diámetro de los mismos, y calcular la longitud de la etiqueta para ajustar a la misma el texto/imagen que se quiere incluir, requiere multiplicar dicho diámetro por el número π.

El funcionamiento de un reloj de péndulo se basa en el hecho de que cada oscilación completa del péndulo hace avanzar un diente en la rueda dentada, responsable del movimiento de las agujas del reloj. Pues bien, el tiempo que tarda el péndulo en efectuar una oscilación completa, su periodo T, viene dado por la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}\,,$$

donde L y g denotan la longitud del péndulo y la aceleración de la gravedad, respectivamente, y donde también interviene el número π.

Como tercer ejemplo, podemos analizar el cálculo de las llamadas *compensaciones* de una curva en una pista de atletismo. Por ejemplo, cuando se organiza una carrera de 200 m, hay que determinar dónde hay que situar la línea de salida en cada calle para que todos los participantes corran 200 m. Estas posiciones, que aparecen tabuladas en el correspondiente reglamento elaborado por el Consejo Superior de Deportes (ver Tabla 1), se obtienen teniendo en cuenta que el recorrido de cada calle está formado por un segmento recto de 84,39 m y una semicircunferencia del radio que corresponda a esa calle (36,50 m para la calle 1). Como el ancho de una calle es A = 1,22 m, la diferencia entre las longitudes de las semicircunferencias de dos calles contiguas es πA = 3,833 m, donde, de nuevo, aparece el número π. Esta diferencia es la que se observa en la Tabla 1 al restar a la longitud de compensación de cada calle la longitud de compensación de la calle anterior, excepto para la diferencia entre las calles 1 y 2. Para obtener correctamente la longitud de compensación de la calle 2 hay que tener en cuenta un detalle adicional y es que las medidas del recorrido que realizan los atletas se toman a 20 cm del borde interno de cada calle, excepto para la calle 1, que se toman a 30 cm (la diferencia entre la segunda y la primera calle es, por tanto, $A - 0{,}1 = 3{,}518\ m$), como observamos en la Tabla 1.

Tabla 1. Longitud de las compensaciones de una curva en una pista de atletismo con medidas oficiales, según el correspondiente reglamento del Consejo Superior de Deportes.

Calle Número	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Longitud de compensación (m)	**0**	**3,518**	**7,351**	**11,184**	**15,016**	**18,849**	**22,682**	**26,515**

Al margen de estos ejemplos sencillos, el número π aparece también escondido en los cálculos que soportan el correcto funcionamiento de numerosos dispositivos tecnológicos que hoy nos resultan familiares. Así, por ejemplo, cuando nos sometemos a un tratamiento con ondas electromagnéticas o nos hacen una resonancia magnética, el número π interviene a través de la permeabilidad magnética del vacío ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$) y cuando utilizamos un sistema de navegación GPS en nuestro coche, el número π está presente en el cálculo del radio de la órbita geoestacionaria que describe el satélite que está emitiendo la señal que recibimos ($R = \sqrt[3]{T^2GM/(4\pi^2)}$).

Son sólo algunos ejemplos más o menos sencillos que ponen de manifiesto la presencia del número π en los más variados ámbitos.

PRIMERAS APROXIMACIONES AL VALOR DE π.

Desde edades tempranas nos familiarizamos con el número π y aprendemos, al menos, sus tres primeros dígitos (3,14). Revisamos en esta sección algunos procedimientos sencillos y muy visuales que permiten dar una primera aproximación al valor de π.

Si como definición del número π tomamos el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, con un hilo y una regla podemos dar una primera aproximación al valor de π midiendo con la regla la longitud del hilo necesario para rodear una botella y dividiendo el resultado por el diámetro especificado por el fabricante en sus características técnicas.

Pero utilizando que π también es el cociente entre el área de un círculo y el cuadrado de su radio, en [Dumoulin & Thouin (2014)] se propone lanzar disparos aleatorios a un tablero cuadrado de lado unidad en el que se ha dibujado el primer cuadrante de la circunferencia de radio 1 y contar el número de disparos que caen dentro del sector. La aproximación al valor de π se obtiene, en este caso, multiplicando por 4 el cociente entre el número de disparos que han caído dentro del sector y el número total de disparos realizados.

Un tercer procedimiento para aproximar el valor de π se basa en el conocido como *problema de la aguja de Buffon*, que fue resuelto por el conde de Buffon en 1777. Se dibujan en un tablero plano infinito rectas paralelas a distancia d y se dejan caer sobre el tablero palillos (o agujas) de longitud $l < d$. Buffon demostró que la probabilidad de que en uno de estos lanzamientos el palillo corte a alguna de las rectas es

$$P = 2l/(d\pi)\,,$$

y se puede, por tanto, obtener una aproximación al valor de π multiplicando por $2l/d$ el cociente entre el número de palillos lanzados y el número de palillos que cortan a alguna de las rectas (dicho cociente no es más que una aproximación experimental de $1/P$). En 1901 Mario Lazzarini, mediante el experimento de Buffon, usando d = 3 y l = 2,5 , consiguió 6 decimales correctos de π tras 3408 lanzamientos y 1808 aciertos. Estos resultados experimentales llevan a aproximar π por el cociente 355/113, que resulta ser la mejor aproximación racional a π con numerador y denominador con menos de 5 cifras. Sin embargo, el resultado experimental de Lazzarini no está exento de cierta polémica (ver, por ejemplo, [Badger (1994)]).

EL MÉTODO DE ARQUÍMEDES PARA APROXIMAR π.

Presentamos en esta sección el método que, basado en consideraciones geométricas, utilizó Arquímedes en el siglo III a.C. para aproximar el valor de π y lo extendemos para su implementación en un ordenador. Volvemos de nuevo a la definición de π como cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro y, más concretamente, a la identificación de π con la longitud de la circunferencia de diámetro unidad. El método de Arquímedes propone aproximar la longitud de tal circunferencia por los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos en la misma, aumentando el número de lados de dichos polígonos para mejorar la aproximación.

Arquímedes establece el siguiente resultado que aparece en el capítulo *Measurement of a circle* de sus obras completas (ver [Heath (1897)]):

> "El cociente entre la circunferencia de cualquier círculo y su diámetro es menor que $3\frac{1}{7}$, pero mayor que $3\frac{10}{71}$".

Para explicar el resultado de Arquímedes utilizando nuestro lenguaje matemático actual, denotamos por p_n el perímetro del polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de diámetro unidad y por $P_n$el perímetro del polígono regular de n lados circunscrito a la misma circunferencia. En la Figura 1 se muestran dichos polígonos para $n = 6$.

Figura 1. Hexágonos regulares inscrito y circunscrito a la circunferencia de diámetro unidad.

Es claro que $p_n < \pi < P_n$ para todo n y también es claro que, si duplicamos el número de lados de los polígonos, pasando de n a $2n$, se tiene $p_n < p_{2n}$ y $P_{2n} < P_n$ (basta utilizar que el camino más corto entre dos puntos es la línea recta). Partiendo como Arquímedes de $n = 3$ y duplicando cinco veces el número de lados de los polígonos, se concluye

$$p_3 < p_6 < \cdots < p_{96} < \pi < P_{96} < \cdots < P_6 < P_3\,,$$

que proporciona una cota superior P_{96} y una cota inferior p_{96} para el valor de π. Por otro lado, utilizando las fórmulas bien conocidas para las razones trigonométricas del ángulo doble se demuestra sin mucha dificultad que

$$\frac{1}{P_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{P_n} + \frac{1}{p_n}\right), \quad p_{2n} = \sqrt{P_{2n}\, p_n}\,, \quad n = 3,\ 6,\ \ldots,$$

relaciones que permiten calcular de forma recursiva los valores p_{96} y P_{96} a partir de los valores $p_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ y $P_3 = 3\sqrt{3}$, que para nosotros son conocidos (reconocemos en las expresiones anteriores a las relaciones que proporcionan la media armónica y la media geométrica de dos números).

Las cotas obtenidas por Arquímedes para el número π, $3 + \frac{1}{7}$ y $3 + \frac{10}{71}$, son, respectivamente, una cota superior de P_{96} y una cota inferior de p_{96}.

$$3 + \frac{10}{71} < p_{96} < \pi < P_{96} < 3 + \frac{1}{7}\,.$$

De hecho, Arquímedes no parte de los perímetros exactos de los triángulos inscrito y circunscrito a la circunferencia de diámetro unidad ni utiliza explícitamente la recurrencia para hallar los perímetros de los polígonos al duplicar el número de lados. Él parte de que $p_3 > \frac{3\cdot 265}{2\cdot 153}$, y de que $P_3 < \frac{3\cdot 1351}{780}$, obtiene con argumentos geométricos una cota inferior para p_6 y una cota superior para P_6 y repite cuatro veces más el mismo argumento geométrico hasta llegar al resultado enunciado al inicio de esta sección.

Pero, en nuestros días, la recurrencia que permite pasar de P_n y p_n a P_{2n} y p_{2n} se puede implementar en un ordenador y podemos doblar el número de lados de los polígonos más de las 5 veces que lo hizo Arquímedes. En la Tabla 2 se pueden ver los resultados que se obtienen cuando dicha recurrencia se implementa en MATLAB y se realizan 15 iteraciones. Se han mostrado completos los perímetros de los polígonos que consideró Arquímedes en su trabajo, $n = 3,\ 6,\ \ldots, 96$, y las dos últimas líneas corresponden a los perímetros de los polígonos con $n = 49152$ y $n = 98304$ lados, respectivamente. Se han señalado con color rojo los dígitos correctos de π que se obtienen en cada aproximación.

n	p_n	P_n	e_n	e_{2n}/e_n
3	**2.598076211353316**	**5.196152422706632**	**0.543516441701721**	**0.260512179929126**
6	**3.000000000000000**	**3.464101615137755**	**0.141592653055037**	**0.252584516591312**
12	**3.105828541230249**	**3.215390309173473**	**0.035764111824788**	**0.250643433219156**
24	**3.132628613281239**	**3.159659942097501**	**0.008964039773799**	**0.250160649077466**
48	**3.139350203046868**	**3.146086215131435**	**0.002242450008170**	**0.250039984162312**
96	**3.141031950890510**	**3.142714599645368**	**0.000560702164528**	**0.250009324813319**
…	**…**	**…**	**…**	**…**
49152	**3.141592651450768**	**3.141592657867845**	**0.000000001604269**	**-**
98304	**3.141592653055037**	**3.141592654659307**	**-**	**-**

Tabla 2. Aproximaciones a π obtenidas mediante los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos a la circunferencia de diámetro unidad y estimación de los errores cometidos.

Concluimos que

$$3.141592653 < \pi < 3.141592655\,,$$

y tenemos 10 dígitos correctos de π. Realizando más iteraciones se podrían conseguir mejores aproximaciones, pero ¿cuántas iteraciones serían necesarias para obtener 15 dígitos correctos? Vamos a analizar con un poco de detalle los resultados proporcionados por los perímetros de los polígonos inscritos (columna segunda de la Tabla 2), aunque un análisis similar se podría hacer con los resultados obtenidos con los polígonos circunscritos (tercera columna de la Tabla 2). Tomamos como valor de π la aproximación más precisa que hemos obtenido (el perímetro del polígono regular inscrito de 98304 lados) y calculamos los errores cometidos en las restantes aproximaciones respecto de ésta, $e_n = p_{98304} - p_n$. En la cuarta columna de la Tabla 2 se muestran dichos errores y, en la quinta columna, se incluyen los cocientes entre los errores de dos aproximaciones consecutivas, e_{2n}/e_n . Observamos que estos cocientes parecen tener un límite finito e igual a 1/4, lo que significa que al multiplicar por 2 el número de lados del polígono regular cuyo perímetro calculamos, el error en la aproximación a π que obtenemos se divide por $4 = 2^2$ (convergencia cuadrática). Una vez conocido el orden de convergencia de la iteración, se puede estimar el número de iteraciones necesarias K para que la diferencia $\pi - p_n$ sea menor que 10^{-9} (obtener 10 dígitos correctos de π). Suponiendo un error inicial de tamaño unidad, basta pedir que $(\frac{1}{4})^K < 10^{-9}$, lo que lleva a $K \geq 15$; es decir, hay que aproximar π por el perímetro del polígono regular de $n = 3 \times 2^{15} = 98304$ lados. Si se quisiesen 15 dígitos correctos de π habría que llegar hasta $n = 3 \times 2^{24} = 50331648$ lados.

Aunque hemos obtenido el orden de convergencia de la iteración de manera experimental, analizando los primeros resultados numéricos obtenidos con dicha iteración y recogidos en la Tabla 2, se puede determinar de manera totalmente rigurosa el orden de convergencia de la iteración antes de ponerla en marcha. Para ello basta tener en cuenta que el perímetro del polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia de diámetro unidad viene dado por $p_n = n\ \sin\theta_n$, siendo $\theta_n = \frac{\pi}{n}$ el semiángulo interior de los n triángulos isósceles que forman el polígono (ver Figura 1). Como al crecer n el ángulo θ_n se hace pequeño y tiende a 0, se puede aproximar $\sin\theta_n$ utilizando los primeros términos del desarrollo de Taylor de la función seno para concluir que

$$\pi - p_n = \frac{\pi^3}{6n^2} - \frac{\pi^5}{120n^4} + \cdots \ ,$$

y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi - \ p_{2n}}{\pi - \ p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi^3}{6\cdot 2^2\cdot n^2}}{\frac{\pi^3}{6n^2}} = \frac{1}{2^2}.$$

Observamos que el orden de convergencia de la iteración depende principalmente del primer término del desarrollo de Taylor del error $\pi - p_n$, y se puede acelerar la convergencia del proceso si se puede hacer desaparecer de algún modo ese término dominante en la expresión del error. La idea de la *extrapolación*, utilizada con frecuencia en Análisis Numérico, permite generar una nueva sucesión de aproximaciones a π mediante la relación

$$u_n = \frac{1}{3}(4p_{2n} - p_n) \ ,$$

que no es más que una combinación lineal con coeficientes $-1/3$ y $4/3$ de dos valores consecutivos de los previamente calculados en la segunda columna de la Tabla 2. Ahora

$$\pi - u_n = \frac{4}{3}(\pi - p_{2n}) - \frac{1}{3}(\pi - p_n) = \frac{\pi^5}{480n^4} + \cdots \ ,$$

y, en consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi - u_{2n}}{\pi - u_n} = \frac{1}{2^4} \ ,$$

es decir, el orden de convergencia en este caso es 4 (asintóticamente, al multiplicar n por 2, el error se divide por 16). Este mayor orden de convergencia se refleja en el menor número de iteraciones necesarias para conseguir la misma precisión en la aproximación al valor de π. Si, como hicimos antes, queremos estimar el número de iteraciones necesarias K para que la diferencia $\pi - u_n$ sea menor que 10^{-9} y suponemos un error inicial de tamaño unidad, pedimos ahora que $(\frac{1}{16})^K < 10^{-9}$, lo que lleva a $K \geq 8$, y a $n = 3 \times 2^8 = 768$.

n	p_n	$u_n = (4p_{2n} - p_n)/3$
3	2.598076211353316	3.133974596215561
6	3.000000000000000	3.141104721640332
12	3.105828541230249	3.141561970631569
24	3.132628613281239	3.141590732968744
48	3.139350203046868	3.141592533505057
96	3.141031950890510	3.141592646083780
192	3.141452472285462	3.141592653120656

Tabla 3. Aproximaciones a π obtenidas mediante extrapolación de los perímetros de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia de diámetro unidad.

En la Tabla 3 se han incluido los valores p_n y u_n destacando en color rojo los dígitos correctos de π. Observamos que, con sólo 6 iteraciones de la recurrencia inicial y haciendo extrapolación, se obtienen los primeros 10 dígitos correctos de π, los mismos que se obtenían tras 15 iteraciones de la recurrencia original. Aunque las previsiones de nuestro análisis previo sugerían $K \geq 8$, se estaba suponiendo que el error inicial era de tamaño unidad, pero en nuestro caso, $\pi - u_3$ ya es menor que una centésima.

El procedimiento de extrapolación, que permite pasar de p_n a u_n , se puede iterar para generar aproximaciones de orden más y más alto, combinando linealmente aproximaciones de menor orden. Con la extrapolación se pierde la interpretación geométrica de los valores calculados, pero se acelera notablemente la convergencia, como se ha puesto de manifiesto en la Tabla 3. Es justo decir, sin embargo, que, aunque la extrapolación supone una mejora sobre el procedimiento inicialmente propuesto por Arquímedes, sólo permite obtener un número moderado de dígitos del número π, siempre que se disponga de un ordenador que permita realizar los cálculos necesarios con suficiente precisión. Los más de 20 millones de dígitos del número π que se conocen en la actualidad se han calculado con otros procedimientos mucho más rápidos que los aquí mostrados y trabajando con ordenadores muy potentes y de muy altas prestaciones.

ALGUNAS CONSIDERACIONES FINALES.

Quiero terminar esta contribución señalando que éstas son sólo mis historias de π, sesgadas por mi formación y por el ámbito matemático en el que se desarrollan mi docencia y mi investigación, y motivadas inicialmente por el título del trabajo de G.M. Phillips, donde llama *analista numérico* a Arquímedes. Hay otras muchas historias de π. Quizás cada lector tenga las suyas. Pero, en mis historias de π, he intentado incluir historias donde aparecen reflejadas las distintas ramas de las Matemáticas y que se pueden adaptar a alumnos de los distintos niveles de educación e incluso a personas que aunque dejaron de ser alumnos hace tiempo siguen manteniendo curiosidad por aprender cosas nuevas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Phillips, G.M. (1981). Archimedes the numerical analyst, *American Mathematical Monthly 88*, 165-169.

Heath, T.L. (1897). The Works of Archimedes, *Cambridge University Press*.

Dumoulin, V. & Thouin, F. (2014). A ballistic Monte Carlo approximation of π, *arXiv:1404.1499v2*.

Badger, L. (1994). Lazzarini's Lucky Approximation of π, *Mathematics Magazine 67(2),* 83-91.

Para hacer referencia al artículo:

Calvo, M.P. (2018). Historias de π. El método de Arquímedes para aproximarlo. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.). XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 34-41). Lugar: Universidad de León

MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL UTILIZANDO APLICACIONES MÓVILES COMO RECURSO DIDÁCTICO

Noemí De Castro-García[a], Sara Gutiérrez García[b]

[a]Universidad de León, [b]Universidad de León

Resumen

En el escenario educativo actual, el aprendizaje móvil o mobilelearning se encuentra al servicio del docente y del alumnado para poder incluir las tecnologías móviles en las aulas. La finalidad de este trabajo es proponer una experiencia didáctica para enseñar y aprender Matemáticas en la etapa de Educación Infantil, a través de la aplicación para dispositivos móviles CutTherope©. El planteamiento se enmarca en una metodología docente activa, lúdica, dinámica, participativa y basada en el aprendizaje experimental. La propuesta se ha diseñado mediante un ciclo de investigación-acción con una intervención didáctica en un centro educativo. Los resultados han sido satisfactorios, permitiendo aportar una propuesta final mejorada, destacando una valoración altamente positiva en cuanto a motivación por parte del alumnado.

Palabras clave: *aplicaciones para móviles, Matemáticas, recurso didáctico, juego, mobilelearning*

INTRODUCCIÓN.

Actualmente, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) están presentes en todos los ámbitos de la realidad circundante. Como consecuencia, su aplicación en el aula como recurso didáctico parece ineludible debido a que el dominio de la competencia digital es uno de los requisitos indispensables de la sociedad presente y futura. En este escenario, el *mobilelearning* surge para dar respuesta a la necesidad de integrar las tecnologías móviles en el contexto educativo.

El *mobilelearning* se puede definir como aquella modalidad u oferta educativa en la que la construcción del conocimiento se realiza mediante la mediación de dispositivos móviles portables (Brazuelo, Gallego y Domingo, 2011). En consecuencia, la educación no está limitada por el ambiente espacio-temporal de aprendizaje, sino que se complementa y enriquece para provocar una experiencia más flexible y significativa que ayude al alumnado a aprender desde diferentes contextos (Salz, 2005).

El uso del *mobilelearning* tiene varias ventajas desde el punto de vista educativo ya que actualmente el alumnado tiene gran destreza en las herramientas interactivas, conoce su manejo y domina el lenguaje digital. Además, las nuevas generaciones de estudiantes poseen una actitud favorable y motivadora hacia las TIC, mostrando habitualmente preferencias al aprendizaje visual y altas competencias en recibir y procesar información (Prensky, 2001). En este contexto, una parte de la investigación sobre tecnologías móviles se ha centrado en enfatizar su capacidad asistencial para actividades contextualizadas en *mobilelearning* (Jeng et al., 2010), tanto desde la perspectiva de la ubicuidad para los entornos de educación a distancia (Chang, Sheu y Chan, 2003; Clough et al., 2008; Sharples y Beale, 2003) como el aprendizaje situado (Lai, et al., 2007; Morken, Divitini y Haugaloken 2007). Por otro lado, los esfuerzos docentes se centran en la aproximación de identificar y proporcionar contenidos multimedia ricos e interactivos, que faciliten el aprendizaje mediante la aplicación de tecnología móvil y estrategias de aprendizaje adecuadas.

Este estudio se enmarca en esta última dimensión con el objetivo de visibilizar e incluir el uso de aplicaciones (*Apps*) para dispositivos móviles (*smartphones* o *tablets)* como recurso didáctico para la educación matemática. Se presenta el diseño y la evaluación de una secuencia didáctica de innovación docente para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, dirigida al segundo ciclo de Educación Infantil (3-5 años). La aplicación para móvil seleccionada para esta propuesta es *Cuttherope*©. Partimos de la idea de que la App se apoya en otros materiales y modalidades de aprendizaje para construir un entorno interdisciplinar, funcional y extrapolable a la vida cotidiana de los/as infantes.

La propuesta didáctica es el resultado de un ciclo de revisión y mejora que se ha llevado a cabo a través de una intervención didáctica con 26 niños/as de entre cuatro y cinco años. El diseño está enfocado a la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos conceptuales como el sentido numérico, las nociones espaciales, introducción a la medida, propiedades de los objetos o figuras geométricas, así como habilidades y técnicas heurísticas de resolución de problemas. El planteamiento metodológico se basa en el aprendizaje experimental y por descubrimiento, el *mobilelearning*, el aprendizaje social (Bruner, 1961; Dewey, 1995) y de contexto situado. Además, se potencia el entorno de aprendizaje mediante una secuencia didáctica activa, lúdica, dinámica, participativa y cooperativa.

DISEÑO DE LA PROPUESTA EDUCATIVA.

El diseño de la propuesta se ha realizado tomando como base los principios pedagógicos que han de estar presentes al introducir contenidos del área de Matemáticas en la etapa de Educación Infantil (Chamorro, 2005; De Walle, 1990). Consecuentemente, se potencian secuencias integrales de Matemáticas que trabajen todos los contenidos requeridos en la etapa, de una forma conceptual, procedimental y competencial y con un objetivo claro, desarrollar el pensamiento lógico-matemático y las habilidades de resolución de problemas en el alumnado. Desde el punto de vista metodológico, se han de promover situaciones de experimentación con materiales manipulativos para que el alumnado construya de manera progresiva y activa su conocimiento (Bruner, 1961; Dienes, 1981). Además, es necesario destacar la importancia del juego en Educación Infantil (De Guzmán, 1989; Piaget e Inhelder, 1969), y garantizar aprendizajes funcionales, entendiendo estos como aquellos que podrán ser utilizados por el alumnado de forma práctica en circunstancias reales donde los necesite, tanto para llevar a cabo otros aprendizajes como para su extrapolación a diferentes ámbitos de la vida cotidiana. Cabe destacar que, para la etapa de Educación Infantil, la funcionalidad del contenido se basa principalmente en su utilización en situaciones de juego.

Con respecto a las orientaciones para la implementación en el aula de escenarios integrados con el *mobilelearning,* el punto de partida del uso de Apps ha de ser siempre pedagógico, siendo necesaria una planificación docente previa (Park, 2011; Scopeo, 2011). Este tipo de herramienta digital puede ser muy útil, pero no garantiza una experiencia significativa de aprendizaje si no se utiliza de manera eficaz. Tan importante es determinar qué Apps usar como la forma en la que trabajar con ellas en las aulas; es decir, las estrategias de aula aconsejadas para obtener el máximo provecho a esta herramienta de aprendizaje. El alumnado tiene un conocimiento inherente al medio, pero el docente ha de enseñarle cómo utilizar este recurso en un contexto formativo. Se incluyen a continuación las etapas a desarrollar en la implementación:

- Diseñar las actividades en función de su relación con los contenidos matemáticos que se quieren enseñar y el objetivo de aprendizaje a alcanzar.
- Describir la tecnología móvil que queremos utilizar. Se ha de decidir el tipo de App en función de la vertiente metodológica que queramos potenciar:
    - *Vertiente conceptual*: Apps elaboradas de manera comercial e ideadas como recurso didáctico para trabajar contenidos concretos de Matemáticas mediante el juego o herramientas interactivas específicas (Maths Vs Zombies©, Medieval MathBattle©, OperationMathCodeSquad©, Rey de las Matemáticas©, Smartick©, Tren de las Matemáticas©, etc., 2018)
    - *Vertiente asistencial*: Apps elaboradas de manera comercial cuya finalidad es asistir al alumnado, principalmente en el trabajo autónomo y colaborativo. (Geogebra©, MyScriptCalculator©, Photomath©, SnapSchool©, etc, 2018).
    - *Vertiente interdisciplinar:* en esta vertiente, la clave no radica tanto en la App como en la lectura matemática de la misma por parte del docente. Ésta nos conduce a encontrar las conexiones entre la App y las Matemáticas, las ideas soportadas por el contexto y los conceptos explícitos e implícitos presentes en la pantalla. Hemos de buscar además que la App tenga las características de los buenos juegos (Guzmán, 1989) y de los buenos problemas (Grupo Cero, 1984). Desde este enfoque, la búsqueda de Apps para el aula de Matemáticas ha de priorizar aquellas que desarrollan herramientas intelectuales básicas como la abstracción, la intuición, la imaginación, la curiosidad, la observación y el razonamiento lógico, a la vez que cumplen los requisitos para ser significativas, *Technological Pedagogical Content Knowledge* (Mishra y Kohler, 2006), y permiten establecer escenarios pedagógicos experimentales (Koole, 2009). En este sentido, aquellas Apps que fomentan la resolución de problemas a través del juego potencian el aprendizaje de conceptos abstractos mediante una de las situaciones educativas más eficaces, *aprender jugando.*
- Definir una secuencia integradora orientada y guiada en la que se especifique todo el proceso a seguir, así como aportar un esquema consensuado de los pasos para que el alumnado no se distraiga del carácter formativo de la intervención. Así mismo, se ha de establecer la creación de roles para el grupo participante.
- Determinar el coste de implementación: materiales y temporalización.
- Una vez determinadas las actividades, se han de diseñar los instrumentos de evaluación. Debido a la complejidad que conlleva la evaluación en entornos de *mobilelearning* (Traxler, 2007) es posible que sea necesario incluir material complementario.
- Coordinar la experiencia con las familias y/o tutores para poder limitar las horas de uso de los dispositivos móviles y, de esta manera, intentar evitar las posibles consecuencias físicas, psicológicas y sociales que puede conllevar el trabajo con las Apps (Kukulska-Hulme, 2007).

Debido a que la importancia de este trabajo no es innovar con el dispositivo móvil, sino el proceso de enseñanza y aprendizaje al que complementa, la elección de la herramienta se ha realizado basándonos en la capacidad potencial pedagógica que ofrece la App seleccionada, sin necesidad de que haya sido diseñada con ese fin (Chick, 2007); es decir, trabajaremos en la vertiente interdisciplinar. La idea subyacente al utilizar este tipo de App es que, cuando cambia el modo de pensar y el alumnado ve la pantalla desde un punto de vista matemático, se construye conocimiento y aumenta la capacidad de aprender. Además, la posibilidad de que en su vida cotidiana el alumnado vuelva a jugar y recuerde el razonamiento que ha seguido en el aula enriquece el aprendizaje y desarrolla la capacidad de reconocer conceptos y elementos matemáticos así como el uso del razonamiento lógico en entornos informales.

El diseño que se expone a continuación ha sido planificado siguiendo las recomendaciones descritas.

PROPUESTA.

Se han creado ocho actividades con la aplicación *CutTherope*©. Los objetivos didácticos se desarrollan en la tabla 1 del anexo A. Las principales características de la implementación propuesta se encuentran en la tabla 2 del anexo B. La evaluación diseñada se desarrolla en el anexo C.

Actividades.

Las actividades se dividen según las fases habituales de la resolución de problemas (Guzmán, 1991; Pólya, 1945), así como en la gestión cognitiva de la información de la pirámide del conocimiento (Ackrof, 1989; Cleveland, 1982). Se realizarán todas las actividades con dos pantallas diferentes, pantalla 1 (figura 1A) y pantalla 2 (figura 1B). Las imágenes incluidas en este trabajo pertenecen a estas pantallas indistintamente.

Familiarización con el problema: Presentación.

Lo primero que se realizará será la presentación de la pantalla de la App (figura 1) que vamos a utilizar. Comenzaremos con la fase de familiarización del problema. En este caso la mascota del juego se llama Coco. La primera pregunta que intentaremos resolver es la descripción de aquello que el alumnado ve en la pantalla (*datos*) y explicaremos que el objetivo del juego es que Coco pueda comerse el caramelo (*objetivo).* En este punto no incluiremos la consecución de la estrellas.

(A) (B)

*Figura 1.*Primera (A) y segunda (B) pantalla propuesta. Fuente: *Cuttherope*© (2018).

Familiarización con el problema: Convertimos los datos en información

<u>Actividad 1: ¿Qué ves?</u>

Con una ficha plastificada de la pantalla adaptada (figura 2) se han de unir las bolitas azules que aparecen con la finalidad de formar cuadrados y triángulos. Posteriormente, se pedirá identificar en la pantalla una figura geométrica diferente a las anteriores.

Figura 2. Material adaptado de la primera pantalla. Fuente: Cuttherope© (2018).

Actividad 2: ¿Cuántas figuras encuentras?

Se le aporta a cada pareja la planilla de la figura 3. A continuación, se solicitará al alumnado que la cumplimente mediante pegatinas y/o grafía en función de la cantidad de cada figura que encuentre en la pantalla (figura 1 o figura 2). Se pueden añadir los colores de las figuras o dejar sólo su tipología.

Figuras geométricas	**¿Cuántos hay?**
	
	
	

Figura 3. Material de la Actividad 2. Fuente: propia.

Actividad 3: ¿Miden lo mismo?

Con el material de la figura 4, se han de medir distancias con el dedo índice mojado en pintura de dedos o con gomets dispuestos consecutivamente. En primer lugar se realizará sobre las 4 cuerdas interiores (color amarillo). A continuación, sobre las cuerdas exteriores (color azul). Por último, se compararán los resultados para introducir el concepto de medida informal y se justificará la identificación de las figuras geométricas formadas. (Para el tercer curso del segundo ciclo de Educación Infantil, se podría añadir la medición mediante instrumentos formales de medida).

Figura 4. Material adaptado para la Actividad 3. Fuente: *Cuttherope©*” y propia.

Actividad 4: ¿Dónde está Coco?

En esta actividad se repartirá la ficha de muestra de la figura 5-A y la cuartilla de la figura 6, ambas del anexo D. También es posible realizar la actividad sobre la misma pantalla táctil adaptando la tablet con un cordel y sólo se aportará la planilla. En el primer caso, se comenzará rodeando con color rojo la flecha que apunta hacia arriba y de color verde la que apunta hacia abajo. Después deberán pegar gomets rojos en los círculos y estrellas que queden por encima (arriba) de la línea que hemos trazado y verdes en los círculos y estrellas que queden por debajo (abajo), también puede rodearse con un rotulador de color. Una vez hecho esto, se cumplimentará la cuartilla con contadores, con las propias pegatinas, y/o la grafía de la cantidad correspondiente.

Actividad 5: Derecha e izquierda

En esta actividad se repartirá la ficha de muestra 5B y la cuartilla de la figura 6 del anexo D o se realizará sobre la misma pantalla táctil adaptando la tablet con un cordel y sólo se aportará la planilla. Antes de comenzar, se colocará un gomet rojo en la mano derecha del alumnado y un gomet verde en la mano izquierda. La actividad consiste en pegar gomets rojos a los círculos y estrellas que queden a la derecha de la línea y gomets verdes a los que queden a la izquierda. A continuación se cumplimentará la cuartilla mediante contadores y/o la grafía correspondiente.

Búsqueda de estrategias

En esta fase se usará la pantalla original mostrada en la figura 1, se preguntará al alumnado en qué parte de la pantalla está Coco (arriba o abajo, derecha o izquierda) y qué cuerdas creen que habrá que romper primero para que el caramelo llegue a Coco, las de la parte de arriba o las de la parte de abajo, las de la derecha o las de la izquierda. La idea es entender que quizás sea una buena idea comenzar por las que están más alejadas de Coco. En este punto, se recomienda generar un debate.

Actividad 6

Los niños tendrán que escribir los números ordinales en cada cuerda para, posteriormente, seguir ese orden de corte y resolver la pantalla en la tablet.

Llevar a cabo las estrategias.

Actividad 7.

Se hará mediante la técnica heurística ensayo-error en la que ellos deberán llevar a cabo su estrategia propuesta en la actividad 6 y comprobar si de esa manera se resuelve la pantalla o no. Si no lo consiguen, tendrán que justificar oralmente por qué creen que no ha funcionado. Si ha funcionado, pasarían a la actividad 8.

Para esta actividad se tendrá un panel *a tamaño real* que permita al alumnado probar sus estrategias en un entorno de aprendizaje situado.

Metacognición.

Actividad 8.

En esta actividad se realizarán dos fases: la búsqueda de otras soluciones posibles y la consecución de las estrellas.

Resultados de la implementación.

Esta propuesta se ha llevado a cabo en un centro educativo con 26 infantes del segundo curso del segundo ciclo de Educación Infantil, ver anexo E.

Una vez analizadas y normalizadas las diferentes evaluaciones del anexo C, se concluye que los contenidos matemáticos que mejor se han adquirido son los relacionados con sentido numérico, nociones espaciales y las figuras geométricas. Por el contrario, el contenido de medición con instrumentos informales de medida ha sido el que menos puntuación ha obtenido. En segundo lugar, la mayoría de las actividades obtuvieron una calificación alta en cuanto a motivación se refiere (media superior a 2.7 sobre 3); es decir, que la mayoría de las actividades resultaron lúdicas y dinámicas. En cuanto al nivel de dificultad se obtuvo un nivel medio de 1 sobre 3; es decir, fáciles. Finalmente, cabe destacar que la motivación no ha estado correlacionada con el nivel de dificultad ni con la adquisición de contenidos. Por otro lado, el uso del panel a tamaño real fue igual de motivador que la propia tablet.

CONCLUSIONES.

En este trabajo se plantea el uso de Apps para dispositivos móviles como recurso didáctico para ayudar al docente en la tarea de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Infantil.

La propuesta realizada se basa en el uso de una App que no está diseñada específicamente para enseñar Matemáticas, habiéndose probado su eficacia para contribuir a desarrollar la reflexión y el razonamiento y la adquisición de conocimiento matemático a partir de la observación y de la experimentación, en un entorno motivador y extrapolable a la vida cotidiana mediante *mobilelearning.*

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Ackoff, R. (1989). From data to wisdom. *Journal of Applied System Analysis*, *16*, 3-9

Brazuelo, F., Gallego G. & Domingo, J. (2011) *Mobile Learning. Los dispositivos móviles como recurso educativo*. Sevilla: Editorial MAD. S.L

Bruner, J. S. (1961). Theact of Discovery, *Harvard Educational Review*, 31, 21-32.

Chamorro, C. (2005). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson Educación.

Chang, C. Y., Sheu, J. P., & Chan, T. W. (2003). Concept and design of ad hoc and mobile classrooms. *Journal of Computer Assisted Learning, 19*(3), 336–346.

Chick, H. L. (2007). Teaching and learning by example. *Mathematics: Essential research, essential practice*, *1*, 3-21.

Cleveland H. (1982) Information as Resource, *TheFuturist,* 34-39.

Clough, G., Jones, A. C., McAndrew, P., & Scanlon, E. (2008). Informal learning with PDAs and smartphones. *Journal of Computer Assisted Learning, 24*, 359–371.

CuttheRope© (2018), Zeptolab, Recuperado de https://cuttherope.net.

De Walle, J., (1990), *Concepts of number.* Mathematics for the Young child, N.C.T.M.

De Guzmán, M. (1989): Juegos y matemáticas, *Revista SUMA*, 4, 61-64.

De Guzmán M. (1991). *Para pensar mejor*. Labor, Barcelona.

Dewey, J. (1995). *Democracia y educación: una introducción a la filosofía de la educación*. (pp. 22-28) Ediciones Morata.

Dienes, Z.P. (1981). *Las seis etapas del aprendizaje de las Matemáticas (The six stages in* *mathematical learning)*. Barcelona: Editorial Teide

Geogebra clásico (2018), International Geogebra Institute, Recuperado de https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra&hl=es

Grupo Cero de Valencia, (1984). *De 12 a 16. Un proyecto de curriculum de Matemáticas*. Nau Llibres: Valencia.

Jeng, Y.-L., Wu, T.-T., Huang, Y.-M., Tan, Q., & Yang, S. J. H. (2010). The Add-on Impact of Mobile Applications in Learning Strategies: A Review Study. *Educational Technology & Society*, *13* (3), 3–11.

Koole, M. L. (2009). A model for framing mobile learning. In M. Ally (Ed.), *Mobile learning: Transforming the delivery of education and training* (pp. 25-47). Edmonton, AB: AU Press, Athabasca University.

Kukulska-Hulme, A. (2007). Mobile usability in educational context: What have we learnt? *International Review of Research in Open and Distance Learning, 8*(2), 1-16.

Lai, C. H., Yang, J. C., Chen, F. C., Ho, C. W., & Chan, T. W. (2007). Affordances of mobile technologies for experiential learning: the interplay of technology and pedagogical practices. *Journal of Computer Assisted Learning, 23*, 326–337.

Math Vs Zombies© (2018). Im Studio, Recuperado de https://play.google.com/store/apps/details?id=com.imstudio.zombie&hl=es_419

Medieval Math Battle©, (2018), Spinfall, Recuperado de https://play.google.com/store/apps/details?id=com.spinfall.math&hl=es

Mishra, P. & Koehler, M. (2006) ,Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge, *Teachers College Record*, *108* (6), 1017–1054, Columbia University, 0161-4681.

Morken, E. M., Divitini, M., & Haugaløkken, O. K. (2007). Enriching spaces in practice-based education to support collaboration while mobile: the case of teacher education. *Journal of Computer Assisted Learning, 23*, 300–311 .

My Script Calculator (2018), My Script, Recuperado de https://play.google.com/store/apps/details?id=com.visionobjects.calculator&hl=es

OperationMathCodeSquad© (2018). Little 10 Robot, Recuperado de https://itunes.apple.com/es/app/operation-math-code-squad/id555750694?mt=8

Park, Y. (2011), A pedagogical framework for Mobile Learning: Categorizing Educational Applications on Mobile Techonologies in Four Types, *Interanational Review of Research in Open and Distributed Learning,* 12 (2).

Photomath© (2018), PhotomathInc, Recuperado de https://play.google.com/store/apps/details?id=com.microblink.photomath&hl=es

Piaget, J. & Inhelder, B. (1969). *La psychologie de l'enfant.* Paris: P.U.E. (Trad. castellana 1994, *La psicología del niño.* Madrid: Morata).

Prensky, M. (2001). “Digital Natives, Digital Immigrants”. In *OntheHorizon, 9* (5). Lincoln: NCB University Press.

Pólya, G., (1945) *How to Solve It*, Princeton. ISBN 0-691-08097-6.

Rey de las Matemáticas© (2018), Oddrobo Software AB, Apple Inc. https://itunes.apple.com/es/app/rey-de-las-matemáticas-jr-lite/id718099583

Salz, P. A. (2005). When will we ever learn? *Mobile Communications International,* 1, 129.

SCOPEO (2011). M-learning en España, Portugal y América Latina, Noviembre de 2011. Monográfico SCOPEO, no 3. Recuperado de: http://scopeo.usal.es/wpcontent/uploads/2013/04/scopeom003.pdf

Sharples, M., & Beale, R. (2003). A technical review of mobile computational devices. *Journal of Computer Assisted Learning, 19*, 392-395.

Smartick©, (2018). SmartickIntl. Recuperado de https://www.smartick.es/login.html

SnapSchool© (2018), digischool, Recuperado de https://itunes.apple.com/es/app/snapschool/id897944184?mt=8

Traxler, J. (2007). Defining, discussing, and evaluating mobile learning: The moving finger writes and having write. *International Review of Research in Open and Distance Learning, 8*(2), 1-12.

Tren de las Matemáticas© (2018). Beiz, Recuperado de https://play.google.com/store/apps/details?id=com.beiz.lolasmathlite&hl=es

ANEXO A

Tabla 1. Objetivos didácticos de las actividades

Actividad	Objetivos
A1	Reconocer figuras geométricas. Crear figuras geométricas. Desarrollar la coordinación viso-manual. Desarrollar las fases de la resolución de problemas.
A2	Identificar figuras geométricas. Afianzar la relación cardinalidad y conteo. Desarrollar las fases de la resolución de problemas.
A3	Medir distancias con instrumentos informales de medida. Relacionar medidas con propiedades de figuras geométricas. Desarrollar las fases de la resolución de problemas.
A4	Profundizar en la noción espacial encima-debajo de, arriba-abajo. Revisar las figuras geométricas y los colores. Mejorar la motricidad fina. Afianzar la relación de cardinalidad y conteo.
A5	Introducirse en la noción espacial derecha-izquierda. Revisar las figuras geométricas y los colores. Mejorar la motricidad fina. Afianzar la relación de cardinalidad y conteo.
A6	Desarrollar el pensamiento matemático. Trabajar los ordinales. Fomentar la resolución de problemas mediante el ensayo-error y el estudio de casos.

A7	Trabajar los ordinales. Fomentar la resolución de problemas mediante el ensayo-error y el estudio de casos. Potenciar el trabajo cooperativo.
A8	Desarrollar el pensamiento matemático. Desarrollar la creatividad. Auto-gestionar sentimientos de frustración y/o negatividad.

ANEXO B

Tabla 2. Características de la propuesta. (*) La cantidad de material dependerá del tipo de implementación

	Descripción
Materiales(*)	- Fichas plastificadas. - Pintura de dedos. - Lápices. - Tablet. - Cordel. - Gomets de diferentes formas y colores.
Temporización	4 sesiones de 2 horas cada una para cada pantalla
Agrupaciones	Parejas

ANEXO C

Los instrumentos de evaluación se han diseñado para valorar la adquisición de contenidos (tabla 4), la evaluación de la implementación (tabla 3) y la percepción de dificultad y motivación del colectivo de aplicación (registro individual de cada actividad medida en escala Likert de 1 a 3).

Tabla 3. Tabla de registro de evaluación de la implementación

	Puntuación		
	Adecuados	*Suficientes*	*Observaciones*
Los materiales han sido ...			
La temporalización ha sido…			
La organización ha resultado…			

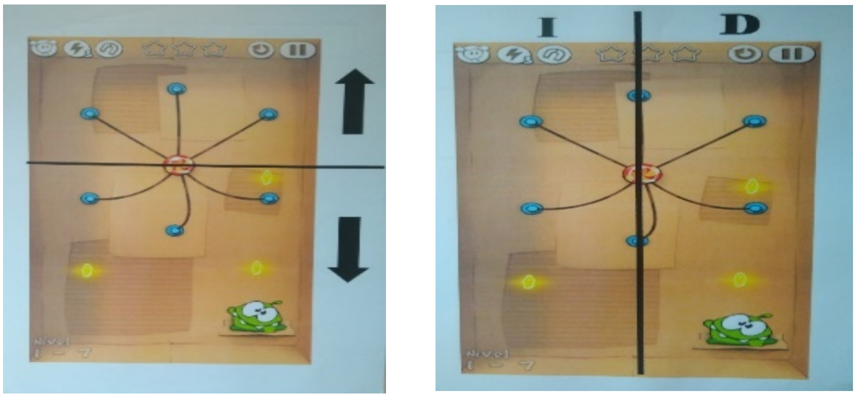
Tabla 4. Criterios de calificación y evaluación

ACT		CRITERIO DE EVALUACIÓN	Ptos.
	C1	¿Han reconocido el cuadrado?	1

A1	C2	¿Han reconocido el triángulo?	1
	C3	¿Han marcado con pintura de dedos alguna otra figura (círculos)?	1
	C4	¿Han creado el cuadrado?	1
	C5	¿Han creado algún triángulo?	1
	C6	¿Han marcado otros círculos que no fueran las bolas azules?	1
A2	C1	¿Han contado más de tres cuadrados?	1
	C2	¿Han contado más de cuatro círculos?	1
	C3	¿Han sabido clasificar cada figura geométrica?	1
	C4	¿Han contado las seis estrellas?	1
A3	C1	¿Han medido con azul la distancia de los lados del cuadrado (por fuera)?	1
	C2	¿Han medido la distancia de las cuerdas con amarillo (por dentro)?	1
A4	C1	¿Han rodeado de rojo la flecha que apuntaba hacia arriba?	1
	C2	¿Han rodeado de verde la flecha que apuntaba hacia abajo?	1
	C3	¿Han puesto gomets rojos en los círculos que estaban por encima de la línea?	1
	C4	¿Han puesto gomets verdes en todos los círculos que estaban por debajo de la línea?	1
	C5	¿Han puesto gomets en todas las estrellas que había por encima de la línea?	1
	C6	¿Han puesto gomets en todas las estrellas que había por debajo de la línea?	1
A5	C1	¿Han sabido identificar izquierda y derecha en la ficha?	1
	C2	¿Han puesto gomets verdes en todos los círculos que quedaban a la izquierda de la línea?	1
	C3	¿Han puesto gomets rojos en todos los círculos a la derecha de la línea?	1
	C4	¿Han puesto gomets en todas las estrellas que quedaban a la izquierda de la línea?	1
	C5	¿Han puesto gomets en todas las estrellas que quedaban a la derecha de la línea?	1
	C6	¿Han puesto gomets en los círculos que quedaban en el centro de la línea?	1
	C7	¿Han puesto gomets en los círculos que quedaban en el centro de la línea?	1
A6	C1	¿Han sabido decir correctamente dónde estaba situado Coco?	1
	C2	¿Han utilizado razonamiento lógico en el debate?	1
	C3	¿Han sabido escribir correctamente los números ordinales en las cuerdas?	1
A7	C1	¿Han cortado las cuerdas en la secuencia de ordinales propuesta?	1
	C2	¿Han resuelto el mural?	1
	C3	¿Han reescrito los números en función de los ensayos descartados?	S/N
A8	C1	¿Han encontrado otra combinación para resolver la pantalla?	S/N
	C5	¿Han conseguido una estrella resolviendo la pantalla?	1
	C6	¿Han conseguido dos o tres estrellas?	1

ANEXO D

En este anexo se incluyen algunos de los materiales utilizados en las actividades propuestas.



(A)

(B)

Figura 5. Material de la Actividad 3. Fuente: [1] y propia.

La planilla mostrada en la figura 6 podría aportarse sin celdas coloreadas de gris para aumentar la dificultad en su cumplimentación.

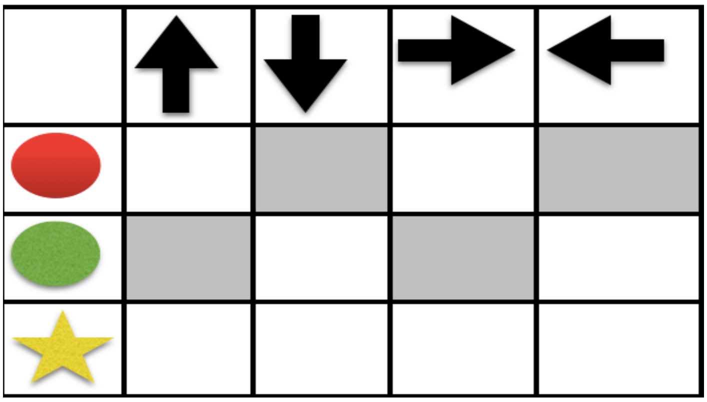


Figura 6. Material de la Actividad 3. Fuente: propia.

ANEXO E

Figura7. Imágenes de la intervención realizada.

Para hacer referencia al artículo:

De Castro, N. y Gutiérrez, S. (2018). Matemáticas en Educación infantil utilizando aplicaciones móviles como recurso didáctico. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”. (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 42-54). Lugar: Universidad de León

VA POR MIS ALUMNOS: LOS DEL PASADO, LOS DEL PRESENTE Y LOS DEL FUTURO

Rosa María Ruiz Núñez

Profesora de Enseñanza Secundaria Matemáticas IES "Jorge Manrique" (Palencia); Instituto GeoGebra de Castilla y León.

Resumen

Existen tantas maneras de interpretar la Matemática y su docencia como personas que se quieran dedicar a ello. Si trasladamos este hecho a nuestras aulas, en ellas tenemos alumnos que enfocarán su futuro contando con ellas y muchos otros que no. ¿Sirven nuestras clases para comunicarnos con todos?

Pero este planteamiento no es nuevo. Es claro que, después de tantos años, no hemos encontrado la piedra filosofal ni una varita mágica que diera con la solución, ¿o sí? Buscamos modelos que puedan aportar algo de luz a la dinámica de unas aulas que son las que nos toca atender, dejando de lado que quienes las atendemos somos nosotros, con nuestros recursos y nuestra forma de interpretarlas.

De las tantas maneras de interpretar la Matemática y su docencia, esta ponencia es el resultado de una de ellas. ¿Sus estrategias? Comunicación y la tecnología que ofrece GeoGebra.

Palabras clave: metodología, Matemáticas, Secundaria, comunicación, GeoGebra.

INTRODUCCIÓN.

Figura 1: Comienzo de la exposición

Cuando se lleva 25 años trabajando con alumnos de diferentes niveles, es posible que no sea la primera profesora que echa la vista atrás y recuerda situaciones que han marcado su labor en las aulas, en un intento de comprender mejor su evolución. Sin duda, son los docentes que se dedican a la investigación aquellos para los que es lícito dar cuenta de su trabajo en congresos y, posteriormente, editar sus publicaciones. Sin embargo, si estamos hablando de investigación, quizá la experiencia de una profesora como yo podría considerarse como "un estudio de caso" y, sin disponer de suficiencia investigadora, mis ideas y aportaciones pudieran ser útiles para otros profesionales de la docencia de la Matemática. Por eso, quiero agradecer a la organización de este Congreso que haya pensado en esa posibilidad y me haya ofrecido la oportunidad de exponer, en calidad de ponente, y publicar en estas actas las "investigaciones" que mi vida profesional y el interés por mejorar mi tarea me han permitido durante veinticinco años de vida en las aulas. De ahí el título que aparece en la figura 1.

Las preguntas.

Entre las indicaciones para la realización de una buena investigación, los expertos señalan que el planteamiento de una pregunta esencial es indispensable para dirigir el camino. Es difícil seleccionar, por eso haré un breve resumen en torno a una de las que me ha dado más pistas para poder avanzar: ¿cómo he impartido mis clases?

Los comienzos de cualquier docente están basados en los conocimientos que lleva desde su formación en todos los niveles que supera en el sistema educativo, aquello que recuerda de sus profesores y lo que puede aprender de los compañeros con los que trabaja o está en contacto. Existen investigaciones que lo demuestran. Remito al lector a realizar su propia búsqueda. Mi caso no es una excepción. Comencé mis clases "explicando" aquello que sabía. Los comentarios de alguno de mis alumnos me indicaban que no lo hacía muy mal. Supongo que, por esa razón, durante años continué, haciéndolo de la misma manera: mediante la transmisión verbal de los conocimientos de los que disponía.

De esta forma, los contenidos marcados en las programaciones eran los elementos característicos de las clases. Pero, inconscientemente, estaba dejando de lado las concepciones de los alumnos, los puntos de vista no científicos o la información proveniente del trabajo directo con la realidad. De hecho, fueron nuevamente ellos, los alumnos, quienes me lo revelaron cuando uno me preguntó en clase para qué servían los polinomios. Años después he comprobado que compañeros docentes que se dedican a la disciplina de otras materias también se hacen las mismas preguntas.

Los exámenes han sido durante años la prueba objetiva de medir el grado de consecución de los objetivos previstos. La única nota era la que obtenían en las pruebas, adoptando los criterios de calificación de las programaciones. La realidad mostró que con ello no se conseguía involucrar realmente a los alumnos en el proceso de aprendizaje. Lo que se conseguía era el efecto contrario, es decir, una sensación de fracaso que les desmotivaba frente a la materia y les impulsaba a no creer en sus propias capacidades. Lo comprobé cuando una alumna de Grado en Primaria, a la que yo no había dado clase anteriormente, suspendía su tercera matrícula en la materia. Su desesperación por el gasto que suponía la siguiente matrícula le llevó a decirme "no tienes corazón".

Para seguir aprendiendo de los errores, que entendía iba cometiendo en cuanto a la metodología que empleaba, en la última fase de mi carrera profesional he dedicado mayor atención a los intereses de mis alumnos. Sin embargo, tampoco he obtenido grandes resultados. Las respuestas esta vez fueron hostiles. Un alumno, de forma anónima en una encuesta de valoración, ofreció una opinión poco positiva en torno a mis conocimientos en Matemáticas. Pensé, ¿de verdad debo creer que ya no sé Matemáticas?

Quizá todas estas circunstancias, a veces desagradables y dolorosas, porque ambas partes estamos involucradas en la interpretación del perfil que nos ha tocado, se hubieran podido evitar si hubiese podido leer la mente de mis alumnos. Pero como les digo a ellos, si pudiera hacer eso, me dedicaría a otra cosa. Por eso, he entendido que existe un problema de comunicación en las aulas que no se puede resolver de la noche a la mañana y que, para encontrar respuestas, en primer lugar, debo querer hacerlo.

Algunas respuestas.

Mi solución pasó por probar metodologías nuevas, tecnología, otras estrategias diferentes a la clase tradicional para sentir que los alumnos se implicaban, pero sobre todo algo realmente importante: que lo que hacía tenía alguna utilidad. Algunas dieron resultado, mantenían la atención de los muchachos y permitían que en las clases hubiese cierta motivación. También se producía el efecto contrario, en ocasiones las actividades que planteaba no daban el resultado esperado.

En mi paso por formación del profesorado, la tecnología se convirtió en una prioridad, tanto para aprender como para las tareas que debía realizar. Lógicamente, cuando volví al aula, seguía siendo una prioridad, pero los recursos no eran los mismos. Lo que había usado hasta el momento se fortaleció con la interactividad de algunas páginas web que visitaba, pero casi siempre encontraba inconvenientes: no había conexión o el aula en el que estaba la pizarra digital estaba ocupada. En 2009 conocí GeoGebra. Él me dio la solución. No solo porque era posible aclarar muchos conceptos por medio de su uso, sino porque me hizo entender que, aunque los alumnos no se comunicaran conmigo, sí lo harían con las Matemáticas. A partir de ahí, sería mi cómplice.

Figura 2: Conceptos matemáticos en 2º ESO.

En primer lugar, habría de tener en cuenta la programación, con todos sus referentes en cuanto a contenidos, criterios de calificación y estándares de aprendizaje. Observando la figura 2, se puede imaginar que la tarea no es sencilla, especialmente para ellos. Aunque muchos de los contenidos se han trabajado en cursos precedentes, el aprendizaje no se ha producido. Se limitan a repetir patrones o recetas que, en la mayor parte de las ocasiones, no recuerdan correctamente. Se olvidan del verdadero sentido de aquello que representa cada uno de los conceptos que se trabajan. El lenguaje que utilizamos, en muchas ocasiones, tampoco ayuda. Cada uno tenemos nuestra manera particular de referirnos a ellos y dar las explicaciones oportunas.

Con GeoGebra era más fácil. El único intermediario entre ellos y el software es su pensamiento. La única parte que se podría mejorar es la paciencia que se necesita para atender las dudas en el aula de informática sobre el funcionamiento de algunas herramientas. Pero, como nativos digitales que son, muchos de ellos no necesitan demasiadas explicaciones y se puede aprender con ellos.

Figura 3

En segundo lugar, se trataría de plantear situaciones que tuvieran la capacidad de reunir los conceptos que se deben trabajar en cada bloque de contenidos y el medio natural en el que se desenvuelven nuestros alumnos (y, por ende, nosotros). En el ejemplo de la figura 3 se combina la generación de las matrículas de los coches con la devaluación que sufren éstos con el paso de los años. Invito al lector a que encuentre en el BOCYL correspondiente los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que se pueden trabajar con esta situación.

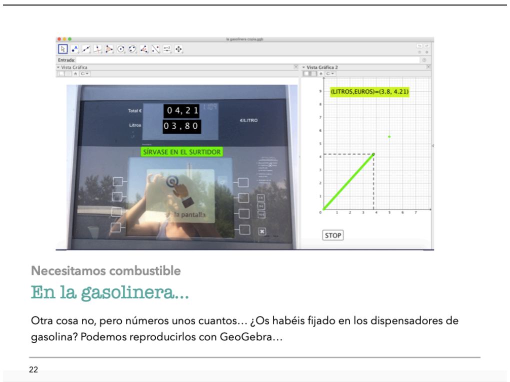


Figura 4

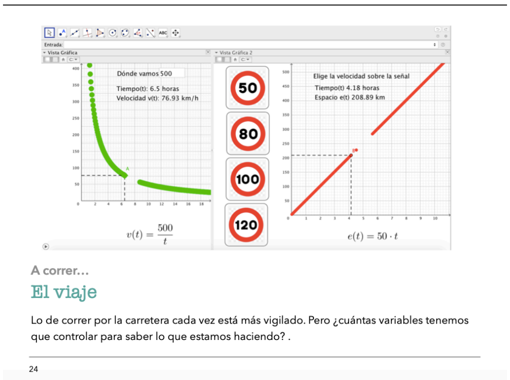


Figura 5

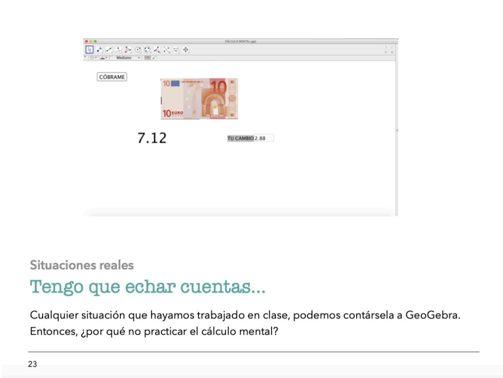


Figura 6

En las figuras 4, 5 y 6 se muestran otros ejemplos relacionados con la vida cotidiana. Seguro que no les prestamos mucha atención, pero son situaciones que repetimos varias veces en nuestro día a día. Nuestros alumnos no escapan a ellas. Posiblemente no se hagan preguntas y entiendan que todo está ahí, sin más, que ya está inventado. Pero nosotros tenemos la obligación de recordarles que, detrás de todo eso, están las Matemáticas. Como a nosotros probablemente no nos van a escuchar, que se comuniquen con GeoGebra…

Figura 7

Figura 8

Para finalizar, he incluido en esta exposición las figuras 7 y 8 con imágenes de dos construcciones que se relacionan con la Geometría, nuestra "asignatura pendiente"… pendiente de que le dediquemos más tiempo en clase. Porque esas construcciones, aunque parezca que tienen una complejidad mayor a la hora de elaborarlas, también tienen su parte didáctica.

CONCLUSIÓN.

Mis alumnos me han enseñado que rectificar es de sabios. No solo enseño, aprendo. No solo oigo, también escucho. Espero que ellos aprendan, porque así podrán enseñarme y podré seguir escuchando. Las cosas que suceden en clase siempre suponen un aprendizaje. Si quienes nos dedicamos a la docencia de la Matemática no lo queremos ver, el mundo seguirá construyéndose y, probablemente, al volver la vista atrás, podamos arrepentirnos de no haber puesto remedio cuando aún teníamos en nuestras manos la construcción de su conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Porlan, R. (1995). Constructivismo y escuela.

Para hacer referencia al artículo:

Ruíz, R.M. (2018). "Va por mis alumnos: los del pasado, los del presente y los del futuro". En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 55-60). Lugar: Universidad de León

ENSEÑANDO MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE SU HISTORIA

Mª Encarnación Reyes Iglesias

ETS Arquitectura, Universidad de Valladolid.

Resumen

El conocimiento de los periodos históricos en los que han surgido las grandes ideas impulsoras del desarrollo de la Matemática debe formar parte del bagaje científico y cultural de un docente de esta materia y redundar en un apoyo constante y una motivación notable en el proceso de enseñanza- aprendizaje matemático.

La inclusión de conocimientos históricos en la Programación Docente de Matemáticas contribuye a apreciar la utilidad de esta ciencia en la resolución de problemas prácticos desde la antigüedad hasta nuestros días, a la vez que pone de manifiesto su papel fundamental en la construcción y el progreso de la humanidad.

Palabras clave: *Historia, Matemáticas, metodología, Secundaria*, *Bachillerato*.

PRIMEROS VESTIGIOS

- La primera evidencia arqueológica sobre la idea de conteo se encuentra en el hueso de Lebombo, hallado en la Cueva de Border, en las montañas de Lebombo, entre Sudáfrica y Suazilandia. Está datado en 35.000 años de antigüedad. Este objeto es un peroné de babuino con 29 hendiduras.
- La segunda muestra de Matemática prehistórica es el Hueso del Ishango, descubierto en el año 1950 por el arqueólogo Jean de Heinzelin en la República Democrática del Congo (ex Congo Belga) al lado del lago Edward, una de las fuentes más remotas del Nilo. Se trata de un pequeño hueso de 10 cm de altura en el cual está grabada una serie de marcas incisas agrupadas figurando números. Según los científicos, se trataría de un bastón para hacer cálculos y sería una de las pruebas más antiguas de la agudeza matemática de nuestros ancestros: una máquina de calcular prehistórica, con una antigüedad de 20000-25000 años.

Figura 1: Hueso del Ishango

ANTIGUAS CIVILIZACIONES

- De Babilonia destacan las tablillas cuneiformes, entre las cuales destaca la de Plimpton 322 (1600 a. C.), por contener secuencias de números que forman “ternas pitagóricas.”

119	169	1
3367	4825	2
4601	6649	3
12709	18541	4
65	97	5
319	481	6
2291	3541	7
799	1249	8
481	769	9
4961	8161	10
45	75	11
1679	2929	12
161	289	13
1771	3229	14
56	106	15

Figura 2: Tablilla Plimpton 322

Los números $a = 2pq$, $b= p^2-q^2$, $c = p^2+q^2$ $(p>q)$ forman una terna pitagórica, es decir $c^2 = a^2 + b^2$,

los valores $p = 12$ y $q = 5$ originan la terna $a = 120$, $b = 119$ y $c = 169$ (b y c en la primera fila),

$p = 64$ y $q = 27$ dan lugar a los valores $b = 3367$ y $c = 4825$ de la segunda fila, etcétera.

- De Egipto han llegado a nosotros los papiros, entre ellos el de Rhind (nombre del escocés que lo encontró) o de Ahmes (su escriba). Data de 1650 a.C. y contiene gran variedad de problemas de cálculo, geométricos, fracciones unitarias, progresiones, etcétera.
- De la India proceden las matemáticas védicas recogidas en los Sulvasutras que eran textos de Geometría que usaban números primos, reglas de tres, formas geométricas, etc. Además, aparecen los cuadrados védicos consistentes en 9x9 casillas, numeradas del 1 al 9 en los lados superior e izquierdo. El resto de casillas se obtienen al multiplicar un número de cada fila y uno de cada columna y sumar las cifras o, equivalentemente en lenguaje de hoy, son las clases residuales módulo 9, $(Z/(9),\circ)$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	1	3	5	7	9
3	6	9	3	6	9	3	6	9
4	8	3	7	2	6	1	5	9
5	1	6	2	7	3	8	4	9
6	3	9	6	3	9	6	3	9
7	5	3	1	8	6	4	2	9
8	7	6	5	4	3	2	1	9
9	9	9	9	9	9	9	9	9

Figura 3: Cuadrado védico

MATEMÁTICAS DE GRECIA

Entre los matemáticos jonios de la Antigüedad clásica griega, deslumbraron Tales (624 a.C. - 546 a.C.) y Pitágoras (580 a.C. - 520 a.C.).Y entre tantos aportes, están los números poligonales qué, en lenguaje actual son las sumas parciales de los términos de las siguientes progresiones aritméticas:

$$\begin{array}{llllllll}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & P.A. \quad d=0 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & P.A. \quad d=1 \\
1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \ldots & P.A. \quad d=2 \\
1 & 4 & 7 & 10 & 13 & 16 & \ldots & P.A. \quad d=3 \\
1 & 5 & 9 & 13 & 17 & 21 & \ldots & P.A. \quad d=4 \\
1 & 6 & 11 & 16 & 21 & 26 & \ldots & P.A. \quad d=5 \\
1 & 7 & 13 & 19 & 25 & 31 & \ldots & P.A. \quad d=6
\end{array}
\begin{array}{c}
\Longrightarrow \\ \\ \\ \Longrightarrow \\ \\ \Longrightarrow \\ \\
\end{array}
\begin{array}{lllllllll}
N & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots\ldots & \mathit{Naturales} \\
T & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & \ldots\ldots & \mathit{Triangulares} \\
C & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 & \ldots\ldots & \mathit{Cuadrados} \\
P & 1 & 5 & 12 & 22 & 35 & 51 & \ldots\ldots & \mathit{Pentagonales} \\
H & 1 & 6 & 15 & 28 & 45 & 66 & \ldots\ldots & \mathit{Hexagonales} \\
Hep & 1 & 7 & 18 & 34 & 55 & 81 & \ldots\ldots & \mathit{Heptagonales} \\
O & 1 & 8 & 21 & 40 & 65 & 96 & \ldots\ldots & \mathit{Octogonales}
\end{array}$$

Del periodo ateniense destacan Hipócrates de Quío, (470 a.C. - 410 a.C.), Hippias (460 a.C. - 400 a.C.), Demócrito (460 a.C. - 370 a.C.), Platón (428 a.C. - 347 a.C.), Eudoxo (408 a.C. - 355 a.C.) (las proporciones), Aristóteles (384 a.C. - 322 a.C.), Menecmo (380-320 a.C.) (curvas cónicas).

ESTÁTICAS		DINÁMICAS	
Cuadrada	$\frac{a}{b} = 1$	Raíz de dos	$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$
Dupla	$\frac{a}{b} = 2$	Raíz de tres	$\frac{a}{b} = \sqrt{3}$
Sesquiáltera	$\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$	Áurea	$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Sesquitercia	$\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$	Plata	$\frac{a}{b} = 1+\sqrt{2}$
Pentatercia	$\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$	Bronce	$\frac{a}{b} = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Figura 4: Proporciones notables

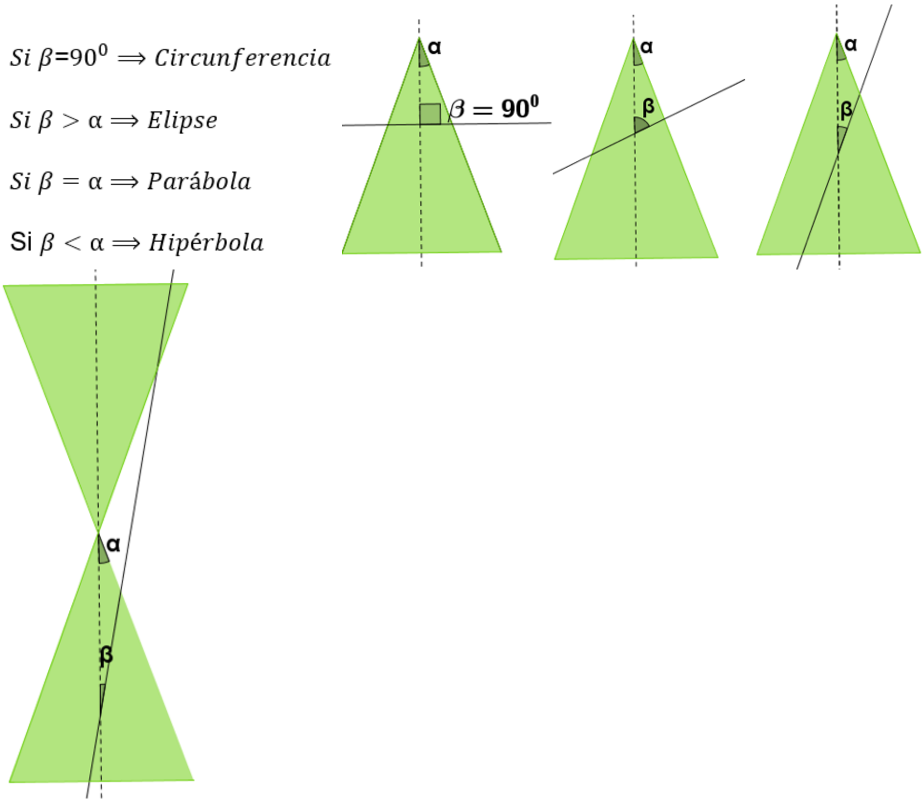
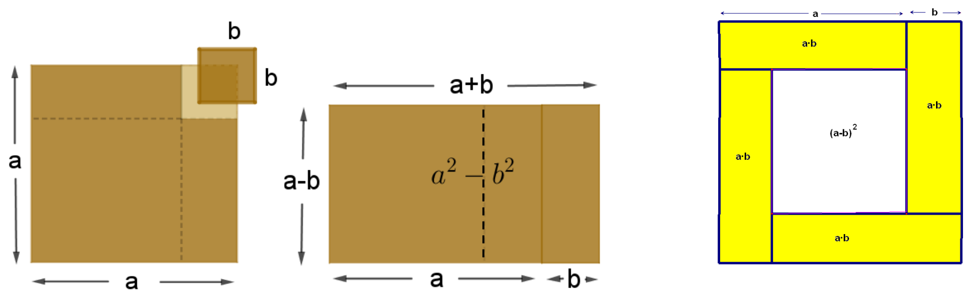


Figura 5: Secciones de un cono por planos: curvas cónicas

En esta época heroica se hacen contribuciones a la denominada "Álgebra geométrica"



$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$a \cdot b = \frac{1}{4}\left[(a+b)^2 - (a-b)^2\right]$$

Figura 6: Álgebra geométrica

Del Periodo helenístico destaca el Museion con la famosa Biblioteca de Alejandría: Euclides (325 a.C.-265 a.C.) (Los Elementos), Arquímedes (287 a.C.-212 a.C.), Eratóstenes (276 a.C.-197 a.C.), Apolonio de Perga (262 a.C.-190 a.C.) (curvas cónicas), Diocles (240 a.C.-180 a.C.).

Entre los últimos helenos de la escuela de Alejandría: Ptolomeo (siglo II), Diofanto (200 d.C.-284 d.C.), Pappus (290 d.C.–350 d.C.), Theon (335 d.C.–395 d.C.) y su hija Hypatia (370 d.C.–415 d.C.).

La contribución de los griegos a las Matemáticas constituyó un avance fundamental al convertir la Matemática en una ciencia estructurada, una disciplina teórica con teoremas, proposiciones y demostraciones formales.

MATEMÁTICAS DE LA INDIA

Entre otros hitos, proceden de la India:

- Sistema de numeración (notación brahmi) del cual surge, con aportaciones de los árabes, nuestro sistema decimal y nuestra notación actual de los diez dígitos.
- Llegada del cero hacia el año 876. Historia del cero (en la civilización maya también aparece).
- Pingala presentó la primera descripción conocida de un sistema de numeración binario. Describió dicho sistema en relación con la lista de métricas védicas y las sílabas cortas y largas.

MATEMÁTICAS DEL ISLAM Y DE LA EUROPA MEDIEVAL

- Alkwaritzmi, Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwaritzmi, escribió la obra llamada Hisab-al-jabr-wa-al-muqabala en el año 830.
- *Al-jabr (*restaurar o colocar*). Muqabala* (reducción).
- La palabra *algoritmo* se deriva de su nombre y fue el primero que describió y explicó el sistema posicional decimal con las cifras hindúes.
- En el siglo X aparecen las cifras arábigo-orientales y un símbolo para el cero.
- Los números irracionales, las fracciones y las proporciones desempeñaron un gran papel en la Aritmética árabe.
- Resolución de ecuaciones cuadráticas: por ejemplo $x^2 + 8x = 33$;

$$x^2 + 8x + 16 = 33 + 16 = 49\ ;\ \ (x+4)^2 = 49 \Longrightarrow x + 4 = 7 \ \Longrightarrow x = 3$$

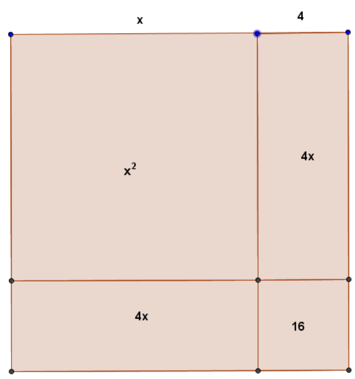


Figura 7: Resolución de ecuaciones cuadráticas

MATEMÁTICAS DEL RENACIMIENTO

Tartaglia (1500-1557), Cardano (1501-1576), Bombelli, R. (1526-1572), Viete (1540-1603), Napier (1550-1617), Galileo (1564-1642), Kepler (1571-1630), Guldin (1577-1643), Snell (1580-1626).

El símbolo de la raíz cuadrada apareció por primera vez en un libro de Álgebra, llamado Coss, escrito en alemán a principios del siglo XVI. Su autor fue Christoph Rudolff (1525).

- En un principio para designar la raíz, vocablo derivado del latín radix, se escribía literalmente *raíz del número,* pero abreviadamente se comenzó a utilizar la letra "r". Cuando los números eran de varias cifras se alargaba esa "r" en su parte superior por un trazo horizontal cubriendo los dígitos.
- Varios matemáticos encontraron la necesidad de las raíces de números negativos, para resolver todas las ecuaciones de segundo grado. Fue el ingeniero hidráulico italiano Rafael Bombelli, (1526-1572) quien, después de leer la Aritmética de Diofanto y el Ars Magna de Cardano, en el que ya aparecían raíces de números negativos, estableció la Aritmética de los números complejos, con la suma y el producto de los mismos, al estudiar las ecuaciones de tercer grado. Bombelli escribe su libro de Álgebra en 1572 y en él se dan las reglas de los signos, para operar con números positivos y negativos.
- Kepler introdujo en Geometría el concepto "infinitamente pequeño" usado hasta entonces en sentido filosófico. "El perímetro del círculo tiene tantas partes como puntos, es decir, infinitos, cada parte puede verse como un triángulo isósceles de lado el radio del círculo…". Así se obtiene la fórmula del área del círculo.

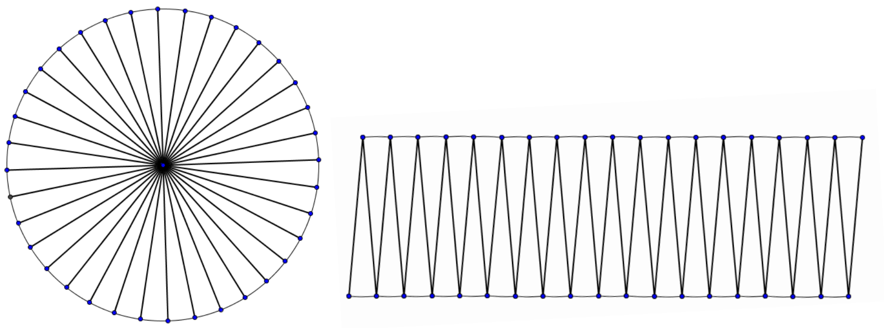


Figura 8: Aproximación área del círculo

- Etienne Pascal, (1588-1640, Mersenne (1588-1648), Desargues (1591-1661), Descartes (1596-1650), Cavalieri (1598-1647), Fermat(1601-1665), Viviani (1622-1703).
- En el apéndice *La Geométrie* en su *"Discours de la méthode"* (1637) de Descartes, está el germen de la Geometría Analítica. La idea inicial de la Geometría de Descartes se basa en paralelas cortando a una recta y determinando segmentos (*omnes ordinatim applicatae*), de donde viene el concepto de ordenada. Designó las variables con las últimas letras del alfabeto, x, y, z y a las constantes con a, b, c.
- Año1637: Enunciado del último Teorema de Fermat: Si n es un entero mayor que dos, es imposible encontrar números enteros distintos de cero, $x, y, z,$ tales que: $x^n + y^n = z^n$.

- Teorema de Viviani (1659): La suma de las distancias desde cualquier punto interior a cada uno de los lados de un triángulo equilátero es igual a su altura. Si *l* es la medida del lado del triángulo,

$$\boldsymbol{A(T) = \frac{1}{2}AB \cdot H = \frac{1}{2}AB \cdot p + \frac{1}{2}BC \cdot n + \frac{1}{2}AC \cdot m}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow \frac{1}{2}l \cdot H = \frac{1}{2}l \cdot p + \frac{1}{2}l \cdot n + \frac{1}{2}l \cdot m \Leftrightarrow}$$
$$\boldsymbol{H = p + n + m.}$$

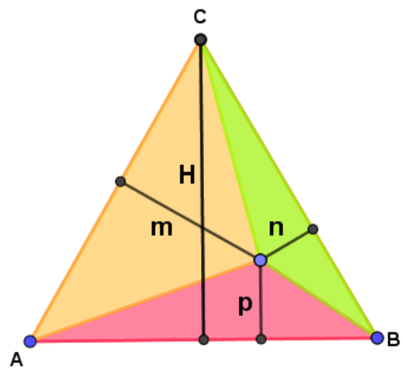


Figura 9: Teorema de Viviani

NACIMIENTO DEL CÁLCULO: SIGLO XVII

Newton (1642-1727) desarrolló el cálculo de las Fluxiones $\boldsymbol{x = x(t), \dot{x}, \ddot{x}, \dots,}$ el teorema del binomio, la Ley de Gravitación Universal, $\boldsymbol{F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}}$, y un largo etcétera.

Leibniz (1646-1716) construyó su cálculo diferencial independiente de Newton. Uno de los creadores de la simbología matemática moderna. Símbolos para las diferenciales y para la integral: $dx,\quad dy\,,\quad \frac{dy}{dx}\,,\quad \int y\,dx$

SIGLOS XVIII Y XIX

En el año 1701 Leibniz y Johann Bernoulli establecen una correspondencia acerca de un sistema binario en Aritmética. En 1703 Leibniz publico una "Explicación de la Aritmética binaria" en l´Academie Royale des Sciences, primera explicación sobre este tema que tendrá impacto en la comunidad científica.

Euler (1707-1783) en su libro *Introductio in analysis infinitorum* de 1748, define el concepto de variable: **"**Una magnitud variable es una magnitud general o indeterminada que incluye, sin limitación, todos los números".

Y define con mayor precisión el concepto de función (ya dado por Johann Bernoulli): "Una función de una magnitud variable es una expresión analítica construida, de alguna manera, con esa misma magnitud variable, con números y con magnitudes constantes"

- Símbolos π (1736) y e (1739). En 1777 denotó a la raíz cuadrada de (-1) como i, $i = \sqrt{-1}$.
- $e^{i\pi} + 1 = 0$ (Identidad de Euler).

- $e^{x+iy} = e^{x}(cos\, y + i\, sen\, y)$, $e^{i\pi} = \cos\pi + isen\,\pi = -1$
- Las últimas palabras de Euler el 18 de septiembre de 1783 ante un paro cardiaco: *"Extraño, no estoy percibiendo Matemáticas"*

María Cayetana Agnesi (1718-1799) escribió *Instituzioni analitiche ad uso della gioventu italiana,* considerado un tratado sobre el cálculo diferencial y el cálculo integral, del que la Academia de Ciencias de París comentaría: "Esta obra se caracteriza por una cuidadosa organización, su claridad y su precisión. No existe ningún libro, en ninguna otra lengua, que permita al lector penetrar tan profundamente o tan rápidamente en los conceptos fundamentales del Análisis. Consideramos este tratado como la obra más completa y la mejor escrita en su género".

Gauss (1777-1855). De niño suma del 1 al 100. El 30-03-1796 construyó con regla y compás el polígono regular de 17 lados. El 10-07-1796 demostró que todo entero positivo es la suma de tres números triangulares como máximo.

- Representación de los números complejos. Teorema fundamental del álgebra.
- Astronomía y ley de mínimos cuadrados.
- Publicó en 1827 el tratado *"Disquisitiones circa superficies curvas"* considerado como la piedra angular de una nueva rama de la Geometría, la Geometría Diferencial (propiedades de las curvas y superficies en el entorno de un punto).

Ada Byron o Ada Lovelace (1815-1852), matemática, se interesó en la máquina analítica de Babbage escribiendo sus Notas etiquetadas alfabéticamente de la A a la G, siendo considerada esta última como primer algoritmo informático publicado. Por sus instrucciones y programas, diseñados por ella, se considera como la primera programadora de computadoras de la historia.

Figura 10: Ada Byron

En el artículo *Geometrisches Zur Zahlenlehre* de 1899 del vienés Georg Alexander Pick (1859-1942) apareció el siguiente teorema conocido como:

Teorema de Pick

Dada una cuadrícula de puntos del plano y un polígono P simple cualquiera, cuyos vértices están en puntos de la cuadrícula, se cumple que el área A(P) del polígono es: $A(P) = I + \frac{F}{2} - 1$, donde I es el número de puntos de la cuadrícula interiores al polígono y F es el número de puntos de la cuadrícula que están en la frontera del mismo.

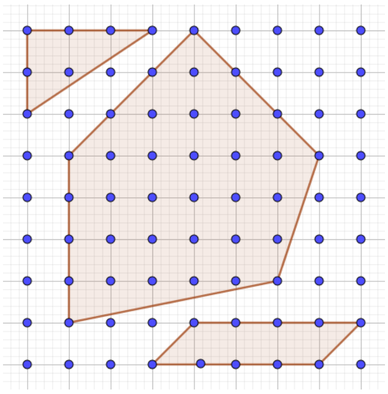


Figura 11: Teorema de Pick

David Hilbert**.** En el Congreso Internacional de París de 1900 enunció una lista de 23 problemas abiertos en Matemáticas lo que supuso un gran hito para el impulso y desarrollo de las Matemáticas del siglo XX.

Por limitaciones de tiempo de exposición, esta ponencia del Congreso de E. Reyes, de Historia, terminó en 1900 con el Congreso de París.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Boyer, C. B.(1986) *Historia de la Matemática*. Alianza Editorial, Madrid.

Eves, H. (1992) *An Introduction to the History of Mathematics*. The Saunders Series, Saunders College Publishing, Fort Worth.

Grattan-Guinness, I. (1994) *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos*, 1630-1910. Alianza Universidad. Madrid.

George Gheverghese, J. (1996) *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*. Ediciones Pirámide.

González Urbaneja, P.M. (2018) *Los Elementos de Euclides: Biblia de la Geometría Griega.* Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

Heath, T. (1981) *A History of Greek Mathematics.* Dover, New York.

Katz, V. J. (1998) *A History of Mathematics: an introduction.* Addison-Wesley.

Kline, M. (1992) *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Alianza Editorial, Madrid.

Maza C. (2000) *Las Matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico.* Secretariado de Publicaciones. Universidad de Sevilla.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (1997) *Historia de la Matemática.* Gedisa, Barcelona.

Ribnikov, K. (1991) *Historia de las Matemáticas.* Mir, Moscú.

Stewart, I. (2009) *Historia de las Matemáticas en los últimos 10.000 años*. Crítica, Barcelona.

Struik, D.J. editor (1986) *A sourcebook in Mathematics,* 1200-1800. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Zamorano, R. *Los seis primeros libros de la Geometría de Euclides*, *traducidos en lengua española por Rodrigo Zamorano.* Ediciones Universidad de Salamanca, 1999.

Wussing, H. [et al.](1998) *Lecciones de historia de las Matemáticas.* Siglo XXI de España Editores, Madrid.

COLECCIÓN: La Matemática en sus personajes. Editorial NIVOLA (48 libros)

Para hacer referencia al artículo:

Reyes, M.E. (2018). Enseñando Matemáticas a través de su historia. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 61-70). Lugar: Universidad de León

GEOGEBRA COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA EN LA FORMACIÓN PROFESIONAL DE MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Laura Conejo Garrote y Matías Arce Sánchez

Universidad de Valladolid

Resumen

En la siguiente ponencia se muestran una serie de experiencias llevadas a cabo con los alumnos del Grado de Educación Primaria (futuros maestros) en la Universidad de Valladolid. Se pretende poner en valor la utilidad del programa GeoGebra en la formación profesional inicial de maestros, tanto en lo referente al refuerzo y mejora del conocimiento del contenido matemático (particularmente en el área de Geometría, aunque no solo) como del desarrollo del conocimiento didáctico de ese contenido matemático. Dado que en muchos casos los conocimientos involucrados son los propios del currículo de Educación Primaria, las experiencias, materiales y construcciones mostradas son también útiles para los maestros de Primaria en ejercicio.

Palabras clave: Geometría, GeoGebra, Educación Primaria, formación de maestros.

INTRODUCCIÓN Y FUNDAMENTACIÓN

Es incuestionable cómo las llamadas TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) tienen cada vez un papel más presente e influyente en nuestra sociedad. La escuela no es ajena a este hecho ni ha de permanecer impasible ante él. En los últimos años, podemos encontrar distintas iniciativas y un gran número de recursos digitales con un propósito educativo (softwares, aplicaciones,…). No obstante, la introducción de recursos TIC no supone en sí misma ninguna garantía de mejora del aprendizaje, en particular, de las Matemáticas. Drijvers (2013) identifica tres factores clave para introducir con éxito las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, que muestran el papel fundamental del docente para optimizar las potencialidades de cada recurso:

- Diseño adecuado de las tareas para explotar el potencial del recurso TIC utilizado.
- Rol del profesor como director de orquesta de los procesos de aprendizaje.
- Contexto educativo en el que se vea y se integre de forma natural el trabajo con las TIC.

GeoGebra es uno de los recursos con mayor presencia y posibilidades actualmente en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, prácticamente en todos los niveles educativos. Se trata de un software multiplataforma, de carácter gratuito (puede descargarse en: https://www.geogebra.org/). GeoGebra permite construir y dinamizar figuras en un entorno de Geometría Sintética (sin coordenadas). También permite hacer lo mismo en un entorno de Geometría Analítica (con coordenadas), añadiendo una ventana en la que se recogen las ecuaciones algebraicas o los atributos (longitudes, áreas…) de los elementos. Además, cada vez añade más opciones y entornos (hojas de cálculo, GeoGebra 3D, realidad aumentada…), sobre las que comentaremos alguna pincelada al final, lo que aumenta más su potencial y posibilidades para su uso en un aula de Matemáticas.

Su carácter gratuito y su ingente número de posibilidades hace que la comunidad de docentes que usamos GeoGebra sea cada vez mayor. Muchos de los recursos elaborados son compartidos por los docentes en la dirección https://www.geogebra.org/materials, que se ha convertido en un magnífico repositorio de materiales de uso libre creados con GeoGebra y que pueden ser usados, descargados y modificados por otros docentes para ser usados en sus aulas de Matemáticas.

Por todo lo anterior, hace varios años decidimos introducir GeoGebra en la formación de futuros maestros de Educación Primaria, por la actividad matemática y los conocimientos que les ayuda a desarrollar. Entre esos conocimientos, adoptando la distinción introducida por Shulman (1986), están conocimientos, tanto sobre contenidos matemáticos como sobre la didáctica de estos contenidos. En particular, si nos fijamos en las dimensiones del conocimiento especializado de un docente de Matemáticas detectadas por Carrillo-Yáñez et al. (2018), el trabajo con GeoGebra pretende ayudar al desarrollo de, al menos, las siguientes:

- Conocimiento de los temas matemáticos, incluyendo conceptos, propiedades y relaciones, procedimientos, representaciones de los conceptos… (especialmente en Geometría).
- Conocimiento de la práctica matemática, es decir, de los procesos involucrados en la práctica matemática. En concreto, de procesos como clasificar, definir, razonar o comunicar.
- Conocimiento sobre la enseñanza de las Matemáticas, a partir del conocimiento (y la evaluación crítica) de un software como GeoGebra y de su potencial.

En relación al conocimiento de los temas y de la práctica matemática, la potencialidad que más explotamos es la de programa de Geometría dinámica: permite construir figuras, pero también dinamizar éstas conservando las propiedades utilizadas al construirlo. Conviene recordar la importancia que tiene en la Educación Primaria el desarrollo del sentido espacial, donde podemos destacar la visualización como una destreza de especial relevancia. Según Gutiérrez (1996, p. 9), se entiende por *visualización* o *razonamiento visual* el tipo de razonamiento matemático basado en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, realizado para comprender y aprender conceptos o propiedades y para resolver problemas (de Geometría). Entre las componentes de la visualización se encuentran las imágenes mentales, que son aquellas imágenes que crea cualquier persona en su mente cuando quiere representar de modo gráfico determinada información. El dinamismo de GeoGebra ayudará, por ejemplo, a identificar qué propiedades caracterizan a una figura y la distinguen de otras, a ampliar las imágenes mentales desarrolladas de las figuras geométricas y a detectar relaciones que permitan elaborar conjeturas sobre resultados geométricos. Precisamente en esa última línea, el NCTM (2003) defiende que la Geometría es el lugar natural para desarrollar el razonamiento y las habilidades para la justificación y que la Geometría dinámica es de gran importancia para explorar y establecer conjeturas. No obstante, hay que tener claro que la generación de muchos ejemplos no constituye una demostración. Además, la Geometría debe impartirse de forma integrada con otras ramas de la asignatura siempre que sea posible. Veremos en los ejemplos posteriores cómo GeoGebra nos facilita la propuesta de este tipo de actividades.

Además, creemos que GeoGebra puede ser una buena herramienta para fomentar el progreso a lo largo de los tres primeros niveles de razonamiento de Van Hiele (1957), es decir, evolucionar del primer nivel de reconocimiento, caracterizado principalmente por una apreciación sensorial y global de los conceptos, hacia el segundo nivel, de análisis, en el que se reconocen propiedades elementales de los objetos y se enuncian lo que se denominan definiciones descriptivas (definiciones donde el alumno enumera todas las características que conoce de un objeto, pudiendo faltar alguna de las necesarias para la definición, o sobrar alguna que sea redundante), y acercarnos al nivel 3, clasificaciones y formulaciones, donde se establecen relaciones entre propiedades, se distinguen las verdaderas definiciones y se comienzan a realizar ciertas deducciones simples.

Por todo lo expuesto anteriormente, la utilización de GeoGebra en el Grado en Educación Primaria tiene como objetivo recordar, reforzar y ampliar en los futuros maestros un conocimiento profundo de la Geometría propia de la Educación Primaria, pero también, pretendemos que estos puedan desarrollar algunos aspectos del quehacer matemático, recogidos en el Bloque 1 del desarrollo curricular de la LOMCE para las Matemáticas en Educación Primaria (Consejería de Educación de CyL, 2016, pp. 34405-34408): resolución de problemas, identificación y descripción de regularidades, elaboración de conjeturas, búsqueda de argumentos que las validen o refuten, comunicación haciendo uso de un lenguaje y vocabulario preciso,…

Además, las orientaciones metodológicas sugeridas en la LOMCE (Consejería de Educación de CyL, 2016) indican el papel fundamental de la manipulación en la actividad y el aprendizaje matemático, y en particular geométrico, de los estudiantes de Primaria. Se hace referencia a materiales como geoplanos, tangrams o poliminós, pero también a programas informáticos, indicando explícitamente el papel de los programas de Geometría dinámica, como puede ser GeoGebra. Tras un trabajo con materiales manipulativos físicos, los programas de Geometría dinámica añaden la posibilidad de dinamizar las construcciones para poder visualizar variaciones y posiciones de figuras geométricas concretas o detectar posibles relaciones a través de su comprobación en muchos más casos, lo que añade un rasgo de generalización (de Villiers, 1996) y motiva la detección de regularidades y formulación de conjeturas con un mayor convencimiento.

A continuación se muestran algunos ejemplos de actividades que se han planteado y llevado a cabo con los alumnos del Grado en Educación Primaria y que podrían implementarse también con estudiantes de Educación Primaria. La metodología docente en la que se integra este planteamiento de tareas basadas en applets GeoGebra no siempre es la misma, pues depende de los medios disponibles o la ratio de alumnos, pero tiene los rasgos fundamentales que se explican con más detalle en Arce, Conejo, Pecharromán y Ortega (2015): trabajo en parejas o individual con el applet para responder las preguntas planteadas, debate o discusión colectiva sobre las respuestas anteriores para llegar a un establecimiento de una respuesta precisa y completa y tarea reflexiva individual posterior para valorar el proceso de aprendizaje seguido y su evolución.

GEOGEBRA PARA CLASIFICAR, DETECTAR PROPIEDADES Y DEFINIR

Algunas de las tareas, basadas en applets GeoGebra, planteadas en la formación de los futuros maestros tienen por objeto, además del desarrollo y consolidación de sus conocimientos sobre la Geometría del plano, la práctica de procesos básicos en la actividad matemática como son los de clasificar, detectar propiedades, discriminar o definir figuras o elementos geométricos.

Para fomentar esos procesos, planteamos diferentes tipos de applets y guiones de tareas. Algunas están basadas en la construcción guiada de algún elemento geométrico, junto con algunas preguntas sobre dicho elemento (encaminadas a detectar sus propiedades, llegar a definirlo…). Se muestra un ejemplo en el siguiente enlace, para el concepto de altura de un triángulo: https://www.geogebra.org/m/JQGf3a8G. En la Figura 1 se muestra el estado inicial, con un triángulo y parte del trazado de una altura (la altura sobre el lado AC).

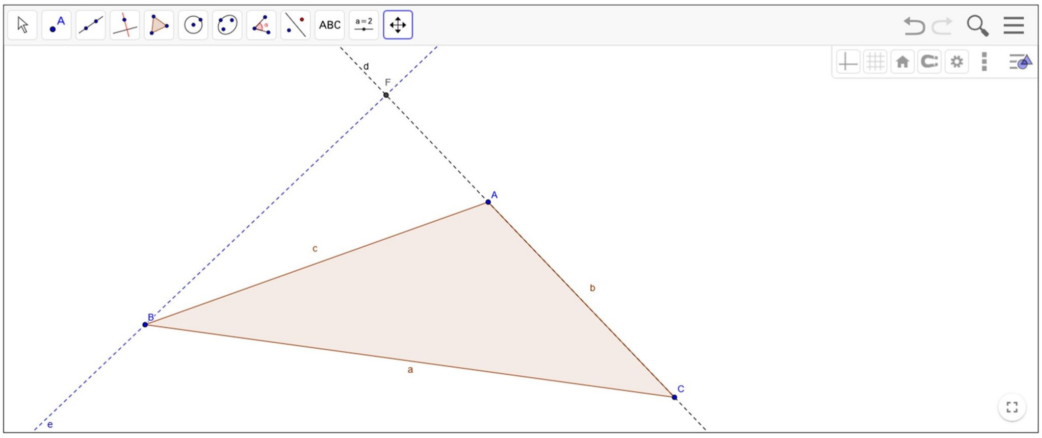


Figura 1. Estado inicial de la ventana gráfica en el applet sobre las alturas de un triángulo

En las tareas, se desgranan los pasos para trazar los tres segmentos altura (recta que contiene a los lados, perpendicular por el vértice opuesto, intersecciones de ambas rectas…). Posteriormente, se solicita escribir una posible definición de altura de un triángulo. Para ello, los futuros maestros han de fijarse en qué es (un segmento) y qué propiedades son las que caracterizan a dicho segmento (cuáles son sus extremos, a qué es perpendicular), aspectos en los que no siempre reparan (a veces indican que la altura es una recta o una semirrecta, o indican la perpendicularidad pero no a qué es perpendicular). Se añaden además otras dos preguntas relacionadas con la altura, como es la existencia, sea como sea el triángulo, de un punto en el que se cortan las tres alturas (el ortocentro) y la detección de relaciones entre la situación del ortocentro y el tipo de triángulo.

Esta actividad ayuda también a construir imágenes mentales mejores y más completas sobre lo que es la altura de un triángulo. Es bien conocido que, en muchas ocasiones, debido a que las figuras presentadas en hojas de actividades, libros de texto o las que utilizamos en nuestras clases, son estáticas y suelen estar en una misma posición, los alumnos asocian ciertas propiedades a los objetos geométricos, en este caso la altura, que no corresponden con las del objeto en cuestión. Por ejemplo, que solo existe una altura en un triángulo y que es vertical. La manipulación de objetos físicos podría contribuir a paliar estos efectos, pero presenta ciertos obstáculos: la limitación de la variedad de ejemplos concretos y la imposibilidad de manejar físicamente un determinado objeto (en un triángulo obstusángulo material no se puede construir dos de las alturas por estar fuera de él, y hay que acudir a su representación gráfica). Si en el applet anterior además incorporamos colores, podemos asociar otros conceptos como, por ejemplo, cada lado como base y su altura correspondiente para calcular el área, ver Figura 2.

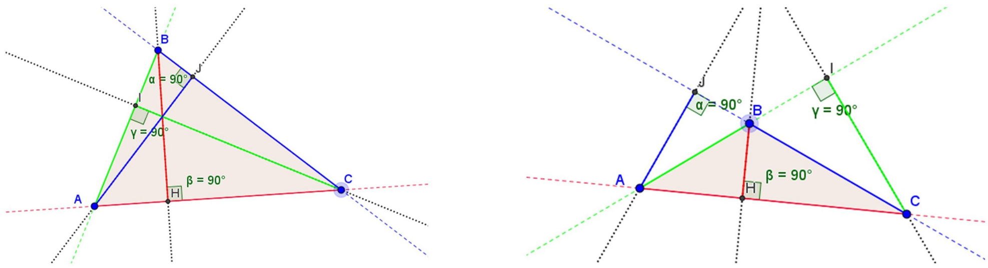


Figura 2. Alturas de dos triángulos, en el mismo color que el lado del que son altura

En otros applets se presenta una (o varias) representaciones gráficas del concepto o del elemento geométrico, construidos de tal forma que se puedan dinamizar sin perder las propiedades que lo caracterizan. Se solicita a los estudiantes verbalizar una posible definición del concepto, a través del reconocimiento y detección de las propiedades. Algunos ejemplos de applets son los siguientes:

- Ángulo convexo y cóncavo:
  https://www.geogebra.org/m/Z9UJBSWB#material/ahwKJFY7
- Ángulos adyacentes:
  https://www.geogebra.org/m/Z9UJBSWB#material/dj4GT8Xn
- Ángulos op. por el vértice:
  https://www.geogebra.org/m/Z9UJBSWB#material/c2MTsD4D

Además, para los ángulos opuestos por el vértice, se añade la posibilidad de detectar la regularidad existente entre sus amplitudes, que se mantiene al dinamizar la figura, y permite enunciar una conjetura sobre su amplitud, planteándonos posteriormente su demostración en un caso general.

En algún otro caso, como para la mediatriz de un segmento, planteamos la representación gráfica de elementos que sí eran una mediatriz y otros que no lo eran, para ayudar a discriminar las características propias de la mediatriz y llegar a plantear una definición.

Como ya se comentó al principio del apartado, con tareas de estos tipos buscamos que los futuros maestros desarrollen una mayor práctica en actividades matemáticas como las de detectar propiedades o definir conceptos geométricos. Además, buscamos una mayor concienciación en el uso de un lenguaje y un vocabulario preciso, algo que resulta esencial en Geometría. Estas prácticas también nos sirven para introducir ejemplos prácticos, a través de sus propias respuestas, de la distinción entre lo que significa describir un elemento o concepto geométrico (listar propiedades del concepto) y lo que es definir (propiedades necesarias y suficientes), característica importante en el aprendizaje de la Geometría en esta etapa educativa. Esta distinción es uno de los avances fundamentales entre el Nivel 2 y el Nivel 3 de razonamiento geométrico de Van Hiele (1957), salto que suele tener lugar en los últimos cursos de Educación Primaria y los primeros de Educación Secundaria.

Además, pensamos que estas tareas también podrían utilizarse, con ligeras adaptaciones, en aulas de Educación Primaria. Que los alumnos de Educación Primaria lleguen a formular definiciones precisas puede ser algo complicado para muchos de ellos, pero sí que pueden detectar propiedades de los conceptos y formular descripciones enumerando propiedades (pudiendo añadir alguna propiedad errónea, superflua u omitir alguna relevante), lo que supone el inicio para realizar definiciones descriptivas (nivel 2 de Van Hiele) y que suponen el paso previo a las verdaderas definiciones (Nivel 3) cuando sean capaces de relacionar las propiedades. Verbalizar estas propiedades también les ayudará a aumentar su vocabulario geométrico y hacer un mejor uso del mismo.

En las clasificaciones de triángulos o de cuadriláteros tenemos una buena oportunidad para plantear estas actividades de detección de propiedades, descripción y definición. Por ejemplo, el siguiente enlace muestra un applet con varios rombos construidos: https://www.geogebra.org/m/swpgp9q8.

Los rombos que se presentan inicialmente ya tienen diferentes formas, tamaños y posiciones, aunque éstos pueden moverse y ser dinamizados por el alumno. En ese movimiento, las figuras nunca dejan de cumplir las propiedades que caracterizan al rombo (cuadriláteros con los cuatro lados de igual longitud), ya que las hemos fijado nosotros al construir las figuras. Se propone al estudiante manipular y dinamizar las figuras en este entorno y, pudiendo ayudarse de los comandos del menú de herramientas (por ejemplo para medir longitudes de segmentos, ángulos…), llegar a detectar qué propiedades cumple un rombo y hacer una propuesta de descripción o definición de la figura.

Otro tipo de actividades que también son interesantes (y que también son adaptables a un contexto de Educación Infantil) son las tareas basadas en la clasificación de figuras geométricas atendiendo a algún criterio. Dependiendo del criterio que escojan los alumnos, pueden estar mostrando un mayor o menor desarrollo del razonamiento geométrico. Por ejemplo, los estudiantes de últimos cursos de Educación Infantil e inicio de Educación Primaria se basarán más en la discriminación visual de las figuras atendiendo a la similitud de su forma global (Nivel 1 de Van Hiele). En Educación Primaria, pueden basarse ya en alguna parte (lados, ángulos…) o propiedad de las figuras (Nivel 2 de Van Hiele), y llegar a combinar varias partes o propiedades en clasificaciones más complejas. Se muestra un ejemplo de applet de este tipo: https://www.geogebra.org/m/cagsppmy y, en la Figura 3, un pantallazo de las formas utilizadas en este ejemplo.

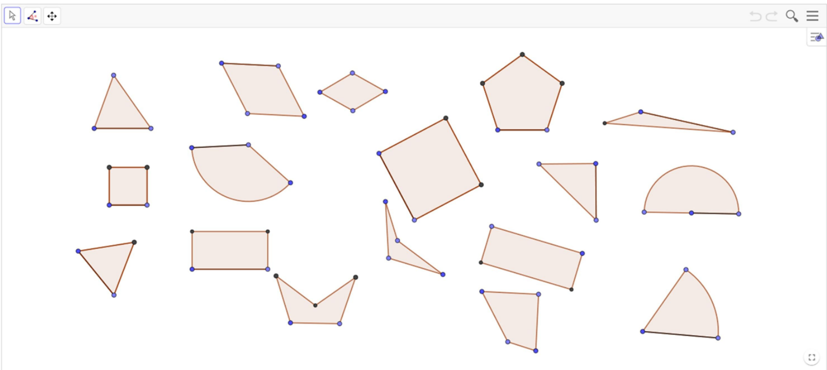


Figura 3. Estado inicial con las formas utilizadas en la actividad propuesta de clasificación

Es cierto que hay materiales manipulativos físicos que también son de ayuda para plantear clasificaciones (bloques lógicos, juegos de figuras geométricas,…), pero GeoGebra y las posibilidades de construir y dinamizar las figuras geométricas nos da un abanico mucho mayor de opciones para plantear actividades de clasificación y discriminación de figuras geométricas una vez exploradas estas actividades con materiales manipulativos.

GEOGEBRA PARA EXPLORAR, ESTABLECER CONJETURAS Y ARGUMENTAR

En la línea de desarrollar el conocimiento de la práctica matemática y de los procesos involucrados en ella como clasificar, definir, razonar o comunicar (Carrillo-Yáñez et al., 2018), otro tipo de actividades que se han propuesto en el Grado en Educación Primaria a los futuros maestros tienen que ver con la construcción, la búsqueda de patrones, la generalización, la argumentación y la comprobación de hipótesis. Un ejemplo de este tipo de actividad la podemos plantear a partir de los polígonos estrellados. Un polígono estrellado es aquel que se construye a partir de un polígono regular, pero en lugar de unir cada vértice con el vértice contiguo, se deja un número fijo determinado de ellos entre medias, de tal forma que cuando volvamos al vértice inicial, hayamos recorrido todos los demás. Se denotan por la expresión *a*/*b*, donde *a* es el número de vértices del polígono regular de partida y *b* es el salto, es decir, cada vértice se une con el b-ésimo vértice siguiente del polígono regular siguiendo un determinado sentido. Por ejemplo, el polígono estrellado 15/4 se obtendría a partir del polígono regular de 15 lados, donde cada vértice se uniría, iterativamente, con el 4º vértice siguiente del polígono regular, tal y como se ve en la Figura 4.

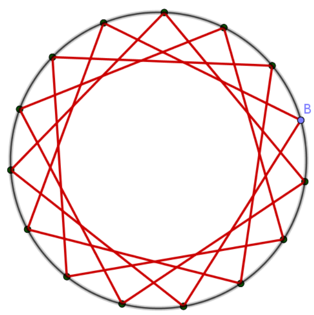


Figura 4. Generación del polígono estrellado 15/4.

Una vez establecida la definición, se plantea lo siguiente a los alumnos: ¿qué deben cumplir a y b para que el polígono obtenido sea realmente un polígono estrellado? Esta pregunta, generalmente, da lugar a un debate en clase, en el que los alumnos empiezan a formular hipótesis sobre las relaciones que deben cumplir a y b: “a y b deben ser los dos impares”, “a siempre debe ser impar”, “tienen que ser uno impar y el otro par”, “b no puede ser la mitad de a”...

Es evidente que la comprobación de estas hipótesis con lápiz y papel resulta casi imposible. En primer lugar, supone una dificultad grande dibujar polígonos regulares más allá del triángulo equilátero, el cuadrado o el hexágono regular. Es decir, el número de figuras en las que se pueden testear estas hipótesis con lápiz y papel no es muy grande ni muy interesante (ninguno de estos tres dan lugar a polígonos estrellados). Pero, aunque admitiésemos que los polígonos no fueran “regulares” (más o menos es asequible dibujar a mano alzada polígonos casi regulares de 5 o 8 lados), cuando queremos aumentar el número de lados, la tarea se torna tediosa y poco manejable.

Disponer de GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/z63cqune) hace que la tarea se vuelva más sencilla y amigable. Ahora, explorar la veracidad de las conjeturas formuladas por los alumnos es rápido, basta con buscar un contraejemplo en el caso de que no lo sea, lo cual implica que además trabajemos con uno de los procesos mencionados en el Bloque 1 del currículo de Matemáticas en Educación Primaria, y que realmente tiene mucho que ver con el quehacer matemático. Por otro lado, este tipo de tarea permite relacionar contenidos numéricos (fracciones irreducibles y divisibilidad) con los contenidos geométricos, lo que de acuerdo con el estándar de conexiones del NCTM (2003), y también en nuestra opinión, “cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera” (p. 68). Una vez que se ha llegado a la conclusión con los alumnos de que la condición a cumplir por a y b para que el polígono a/b sea efectivamente estrellado es que a/b sea una fracción irreducible, aún se pueden plantear dos preguntas más: la primera es cuantas vueltas se necesitan para cerrar el polígono, y la segunda, justificar dicha afirmación (a lo que puede contribuir la primera de estas dos preguntas).

Otros ejemplos de actividades de construcción, exploración, formulación de hipótesis y justificación los tenemos en las actividades del siguiente libro GeoGebra en torno a las diagonales de los polígonos: https://www.geogebra.org/m/bcvuztaz. En la primera se propone encontrar la relación existente entre el número de diagonales de un polígono y el número de lados de dicho polígono. A los alumnos se les puede pedir que construyan varios polígonos (de 3, 4, 5…, 10 lados) y que dibujen todas las diagonales diferentes desde uno de los vértices, para así orientar el conteo de las mismas, y establecer una relación con el número de vértices. En la segunda la idea es identificar en cuántos triángulos queda dividido un polígono cuando se dibujan todas las diagonales que existen con origen en un solo vértice para así establecer una relación con la suma de las amplitudes de los ángulos interiores del polígono (si es convexo) con el número de lados del mismo. Analizando las actividades anteriores desde la perspectiva de la Educación Primaria, consideramos que sería totalmente pertinente su implementación en dicha etapa. Si bien el currículo de Castilla y León no menciona los polígonos estrellados, sí considera los polígonos, tanto regulares como irregulares, y sus elementos, como las diagonales, así como también los ángulos interiores. Por lo tanto, se propone utilizar ciertos conceptos geométricos habituales de la Educación Primaria para proponer otro tipo de actividades no rutinarias y que fomentan los procesos matemáticos descritos en el Bloque 1 del currículo. Además, y en la línea de potenciar las conexiones entre áreas del NCTM, las actividades que se acaban de presentar plantean situaciones donde expresar la generalización que se llega a encontrar y requieren de, al menos, un Álgebra retórica, que puede constituir las bases para los estudios del Álgebra posteriores, y donde dicha herramienta se convierte en una necesidad real y no como en los típicos problemas que se presentan al inicio de la enseñanza del Álgebra donde los alumnos no ven la necesidad de utilizarla porque pueden “sacarlos de cabeza”.

GEOGEBRA PARA DISEÑAR ACTIVIDADES: DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL DOCENTE

Por último, y en la línea del conocimiento sobre la enseñanza de las Matemáticas de Carrillo-Yáñez et al. (2018), hemos planteado a los alumnos actividades en las que toman la posición de docentes y deben diseñar actividades con GeoGebra con una doble finalidad: profundizar en el conocimiento del programa, más alla de las herramientas para dibujar y construir, llegar a conseguir soltura en el uso del mismo y reflexionar sobre la práctica docente y su labor como futuros maestros. A continuación se presentan algunos ejemplos de actividades que los alumnos han diseñado y han subido a la pestaña de recursos de la página web de GeoGebra.

- https://www.geogebra.org/m/FhVy26YB
- https://www.geogebra.org/m/fMdqxgFd
- https://www.geogebra.org/m/VaDeXxAc

Además, ante este tipo de actividades, los alumnos descubren otra cara de GeoGebra, la que implica diseñar y crear en el ámbito profesional, que suele gustarles y que hace que se involucren más a fondo en la tarea que cuando únicamente resuelven problemas del ámbito geométrico.

OTRAS APLICACIONES

Para finalizar, queremos mencionar otras funcionalidades de GeoGebra, algunas de las cuales también pueden tener su utilidad en la formación de maestros y en la enseñanza de las Matemáticas de la Educación Primaria. Una novedad reciente es la aplicación de Realidad Aumentada de GeoGebra, aunque actualmente sólo está disponible para iOS. En ella se pueden ver objetos en 3 dimensiones desde diferentes perspectivas, aunque la forma de introducir las superficies, mediante ecuaciones, hacen que esta aplicación esté más orientada hacia la Educación Secundaria. Lo mismo ocurre con las vistas de Cálculo Simbólico (CAS), la Hoja de Cálculo y la Calculadora de probabilidad, en las que los contenidos que se pueden tratar dejan de ser meramente geométricos y se escapan del ámbito de la Educación Primaria en su mayoría. Sin embargo, sí nos gustaría destacar la vista Gráficas 3D. Aunque su manejo ya no es tan intuitivo como puede ser el de la vista gráfica en dos dimensiones, debido a que se trata de una representación en dos dimensiones del espacio y, por tanto, creemos que sería más complicado plantear actividades de construcción a los alumnos de Educación Primaria, es una vista muy útil para proyectar en la pizarra, pues facilita la visualización de aspectos o propiedades de los cuerpos geométricos frente al uso de materiales manipulativos. Un ejemplo se presenta en el siguiente applet:

https://www.geogebra.org/m/v3XhNYdP#material/JguE3v4y.

Por todo lo expuesto en este trabajo, creemos que la utilización del GeoGebra en la formación de maestros y en la etapa de Educación Primaria es totalmente adecuada, y esperamos que los ejemplos que hemos mostrado hayan servido para inspirar a los lectores e incentivar el uso de GeoGebra en los colegios.

Referencias.

Arce, M., Conejo, L., Pecharromán, C. y Ortega, T. (2015). Propuesta metodológica para el aprendizaje de conceptos y relaciones geométricas: GeoGebra, debates en el aula y escritura reflexiva. En FESPM (Ed.), *Actas de las 17 JAEM* (p. 29). Cartagena, Murcia: SEMRM. Disponible en: http://17jaem.semrm.com/aportaciones/n127.pdf

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., …, y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education.*doi: 10.1080/14794802.2018.1479981

Consejería de Educación de Castilla y León (2016). DECRETO 26/2016, de 21 de julio, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León.*Boletín Oficial de Castilla y León 142, del 25 de julio de 2016* (pp. 34184-34746). Valladolid: Junta de Castilla y León.

Drijvers, P. (2013). Digital technology in mathematics education: why it works (or doesn't). *PNA, 8*(1), 1-20.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference of the PME, 1,* 3-19. Valencia: IGPME.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática* (Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas Thales, trad.). Granada: Servicio de publicaciones de la S.A.E.M. Thales. (Obra original publicadaen 2000).

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Van Hiele, P.M. (1957*). El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría)* (Tesis doctoral) (Ángel Gutiérrez y otros, trad.). Universidad de Utrecht, Utrecht, Países Bajos.

Villiers, M. de (1996). Why proof in dynamic geometry. En M. de Villiers (Ed.), *Proofs and proving: why, when and how* (pp. 23-42). Sudáfrica: AMESA.

Para hacer referencia al artículo:

Conejo, L. y Arce, M., (2018). GeoGebra como herramienta didáctica en la formación profesional de maestros de Educación Primaria. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 71-80). Lugar: Universidad de León

REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL, PRIMARIA Y SECUNDARIA

Mª Consuelo Monterrubio Pérez

IES María de Molina de Zamora, Facultad de Educación Universidad de Salamanca

Resumen

Merece la pena reflexionar sobre los diferentes ámbitos presentes en la enseñanza de las Matemáticas a lo largo de todo el proceso educativo incluyendo la Educación Infantil, Primaria y Secundaria. Nos movemos en dos mundos diferentes: el ideal y el real. El mundo ideal en la enseñanza es aquel en el que los alumnos tienen interés por la asignatura, por aprender, no sólo por aprobar, y esto último, dando gracias que quieran aprobar. El mundo real lo conocemos todos. Vamos a reflexionar desde la experiencia real, no desde aspectos teóricos que no se sostienen en la vida diaria de las aulas.

Palabras clave: *Infantil, Primaria, Secundaria, contenidos, metodología.*

INTRODUCCIÓN

Delors (1996, 95-96) presenta "*los cuatro aprendizajes fundamentales, que en el transcurso de la vida serán para cada persona, en cierto sentido, los pilares del conocimiento: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser*".

Y pensando en estos cuatro pilares es como creo que se debe desarrollar nuestra profesión.

Es importante tener en cuenta no solo la enseñanza formal, la que se desarrolla en las aulas, bajo una normativa legal concreta y en la que, lógicamente, nos centraremos en este caso. Además, es preciso considerar la enseñanza no formal, la que se lleva a cabo fuera del horario escolar, por ejemplo en forma de cursos optativos, y también la informal, que carece de planificación y utiliza distintos medios como la televisión, prensa escrita y, actualmente cada vez más, programas de ordenador e Internet. Todas ellas pueden ayudar a mejorar los resultados obtenidos con la enseñanza formal.

Y el ingrediente fundamental en este recorrido que vamos a realizar: la ilusión. Es la ilusión por el trabajo bien hecho, por tratar de dar lo mejor de uno mismo y de conseguir que nuestros alumnos también quieran dar lo mejor de sí mismos. Esto es algo que se transmite, es recíproco entre profesores y alumnos. La ilusión no nos permite borrar de golpe las dificultades, no es algo que nos garantice buenos resultados pero, desde luego, nos asegura los mejores resultados posibles.

Vamos a prestar atención a la normativa legal con carácter general, para centrarnos, posteriormente, en los aspectos relativos a los contenidos, la metodología, haciendo mención en particular del uso de diferentes materiales y recursos didácticos e informáticos, y la evaluación.

LA NORMATIVA LEGAL

En primer lugar, vamos a prestar atención al sistema educativo, a la normativa legal que, evidentemente, no podemos dejar de lado y que, por ejemplo, convierte a la Educación Secundaria Obligatoria en un sistema perverso para los buenos alumnos. Es difícil, cuando se trata de alumnos con estas edades, inculcarles la importancia del esfuerzo y de los hábitos de trabajo. El hecho de poder titular con dos asignaturas suspensas hace que incluso los buenos alumnos pierdan el interés por aprender. De esta forma, en muchas ocasiones nos encontramos con alumnos en 1º de Bachillerato de Ciencias que en tercero y cuarto de la ESO decidieron cursar Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Aplicadas y que, además, pueden haberlas suspendido.

Es preciso que los alumnos estén bien asesorados. Está muy bien no cerrar puertas y dar a los alumnos la oportunidad de llegar al mismo sitio por diferentes caminos, pero es necesario que los alumnos conozcan lo que pueden encontrarse cuando llegan a un cruce en dicho camino. No es lo mismo la opción de Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas que la opción orientada a las Enseñanzas Aplicadas y los alumnos pueden cursar cualquiera de las opciones en la ESO y acceder después a cualquier modalidad de Bachillerato. Sin embargo, este hecho, que les permitirá hacer la ESO de forma bastante cómoda si, además, lo acompañan de ciertas asignaturas optativas en lugar de otras, puede pasarle factura y, de hecho, la realidad indica que, efectivamente, les pasa factura cuando acceden a Bachillerato.

Algo similar ocurre con el programa de mejora del aprendizaje y del rendimiento (PMAR) que permite a los alumnos cursar segundo y tercero de la ESO con un currículo diferente y, después, pueden cursar cuarto por la vía ordinaria, encontrándose, en muchas ocasiones, con grandes dificultades para poder obtener el título de ESO.

En particular, en los siguientes apartados analizaremos determinados aspectos que son tratados en la normativa legal correspondiente a los currículos de las diferentes etapas: Decreto 122/2007 para Educación Infantil, Decreto 26/2016 para Educación Primaria y la Orden EDU 362/2015 para Educación Secundaria.

CONTENIDOS

Si bien es cierto que hay que cumplir la normativa legal con respecto al currículo, no es menos cierto que se trata, o debería tratarse, de una guía y que no debemos dejar que nos condicione de forma absoluta.

En Educación Infantil, centrándonos en los contenidos que hacen referencias a las Matemáticas, podemos prestar atención, por ejemplo, al siguiente: "*Utilización de la serie numérica para contar elementos de la realidad y expresión gráfica de cantidades pequeñas*".

Basándonos en esta propuesta, generalmente en el aula se trabajan los números del 1 al 9. Y entonces, surge aquí la necesidad de dejar que la vida real entre en el aula. ¿Qué ocurre si un alumno vive en el piso número once? ¿Y si ven en un ascensor -1 o -2 para indicar la planta de garajes? ¿Y qué ocurre cuando van a comprar unos zapatos y oyen pedir el número 25, por ejemplo? Pues afortunadamente no pasa nada, para ellos es algo natural. El problema empieza cuando la intervención rompe la naturalidad y organiza situaciones, erróneamente denominadas de aprendizaje, pero que son tan artificiales que es difícil que después puedan ser contextualizadas por los alumnos en la vida real. Basta con hacerlo precisamente al contrario, tratando de llevar lo exterior, lo real, al aula. No es raro encontrar alumnos de Educación Infantil que se desenvuelven con cierta soltura en el kiosco y, sin embargo, presentan dificultades cuando se encuentran con situaciones similares dentro del aula.

El hecho, tan conocido, de que el currículo sea en espiral nos lleva en muchas ocasiones a tener la sensación de que estamos repitiendo muchas veces lo mismo a lo largo de toda la Educación Obligatoria y, lo que es peor, que a pesar de tantas repeticiones no se consigue que aprendan.

A continuación, dentro del apartado de Metodología, analizaremos de nuevo algunos contenidos.

De acuerdo con Rico (1997), dentro del trabajo con cualquier contenido del área de Matemáticas, debemos prestar atención a los siguientes aspectos: errores y dificultades, diversidad de representaciones utilizadas, fenomenología, variedad de materiales y recursos y la evolución histórica. En los siguientes apartados iremos prestando atención a estos aspectos.

LA METODOLOGÍA

Generalmente, se considera que el colectivo del profesorado tiene un carácter conservador, que nos cuesta realizar cambios metodológicos, pero lo cierto es que en muchas ocasiones hacemos cambios, introducimos en el aula una metodología por proyectos, juegos, etc., y lo que ocurre es que a los padres les cuesta mucho aceptarlos. ¿Somos conservadores los profesores o la sociedad está más cómoda con un profesorado conservador?

En Educación Infantil los alumnos pasan la mayor parte del tiempo con un mismo profesor, lo que permite al maestro conocer a todos sus alumnos y poderlos tratar de forma personalizada y a los alumnos saber cómo se debe desarrollar el proceso en el aula. Es preciso que aprovechemos las posibilidades que nos ofrece la Educación Infantil para trabajar de forma globalizada.

En Educación Primaria, aunque ya comienzan a tener diferentes profesores, todavía tienen un profesor que imparte varias asignaturas lo que permite una cierta flexibilidad en el horario, de modo que, por ejemplo, aunque el horario indique que hay clase de Lengua, si no se ha terminado una actividad de Matemáticas y se considera de interés, se termina en el horario de Lengua.

Llega la Educación Secundaria y los alumnos sienten que dan un salto en el vacío cuando pasan de 6º de Educación Primaria a 1º de Educación Secundaria. De pronto se encuentran con un profesor diferente para cada asignatura y con un tutor al que puede ocurrir que vean muy pocas horas a la semana. De hecho, incluso puede ocurrir que formen parte de una clase en la que su tutor no les imparte ninguna asignatura. Los distintos profesores pueden tener metodologías muy diferentes y, de pronto, se encuentran con que deben ser capaces de aprender con una decena de metodologías diferentes. En ocasiones deben coger apuntes, en otras, escuchar en silencio pero sin tomar notas (ya lo leerán después en el libro). Tienen que saber tomar apuntes pero nadie les ha enseñado. Es fácil observar que quieren seguir haciendo las cosas como en el colegio, eso es lo que les da seguridad. Por ejemplo, en el caso de las Matemáticas, es habitual encontrar el siguiente caso en primero de la ESO en el estudio de la divisibilidad:

Nos proponemos calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 12 y 15. Comencemos con el mínimo común múltiplo.

Primer procedimiento:

Múltiplos de 12: 12, 24, 36, 48, 60

Múltiplos de 15: 15, 30, 45, 60,

El menor múltiplo común a ambos es 60.

Segundo procedimiento:

Factorizamos los números en factores primos y tomamos los factores comunes y no comunes con el mayor exponente.

El primer procedimiento nos permite prestar atención a la definición del mínimo común múltiplo, al CONCEPTO, mientras que el segundo procedimiento nos facilitará el cálculo cuando se trate de cantidades para las que el primer procedimiento no resulta adecuado. Sin embargo, la intención inicial de los alumnos es utilizar el procedimiento que ya conocen, independientemente de los números que intervengan en el cálculo. Cuando trabajan con las factorizaciones, acaban conociendo la música pero les falla la letra, de modo que les suena que pueden ser los factores comunes, ¿o eran los no comunes?, ¿con mayor o menor exponente? Este es un caso claro en el que se pone de manifiesto que, si se entiende el concepto, no debería haber dudas en el procedimiento de cálculo, es suficiente con razonar sobre lo que se desea calcular.

Así pues, este es un ejemplo interesante para valorar la importancia de las definiciones. Pero después, en este intento de que comiencen a dar definiciones con cierto rigor, nos encontramos con el siguiente caso real:

Definición de número compuesto: “es aquel que tiene una perífrasis”.

Las Matemáticas juegan un papel formativo, funcional e instrumental. Está claro que presentan una dificultad intrínseca porque se trabaja con ideas de carácter abstracto. Por ello es fundamental partir de lo concreto para ir evolucionando hacia lo abstracto. Pero esto no nos puede llevar a que nuestros alumnos piensen que, en Matemáticas, hacemos magia y que las cosas se hacen porque, de repente, alguien decidió que se hacía así, sin motivo, sin criterio. Veamos con un par de ejemplos lo que quiero decir con la idea de hacer magia.

Si queremos calcular el área lateral y el área total de un prisma hexagonal regular podemos llevar al aula el prisma, mejor todavía si responde a alguna construcción real, no solo el modelo, por ejemplo algún recipiente, y les pedimos que midan los lados para después calcular el área del cada rectángulo que constituye la cara lateral y, finalmente, calcular el área lateral.

El procedimiento, que lo podrán ir haciendo los alumnos con la ayuda del profesor, será el siguiente:

Si tenemos las medidas b para la base del rectángulo y a para la altura del rectángulo:

Área del rectángulo: base · altura

Número de caras del prisma: 6

Área lateral: 6 · (base · altura) = (6 · base) · altura = perímetro de la base · altura.

Y podemos calcular el área total haciendo: Área lateral + 2 · área de la base.

El área de la base ya la saben calcular puesto que ya tienen los conocimientos acerca de las figuras planas. De esta forma van siguiendo un proceso que tiene sentido.

La otra posibilidad que tenemos es mostrarles, de forma magistral, lo siguiente:

Dibujamos en la pizarra el desarrollo plano del prisma hexagonal y exponemos:

El área lateral de un prisma recto coincide con el área del rectángulo de su desarrollo plano, es decir:

Área lateral = perímetro de la base · altura.

El área total será:

Área lateral + 2 · área de la base = perímetro de la base · altura + perímetro de la base · apotema = perímetro de la base · (altura + apotema)

Y realmente, bastará con que memoricen: $A_T = p \cdot (h + a_p)$ lo cual está muy bien si realmente entiende lo que subyace, pero no si carece de conexión con la realidad.

El segundo ejemplo al que hacíamos referencia es la resolución de ecuaciones de primer grado. No debemos dejar que nuestros alumnos piensen que los términos "cambian de signo al cambiar de lado" y "si está multiplicando pasa dividiendo". Es preciso que conozcan que los procedimientos no se hacen al azar, no son inventados, sino que tienen una razón, que existen las reglas de la suma y del producto y deben conocerlas.

También es importante que sean capaces de integrar los conocimientos nuevos con los conocimientos previos de los que ya disponen. Como profesores debemos estar atentos a los errores habituales que cometen nuestros alumnos, anticiparnos y tratar de eliminarlos desde el primer momento. No es raro encontrar alumnos que cometen el siguiente error:

Después de hacer una operación con varias sumas y/o restas con fracciones, cuando tienen denominador común en todas las fracciones, eliminan dicho denominador. Este error procede de la costumbre que tienen de eliminar denominadores cuando están resolviendo ecuaciones. Este ejemplo pone de manifiesto la importancia que tiene la integración de los conocimientos de forma que no entren en contradicción con las cosas que ya conocen, sino que les permitan avanzar hacia nuevos conocimientos.

Teniendo en cuenta los aspectos fenomenológicos, también es preciso adecuarnos al contexto. En Matemáticas existen varias formas de introducir los conceptos. En particular, podemos partir de la definición y, posteriormente, plantear ejemplos, o bien, partiendo de un ejemplo, podemos construir la definición. De esta forma se estaría viendo directamente la utilidad del concepto con el que vamos a trabajar. Esto, que parece tan sencillo, requiere un trabajo cuidadoso. Es preciso explicar lo que estamos haciendo. Los alumnos deben saber que vamos a partir de un ejemplo para llegar a algo más, que tenemos un objetivo concreto e importante más allá del ejemplo. Esta situación se refleja muy bien en el siguiente diálogo con una niña de 7 años:

> M: ¿Qué es dividir?
>
> C: A ver, tengo 6 caramelos y los vamos a repartir entre tú y yo. ¿Cuántos nos tocan a cada una?
>
> M: Ay, quédatelos todos, si sabes que a mí no me gustan los caramelos. ¿Qué es dividir?

Entonces comprendí que lo había hecho fatal. Ante la pregunta acerca de la división, yo tenía claro que no debía darle la definición formal. Yo debía partir de un ejemplo. Pero esta situación me hizo reflexionar mucho sobre mi trabajo en el aula. Bastaría con haber dicho "Vamos a verlo con un ejemplo". De este modo, ella sabría que ya le estaba respondiendo a su pregunta, atendiendo a su inquietud. Por otra parte, es bien sabido que es positivo trabajar contextualizando las situaciones, pero es importante que el contexto de trabajo sea cercano y de interés para el alumno.

También es preciso prestar atención al trabajo en equipo en todas las etapas. Este trabajo en equipo debe ser entendido en dos sentidos, por parte de los alumnos y por parte de los profesores.

El trabajo colaborativo por parte de los alumnos favorece el aprendizaje. Por ejemplo, una metodología tipo puzle: organizamos la clase en grupos en función del número de alumnos. Por ejemplo, si son 16 alumnos organizamos cuatro grupos de cuatro alumnos cada grupo. A continuación, numeramos a los miembros de cada grupo con los números 1, 2, 3 y 4 y formamos cuatro nuevos grupos con todos los alumnos numerados por un lado con 1, por otro con 2 y lo mismo con 3 y 4. Estos nuevos grupos son los denominados grupos de expertos, que trabajarán en un tema concreto hasta convertirse en expertos en dicho tema. Posteriormente, cada alumno vuelve a su grupo inicial y debe explicar al resto de los miembros del grupo el contenido trabajado en su grupo de expertos. Esta metodología en la que un alumno es responsable del aprendizaje de los miembros de su grupo hace que todos los alumnos presten atención y quieran aprender porque si cuando llegan a su grupo no saben explicar el contenido a sus compañeros se van a sentir mal. En esta metodología de trabajo el profesor interviene, como guía, en los grupos de expertos, solo si se requiere su presencia, pero, en principio, el material debe estar diseñado para que los propios alumnos puedan avanzar en su trabajo. Si el número de alumnos es diferente buscaremos otras disposiciones. Por ejemplo, si son 18 alumnos, haremos dos grupos de 9 y formaremos, en cada grupo de nueve, tres grupos de tres alumnos cada grupo. Si es preciso, algún grupo estará formado con un alumno más, de forma que dos alumnos se moverán juntos al grupo de expertos y de nuevo juntos al grupo inicial.

Además del trabajo cooperativo de los alumnos, también es fundamental este tipo de trabajo en los profesores. En Educación Secundaria, el trabajo en equipo por parte del profesorado de un mismo departamento, por ejemplo, dentro del departamento de Matemáticas, permite a los profesores la elaboración de materiales y actividades de forma conjunta o el análisis de libros de texto para poder elegir aquel que más se adecúe para la práctica docente en el contexto en el que esté situado el centro. El trabajo en equipo con profesores de otros departamentos nos permite plantear actividades de carácter interdisciplinar, que ayuden a los alumnos a entender que las materias no se encuentran de forma aislada en la vida real. No es raro encontrar alumnos que resuelven bien algunos ejercicios de Matemáticas concretos y, sin embargo, cuando deben utilizar esos conocimientos en otras asignaturas, como puede ser Física, encuentran dificultades para aplicarlos.

La legislación propone, en sus principios metodológicos, el uso de una metodología que consiste en el trabajo por proyectos en todas las etapas: Educación Infantil, Primaria y Secundaria. Sin duda esta forma de trabajar, donde se incluyen varias asignaturas, es una oportunidad para que los alumnos comprueben que en la realidad los contenidos no están tan separados como aparecen en la enseñanza y, sobre todo, para que se den cuenta de la utilidad que tiene los conocimientos que van estudiando en las diferentes asignaturas. Si este aprendizaje por proyectos lo concretamos en un aprendizaje-servicio, los alumnos conseguirán implicarse más. Además, podemos tener en cuenta el uso de otras metodologías, como la clase inversa. Todo dependerá del tipo de alumnos con el que contemos en el aula. Así, pues, lo principal es siempre trabajar en función de los alumnos para tratar de atender sus necesidades.

USO DE MATERIALES Y RECURSOS DIDÁCTICOS

El uso de materiales debe estar previsto y preparado de antemano, con unos objetivos claros. En ningún caso se debe utilizar para entretener a los alumnos en los últimos días del trimestre o cuando tenemos pocos alumnos en clase porque el resto están en alguna actividad extraescolar y es preciso que estén entretenidos. Se han acostumbrado a estar en el aula en una disposición muy concreta de forma que, cualquier situación que no sea esta, les hace pensar que no forma parte de las actividades ordinarias y para ellos significa "Hoy no hacemos nada". De esta forma habremos perdido toda posibilidad de aprovechar este tipo de recursos porque el día que queramos trabajar algo de este tipo, será poco o nulo el rendimiento obtenido a partir de la actividad.

También podemos considerar el uso de la Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el aula. No hay investigaciones que muestren resultados concluyentes que pongan de manifiesto que el uso de las TIC mejora los resultados académicos. Es posible que mejoren aspectos como la motivación, que influye en la atención y contribuyen a favorecer el aprendizaje. El uso de la TIC en el aula puede hacerse en dos formas diferentes: como contenido y como metodología. Como contenido se trata de conseguir la alfabetización digital de los alumnos. Para su uso como recurso metodológico es preciso tener en cuenta, en primer lugar, si merece la pena el tiempo que deben emplear para aprender a utilizarlo frente a los resultados que vamos a conseguir. Además, no se trata solo de facilitar el acceso al aprendizaje sino de procurar que el uso de las TIC les ayude a construir el pensamiento matemático, a razonar.

Podemos prestar atención también al uso de la calculadora. Si estamos trabajando la multiplicación, en principio pensaremos que la calculadora no nos ayuda. Pues bien, depende del planteamiento que hagamos. Si queremos trabajar el concepto de multiplicación podemos plantear a nuestros alumnos: vamos a hacer la operación 8 x 5 con la calculadora, pero, se nos ha estropeado la tecla de la multiplicación. ¿Qué podemos hacer?

Ahora bien, si queremos introducir en el aula metodologías innovadoras, estar al día en las diferentes novedades que van surgiendo respecto a materiales y recursos didácticos e informáticos, sin duda es necesaria la formación permanente del profesorado. Dicha formación debe estar organizada de manera que sea accesible para el profesorado, que no suponga enormes dificultades de desplazamiento a los lugares de realización de la formación, etc. No se puede esperar que todo funcione por la buena voluntad del profesorado.

LA EVALUACIÓN

No podemos dejar de lado el sistema de evaluación. Recordemos el efecto Pigmalion o efecto Rosenthal que se puso de manifiesto en el estudio realizado en un aula de Primaria donde pasaron unos tests a un grupo de alumnos, eligieron a varios de ellos e indicaron a los profesores, aunque no era cierto, que habían obtenido resultados que correspondían a alumnos superdotados. Lo cierto es que su rendimiento fue muy bueno. Entre las causas apuntadas se encuentra el hecho de que, al esperarse un buen rendimiento, se pone más interés en que los alumnos trabajen, se hace un seguimiento más continuado, se crea un clima de trabajo positivo, de forma que todo ayuda a favorecer y mejorar el rendimiento de los alumnos. Pues bien, posiblemente lo que debemos hacer es tener en cuenta el efecto Pigmalión o efecto Rosenthal y, considerando que los resultados de los alumnos pueden depender de las expectativas fijadas por los profesores, el objetivo es tratar de establecer unas expectativas altas para todos los alumnos, siempre, evidentemente, en la medida de sus posibilidades. Debemos ser realistas.

Es muy importante que todo lo que trabajemos en el aula forme parte de la evaluación, porque si no corremos el riesgo de que los alumnos pregunten habitualmente si eso entra en el examen. Sin duda, lo ideal sería que todo les interesara, pero la realidad nos dice que no es así. Esto nos lleva a integrar de manera cuidadosa cualquier metodología que queramos implementar con el sistema de evaluación.

CONCLUSIONES

Cualquier persona se siente bien cuando es capaz de superar un reto. En nosotros está buscar el reto adecuado para que los alumnos sean capaces de superarlo, poniendo el máximo esfuerzo posible, pero de forma que puedan conseguirlo. Evidentemente, esto es un trabajo añadido. Tenemos que preocuparnos de conocer a nuestros alumnos y de plantearle a cada uno el reto adecuado de forma que todos puedan desarrollar al máximo sus capacidades.

Hablábamos antes de la importancia del trabajo en equipo por parte de los profesores y hay que señalar la importancia de conocer el trabajo de otros compañeros porque eso nos permite aprender. Un lugar como este es un buen sitio para poder compartir experiencias, ilusiones, en definitiva, para aprender y conseguir energías renovadas para continuar con esta profesión tan cambiante a pesar de que parezca tan conservadora.

Casi todos nuestros alumnos quieren aprobar, cierto es que algunos ni siquiera eso. Pero nuestro objetivo es conseguir, además de esa motivación extrínseca, una motivación intrínseca, que quieran aprender Matemáticas, que sean conscientes de que merece la pena por el hecho mismo de aprender, incluso, que consigan disfrutar mientras aprenden. Para ello, podemos tener en cuenta alguna de las metodologías comentadas aquí, alguno de los recursos propuestos y, sobre todo, tener presente que, como decía Nelson Mandela "*La educación es el arma más poderosa que puedes usar para cambiar el mundo*"

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DELORS, J. (1996). *La educación encierra un tesoro*. Madrid: Santillana. Ediciones UNESCO.

RICO, L. (1997): Los Organizadores del Currículo de Matemáticas. En Rico, L. (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, pp. 39–59. Barcelona: ICE Universidad de Barcelona – Horsori.

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN (2008): Decreto 122/2007 de 27 de diciembre por el que se establece el currículo del segundo ciclo de la Educación Infantil en la Comunidad de Castilla y León. BOCyL de 16 de enero. BOCyL de 2 de enero de 2008.

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN (2015): ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. BOCyL de 8 de mayo de 2015.

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN (2016): Decreto 26/2016de 21 de julio, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León. BOCyL de 25 de julio de 2016.

Para hacer referencia al artículo:

Monterrubio, M.C. (2018). Reflexiones sobre la enseñanza de las Matemáticas en educación infantil, primaria y secundaria. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”. (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 81-89). Lugar: Universidad de León

LA PAPIROFLEXIA, UNA HERRAMIENTA LÚDICA PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS[7]

Philippe T. Giménez

Instituto de Investigación en Matemáticas de la Universidad de Valladolid (IMUVA)

Resumen

Fabricar Matemáticas con las manos permite acercar a los estudiantes a conceptos y resultados abstractos. En esta ponencia se pretende presentar distintas construcciones geométricas que se pueden realizar simplemente doblando una hoja de papel. Ilustraremos de esta manera el uso de la papiroflexia como herramienta didáctica en el aprendizaje de las Matemáticas. Desde el teorema de Pitágoras hasta los problemas de la Geometría griega de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo, pasando por las propiedades elementales del triángulo, veremos cómo la papiroflexia permite abordar y visualizar problemas y resultados geométricos de manera lúdica.

Palabras clave: papiroflexia, origami, Geometría plana, triangulo, trisección del ángulo.

LAS REGLAS DEL JUEGO

Para nosotros, un pliegue será una recta. De hecho doblar una hoja de papel y pasar un bolígrafo por el interior del pliegue es una forma de pintar una recta que puede resultar más sencilla que la utilización de una regla para un niño de temprana edad.

Las **rectas** a las que nos referiremos aquí serán por una parte los lados de nuestra hoja de papel y por otra los pliegues que vayamos realizando. Los **puntos** serán las esquinas de nuestra hoja, las intersecciones de las rectas (lados de la hoja o pliegues) previamente obtenidas o simplemente puntos que marcaremos en nuestra hoja.

Para describir con precisión las construcciones geométricas que podemos realizar usando la papiroflexia, tendremos que decir exactamente cuáles son los pliegues que podremos utilizar.

Los dos primeros pliegues.

Empezaremos con los dos pliegues más naturales. Si elegimos dos puntos en un folio de papel, podemos realizar el doblez que contenga a nuestros dos puntos, visualizando de esta manera la única recta que pasa por los dos puntos. Y si llevamos un punto sobre el otro, obtenemos una segunda recta, perpendicular a la anterior: la mediatriz del segmento que une nuestros dos puntos. Los dos pliegues, que denotaremos por (**O1**) y (**O2**), se

[7] El autor de la ponencia es miembro del Proyecto de Innovación Docente "Dinamización de la comunidad matemática en el ámbito de la UVA" financiado por la Universidad de Valladolid desde el curso 2013-14. Su investigación está parcialmente financiada por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades MTM2016-78881-P y la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León VA128G18.

muestran en la Figura 1.Observamos que al realizar ambos pliegues en una misma hoja construimos, como intersección ambos, el punto medio de los dos puntos iniciales.

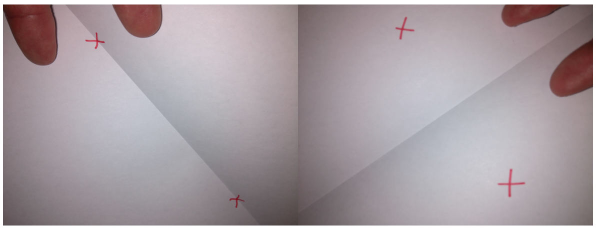


Figura 2. Los dos primeros pliegues, (**O1**) y (**O2**)

Utilizando estos dos pliegues, ya podemos realizar varias construcciones en un triángulo y *ver* como se cumplen algunos resultados elementales.

EL TRIÁNGULO, ESTE OBJETO GEOMÉTRICO SENCILLO Y CON MUCHA MÁGIA

El circuncentro.

Si consideramos uno de los lados del triángulo, construimos su mediatriz juntando sus dos vértices mediante el pliegue (**O2**) tal como lo muestra la Figura 2.

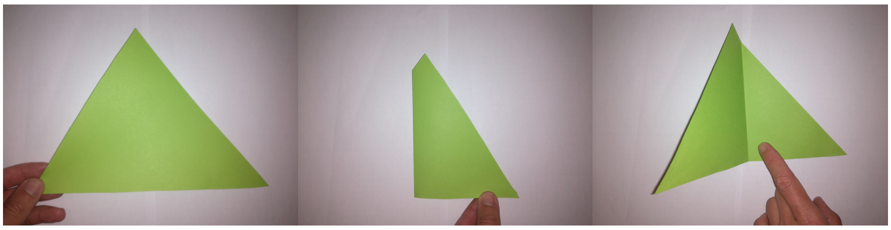


Figura 2. Construcción de la mediatriz de un lado del triángulo

Si, en una misma hoja triangular, realizamos esta construcción para cada uno de los lados del triángulo, tal como lo vemos en la Figura 3, podemos *ver* que se cumple el siguiente resultado: **las tres mediatrices de un triángulo se cortan**. El punto de intersección de las tres mediatrices es el **circuncentro** del triángulo.

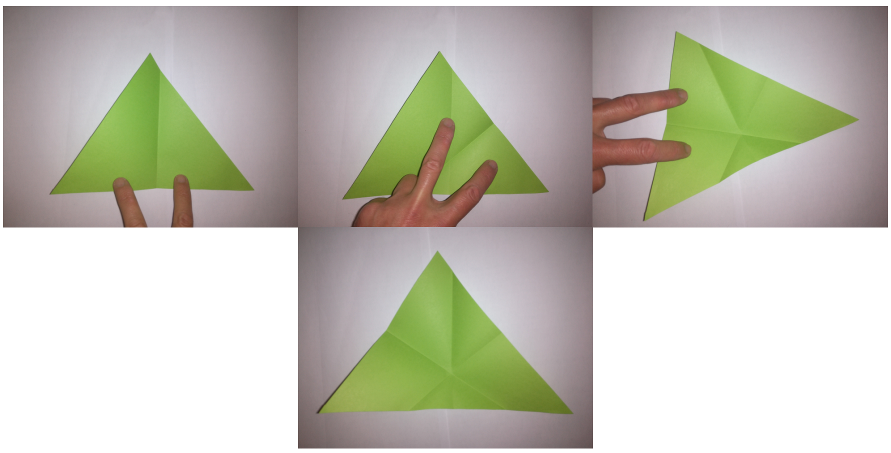


Figura 3. Las 3 mediatrices y el circuncentro de un triángulo

El baricentro.

En una nueva hoja triangular, construimos ahora el punto medio de uno de los lados usando el pliegue (**O2**) y lo unimos, usando ahora el pliegue (**O1**), al tercer vértice. Construimos de esta manera la mediana de ese lado tal como lo vemos en la Figura 4.

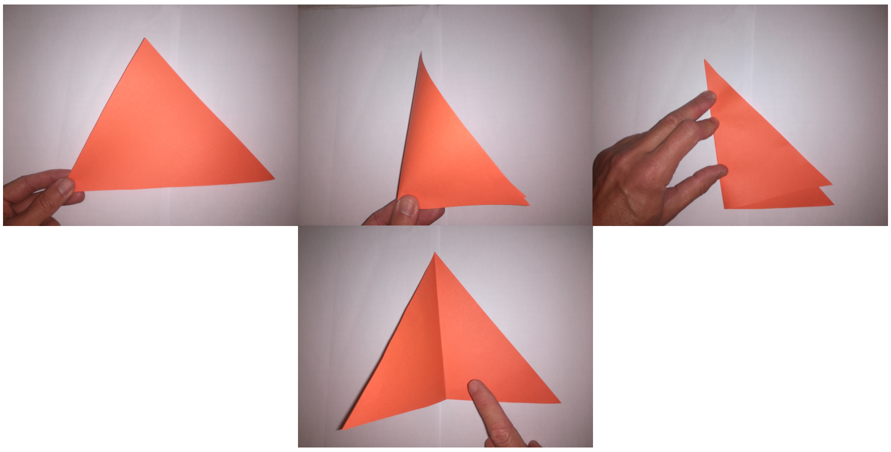


Figura 4. Construcción de la mediana de un lado del triángulo

Como antes, realizando esta construcción para cada uno de los lados del triángulo en una misma hoja triangular, podemos *ver* que **las tres medianas de un triángulo también se cortan** (Figura 5). El punto de intersección de las tres medianas es el **baricentro** del triángulo.

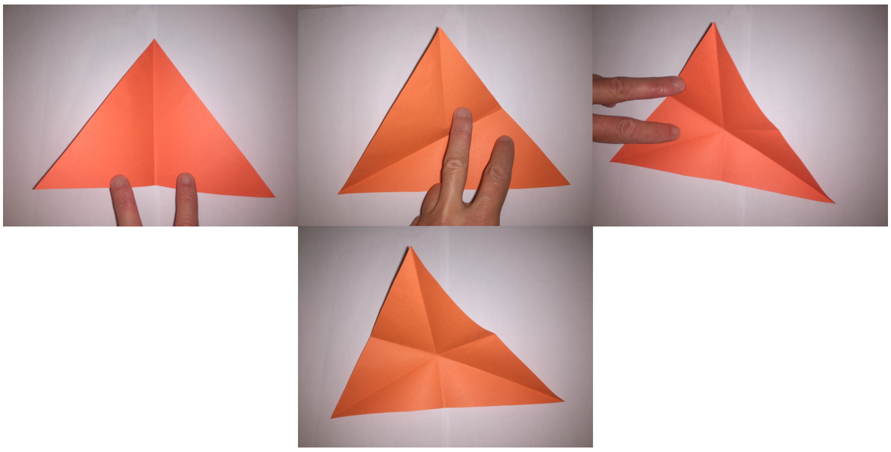


Figura 5. Las 3 medianas y el baricentro de un triángulo

Un tercer pliegue.

Para obtener más construcciones, introducimos un tercer pliegue que permite construir más rectas perpendiculares: dada una recta (pliegue o borde de la hoja) y un punto (que puede estar sobre la recta anterior o no), obtenemos la perpendicular a la recta que pasa por el punto mediante el doblez que pasa por el punto y al mismo tiempo pega la recta sobre sí misma. Siguiendo la numeración internacional, este pliegue se denotará por (**O4**). El pliegue (**O3**) aparecerá más adelante.

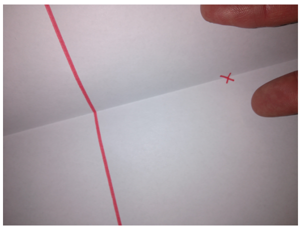


Figura 6. El tercer pliegue, (**O4**)

El ortocentro.

Empezando de nuevo con una hoja triangular, elegimos un lado de la hoja y realizamos el pliegue (**O4**) para esta recta, tomando como punto el tercer vértice del triángulo. Construimos de esta manera una de las alturas del triángulo como muestra la Figura 7.

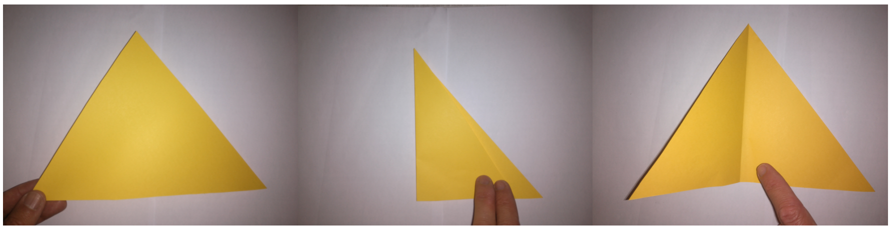


Figura7. Construcción de una de las alturas del triángulo

De nuevo, realizando sobre una misma hoja de papel triangular la construcción anterior para cada uno de los lados, construimos las tres alturas de un mismo triángulo. Y, de nuevo, *vemos* que **las tres alturas de un triángulo se cortan**. El punto de intersección de las tres alturas es el **ortocentro** del triángulo.

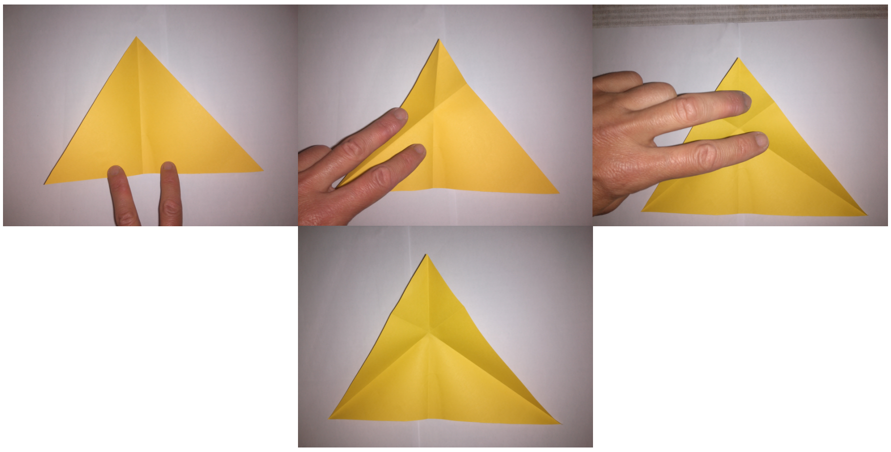


Figura 8. Las 3 alturas y el ortocentro de un triángulo

La recta de Euler.

Podemos ahora construir en una misma hoja triangular el circuncentro, el baricentro y el ortocentro. Para no cargar la construcción, basta en cada caso con construir dos de las tres rectas implicadas para obtener la intersección. Cuando tenemos los tres puntos construidos, podemos usar el pliegue (**O1**) para obtener la recta que pasa por los dos primeros puntos, y observamos que el tercer punto también está situado en el pliegue tal como se muestra en la Figura 9. Esto permite de nuevo *visualizar* un importante resultado: **el circuncentro, el baricentro y el ortocentro están alineados**. La recta que los contiene se llama **la recta de Euler**.

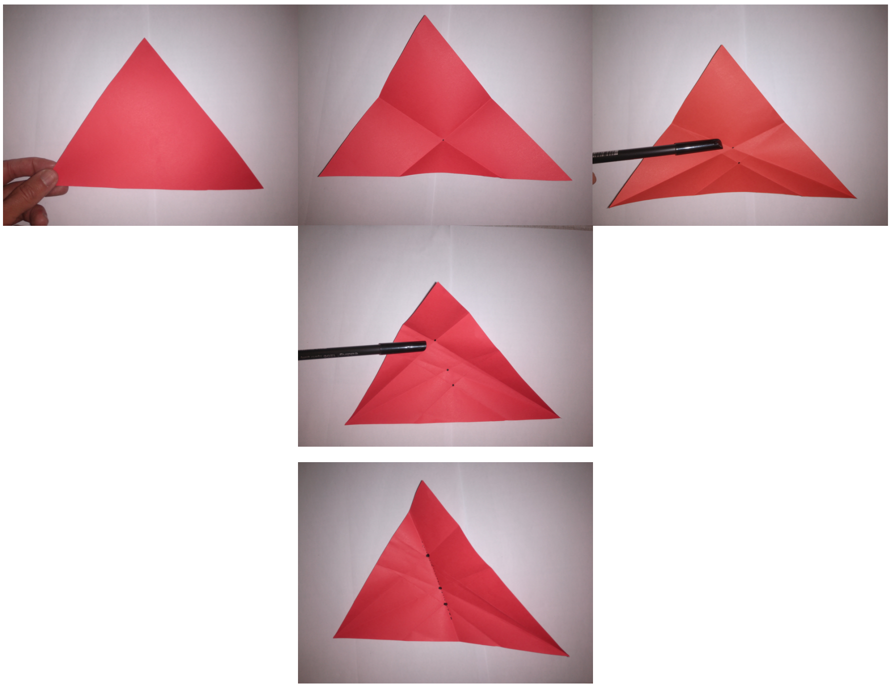


Figura 9. El circuncentro, el baricentro, el ortocentro y la recta de Euler

El teorema de Pitágoras.

Empezando ahora con una hoja cuadrada, proponemos visualizar el teorema de Pitágoras de la siguiente manera. Marcamos un punto en el lateral de la hoja, preferiblemente bastante más cerca de una de las esquinas que de la otra. Utilizando ahora un compás, vamos a realizar exactamente la misma marca en los otros tres lados del cuadrado tal como se muestra en la segunda foto de la Figura 10. Observamos que usamos un compás por comodidad ya que, usando las simetrías del cuadrado (y pensando un poco), podríamos obtener los puntos simplemente doblando nuestra hoja. Cuando tengamos nuestros cuatro puntos marcados en los laterales de la hoja, vamos a realizar el pliegue (**O1**) para unir uno de ellos con el siguiente. Y hacemos esto cuatro veces, girando nuestra hoja para obtener la construcción que se muestra en la última foto de la Figura 10.

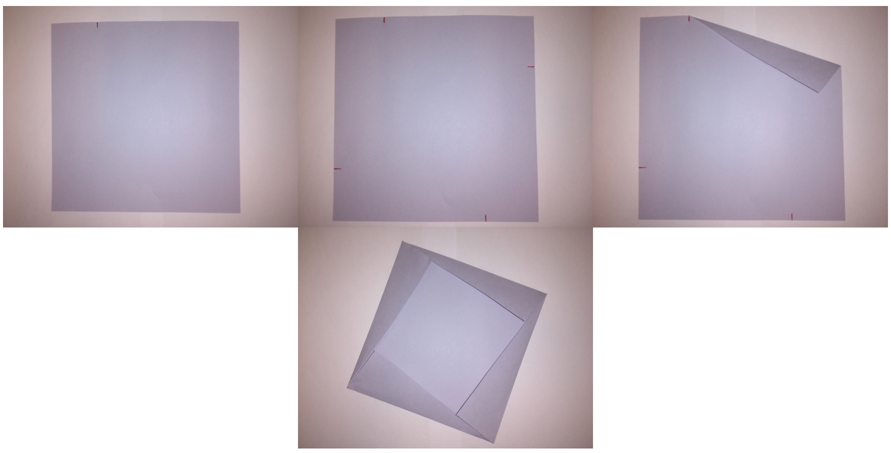


Figura 10. Visualización del teorema de Pitágoras

Al acabar la construcción, *vemos* que hemos creado, de esta manera, dos nuevos cuadrados: uno exterior formado por los cuatro pliegues que acabamos de realizar, pero también uno más pequeño en el interior. La creación de este pequeño cuadrado es una *visualización* del teorema de Pitágoras tal como explicamos a continuación.

La diferencia entre estos dos cuadrados son los cuatro triángulos rectángulos idénticos que hemos formado con los pliegues. Denotaremos por **a**, **b** y **c** las longitudes de los lados de este triángulo rectángulo con **a<b<c** (siendo **c** por tanto la longitud de la hipotenusa). Vemos que el lado del pequeño cuadrado interior es (**b-a**) por lo que su área es $\mathbf{(b-a)^2}$. Por otra parte, uniendo dos de los cuatro triángulos rectángulos (idénticos) que hemos construido, obtenemos un rectángulo cuyos lados miden **a** y **b** y cuya área es por tanto **ab**. Al sumar el área del cuadrado pequeño con las áreas de los cuatros triángulos rectángulos obtenemos por tanto $\mathbf{(b-a)^2+2ab}$ que es igual, si desarrollamos, a $\mathbf{a^2+b^2}$. Pero esto es exactamente el área del cuadrado exterior y cuyo lado mide **c** por lo que tenemos que $\mathbf{a^2+b^2=c^2}$.

REGLA Y COMPÁS VERSUS PAPIROFLEXIA

Observamos que todas las construcciones geométricas realizadas hasta ahora pueden realizarse con regla y compás (o con GeoGebra para emular la regla y el compás). Veremos ahora que esto no es ninguna casualidad.

Tres pliegues más.

Para ampliar el número de construcciones geométricas que podemos realizar con papiroflexia vamos a introducir otros tres pliegues que, junto con los tres pliegues ya introducidos hasta ahora, forman los seis primeros axiomas de Huzita-Hatori. Estos tres pliegues se muestran en la Figura 11 y pasamos a describirlos. Dadas dos rectas (pliegues y/o bordes de la hoja), el **primero**, (**O3**), consiste en llevar una recta sobre la otra. Observamos que este pliegue es la bisectriz del ángulo formado por las dos rectas si éstas son secantes. Si las dos rectas elegidas son paralelas, este pliegue construye una tercera recta paralela que se sitúa a igual distancia de las dos rectas. Los otros dos consisten en un doblez que lleva un punto sobre una recta cumpliendo con una condición adicional. Para el **segundo**, (**O5**), pedimos además que el pliegue pase por otro punto dado. Para el **tercero**, (**O7**), pedimos que el pliegue pegue otra recta dada sobre sí misma (es decir que el pliegue sea perpendicular a esta segunda recta).

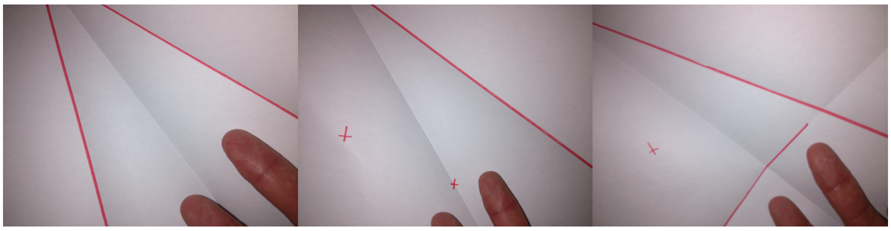


Figura 11. Tres pliegues más, (**O3**), (**O5**) y (**O7**)

Observamos que los seis pliegues introducidos hasta ahora en las Figuras 1, 6 y 11 son redundantes por lo que podríamos usar menos pliegues. Por ejemplo, se puede comprobar fácilmente que (**O7**) se puede obtener a partir de los pliegues (**O2**) y (**O4**). Se usan los seis por comodidad y así minimizar el número de pliegues necesarios para realizar una construcción geométrica dada.

La relación precisa entre la papiroflexia, usando los seis pliegues anteriores, y la regla y el compás es la siguiente: empezando con dos puntos marcados en una hoja de papel, el conjunto de los puntos que podemos obtener como intersección de pliegues si usamos la papiroflexia y de rectas y circunferencias si usamos la regla y el compás, son idénticos. Dicho de otra forma, **la papiroflexia que usa los seis pliegues anteriores es una herramienta equivalente a la regla y el compás para la realización de construcciones geométricas** (empezando con dos puntos).

Sin embargo la herramienta que proporciona la papiroflexia es más potente que la regla y el compás gracias el séptimo axioma de Huzita-Haroti que introducimos a continuación.

El séptimo pliegue.

Los axiomas de Huzita-Hatori, también llamados de Huzita-Justin, se completan con un séptimo pliegue, (**O6**), que consiste, dadas dos rectas y dos puntos, en llevar uno de los puntos sobre una de las rectas y, simultáneamente, el otro punto sobre la otra recta.

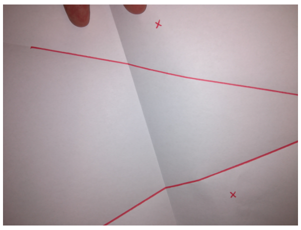


Figura 12. El séptimo axioma de Huzita-Hatori, (**O6**)

Los siete axiomas de Huzita-Hatori, que son las reglas clásicamente admitidas como válidas para hacer Matemáticas con papiroflexia, hacen por tanto de la papiroflexia una herramienta más potente que la regla y el compás: este séptimo pliegue nos permitirá realizar construcciones geométricas que no se pueden obtener con regla y compás tal cómo ilustramos a continuación.

La trisección del ángulo.

Es muy conocido que ninguno de los tres problemas de la geometría clásica griega, la **trisección del ángulo**, la **duplicación del cubo** y la **cuadratura del círculo**, pueden realizarse con regla y compás. El último de estos tres problemas tampoco se puede resolver con papiroflexia (todo el mundo se creerá fácilmente que no podremos *hacer aparecer* el número π simplemente doblando una hoja de papel). Pero los otros dos sí pueden realizarse de manera sencilla usando la papiroflexia, y más precisamente los siete axiomas de Huzita-Hatori. Nos centramos aquí en el problema de la trisección del ángulo y pasamos a explicar la construcción que se encuentra, junto a muchas otras actividades interesantísimas, en el libro [Hull, T. (2013)].

En un folio rectangular, empezamos partiendo uno de los ángulos rectos, concretamente el que se encuentra abajo a la izquierda, uniendo esta esquina con un punto que elegimos en el borde superior de la hoja y usando el pliegue (**O1**). Nos proponemos partir el ángulo situado entre este pliegue y el borde inferior de la hoja en tres partes absolutamente idénticas. Vamos a marcar este ángulo, y también el pliegue oblicuo que lo delimita, para no perderlos de vista.

Figura 13a. La trisección del ángulo: preparación

Empezamos eligiendo un punto arbitrario en el lateral izquierdo de la hoja y construimos la recta paralela al lateral inferior de nuestra hoja y que pasa por este punto usando el pliegue (**O4**). Continuamos construyendo la paralela al último pliegue y que está exactamente a igual distancia del pliegue y del lateral inferior de la hoja usando el pliegue (**O3**). Terminamos aplicando el pliegue (**O6**): vamos a llevar la esquina inferior izquierda de la hoja sobre el último pliegue construido y, simultáneamente, el punto marcado en el lateral izquierdo de nuestra hoja sobre el pliegue oblicuo que delimita nuestro ángulo. Antes de abrir este último pliegue, marcamos el punto donde ha ido a parar la esquina inferior izquierda sobre el pliegue horizontal. Los pasos de la construcción aparecen en la Figura 13b.

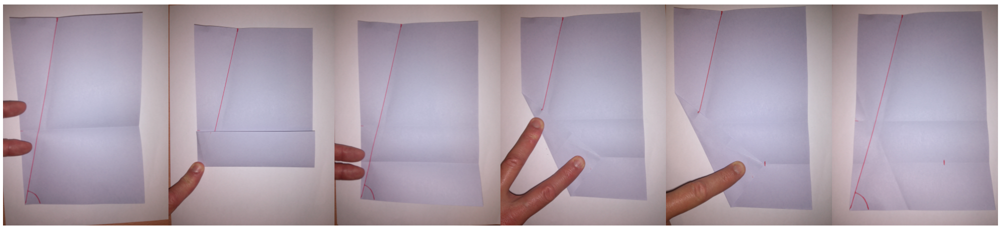


Figura 13b. La trisección del ángulo: construcción

Afirmamos que ya hemos partido nuestro ángulo en tres partes iguales y para comprobarlo, vamos a unir el último punto marcado con la esquina inferior izquierda usando el pliegue (**O1**). Y aplicamos finalmente el pliegue (**O4**) a este último pliegue y al pliegue original que delimita nuestro ángulo. Comprobamos que hemos partido nuestro ángulo en tres partes que parecen idénticas.

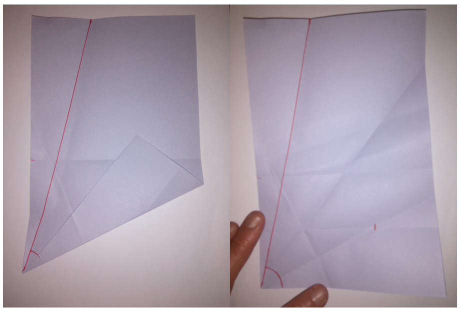


Figura 13c. La trisección del ángulo: comprobación

La demostración de que esta construcción es efectivamente la trisección exacta del ángulo original es elemental. El pequeño ángulo θ marcado en la primera foto de la Figura 14 se puede encontrar en otros dos lugares en nuestra construcción (y la justificación de este hecho es muy sencilla). Pero el pliegue (**O6**) que hemos utilizado en nuestra construcción es un eje de simetría por lo que el ángulo 2θ, marcado en la segunda foto de la Figura 14, también se encuentra adyacente al ángulo θ hasta llegar al pliegue oblicuo que delimita nuestro ángulo de partida. Esto demuestra que θ es un tercio de este ángulo.

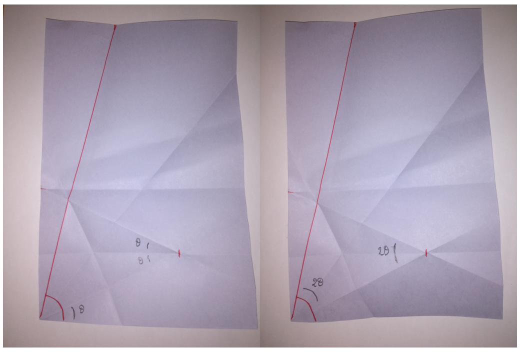


Figura 14. La trisección del ángulo: demostración

CONCLUSIONES.

La teoría matemática que explica con precisión lo que se puede hacer (y lo que no se puede) con papiroflexia usando los siete axiomas de Huzita-Hatori es la **Teoría de Galois**. Esto convierte a la papiroflexia en una herramienta para el aprendizaje de las Matemáticas desde una edad muy temprana y hasta la universidad. La Teoría de Galois se enseña, en la actualidad, en tercero del Grado en Matemáticas en la Universidad de Valladolid. Las construcciones con regla y compás suelen formar parte de los cursos clásicos de Teoría de Galois y la mayoría de los libros de textos incluyen un capítulo sobre el tema. Es más reciente la aplicación de la Teoría de Galois al estudio de las construcciones con papiroflexia. El magnífico libro [Cox, D. A. (2012)] incluye un capítulo sobre este tema, por ejemplo. Es una experiencia extraordinaria aplicar resultados avanzados de Álgebra para demostrar, con alumnos de Matemáticas, porque se puede construir con papiroflexia un polígono regular de 9 lados, mientras esta construcción es imposible con regla y compás (lo cual demuestra que la trisección del ángulo no se puede realizar con regla y compás), demostrar que un polígono de 11 lados no se puede construir ni con papiroflexia, ni con regla y compás o contarles cómo construir una raíz cuadrada con regla y compás y una raíz cúbica con papiroflexia. Pero esto es otra historia. Se puede consultar el Trabajo de Fin de Grado [Gómez Villamayor, J. (2017)] para un análisis minucioso de las construcciones con papiroflexia desde un punto de vista algebraico.

Terminaremos con algunos polígonos regulares construidos con papiroflexia y dejamos al lector la tarea de determinar cuáles de estas construcciones incumplen los axiomas de Huzita-Hatori.

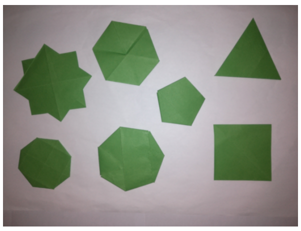


Figura 15. Algunos polígonos regulares con papiroflexia

Agradecimientos.

Quiero agradecer a los organizadores del XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León su amable invitación y, muy en especial, a Antonio Bermejo Fuertes su infinita paciencia en la espera de este resumen.

Referencias.

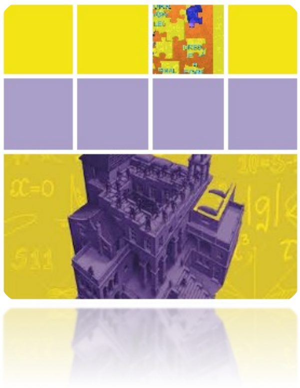
Cox, D. A.(2012). *Galois Theory*. Second Edition. Pure and Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ.xxvii+570 pp. ISBN: 978-1-118-07205-9.

Gómez Villamayor, J. (2017). MATH-ORIGAMI, aspectos algebraicos de las construcciones con origami. Trabajo de Fin de Grado, U. Valladolid. iv+128 pp. http://uvadoc.uva.es/handle/10324/25760.

Hull, T. (2013). *Project Origami: activities for exploring mathematics*. Second Edition.CRC Press, Boca Raton, FL. xxii+341 pp. ISBN:978-1-4665-6791-7.

Para hacer referencia al artículo:

Philippe T. Giménez, (2018). La Papiroflexia, una herramienta lúdica para el aprendizaje de las Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 90-99). Lugar: Universidad de León



TALLERES

POTENCIAR LA CALCULADORA COMO RECURSO DIDÁCTICO PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

María Cristina Naya Riveiro

Facultad de Ciencias de la Educación, Universidade da Coruña

Resumen

La calculadora es un recurso que lleva muchos años en el mundo educativo, y que la mayoría del alumnado tiene acceso por su precio y facilidad de uso. Teniendo en cuenta que apenas se aprovechan las potencialidades de este recurso, se busca como objetivo principal dar a conocer las posibilidades didácticas que ofrece la calculadora científica que se puede utilizar en un aula de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Se mostrarán también algunos trabajos realizados por el grupo de trabajo del Seminario de Calculadoras de la Federación Española de Profesores de Matemáticas, para ayudar a adquirir la formación necesaria que permita dominar este recurso.

Palabras clave: *calculadora, Matemáticas, Educación Secundaria.*

CONTEXTUALIZACIÓN

Las primeras calculadoras electrónicas de bolsillo se empezaron a comercializar masivamente en los años 70. Desde entonces, las distintas casas comerciales han lanzado al mercado distintos modelos de calculadoras con nuevas herramientas y recursos para facilitar el cálculo. Pero hoy en día, los avances en la tecnología ofrecen una amplia variedad de modelos de calculadoras como las científicas, gráficas y algebraicas, pudiendo utilizar estas calculadoras para trabajar la mayoría de los contenidos matemáticos que se pueden establecer en cualquier etapa educativa obligatoria o postobligatoria.

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2014) identifica a la calculadora como una herramienta y tecnología apropiada ya desde los primeros cursos de Educación Primaria, y como un elemento esencial en el aula para ayudar al alumnado a entender y razonar matemáticamente. Pero la realidad es que, aunque las calculadoras, desde sus versiones simples de cuatro funciones hasta modelos de gráficos programables, se usan habitualmente fuera de la escuela para una variedad de propósitos, su uso específico en el aula de Matemáticas debe ser selectivo y estratégico (NCTM, 2015) para ayudar a los estudiantes a comunicarse matemáticamente y hacer las conexiones necesarias a través de los conceptos y procedimientos matemáticos y en situaciones del mundo real.

El uso de la calculadora en el aula debe ir más allá de la práctica y del trabajo de verificación, apoyando el desarrollo de habilidades de resolución de problemas, permitiendo que los estudiantes se involucren con problemas cognitivamente ricos y respaldando un entorno de aprendizaje efectivo que fortalezca una visión positiva de las Matemáticas (Ellington, 2003).

Además, cabe destacar el apoyo que la calculadora encuentra en la legislación educativa, pues tanto en el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria como en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato aparece reiteradas veces el término “calculadora”, tanto en los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

Sin embargo la realidad educativa en las aulas, bajo este marco, es un tanto contradictoria, puesto que mayoritariamente y desafortunadamente en cualquier reunión o encuentro educativo siempre se discute el uso o no de la calculadora en las aulas a cualquier nivel, y muestra de ello es el reciente *Informe elaborado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas sobre la utilización de las calculadoras en las pruebas de evaluación para el acceso a la Universidad* (septiembre de 2018) donde se pone de manifiesto la discriminación y la falta de equidad entre comunidades autónomas sobre el uso o no de la calculadora científica o gráfica para las pruebas de acceso a la Universidad.

Esta situación probablemente viene fomentada por la falta de conocimiento y formación por parte del profesorado sobre el uso y manejo de la calculadora. Por ello se propone la realización de un pequeño taller para potenciar el uso de la calculadora científica y su ventaja en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

OBJETIVOS

Los objetivos que se pretende alcanzar con la realización del taller son los siguientes:

- Presentar, conocer y manejar un modelo de calculadora científica de forma didáctica que favorezca el uso de sus menús, teclas, etc.
- Fomentar el uso de la calculadora en las aulas como recurso didáctico en el aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas.
- Mostrar experiencias didácticas concretas sobre la utilización de la calculadora científica.

METODOLOGÍA

Se desarrolla una metodología participativa durante la impartición del taller que invitará a participar libre y voluntariamente en las tareas propuestas y donde todos los participantes dispondrán en todo momento de una calculadora para poder experimentar.

Concretamente, se combina la presentación de las diferentes opciones de teclas y menús que ofrece la calculadora científica a través de la realización de pequeños problemas para fomentar su uso y su conocimiento, que servirá a la vez como manual de usuario del dispositivo y como guía didáctica para el usuario o la usuaria.

También se mostrarán algunas de las actividades que se realizan desde el año 2015 en el grupo de trabajo del Seminario de Calculadoras de la Federación Española de Profesores de Matemáticas, diseñadas teniendo en cuenta la filosofía y las ideas de Fielker (1986) y el NCTM (2000). Además, parte de estas actividades están publicadas en Amaro et al. (2017).

Concretamente, en colaboración con la División Educativa de CASIO en España, el modelo de calculadora científica que se usa durante el taller es la CASIO CLASSWIZ fx-570SPX II. Es un modelo de calculadora adecuada para cualquier nivel de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), Bachillerato y Universidad. Este modelo es equivalente a la CASIO CLASSWIZ fx-991SPX, aunque con ciertas desventajas como un peso más pesado, una dimensión mayor y no combina una fuente de alimentación solar con pila. Además, la característica que diferencia de un modelo I y II es que la versión I ofrece los idiomas castellano, portugués y catalán, y la II también el euskera. La apariencia que tiene esta calculadora se recoge en la Imagen 1.

Figura1: Modelo CASIO CLASSWIZ fx-570SPX.

La calculadora tiene un total de 575 funciones donde destacamos además de las funciones matemáticas como la función simplificar, verificar, división entera; funciones de cálculo como matrices 4x4, sumatorio o productorio, números complejos; funciones de estadística y probabilidad como distribuciones de probabilidad, menú de hoja de cálculo o generación de un código QR que es ideal trabajarlo con la aplicación CASIO EDU^{+} para permitir acceder a funciones adicionales que no están disponibles en la calculadora como visualizar gráficos, compartir datos, etc. Para obtener más información de estas funcionalidades de la calculadora se puede consultar la web educativa de CASIO https://www.edu-casio.es/noticias/tutoriales-guias-calculadoras-classwiz o Kissane (2016).

La participación en el taller permite conocer las funciones más significativas y representativas de este modelo de calculadora.

EJEMPLO DE ACTIVIDAD

A continuación, se presenta una actividad para trabajar el siguiente estándar de aprendizaje evaluable de 1º y 2º de la ESO de Estadística: *Organiza datos, obtenidos de una población, de variables cualitativas o cuantitativas en tablas, calcula sus frecuencias absolutas y relativas y los representa gráficamente.*

El enunciado de la actividad que se les presentaría al alumnado sería:

Durante este curso las calificaciones de Matemáticas Académicas de los alumnos/as de 1er curso de la ESO en los dos primeros trimestres se recogen en la siguiente tabla:

Notas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1$^{er.}$ trimestre	0	0	2	2	1	5	2	3	2	3	1
2º trimestre	0	1	1	3	2	4	1	3	2	4	0

a. *Calcula la frecuencia absoluta y relativa de cada nota.*

b. Representa gráficamente los datos.

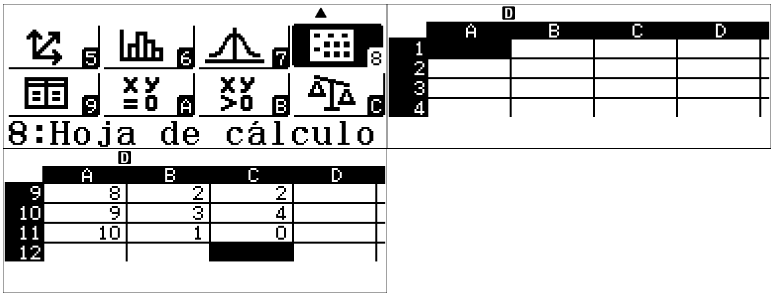
Una forma de resolver la actividad podría ser la siguiente que se recoge.

Para realizar la tabla de frecuencias utilizamos la calculadora y seleccionamos el menú *Hoja de cálculo*, al que se accede mediante w8 e introducimos los datos obtenidos. Hay que tener en cuenta que la capacidad de la hoja de la calculadora es generar una tabla de 5 columnas y 45 filas, y con este ejemplo ocupamos el número máximo de columnas que puede manejar esta hoja de cálculo.

Lo haremos utilizando las diferentes opciones que este menú nos ofrece y de tal forma que la propia hoja de cálculo calcule las frecuencias absolutas y relativas de cada nota. Para ello reproducimos en la tabla de la calculadora la misma que tenemos nosotros, recordando que la aplicación de hoja de cálculo de la calculadora sólo permite introducir números y fórmulas, con una sintaxis similar a cualquier otra hoja de cálculo.

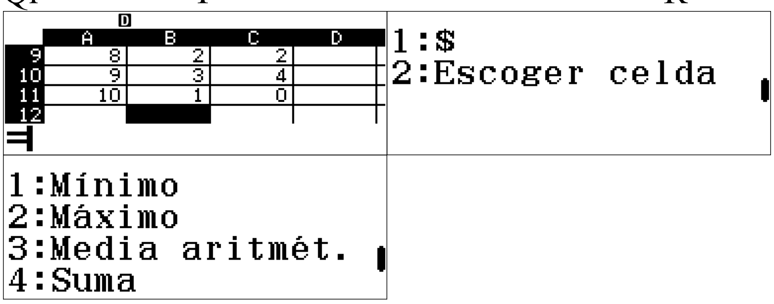
Introducimos los datos, para ello nos situamos en la celda correspondiente moviéndonos sobre la tabla con las teclas E!$R; tecleamos el número y presionamos la tecla = para introducir dicho valor en la celda.

w8 0=1= …

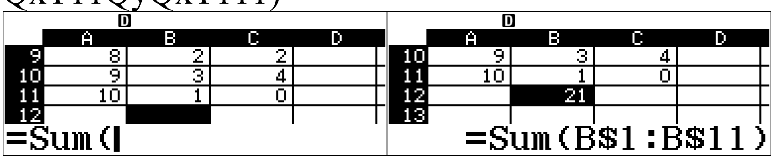


Vamos a comprobar que tenemos el mismo número de datos en todas las columnas para depurar errores, del mismo modo que haríamos en un hoja de cálculo, mediante la sintaxis "=*Sum*(B$1:B$11)". El signo "=" indica que lo que viene a continuación es una fórmula, "*Sum*" es una función que está disponible en la memoria de la calculadora que se accede mediante la tecla T y "$" es el símbolo que sirve para fijar la referencia de una fórmula situada detrás de dicho símbolo. Lo usamos porque vamos a utilizar una misma fórmula para calcular la suma de distintas columnas (tanto las de B como las de C): así cuando tenemos "B$1:B$11" indica todas las celdas que se van a sumar desde la B1 hasta la B11, pero cuando pegamos esta fórmula en otra columna, por ejemplo la C, fija las filas pero no las columnas por ello interpreta "C$1:C$11" y suma todo lo que tenemos desde la C1 hasta la C11 pues el signo ":" se utiliza de separador entre la primera y la última celda. Esto en la calculadora se realiza mediante los siguientes pasos:

Qr T R 4

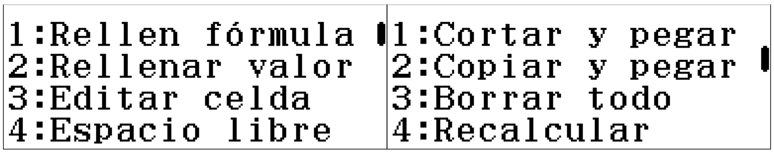


QxT11QyQxT111)

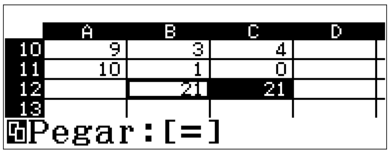


Ahora para aplicar la fórmula en la columna C, lo realizamos mediante la opción de *Copiar y pegar* que accedemos a ella con la siguiente secuencia de teclas:

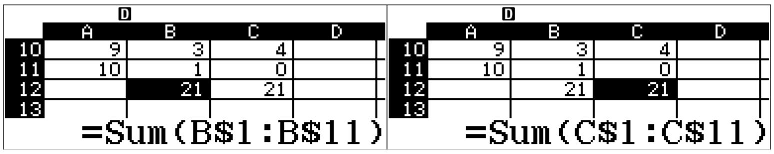
TR 2



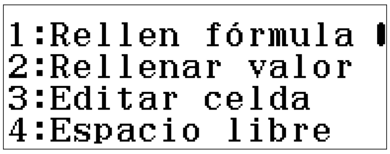
Nos ponemos en la celda que corresponda y le damos al =.



Y cuando terminemos tecleamos C. Observamos si pasamos con el cursor por encima:



Recordar que siempre, si nos equivocamos, podremos editar nuestra fórmula mediante la tecla T y nos aparecerá el siguiente menú

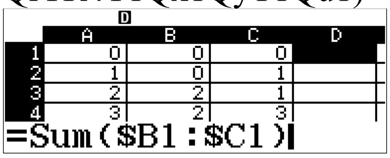


y elegimos la opción 3, Editar celda, tecleando la tecla 3.

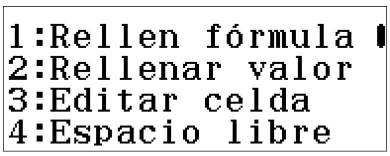
Tenemos entonces así las 21 notas de cada trimestre; vamos a calcular ahora las frecuencias absolutas de cada nota que no es más que sumar los datos de cada fila, que realizaremos en la columna D, de una forma similar a esta, utilizando la función Sum, y sumando los elementos de cada fila y de las columnas B y C. Puesto que queremos aplicar una misma fórmula para todas las celdas de las frecuencias absolutas lo que hacemos es "Sum($B1:$C1)" en la fila de la nota 0, y luego la pegamos en todas las demás.

La secuencia que tecleamos es:

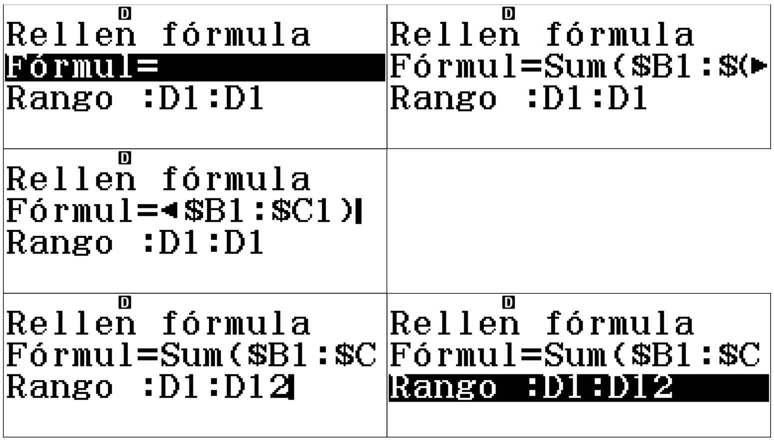
QrTR4T1Qx1QyT1Qu1)=



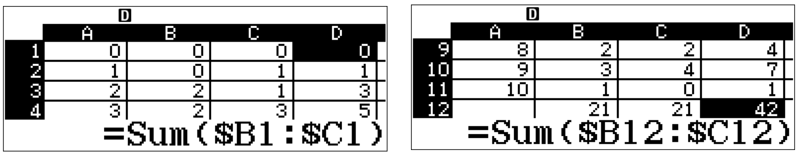
Dado que queremos hacer este mismo cálculo en toda la columna D, podemos hacer el mismo procedimiento que antes de *Copiar y pegar* la fórmula, o podemos utilizar otra opción más óptima que nos ofrece la hoja de cálculo: *Rellenar fórmula*. Accedemos a ella mediante la tecla T apareciendo el siguiente menú y eligiendo la opción 1:



Nos aparece entonces la siguiente secuencia de menús donde nos movemos con las teclas R!E$ y aceptando los valores que vamos editando a través de la tecla = realizando lo que se muestra por pantalla:



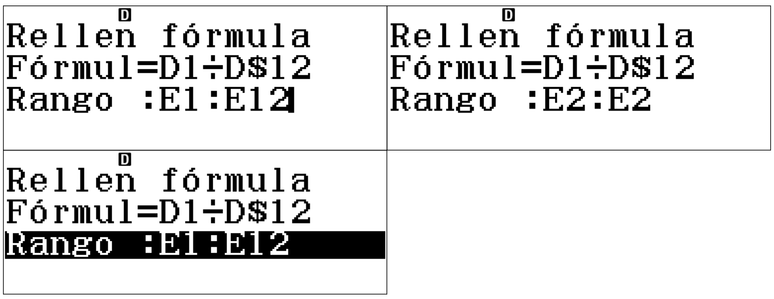
Y una vez que lo tenemos, para aceptar el cálculo, tecleamos = y nos aparecerá por pantalla:

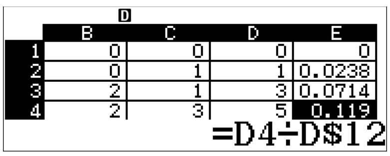


Se obtiene así la frecuencia absoluta de las notas.

Nos queda el cálculo de las frecuencias relativas y lo hacemos de tal modo que, utilizando una única fórmula, la podamos aplicar al resto de celdas y se calcule automáticamente (aprovechando las opciones de la hoja de cálculo). Para ello hacemos "=D1÷D$12" y luego se pega la fórmula en el resto de celdas de la misma columna, pues así el primer elemento varía según la fila en la que esté la fórmula (D2, D3, etc.) ya que el símbolo "$" hace que se mantenga fija la fila, porque estamos pegando una celda verticalmente y toma siempre el elemento D12.

Lo realizamos con la opción de *Rellenar fórmula* mediante la tecla T. Realizando lo que se muestra por pantalla y obteniendo las frecuencias relativas.





Los datos que obtenemos se recogen en la siguiente tabla:

Tabla 3: Tabla de frecuencias.

Notas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1er. trimestre	0	0	2	2	1	5	2	3	2	3	1	21
2º trimestre	0	1	1	3	2	4	1	3	2	4	0	21
***F**$_i$*	0	1	3	5	3	9	3	6	4	7	1	42
***f**$_i$*	0	0.0238	0.0714	0.119	0.0714	0.2142	0.0714	0.1428	0.0952	0.1666	0.0238	1

También podemos representar los datos obtenidos por la calculadora a través del menú *Estadística* y desde la aplicación CASIO EDU$^+$ (se puede consultar todo lo necesario acerca de la aplicación en este enlace http://wes.casio.com/es-es/education/extension/casioeduplus/).

Una opción puede ser accediendo a la web http://wes.casio.com/es-es/class/ para generar una clase, donde compartiremos los gráficos que se vayan realizando, dado que podemos pedir por ejemplo el gráfico de frecuencias absolutas a un grupo de alumnos y el gráfico de frecuencias relativas a otro grupo de alumnos de la misma clase.

Introducimos un nombre a la clase y una pequeña descripción, una vez que se acaba de crear aparecerá de la siguiente forma:

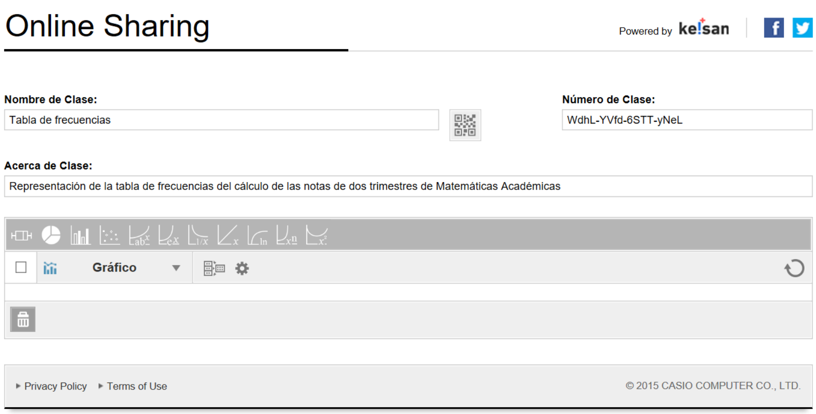
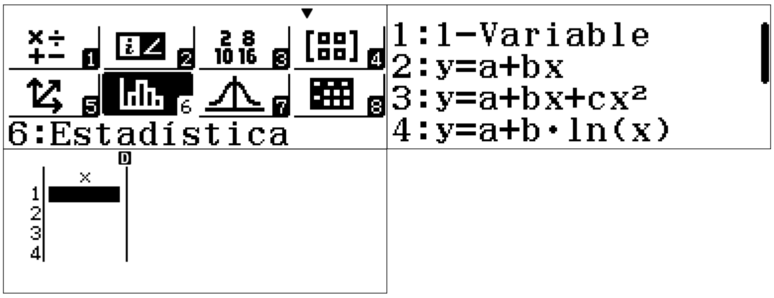


Figura 2: Crear una clase.

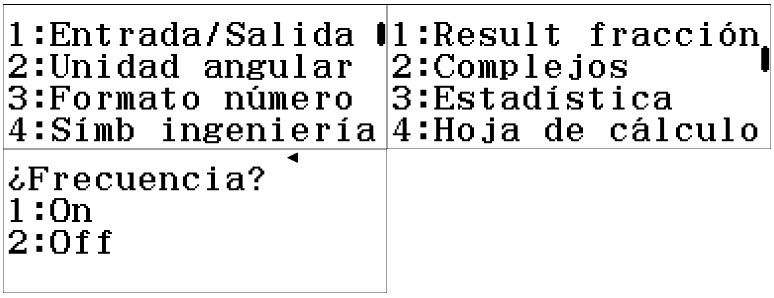
Tras la creación de la clase, los estudiantes deben añadirse a la misma para compartir datos y gráficos. Una forma de hacerlo es mediante el código QR que genera la calculadora y lo compartimos en la clase generada. Los gráficos los podemos obtener seleccionando el menú 6 de *Estadística* y mediante la opción *1-Variable*:

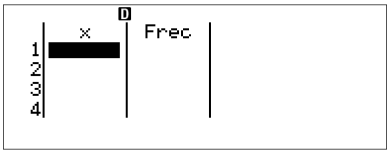
w6 1



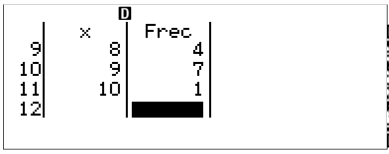
De esta forma se obtiene una tabla que solo dispone de una columna, la correspondiente a los valores que toma la variable. Para añadir una columna con las frecuencias, hay que modificar la configuración de la calculadora del siguiente modo:

qw R 3 1





Introducimos los datos de las frecuencias absolutas, pulsando = y a continuación, una vez tengamos todos, generamos el código QR (qT) asociado a los datos para obtener el gráfico de barras correspondiente, almacenándonos en la clase anteriormente guardada obteniendo:



	x	Frec
9	8	4
10	9	7
11	10	1
12		

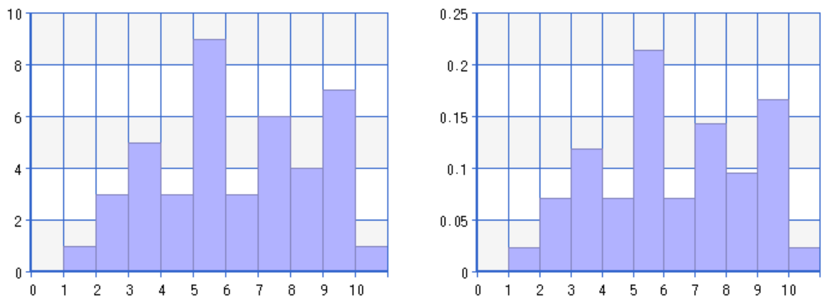
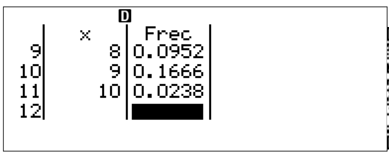


Figura 3: Gráficos asociados a las frecuencias absolutas y a las frecuencias relativas.

Análogamente hacemos también el gráfico para las frecuencias relativas obteniendo:



	x	Frec
9	8	0.0952
10	9	0.1666
11	10	0.0238
12		

REFERENCIAS

Amaro, E., Bonet, L., Cano, M., Carrillo, A., Chacón, J.M., Fernández, J.M.,L., Lekuona, G., López, E., Martín, A., Martínez, J., Amengual, M.A., Monzó del Olmo, O. Navarro, M.T., Naya-Riveiro, M.C.,Peiró i Estruch, R., Pérez, R., Rodríguez, M.A., Valdevira, D., Zamora, R.F. (2017). *Actividades para el aula con calculadora científica*. Barcelona: CASIO ESPAÑA División Educativa, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). ISBN Versión Impresa: 978-84-945722-5-8. ISBN Versión Digital: 978-84-945722-6-5. Depósito legal: M-17841-2017.

Código de Educación Secundaria y Bachillerato. Edición actualizada a 28 de septiembre de 2018. *Boletín del Estado*. Edición actualizada a 28 de septiembre de 2018. Extraída de www.boe.es/legislacion/codigos/

Ellington, A. J. (2003). A meta-analysis of the effects of calculators on students' achievement and attitude levels in precollege mathematics classes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34, 433–463.

Fielker, D.S. (1986). *Usando las calculadoras con niños de 10 años*. Valencia: Generalitat Valenciana, Conselleria de Cultura, Educació i Ciencia.

Kissane, B. (2016). Introducción a las Matemáticas con ClassWiz. Support Classroom with Technology. CASIO Wordwide Education Webside. Recuperado de http://www.edu-casio.es/publicaciones

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Standards and Principles for School Mathematics. Recuperado de http://www.nctm.org/standards/

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2015). *Strategic use of technology in teaching and learning mathematics: A position of the National Council of Teachers of Mathematics*. Reston, VA: Author.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado, sábado 3 de enero de 2015.

Para hacer referencia al artículo:

Naya, M.C. (2018). Potenciar la calculadora como recurso didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 101-109). Lugar: Universidad de León

MATEMÁTICAS, ¿FUERA DEL AULA?

Elodia Bielsa Domingo[a], Sonsoles Blázquez Martín[b], Ana García Lema[c], Jorge Las Heras Gonzalo[d],

[a,b,c,d] Grupo de Divulgación de las Matemáticas. Asociación Miguel de Guzmán (sección Valladolid)

Resumen.

Cómo usar materiales que nos permitan trabajar las Matemáticas tanto dentro como fuera del aula. Reflexión sobre cómo los juegos y otros recursos alternativos unifican los distintos bloques de contenidos y nos permiten realizar actividades en el aula o complementarlas. Escape Room, rutas matemáticas o Matemáticas en la calle son algunos de esos recursos alternativos. En este taller se plantea a los participantes un escape room del que tendrán que salir usando la lógica y las Matemáticas.

Palabras clave*: metodología, Matemáticas, Secundaria, escape room*

INTRODUCCIÓN.

Uno de los principales problemas que nos encontramos en el aula es la desmotivación del alumnado debida a la poca aplicación que ven a las Matemáticas en su vida cotidiana. También es cierto que no gozan de buena prensa en la sociedad en general. Desde el Grupo de Divulgación al que pertenecemos llevamos años intentando mostrar la cara amable de las mismas a nuestro alumnado y al público en general, a través del desarrollo de actividades y talleres. A nuestro alumnado le proponemos que nuestro alumnado "haga Matemáticas" fuera del aula, no sólo en su pupitre. Un parque, un museo o cualquier rincón de nuestra propia ciudad son entornos más que interesantes para desarrollar la clase de Matemáticas. Pensamos que una metodología basada en la resolución de problemas es vital para la adquisición de la competencia matemática, y que dicha metodología puede desarrollarse dentro del aula pero también en muchos contextos extracurriculares alejados del entorno escolar.

El objetivo de este taller es dar a conocer recursos alternativos para sacar las Matemáticas fuera del aula y motivar al alumnado, a la vez que se hacen visibles para otras personas. En este tipo de actividades se presta especial atención a la resolución de problemas y las estrategias de pensamiento, y también se fomenta la creatividad y el trabajo en equipo. La mayoría de los recursos aquí planteados han sido utilizados y comprobados durante varios años en diferentes contextos y valoradas muy positivamente en cuanto a participación e implicación de los participantes: actividades en el Museo de la Ciencia de Valladolid para público en general, Día de las Matemáticas en la Calle en distintas fechas en Valladolid, actividades con nuestros grupos de clase o con el alumnado de Estalmat, etc.

Para presentar las actividades hemos decidido dar un formato de juego al taller, usar precisamente la fuerza motivadora que tiene la gamificación, para que el profesorado experimente justamente con una de los recursos que se proponen, un Escape Room Educativo. Un Escape Room consiste en confinar a un grupo de personas en un espacio cerrado donde se sitúan pruebas y objetos relacionados con las mismas, de manera que en un tiempo establecido el grupo debe salir de dicho espacio tras superar las pruebas, y conseguir un objetivo fijado desde el principio (normalmente incluye encontrar la llave para salir). Este tipo de juegos se puede adaptar a cualquier materia u objetivo. Basta con plantear acertijos y pruebas relativas a aquello que se quiera trabajar. En nuestro caso todos los acertijos están basados en la resolución de problemas, la lógica y las Matemáticas, pruebas que han sido utilizados en las distintas actividades. La historia gira en torno a la recién inaugurada sala de Matemáticas del Museo de la Ciencia de Valladolid, *Malditas Matemáticas… ¿o no?*

DESARROLLO DEL TALLER.

Para desarrollar la actividad se forman 4 grupos de 5 personas (las actividades de Escape están pensadas para grupos de entre 3 y 6 personas), y en lugar de llevarlo a cabo en 4 habitaciones diferentes, se llevará a cabo en el mismo espacio, donde cada grupo tendrá una zona propia. Este planteamiento permite plantear este tipo de recurso con grupos grandes, como los que habitualmente tenemos en el aula. Además, se diseña una zona común en la que los objetos se comparten y en la que, como novedad en un Escape Room, hay una actividad colaborativa entre los distintos grupos participantes. Tras una pequeña introducción donde se explica en qué consiste el Escape Room, se lleva a los participantes al aula donde se desarrollará.

Escape Room: la historia.

Toda actividad de escape comienza con una historia que sitúa a los participantes en el juego y explica cuál es el objetivo a alcanzar:

> "El departamento de Matemáticas del instituto al que pertenecéis se ha enterado de la apertura de una nueva sala dedicada a las Matemáticas en el Museo de la Ciencia. Les parece una oportunidad ideal para sacar las Matemáticas fuera del aula y planean una visita a espaldas de la dirección del centro, que piensa que la actividad no merece la pena y no hace más que poner obstáculos. El departamento ha decidido reunirse en la sala para preparar la actividad, buscarán información e intentarán convencer a la dirección, pero ésta no se lo pondrá fácil, esta vez ha decidido dejarlos encerrados… Para salir de la sala hay que completar una plantilla con el plano de la sala de Matemáticas del Museo de la Ciencia de Valladolid, así como el nombre de las secciones en las que se divide. Cada sección se identifica en el plano con un objeto relacionado con la misma. Si entregáis la plantilla completa al director quizás éste os deje salir …".

Los 4 equipos se distinguen por el nombre de un matemático/a, Hipatia, Gauss, Ada Byron y Pitágoras, pero lo tienen que deducir con el material que tienen en su espacio: un marco con la foto del matemático/a y una carpeta, la carpeta del profesor, donde figura el nombre. Cada grupo entra en el aula con uno de los organizadoresyse les indica qué espacio le corresponde (Figura 1).

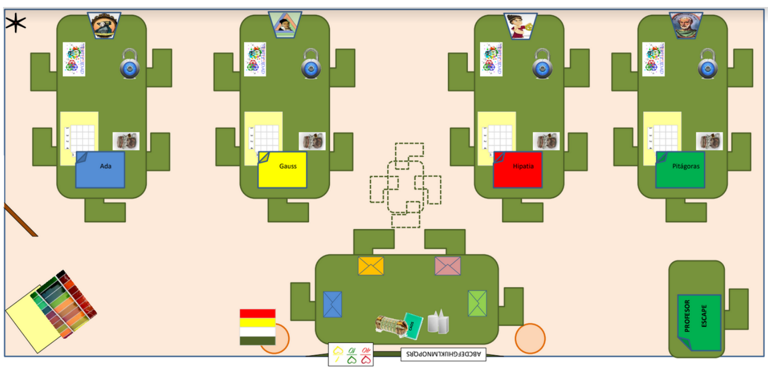


Figura 1. Distribución de la sala donde se desarrolla el Escape.

A continuación, se encadena en la mesa central a uno de los participantes de cada equipo. Es ahí donde se desarrolla la actividad colaborativa, que consiste en completar el puzle del plano de la sala (Figura 2) con las piezas correspondientes a su grupo. Sobre la mesa hay cuatro sobres con las piezas, diferenciadas por equipos (se muestra por detrás el matemático que les identifica), si bien en cada sobre las piezas están mezcladas (tienen piezas de su equipo y de otros). Los participantes tienen que abrir el sobre y deducir que deben intercambiarse las piezas, pero no tienen indicaciones de lo que deben hacer ni tampoco saben, en principio, qué piezas son las suyas, sólo con la colaboración de su equipo pueden averiguarlo. Completar el puzle supone poder ser desencadenado y volver con su grupo, que ya estará trabajando en su espacio.

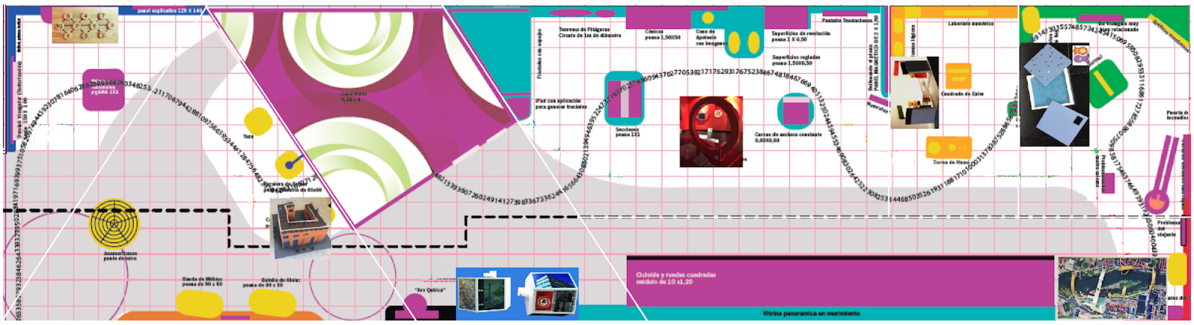


Figura 2. Puzle del plano de la sala del museo.

En el plano del museo aparecen imágenes que se corresponden a actividades existentes en cada una de las secciones de la sala, secciones cuyo nombre tienen que descubrir utilizando pruebas y pistas:

a) Universo Numérico

La imagen que representa a esta sección es un solitario danés (Figura 3), un juego numérico que consiste en colocar los números del 1 al 10 de manera que se consiga la misma suma en cada diagonal y en cada uno de los rombos que forman.

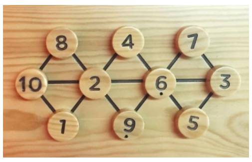


Figura 3. Solitario danés

Para llegar al nombre de la sección, "Universo Numérico", cada equipo cuenta con un mensaje escrito en una tira para enrollar en algún tubo (el método gráfico de la Escítala). El tubo será algo que destaque en el aula, en este caso, un perchero colocado en la zona común a todos los participantes. Como pista se coloca en la carpeta de profesor una explicación sobre métodos criptográficos (entre ellos la Escítala). Además, hay una pista adicional, que es un plano Dufour del recorrido (Figura 4), con un resumen de la explicación de lo que es un plano Dufour en la carpeta del profesor. Al recorrer el plano siguiendo el esquema se encuentra la palabra "Escítala".

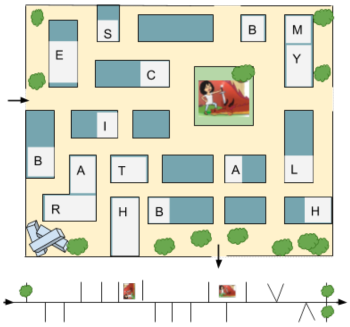


Figura 4. Plano Dufour.

b) Perplejidad

La imagen que caracteriza a esta sección es una escalera similar a la de un famoso grabado de Escher en la que se puede jugar con la perspectiva desde un punto concreto, desde ese punto la escalera parece no cambiar de nivel.

Figura 5. Escalera

Para encontrar la palabra referente a este apartado, cada equipo tiene una anamorfosis con la palabra perplejidad (Figura 6) creada con el software "Anamorph Me!". Se necesita un cilindro espejado que se encuentran en la zona común junto a otras figuras matemáticas forradas con espejos.

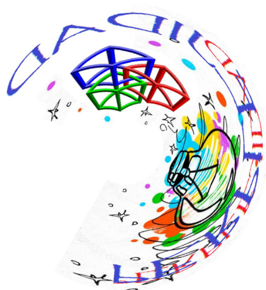


Figura 6. Anamorfosis cilíndrica con la palabra perplejidad.

c) Descubriendo figuras

Esta sección viene representada en el plano por un arco luminoso bajo el que se colocan figuras para visualizar secciones de las mismas a través de la luz láser (Figura 7).

Figura 7. Arco luminoso

En la carpeta del profesor cada equipo tendrá un examen que pide medir varios ángulos y colocar las medidas ordenadas (Figura 8).Para ello cuentan con un transportador de ángulos también en la carpeta. Una vez los han medido y colocando en orden (69-72-219-120), en la pizarra común encontrarán una equivalencia de números y letras que llevan al título (a=1, b=2, etc.).

Figura 8. Ángulos

Como las medidas de los ángulos deben de ser bastante precisas, en la carpeta cuentan también con una "chuleta" en forma de flexágono (Figura 9). Manipulando el flexágono encontrarán las siguientes pistas (en paréntesis la solución).

"La medida del primer ángulo la verás igual si la giras" (69º)

"El segundo ángulo es el doble de un cuadrado" (72º)

"En el tercero con 7 menos queda un bonito capicúa" (219º)

"No aceleres más de la medida del último ángulo o te calcarán una multa" (120º)

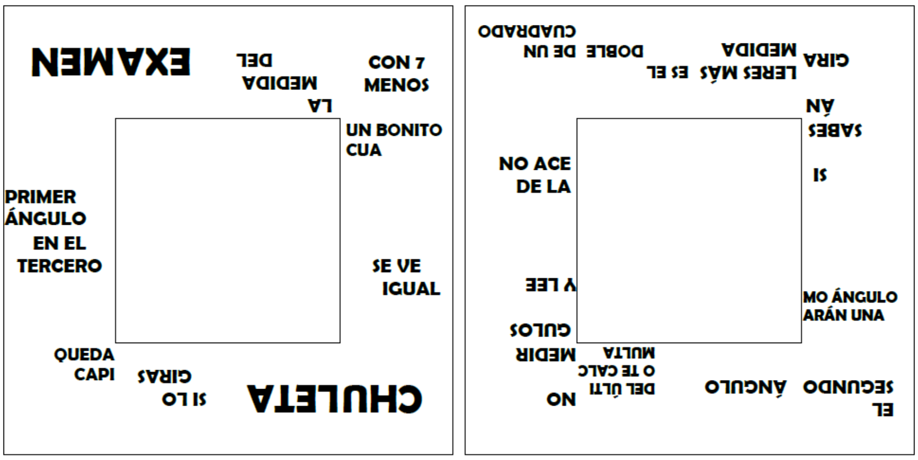


Figura 9. "Chuleta" con pistas para resolver los ángulos.

d) Emboscadas de la lógica

Esta sección la identificarán con uno de los problemas de lógica planteados en la Sala del Museo, "Juego de los cuatro amigos". De hecho este juego se reproduce en el espacio de cada grupo como pista para la sección "En busca de una solución"

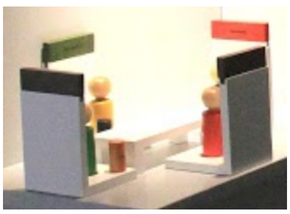


Figura 10. "Juego de los cuatro amigos"

El nombre de esta sección estará en un bote cerrado con un candado. Los participantes tienen que encontrar la combinación del candado, que consta de tres números. Para ello, deben resolver el siguiente enigma de lógica (Figura 11). El corazón con el que se resuelve se encuentra en el espacio común de la pizarra y la parte a completar se encuentra pegada en la carpeta del profesor. Deben deducir el número que falta en las fracciones que representan la parte del corazón que tiene dicho color (observando que las divisiones no son iguales).

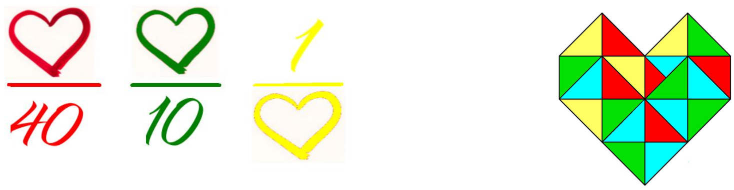


Figura 11. Enigma de los corazones.

e) Azar y estadística

La sección correspondiente a "Azar y Estadística" tendrán que asociarla al juego de las muestras (Figura 12) que pone de manifiesto la importancia de seleccionar una muestra aleatoria.

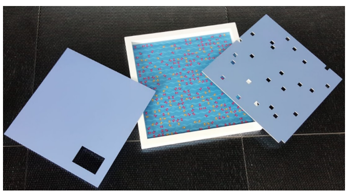


Figura 12. Juego de las muestras.

Para encontrar el nombre de la sección, resolverán el "Juego de los edificios". Cada uno de los 16 edificios, que son bloques construidos con multicubos de 4 colores diferentes y 4 alturas diferentes, posee una letra en la parte superior, se colocan en una plantilla 4x4, marcada en las filas y en las columnas con los números 1-2-2-3 (de arriba abajo y de derecha a izquierda). Si la colocación es correcta se lee el nombre de la sección. Los edificios se encuentran en una caja cuya llave se esconde en el mismo bote donde estaba el nombre de la sección de "Emboscadas de la lógica", mientras que la plantilla se encuentra en el espacio de cada grupo. El enunciado del juego lo encuentran en la carpeta del profesor: "Coloca en cada fila los cuatro bloques de un mismo color de manera que no se repitan en las columnas bloques que tienen la misma altura y de manera que se vean desde el frente y desde el lateral derecho el número de edificios que se indica en cada fila y columna". Para que conozcan el orden en el que tienen que colocar los colores de los "edificios", en la pizarra común está colocada una bandera con dichos colores ordenados (Figura 13).

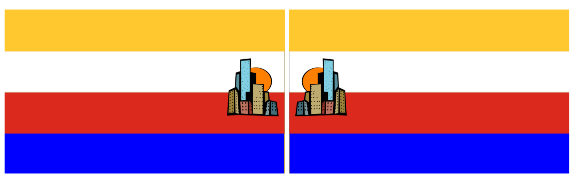


Figura 13. Bandera del juego de los edificios.

f) MateMatizArte

Los participantes deben relacionar la sección de MateMatizArte con la imagen de los prismas de la Figura14. Dichos prismas se encuentran en la Sala de Matemáticas del Museo de la Ciencia y muestran fotos de diferentes monumentos de Castilla y León desde un punto de vista matemático, así como de la relación de las Matemáticas con la música, la poesía o el cine.

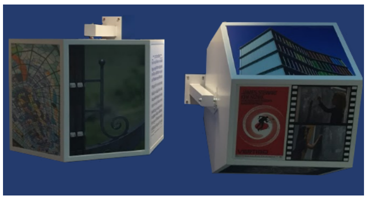


Figura 14. Prismas de MateMatizArte

Para encontrar el nombre de la sección, en la zona común tienen una fotografía del MUSAC (Figura 15). La foto contiene una nube de palabras entre las que se encuentran Mate, Matiz y Arte. Para ver el mensaje se usa una rejilla guardada en la caja donde también se encontraban los edificios de la sección anterior.

Figura 15. Foto del Musac y plantilla de la rejilla

g) En busca de una solución.

La última de las secciones viene representada por la imagen de los "Puentes del Pisuerga", juego semejante a los Puentes de Königsberg pero ambientado en el Museo de la Ciencia (Figura 16)

Figura 16.- Los Puentes del Pisuerga

La búsqueda de esta sección es quizás la más compleja porque tiene dos retos diferentes. El primero consiste en resolver un problema de lógica que tienen en la carpeta del profesor, el "Problema de los cuatro amigos": "Víspera de Halloween. Cuatro compañeros de clase se encuentran en la hamburguesería de la esquina a la salida del instituto. Se sientan a los cuatro lados de una mesa. Entre otros temas, comentan el último examen en el cual todos han sacado diferentes notas. Además, hablan de sus disfraces para esa noche: calabaza, esqueleto, murciélago y una máscara de calavera". Con las pistas que te damos, contesta: ¿Quién se disfraza de esqueleto? PISTAS:

- Quien tiene mejor nota irá de calabaza.

- A la derecha de quien llevará una máscara de calavera se sienta quien ha sacado el cuarto lugar en nota.
- Quien va de calabaza le prestará una máscara de calavera a la persona sentada enfrente, ya que no tiene ningún disfraz.
- La persona con tercera mejor nota está sentada frente a la persona de mejor nota.
- Julia se sienta enfrente de quien tiene la segunda mejor nota.
- En un momento determinado, David dice: "Elena, gracias por la careta".
- A Pedro le dan pavor los murciélagos."

La solución a este enigma es "PEDRO". Con dicho nombre deben abrir un dispositivo similar a un candado, un "Cryptex", que se encuentra en la zona común. Dentro aparece la frase "Descartes te dice: La verdad está escrita con mayúsculas", que servirá para el segundo reto. En él disponen de un libro dividido en tres partes que se pueden combinar para obtener definiciones matemáticas. Cada parte se distingue por sílabas que forman nombres de matemáticos relacionados con la definición. Cuando se localiza la definición adecuada (DESCARTES) las mayúsculas determinan el nombre de la sección. Las frases y nombres del libro son:

- LE - IB -NIZ "límitE hacia eL cuAl tiende la raZón - entre el incremento de lA función y el coRrespondiente a la variable - cuando el incremento tiende a cero"
- APO - LO - NIO "curvas geoMétricas - quE se forman a partir De la Intersección - De un cono con un plAno"
- DES - CAR -TES "en El plaNo la aBscisa y la ordenada de los pUntoS sirven para loCalizArlos DE Una maNerA Sencilla - prOyectando Los pUntos sobre las rectas perpendIculares (ejes) - y midiendo esa prOyecciónN "
- PIT - AGO - RAS "En todo triánguLo rectángulo, - el CuAdrado de la Longitud De la hipOteNusa - es igual a la suma de lOs Cuadrados de las respectivas longitudes dE los CatEtos"
- GER-MA-IN "el rAdio deL círculo, a Grandes rasgOs, - que mejoR se ajusta a la curva en un punto - es el radIo de curvaTura en ese Mismo puntO".

PUESTA EN COMÚN.

Una vez terminado el Escape se ponen en común las sensaciones que surgen de la experiencia y se revisan las posibles "actividades fuera de aula" que se pretendían poner de manifiesto en el juego:

- Visitas a Museos. El objetivo del Escape es una excusa para presentar una de las actividades fuera del aula más común, la visita a museos, en particular la recién inaugurada sala de Matemáticas del Museo de la Ciencia de Valladolid, que pretende dar a conocer distintos ámbitos de las Matemáticas mediante actividades manipulativas. Aunque también hay Matemáticas en otros museos y se puede aprovechar cualquier visita para aportar una visión matemática (se ponen como ejemplo El Prado o El Escorial).
- Matemáticas en la calle. Algunos de los juegos, como el de los Edificios, forman parte de una muestra de materiales que la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán" tiene en Valladolid y que prestan a los socios para yincanas y actividades similares en sus centros. Algunas de estas

yincanas se han llevado a cabo en el Museo de la Ciencia abiertas al público familiar. También desde hace dos años en la actividad "Matemáticas en la calle" que se celebra en Valladolid durante una mañana. En este caso el objetivo es mostrar la cara amable de las Matemáticas a través de juegos y está dirigida a todos los públicos, es una actividad de divulgación.

- Rutas matemáticas. El plano Dufour nos sugiere una forma de hacer un recorrido diferente de una localidad, un recorrido matemático. La sección MateMatizArte muestra imágenes de nuestras ciudades que inspiran actividades matemáticas. Las yincanas de las Olimpiadas son un ejemplo de ruta matemática. También hay un proyecto europeo para hacer itinerarios matemáticos con una aplicación de móvil http://mathcitymap.eu
- Gamificación a través de actividades como el Escape Room. A nuestros alumnos les gusta jugar (¿y a quién no? ...). El escape sirve para desarrollar la colaboración en grupo, para plantear problemas de Matemáticas (como la representación gráfica de las fracciones en el corazón o la medida de ángulos), para motivar, para trabajar contenidos no curriculares (como los de criptografía), para que los alumnos desarrollen la creatividad. Esta actividad se ha creado en función de las propuestas que se quieren mostrar, pero se puede elegir otra situación, otro contexto adecuado a lo que se pretenda plantear.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Carazo Lores, Marta (2015) Flexágonos. *VIII Seminario sobre actividades para estimular el talento precoz en Matemáticas* http://www.estalmat.org/archivos/Documento-Flexagonos.pdf

Segura, Mariano; Martínez, Ricardo; García, Francisco (2007). La marcha Dufour: Un recurso para hacer Matemáticas en la calle. *SUMA, 54,* pp. 7-13.

Programa para crear anamorfosis "Anamorph Me!": https://www.anamorphosis.com/software.html

Sala de Matemáticas del Museo de la Ciencia de Valladolid:

https://www.museocienciavalladolid.es/opencms/mcva/QueOfrecemos/ExposicionPermanente/planta_2_informacion.html

Para hacer referencia al artículo:

Bielsa, E.; Blázquez, S.; García, A. y Las Heras, J. (2018). Orientaciones para el profesorado de matemáticas, a partir de las evaluaciones estandarizadas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 110-118). Lugar: Universidad de León.

GEOMETRÍA, ¿JUEGAS CONMIGO?

Marta Carazo Lores[a], Rosa Mª Fernández Barcenilla[b], Isabel Negueruela Sánchez[c]

[a]IES Río Duero (Tudela de Duero), [b]IES Mª Moliner (Laguna de Duero), [c]Profesora jubilada JCyL, [a,b,c]Grupo de Divulgación de las Matemáticas. Asociación Miguel de Guzmán (sección Valladolid)

Resumen

La manipulación y la visualización son básicas e imprescindibles en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, en especial de la Geometría. Bajo estas premisas, y con el apoyo de diversos materiales, recursos y herramientas, se revisarán algunos conceptos geométricos y se presentarán diferentes estrategias de aprendizaje a través del juego, que fomentan la visión espacial y el razonamiento lógico. Gracias a la gran potencialidad de dichos medios y, a través de la Geometría; además, se ayudará a reconocer las Matemáticas que se tienen alrededor y que están presentes en la vida cotidiana. Este taller está dirigido, en especial, al profesorado de Primaria, pudiendo ser extensible a Educación Secundaria, y pretende mostrar a los docentes propuestas de aula que fomentan el aprendizaje competencial de las Matemáticas de forma lúdica y motivadora, siendo deseable su implementación en edades tempranas.

Palabras clave: *metodología, Primaria, Geometría, manipulación, juego*

INTRODUCCIÓN.

Según ORDEN EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León:

> *"En el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas tiene gran importancia la manera de trabajar en el aula. Por ello, se deben generar situaciones diversas que permitan al alumnado adquirir conocimientos a través de diferentes estrategias, experimentar el gusto por el trabajo personal y colaborativo y valorar los procesos, el esfuerzo y los errores, procurando que sea partícipe de la evolución de su propio aprendizaje. También debe existir variedad en los procedimientos de evaluación para facilitar la exposición de conocimientos por parte de todo el alumnado y como herramienta imprescindible para mejorar la calidad de la educación" (*Pág. 32191)

El grupo de Divulgación Matemática del PPED de Valladolid comparte dichas apreciaciones, considera que la ejecución de ejercicios repetitiva de forma automática no aporta nada al verdadero conocimiento matemático y defiende la resolución de problemas como la base de un aprendizaje competencial. El docente debe ser capaz de mostrar propuestas motivantes y situaciones curiosas, que llamen la atención a los alumnos y que ofrezcan la posibilidad de interacción. Los problemas o situaciones problemáticas deberán elegirse de forma que el alumno sea capaz de abordarlos, para que acepte el reto y así participar de forma activa en su aprendizaje. Cuando un niño se implica e intenta resolver un problema o superar un reto, se convierte en protagonista de su propio proceso de enseñanza-aprendizaje. Incluso, sin llegar a la consecución de todos los objetivos planificados, la total resolución de la propuesta o no finalizar todo el proceso, el camino habrá merecido la pena y se estará fundamentando un buen aprendizaje, ya que está presente el esfuerzo, el interés por conocer los resultados y la explicación matemática que aparece en ellos, Por todo ello, se presentan las siguientes propuestas que ofrecen la posibilidad de aprender Matemáticas constructivas, en especial, investigando Geometría en el aula con los materiales y recursos necesarios para llevarlo a cabo.

DESARROLLO DEL TALLER.

Geometría elemental: conceptos matemáticos implicados

Unicidad de la recta que pasa por dos puntos.

Recta perpendicular a una dada pasando por un punto fijo.

Infinitud de las rectas paralelas a una prefijada.

Mediatriz de un segmento dado.

Bisectriz de un ángulo.

Ángulos internos y externos de un polígono.

Desarrollo de la actividad

Se parte de un trapecio recto a partir de un folio (Figura 1) y sólo se pueden resolver las cuestiones que se plantean mediante dobleces.

Práctica guiada:

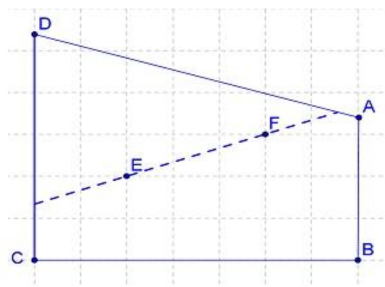


Figura 1.Trapecio de papel

Nombra a los vértices ABCD, señala aleatoriamente dos puntos E y F en el papel, construye, mediante un doblez la única recta que pase por ellos. Haz la perpendicular a dicha recta que pase por E. Concreta una recta paralela a la recta EF.

Lleva D sobre A y marca la línea. ¿Qué es? (Mediatriz del segmento AD) ¿Qué cumplen sus puntos? (Lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia de A y D).

Lleva el lado AB sobre AD. ¿Qué obtienes? (Bisectriz del ángulo formado por los segmentos AB y AD).

Técnica del sobre.

Demostración manipulativa de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º.

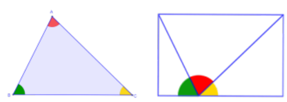


Figura 2. Técnica del sobre

En un triángulo cualquiera de papel, dobla por una de las alturas (Figura 2). Después, desdobla y lleva los tres vértices del triángulo al mismo punto de la altura sobre la base.

Reto 1: ¿Cuánto sumarán los ángulos internos de cualquier polígono?

Se recuerda que todo polígono se puede triangular y así utilizar el resultado anterior.

Investiga la justificación de la fórmula general para calcular la suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados ($S = (n-2).180^0$).

Un ángulo externo es aquel que es formado por un lado de un polígono y la prolongación del lado adyacente. Éste se encuentra en la parte exterior del polígono, y es suplementario de su correspondiente ángulo interno, como muestra la Figura 3, en el caso particular de un pentágono.

Reto 2: ¿Cuánto sumarán los ángulos externos de cualquier polígono convexo?

Para resolver este reto, se puede comenzar dibujando cualquier polígono convexo, por ejemplo un cuadrilátero. Después se señalarán y recortarán sus ángulos externos. Al agruparlos y sumarlos ¿Qué ha ocurrido? (Figura 4).

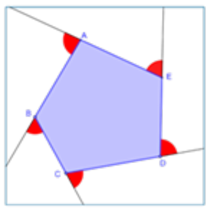


Figura 3. Ángulos externos de un pentágono

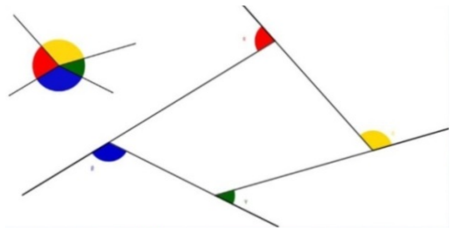


Figura 4. Suma ángulos externos

Poliminós

Un poliminó es un objeto geométrico obtenido al unir varios cuadrados o celdas del mismo tamaño de forma que cada par de celdas vecinas compartan un lado.

Reto 3: Búsqueda de todos los posibles poliminós: triminós, tetraminós, pentaminós, hexaminós,…

Se puede trabajar individualmente, en pequeño o gran grupo, es una buena práctica la búsqueda de todas las posibilidades, ya que es una buena forma de que aprendan a trabajar sistemáticamente, añadiendo un cuadrado a los anteriores y comprobando que es distinto de los otros. Después se les puede dar una plantilla cuadrada para que la peguen en un cartón y recorten los pentaminós, con los que se pueden plantear muchos retos: formar diferentes figuras, por ejemplo rectángulos, e incluso juegos de competición.

Tangram

Este material es muy útil para la visualización, cualquiera que haya jugado con él sabe que cuesta mucho conseguir hacer la primera figura, pero luego las demás resultan más fáciles; es como cuando vas al campo a coger setas, una vez que ves la primera empiezas a verlas todas. La clave está en educar al cerebro en la visualización y modelización matemática.

Reto 4: Con las piezas del tangram, ¿cuántos triángulos de distinto tamaño puedes hacer? ¿Cuántos polígonos distintos? Ponles nombre.

Polígonos

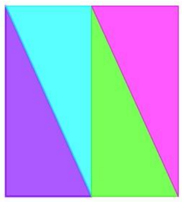


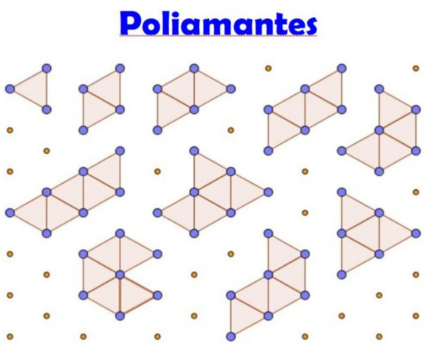
Figura 5. Cuadrado

Material: Cuatro triángulos rectángulos que forman un cuadrado (Figura 5)

Reto 5: Formar, nombrar y estudiar las propiedades de todos los cuadriláteros posibles a partir de los cuatro triángulos.

Poliamantes y Poliábolos

Los poliamantes son polígonos formados por triángulos equiláteros iguales, y los segundos por triángulos rectángulos isósceles; unidos por un lado, sobre trama isométrica o cuadrada, respectivamente.



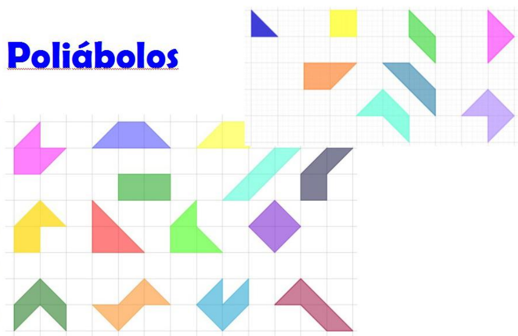


Figura 6. Poliamantes Figura 7. Poliábolos

Reto 6: Dibujar todos los posibles poliamantes y poliábolos en una trama isomética o cuadrada según el número de triángulos que se utilicen.

Banda de Moebius

Es un objeto fácilmente construible (Figura 8), pero con muchísimo potencial e interés como base de sorprendentes investigaciones. ¿Qué ocurre si la cortamos por la mitad? ¿Y a un tercio de la distancia al borde? ¿Y si, en vez de dar una vuelta antes de pegar, damos dos, tres o cinco…?

Figura 8. Banda de Moëbius

Tira de Papel

A partir de una simple tira de papel cuadrada se puede formar, mediante dobleces, un triángulo equilátero (Figura 9).¿Por qué de ese modo se han conseguido ángulos de 60°?

Reto 7: Utiliza el método anterior para hacer 10 triángulos equiláteros a partir de una tira de papel suficientemente larga (Figura 10).

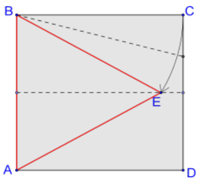


Figura 9. Cuadrado papel

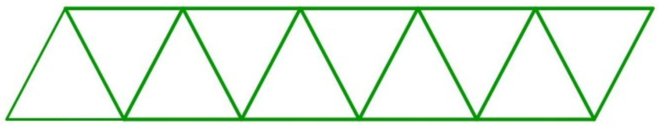


Figura 10. Tira con 10 triángulos equiláteros

Tetraedro o Flexágono

Con dicha tira (Figura 10) puedes formar un tetraedro. Vete dándole forma y cambia el giro después del 5° triángulo.

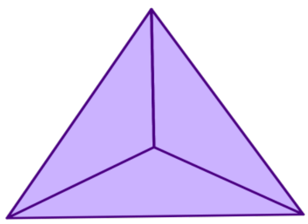


Figura 11. Tetraedro

Un flexágono es un objeto plano con forma de polígono (cuadrado, rectángulo o hexágono) creado mediante el pliegue de una pieza de papel cuya principal característica reside en que, mediante su correcto flexado, permite mostrar más caras de las dos únicas que en un principio tiene un polígono.

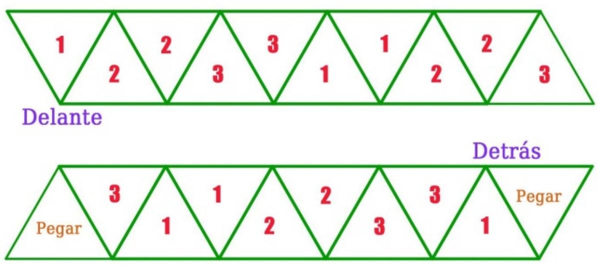


Figura 12. Cara delantera y trasera de la banda para construir el flexágono

Se podrá construir un flexágono a partir de la tira (Figura 12). Basta doblar la tira sobre sí misma, haciendo coincidir cada número sobre sí mismo. Al final, levanta el final de la tira sobre el otro extremo para hacer coincidir los triángulos que hay que pegar. Es como hacer una cinta de Moebius.

Reto 8: Crea tu propio flexágono.

Estrella pentagonal

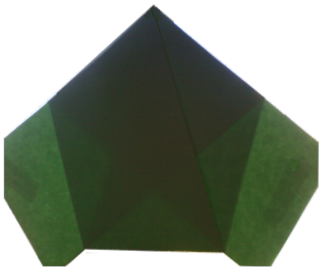


Figura 13. Nudo de papel

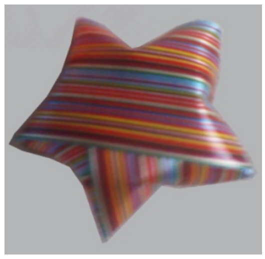


Figura 14. Estrella

Haz cuidadosamente un nudo con una cinta de regalo (Figura 13).

¿Qué figura ha aparecido?

Enrolla la cinta envolviéndola alrededor del pentágono. Engancha el final de la tira y dale volumen. Aparecerá una estrella (Figura 14).

Sistema Solar en forma de tira

El alumnado, en general, manifiesta dificultades en la comprensión y visualización mental de ciertas magnitudes cuyos valores son muy grandes como, por ejemplo, las distancias en el Sistema Solar. Para facilitar dichas limitaciones, se presenta en el Anexo un material fotocopiable, que previo recorte y unión representa proporcionalmente las distancias entre ciertos astros, mediante pasos equivalentes a 130 millones de kilómetros.

Geoplanos. Perímetros y Áreas

Un geoplano es un instrumento manipulativo matemático, consiste en un tablero con trama cuadrada, isométrica o circular. Aunque también se pueden reproducir fácilmente en papel cuadriculado, pautado, con fondos de las pizarras digitales interactivas o acceder fácilmente a los geoplanos virtuales en la red.

A continuación, se presentan sencillas cuestiones que se pueden proponer a los alumnos.

¿Cuántos segmentos de distinta longitud puedes dibujar en una trama cuadrada 3x3?, ¿y en una de 4x4? A continuación se presentan las soluciones.

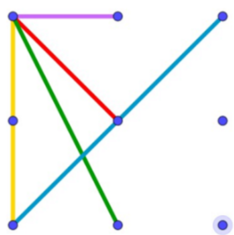


Figura 15. Diferentes longitudes en trama 3x3

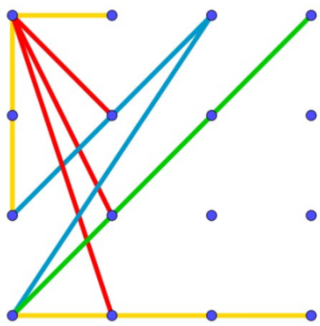


Figura 16. Diferentes longitudes en trama 4x4

Reto 9: En una trama 3x3, ¿Cuántos triángulos de diferente forma puedo formar?

FIGURAS ISOPERIMÉTRICAS son aquellas que comparten el mismo perímetro, aunque tengan diferente forma y área.

Reto 10: Dibuja todos los rectángulos posibles, con los vértices en la trama, de perímetro 12 cm.

FIGURAS EQUIVALENTES son aquellas que comparten la misma área, aunque tengan diferente forma y perímetro.

Reto 11: Dibuja todos los polígonos posibles de área 2 cm^2 con los vértices en la trama.

La siguiente pregunta supone una interesante línea de investigación ¿Habrá alguna relación entre el área, los puntos interiores y puntos frontera de los polígonos que se pueden formar en el Geoplano?

Georg Alexander Pick (1899) matemático judío que murió en un campo de concentración encontró la famosa "fórmula de Pick" (Figura 17), siendo S el valor del área de la figura representada.

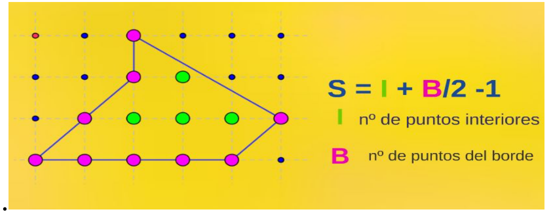


Figura 17. Fórmula de Pick

Medidas, conjeturas y comprobación

	Conjetura	Comprobación
¿Dar una patada al suelo?		
¿Abrir y cerrar el puño?		
¿Parpadear?		
¿Escribir tu nombre?		
¿Cuántas veces respiras?		
¿Cuántos latidos da tu corazón?		

Figura 18. Propuestas a conjeturar y comprobar

Material necesario: lápiz y cronómetro.

En primer lugar, concreta un valor sobre el número de veces que hipotéticamente realizarás una acción en una unidad de tiempo fijada previamente y, luego, realízala cuantificándola con la ayuda del cronómetro. Compara la conjetura con la realidad.

¿Se te ocurre alguna otra actividad susceptible de ser medible sobre la que puedas conjeturar y, posteriormente, comprobar mediante algún útil de medición?

Máquinas de medir

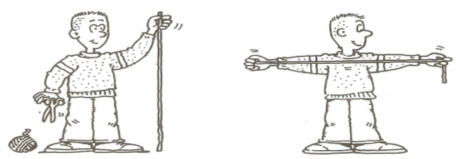


Figura 19. El largo de la Cuerda

Se convencerá a los alumnos de que son unas máquinas de medir; lo único que se necesita es una cuerda.

Corta un trozo de cuerda igual de larga que tu estatura y mide con ella tu envergadura (Figura 19).

Reto 12: Contesta a las siguientes preguntas:

¿Eres una máquina cuadrada o rectangular?

¿Tienes proporción áurea?

¿Cuántos palmos crees que mide tu cuerda?

¿Cuántas vueltas da la cuerda alrededor de tu cabeza?

Con ayuda de un compañero mide tu paso

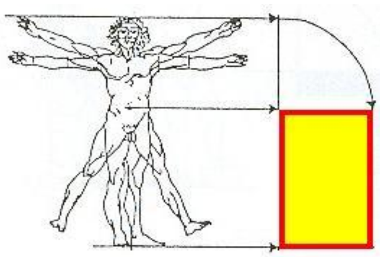


Figura 20. Proporciones áureas humanas

Primero calcula a ojo cuántos largos de cuerda harán falta para medir la longitud de la clase. Utiliza después el mismo trozo de cuerda para medir el largo y el ancho de la clase.

Esta práctica sirve para que los alumnos sean conscientes de que medir es comparar, según una unidad de medida.

Simetrías

Material necesario: Espejo y plantillas impresas.

Desarrollo de la actividad:

Se presentan plantillas como las que se muestran a continuación:

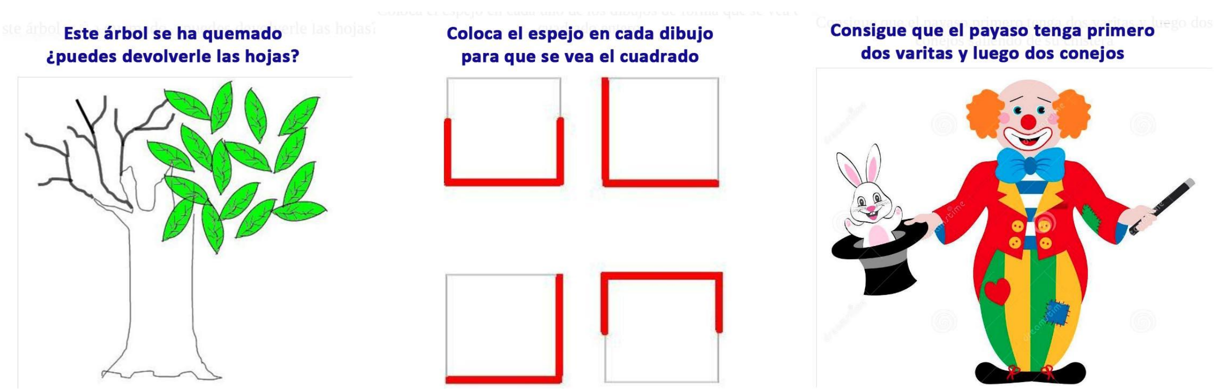


Figura 21. Plantillas para trabajar simetrías

También es interesante el estudio de la simetría vertical y horizontalmente de las letras del alfabeto y escribir palabras para ser leídas en el espejo.

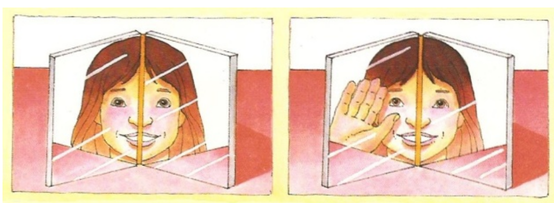


Figura 22. ¿Cómo te ven los demás?

Para las siguientes actividades se necesita libro de espejos y plantillas impresas.

- ¿Cómo te ven los demás?

Mueve el libro de espejos hasta que puedas ver la mitad de tu rostro en cada uno y levanta tu mano derecha, visualizándolo en la lámina izquierda, según figura

- Encontrar todos los polígonos.

Dibuja una línea en un papel y utiliza el libro de espejos para conseguir distintos polígonos.

- Coloca el libro de espejos sobre el dibujo rojo para conseguir los diferentes dibujos de diferentes colores que aparecen a su izquierda (Figura 23).

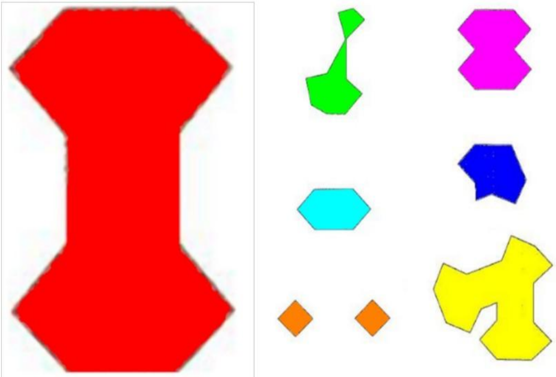


Figura 23. Encontrar diferentes polígonos

- Comprueba que con una parte del mosaico se puede reconstruir el dibujo entero (Figura 24) utilizando el libro de espejos con la apertura adecuada.

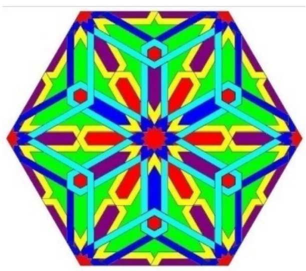


Figura 24. Imagen con simetrías

Baldosa catalana

¿Cuántas composiciones diferentes puedes hacer con las dos baldosas de la Figura 25?

Reto 13: ¿Cuántos mosaicos diferentes puedes hacer según el número de baldosas que utilices?

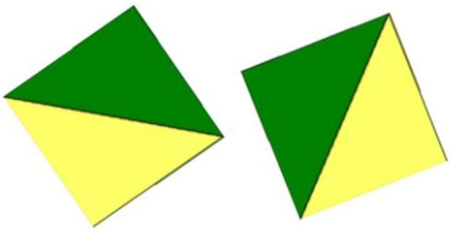


Figura 25. Baldosa catalana

Kirigami

El kirigami es el arte del papel recortado. Consiste en doblar un papel en las partes que necesitemos (no necesariamente iguales) y, después, dar un único corte recto para conseguir alguna de las siguientes figuras.

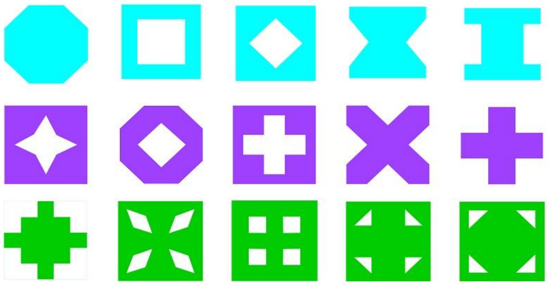


Figura 26. Composiciones kirigami

Figura 27. Estrellas papiroflexia.

También se pueden conseguir bonitas estrellas y hacer composiciones muy creativas.

Reto 14: Decorar el aula con motivos navideños.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. BOE Núm. 25, publicado el 29 de enero de 2015, Pág. 6986 a 7003

Orden EDU/362/2015, de 4 de mayo, por la que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la educación secundaria obligatoria en la Comunidad de Castilla y León. BOCyL Núm. 86, publicado el 8 de mayo de 2015, Pág. 32051.

Fisher, R. C. y Vince, A. (1990). *Investigando las Matemáticas*. Madrid: AKAL.

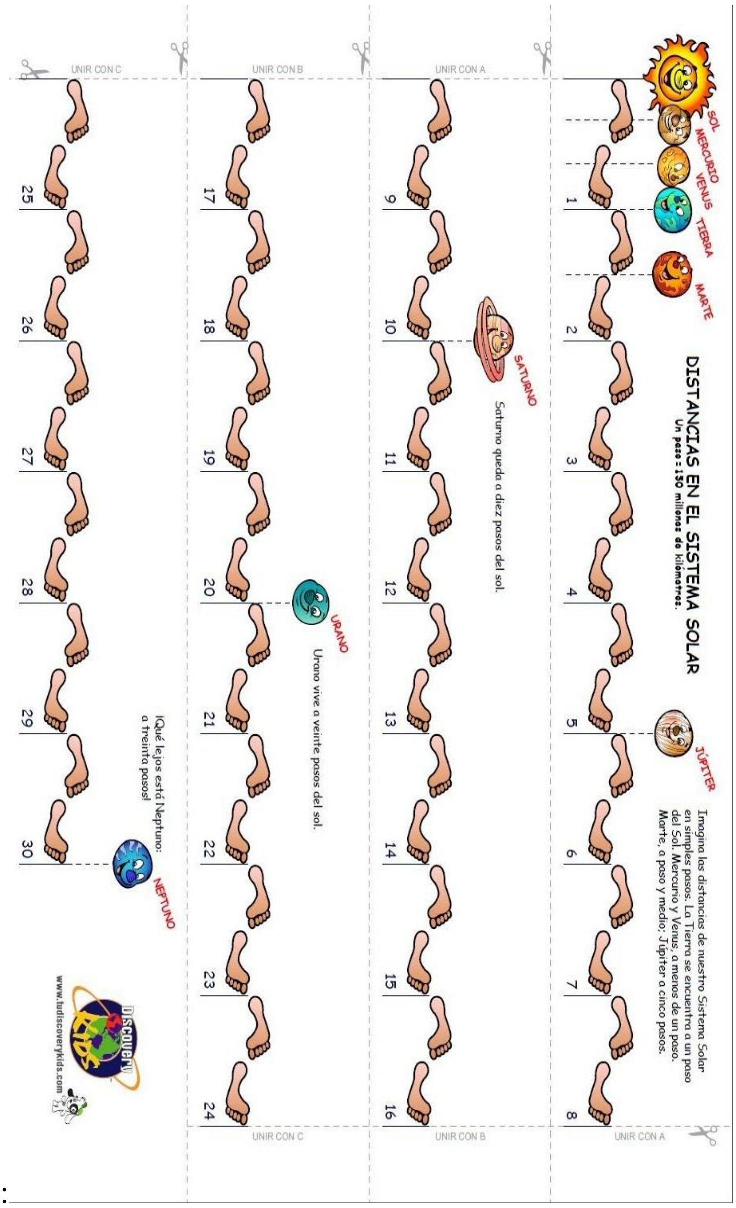
Gardner, M. (1994). Nuevos pasatiempos matemáticos. Madrid: Alianza Editorial.

Grupo Alquerque (2008). Doblar y cortar. Kirigami geométrico. *Revista Suma nº 59*,55-58.

Iranzo, J. A. (2008). El nudo pentagonal II. Papiroflexia y matemáticas. *DivulgaMAT*. Recuperado el 12 de junio de 2018. 2001vps280516.ovh.net/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=8638:28-el-nudo-pentagonal-ii&catid=65:papiroflexia-y-matemcas&directory=67

Watson, P., Scruton, C., y Fenton, R. (1988). *Luz fantástica*. Madrid: Editorial Everest.

ANEXO



:

Para hacer referencia al artículo:

Carazo, M.; Fernández, R.M. y Negueruela, I, (2018). Geometría ¿Juegas conmigo? En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 119-129). Lugar: Universidad de León

PRIMEROS PASOS CON GEOGEBRA 3D

José Manuel Arranz San José.

IES Álvaro de Mendaña, Ponferrada.

Instituto GeoGebra de Castilla y León. IGCL.

Resumen

La vista 3D de GeoGebra permite trabajar en el espacio con la misma facilidad que con la vista gráfica se trabaja en el plano.

En este taller, destinado fundamentalmente a usuarios sin experiencia en la utilización de la vista 3D, se realizarán construcciones elementales, empezando por la creación y manipulación de puntos, rectas, planos y demás elementos básicos de la Geometría en el espacio.

La vista 3D de GeoGebra permite construir y estudiar de forma sencilla e intuitiva cuerpos geométricos: cilindros, conos, prismas, pirámides, poliedros regulares,…

El estudio de la Geometría Analítica tridimensional se simplifica con la ayuda de GeoGebra.

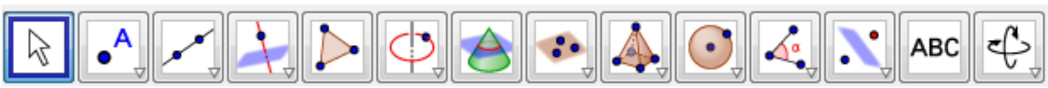
GeoGebra 3D pone a disposición de profesores y alumnos un conjunto de herramientas y comandos que permiten trabajar en el espacio de forma sencilla y con un rápido aprendizaje.

Palabras clave: Matemáticas, Geometría, espacio, GeoGebra.

GEOGEBRA 3D

Una de las novedades más significativas de la versión 5.0 de GeoGebra (septiembre 2014) fue la incorporación de la vista 3D.

La vista 3D tiene barra de herramientas propia, que contiene herramientas comunes a la vista gráfica 2D y otras específicas para trabajar en el espacio.

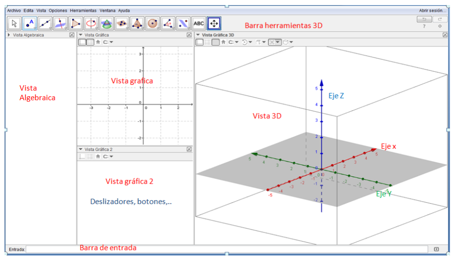


Además de las herramientas de esta barra, hay multitud de comandos que amplían las posibilidades de construcción en el espacio.

La vista 3D, siguiendo la conocida filosofía GeoGebra, está interconectada con el resto de vistas, lo que aumenta su potencia y funcionalidad.

Para trabajar en la vista 3D, es conveniente que ésta ocupe una parte grande de la pantalla. Las vistas algebraica y gráfica (o gráfica 2) deben estar presentes, por lo que es bueno tener una disposición de pantalla en que nos sintamos cómodos.

Una disposición adecuada es la que se muestra:



Es buena idea guardar un archivo como el que se muestra sin contenido para cuando se vayan a hacer construcciones utilizando vista 3D.

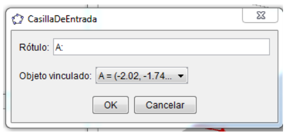
Ocasionalmente pueden abrirse otras ventanas: CAS, Hoja Cálculo, proyección 2D,…

1.- Primeros pasos con GeoGebra 3D

Señalando cualquier objeto con el botón derecho del ratón en cualquiera de las vistas, se accede a las propiedades del objeto para cambiar su aspecto visual.

1.1 Creación de Puntos 3D. Hay varias formas de crear puntos en la vista 3D.

- Seleccionamos la herramienta punto y hacemos clic en la vista 3D. El punto se crea sobre el plano XY. También pueden crearse puntos sobre uno de los ejes. Seleccionado el punto, éste puede moverse horizontalmente o verticalmente.
- En la barra de entrada podemos introducir directamente sus coordenadas A = (1,1,2) y el punto se crea en esa posición que puede moverse con ratón como se ha indicado.
- Utilizando casillas de entrada. Es la forma más versátil.

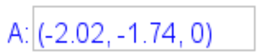


Crea un punto en plano XY

Crea una casilla de entrada en la vista gráfica o vista gráfica 2

En **Rótulo** escribe A: y, como **Objeto vinculado**, selecciona A.

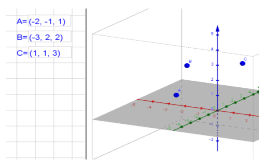
Ahora puede editarse la casilla e introducir el punto que se desea o bien mover el punto con el ratón.



1.2 Plano por tres puntos.

Crea tres puntos A, B, C sobre el plano XY

Mueve al menos uno de ellos verticalmente.



Crea tres casillas de entrada y vincula cada una de ellas a los puntos A, B, C.

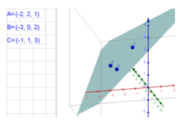
Botón derecho sobre cada casilla, Propiedades: Texto: mediano, Estilo: longitud 10

Mueve los puntos A, B, C con el ratón o bien editando coordenadas en las casillas de entrada.

Determina la ecuación del plano que pasa por A(-2,-1,1), B(-3,2,2), C=(-1,1,3)

Plano por tres puntos. Selecciona A, B, C

O bien, **Plano(<Punto>, <Punto>, <Punto>)**

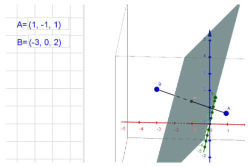


1.3 Plano mediador de un segmento AB

Crea A, B y las casillas de entrada.

Punto medio o centro, selecciona A y B. Renombra como M.

 Selecciona los puntos A y B



O bien **Segmento(<Punto (extremo)>, <Punto (extremo)>)**

 **Plano perpendicular**, selecciona el segmento AB y el punto M

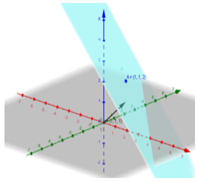
La construcción anterior puede hacerse directamente con la instrucción: **PlanoPerpendicular(**PuntoMedio(A, B),Recta(A, B)), o bien con el comando **PlanoBisector**(A,B)

1.4 Plano a partir de vector normal y punto. 

Representa el plano p que pasa por A=(1,1,2) con vector normal v=(1,1,1).

A=(1,1,2) No puede llamarse π a un plano pero si puede usarse
v=(1,1,1) como rótulo.

 **Plano perpendicular** y selecciona el punto y el vector.



Salvo que se indique lo contrario A (mayúscula)= GeoGebra entiende que es un punto. v (minúscula)= entiende que es un vector, lo que ahorra escritura.
Modifica aspectos visuales del plano.

Puede representarse un plano introduciendo directamente su ecuación como, por ejemplo, 2x+3y-z+4=0. En este caso también es más versátil hacerlo mediante una casilla de entrada para modificar su ecuación de forma más fácil.
Conviene poner la variable z, aunque tenga coeficiente 0 como en la expresión x + 2y+ 0 z =3. En caso contrario, GeoGebra puede interpretarla como la recta x+2y=3 en el plano XY.

1.5 Representación de rectas en el espacio.

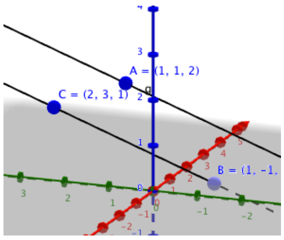
Para representar una recta puede hacerse:
Recta(<Punto>, <Punto>) **Recta(<Punto>, <Vector director>)**
Recta(<Punto>, <Recta (paralela)>) **Interseca(<Objeto>, <Objeto>)** con objeto = plano

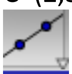
Cualquiera de estas formas puede hacerse desde la barra de herramientas seleccionando los objetos con el ratón.

Determina la ecuación de la recta que pasa por A(1,1,2) y es paralela a la recta que para por B(1,-1,0) y C(2,3,1).

A=(1,1,2)
B=(1,-1,0)
C=(2,3,1)

Abre el archivo 12_planoportrespuntos, borra el plano, y edita los puntos.



 Representa la recta que pasa por B y C

 Recta paralela y selecciona recta y punto.

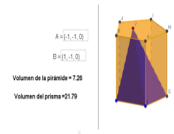
Modifica aspectos visuales de rectas, color, grosor,….

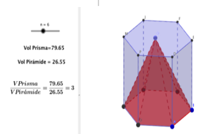
2.- Cuerpos geométricos.

En la versión actual de GeoGebra aún no está incluida, entre los botones de la barra de herramientas, la opción de polígono regular, pero sí es posible conseguirlo desde la barra de entrada con la orden: **Polígono(<Punto>, <Punto>, <Número de vértices>, <Dirección>)**

2.1 Prisma y pirámide proporcionales.

Introduce los puntos A=(-1, -2, 0) y B=(1, -1, 0) en la forma que desees.

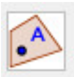




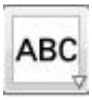
Polígono[A, B, 5, EjeZ]

 Con la orden **Prisma desde su base**, construye un prisma levantando el polígono anterior.

Cambia el color del prisma y reduce la opacidad al 25%.

 Con la opción de **Punto en objeto**, coloca un punto en la base superior del prisma, renómbralo a V.

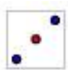
Crea una pirámide con la base el polígono inicial (polígono1) y de vértice V. **Pirámide(polígono1, V)**

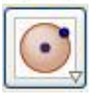
 Crea un texto en la ventana gráfica 2D donde aparezca el volumen del prisma, el de la pirámide y su relación.

2.2. Figuras de Arquímedes.

El resultado anterior fue demostrado por el matemático griego Demócrito (-460, -360), que también lo generalizó al cono y el cilindro. Arquímedes (-287, -212) encontró la relación entre el volumen del cilindro y de la esfera. Veámoslo con GeoGebra.

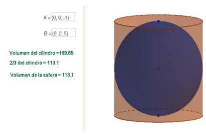
Introduce los puntos A = (0, 0, -1) y B = (0, 0, 5) de cualquiera de las formas.

 Halla el punto medio de A y B, llámalo O.

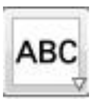
 Con la herramienta Esfera dado su centro y un punto construye la esfera de centro O y que pase por uno de los dos puntos. O bien la instrucción: **Esfera(O,A)**

Crea el valor del radio de la esfera con la orden, que es válida para esferas: r = **Radio(<circunferencia>)**

 Elije la herramienta de Cilindro. Pulsa en los puntos A y B e introduce en la casilla del radio el valor r.



Para hallar el volumen de la esfera debes usar el comando: **Volumen(<sólido>)**

 Crea un texto en la ventana gráfica 2D donde aparezca el volumen del cilindro y la esfera. Comprueba que el volumen de la esfera es 2/3 de la del cilindro.

2.3. Esfera que pasa por cuatro puntos.

En esta actividad vamos a construir un tetraedro cualquiera y a comprobar que existe una única esfera que pasa por los cuatro vértices.

Crea tres puntos, A, B, C sobre el plano z=0 y un punto D fuera de él.

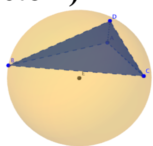
Con la orden Pirámide construye el tetraedro de base ABC y vértice superior D.

Construye el plano mediador de, al menos, tres aristas del tetraedro, utilizando la orden:

PlanoBisector(<punto>,<punto>) y representa los tres planos.

Con la herramienta **Intersección de dos superficies** construye dos rectas que sean intersección de los planos. O bien **Interseca(<Objeto>, <Objeto>)**

Utiliza la herramienta **Intersección** para hallar el punto de corte de las dos rectas.



Oculta los planos y las rectas construidas.

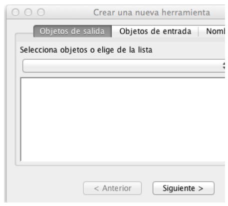
Dibuja la esfera que tiene de centro el punto antes calculado y pasa por cualquiera de los cuatro vértices.

Esfera(<centro>,<punto>)

Si mueves cualquiera de los vértices comprobarás que la esfera es circunscrita al tetraedro.

Herramientas personales.

Crear una herramienta que dados cuatro puntos no coplanarios construya la esfera que pasa por ellos. Sobre la construcción anterior:



Menú Herramientas/ crear una nueva herramienta...
Objetos de salida, desplegar menú y elegir esfera.
Objetos de entrada, seleccionar los 4 puntos, (ya aparecen seleccionados en este caso)
Nombre e icono, dar nombre a la herramienta y si se desea un icono e instrucciones de uso de la herramienta.

La herramienta creada se guarda junto al archivo. Puede también guardarse como archivo independiente con extensión .ggt y usarse en otra construcción que se precise.

3.- Geometría analítica del espacio.

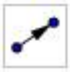
En estos ejercicios vamos a limitarnos a realizar la construcción geométrica. Utilizando simultáneamente la vista CAS pueden hacerse los cálculos.

3.1. Dividir un segmento en partes y plano perpendicular.

Considera los puntos A(1, 2, 3) y B(1, 0, 4).

a) Halla las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.
b) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al segmento AB.

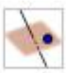
Introduce los puntos desde la barra de entrada.



Construye el vector ***u*** de A hasta B.

Los puntos que dividen al segmento en tres partes iguales son los siguientes:

$$\mathbf{M = A + u/3} \qquad \mathbf{y} \qquad \mathbf{N = A + 2u/3}$$



Selecciona la herramienta **Plano perpendicular** y pulsa sobre el punto A y el vector u.

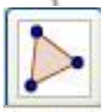
3.2. Área y Volumen.

Considera el plano π de ecuación 2x + y + 3 z – 6 = 0.

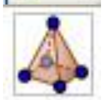
a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.
b) Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados.

Introduce en la barra de entrada la ecuación general del plano.

Con la herramienta **Intersección** halla los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas. Sean A, B y C.



Con la herramienta **Polígono**, construye el triángulo de vértices A, B y C. En la ventana algebraica tendremos el valor de su área.



Introduce el punto O = (0, 0, 0).
Con la herramienta **Pirámide** construye el tetraedro de base el polígono anterior y vértice en O. En la ventana algebraica nos aparecerá su volumen.

Con el proceso anterior obtendremos un valor aproximado del área y del volumen. Si queremos un valor exacto podemos utilizar la ventana CAS para realizar los cálculos más precisos.

3.3 Centro del paralelogramo.

El punto M(1, -1, 0) es el centro de un paralelogramo y A(2, 1, -1) y B(0, -2, 3) son dos vértices consecutivos del mismo.

a) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.
b) Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

Como todo lo hemos visto ya en casos similares, en éste no indicamos el proceso a seguir.

4.- Poliedros regulares.

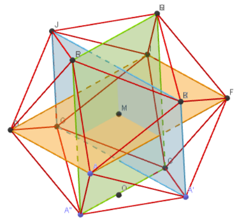
Las construcciones que se describen en este apartado se realizan de forma más sencilla con la plantilla que se menciona, puede descargarse desde:
https://www.geogebra.org/m/nDz3w6Ts#material/K85W8ErK
Plantilla preparada para facilitar construcción de poliedros regulares, de forma que ya aparezcan centrados en eje Z, y así facilitar rotaciones y otras operaciones.

Seleccionar n=3 para construir tetraedro, octaedro e icosaedro (cara triángulo equilátero), n=4 para construir cubo y n=5 para dodecaedro.
Para construir un poliedro regular basta escribir la instrucción:

Nombrepoliedro(A,A',A'') con nombrepoliedro = tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro o icosaedro según el poliedro regular que se desee construir.

4.1 Icosaedro y rectángulo áureo.

Selecciona n=3 en plantilla

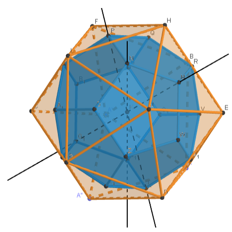


Icosaedro(A,A',A'')
Construye sobre él tres rectángulos perpendiculares uniendo vértices de aristas opuestas.
Comprueba que los rectángulos construidos son áureos.
$a/b=(1+\sqrt{5})/2\approx 1.62$

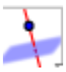
4.2 Dualidad en poliedros regulares.

Construye un icosaedro y su poliedro dual, el dodecaedro.

Selecciona n=3 en la plantilla. **Icosaedro(A,A',A'')**
Modifica aspectos visuales (color, grosor líneas, opacidad) del icosaedro seleccionándolo en ventana algebraica con botón derecho.



 **Punto medio** y selecciona dos vértices opuestos.

 **Perpendicular**, pincha en el centro construido y en una cara.

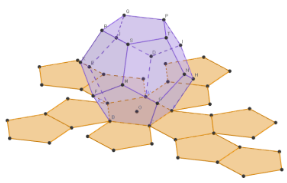
 **Intersección**, selecciona recta y cara. Repite eso para tres caras consecutivas

Dodecaedro(M,N,P). Si el dodecaedro no sale en la posición deseada, cambiar orden de vértices.
Mide la arista de icosaedro y dodecaedro y calcula su cociente.

Utiliza el comando **Textoirracional(número)** para convertir en irracional el cociente calculado. ¿Qué número se obtiene?

4.3 Desarrollo de poliedros regulares. Comando Desarrollo.

Construye un dodecaedro. **Dodecaedro(A,A',A'')**, sea a.



En vista gráfica 2, deslizador entre 0 y 1. Sea t su nombre
Desarrollo(a,t)

4.4 Inscribir un poliedro regular en otro.

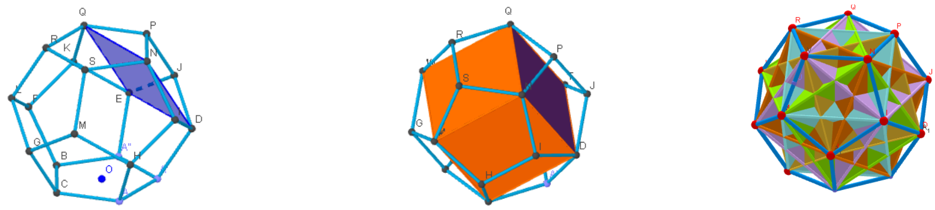
Inscribir un cubo en un dodecaedro.

Sobre la plantilla de apartado 1. Seleccionar n=5.

Dodecaedro(A,A',A'')

Construir polígono eligiendo 4 puntos que formen cuadrado. E,D,N,Q.

Cubo[D,N,Q]. Sea b nombre del cubo.



Mediante rotaciones del cubo sobre el eje Z puede construirse la figura de la derecha donde se representan cinco cubos en el dodecaedro.

Rota [b,72°,EjeZ] Repetir tres veces cambiando el nombre del cubo a rotar o bien el ángulo.

Puede hacerse de una sola vez mediante una secuencia, pero en este caso quedarían todos los cubos de igual color. **Secuencia(Rota(b, i 72°, EjeZ), i, 0, 4).**

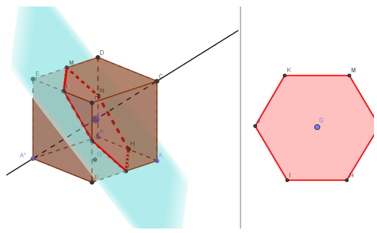
4.5 Cortes por un plano de poliedros regulares.

Estudiar cortes en cubo por plano perpendicular a recta que pasa por vértices opuestos de un cubo.

Cubo(A,A',A'') crea el cubo.

Recta. Selecciona dos vértices opuestos.

Construye un punto sobre la recta.



Plano perpendicular. Selecciona punto y recta.

Herramienta **intersección de superficies**. Selecciona el plano y el cubo.

Botón derecho sobre plano y elige ***"representación 2D de …"***. Se obtiene la imagen de la derecha. Mueve el punto sobre la recta para ver en la nueva vista las secciones que se originan.

5.- Secciones Cónicas

Representar un cono infinito y un plano que al cortar se generen las cónicas

α ángulo entre 1 y 90 grados e incremento 1 grado.

β ángulo entre 1 y 90 grados e incremento 1 grado.

h entre 1 y 4 incremento 0.1.

Crea estos tres deslizadores.

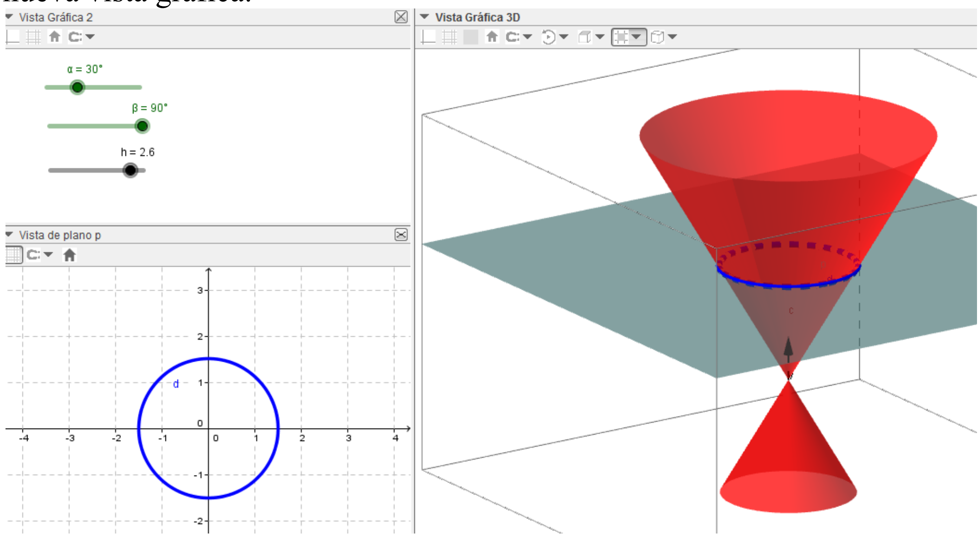

Pincha en el origen de coordenadas. O=(0,0,0)

v=(0,0,1) vector sobre eje Z.

ConoInfinito(O,v,α) crea el cono
a=**Plano(EjeX,EjeZ)** o bien a: y=0
Rota(a,β,EjeX) sea b el plano que se obtiene
Traslada[b,(0,0,h)] llama p a este plano.


Selecciona la herramienta Intersección de dos superficies y haz clic en cono y plano. O bien escribe **Interseca(nombreplano, nombrecono)**

Selecciona con botón derecho sobre el plano y selecciona: Representación 2D de nombre plano. Se abre una nueva ventana que representa el plano y los elementos que este contiene en una nueva vista gráfica.



Basta mover deslizadores para ver las diferentes cónicas que se generan incluidas las degeneradas: punto, recta y dos rectas secantes.

Propuesta avanzada: Incluir en la construcción textos con el nombre de la cónica que resulta en función de los valores de los parámetros α, β,h.

6.- Superficies

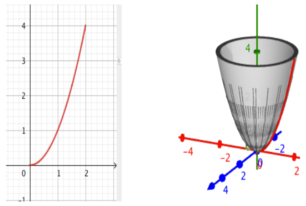
6.1 Superficies de revolución.

GeoGebra permite construir superficies de revolución de diferentes formas, veamos alguna:

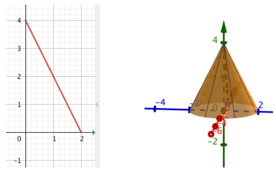
- **Superficie(función, ángulo, recta)** La función puede estar definida en un intervalo así como contener parámetros previamente definidos mediante deslizadores.

En la barra de entrada escribe:

Función(x^2,0,2) construye la parábola f(x)=x^2 en el intervalo (0,2). También puede escribirse : **Si(0<x<2,x^2)**

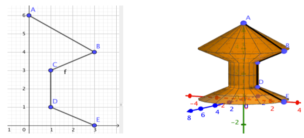


Superficie(f,360º,EjeY) crea el paraboloide de revolución. Si se desea ver en la posición habitual basta poner el Eje Y vertical. Botón derecho en graficas 3d, vista grafica, Eje Y vertical.



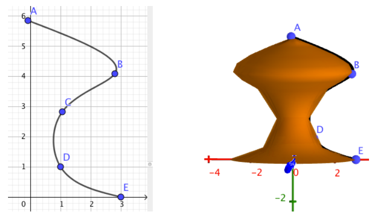
Construye un cono de base 2 y altura 4. La función en este caso es **Función(-2x+4,0,2)**
No es posible, de momento, **Superficie(segmento, ángulo, eje)**. Sí se puede hacer parametrizando el segmento, o bien, definiendo el segmento como poligonal. **Poligonal(A,B)**

- **Superficie(poligonal, ángulo, Eje)**



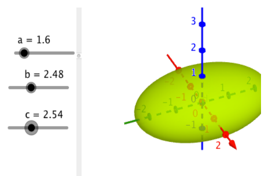
Crea varios puntos A,B,C,D,E en la vista 2D
Poligonal(A,B,C,D,E) sea f su nombre
Superficie(f,360º,EjeY)

- **Comando Spline**

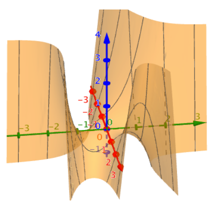


Partiendo de la construcción anterior sobre la poligonal
Spline({A,B,C,D,E},3)
En general **Spline(<Lista de puntos>, <Grado ≥ 3>)**
El comando **Spline** redondea o alisa la poligonal.

6.2 Superficies en forma implícita y explicita.



GeoGebra permite construir funciones definidas en forma implícita si éstas son de grado <=2, (cuádricas). La expresión x^2/a^2 +y^2/b^2+z^2/c^2 =1 construye el elipsoide de semiejes a, b, c.



En forma explícita, con z despejada, se representa en principio cualquier superficie.
La imagen de la derecha muestra la función multivariable:
z= x^2y-xy^2 , una variante de la superficie conocida como silla de mono.

Construye el cilindro hiperbólico x^2/a^2-z^2/c^2=1. Modifica los parámetros a y c. Se facilita la visualización eligiendo tamaño de la caja pequeño en el menú de la vista 3D.

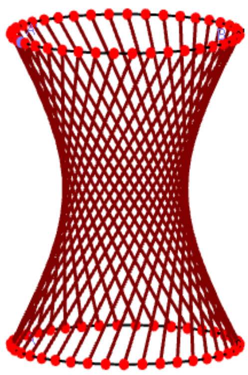
6.3 Superficies mediante ecuaciones paramétricas.

Si se conocen las ecuaciones paramétricas de una superficie, GeoGebra la grafica con muy buena calidad.

La instrucción es genérica es:
Superficie(<Expresión>,<Expresión>, <Expresión>,<Parámetro 1>,<Valor inicial 1>,<Valor final 1>, <Parámetro 2>, <Valor inicial 2>, <Valor final 2>)
Superficie(r (1 + v / 2 cos(u / 2)) cos(u), r (1 + v / 2 cos(u / 2)) sen(u), b v / 2 sen(u / 2), u, 0, 2pi, v, -c, c) construye la banda de Moëbius de radio r y anchura 2c.

6.4 Superficies regladas.

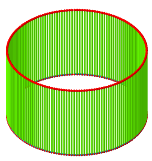
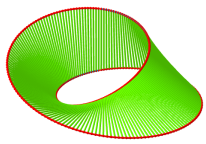
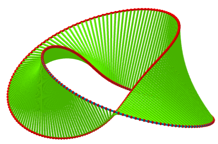
Construcción de un hiperboloide como superficie reglada.



Abrir el archivo plantilla poliedros.
Borrar los puntos A' y A''.
Modificar n, que varíe entre 3 y 100
Deslizador h, entre 1 y 5 incremento 0.1
Deslizador α angular entre 0 y 360
Secuencia(Rota(A, i 360◦/n,O),i,1,n)
v=(0,0,h) ; Traslada(c,v) ; B=Traslada(A,v)
Rota(B, α, EjeZ)
Secuencia(Rota(B,i 360◦/n, EjeZ),i,1,n)
Zip(segmento(A,B),A,lista1,B,lista2)
Modifica el valor de α desde el deslizador.

Puede también construirse hiperboloide como superficie.
Basta introducir la ecuación:
Superficie(cos(a) + b sen(a), sen(a) - b cos(a), b, a, 0, 2 pi, b, -h, h)
con h altura definida mediante un deslizador.

Propuesta un poco más difícil: Construir cinta de Moëbius como superficie reglada.

Algunas de estas construcciones y muchas otras con GeoGebra 3D pueden verse y descargarse en http://www.geogebra.org/u/arranz

Referencias bibliográficas

Ferreol, R. (2008-2018). Enciclopedia de formas matemáticas. https://www.mathcurve.com/

Hohenwarter, M. Manual de GeoGebra. https://wiki.geogebra.org/es/Manual

Losada, R. (2011). Curso Virtual GeoGebra. http://geogebra.es/cvg/

Para hacer referencia al artículo:

Arranz, J.M. (2018). Primeros pasos con Geogebra 3D. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 130-141). Lugar: Universidad de León

GEOGEBRA PARA ANDAR POR CLASE

Enrique Hernando Arnaiz y Rubén Jiménez Jiménez

[a]C.E. La Merced-Jesuitas (Burgos), [b]IES José Luis l. Aranguren (Ávila)

Resumen

El taller consistirá en ejemplos prácticos -sencillos desde el punto de vista técnico, que sirvan incluso a aquellos que empiezan- de momentos en los que usar el software GeoGebra a modo de laboratorio de Matemáticas en las aulas de Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Ejemplos sobre cómo usarlo para visualizar y hacer comprensibles todo tipo de conceptos y contenidos del currículum, hacer manifiesto el por qué y para qué de muchos de ellos y usar el gran avance de esta tecnología y su aspecto dinámico para comprobar tanto que un resultado es válido para todos los casos como, y seguramente lo más importante, para plantear investigaciones en las que nuestros alumnos busquen patrones, formulen conjeturas e, incluso, lleguen a resultados propios.

Palabras clave: GeoGebra, taller, laboratorio.

VISIÓN GENERAL

El taller consistirá en ejemplos prácticos -sencillos desde el punto de vista técnico, que sirvan incluso a aquellos que empiezan- de momentos en los que usar el software GeoGebra a modo de laboratorio de Matemáticas en las aulas de Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Ejemplos sobre cómo usarlo para visualizar y hacer comprensibles todo tipo de conceptos y contenidos del currículum, hacer manifiesto el por qué y para qué de muchos de ellos y usar el gran avance de esta tecnología y su aspecto dinámico para comprobar tanto que un resultado es válido para todos los casos como, y seguramente lo más importante, para plantear investigaciones en las que nuestros alumnos busquen patrones, formulen conjeturas e, incluso, lleguen a resultados propios.

Comprendemos que en 1,5 horas de taller no va a dar tiempo a profundizar mucho en el uso de esta magnífica herramienta, pero nuestro objetivo es que los asistentes se lleven una visión, con varios ejemplos de la ESO y Bachillerato, de la ingente cantidad de contenidos que se pueden desarrollar con GeoGebra.

ACTIVIDADES

RAZÓN DE SEMEJANZA

CURSO: 2º de la ESO y 4º de la ESO Aplicadas.

Esta actividad consiste en medir la longitud y el área del recinto limitado por las murallas de Ávila. En googlemaps capturaremos la imagen de las murallas junto con la escala; la trasladaremos a GeoGebra y, utilizando semejanza, hallaremos el perímetro de las murallas de Ávila y el área que abarcan.

Acabada la actividad, buscamos información en Internet sobre los datos reales y estudiamos los errores cometidos en nuestros cálculos.

Esta actividad finaliza haciendo el alumnado una construcción similar a la anterior con el espacio que ellos quieran, bien sea algo conocido (Central Park, el Pentágono de EEUU, etc.) o bien algo interesante para ellos (una finca, el área de su pueblo, etc.).

OPTIMIZACIÓN

CURSO: 2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología

Mediante una construcción de GeoGebra, calcularemos el cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

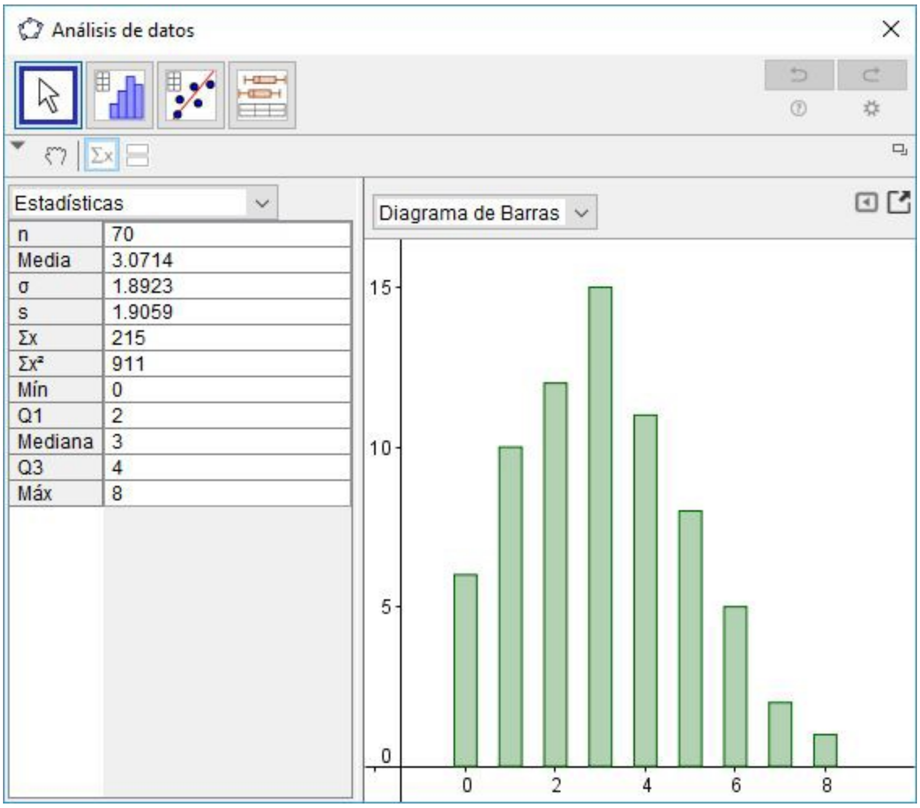
CURSO: Toda la ESO.

En esta actividad resolveremos con GeoGebra un ejercicio clásico de Estadística descriptiva.

Un encuestador pregunta a 70 personas de Ávila por el número de veces que han subido a la muralla obteniendo los siguientes resultados resumidos en la siguiente tabla:

Veces	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Personas	6	10	12	15	11	8	5	2	1

- Muestra un diagrama de barras con los datos del ejercicio.
- Calcula la media, la desviación típica y la varianza.
- Calcula el cuartil 1.



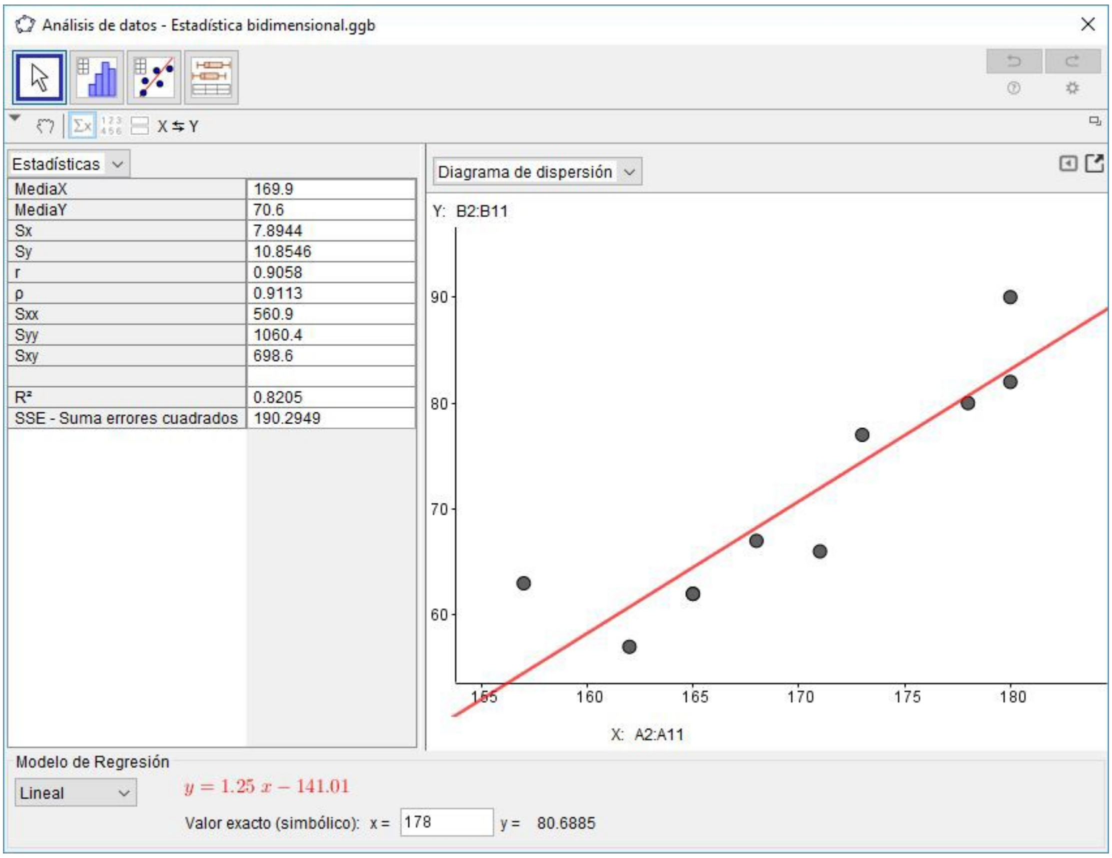
ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL

CURSO: 3º y 4º de la ESO, 1º de Bachillerato de Ciencias Sociales.

A partir de los siguientes datos relativos a alturas y pesos de 10 individuos realiza el estudio de covarianza y correlación:

Altura (cm)	175	180	162	157	180	173	171	168	165	165
Peso (Kg)	80	82	57	63	90	77	66	67	62	62

- Dibuja el diagrama de dispersión.
- Dibuja la recta de regresión sobre el diagrama anterior.
- Calcula el coeficiente de correlación.
- Halla la recta de regresión de Y sobre X.
- Para un individuo que mide 178 cm, ¿qué peso se le estima?

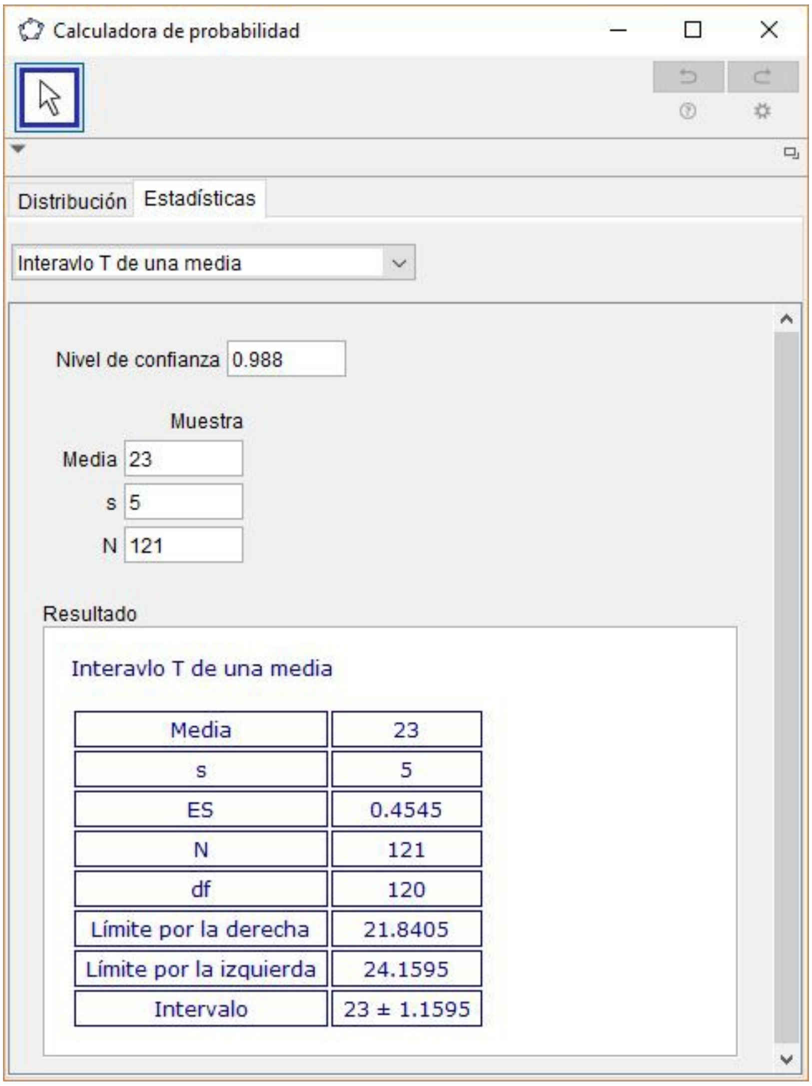


INTERVALOS DE CONFIANZA

CURSO: 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales

Se quiere hacer un estudio de mercado para conocer el precio medio de los libros de narrativa que se venden en la actualidad. Para ello se elige una muestra aleatoria de 121 libros, encontrando que tienen un precio medio de 23 euros. Se sabe que el precio de los libros de narrativa sigue una distribución normal con media desconocida y desviación típica 5 euros.

- Obtén el intervalo de confianza, al 98,8%, para el precio medio de esos libros.
- ¿Cuántos libros habría que elegir como muestra para que, con la misma confianza, el error máximo de la estimación no excediera de un euro?

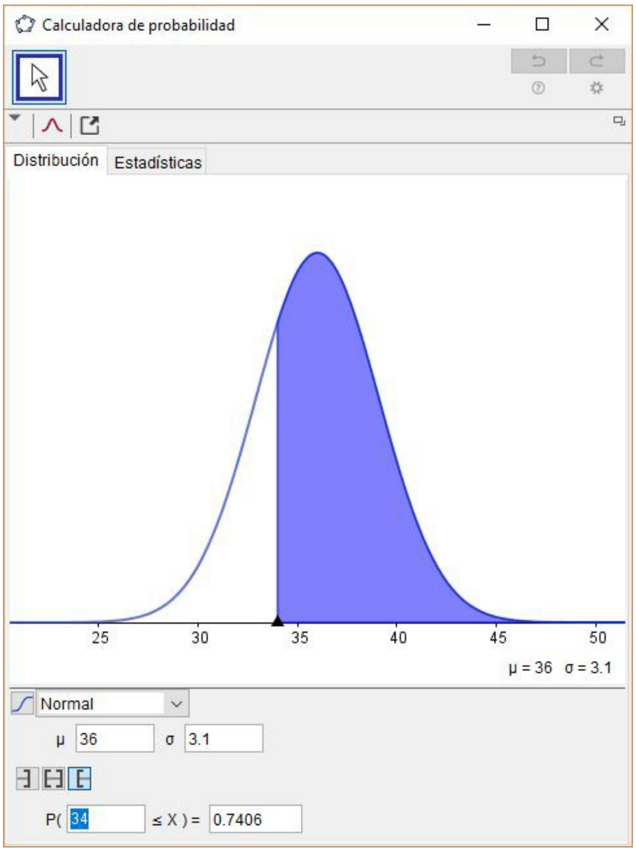


DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES

CURSO: 2º de Bachillerato de Ciencias y Tecnología y de Ciencias Sociales.

Sea X una variable estadística que sigue una distribución normal de media $\mu=36$ y desviación típica $\sigma=3,1$. Si escogemos un individuo al azar, calcula:

- $P(X\geq 34)$
- $P(35\leq X\leq 37)$
- $P(X\leq 33)$
- ¿Para qué valor de la variable se cumple que $P(X\leq z)=0.95$?

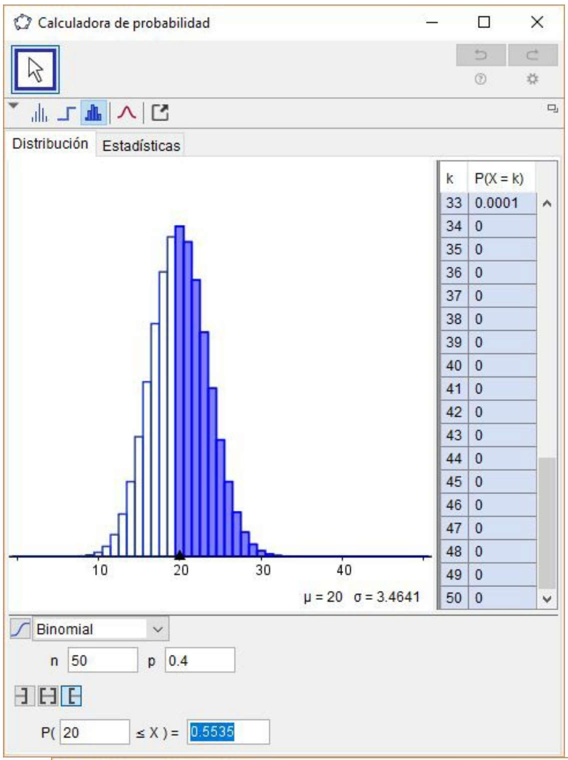


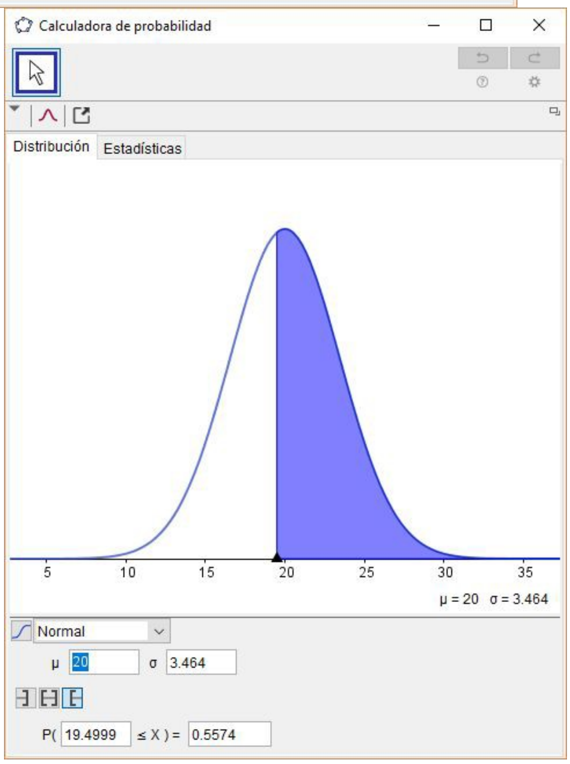
APROXIMACIÓN DE UNA BINOMIAL A UNA NORMAL

CURSO: 2º de Bachillerato de Ciencias Sociales.

Un jugador de dardos tiene una probabilidad de acertar en la diana del 40%. En un campeonato lanza 50 veces.

- ¿Cuál es la probabilidad de acertar al menos 20 lanzamientos?
- Aproxima ahora la distribución de probabilidad a una normal y calcula la misma probabilidad. ¿Se puede considerar significativa la diferencia?





LAS PARÁBOLAS CON DESLIZADORES

CURSO: Todos.

En esta actividad aprenderemos el uso de los deslizadores. Vamos a construir una función cuadrática de forma que los coeficientes sean tres deslizadores a, b y c:

$$f\ (x)\ = ax^2 + bx + c$$

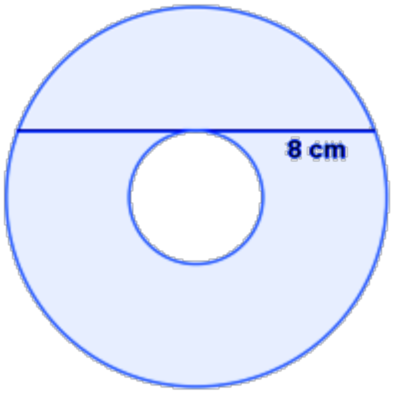
¿Cuál es el lugar geométrico que describe el vértice cuando varía el coeficiente b?

ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR

CURSO: 2º de la ESO.

Podéis encontrar un desarrollo de este problema en el proyecto Gauss, en la dirección http://geogebra.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/tales_y_pitagoras/corona/actividad.html

¿Eres capaz de dibujar la siguiente figura con GeoGebra?, ¿cuánto vale el área de la corona circular de la siguiente figura?



RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

(PAU Castilla y León. Julio 2018)

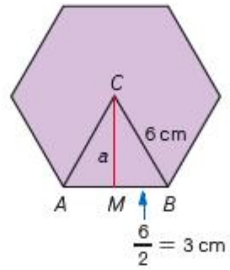
Dados el plano $\pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

- Calcular el punto de intersección del plano y de la recta.
- Encontrar la ecuación de la recta s contenida en el plano π y que corta perpendicularmente a r.

"DARLE LA VUELTA" A UN PROBLEMA-1

CURSO: 2º de la ESO.

En un libro de texto de 2º de la ESO aparecen estos "apacibles" problemas típicos del teorema de Pitágoras:



5 **Calcula la apotema de un hexágono regular de lado 6 cm.**

El hexágono regular es el único polígono regular que tiene la propiedad de que la longitud de su lado coincide con su radio.

$$6^2 = a^2 + \left(\frac{6}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{6^2 - 3^2} = 5{,}2 \text{ cm}$$

La apotema del hexágono regular mide 5,2 cm.

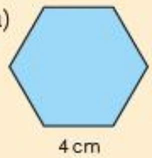
EJERCICIOS

PRACTICA

10 Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 7 cm.

11 Halla la apotema.

a)



b)

APLICA

12 Determina la altura de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 8 cm y su base 6 cm.

REFLEXIONA

13 Halla la medida del lado de un triángulo equilátero cuya altura mide 12 cm.

14 Calcula el lado de un hexágono regular de apotema 10 cm.

Entre ellos están, por ejemplo, estos:

REFLEXIONA

13 Halla la medida del lado de un triángulo equilátero cuya altura mide 12 cm.

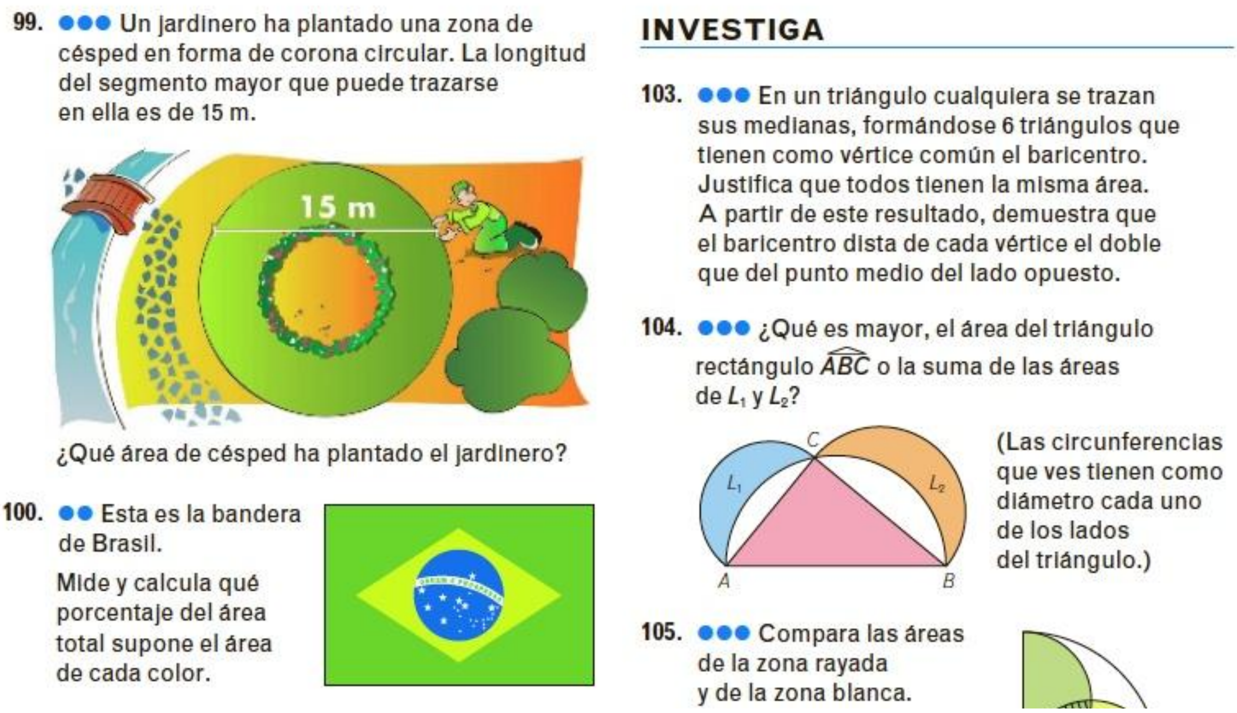
14 Calcula el lado de un hexágono regular de apotema 10 cm.

Fijémonos en el problema 13. La pregunta que nos vamos a hacer no es cómo resolverlo usando Pitágoras sino: ¿Cómo narices se hace un triángulo rectángulo a partir, solamente, de su altura? Porque, si lo consigo, midiendo el lado habré resuelto el problema. Pero, ¿lo habré resuelto yo o GeoGebra?

“DARLE LA VUELTA” A UN PROBLEMA-2

CURSO: 3º de la ESO.

También, problemas típicos de áreas y teorema de Pitágoras:



99. ●●● Un jardinero ha plantado una zona de césped en forma de corona circular. La longitud del segmento mayor que puede trazarse en ella es de 15 m.

¿Qué área de césped ha plantado el jardinero?

100. ●● Esta es la bandera de Brasil.

Mide y calcula qué porcentaje del área total supone el área de cada color.

INVESTIGA

103. ●●● En un triángulo cualquiera se trazan sus medianas, formándose 6 triángulos que tienen como vértice común el baricentro. Justifica que todos tienen la misma área. A partir de este resultado, demuestra que el baricentro dista de cada vértice el doble que del punto medio del lado opuesto.

104. ●●● ¿Qué es mayor, el área del triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ o la suma de las áreas de L_1 y L_2?

(Las circunferencias que ves tienen como diámetro cada uno de los lados del triángulo.)

105. ●●● Compara las áreas de la zona rayada y de la zona blanca.

Y, entre ellos:

99. ●●● Un jardinero ha plantado una zona de césped en forma de corona circular. La longitud del segmento mayor que puede trazarse en ella es de 15 m.

¿Qué área de césped ha plantado el jardinero?

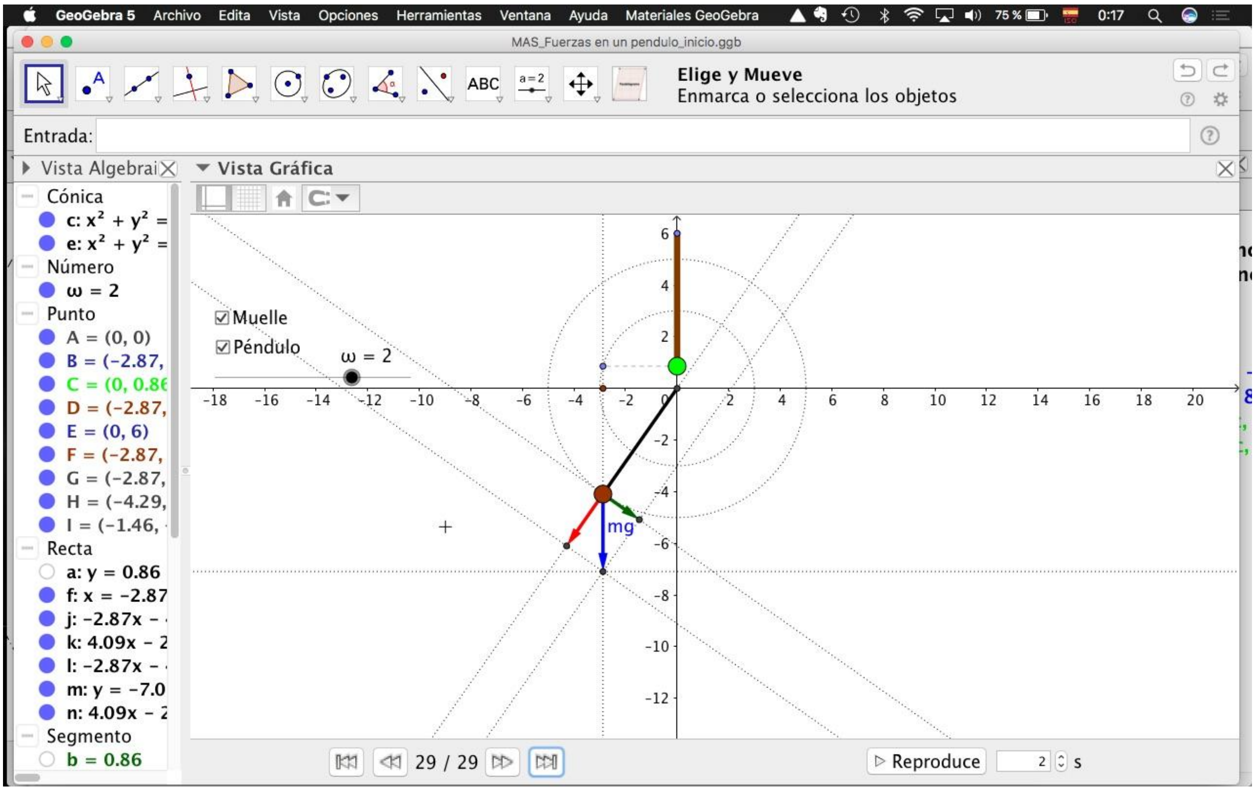
Y, de nuevo, ¿cómo se hace una corona circular a partir del máximo segmento? Si lo consigo, habré resuelto el problema ¿no?

DE UN MOVIMIENTO CIRCULAR A UN MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (M.A.S.)

CURSO: Física 4º de la ESO y 2º de Bach.

Viendo un video didáctico sobre movimiento armónico simple, se ve cómo la sombra de un saliente girando en un disco circular ejecuta un perfecto M.A.S.

¿Seremos capaces de simular ese movimiento en clase con GeoGebra y, así, visualizar cómo este tipo de movimiento proviene de uno circular y por eso se describe mediante las llamadas "funciones circulares"? ¿Podré simular un muelle oscilando a partir de uno girando? ¿Y un péndulo?



ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

CURSO: 4º de la ESO

Un concepto muy básico y sencillo, con el que se comenzamos la Geometría Analítica con nuestros alumnos de 4º. A partir de ella se deducen el resto de las ecuaciones de la recta. Parece interesante entender cómo se genera una recta de este modo, sin embargo, como después las que se usan en la práctica son otras, pasamos por ella muchas veces sin ver sus bondades…

$$¿P = A + \lambda \cdot t?$$

DE LAS CÓNICAS AL SISTEMA SOLAR. LA IMPORTANCIA DE LAS PROPIEDADES DE LOS OBJETOS GEOMÉTRICOS.

CURSO: 3º de la ESO.

Basado en hechos reales…

En cierta ocasión fui a clase de mi hija, 2º de Infantil, a hablar sobre el sistema solar. Con mi iPad (proyectado) hice una elipse con la herramienta correspondiente, puse el sol en uno de los focos, un punto en la elipse que llamé Tierra y animé… “Chicos y chicas, así se mueve la tierra alrededor del Sol”.

Una construcción muy sencilla que sirve, por ejemplo, para explicar eso tan raro de que es verano cuando estamos más lejos del Sol, y no más cerca, como parece pensar mucha gente… pero, ¡espera!, la Tierra no se mueve uniformemente. Va más deprisa cuando más cerca está del Sol y viceversa. Por eso hay más días en verano que en invierno. ¿Cómo conseguir que ese punto azul que representa la Tierra se mueva realmente al ritmo que lo hacen los planetas? Como pudimos ver en una investigación con GeoGebra sobre el sistema solar, la respuesta estaba en usar las propias propiedades de la elipse...

UNA PEQUEÑA DEMOSTRACIÓN

CURSO: 1º- 2º de la ESO.

¿Cuántas circunferencias diferentes pueden pasar por un mismo punto cualquiera? Bien, demuéstralo… ¿Y por dos puntos dados? Pues, ya sabes, demuéstralo… ¿Y por tres puntos? ¿Por cuatro?

CÓMO CONSTRUIR POLÍGONOS REGULARES EN LOS QUE SE PUEDA IR CAMBIANDO EL NÚMERO DE LADOS CON UN DESLIZADOR FIJADO EL LADO. ¿Y SI LO QUE FIJAMOS –MÁS PRÁCTICO– ES EL RADIO?

CURSO: 4º de la ESO.

Dado un segmento, construir diferentes polígonos regulares (usando un deslizador) con ese segmento como lado.

Más difícil, y más práctico: hacer la misma construcción, pero de forma que los distintos polígonos regulares tengan el mismo radio.

LUGARES GEOMÉTRICOS. UNA JOYA PARA LA INVESTIGACIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS

CURSO: 3º y 4º de la ESO.

Una de las mejores herramientas que podemos usar en clase para plantear sencillas investigaciones son los lugares geométricos. Vemos un par de ejemplos:

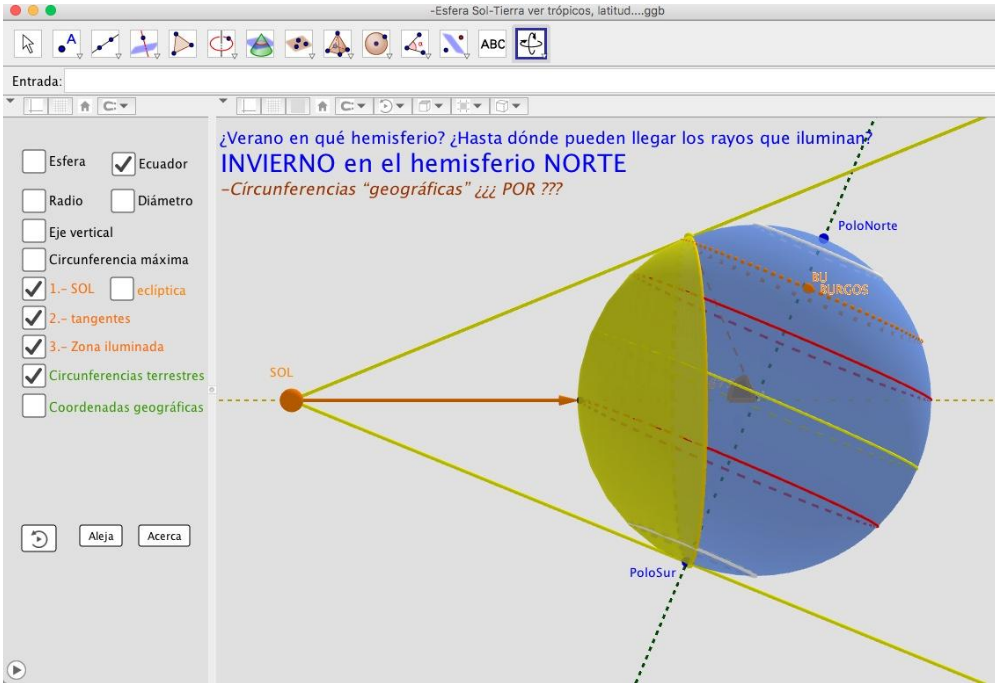
- ¿Dónde se encuentran todos los puntos que están a doble de distancia de un punto dado B que de otro A? Encontrarlos y representarlos. ¿Y si quisiéramos cambiar la distancia entre A y B a nuestro gusto?
- ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto cualquiera dado P y de otro A que va recorriendo (animación) un cuadrado? ¿Y si ponemos la condición de que los puntos estén a la misma altura que A? ¿Y si cambiamos el cuadrado por otro polígono? ¿Y si, en lugar de un polígono, ponemos una circunferencia?...

GEOMETRÍA 3D DE LA ESFERA: VERANO VS. INVIERNO, TRÓPICOS, CÍRCULOS POLARES...

CURSO: 3º de la ESO.

Construcción 3D quizás un poco complicada para un taller de este estilo, pero quizás podría estar bien enseñarla pues será de lo más didáctico que he hecho. Se trata de ver, en el tema de los cuerpos geométricos, algunas repercusiones que tiene en nuestra vida el hecho de que vivamos en una esfera, y que poca gente entiende.

Construir la demostración de que cuando más dura el día es cuando más lejos estamos del sol y no cuando estamos más cerca, como piensa mucha gente. Visualizar qué son los trópicos y por qué están donde están y la misma pregunta con los círculos polares.

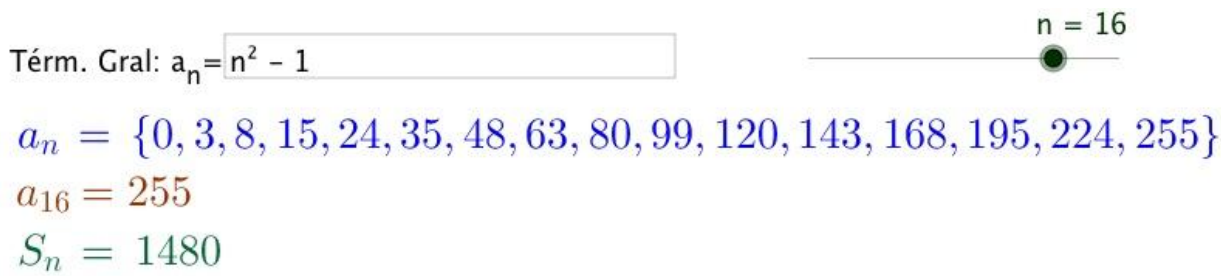


En este mismo estilo, con esferas en 3D, también me parece muy interesante y didáctica la visualización de cómo funciona el sistema GPS por intersección de varias esferas en el espacio. ¿Cómo es la intersección de dos esferas secantes? ¿Y de tres? ¿De cuatro?

NO TODO ES GEOMETRÍA: GENERADOR DE SUCESIONES

CURSO: 3º de la ESO.

Hacer una construcción que genere el número de términos que queramos de una sucesión a partir de su término general (mediante una casilla de entrada).



¿DE DÓNDE SALEN LAS FÓRMULAS DE LAS ÁREAS DE LOS POLÍGONOS BÁSICOS? Y, ¿POR QUÉ LAS PRIMERAS CHOZAS QUE CONSTRUÍAN LOS ANTIGUOS HUMANOS ERAN DE PLANTA CIRCULAR?

CURSO: 1º de la ESO.

Primero descubrimos el área del rectángulo (y del cuadrado, un caso especial). ¿Qué área de polígono descubrimos después a partir de ella? ¿El triángulo? ¿El rombo? ¿El romboide? ¿El trapecio?... ¿De dónde salen esas fórmulas?

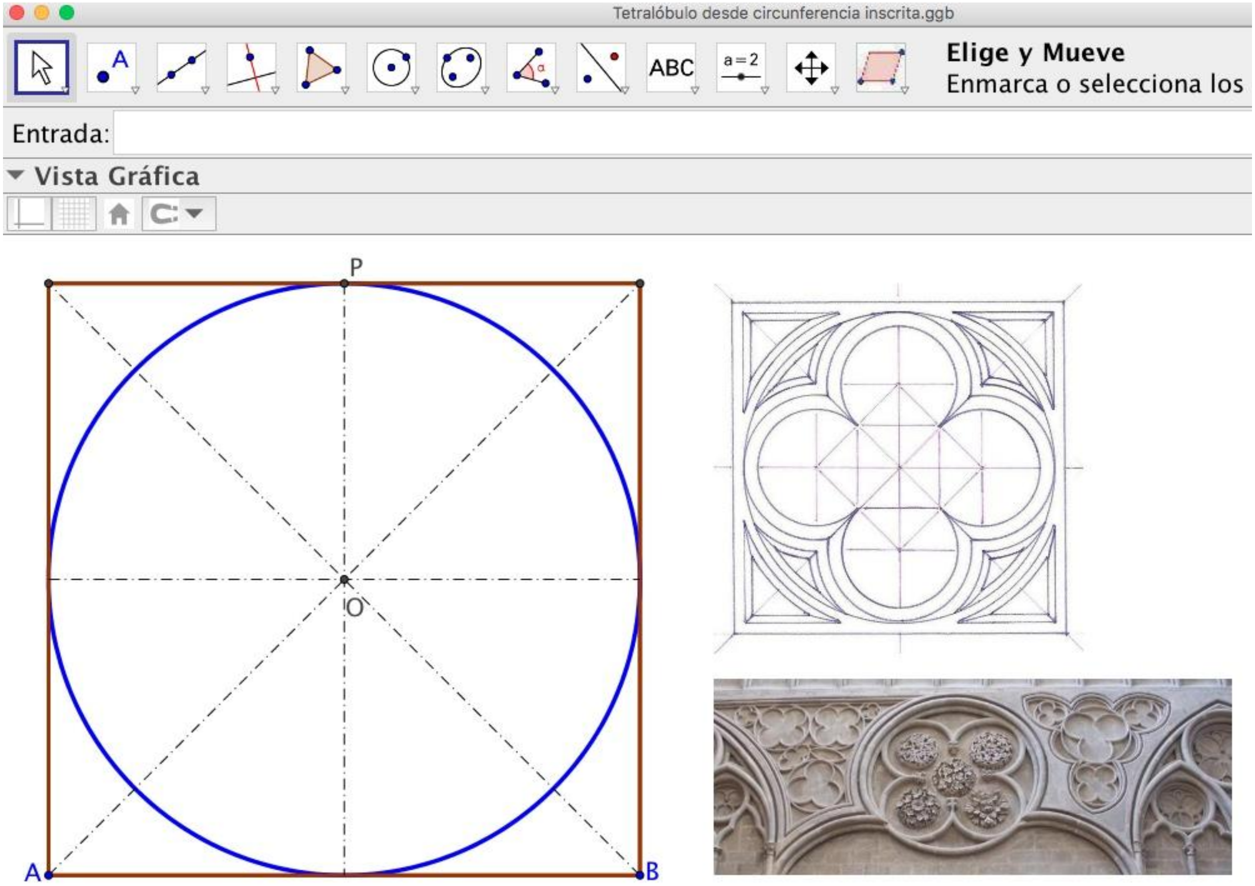
¿Por qué estos polígonos no les servían a los humanos que hacían las primeras chozas, que las hacían circulares? Construcción que muestra cómo va cambiando el área de diferentes polígonos regulares (con un deslizador con el que se va aumentando su número de lados) mientras se mantiene un perímetro fijo determinado.

LUGARES GEOMÉTRICOS BÁSICOS. ¿PARA QUÉ PUEDE SERVIR LA BISECTRIZ?

CURSO: 3º de la ESO.

Vemos la circunferencia, evidente. La mediatriz ¿Ya visto? Pero, ¿para qué puede servir la bisectriz?

Bien, ¿cómo construir una ventana (rosetón) polilobulada de las que tanto se ven en edificios religiosos y civiles? ¿Y para un número cualquiera de lóbulos? Y, ya que estamos, a partir de una circunferencia, ¿cómo se construye el polígono regular circunscrito con el número de lados que se desee? (Se podría hacer una herramienta, pero...)



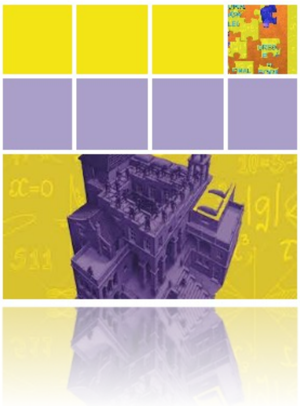
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Club iberoamericano de Geogebra.
- Curso de Geogebra del ITE elaborado por Rafael Losada Liste.

- Libro de texto de la editorial Santillana de 2º de la ESO.
- Libro de texto de la editorial Santillana de 3º de la ESO.

Para hacer referencia al artículo:

Hernando, E. y Jiménez, R. (2018). Geogebra para andar por clase. En Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. inicial-final). Lugar: Universidad de León



COMUNICACIONES

ESCAPE ROOM. UNA EXPERIENCIA DE GAMIFICACIÓN EN LAS AULAS

Antonio Martín Barcala

Colegio Maestro Ávila

Resumen

La presente comunicación pretender dar a conocer el proceso de creación e implementación de un juego de escapismo adaptado a un aula de Educación Secundaria como herramienta educativa para el desarrollo de diversas competencias especialmente vinculadas al pensamiento matemático. En particular, se tratarán los pasos a seguir, los distintos tipos y caminos a escoger a la hora de plantearlo y llevarlo a cabo, y las posibles dificultades y obstáculos a tener en cuenta.

Palabras clave: innovación, gamificación, trabajo cooperativo, Secundaria.

INTRODUCCIÓN

El acercamiento de los juegos de escapismo a las aulas nos proporciona una oportunidad única para llevar a cabo una experiencia didáctica a través de la gamificación y en la que, además, juegan un papel fundamental el trabajo cooperativo y la resolución de problemas.

En el transcurso de los dos últimos años académicos se ha implementado en el Colegio Maestro Ávila de Salamanca una experiencia de gamificación en las aulas basada en los juegos de escapismo, también conocidos como Escape Room, que hoy en día se ofertan en muchas ciudades como una actividad de ocio alternativo para todas las edades y que resultan, en muchos casos, negocios muy exitosos. La actividad se desarrolló a lo largo de uno o dos días completos y participaron en total más de 150 alumnos de todos los cursos de Educación Secundaria.

¿Qué es un Escape Room?

Un Escape Room es un juego de aventura físico y mental que consiste en encerrar a un grupo de personas en una habitación donde deberán solucionar enigmas y rompecabezas de todo tipo para ir desenlazando una historia y conseguir escapar antes de que finalice el tiempo establecido.(1)

¿Cómo surge la idea?

En la experiencia que se presenta partimos de la resolución de problemas y del trabajo en equipo como principal motivación. Así, la idea de transferir este concepto a las aulas surge tras haber participado y disfrutado de varias salas de escapismo en las ciudades de Madrid y Salamanca. La experiencia vivida en cada una de estas salas, la adrenalina, la satisfacción de ir resolviendo puzles y acertijos y de estar cada vez más cerca de tu objetivo, y el potencial observado para el desarrollo de una gran variedad de competencias clave del aprendizaje, hizo que desde un primer momento me plantease las posibles vías para acercar este tipo de actividad a mis alumnos.

Un Escape Room requiere por su diseño y complejidad la necesidad de

- prestar especial atención a los detalles; ser capaz de recordar dónde y cómo viste un determinado elemento de la habitación puede ser de gran ayuda.

- ser metódico en la búsqueda de pistas; ordenando y clasificando aquellos elementos que ya hemos usado o que creemos que pueden tener relación.
- organizar las ideas, las piezas de ese puzle lógico que conforman todas las pistas del juego y que van dando sentido al juego y guiándote poco a poco hacia la salida.
- comunicarse con el grupo para ir desarrollando la actividad de forma simultánea en varios frentes o bien para poder resolver algunos de los misterios, que en muchas ocasiones se nos atascan o están diseñados para ser resueltos por dos o más personas.
- pensar, razonar, probar y comprobar, siendo capaz de hacer conexiones lógicas, cálculos mentales, descifrar códigos o mirar las cosas desde otra perspectiva.

Éstas son competencias y habilidades que juegan un rol fundamental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de cualquiera de las ramas del conocimiento, pero cabe destacar la relevancia y especial relación que guardan con el desarrollo de las capacidades y pensamiento matemático.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD

Numerosas habrán sido las diferentes adaptaciones del concepto de Escape Room a las aulas, a dinámicas de grupo, a retiros de empresas e incluso a congresos como éste. En la búsqueda de la mejor manera posible de acercar esta actividad a los alumnos, el deseo de que fuese lo más fiel posible a la experiencia original vivida por el profesor fue uno de los criterios principales y por el que hoy se da vida a esta comunicación. La imposibilidad de llevar a un grupo numeroso de alumnos a una de las salas de escapismo ya existentes en cualquiera de las ciudades próximas a Salamanca, me llevó entonces a la creación de mi propia sala de Escape Room.

A la hora de plantearnos la creación de nuestro propio Escape Room podemos optar por diferentes estilos que determinarán la dificultad de este proceso. Así pues, si reducimos el concepto de Escape Room a una serie de retos, acertijos y pruebas lineales o encadenadas que desarrollar en grupos y que darán lugar al objeto, pista o prueba final con cuyo éxito concluirá el juego, podemos simplificar en gran medida la dificultad y el tiempo necesario para su diseño y creación. Esta última interpretación de los juegos de escapismo nos permite plantear el mismo juego de forma simultánea a un grupo numeroso de alumnos sin demasiada dificultad, sin embargo, pierde en esencia el dinamismo y la inmersión en el juego que puede proporcionar un proyecto más elaborado y costoso.

Elección del espacio físico

La primera decisión o cuestión a plantearse será entonces si queremos que nuestro Escape Room sea, en efecto, una habitación, o más bien una yincana compuesta de acertijos en el que los jugadores no interactúan de forma dinámica con el entorno. Esta decisión se deberá tomar en base a las prioridades y recursos del profesor y del centro, pues llevar a cabo un Escape Room plenamente ambientado requiere de un espacio específicamente dedicado a ello y de una gran cantidad de tiempo empleado para que el mayor número de alumnos posible pueda disfrutarlo.

En la actividad que aquí se presenta se opta por el segundo modelo, pues se considera que la inmersión en un juego ambientado en todas sus dimensiones ofrece a los alumnos una oportunidad única de ver su entorno, interactuar con él y de establecer conexiones o elaborar razonamientos mucho más naturales y espontáneos. Además, rompe de manera más drástica con el tipo de actividades realizadas de manera tradicional en las aulas.

Una vez nos hemos decantado por este modelo de creación de juegos de escapismo, está claro que necesitamos buscar un espacio físico en el que desarrollarlo. Aunque no estén necesariamente vinculados, es importante tener en cuenta que, dado que los recursos naturales de los que normalmente un profesor o su centro disponen son limitados, y buscando siempre la eficiencia en todo este proceso, la ambientación posteriormente elaborada quedará limitada al espacio escogido o disponible.

Ambientación y objetivo del Escape Room

Una vez dispongamos de un espacio en el que podamos desarrollar la actividad durante todo el tiempo programado, debemos encontrar una ambientación adecuada, que nos permita aprovechar las características de la habitación, y que, por supuesto, sea atractiva para nuestros alumnos. Aquí entra en juego la creatividad del creador, así como los recursos del profesor y del centro.

Directamente ligada a la ambientación nos encontramos con la tarea de establecer un objetivo final, una misión que será la que motive el inicio del juego y que, una vez superada, nos proporcione las herramientas necesarias para poder salir de la habitación y así completar con éxito el juego.

En la experiencia de escapismo llevada a cabo en nuestro centro en el curso 2017-2018, la ambientación escogida fue precisamente la de un aula de secundaria y el objetivo del juego encontrar el examen final antes de que vuelva el profesor de su descanso de 30 minutos. Esto nos permitió, en un primer intento de poner este proyecto en marcha, aprovechar al máximo los recursos de los que poseíamos y las características del espacio disponible (un aula auxiliar de Bachillerato). Además, es un contexto en el que los alumnos pueden integrarse con facilidad sin mucho esfuerzo o imaginación.

Una vez llevada con éxito la actividad en un contexto relativamente sencillo y cercano, se estuvo entonces preparado para crear al año siguiente un Escape Room con una ambientación un poco más elaborada: El despacho del Dr. Croft, un reconocido arqueólogo y aventurero. Esto requirió más recursos, esfuerzo y tiempo de preparación, pero que, una vez visto el funcionamiento y acogida de la actividad el año anterior, merecía la pena. El objetivo en este caso: encontrar el tesoro azteca que, antes de desaparecer, había escondido en algún lugar de su despacho.

Una vez escogida la ambientación para nuestro Escape Room, será necesario buscar los posibles complementos que sirvan para decorar nuestra habitación y darle un toque más realista. Esto nos permitirá también realizar un croquis provisional de cómo ha de lucir la sala durante el juego, y así, poder ir organizando en el espacio las pistas, pruebas o acertijos que se nos vayan ocurriendo. Este croquis se podrá ir modificando y adaptando según el Escape Room vaya tomando forma y las pruebas así lo requieran.

Creación de las pruebas y búsqueda de materiales

A continuación, llega el momento de empezar a pensar las diferentes pruebas o puzles que conformarán nuestro Escape Room. No es necesario pensar de antemano la concatenación de las mismas, sino una serie de mecanismos, acertijos y métodos para ocultar información dentro de nuestra sala de juego:

- Claves y códigos que descifrar.
- Imágenes u objetos que indican información importante sobre el juego.
- Linternas, imanes o lupas que revelan mensajes escondidos a simple vista.
- Puzles, sudokus, laberintos u otros retos incluidos dentro de nuestro gran juego.

Sí es importante tener en cuenta en todo momento el objetivo final del juego y el mecanismo por el cual se obtendrán el objeto o clave que nos permitirá salir de la habitación y completar el juego con éxito. De esta manera podremos construir las diferentes partes del juego alrededor de esta idea.

Casi con total seguridad, cada prueba pensada requerirá en sí misma materiales específicos como espejos, mapas, cubo de Rubik, tablero de ajedrez,… además de los antes mencionados. Un detalle a tener en cuenta es la adecuación de los materiales a la ambientación escogida. Por otra parte, todo Escape Room, sea cual sea su diseño y estructura, se servirá de candados, cajas, maletines y cualquier otro elemento o medio que nos permita controlar el acceso secuenciado a las diferentes partes del juego.

Por último, además de los materiales específicos y de los componentes donde vayamos a esconder las pistas, es bueno, dependiendo de las características de la habitación, añadir algunos elementos más que sirvan, a la vez, como decoración o ambientación de la sala y como distracción o posibles pistas falsas que fuercen al alumno a cuestionarse e ir más allá de un mero ejercicio dirigido.

El profesor que se disponga a realizar esta fase de creación de pruebas y búsqueda de materiales podrá observar que en muchas ocasiones el acceso a determinados materiales o la adecuación de los mismos a la ambientación escogida, determinará las pruebas que conformen su Escape Room y no al revés. Es decir, en base a los materiales de los que dispongo y del contexto escogido soy capaz de elaborar retos y acertijos que encajen en mi juego. De esta manera podemos además reducir los costes económicos.

Una vez pensados y creados todos los retos, resulta relativamente fácil establecer una línea temporal de los mismos, donde, en nuestro caso, consideramos provechoso que no sea totalmente lineal, sino entrelazada, para que el alumno tenga que realizar sus propios razonamientos y conexiones y éstas no vengan pre-establecidas por el orden natural de las pistas recibidas. A la hora de realizar esta concatenación de pruebas es importante realizar varios simulacros y asegurarse de que no existe ningún callejón sin salida o incompatibilidad en el diseño original.

Otros elementos y accesorios

Además de todo lo referente a la creación del Escape Room en sí mismo, es igual de importante generar expectativa, curiosidad y ganas por descubrir esa actividad novedosa y diferente que, aunque poco a poco vaya siendo más conocida; aún es un gran desconocido en el mundo de la educación.

Para ello, podemos realizar posters, presentar la actividad como un verdadero videojuego en la vida real, convocar un torneo, y darle el aspecto más profesional posible.

En nuestro caso todo esto se llevó a cabo generando además unas reglas del juego, un horario de apertura en el que había que reservar con antelación, un ranking de participación y por supuesto, una entrega de premios a los equipos ganadores.

Por otro lado, para dar ese aspecto un poco más realista o promover que el alumno se sumerja y se integre aún más en la actividad, es importante cuidar los detalles: escoger una buena banda sonora o entregarles a firmar un acuerdo de confidencialidad son aspectos que puede ayudarnos a conseguir este efecto.

Finalmente, para poner en funcionamiento nuestro Escape Room, habrá que realizar varias pruebas con anterioridad, calcular el tiempo que deberemos fijar para que no resulte ni demasiado fácil ni demasiado difícil y establecer un método de supervisión de la actividad para que el juego fluya con regularidad.

CONCLUSIONES

Tras haber llevado a cabo esta experiencia de gamificación con alumnos de Secundaria, y gracias también a lo aprendido en el primer año de implementación que permitió algunas mejoras y la creación de un Escape Room más elaborado al año siguiente, podemos observar las siguientes conclusiones.

El aspecto lúdico de la actividad, la "gamificación", es un componente realmente atractivo y motivador para los alumnos, y por lo tanto debe ser explotado y usado en nuestras aulas con mayor asiduidad.

La oportunidad que ofrecen los juegos de escapismos para desarrollar habilidades de trabajo cooperativo es única, pues se observa la necesidad de establecer una comunicación constante y una colaboración en todo su dinamismo, donde tan importante es establecer roles como trabajar todos a la vez en un mismo reto.

El diseño de un Escape Room en el que el área de juego es toda una habitación y en el que no existe una linealidad estricta entre las fases del juego, se acerca mucho más a la resolución de problemas de la vida real y por lo tanto ayuda a los alumnos a desarrollar capacidades de organización y razonamiento más naturales y espontáneas.

La creación de un Escape Room de estas características es un proceso complejo, que requiere recursos económicos, humanos y espaciales, además de mucho tiempo de preparación y de desarrollo.

Referencias Bibliográficas

(1) Escape room. (s.f.). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. Fecha de consulta: 14:11, septiembre 13, 201 desde https://es.wikipedia.org/wiki/Escape_room.

Para hacer referencia al artículo:

Martín, A. (2018). Escape Room, una experiencia de gamificación en las aulas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 143-147). Lugar: Universidad de León

VIVIENDO LAS MATEMÁTICAS DESDE LA ESCUELA INFANTIL. ¿ES LO COTIDIANO UNA CIENCIA EXACTA?

Beatriz Suárez Quijada

Educación Infantil, Ceip Pablo Picasso. Valladolid

> *El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las Matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia, ¿por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza?*
>
> *Miguel de Guzmán*

Resumen

En esta comunicación describimos una propuesta en la que las Matemáticas forman parte de las actividades cotidianas que tienen lugar en la escuela infantil, desarrollándolas a través del juego y el arte.

Teniendo en cuenta que, en las primeras edades, el afán investigador es un hecho al que le acompaña la intuición, es necesario aprovechar esa capacidad natural de la infancia para que dichos aspectos se transformen en herramientas que se integren en la dinámica del aprendizaje.

Visibilizar la relación que existe entre las Matemáticas y todas aquellas situaciones que vivimos cada día, permite reconocer un panorama en el que se muestra como forman parte de lo que somos, siendo patrimonio de una sociedad que busca encontrar certezas y hacer de esta ciencia un instrumento que nos ayude a entender la realidad desde diferentes perspectivas.

Palabras clave: *Infan-ciencia, ecología, juego, vida cotidiana, emoción.*

DESARROLLO

La cultura científica debe formar parte de los currículos educativos desde edades tempranas. Integrar el pensamiento científico en las primeras etapas es un paso fundamental para fomentar la reflexión y crear un estilo de aprendizaje que ofrezca la posibilidad de consolidar estructuras mentales que favorezcan el afán natural investigador de la infancia y se integre como una metodología de pleno derecho.

En esta comunicación proponemos una experiencia de aula en la que lo cotidiano se convierte en ciencia desde la mirada de la infancia: Despertar la curiosidad, sensibilizar sobre aspectos que mejoren la vida de todos los seres vivos, observar los procesos y protagonizar experiencias, muestra la realidad de un aula como espacio de ciencia: un laboratorio vivo en el que suceden sucesos extraordinarios en conexión con la propia vida. En nuestra propuesta tratamos de visibilizar la relación que existe entre las Matemáticas y todas aquellas situaciones que vivimos cada día, ofreciendo un panorama que muestra cómo forman parte de lo que somos, siendo patrimonio de una sociedad que busca encontrar certezas y hacer de esta ciencia un instrumento que nos ayude a entender la realidad

Las Matemáticas forman parte de la vida y por ello la escuela debe integrarlas en las aulas de manera natural, sin alejarlas de lo cotidiano. Presentamos diferentes acciones que interpretan la vida a través de las Matemáticas: desde la Educación Medioambiental, la Biología, el Arte y el juego, a las nuevas tecnologías que nos proporcionan recursos para expresarnos y conseguir acercar lo cotidiano a la Ciencia.

La actividad matemática no puede limitarse sólo a la capacidad de algunas personas, quizás los resultados que obtenemos tienen que ver con factores diversos: experiencias, motivación, emoción y afecto que despierten. El pensamiento matemático es pues universal.

En esta experiencia la observación e interacción con el entorno estimula y visibiliza las Matemáticas como la ciencia que nos ofrece la posibilidad de entender la vida, siendo una herramienta que favorece la comprensión del mundo que nos rodea.

Las siguientes acciones son una clara muestra de que la cultura matemática está al alcance de todas las capacidades, sólo es necesario que no las separemos de las experiencias propias.

A través de las Matemáticas estudiamos nuestro entorno próximo. La naturaleza nos muestra patrones en plantas, árboles, animales y los examinamos a partir de las sucesiones de Fibonacci.

Figura 1. Fibonacci y los caracoles: la naturaleza matemática

Analizando los datos que obtenemos después de observar a las aves que aparecen en nuestra escuela, desarrollamos estrategias de pensamiento. Ubicamos en el aula un observatorio para conocer cuántas especies acuden cada mañana. La Ecología nos permite darnos cuenta de lo importante que son todos los seres vivos para que exista una armonía vital, por ello nos ocupamos de procurar alimento a las distintas especies de aves que aparecen en nuestra escuela: la tórtola turca, la urraca, la paloma doméstica, el gorrión común y otras aves que acuden cada mañana al comedero que hemos preparado, con el alimento que previamente se ha pesado realizando estimaciones y cálculos.

Creamos así un patrón de comportamiento en las aves que favorece una secuencia para conocer con qué periodicidad nos visitan. Los datos que obtenemos los reflejamos en una plantilla que finalmente comparamos para extraer resultados.

De ello obtenemos unas conclusiones que nos permiten comprobar la tesis inicial, así como calcular el número de aves que aparecen cada mañana.

Entonces…

¿Cuántas aves han venido hoy?

¿Qué cantidad de alpiste creéis que necesitan hoy, que hace frío?

¿Cuál es la especie más frecuente?

Figura 2: El observatorio de aves para calcular y proteger a las aves de la escuela

Otro aspecto que desarrolla el pensamiento matemático es la organización espacial. Elaboramos e interpretamos mapas y planos, organizamos espacios en el aula y también utilizamos como recurso la robótica. *Bee-bot*, unos robots-abeja que pueden ser programados, nos permiten establecer itinerarios y rutas para favorecer la organización espacial y desarrollar estrategias de pensamiento. Las *abejas-robot* muestran el itinerario que han hecho las aves después de haber consensuado entre el grupo unas consignas para que realicen un recorrido determinado: derecha, izquierda, delante, detrás…, hasta conducirlas al lugar que hemos seleccionado.

Figura3. Trazando itinerarios con la robótica

Partiendo de la experiencia vital nos encontramos con las Matemáticas de nuestro cuerpo, contar la frecuencia cardiaca y hacerla números es dar sentido y orden a nuestra identidad. Los patrones cardiacos expresan su relación directa, *humanizando* de alguna manera a la Ciencia.

Calculamos la frecuencia cardiaca y la comparamos entre nosotros:

¿Cuántos latidos has escuchado?

Vamos a sentir el pulso y luego lo anotamos…

¿Cuál es tu frecuencia cardiaca?

¿Quién tiene más pulsaciones por minuto?

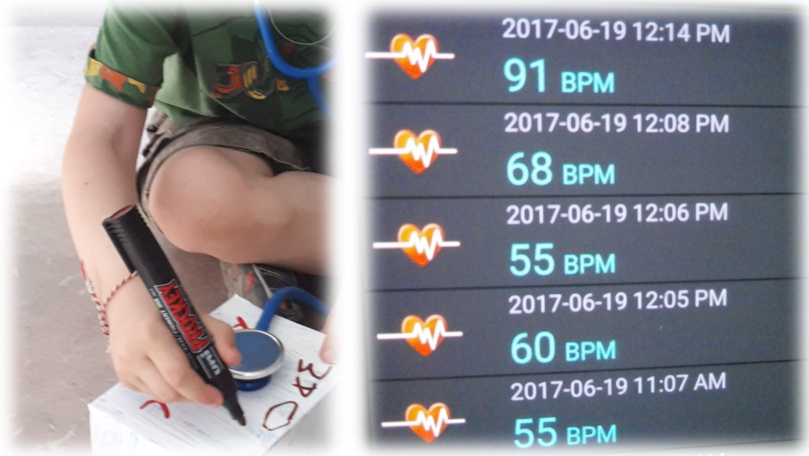


Figura 4. Calculando latidos y pulsaciones por minuto.

El arte también nos ofrece la oportunidad de acercar la ciencia a la infancia ya que después de observar figuras y formas en diferentes obras de arte, somos capaces de reconocerlas en nuestra propia actividad artística. La escultura y la pintura, nos ofrecen esa belleza que las Matemáticas aportan a la vida. La comparativa entre el Atomium de Bruselas y la obra de Salvador Dalí: *la Galatea de las esferas,* es un claro ejemplo.

Vamos a comparar estas dos obras, una es una pintura y otra una escultura.

¿En que se parecen? ¿Qué es una esfera?

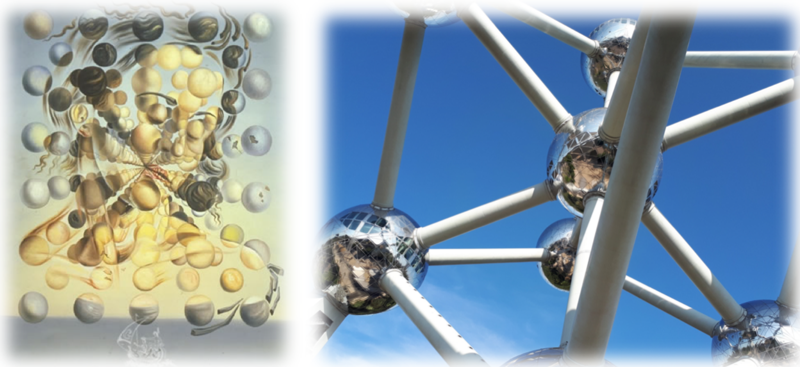


Figura 5. La Galatea de las esferas, Salvador Dalí y el Atomium de Bruselas.

Para desarrollar la tercera dimensión buscamos trabajar el volumen a partir de las obras trabajadas

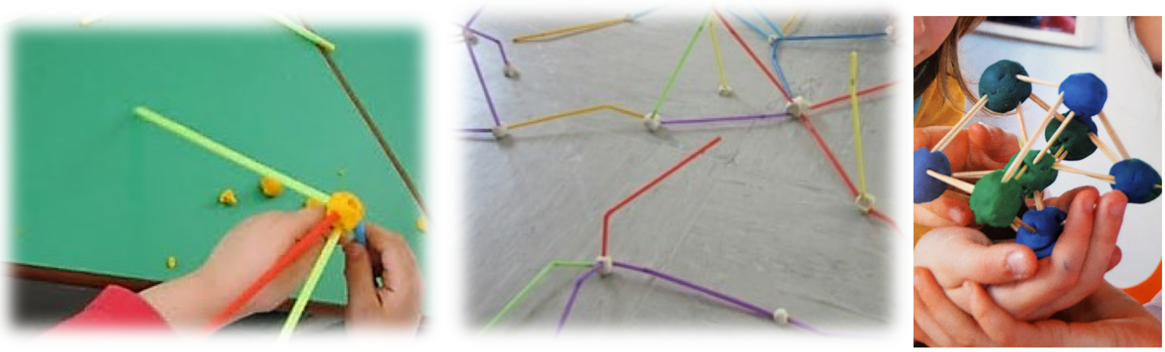


Figura 6. Actividades plásticas relacionadas con la propuesta artística: El Atomium con pajitas y plastilina.

También observamos la obra de autores que relacionamos con las Matemáticas. Javier Egiluz con su obra "Universo Informal" nos permite observar *la Geometría de la emoción.*

Figura 7. Javier Egiluz. Universo informal

El programa Geogebra, además de su uso habitual, nos apoya en la labor creativa dando sentido a la experiencia estética. Realizamos intervenciones en las que, a partir de figuras geométricas, surgen diversas creaciones artísticas, que comparamos con las que realizamos desde el programa.

Figura 8. Arte y Matemáticas con Geogebra

Otros aspectos interesantes que complementan nuestra propuestas están en otras artes como la literatura y el cine. *El libro absoluto,* obra de Joaquín Fargas, aparece como algo curioso que mostramos. Se trata de un dispositivo conformado por nueve prismas hexagonales que rotan sobre un eje representando en cada cara una disciplina. Cuando gira es posible realizar una búsqueda por internet que muestra las disciplinas elegidas.

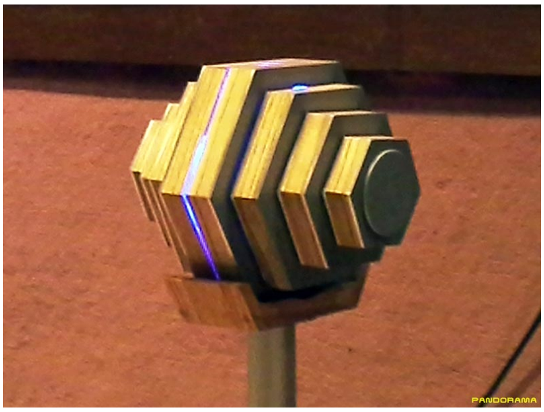


Figura 9. El libro absoluto. Joaquín Fargas

En cuanto al cine, también mostramos filmografía relacionada con la materia, vinculándola al ser consciente de las grandes posibilidades que ofrece. El ejemplo que mostramos a continuación es sólo una pequeña muestra de su importancia como herramienta. En cualquier visualización encontramos elementos matemáticos que nos proporcionan datos, formas, experiencias, cálculo, …

Figura 10. "Donald y las Matemáticas"

La música también es uno de los contextos y argumentos fundamentales en la escuela, *es la banda sonora* que muestra la relación directa con las Matemáticas. Para ello buscamos la relación de los números con el pentagrama, las notas musicales y su valor, así como elementos que miden el sonido. Con el sonómetro observamos como es posible medir los elementos sonoros (claxon automóvil: 90 dB, conversación normal: 50 dB, tráfico: 85 dB) y con el metrónomo que nos indica los pulsos por minuto.

Figura 11. El pentagrama y las notas musicales representadas por los niños y niñas del aula

Figura 12. El metrónomo y el sonómetro

CONCLUSIONES.

Cualquier acción cotidiana es susceptible de investigación y la infancia es un testimonio maravilloso de este hecho. Visibilizar esta circunstancia es un paso necesario para que la Ciencia ocupe en la escuela el lugar que merece, interviniendo en el aula con proyectos y actividades dirigidas a la creatividad, motivación y desarrollo de las diferentes áreas curriculares. Las Matemáticas forman parte de la exactitud y de la imprecisión de lo cotidiano, siendo un paradigma del orden natural que desde la escuela y en edades tempranas debemos abordar.

Una reflexión para compartir

En cuestiones de cultura y de saber, sólo se pierde lo que se guarda; sólo se gana lo que se da.

Antonio Machado

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2005). Geometría cotidiana. Barcelona: Rubes editorial.

Aranda, R (1996). Estimulación de aprendizajes en la etapa infantil. Madrid: Escuela Española.

Canals, M.A (2001). Vivir las Matemáticas. Barcelona: Octaedro

Barocci, G; Bergamini, M; Boni, D (2010). Matemáticas de la vida real. Barcelona: Octaedro.

Canals, M.A. (2013).Vivir las Matemáticas. Barcelona: Octaedro.

Dalí, S (1952). Galatea de las esferas [Pintura].Teatro-Museo Dalí, Figueres, España

Disney (1959). Donald in Mathmagic Land [Película]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=zegO2qlaKIo

Egiluz, J (2018). Universo informal [Exposición]. Xabia: Espacio de Arte A. Lambert.

Fargas, J 2018). El libro absoluto. [Performance]. Zaragoza. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=1P_m8SVNPrI

Grima, C (2018). *¡Que las Matemáticas te acompañen!* Barcelona: Ariel.

Grima, C (2018). *¿Matemáticas para qué os quiero*? Conferencia de Clara Grima recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=_UX0ydkek44&feature=youtu.be

Ibáñez, M.J (2016). Singapur encabeza todas las clasificaciones del informe PISA.

Recuperado de https://www.elperiodico.com/es/educacion/20161206/singapur-lidera-todas-clasificaciones-informe-pisa-5674027

Stewart, I. (1990), Matemáticas de la escala musical, Investigación y Ciencia, pp. 100-107

Polak, J; Polak, A (1957). Atomium [Escultura urbana]. Bruselas. Bélgica.

Para hacer referencia al artículo:

Beatriz, S. (2018). Viviendo las Matemáticas desde la escuela infantil. ¿Es lo cotidiano una ciencia exácta?. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”. (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 148-155). Lugar: Universidad de León

EL NECESARIO CAMBIO CURRICULAR Y METODOLÓGICO

Sonsoles Blázquez Martín[a], Pilar del Río Méndez[b]

[a] I.E.S. "Pío del Río Hortega" Portillo, Valladolid. [b] I.E.S. "Zorrilla", Valladolid.

Resumen.

Pretendemos mostrar el trabajo que un grupo de profesores de la Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán, en su sección de Valladolid, está llevando a cabo con el objetivo de proponer una adaptación del currículo oficial que permita trabajar todos los bloques de contenidos de Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria, de una manera racional a lo largo de los cuatro cursos, eliminando la repetición y dejando tiempo para que dichos contenidos sean asimilados de forma comprensiva, a través de actividades que permitan fundamentalmente la investigación y la resolución de problemas, y no tanto la repetición mecánica de procedimientos rutinarios. La creación de dichas actividades y la puesta en práctica de las mismas -este curso en primero de ESO, para ampliar en cursos posteriores- completarán la propuesta de currículo.

Palabras clave: *currículo, metodología*, *comprensión*, *razonamiento,…*

INTRODUCCIÓN.

A la vista de los resultados obtenidos por nuestros estudiantes en pruebas internacionales: PISA (15 años) y TIMMS (4º primaria y 2º eso) y analizando el grado de satisfacción de profesores, alumnos y familias, si nos preguntaran ¿cuál es el estado de la enseñanza de las Matemáticas en nuestro país?, tendríamos que contestar que no goza de buena salud.

Las posibles causas son:

- **Currículo sobredimensionado:** Supone una presión para los profesores, pues disponen de poco tiempo para permitir que los alumnos asimilen, es imposible utilizar diferentes metodologías y se acaba enseñando procedimientos mecánicos que la mayoría de los alumnos aprenden de memoria sin entender lo que hacen.
- **Problemas del profesorado:** Falta formación en metodologías y, como consecuencia, poco manejo de herramientas informáticas y escaso conocimiento de metodologías nuevas, activas y motivadoras. El profesor depende excesivamente del libro de texto, es el recurso más utilizado. Todo ello influye en su desmotivación.
- **Comportamiento y actitud del alumnado:** Existe gran dificultad para mantener un clima de atención necesario para el aprendizaje significativo: interrupciones continuas, enfrentamientos alumno-profesor, falta de respeto y tensión en clase. Los alumnos están claramente desmotivados y eso influye en su atención y rendimiento.
- **Escaso apoyo de las instituciones:** Esta falta de apoyo se transmite en dificultad para trabajar en equipo, falta de recursos materiales e informáticos para aplicar metodologías activas y escaso impulso a iniciativas de profesores, dejando el cambio en manos del voluntarismo altruista.
- **Cambio de leyes educativas cada cuatro años:** ¿Para qué dedicar tiempo en desarrollar nada si lo cambiarán en breve? Es necesario un acuerdo educativo que haga que merezca la pena el esfuerzo en innovar.

Como profesores, ¿qué podemos aportar en la mejora de la salud de este enfermo? Hay un marco legal en el que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje y también muchos factores ajenos a nuestra tarea. Pero hay dos aspectos en los que sí podemos actuar de forma directa: Adaptación del currículo oficial y mejora de nuestra propia práctica docente.

CAMBIO CURRICULAR.

Como paso previo habría que analizar, teniendo como referencia los Estándares de Aprendizaje, qué contenidos y hasta qué grado de profundidad habría que dar en cada uno de los cursos de Secundaria. Se debería intentar eliminar o reducir al máximo la repetición de los contenidos tal y como lo tenemos en el currículo actual.

El currículo de la ESO de Castilla y León tiene como marco el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, en el que se establecen Contenidos, Criterios de Evaluación y Estándares de Aprendizaje para todo el territorio nacional. En los dos primeros cursos de la ESO, el currículo no está diferenciado (ver por ejemplo la Figura 1).

Contenidos para primero y segundo de ESO:

Naturales, enteros, divisibilidad, fracciones, decimales, potencias, porcentajes, proporcionalidad, expresiones algebraicas, ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales.

Divisibilidad de los números naturales. Criterios de divisibilidad.
Números primos y compuestos. Descomposición de un número en factores primos.
Múltiplos y divisores comunes a varios números. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más números naturales.
Números negativos. Significado y utilización en contextos reales.
Números enteros. Representación, ordenación en la recta numérica y operaciones. Operaciones con calculadora.
Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. Representación, ordenación y operaciones.
Números decimales. Representación, ordenación y operaciones.
Relación entre fracciones y decimales. Conversión y operaciones.
Significados y propiedades de los números en contextos diferentes al del cálculo: números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.
Potencias de números enteros y fraccionarios con exponente natural. Operaciones.
Potencias de base 10. Utilización de la notación científica para representar números grandes.
Cuadrados perfectos. Raíces cuadradas. Estimación y obtención de raíces aproximadas.
Jerarquía de las operaciones.
Cálculos con porcentajes (mental, manual, calculadora). Aumentos y disminuciones porcentuales.
Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.
Resolución de problemas en los que intervenga la proporcionalidad directa o inversa o variaciones porcentuales. Repartos directa e inversamente proporcionales.
Elaboración y utilización de estrategias para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y para el cálculo con calculadora u otros medios tecnológicos.
Iniciación al lenguaje algebraico.
Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.
Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos.
Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico). Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.
Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Métodos algebraicos de resolución y método gráfico. Resolución de problemas.

Figura 1: Contenidos de 1º y 2º de ESO del bloque de Números y Álgebra

La propuesta que hacemos pasa por una organización en la que se tenga una visión global de toda la ESO y en la que los contenidos se vayan ampliando sin repetirse. La distribución se hace por cursos para mostrar la necesaria coherencia y la idea de currículo en espiral.

Se propone, por ejemplo, en el bloque de Números y Álgebra, trabajar más los contenidos numéricos en los primeros cursos y más los algebraicos en los dos últimos. Y siempre sin repetir contenidos:

- Los números naturales, centrados en divisibilidad, y enteros sólo en primer curso, como repaso de lo aprendido en Primaria. Las potencias y raíces se estudiarían en primero, y en segundo se vinculan a la notación científica.

- La proporcionalidad se estudiará en segundo curso y en cuarto. En cuarto se centrará en el estudio de porcentajes y sus aplicaciones a la Economía, y sólo se hará un repaso de las relaciones de proporcionalidad para vincularlo después a los modelos funcionales afín y de proporcionalidad inversa.
- Los números racionales se definen en tercer curso como aquello que tienen de común distintas expresiones: decimal, fracción, gráfica, notación científica, porcentaje, expresiones que se han ido trabajando gradualmente en los cursos anteriores.
- En cuarto curso se introducen los números reales, adquiere especial importancia el hecho de aproximar adecuadamente, por lo que el énfasis se hará en aproximaciones y errores.
- Prestar especial atención al cálculo: correcto uso de la calculadora y los medios tecnológicos por una parte y en el cálculo mental por otra. Conviene trabajar sistemáticamente el cálculo mental a lo largo del curso.
- Introducción progresiva del lenguaje algebraico, primero vinculado a la traducción del lenguaje habitual y al trabajo con fórmulas para ir aumentando el grado de abstracción y la capacidad de generalización.
- En primero se estudian ecuaciones muy sencillas vinculadas al tema del lenguaje algebraico. A partir de segundo se van introduciendo de forma gradual ecuaciones y sistemas cada vez más complejos. El método gráfico se vincula también a las funciones lineales y cuadráticas. La resolución de problemas es la mejor vía para introducir el Álgebra, pues es donde muestra su mayor potencia.

CAMBIO METODOLÓGICO.

No se puede enseñar en el siglo XXI con las herramientas y los métodos del siglo XX, nuestros alumnos son distintos, viven en una sociedad distinta. Nuestras propuestas metodológicas inciden en este hecho:

- **Conseguir** que la Resolución de Problemas sea el hilo conductor y la motivación de toda la materia y que los contenidos estén a su servicio (Figura 2).

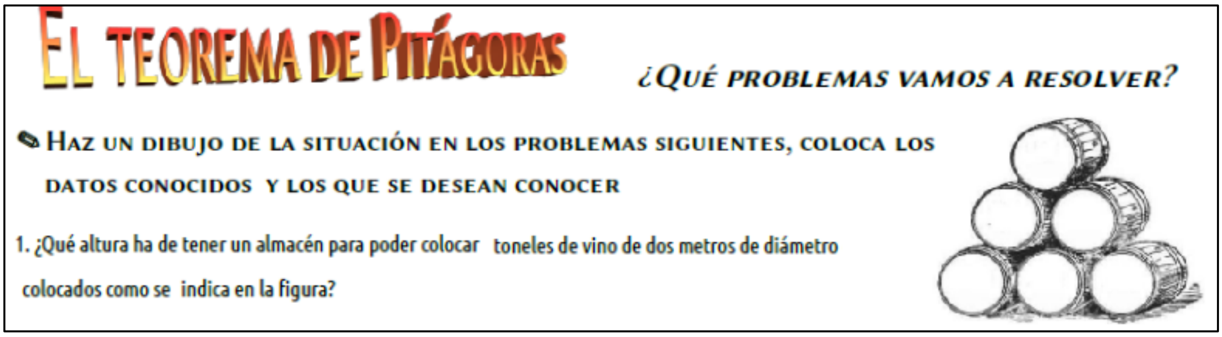


Figura 2: Ejemplo de introducción de un tema a partir de problemas

- **Métodos variados** para resolver problemas y conseguir que los alumnos aprendan de forma significativa (Figura 3).

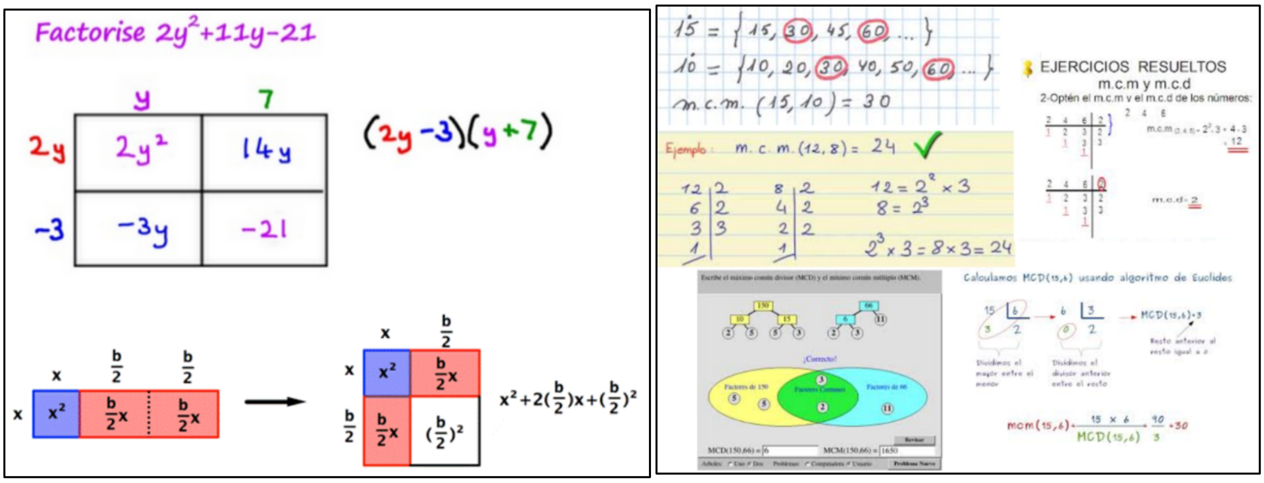


Figura 3: Diversos métodos para factorizar una ecuación de segundo grado o para calcular mcd y mcm

- **Contextualizar:** Vincular las Matemáticas con la realidad hace que éstas adquieran sentido para los alumnos (Figura 4)

Cuando vamos al supermercado la cajera pasa el producto que vamos a comprar por un lector de códigos de barras y el ordenador reconoce el producto y anota en el ticket el producto y su precio.

Esto es posible porque cada producto viene identificado por un número y cada dígito de dicho número por un conjunto de barras negras separadas por espacios (barras blancas), que el lector interpreta como una secuencia de impulsos eléctricos.

8 431790 175968

5. *Comprueba que el dígito de control se obtiene de la siguiente forma:*

- *Empezando por la izquierda suma, por un lado, los dígitos que ocupan un lugar impar (sin contar el dígito de control) y, por otro lado, suma los que ocupan un lugar par y multiplica esta última cantidad por 3. Suma los dos resultados (la suma de los de posición impar y el triple de la suma de los de posición par). El dígito de control es el número que le falta al anterior hasta llegar al múltiplo de 10 más próximo por arriba.*

Figura 4: Actividad contextualizada sobre códigos de barras

- **Cálculo:** Reducir significativamente el tiempo dedicado a repetir de forma mecánica y en papel, una serie de operaciones o algoritmos, que pueden ser realizados por una calculadora, (que deben y tienen que aprender a manejar) y sustituir ese tiempo por actividades de cálculo mental y de comprensión y razonamiento en resolución de problemas, búsqueda de patrones, etc. Un recurso muy útil para el trabajo sistemático son las Tablas de Cálculo Mental de Jesús Javier Jiménez Ibáñez http://docentes.educacion.navarra.es/jjimenei/

- **Visualización:** Utilizar siempre una representación, un dibujo, un esquema, una justificación geométrica. Hacer que los alumnos visualicen lo que están aprendiendo (Figura 5).

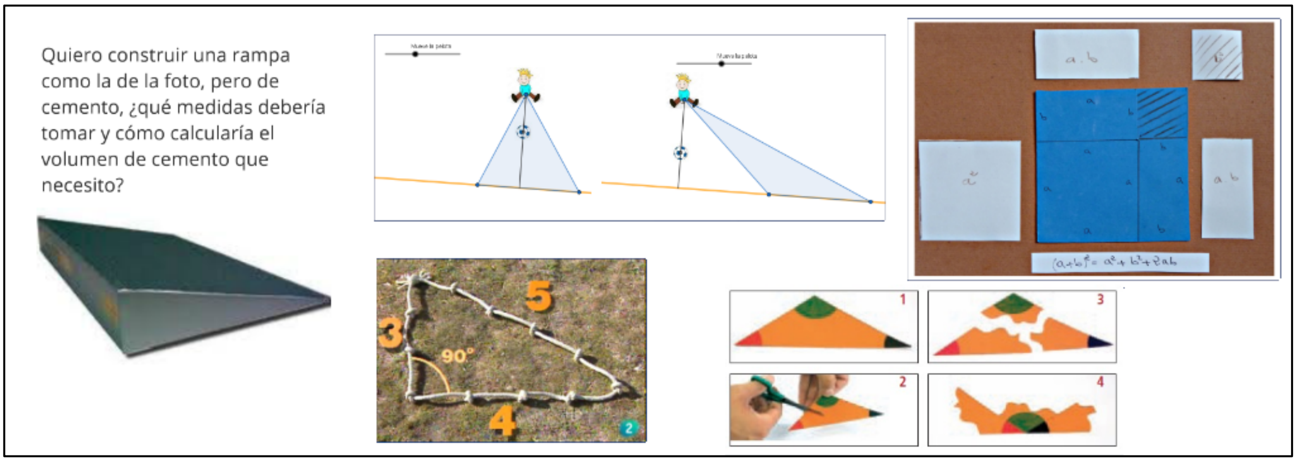
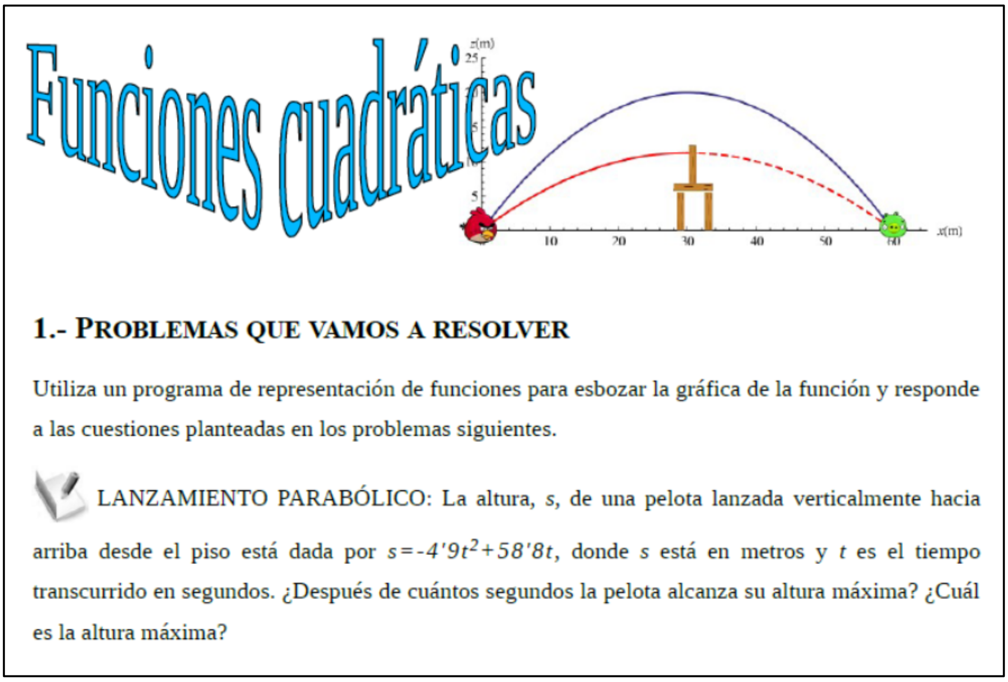


Figura 5: Distintos recursos utilizados para visualizar conceptos

- **Conexiones:** Proponer actividades en las que se ponga de manifiesto la conexión entre los distintos bloques de Matemáticas y de ésta con otras disciplinas (Figura 6).



Funciones cuadráticas

1.- PROBLEMAS QUE VAMOS A RESOLVER

Utiliza un programa de representación de funciones para esbozar la gráfica de la función y responde a las cuestiones planteadas en los problemas siguientes.

LANZAMIENTO PARABÓLICO: La altura, s, de una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el piso está dada por $s=-4'9t^2+58'8t$, donde s está en metros y t es el tiempo transcurrido en segundos. ¿Después de cuántos segundos la pelota alcanza su altura máxima? ¿Cuál es la altura máxima?

Figura 6: Actividad que relaciona Física y Matemáticas

- **Errores:** Hay que dar importancia a los errores, preguntarse por qué no se pueden hacer las cosas de otra forma, cuáles son caminos correctos y cuáles no. Se pueden proponer ejercicios mal resueltos de sus propios exámenes para analizar y otros con errores típicos que cometen ellos también.

CONCLUSIÓN.

Para concluir esta comunicación únicamente señalar que el necesario cambio está en nuestras manos. Solo necesitamos creer en ello para empezar, trabajar en equipo, consensuar métodos, poner en práctica, y compartir...

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Las referencias que se listan aquí son las utilizadas para elaborar algunas de las propuestas presentadas, otras no han sido publicadas y forman parte de los materiales del Grupo de Trabajo "Estudio para la elaboración de una nueva propuesta curricular para el área de Matemáticas"

Blázquez, S. *Proyecto "Matemáticas en Contexto":* http://roble.pntic.mec.es/sblm0001/

Disfruta las Matemáticas: http://www.disfrutalasmatematicas.com/

Jiménez, J. J. *Tablas de cálculo mental*: http://docentes.educacion.navarra.es/jjimenei

Kahoot, Herramienta para elaborar juegos de preguntas: https://kahoot.com/

La Aventura del Saber. Pitágoras: http://www.rtve.es/aventura/universo-matematico/webcap1/index.html

Ramos, P. *Blog "Más ideas menos cuentas":* https://masideas-menoscuentas.com/

Recursos para el aula de Geogebra: https://www.geogebra.org/materials

Tareas ricas: https://nrich.maths.org/

Para hacer referencia al artículo:

Blazquez, S. y Del Río, P. (2018). El necesario cambio curricular y metodológico. En Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 156-161). Lugar: Universidad de León

ABP PARA APRENDER PROBABILIDAD

Rita Jiménez Igea

Miembro del Proyecto EDIA del CEDEC

Resumen.

*El **A**prendizaje **b**asado en **P**royectos (**ABP**) es una metodología que está en auge. Consciente de ello el CeDeC (organismo dependiente del INTEF) promueve y apoya este tipo de enseñanza a través del Proyecto EDIA (**E**ducativo, **D**igital, **I**nnovador y **A**bierto)*

En la comunicación se darán a conocer los materiales elaborados y publicados en la web del Cedec que ya están siendo utilizados. Se mostrará, como ejemplo, un REA (Recurso Educativo Abierto) sobre probabilidad que contiene todo el material necesario (instrucciones, rúbricas de evaluación, fichas de trabajo, enlaces a webs, etc.) para llevar a cabo una experiencia de aula en Primer Ciclo de ESO usando la metodología de ABP.

Palabras clave: *Metodología activa, Matemáticas, Secundaria, aprendizaje basado en proyectos*.

INTRODUCCIÓN.

El Centro Nacional de Desarrollo Curricular en Sistemas no Propietarios (CEDEC) es un organismo dependiente del MECD a través del INTEF y de la Consejería de Educación y Cultura del Gobierno de Extremadura.

Uno de sus principales objetivos es poner a disposición de toda la comunidad educativa materiales y recursos digitales de libre acceso que promuevan las metodologías activas y fomenten la competencia digital en la escuela. Además impulsa ambientes de colaboración para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje y realiza acuerdos de colaboración con organismos, instituciones o empresas encargados de ofrecer recursos educativos.

Figura 1. El CEDEC

En esta línea se puso en marcha el Proyecto EDIA (Educativo, Digital, Innovador y Abierto) donde se promueve la creación de dinámicas de transformación digital y metodológica en los centros para mejorar el aprendizaje e impulsar nuevos modelos de centro educativo.

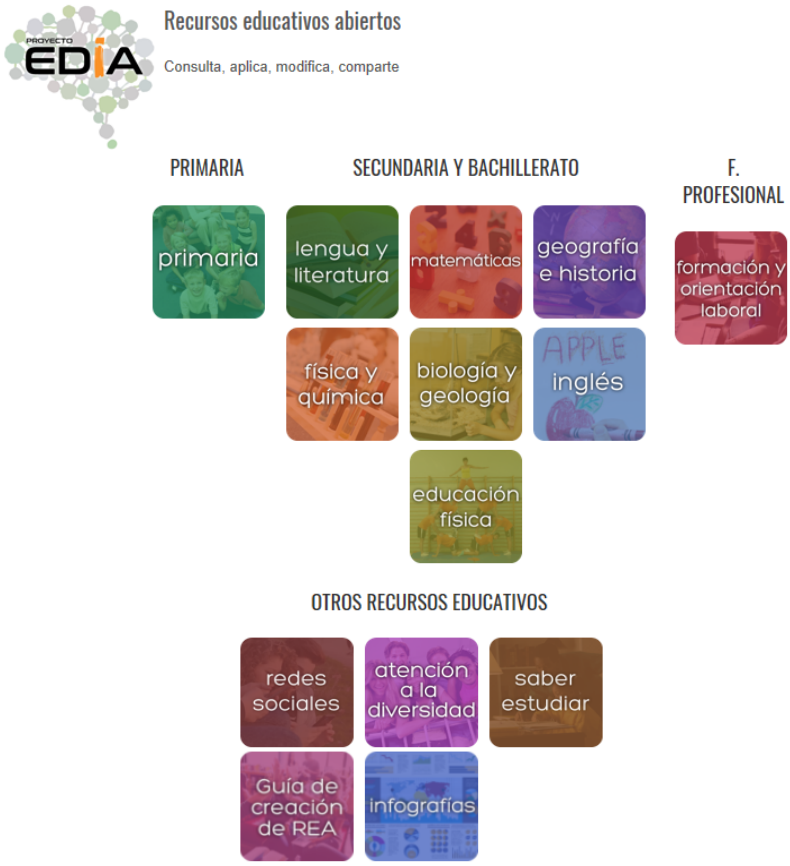


Figura 2 Página de recursos del Proyecto EDIA

EDIA ofrece un banco de recursos educativos que plantea propuestas al aprendizaje basado en proyectos y al uso de las Tics en el aula para muchas asignaturas de todos los niveles de enseñanza no universitarios. Además, desde EDIA se fomenta la creación de redes entre profesores para facilitar la innovación en el aula. Por tanto, podemos decir que EDIA es un banco o repositorio de contenidos y de experiencias de aprendizaje basado en proyectos al que pueden acceder profesores, alumnos y familias.

Las principales ventajas de los recursos educativos del Proyecto EDIA son las siguientes:

- Son abiertos, es decir, de libre acceso y gratuitos y pueden modificarse. Además es posible utilizar, únicamente, una parte del recurso y realizar el proyecto de forma parcial.
- Son innovadores y buscan una metodología activa en la que el alumno es el protagonista. Para aprender los contenidos curriculares deben trabajar en equipo, conseguir elaborar o crear un producto final (una presentación, un informe, un cartel, un video, un blog, etc.) siguiendo una secuencia de tareas.
- Son recursos creados por docentes, aplicados en el aula por ellos mismos y por otros docentes, lo cual genera retroalimentación y nuevas versiones de los mismos.
- Además de los contenidos curriculares se trabajan todas las competencias.
- Son recursos completos, es decir, incluyen todos los materiales necesarios para llevar a cabo la experiencia (rúbricas de evaluación, enlaces a recursos, fichas de trabajo, etc.)

UN EJEMPLO DE REA: I CERTAMEN ESCOLAR DE JUEGOS DE AZAR.

En este REA (Recurso Educativo Abierto) se parte de la idea de que una prestigiosa empresa llamada Toys Azar S.L ha convocado un certamen de juegos de azar para escolares. Junto al anuncio del mismo podemos ver los distintos apartados del recurso (figura 3) y las bases del concurso (figura 4).

Figura 3. Portada del REA I Certamen escolar de juegos de azar

Figura 4. Bases del Certamen de juegos de azar

Los alumnos, organizados por equipos, tienen el reto de elaborar un juego de preguntas y respuestas sobre probabilidad y un vídeo promocional del mismo para poder optar a los premios. En las bases nos encontramos con las condiciones que deben cumplir los materiales pedidos. Para conseguirlos deberán realizar secuencialmente las distintas tareas establecidas. El objetivo del proyecto es que los alumnos aprendan los conceptos de probabilidad de una forma más lúdica, además de, aumentar su competencia digital, fomentar el trabajo colaborativo y desarrollar su capacidad de aprender a aprender y el resto de competencias básicas.

Pasaremos a describir cada uno de los apartados del recurso:

Nuestro proyecto.

En este apartado se presenta el proyecto:

- Se indican los productos que el alumnado debe conseguir al finalizarlo.
- Se señala la forma de trabajar que se ha de seguir, las rúbricas de evaluación de cada tarea y los objetivos curriculares y competenciales del proyecto.
- Se hace la primera toma de contacto con el diario de aprendizaje. Es una herramienta de reflexión que reaparece tras cada tarea. En ese diario deben escribir las dificultades y los conocimientos y/o estrategias adquiridos, deben valorar su participación en el proyecto y la del resto del equipo para tratar de mejorar, si ello es necesario, el trabajo colaborativo que han de llevar a cabo.

Las tareas o secuencias de aprendizaje.

El proyecto tiene una estructura modular. En cada módulo encontramos una o varias tareas que vienen pautadas y las fichas de trabajo, los enlaces a recursos de consulta, manuales, consejos y sugerencias necesarios para realizarlas, además de la rúbrica de evaluación correspondiente y el diario de aprendizaje.

En este REA nos encontramos con cinco bloques que se corresponden con los siguientes apartados:

- Investigación y lluvia de ideas. Cada equipo debe analizar un juego de preguntas y respuestas. Se hace una puesta en común. Cada equipo comienza a pensar y diseñar cómo va a ser su juego. Deben llegar a acuerdos para establecer el formato básico de su juego.
- Las tarjetas de las preguntas. Cada equipo debe, siguiendo las pautas e indicaciones, crear las tarjetas de las preguntas. En ella deberán buscar y resolver problemas de probabilidad. En las bases se pide que se incluyan las respuestas de las tarjetas. Esta tarea será evaluada con la rúbrica de las tarjetas del juego.
- A jugar!!! En esta fase deben, utilizando un croquis del tablero y las tarjetas creadas, testear el juego. Sirve para localizar errores en las tarjetas y en las reglas del juego. Comienzan a redactar el documento de las reglas del juego. En esta fase están resolviendo problemas de probabilidad mientras están jugando.
- El tablero, los accesorios y las reglas del juego. En esta tarea deben crear un tablero (pueden partir de uno existente), reunir los accesorios necesarios para jugar (fichas, dados, etc.) y elaborar el manual de las reglas del juego. El trabajo será evaluado con la rúbrica correspondiente.
- El vídeo promocional. En la parte final del proyecto deben analizar por equipos el video promocional de un juego, hacer una puesta en común, diseñar y crear el suyo. Para ello deberán elaborar el storyboard, grabar y editar el video siguiendo las instrucciones dadas. Su trabajo será evaluado con la rúbrica de evaluación del video promocional.

Tras cada tarea deben cumplimentar el diario de aprendizaje y al finalizar el proyecto deberán, además, evaluar el proyecto de forma global (evaluación de la experiencia, qué he aprendido y evaluación del trabajo en equipo).

La estructura modular permite dividir el proyecto en partes, modificar o incluso eliminar alguna de ellas.

Guía didáctica del recurso.

Esta parte del REA constituye la guía para el profesor. En ella podemos encontrar las siguientes secciones:

- Introducción. Se señalan las principales.
- Fases del proyecto y temporalización. Esta última es orientativa.
- Versiones del proyecto.
- Evaluación y referencias curriculares. En esta sección encontramos información relativa a las herramientas y procesos de evaluación, los contenidos y las competencias clave (Figura 5) trabajados en el proyecto, los criterios de evaluación, los estándares de evaluación y una propuesta de calificación del proyecto.
- Recomendaciones para el profesorado.
- Documentos y recursos ordenados por tareas o por tipo de documento. Recopilación de todos los documentos y los enlaces del REA. Entre ellos se encuentran los diplomas de los premios del certamen listos para imprimir.

	Competencia lingüística	Competencia matemática y en ciencia y tecnología	Competencia digital	Aprender a aprender	Competencias sociales y cívicas	Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor	Conciencia y expresión culturales
Investigación y lluvia de ideas	X		X	X	X	X	
Crear tarjetas de preguntas con soluciones	X	X	X	X	X	X	X
A jugar!!!	X	X		X	X		
Crear el tablero, buscar accesorios			X	X	X		X
Escribir las reglas del juego	X		X	X	X	X	
Producir un vídeo promocional	X		X	X	X	X	X

Figura 5. Competencias básicas del REA I Certamen de juegos de azar

Nos detendremos en el apartado versiones del proyecto de la guía didáctica del REA. En ocasiones la falta de tiempo y/o la falta de experiencia pueden hacer que un profesor o profesora desista en su intención de desarrollar una experiencia de aprendizaje basado en proyectos. Por ello se presentan ideas que modifican el proyecto de forma parcial o más global y que pueden servir al profesorado en su primera tentativa. En este REA se presenta las siguientes posibilidades:

- Versión reducida. El alumnado elaborará las tarjetas de las preguntas. El profesor decide qué tablero van a usar y las reglas del juego (que pueden ser las de algún juego conocido o seleccionarlo de las páginas web que se facilitan en el REA) y el vídeo promocional no se realiza. Esto permite reducir el número de sesiones dedicadas al proyecto y aumentar el número de sesiones de juego en clase.
- Versión colaborativa. Cada equipo se especializa en una categoría de preguntas y elabora tarjetas únicamente de esa categoría. El profesor elige el tablero y las reglas del juego. El vídeo puede realizarse o no. En este caso, únicamente se consigue un juego por clase. Los alumnos jugarán todos al mismo juego.
- Versión semidigital. Los alumnos elaboran las preguntas y éstas se cargan en un programa informático tipo Kahoot. Ello implica que sean tipo test. También deberán crear el tablero, buscar los accesorios y escribir las reglas del juego y el video. Para jugar deberán mover sus fichas por el tablero y utilizar algún dispositivo móvil que irá planteando las preguntas de forma aleatoria y corrigiendo las respuestas.
- Versión interdisciplinar. El proyecto se lleva a cabo en colaboración con docentes de otros departamentos. Se sugiere que las tareas de investigación de juegos y redacción de las reglas del juego se realicen en la clase de Lengua castellana, las tarjetas, el testeo del juego y sesiones de juego en clase de Matemáticas y que, en la creación del tablero, accesorios y el vídeo, podrían intervenir los departamentos de Educación Plástica y Visual, Tecnología y Música.

Ficha técnica y Opina sobre el recurso.

Con estos apartados se cierra el recurso. El primero nos da información del contenido, nivel al que va dirigido, productos a elaborar por el alumnado y posible temporalización del proyecto y el segundo invita a los docentes a expresar su opinión acerca del mismo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Portal del CEDEC http://cedec.educalab.es/ Consultado el 22/10/2018.

Proyecto EDIA http://cedec.intef.es/ Consultado el 22/10/2018.

Banco de recursos del Proyecto EDIA http://cedec.intef.es/recursos/ Consultado el 22/10/2018.

Recursos de Matemáticas del Proyecto EDIA http://cedec.intef.es/proyecto-edia-matematicas/ Consultado el 22/10/2018.

Jiménez, R. (2017). REA para trabajar la probabilidad mediante la metodología ABP. *Certamen de juegos de azar.*

http://cedec.intef.es/proyecto-edia-matematicas-eso-rea-certamen-de-juegos-de-azar/

Para hacer referencia al artículo:

Jiménez, R. (2018). ABP para aprender probabilidad. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 162-168). Lugar: Universidad de León

MATEMAGIA

Rita Jiménez Igea

IES Tomás Mingot de Logroño

Resumen.

Se presentan algunos juegos de magia o trucos que mostrarán al alumnado los "poderes" que tiene un profesor de Matemáticas. Es interesante incluir este tipo de actividades en el aula. Suele sorprenderles, pica su curiosidad y ayuda a la divulgación de las Matemáticas al mostrar una versión más divertida y lúdica de la materia y/o al mostrar las Matemáticas que ocultan estos juegos de magia. Los trucos presentados son sencillos de realizar para que, incluso alumnos de Primer Ciclo de ESO, puedan reproducirlos y traten de impresionar a sus familiares y amigos con sus poderes.

Palabras clave: *Matemática lúdica, Secundaria, magia matemática, Matemática divertida*

INTRODUCCIÓN.

La asignatura de Matemáticas es una materia que, en general, es impopular. Su dificultad hace que no esté en el ranking de las favoritas, más bien sucede lo contrario. Es más, a los profesores de Matemáticas, cada vez que alguien que nos acaba de conocer se entera de nuestra profesión nos suele suceder lo mismo. Nos explican, de forma casi inmediata, lo mal que se les daba nuestra asignatura en el colegio o en el instituto o lo poco que les gustaba. Es evidente que existen conceptos, ideas de esta disciplina difíciles o, incluso, partes que pueden ser áridas. Sin embargo, hay aspectos de las Matemáticas que tienen su atractivo y que la inmensa mayoría desconoce. Es importante, por tanto que busquemos formas de acercar la materia al público en general y a nuestros alumnos en particular. Debemos empezar a divulgarla para que resulte más amigable. Para ello disponemos de enigmas, acertijos, juegos y curiosidades numéricas, magia matemática, etc. En esta comunicación presentaremos algunos trucos sencillos que suelen gustar a los alumnos cuando los descubren. Son, además, muy fáciles de aprender por lo que se dedicarán a ponerlos en práctica con todos sus familiares y amigos y, en el fondo, lo que habremos conseguido es que ellos participen en la divulgación de las Matemáticas.

UN JUEGO DE ADIVINACIÓN CON FICHAS DE DOMINÓ.

Materiales necesarios:

Varios juegos de dominó (En internet podemos encontrar versiones para imprimir en cartulina)

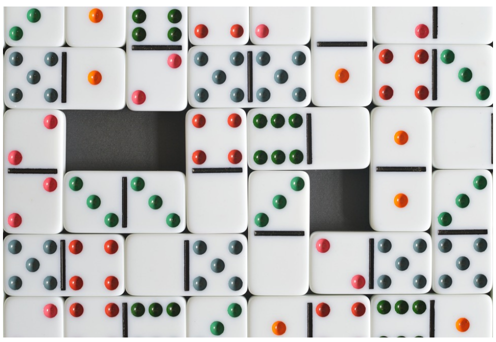


Figura 1. Fichas de dominó

Para llevarlo a cabo procederemos así:

Se entrega un juego de dominó a un alumno o alumna, se le mira fijamente a los ojos y se le pide que lo encaje como si estuvieran jugando una partida con él, pero sin cerrar o bloquear porque debemos colocar todas las piezas (Figura 2). Para ir más deprisa algunos compañeros pueden ayudarle a colocar las piezas.

En ese momento, el mago escribirá algo en un papel, lo introducirá en un sobre y escribirá en la parte exterior del mismo el nombre del alumno o alumna al que ha entregado el dominó. El sobre se deja en un lugar muy visible al que nadie pueda acceder o se pide a un voluntario que lo custodie y se mantenga a la vista de todos y separado de los demás. Todo ello debe ser público.

El mago repetirá el proceso dos veces más con otros dos alumnos o alumnas.

Figura 2. Colocando las fichas

Una vez hayan acabado de colocar todas las piezas, el mago se concentrará, mirará fijamente a los ojos al primer alumno o alumna y adivinará los números que han quedado en los extremos del circuito que ha montado con su juego de dominó. Repetirá el proceso con los otros dos alumnos.

Llega el momento de abrir los sobres. Los voluntarios que los han custodiado abrirán el sobre, leerán la nota que hay en el interior que dirá: “*Nombre del alumno* vas a dejar en los extremos unas piezas con los números ___ y ___” . Por supuesto ahí el mago habrá escrito el nombre del alumno y los números correctos.

Se constata que el mago no se ha limitado a adivinar las fichas de los extremos, una vez lo ha montado el alumno, sino que, incluso antes de hacer el juego, ya lo sabía. En realidad, cuando el mago entrega un dominó y mira fijamente a los ojos está indicando cómo colocar las fichas. El mago puede influir en las decisiones de las personas.

UN JUEGO DE ADIVINACIÓN CON FIGURAS GEOMÉTRICAS.

Materiales necesarios:

Los paneles de las Figuras 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

Un bolígrafo o rotulador

¿Cómo realizarlo?

El mago pide un voluntario para llevar al cabo el número de magia. Muestra a todos la Figura 3 y pide al voluntario que elija, de entre las imágenes del panel de la Figura 3, su dibujo favorito. Se le entrega una copia del panel y el bolígrafo para que la rodee con un círculo y la guarde. Por supuesto, el mago no debe ver el dibujo seleccionado; para ello puede volverse de espaldas.

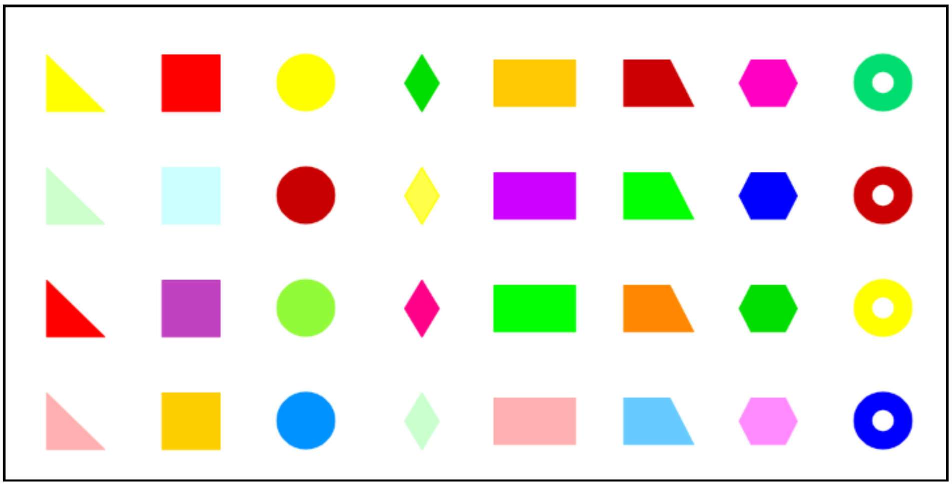


Figura 3.

El mago irá mostrando sucesivamente los paneles de las Figuras 4, 5, 6, 7 y 8 y, en cada ocasión, le preguntará si su dibujo favorito se encuentra en ese panel. El alumno debe contestar SÍ o NO según corresponda:

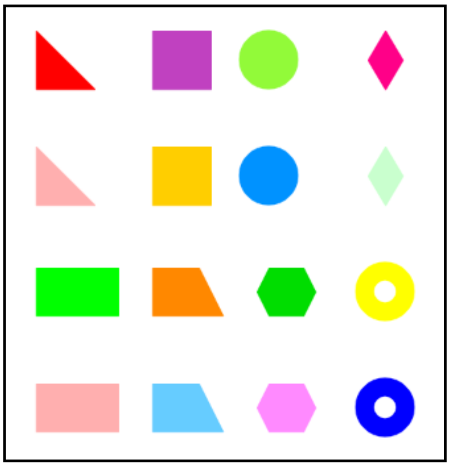


Figura 4

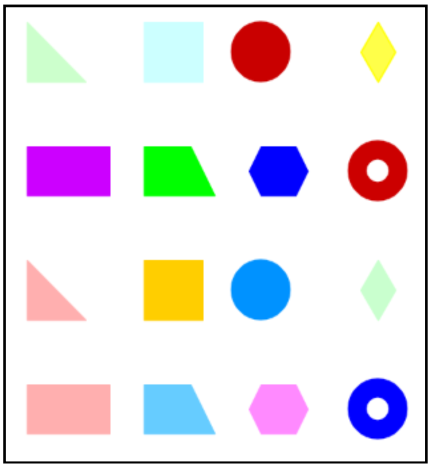


Figura 5

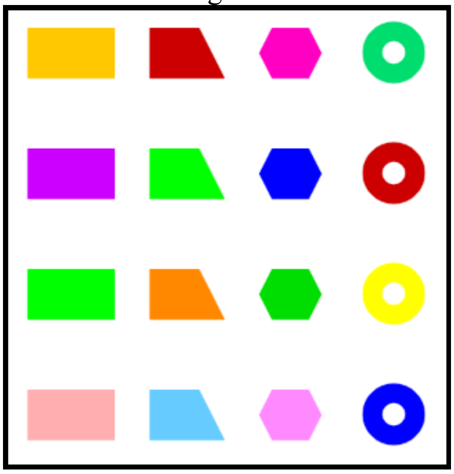


Figura 6

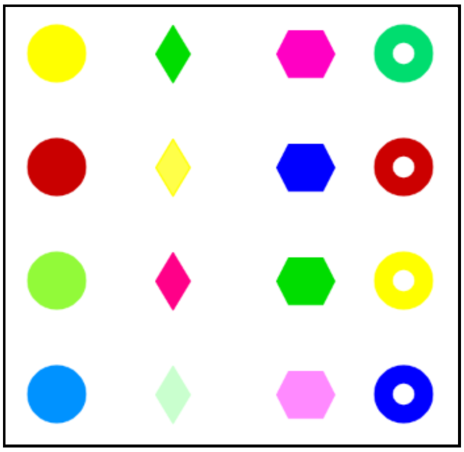


Figura 7

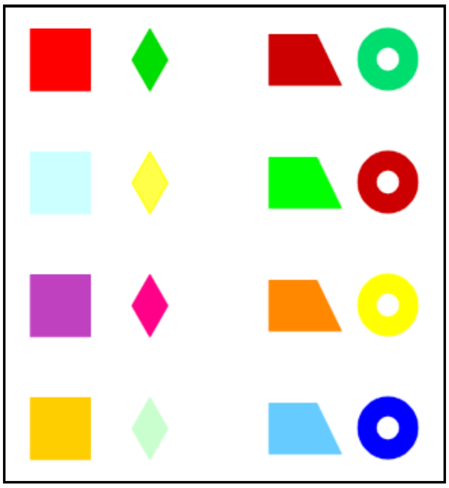


Figura 8

Una vez finalizado el proceso el mago se concentrará y adivinará el dibujo que el alumno había seleccionado.

En ese momento, se debe pedir al voluntario que se levante y que muestre la hoja donde había marcado su dibujo favorito para que todo el mundo constate los poderes del mago.

MAGIA MATEMÁTICA CON LAS MANOS.

Todos hemos pasado en nuestra vida por la experiencia de aprendernos las tablas de multiplicar. Normalmente recordamos haberlas cantado hasta memorizarlas. Existen distintos trucos que permiten aprenderlas sin recurrir a la memorización. Presentaremos uno que afecta a las multiplicaciones más difíciles del tipo: $n \times p$ siendo $n, p \geq 6$. Y lo mejor de todo es que para ello sólo tenemos que utilizar nuestras manos. En las siguientes imágenes lo explicaremos con un ejemplo.

Para empezar miraremos nuestras manos y numeraremos nuestros dedos tal y como se muestra en la Figura 9

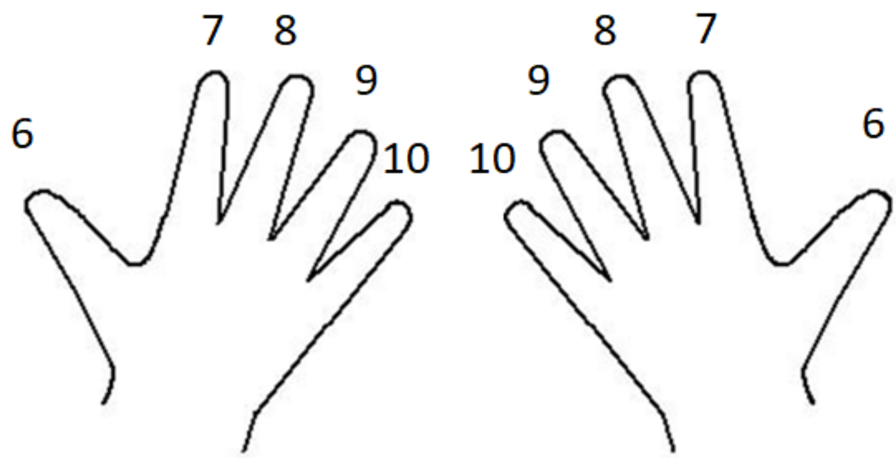


Figura 9. Numerando los dedos de nuestras manos

Para explicar el método utilizaremos el ejemplo 7 x 8

En primer lugar buscamos el dedo 7 de la mano izquierda y el dedo 8 de la derecha. (Figura 10)

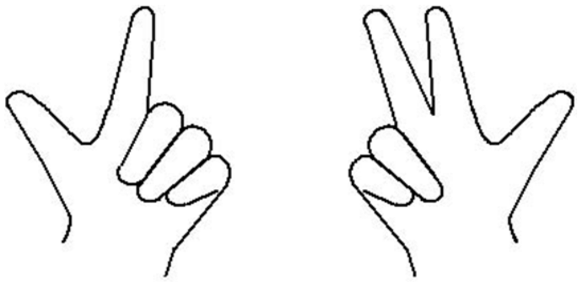


Figura 10. Tenemos el 7 y el 8 en nuestras manos

Giramos las manos hasta unir los dedos 7 y 8 (Figura 11)

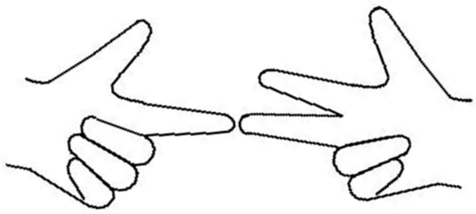


Figura 11. El 7 y el 8 se tocan

En esta posición procederemos así:

Contamos los dedos extendidos que quedan arriba. Serán las decenas. En nuestro caso son 5 o pensamos en 50.

Los dedos doblados que están en la parte inferior deben multiplicarse, es decir hay 3 dedos doblados y otros dos dedos doblados en la otra mano. Multiplicamos 3 x 2 = 6. Son las unidades.

Hemos hallado el resultado 7 x 8 = 50 + 6 = 56 (Figura 12)

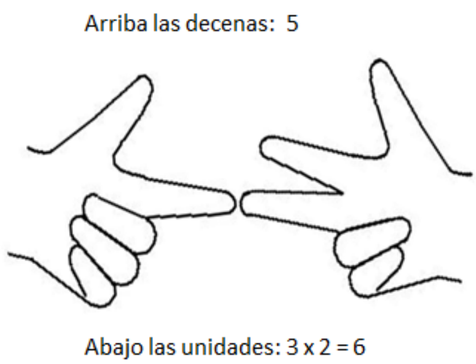


Figura 12. Resultado de 7x 8

Ahora invitamos a nuestros alumnos a comprobar si esta situación se cumple con otros ejemplos del tipo n x p con n y p ≥ 6.

DESVELANDO EL MISTERIO.

Juego de adivinación del dominó.

Un juego de dominó normal consta de 28 piezas. El mago entrega a cada alumno un juego con 27 piezas y guarda una. Así, si el mago se queda con la pieza de la Figura 9, al montar las fichas de dominó, se quedarán en los extremos los números 2 y 3.

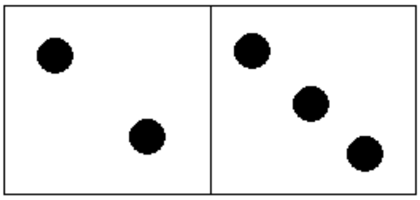


Figura 9

El mago, debe únicamente recordar qué pieza ha eliminado en cada dominó antes de entregarlo. Es recomendable que esa ficha sea distinta en cada dominó con el que repita la experiencia y no resulta nada conveniente que el mago guarde una ficha doble porque, en ese caso, corre mayor riesgo de ser descubierto.

Juego de adivinación del dibujo favorito.

En el caso del truco del dibujo favorito podemos encontrar una versión digital del juego y la explicación del secreto del mago en la unidad *Polinomios* de la RED DIGITAL EDUCATIVA DESCARTES.

Referencias bibliográficas

Ruiz, C. (2013). Unidad didáctica digital del Proyecto ED@D para Matemáticas Académicas de 4º ESO. http://proyectodescartes.org/EDAD/mat_4eso_cast_acad.htm *Polinomios*. Consultado el 22/10/2018

Blog de Homero Larraín http://hoemro.blogspot.com/2005/09/multiplicando-con-los-dedos.html

Para hacer referencia al artículo:

Jiménez, R. (2018). Matemagia. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 169-174). Lugar: Universidad de León

EL LIBRO DE TEXTO INTERACTIVO FRENTE AL LIBRO DE TEXTO TRADICIONAL

Rita Jiménez Igea

Miembro de la RED EDUCATIVA DIGITAL DESCARTES

Nivel Académico: Secundaria

Resumen

Los libros digitales interactivos de Matemáticas de la asociación RED EDUCATIVA DIGITAL DESCARTES desarrollan el currículo completo de Matemáticas de ESO. Existen profesores que los utilizan en sus aulas como sustitutos de los libros de texto tradicionales y subrayan sus ventajas, otros usan los dos tipos de libro de forma complementaria. En la comunicación, además de mostrar los libros digitales, se describirán experiencias y usos con estos materiales y se hará una valoración de las ventajas y desventajas de la utilización en el aula de un modelo u otro de libro. Los libros se encuentran disponibles para toda la comunidad educativa en el Portal de la asociación, pueden descargarse y usarse sin necesidad de estar conectados a internet.

Palabras clave: *Matemáticas interactivas, Secundaria, motivación, aprendizaje activo, objetos digitales*

INTRODUCCIÓN

En 2013 se creó la RED EDUCATIVA DIGITAL DESCARTES, una asociación no gubernamental sin ánimo de lucro que tiene como fin promover la renovación y cambio metodológico en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas, y también en otras áreas de conocimiento, utilizando los recursos digitales interactivos generados en el Proyecto Descartes. En el Portal de la RED EDUCATIVA DIGITAL DESCARTES podemos encontrar los libros interactivos de Matemáticas del Proyecto ED@D. Existen seis libros electrónicos que corresponden a las asignaturas de Matemáticas de 1º y 2º de ESO, de Matemáticas Académicas de 3º y 4º de ESO y de Matemáticas Aplicadas de 3º y 4º de ESO. (Figura 1)

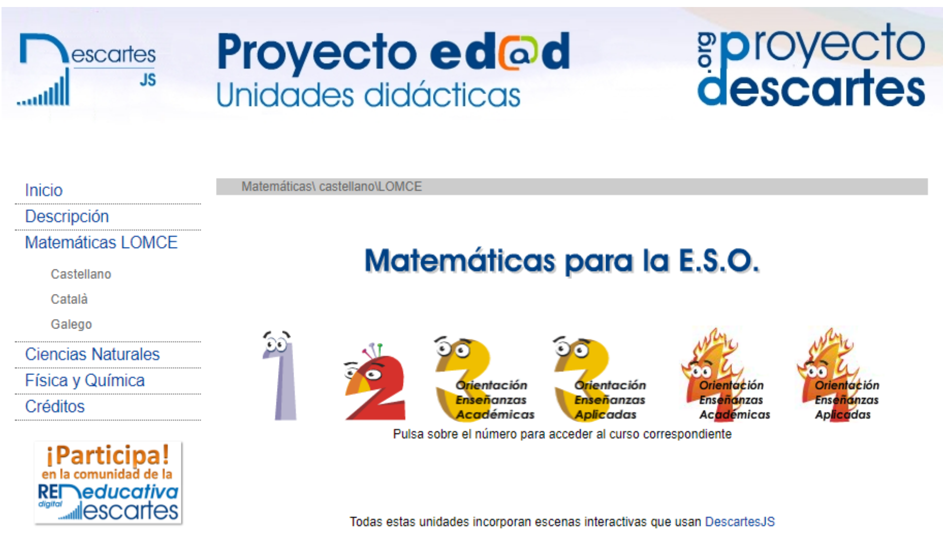


Figura 1: Los libros de texto interactivos de la RED EDUCATIVA DIGITAL DESCARTES

Cubren el currículo completo de la asignatura de Matemáticas de ESO, están adaptados a la nueva ley educativa vigente, LOMCE, y han sido traducidos al catalán y al gallego por miembros de nuestra asociación. Los libros electrónicos pueden usarse libremente con tablets, smartphones u ordenadores conectados a internet. Pueden descargarse y utilizarse en local y funcionan con cualquier sistema operativo. Las escenas u objetos interactivos han sido implementadas con la herramienta DescartesJS. La herramienta cuenta con una licencia de software libre y puede descargarse en este enlace.

En cada uno de los libros, la materia se divide en temas que llamamos quincenas que son las unidades didácticas a impartir en la asignatura de Matemáticas de ese nivel. Para mostrar su formato seleccionaremos la unidad "Múltiplos y divisores" de 1º ESO cuyo autor es Eduardo Barberó.

LOS UNIDADES INTERACTIVAS DEL PROYECTO ED@D

Todas las unidades tienen una estructura y formato comunes que podemos visualizar en la Figura 2.

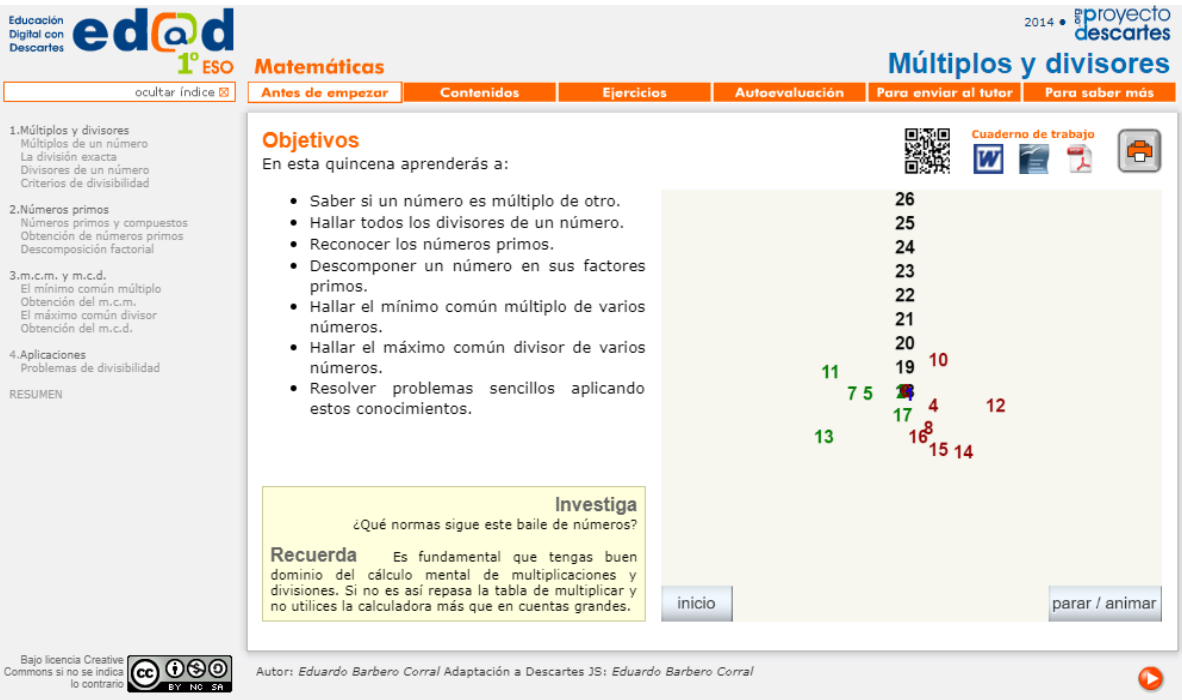


Figura 2: Quincena. Múltiplos y divisores (Matemáticas 1º ESO)

La navegación se puede realizar de forma secuencial con los botones de la parte inferior derecha que vemos en la imagen 2 o pinchando en los apartados de la unidad (Figura 3)

Figura 3: Apartados de una unidad del Proyecto ED@*D*

A continuación describiremos brevemente cada uno de ellos.

Apartado Antes de empezar

Este apartado constituye la introducción al tema. Se indican los objetivos de la unidad y se presenta una actividad de toma de contacto con la materia, una tarea de investigación o un enlace para repasar conceptos previos (Ver Figura 2).

En esta sección, pulsando el icono de la impresora, accedemos al tema escrito como libro tradicional que podemos descargar y/o imprimir en formato pdf. Además, se incluye la versión de los materiales en formato editable (Word, Open Apache) y cuadernos de trabajo del alumno. Son muy prácticos ya que permiten a cualquier profesor modificarlos y adecuarlos a la realidad de su aula y/o a las peculiaridades del curriculum de su Administración Educativa. Los alumnos, cuando practiquen, pueden ir anotando los resultados obtenidos a medida que interactúan con las escenas. En los anexos se adjuntan, a modo de ejemplo, algunas páginas de estos materiales.

Apartado Contenidos

Una vez situados en este sección, podemos acceder a los contenidos secuencialmente con los botones de navegación situados en la parte inferior o pinchando en los epígrafes del índice del tema (zona gris a la izquierda de la Figura 2).

Elegida una opción del índice, en nuestro caso "Los divisores de un número ", vemos una breve explicación teórica y una escena interactiva de explicación del concepto (Figura 4).

Si movemos el valor del parámetro de la escena, ésta nos mostrará los divisores del número que hayamos seleccionado:

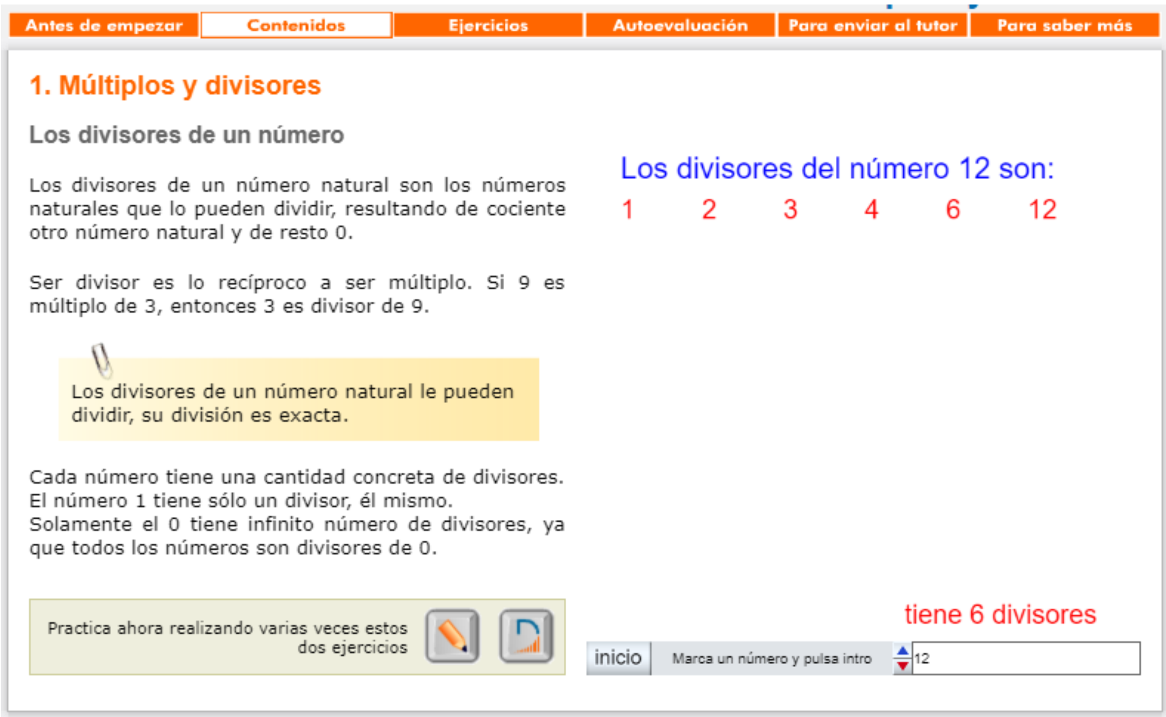


Figura 4: Una página del apartado contenidos

Pulsando en los botones de "Ejercicios interactivos" (parte inferior izquierda de la Figura 4), aparece, en una ventana emergente, una escena para practicar o ampliar el concepto tratado de corrección automática (Figura 5).

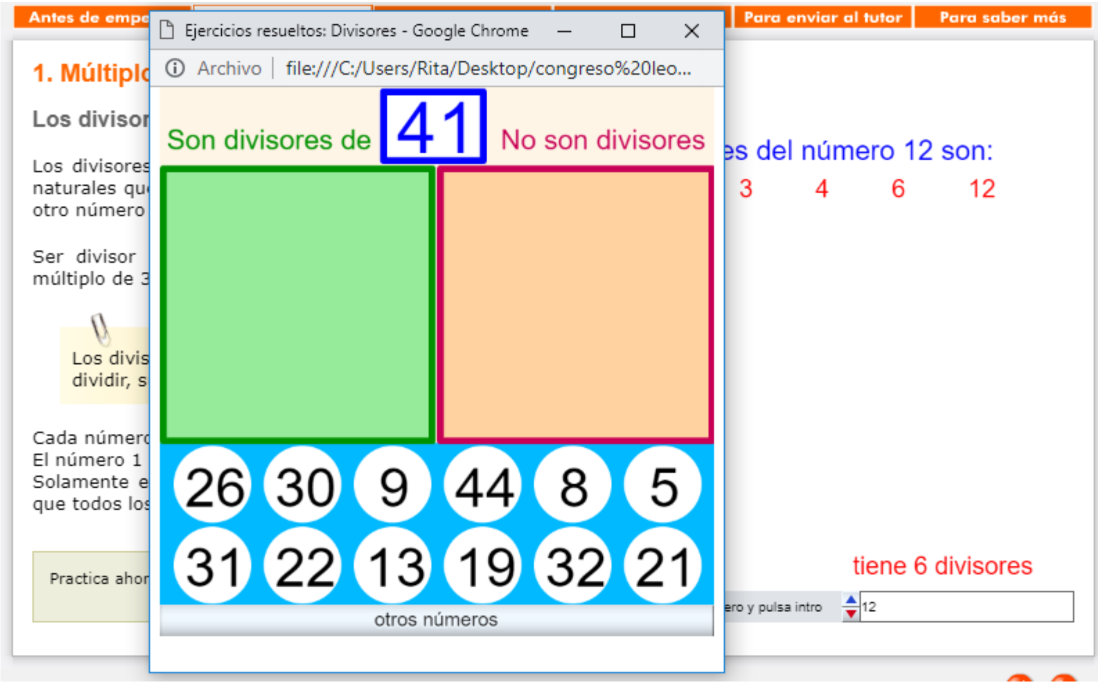


Figura 5: Escena en ventana emergente del apartado contenidos

Las escenas de explicación y de ejercicios cambian los datos del enunciado cada vez que son utilizadas.
En la última opción del menú de contenidos, sintetizando lo más relevante de la unidad, encontramos el resumen de ésta.

Apartado Ejercicios para practicar

Esta sección está compuesta de dos o más páginas de ejercicios y/o problemas para que el alumno los realice en su cuaderno. En el caso de la unidad seleccionada consta de dos páginas (Figura 6).

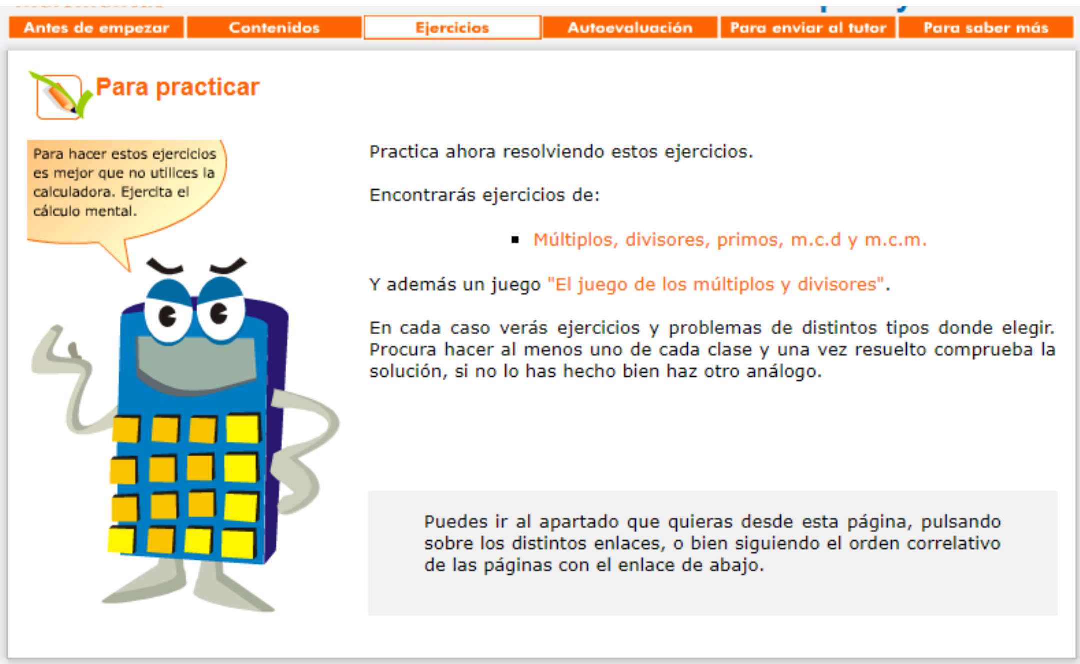


Figura 6: Páginas del apartado Ejercicios para practicar

Una vez seleccionada la página, nos aparece en pantalla una escena de problemas y ejercicios. En este caso, si abrimos la página ‘Múltiplos, divisores, primos, mcd y mcm’ encontramos la Figura 7. El manejo de estas escenas es muy sencillo. Desde el menú, el alumno elige una opción y se le muestra un enunciado. En cualquier momento, pulsando el botón ‘Solución’, puede acceder a la misma y simultáneamente visualizará, además, la resolución del problema (Figura 8). Si se pulsa el botón ‘Nuevo ejercicio’, los datos del mismo cambian aleatoriamente. En determinados casos, cuando el tema lo requiere, en cada opción del menú encontramos diferentes tipos de ejercicios que surgen al azar.

Figura 7: Un ejemplo de escena de Ejercicios para practicar

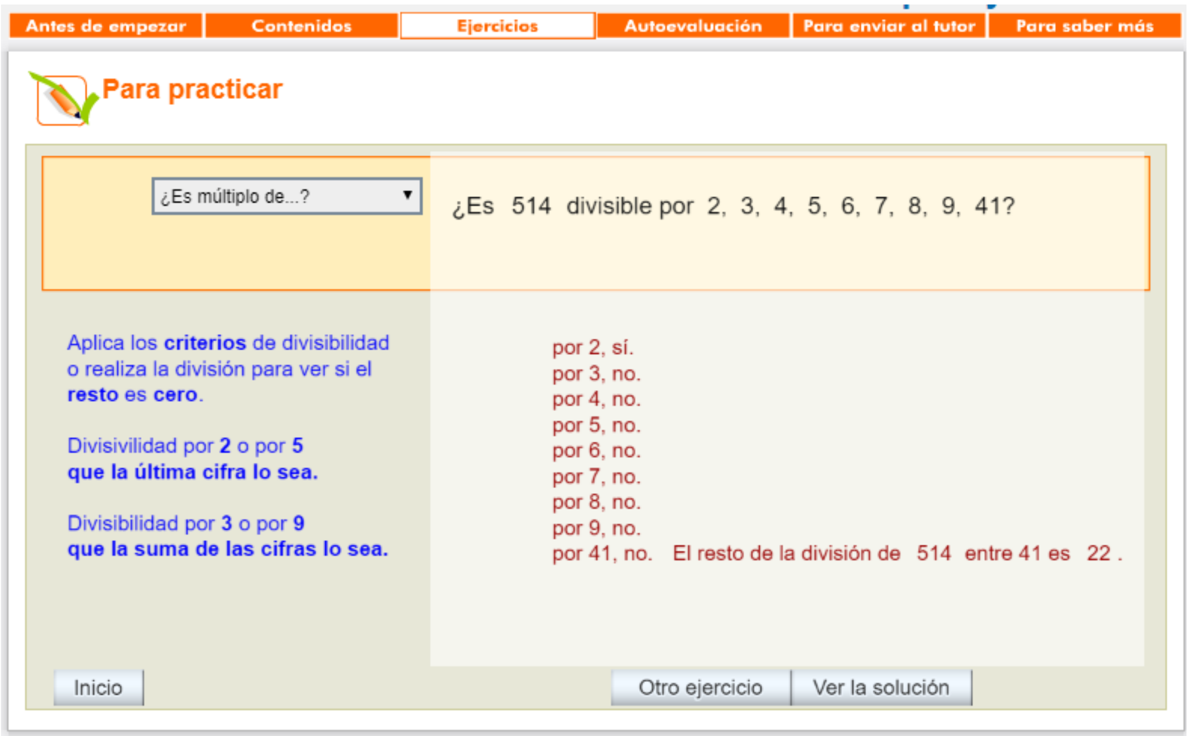


Figura 8: La escena una vez elegido el tipo de ejercicio y pulsado el botón solución

Apartado Autoevaluación

En esta sección se incluye una escena con diez preguntas cortas para repasar los contenidos de la unidad (Figura 9). El alumno debe dar la respuesta y la escena corrige automáticamente. Los datos de las preguntas cambian cada vez que se comienza una autoevaluación. Así se ha facilitado al alumnado una herramienta, válida tanto para el aprendizaje como para la autoevaluación.

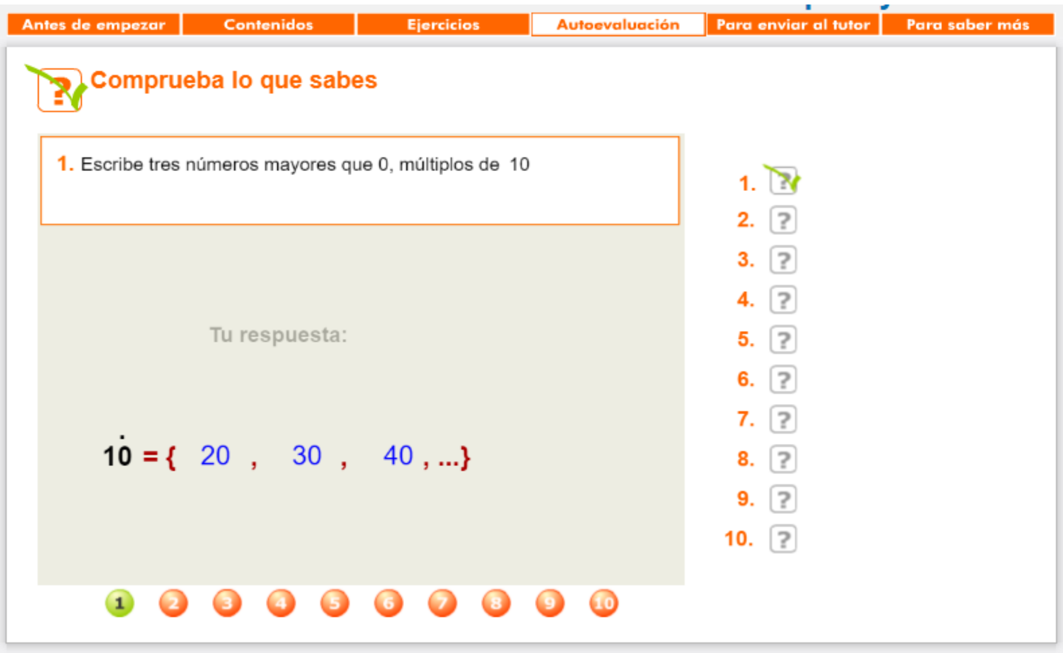


Figura 9: La autoevaluación tras responder a la 1ª pregunta

Apartado Para enviar al tutor

En esta página, (Figura 10), se encuentran las actividades que el alumno de enseñanza a distancia debe enviar a su tutor o tutora e-learning. Los profesores de educación presencial pueden indicar a sus alumnos que realicen los ejercicios y se lo envíen a su cuenta de correo.

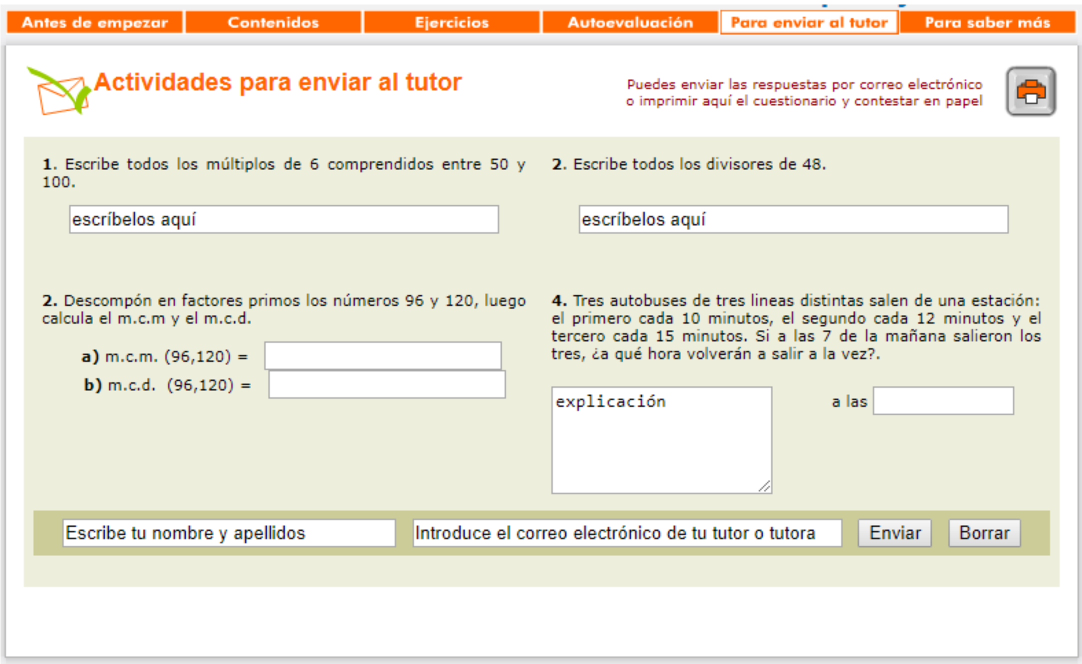


Figura 10: Ejemplo de las actividades Para enviar al tutor

Apartado Para saber más

Cada unidad termina con esta sección de formato más libre. En ella se presentan pasatiempos, curiosidades, resúmenes de hechos históricos, enlaces a otras webs etc., relacionadas con el tema tratado en la unidad, tratando de despertar el interés del alumno.

EXPERIENCIAS

En el BLOG del Portal se publican experiencias realizadas y entrevistas a profesores que utilizan las escenas de Descartes en sus clases, lo cual facilita ejemplos prácticos de cómo integrar estos materiales en el aula. A modo de resumen señalaremos las siguientes:

- Realizando clases prácticas en el aula de informática con los alumnos.
- Haciendo clases prácticas en clase, utilizando tablets y los propios móviles de los alumnos.
- Colgando los materiales en Aulas moodle.
- Utilizar las escenas en clase con la ayuda de un retroproyector.
- Usar el método flipped classroom.
- Como sustituto del libro de texto.
- Como material de apoyo y refuerzo para el alumno. Estos pueden estudiar y repasar en casa con los materiales de la web.
- Los alumnos generan videos tutoriales y objetos digitales utilizando las escenas de los libros electrónicos.

CONCLUSIONES

Las escenas son las que marcan la diferencia con el libro tradicional.

En este último los ejemplos, ejercicios o problemas propuestos son siempre los mismos. Es una información estática.

Los libros electrónicos del Proyecto ED@D incluyen explicaciones teóricas, ejercicios para practicar y problemas y son dinámicos.

Las escenas interactivas cambian aleatoriamente los datos cada vez que se inicializan, lo que permite al alumnado ver planteados o resueltos ejercicios y problemas distintos cada vez. Cada escena es en

realidad una batería infinita de ejemplos o de ejercicios para realizar. Ello permite al alumno ver la explicación y repetir el ejercicio tantas veces como necesite.
En el libro tradicional no hay *feed back.* Simplemente se exponen las ideas, los conceptos o los ejercicios resueltos. En cambio, las escenas de los libros interactivos permiten mostrar propiedades, presentar conceptos, explicar paso a paso cómo realizar un ejercicio, practicar esos ejercicios o problemas y corregir automáticamente la respuesta dada por el alumno, con lo que tiene una retroalimentación inmediata. Se consigue, por tanto, una atención más individualizada, un aprendizaje más autónomo y un continuo *feed back* con el estudiante. De esta forma cada alumno podrá elegir qué y cuántas veces practicar según sus necesidades.

Uno de los problemas de los recursos digitales es que, normalmente, precisan de conexión a internet. En este proyecto se planteó que estos materiales pudieran descargarse y usarse sin necesidad de estar conectados. Esto es especialmente importante en lugares o momentos donde la conexión sea problemática. Además, se ha conseguido que sean accesibles desde distintos dispositivos (PCs, smartphones y tablets). Ello facilita el proceso de formación ya que los materiales son accesibles en cualquier lugar y momento y con gran variedad de dispositivos.
Por otra parte, para que el manejo de los libros no dificultara el proceso de aprendizaje, se simplificó su formato. La navegación y el manejo de escenas (en cada una de ellas se incluyen indicaciones de lo que hay que hacer) son sencillas. Por ello, la cuestión informática no supone un handicap.
Los dibujos y representaciones gráficas suponen otro aspecto a tener en cuenta. En un libro tradicional los dibujos que aparecen son limitados en cuando a su número y estáticos. El profesor está casi obligado a dibujar a mano alzada en la pizarra otros ejemplos que, normalmente, terminan siendo simples aproximaciones de lo que pretende representar. Eso hace que el alumno deba imaginar cómo es la figura y deba “creerse” determinadas propiedades.
Las posibilidades de las escenas en ese sentido son inmensas. Podemos representar formas geométricas, funciones, puntos, vectores, etc. con rapidez y precisión. Además, podemos visualizar conceptos e ideas y comprobar propiedades de forma clara modificando los valores de los parámetros de la escena. El alumno no imagina, el alumno ve y puede comprobar esas propiedades. Además eso le permite investigar, por si mismo, la veracidad de otras propiedades, la influencia de determinados parámetros, etc.

Los libros interactivos de Matemáticas del Proyecto EDAD contienen además el libro en formato tradicional (en pdf), que puede descargarse, y unas fichas de trabajo guiadas. Éstas permiten que el alumno, de forma independiente o siguiendo indicaciones del profesor, realice prácticas y vaya escribiendo la resolución y la solución de los ejercicios y problemas, con lo cual obtendrá un cuaderno de trabajo. Las fichas de trabajo pueden descargarse y son editables para que cada profesor pueda adaptarlas a las circunstancias de cada clase. Las podemos encontrar en la sección “Antes de empezar” de cada unidad. Todo ello permite que el alumno pueda utilizar estos materiales en casa como apoyo en sus repasos y retarse a sí mismo con otros ejercicios para comprobar si ya domina la materia. La retroalimentación automática, la interactividad, el hecho de que los datos varíen aleatoriamente cada vez que se accede a las escenas, permiten un aprendizaje más significativo y adaptado a las necesidades de cada uno. El alumno decide los contenidos y el número de veces que va a practicar o repasar un determinado ejercicio y recibe retroalimentación cada vez que lo hace.

Otra cuestión a tener en cuenta es la fascinación que todos los medios audiovisuales provocan en los alumnos. Ello hace que aumente su atención si les presentamos los conceptos en este formato.
Además, estos libros electrónicos permiten integrar perfectamente las nuevas tecnologías y garantizan trabajar la competencia digital y la competencia aprender a aprender, además de los contenidos curriculares de cada asignatura.

Referencias

Barberó, E. (2013). Unidad de 1º ESO del Proyecto Edad. *Múltiplos y divisores*. Consultado el 22/10/2018 http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_1eso_multiplos_y_divisores-JS/index.htm

Blog del Portal de la Red Educativa Digital Descartes. Consultado el 22/10/2018 http://proyectodescartes.org/descartescms/blog/experiencias

Editor de escenas http://proyectodescartes.org/descartescms/descartesjs/item/2811editor-en-javascript Consultado el 22/10/2018

Página de descargas de materiales http://proyectodescartes.org/descartescms/descargas. Consultado el 22/10/2018

Portal de Red Educativa Digital Descartes (RED Descartes). Consultado el 22/10/2018

http://proyectodescartes.org/descartescms/

Proyecto ED@D . http://proyectodescartes.org/EDAD/index.htm

Para hacer referencia al artículo:

Jiménez, R. (2018). El libro de texto interactivo frente al libro de texto tradicional. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 175-183). Lugar: Universidad de León

MATEMÁTICAS EN LOS JUEGOS GRECORROMANOS: LA CASA ÁUREA DEL DIOS

Ana María Pérez Cubillo

[a]I.E.S. Lancia, [b]Fundación Instituto Bíblico y Oriental (IBO)

Nivel académico: 3º Enseñanza Secundaria Obligatoria

Resumen

Los Juegos Grecorromanos es una actividad extraescolar de carácter interdisciplinar erigida en una referencia obligada en el ámbito educativo de Guadalajara. Se celebran el primer jueves del mes de mayo, estructurándose en torno a dos eventos: Jornada: dramatización estándar del evento de los Juegos Olímpicos y Simposio Monográfico: exposiciones sobre un tema de investigación y/o aplicación didáctica. La propuesta del Departamento de Matemáticas en los VI Juegos Grecorromanos, consistió en la construcción del templo políado de Afaya a partir de una maqueta a escala del original, desarrollando contenidos geométricos, demostrando que las dicotomías epistemológicas tradicionales son poco operativas, siendo una prioridad promover y difundir este tipo de espacios comunes en los que se observa que los clásicos tienen una aplicación y un alcance mucho mayor que el que tradicionalmente se les ha concedido en las disciplinas científicas.

Palabras clave: *Cultura clásica, Juegos Grecorromanos, Geometría, maqueta*.

INTRODUCCIÓN

'Los sentidos se deleitan con las cosas que tienen las proporciones correctas' Santo Tomás de Aquino (1225–1274).

En el marco del XIV Congreso Regional de Matemáticas se expone esta comunicación cuyo objetivo es incorporar la materia de Matemáticas en el desarrollo de la actividad lúdico-cultural *Los VI Juegos Grecorromanos* y la presentación de la propia jornada, además de destacar el valor y la necesidad de las humanidades y las tradiciones clásicas en el descubrimiento y desarrollo de las Matemáticas.

Este evento descubre a toda la comunidad educativa las tradiciones romana y griega a través de la recreación de la celebración de los Juegos Olímpicos según nos han transmitido las fuentes clásicas. Para ello, en cada curso escolar se elige una temática en torno a la que gira el acontecimiento. En esta sexta edición la protagonista fue Cleopatra y su contexto, su ciudad, Alejandría, la creación de la misma por el conquistador griego Alejandro Magno y la elección de la comentarista y matemática Hipatia como representante de los sabios de la época helenística en Alejandría.

También las Matemáticas se adentraron en estas tradiciones fundantes y, con esta clara referencia, se propuso descubrir diversos contenidos geométricos en el proceso de construcción del templo de Afaya en Egina, tomando como base una maqueta a escala del templo original y teniendo como punto de partida la maqueta expuesta en la Gliptoteca de Munich (Alemania).

La intención era la de concienciar a los alumnos de la necesidad de conocer estas civilizaciones edificadoras y sus enormes conquistas científicas en prácticamente todos los campos del saber, en concreto en Matemáticas, para entender el desarrollo y evolución de lo que ellos estudian hoy en día en el aula en la mayor parte de sus materias.

¿QUÉ SON LOS JUEGOS GRECORROMANOS?

Los *Juegos Grecorromanos* es una actividad extraescolar de carácter interdisciplinar de referencia obligada en el ámbito educativo de Guadalajara. Se lleva celebrando siete años de manera consecutiva en el I.E.S. Brianda de Mendoza y en ella se implica toda la comunidad educativa, además de dos centros de la misma provincia invitados. La actividad es coordinada por la jefa del departamento didáctico de Latín y Griego del centro, Dª. Elena Cuadrado, con el fin de involucrar al profesorado en todas las fases de su preparación, contando con la motivación e implicación de los alumnos del centro. Para llevar a cabo esta tarea, se elaboran tres cuadernillos dirigidos a los diferentes niveles de Enseñanza Secundaria y de Bachillerato como propuesta didáctica. En concreto, en la celebración de los *VI Juegos Grecorromanos*, se prepararon los siguientes materiales iniciales destinados a 1° y 2° E.S.O.: *¿Conoces a Cleopatra?*; 3° y 4° E.S.O.: *¿Conoces Alejandría?*; 1° y 2° Bachillerato: *¿Conoces a Hipatia?*

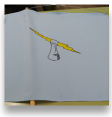
Esta propuesta didáctica permite especificar los contenidos por niveles a los que se dedica el evento y orientar al profesorado en su labor en el aula, tanto como tutor como profesor de la materia específica. Cada cuadernillo se estructura en diversos apartados: por un lado, los contenidos a desarrollar con una parte final dedicada a *¿Sabías qué?* y por otro lado, diferentes propuestas metodológicas para alcanzar, con éxito, las competencias desde las diversas materias incluidas en el currículo oficial, desde webquest pasando por trabajo en grupos con utilización de las TIC o distintas actividades interdisciplinares hasta un plan de lectura. También se recoge en ellos la implantación de esta actividad en la Sección Europea. Por último, quisiera destacar que cada cuadernillo concluye con una serie de enlaces a páginas web para profundizar en los contenidos desarrollados y facilitar las actividades de investigación propuestas.

CELEBRACIÓN DE LOS VI JUEGOS GRECORROMANOS

Los *Juegos Grecorromanos* se celebran durante una jornada lectiva completa, normalmente el primer jueves del mes de mayo, estructurándose en torno a dos eventos:

- Jornada: celebración en el patio del instituto de la dramatización de los primeros Juegos Olímpicos que se desarrollaron en la ciudad griega de Olimpia, según nos transmiten las fuentes y la tradición grecorromana. La estructuración de la jornada es el siguiente:

  Los diferentes grupos se reúnen en torno a su tutor y su estandarte para comenzar el desfile.




El desfile se inicia encabezado por el director del centro organizador, la coordinadora del evento, los profesores acompañantes de los centros invitados, en presencia de la llama olímpica, que porta en la antorcha el alumno ganador de las pruebas atléticas globales del curso escolar anterior. Las autoridades ascienden al pórtico para que todos los participantes en los Juegos puedan saludarles.

Continúa el desfile con los alumnos acompañados de sus profesores. Cada grupo porta su estandarte asociado a un dios griego o romano. Primero desfilan los dos centros invitados, los alumnos de intercambio y por último todas las agrupaciones, ordenadas por nivel y grupo, del centro organizador.



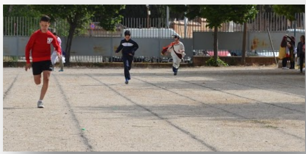
Tras saludar a las autoridades, las agrupaciones se reúnen frente a las autoridades, para presenciar el sacrificio y realizar el juramento con el que dan comienzo los Juegos Grecorromanos.

La jornada se compone de diversas actividades como se muestra a continuación:

1) Competiciones deportivas.







2) Cambio monetario, con ayuda de los alumnos y profesores del Ciclo Formativo de Finanzas, para poder comprar lo que se ofrece en las tabernas en sestercios y denarios.




3) Actuaciones y representaciones.





4) Oráculos y escritura jeroglífica.

Y para finalizar la jornada se realiza la entrega de premios de cada prueba deportiva, una manzana a los ganadores de pruebas parciales y el premio al ganador global, el plato de cerámica y ser el portador de la llama olímpica en los siguientes Juegos Grecorromanos.

- <u>Simposio monográfico</u>: simultáneo a la jornada se desarrolla el Simposio. Participan profesores del centro coordinador, de los centros invitados o de otros centros de la provincia así como padres de alumnos dedicados a la enseñanza. Se compone de un conjunto de exposiciones que realizan estos profesores, en las que se elige un tema de investigación y/o aplicación didáctica en el aula con formato de comunicación, siempre desde los contenidos de la materia que imparte y en base a la temática propuesta. La exposición realizada por el Departamento de Matemáticas fue: *La casa áurea del Dios*.

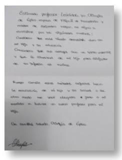
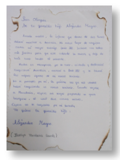
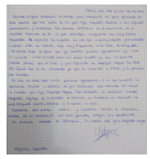
MATEMÁTICAS EN LOS VI JUEGOS GRECORROMANOS

Ámbitos de aplicación

Expuesto el evento, veremos cómo el mundo clásico se adentra en las clases de Matemáticas gracias a la participación de este departamento en los *VI Juegos Grecorromanos*. La temática específica para el nivel de aplicaciones, la recogida en el cuadernillo *¿Conoces Alejandría?* En función de ello, la investigación y el trabajo en el aula con los alumnos se dividieron en dos ámbitos:

Desde la TUTORÍA

Descubrimos al gran conquistador y fundador de Alejandría, Alejandro Magno. Durante tres sesiones se presentó la figura del macedonio a través de sus relaciones personales en las diferentes épocas de su vida, En su infancia: familia y sus profesores, entre los que destaca Filisco de Egina, en cuya isla se levanta el templo de Afaya. En su adolescencia: estrecha relación con su caballo Bucéfalo y su llegada al poder. Y en su madurez: sus conquistas, desde Grecia, pasando por Egipto, hasta Mesopotamia, finalizando con su muerte incierta según las fuentes tras haber conquistado muchas tierras y formado un gran Imperio. Se trabajó con una presentación personalizada, sugiriendo como trabajo final mantener una correspondencia epistolar entre alumnos, asumiendo cada alumno la personalidad de alguna de las figuras expuestas y en relación con Alejandro. A continuación se muestran algunas de las cartas escritas por los alumnos:

Desde la CLASE DE MATEMÁTICAS

Al constituir el núcleo de la presentación, dividiremos esta intervención en diversos apartados, para analizar partiendo de los contenidos desarrollados, pasando por las metodologías aplicadas hasta la evaluación final de la actividad y las conclusiones.

Descripción de la actividad

La actividad consiste en la construcción de un templo griego a través de una maqueta, analizando en el proceso diversos contenidos matemáticos englobados en lo que podríamos designar como contenidos geométricos, tomando como referencia el temario de este nivel. La maqueta de este templo griego está expuesta en la Gliptoteca de Munich.

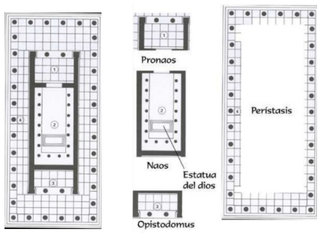
Objetivos

- Interdisciplinares: Incorporar a las Matemáticas los conocimientos de las Culturas Clásicas, relacionando ambas materias e intentando analizar el desarrollo de la Geometría en esta cultura a través de las obras de arte clásicas. Emocionarse ante la belleza de estas obras de arte y la posible recreación de las mismas, analizando el desarrollo y aplicación de la Geometría. Estudiar diversos aspectos etimológicos insertos en conceptos geométricos. Apreciar la interacción de varias materias: Lengua, Latín y Griego, Filosofía, Historia y Geografía e Historia del Arte, Plástica y Tecnología, Música, Alemán,…
- Matemáticos: Apreciar la grandeza de las culturas antiguas por su gran interés por el saber, que se ve plasmado en las construcciones humanas dando lugar a verdaderas obras de arte. Aprender a ver relaciones entre diversas partes de la obra y el todo. Interpretar el número áureo desde diversos puntos de vista. Distinguir los diversos polígonos, poliedros y sólidos de revolución, rectángulos áureos, aprendiendo a construirlos. Entender y realizar desarrollos planos de diversos sólidos. Conocer el Teorema de Pitágoras a nivel numérico y a nivel geométrico y ser capaz de calcular longitudes, perímetros, áreas y volúmenes en polígonos y sólidos. Conocer el Teorema de Thales a nivel numérico y a nivel geométrico para trabajar con escalas, entender la importancia de las proporciones y simetrías en la belleza propia de una construcción humana o de una creación de la naturaleza.

- Personales: (Profesor) Descubrimiento de la presencia de relaciones matemáticas en las bellas construcciones del mundo clásico. Saber trabajar de manera coordinada, aprendiendo de otros compañeros en sus campos de especialización. Reto de trabajar de otra forma en el aula con los alumnos. (Alumno) Sorprenderse ante lo desconocido. Aprender a investigar y sentir necesidad de ello.

El templo de Afaya en la isla de Egina

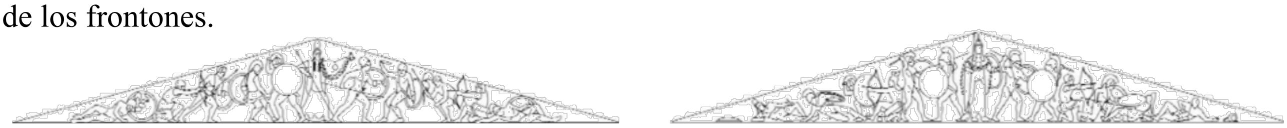
La cultura griega destaca por la sabiduría y belleza que nos ha legado y que apreciamos en los diversos documentos escritos y construcciones realizadas. Es fuente de divinas proporciones y perfectas simetrías que dotan a sus obras de arte de una belleza extraordinaria. Tomamos como ejemplo de estas imponentes creaciones artísticas el templo de Afaya, en lo alto de una colina de la isla griega de Egina, a 30 km de Atenas, situada en el Golfo Sarónico. Entre sus habitantes destaca el egineta Filisco de Egina, profesor de Alejandro Magno y nexo de unión de las dos intervenciones en el aula.
El templo de Afaya es uno de los tres templos del triángulo sagrado junto al Partenón y al Templo de Poseidón. Data del final del S. VI o principio del S. V a.C. y está dedicado a una diosa local, Afaya, asociada a la Atenea griega. Este santuario es de estilo dórico, está rodeado de un muro perībolo (cercado de viñas y árboles). Reposa sobre un estereóbato de tres escalones. Es períptero y hexástilo dórico con todas las columnas exteriores monobloques.



El sekos (interior del templo) está dividido en tres, un pronaos, un naos o cella (‘vivienda de los dioses’, el espacio más sagrado, con la estatua de la diosa) y un opistódomo (espacio posterior al naos que contiene las mesas de mampostería y los tesoros dados al dios como ofrendas).

Pero lo más destacado de este templo de Afaya son sus frontones, que se encuentran reconstruidos, como comentamos anteriormente, en la Gliptoteca de Munich, Alemania.

Ambos frontones representan a los dioses en un combate de las Guerras de Troya, presenciando cada combate Atenea (Atenea-Afaya, nombre que recibe el templo), que se encuentra situada en el centro de los frontones.



Frontón este: combate asedio de Heracles contra Laomedonte. Frontón oeste: combate durante el asedio por Agamenón.

La maqueta del templo de Afaya

La maqueta está formada por seis pliegos: Pliego 1 (P1, representa la planta del templo), Pliego 2 (P2, representa la cella), Pliego 3 (P3, representa el frente y el pasillo posterior), Pliego 4 (P4, representa los pilares del tratamiento), Pliego 5 (P5, representa el techo, la rampa y las esculturas de ambos frontones), Pliego 6 (P6, representa la base de paso y la base del templo).

Matemáticas en la casa del Dios

El templo griego, ναός, era una estructura construida para albergar la imagen de culto, es decir, constituía la casa del dios, situada en la cella o naos que albergaba la estatua del dios.

A partir de este templo y analizando la maqueta expuesta anteriormente, nos podemos fijar en diversos aspectos matemáticos que surgen en el análisis de esta construcción y en otras similares a esta como es el propio Partenón ateniense.

- <u>Orientación del templo</u>

La mayoría de los templos griegos se encontraban orientados astronómicamente, de este-oeste con la entrada en el este (simbología con respecto al lugar por donde sale del sol), como es el caso del templo de Afaya en Egina. En contraposición a la orientación norte-sur de los templos romanos.

- <u>Simetrías, escalas y proporciones: la divina proporción y el número áureo</u>

Al pensar en Grecia, y en concreto en un templo griego, aparece en nuestra mente la colina de la Acrópolis coronada por el Partenón, también de estilo dórico y muy similar al de Egina. En ambos podemos observar su armonía constructiva y su monumentalidad belleza debida a la presencia de la divina proporción.

En la portada del templo podemos deslumbrarnos con los rectángulos áureos que la contienen y su espiral áurea, cual nautilus.

El número áureo, ϕ, un número con nombre propio que se le debe al afamado constructor griego Fidias, se hace presente entre plantas, animales y creaciones humanas. Se puede tratar desde la aritmética como número irracional, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$, como una proporción unido a su definición algebraica, que lo define como la partición de un segmento de longitud x en media y extrema razón: 1 x-1 x $\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$

El total es a la parte mayor como la parte mayor es a la parte menor, es decir, $x^2 - x - 1 = 0$.

En torno a la divina proporción podemos crear rectángulos áureos, simplemente haciendo que la proporción entre sus lados sea igual al número ϕ. Y por tanto analizar las diversas construcciones que surgen de la observación de la fachada del templo de Afaya o del Partenón: (1) Construcción de un rectángulo áureo a partir de un cuadrado, (2) construcción de rectángulos áureos semejantes a uno dado y (3) construcción de una espiral áurea.

A modo de ejemplo, proporciones que producen armonía y belleza en el templo de Afaya son: la altura de las columnas que duplica la medida del intercolumnio y triplica la del entablamiento, la anchura del templo triplica a la altura del estilóbato y puede dividirse en cinco partes iguales, dos corresponden a la perístasis y tres a la cella y por último la cella cuadruplica la anchura de las naves laterales. Además encontramos continuas simetrías o *analogías,* por ejemplo, el pliego 1 de la maqueta, donde podemos trazar un eje de simetría dejando tres columnas de la fachada a cada lado del mismo y dividir en dos partes totalmente idénticas el templo.

Todas estas mediciones se pueden realizar directamente sobre los pliegos de la maqueta o sobre las dimensiones reales del templo, aplicando una escala. En este caso, la escala aproximada apropiada sería: 1 cm de la maqueta equivaldría a 1,05 metros en la realidad.

- <u>Polígonos: longitudes y áreas</u>

En un templo griego observamos continuas longitudes que medir y polígonos que interpretar, analizando etimológicamente sus nombres. En la maqueta, con el Teorema de Pitágoras, podremos trabajar los siguientes ítems:

(1) Observar diferentes polígonos: rectángulos (planta, columnatas, interior: cella, pronaos y opistódomo), cuadrados (rampa), triángulos (techo y frontones), trapecios (solapas para pegar).

(2) Introducir la etimología de los nombres de los polígonos: **Polígono** deriva del término griego *polýgonos*, formado por *polý* 'muchos' y *gōnía* 'ángulo'. Y como aplicación, la clasificación de los polígonos según su número de lados.

Derivados de la lengua griega:

Matemáticas (del griego *mathe-matikós*, ‘estudioso’, derivado de *máthema*, conocimiento, a su vez derivado de *mantháno-*, «yo aprendo»), siendo Pitágoras el primero que empleó este término. **Geometría** (del griego *gê*, tierra y *métron*, medida). Etimológicamente significa ‘medida de la tierra’. El término latino es agrimensura, «medida de la tierra». **Simetría** (del griego *syn*, con y *métron*, medida). **Hipotenusa** (del griego, es el participio de *hypotéino-*, «tender por debajo», extender, estirar). ‘Lado opuesto al ángulo recto de un triángulo rectángulo’. **Tetraedro** (del griego tetra, abreviatura de *téttares*, cuatro y *hédra*, cara). ‘Poliedro de cuatro caras’. **Trapecio** (del griego *trapézion*, diminutivo de *trápeza*, mesa). ‘Cuadrilátero irregular con solo dos lados paralelos’. **Penta-** (del griego *pénte*, cinco). Aplicado a pentágono ‘polígono de cinco ángulos (lados)’. **Hexa-** (del griego *héx*, seis). Aplicado a hexágono ‘polígono de seis ángulos (lados)’ o al *hexaedro ‘poliedro de seis caras’. **Hepta-** (del griego *heptá*, siete). Aplicado al heptágono ‘polígono de siete ángulos (lados)’ o al heptaedro ‘poliedro de siete caras’. **Eneágono** (del griego *ennéa*, nueve y *gonía*, ángulo). ‘Polígono de nueve ángulos (lados)’. **Decágono** (del griego *déka*, diez y *gonía*, ángulo). ‘Polígono de diez ángulos (lados)’. ***Decaedro** (del griego *déka*, diez y *hédra*, cara, plano). ‘Poliedro de diez caras’. **Endecágono** (del griego *héndeka*, once y *gonía*, ángulo). ‘Polígono de once ángulos (lados)’. **Dodeca-** (del griego *dódeka*, prefijo que indica doce). Aplicado al dodecgono, ‘polígono de doce lados’ o al dodecaedro ‘poliedro de doce caras’. **Paralelogramo** (del griego pará, «junto a», *allélous*, «los unos a los otros» y *grammé-* , línea). ***Paralepípedo** (del griego *parà*, «junto a», *allélous*, «los unos a los otros» y *epípedon*, plano). **Diagonal** (del griego *diá*, «a través de», separación y *gonía*, ángulo). ‘Líneas que dividen los ángulos’.

Derivados de la lengua latina:

Ángulo (del latín *angŭlus*, ángulo, rincón). Aplicada a triángulo ‘polígono de tres ángulos (lados)’. **Equilátero** (del latín *aequalis*, igual y *latus*, lado). Aplicado al triángulo equilátero ‘triángulo con sus tres ángulos (lados) iguales’. **Cuadrado** (del latín *quadrum*, cuadrado, afín a *quattuor*, cuatro). Aplicado a cuadrilátero ‘polígono de cuatro ángulos (lados)’. **Rectángulo** (del latín *rectus*, recto y *angŭlus*, ángulo, rincón). **Vértice** (del latín *vertex*, «polo en torno al cual gira el cielo», cumbre; derivado de *vĕrtĕre*, girar, «dar vuelta», «hacer girar»).

(3) Unidades de medida y medidas:

Metro (del griego *métron*, medida). ‘Unidad de medida fundamental para la magnitud distancia o longitud’. **Perímetro** (del griego *perí*, alrededor y *métron*, medida). ‘Suma de los lados de un polígono’.

(4) Podemos calcular diversas longitudes y áreas en estos polígonos: longitud de los lados, de las diagonales, de la altura, perímetros… Con las medidas en los propios pliegos de la maqueta.

- <u>Sólidos: poliedros y cuerpos de revolución</u>

(1) Tipos de sólidos en tres dimensiones: **Poliedros y sólidos de revolución**

(2) Desarrollos planos: Ejemplos con la maqueta: Tejado: vemos un sólido formado por diversos triángulos; Columnas: generatriz (eje de revolución) que gira en un círculo para formar un cilindro; Templo: paralelepípedo en su conjunto.

(3) Cálculo de áreas y volúmenes: aplicando de nuevo el Teorema de Pitágoras. (Ejemplos: paralelepípedo que forma la propia estructura o los cilindros idealizados que son las columnas).

(4) Comprobación del Teorema de Euler sobre poliedros construidos en la maqueta.

- <u>Construcción de la casa áurea del Dios</u>

La construcción del templo utilizando la maqueta en un entorno matemático sería el objetivo material y final del proyecto, adquiriendo en el proceso las competencias y contenidos incluidos en esta parte de Geometría. Para ello, los alumnos estarán organizados en grupos interactivos-cooperativos de cinco alumnos. Para llevar a cabo la construcción, simplemente tendrán que seguir una serie de instrucciones sencillas asociadas a cada uno de los pliegos que la forman y ejecutar los pasos en orden correcto y adecuadamente. Para facilitar el trabajo, se proyectarán, indicando los materiales necesarios cómo cortar y doblar y el orden en el que trabajar.

- Trabajo de los alumnos: investigación y exposición

Finaliza la actividad con un trabajo de investigación por grupos. Cada grupo tendrá su tema elegido al azar. Acabada la investigación, se reflejarán en una exposición de entre 7 -10 minutos, en la que se podrán utilizar los materiales.

Metodología: [Admite diversas variantes]

Organización en torno a grupos interactivos-cooperativos formados por cinco alumnos. Desarrollo de contenidos en torno a la maqueta, considerada como elemento vehicular. Su construcción fue el objetivo final de cada agrupación, ya que la taberna de 3º ESO B + C expondría los templos construidos en la Jornada de los *VI Juegos Grecorromanos*.

- Materiales: Maqueta con sus correspondientes medidas; Ficha de refuerzo (resumen teórico y ejercicios 2D y 3D con soluciones); Roles en etiquetas: semanales (Ver Anexo 3); Fichas de autoevaluación y coevaluación: semanales. (Ver Anexo 2); Fichas de evaluación para el profesor: semanales (Ver Anexo 1)

- Sesiones: Inicio del tercer trimestre. El número total de sesiones dedicadas al desarrollo de esta actividad han sido veinte, añadiendo una sesión 0 para explicar el trabajo a realizar y la metodología y evaluación que se van a aplicar:

Marzo	Abril	Mayo
2 sesiones: 29 y 31	11 sesiones: 3, 4, 5, 7, 18, 19, 21, 24, 25, 26 y 28	7 sesiones: 2, 3, 5, 8, 9, 10 y 16 Además de la Jornada (día 4)

Teniendo en cuenta esta estructuración temporal, los contenidos se desarrollaron de la siguiente manera: **Sesión 0**: formación de grupos, explicación del trabajo y contextualización, **Sesión 1**: Descubrimiento del número áureo, ϕ, **Sesión 2**: Determinar proporciones y simetrías en los pliegos, **Sesión 3**: Descubrir el Teorema de Thales, **Sesiones 4 a 7:** Se descubren los polígonos, **Sesiones 8 a 12:** Se descubren los poliedros y los sólidos de revolución, **Sesiones 13 a 15:** Dedicadas a la construcción de la maqueta, **Sesiones 16 y 17**: Investigación, **Sesiones 18 y 19**: Exposiciones y debates y **Sesión 20**: Evaluación de la actividad y conclusiones.

Hemos obtenido tres productos finales en los cuales podemos basar nuestra evaluación, además del seguimiento diario: Construcción de la maqueta, trabajo de investigación, exposición y conclusiones y realización y corrección de la hoja de refuerzo.

CONCLUSIONES

El objetivo fundamental del trabajo se llevó a término con gran éxito: los alumnos se introdujeron en la Antigüedad Clásica a través de las Matemáticas y se concienciaron de la necesidad de conocer estas civilizaciones fundantes y sus enormes conquistas científicas en prácticamente todos los campos del saber, para entender el desarrollo y evolución de lo que ellos estudian hoy en día en el aula en la mayor parte de sus materias. Cada grupo erigió su templo, realizó las actividades propuestas en torno a él y la maqueta construida formó parte de la *taberna* de 3 ESO B + C en la jornada de celebración de los *VI Juegos Grecorromano*s.

Este tipo de actividades demuestran a las claras que las dicotomías epistemológicas tradicionales en los planes de estudio son poco operativas y que es una prioridad promover y difundir este tipo de espacios comunes en los que se observa que los clásicos tienen una aplicación y un alcance mucho mayor que el que tradicionalmente se les ha concedido en las disciplinas científicas y que, de forma complementaria, un enfoque historicista de nuestras materias se convierte en esencial para dotar de comprensión orgánica a nuestros contenidos más nucleares, además de que la aplicación e innovación didáctica, con la adición de estos elementos, resulta muy beneficiada.

REFERENCIAS BLIOGRÁFICAS:

- Libros de referencia:

BOYER, C. B., (1992): *Historia de la Matemática*. Alianza.

ELVIRA, M. A. (2013): *Manual de arte griego*. Sílex ediciones, Madrid.

CLAUDI, A. (2010): La secta de los números: el teorema de Pitágoras. El mundo es matemático.

CORBALÁN, F. (2010)*: La proporción áurea.* El mundo es matemático.

- Artículos de referencia:

FERNÁNDEZ, I. M. (2012), *El templo de Afaia en la isla de Egina*, Publicación digital de Historia y Ciencias Sociales, Revistas clasesdehistoria, nº 284.

PETRI, P. (), El templo de Afaia en la isla de Egina.

SERRANO, E. (2000), Etimología de algunos términos matemáticos. Revista Suma, nº 35

- Maqueta del Templo de Afaya, Gliptoteca de Munich, Alemania

APLICACIÓN EN EL AULA: CLASE DE 3º ESO B + C (8 ALUMNOS): EXPOSICIÓN FOTOGRÁFICA

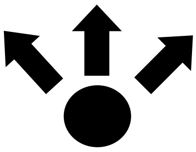
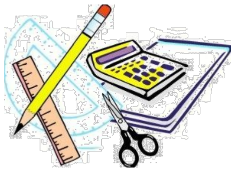
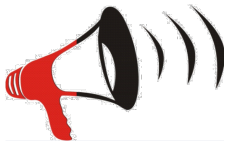
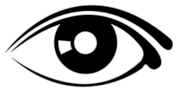






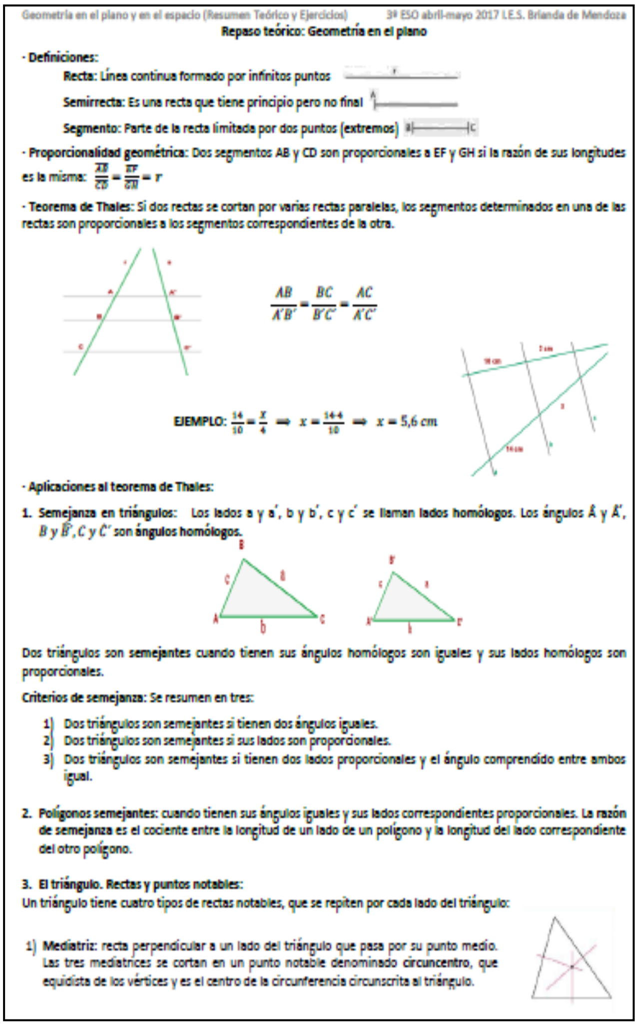

ANEXOS

Anexo 1: Roles


Coordinador (C) Encargado de material (E) Portavoz (P) Vigilante (V) Comodín (Co)

Anexo 2: Parte de la hoja de refuerzo [pequeña muestra, una parte teórica y una parte práctica]



Geometría en el plano y en el espacio (Resumen Teórico y Ejercicios) 3º ESO abril-mayo 2017 I.E.S. Brianda de Mendoza

Repaso teórico: Geometría en el plano

· **Definiciones:**

Recta: Línea continua formado por infinitos puntos

Semirrecta: Es una recta que tiene principio pero no final

Segmento: Parte de la recta limitada por dos puntos (extremos)

· **Proporcionalidad geométrica:** Dos segmentos AB y CD son proporcionales a EF y GH si la razón de sus longitudes es la misma: $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = r$

· **Teorema de Thales:** Si dos rectas se cortan por varias rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes de la otra.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

EJEMPLO: $\frac{14}{10} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = \frac{14 \cdot 4}{10} \Rightarrow x = 5{,}6\ cm$

· **Aplicaciones al teorema de Thales:**

1. **Semejanza en triángulos:** Los lados a y a', b y b', c y c' se llaman **lados homólogos**. Los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{A}'$, $\hat{B}$ y $\hat{B}'$, $\hat{C}$ y $\hat{C}'$ son **ángulos homólogos**.

Dos triángulos son **semejantes** cuando tienen sus ángulos homólogos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales.

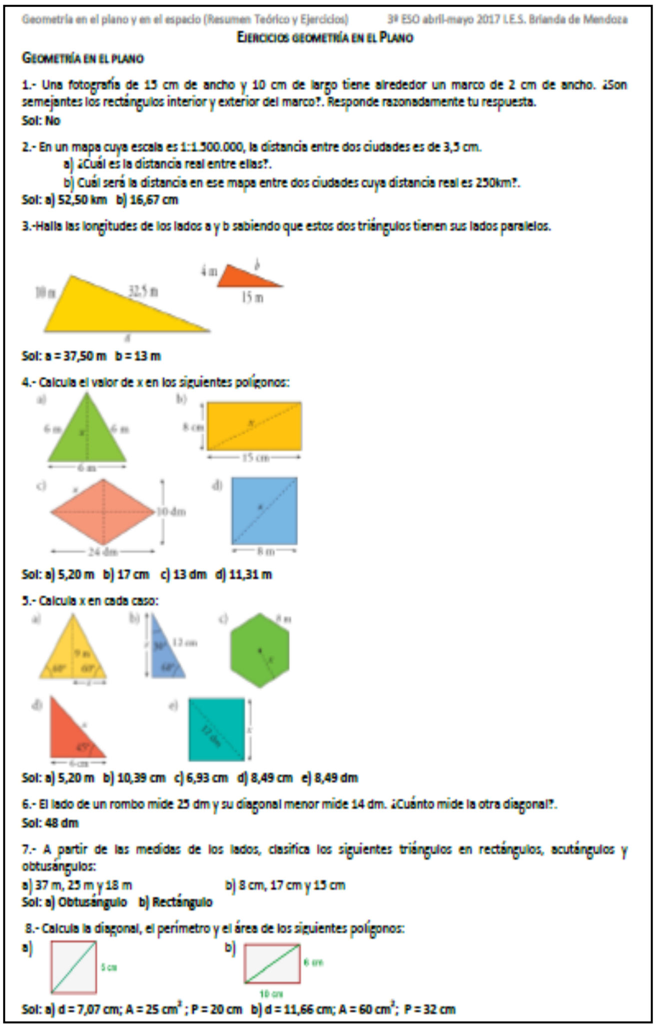
Criterios de semejanza: Se resumen en tres:

1) Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.
2) Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.
3) Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ambos igual.

2. **Polígonos semejantes:** cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados correspondientes proporcionales. La **razón de semejanza** es el cociente entre la longitud de un lado de un polígono y la longitud del lado correspondiente del otro polígono.

3. **El triángulo. Rectas y puntos notables:**
Un triángulo tiene cuatro tipos de rectas notables, que se repiten por cada lado del triángulo:

1) **Mediatriz:** recta perpendicular a un lado del triángulo que pasa por su punto medio. Las tres mediatrices se cortan en un punto notable denominado **circuncentro**, que equidista de los vértices y es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.



Geometría en el plano y en el espacio (Resumen Teórico y Ejercicios) 3º ESO abril-mayo 2017 I.E.S. Brianda de Mendoza

EJERCICIOS GEOMETRÍA EN EL PLANO

GEOMETRÍA EN EL PLANO

1.- Una fotografía de 15 cm de ancho y 10 cm de largo tiene alrededor un marco de 2 cm de ancho. ¿Son semejantes los rectángulos interior y exterior del marco?. Responde razonadamente tu respuesta.
Sol: No

2.- En un mapa cuya escala es 1:1.500.000, la distancia entre dos ciudades es de 3,5 cm.
a) ¿Cuál es la distancia real entre ellas?.
b) Cuál será la distancia en ese mapa entre dos ciudades cuya distancia real es 250km?.
Sol: a) 52,50 km b) 16,67 cm

3.-Halla las longitudes de los lados a y b sabiendo que estos dos triángulos tienen sus lados paralelos.

Sol: a = 37,50 m b = 13 m

4.- Calcula el valor de x en los siguientes polígonos:

Sol: a) 5,20 m b) 17 cm c) 13 dm d) 11,31 m

5.- Calcula x en cada caso:

Sol: a) 5,20 m b) 10,39 cm c) 6,93 cm d) 8,49 cm e) 8,49 dm

6.- El lado de un rombo mide 25 dm y su diagonal menor mide 14 dm. ¿Cuánto mide la otra diagonal?.
Sol: 48 dm

7.- A partir de las medidas de los lados, clasifica los siguientes triángulos en rectángulos, acutángulos y obtusángulos:
a) 37 m, 25 m y 18 m b) 8 cm, 17 cm y 15 cm
Sol: a) Obtusángulo b) Rectángulo

8.- Calcula la diagonal, el perímetro y el área de los siguientes polígonos:
a) 5 cm b) 6 cm, 10 cm
Sol: a) d = 7,07 cm; A = 25 cm²; P = 20 cm b) d = 11,66 cm; A = 60 cm²; P = 32 cm

Anexo 3: Encuesta valoración actividad

1. Objetivos del trabajo:
   a) Antes de empezar a trabajar, tengo claro cuál es el objetivo final de cada tarea

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

   b) Me siento parte del grupo y creo que trabajando en grupo se consiguen mejores resultados:

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

2. Relación con los compañeros del grupo:
   a) Me encargo de repartir de forma equilibrada el trabajo entre los miembros del grupo:

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

   b) Desarrollo mi trabajo a tiempo, para no interrumpir el de los demás miembros del grupo:

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

3. Responsabilidad y trabajo:
   a) Realizo lo mejor posible la parte del trabajo que se me ha asignado:

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

   b) Cuando no entiendo algún concepto, intento recopilar información (libro de texto, profesor, compañeros,…):

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

   c) He aprovechado de la mejor manera posible el tiempo disponible para realizar las tareas:

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

4. Comunicación y participación:
   a) Escucho con atención la opinión y las aportaciones de todos los miembros del grupo:

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

   b) Realizo aportaciones y doy mi opinión a los demás miembros del grupo:

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

5. Satisfacción:
   a) He realizado todo lo planificado, con una presentación adecuada:

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

   b) El resultado final satisface las expectativas iniciales:

   ☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

Sugerencias y observaciones para mejorar: Anexo 4: Hoja de evaluación (profesor)

		3 DE ABRIL			4 DE ABRIL			5 DE ABRIL			7 DE ABRIL			CONCLUSIÓN DE LA SEMANA		
		T. Thales			**Terminología polígonos**			**Perímetros y áreas (+ Ficha)**			**Perímetros y áreas (+ Ficha)**					
		TAREAS	TRAB CLASE	ACT/COMP	TAREAS	TRAB CLASE	ACT/COMP	TAREAS	TRAB CLASE	ACT/COMP	TAREAS	TRAB CLASE	ACT/COMP	CUAD	TRAB G	TRAB In
Grupo1	David B															
	Mónica T															
	Alejandro L															
	Sofía R															
	Paula Is															
		TAREAS	TRAB CLASE	ACT/COMP	TAREAS	TRAB CLASE	ACT/COMP	TAREAS	TRAB CLASE	ACT/COMP	TAREAS	TRAB CLASE	ACT/COMP	CUAD	TRAB G	TRAB In
Grupo2	Daniel R															
	Álvaro M															
	Denise B															
	Virginia E															
	Andrea M															

…

Anexo 5: Hoja evaluación (alumno)

Semana 2		3 de abril				4 de abril				5 de abril				7 de abril			
ACTIVIDAD		**T. Thales**				**Terminología polígonos**				**Perímetros y áreas (+ Ficha)**				**Perímetros y áreas (+ Ficha)**			
ASPECTOS EV		GRUPO	MATERIAL	ACTIVIDAD	AGENDA	GRUPO	MATERIAL	ACTIVIDAD	AGENDA	GRUPO	MATERIAL	ACTIVIDAD	AGENDA	GRUPO	MATERIAL	ACTIVIDAD	AGENDA
Grupo1	**Mónica T**																
	Alejandro L																
	Sofía R																
	David B																
	Paula Is																

Para hacer referencia al artículo:

Pérez, A.M. (2018). Matemáticas en los Juegos Grecorromanos: La casa áurea del Dios. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 184-196). Lugar: Universidad de León

IMPRESORA 3D COMO RECURSO PARA LAS MATEMÁTICAS

Máximo Gómez Flórez[a]

[a]Colegio Maestro Ávila

Nivel académico: ESO

Resumen

En esta comunicación analizamos la experiencia con alumnos de la asignatura de Conocimiento de las Matemáticas de 2º ESO en la que se utilizó la impresión 3D y el diseño 3D como recurso didáctico para estudiar, trabajar y comprender no sólo conceptos geométricos, sino también otros temas como la medida, errores, proporciones, números, estadística,…

Es una experiencia interdisciplinar con Tecnología, Física y Química, Plástica… que básicamente consiste en el estudio, diseño e impresión de objetos, ideados por los propios alumnos, que resuelvan algún problema real y/o que se puedan comercializar, por ejemplo: un silbato para educación física, llaveros personalizados, piezas para tecnología, carcasas para el móvil, reponer piezas de ajedrez…..

Palabras clave: *Metodología, Matemáticas, Secundaria, Bachillerato, recursos didácticos*

Desarrollo

Con la aparición de las nuevas tecnologías, la sociedad y nuestra forma de comunicarnos han cambiado. Internet, redes sociales, correo electrónico, whatsApp,... son un ejemplo muy claro de este cambio. Nuestros modelos de consumo, producción y/o diversión también están evolucionando. Son pocas las personas que no usen las nuevas tecnologías para comprar algún producto, para reservar las vacaciones, hacer una transferencia, tratar con la administración o simplemente ver un programa de TV o serie. Las tecnologías de la comunicación se han introducido en todos los niveles de la sociedad, incluida la educación. Basta con pensar en herramientas como moodle, geogebra, word, excel, powerpoint,… Nuestros alumnos utilizan de forma habitual alguna de estas tecnologías: whatsApp, youtube, instagran en su móvil o tablet, y son parte de su vida cotidiana. Si queremos que se interesen por las Matemáticas, la Tecnología, la Física y Química, el Inglés, etc., debemos enganchar con su realidad, con sus necesidades, utilizando su mismo lenguaje y, en la medida de lo posible, utilizando estas mismas herramientas.

Por tanto, debemos reflexionar sobre la forma en la que trasmitimos los conocimientos a nuestros alumnos. El método clásico: exposición de contenidos, ejercicios y evaluación es procedimiento muy cómodo para nosotros, pero no siempre consigue que nuestros alumnos desarrollen su creatividad, su imaginación, su reflexión,…, y generalmente son los alumnos más desfavorecidos los que primero se descuelgan en este tipo de metodologías. Básicamente le decimos al alumno como se deben hacer las cosas y él, simplemente, se las aprende y/o las reproduce sin pensar, sin relacionarlo con otros contenidos, sin interiorizarlo, no ve su utilidad práctica ni su importancia.

Desde hace años los profesores de Matemáticas añadimos a nuestras clases ejercicios y actividades que permitan hacer más atractiva la asignatura: juegos matemáticos, sudokus, gamificación, matemágia,… Sin duda, estos ejercicios hacen más agradable la asignatura, mejoran la comprensión y la inteligencia del alumno, pero, si somos sinceros, no son cambios reales y profundos en nuestra forma de impartir la asignatura. Debemos ser más ambiciosos y no quedarnos en la superficie. "Impresora 3D como recurso para las Matemáticas" NO es un ejemplo más en esta dirección, es una experiencia distinta realizada en un colegio inclusivo de la ciudad de Salamanca, que pretende que los alumnos hagan cosas útiles, que permitan desarrollar su creatividad y su imaginación. En ese proceso de búsqueda y creación van a necesitar, sin duda alguna, los conocimientos de Lengua, Plástica, Tecnología, Física y Química y sobre todo de Matemáticas. Quizás, la frase "Impresora 3D como recurso para **aprender** Matemáticas", refleje mejor esta experiencia educativa que llevamos a cabo en el colegio Maestro Ávila en la asignatura de Conocimiento de las Matemáticas de 2º ESO del curso 2017-18. Todavía recuerdo la frustración y el bajón de moral del primer día de clase de ese curso: alumnos con dificultades, "tripitidores", Sindrome de Down, de etnia gitana, en exclusión social, extranjeros,…. ¿Cómo voy a conseguir que esto funcione, cómo voy a hacer para que aprendan Matemáticas? Es imposible sin volverme loco y estar todo el día dando voces y estresado. Es verdad que contaba con algunos ases en la manga, vocación, mucha experiencia y una profesora de apoyo. Recordé las palabras: "*¡profe!, por qué tengo que estudiar Matemáticas si no las entiendo y no me gustan. Es como si a alguien que no le gusta el arroz le dicen que tiene que comerlo para que le guste*". Esta fue la reflexión de un alumno cuando yo le trataba de hacerle comprender que la asignatura de Conocimiento de Matemáticas estaba diseñada para que los alumnos que tenían dificultades con las Matemáticas mejoraran. Comprendí entonces que tenía que hacer algo distinto si quería resultados distintos, y entonces se me ocurrió lo siguiente, en lugar de pedirles que comieran arroz, por qué no intentar hacer una paella, una chanfaina o un arroz a la zamorana, y…, pensándolo mejor, por qué quedarse sólo con el arroz y no usar lentejas, garbanzos, patatas,… que hagan un masterchef.

Y así en la segunda evaluación dejé la tiza y el borrador y les propuse la siguiente actividad:

Tenéis un ordenador, una conexión a Internet, una impresora 3D y un trimestre para construir uno o varios objetos que resuelvan algún problema real o/y que se pueda comercializar, por ejemplo: un silbato para el profesor de Educación Física, reponer las piezas de los tableros de ajedrez de 2º ESO, un llavero o un colgante para el día de los enamorados. Al principio podéis organizaros en grupos de 2 o 3 personas pero al final cada uno tiene que explicarme y desarrollar su propia solución para poder aprobar la asignatura.

Y los alumnos me preguntaban: ¡AH! y… ¿podemos hacer una carcasa para el móvil?,... ¿una pulsera?,...¿un gormity?,…¿Homer Simpson?,...¿un miniyó? Yo les contesté: eso no resuelve ningún problema, pero si, después de pagar los gastos de material, lo vendéis a un precio justo, entonces, sí podéis construirlo.

La segunda evaluación fue muy distinta, algunos alumnos siguieron sin trabajar, pero la mayoría se implicó en su proyecto, y frases como: *¡profe!,¿como puedo hacerlo el doble de grande,¡AH! esto es Pitágoras, por qué sale este resultado, qué significa sistema de coordenadas, ….* Y ellos mismos iban respondiendo*: así,… tienes que pinchar aquí,… así es más rápido,... utiliza la escala y los giros,… qué chulo,…* , y lo que en la primera evaluación fue una tortura se convirtió en una de mis clases más atractivas y gratificantes. No sólo trabajaron y aprendieron Matemáticas, también Inglés, Tecnología, Plástica, Física, Iniciativa Emprendedora…., y, lo más importante, su actitud en la asignatura e interés para aprender cambio 180º.

Referencias bibliográficas:

Pablo B. (2017). Modelado e impresión en 3D en la enseñanza de las Matemáticas: un estudio exploratorio. *ReiDoCrea, Vol 6, 16-28.*

Oliver K, Elizabeth S. (2013). Illustrating Mathematics using 3D Printers. *ArXiv.org.*

Ismael O, Henar A, Gregorio B, Vojislaj P. (2017). Experiencia de montaje y operación de una impresora 3D en el aula. *Modelling in Science Education and Learning*, *Vol. 10(2), 107-116.*

Para hacer referencia al artículo:

Gómez, M. J.Mª. (2018). Impresora 3D como recurso para las Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”. (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 197-199). Lugar: Universidad de León

LAS MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE ALICIA

Mª José Calles Riesco[a]

[a]IES María de Molina (Zamora)

Resumen

En general, mucha gente entiende que las Matemáticas es un concepto limitado, como si fuera un conjunto de simples operaciones y que los profesores de Matemáticas existimos para complicar la vida a nuestros alumnos con estas operaciones.
Las Matemáticas que aparecen reflejas en el libro de Alicia en el País de las Maravillas, es un mundo aparentemente alejado de la realidad, dejado al azar y lleno de absurdos e inconsistentes formas matemáticas.
A inicios de la década de 1865 varios matemáticos propusieron nuevas leyes algebraicas, hasta ese momento los números negativos e imaginarios se mantenían como un problema que muchos matemáticos ignoraban.
Las Matemáticas de Alicia en el País de las Maravillas, tienen unas Matemáticas sin sentido, sin estructura y muy distintas a las nuestras. Hay problemas numéricos, espaciales y de movimiento o crecimiento.
Alicia en el País de las Maravillas no es un libro de paradojas lógicas para que lo descifren los matemáticos, solo es un cuento para niños. Un torrente de imaginación sin coherencia lógica y por supuesto un reto para los matemáticos.
Todo el ingenio de Carroll lo centra en el mundo de los sueños en donde todo es posible, surrealista, en el que se confunden la realidad y la fantasía.
Este es un cuento lleno de juegos de palabras y adivinanzas que se pueden llevar al aula para que los alumnos disfruten de la creatividad con la se relata el cuento.
Para el desarrollo de este trabajo los alumnos tienen que leer el libro de Alicia en el País de las Maravillas.

.

Palabras clave: Creatividad; imaginación; juegos.

DESARROLLO:

1. PERSONAJES PRINCIPALES

Tenemos:

- Un conejo obsesionado con el paso del tiempo.
- Un sombrerero obsesionado con las paradojas.
- Un grifo místico que revela que todo es ilusión.
- Una oruga azul sentada de forma filosófica encima de un hongo alucinatorio.
- Una tortuga falsa que en otro tiempo fue una tortuga de verdad.
- Un gato que se hace invisible y que no puede decir adonde ir pero si como llegar.
- Unos monarcas que están continuamente ordenando al verdugo que corte cabezas.

2. LA MERIENDA LOCA.

- Si en un pozo de agua se puede sacar agua, ¿por qué en un pozo de melaza no se puede sacar melaza?

- Su reloj que no funciona marca los días pero no las horas. Alicia piensa que es mejor un reloj parado, ya que marca correcta la hora dos veces al día, que el que va 1 minuto retrasado.
- La liebre de marzo plantea un acertijo: ¿Cuántas tartas me puedo comer con la barriga vacía? Alicia contesto que todas las que quisiera, a lo que la liebre contesta que ¡NO, SOLO UNA! Porque cuando me vaya a comer la segunda ya no tendré la barriga vacía.
- - Querida ¿no querrás un poco más de té?- la insto la Liebre de Marzo
  - Si todavía no he tomado nada-exclamó Alicia en tono ofendido - No puedo tomar más.
  - Querrás decir que no puedes tomar "menos"- le corrigió el sombrerero - Es difícil tomar menos que nada…, ¡pero es tan fácil tomar más!
- - Entonces debes decir lo que piensas- siguió la Liebre de Marzo.
  - Ya lo hago- se apresuró a responder Alicia –o, al menos, al menos pienso lo que digo….Viene a ser lo mismo.
  - ¿Lo mismo? ¡De ninguna manera- dijo el sombrerero - ¡En tal caso sería lo mismo decir "veo lo que como" que "como lo que veo".

3. EL GATO CHESHIRE

- Cuando el verdugo real recibe la orden de decapitar al gato, al ver que el animal tiene su cuerpo invisible salvo la cabeza, alega que no puede cumplir su trabajo ya que "es tan imposible cortar su cabeza sin cuerpo como decapitar un cuerpo sin cabeza"

4. LA FALSA TORTUGA

- La falsa tortuga le cuenta a Alicia que su primer día de clases estudiaba 10 horas, el segundo 9 y así sucesivamente, a lo que ella responde que el undécimo día sería de fiesta ya que diez horas menos diez días equivale a cero, y Alicia quiere saber qué es lo pasa después del cero, pregunta que la Falsa Tortuga esquiva cambiando de tema radicalmente.

5. LA REINA ROJA

- *-En mi país - dijo Alicia que todavía jadeaba un poco al hablar - cuando se corre durante algún tiempo en una determinada dirección, se suele llegar a alguna parte.*

  -Tu país debe de ser algo lento - comentó la Reina -. Aquí tienes que correr a toda velocidad para poder permanecer en el mismo lugar y, si quieres desplazarte a otro..., ¡entonces debes correr el doble de deprisa!

6. LA OBSESIVA IDEA DE CARROLL POR EL NÚMERO 42.

Si hay un colectivo que ha elevado el número 42 a la categoría de número de culto, ese es el de los programadores. 42 es 101010 en binario y el carácter número 42 en ASCII es el asterisco, que se considera un comodín.

Existe un concepto hipotético de medio de transporte llamado tren gravitacional. En esencia, es un tren que atraviesa un planeta de un extremo a otro pasando por su núcleo. La duración del viaje depende de la densidad y la gravedad del planeta en cuestión. En el caso de la Tierra, los cálculos indican que ese viaje se haría en 42 minutos.

Alicia en el País de las Maravillas tiene 42 ilustraciones.
Y en la escena de la Corte, el rey lee la regla 42.

Cuando Alicia cae en hoyo del conejo, realiza una serie de cálculos en voz alta, que implican la base numérica 42.

En **La caza de la serpiente**, que comenzó a escribir a los 42 años, en el prefacio menciona otra regla 42.

Y cuando el panadero pierde su equipaje, son 42 cajas.

En el poema **Fantasmagoria** habla de cazar a un hombre de 42 años.

7. JUEGOS Y PROBLEMAS

Wasit a cat I saw?

Uno de los problemas más conocidos. Cuando Alicia vio por primera vez al gato Cheshire (que desaparecía en el aire dejando tan solo su sonrisa), quería saber qué animal era. Le realizó la pregunta escribiéndola: "¿Era un gato lo que vi?" (Wasit a cat I saw?). En el País de las Maravillas podían leerse las palabras en cualquier dirección: de abajo arriba, de derecha a izquierda… ¿De cuántas formas se puede leer la pregunta? ¡Te reto a averiguarlo!

El concepto del límite

También en el capítulo 2 se pude ver otra referencia matemática, el concepto del límite.
Cuando Alicia empieza a encoger cada vez más y más, teme desaparecer como una vela. Eso es imposible. Podemos acercarnos a 0 dividiendo una cantidad, pero nunca llegaremos a esa cifra por muchas veces que la dividamos (o encojamos como lo hacía Alicia).

- 1/1=1
- ½= 0.5
- ¼= 0.25
- 1/1000= 0.001
- 1/10000000000=0.0000000001

Y así sucesivamente, sin llegar jamás a 0, pero sí cada vez más próximos.

Cálculos extraños

En el capítulo 2, Alicia dice:

Veamos, cuatro por cinco son doce, cuatro por seis son trece y cuatro por siete… ¡Ay, Dios mío! ¡Así no llegaré nunca a veinte!

Enseguida vemos que no tiene sentido (¿4x5=12…?). No lo tiene si aplicamos el sistema decimal, pero estas multiplicaciones están realizadas en base 18 (4x5=12) y base 21 (4x6=13). Seguiría con 4x7=14 (base 24). Por eso piensa Alicia que nunca llegará a 20.

Paradoja del tiempo

Si a una persona le dieran un reloj parado y otro que se atrasa un minuto al día, ¿CUÁL ELIGIRIAS?
- PARADO: marca bien dos horas al día.
- ESTROPEADO: necesitaría esperar 12 horas =720 minutos para marcar bien un momento.

Consejos de la oruga

"La paloma afirma que las niñas pequeñas son un cierto tipo de serpientes, ya que las dos comen huevo".

CAMBIO DE VARIABLE
$x^4 + 5x^2 + 6 = 0$
hacemos un cambio de variable
$y = x^2$
$y^2 + 5y + 6 = 0$

Alicia toma como iguales las ocasiones

"digo lo que pienso y pienso lo que digo, a lo que responde el Sombrerero, eso sería lo mismo que decir, veo cuanto como y como lo que veo".

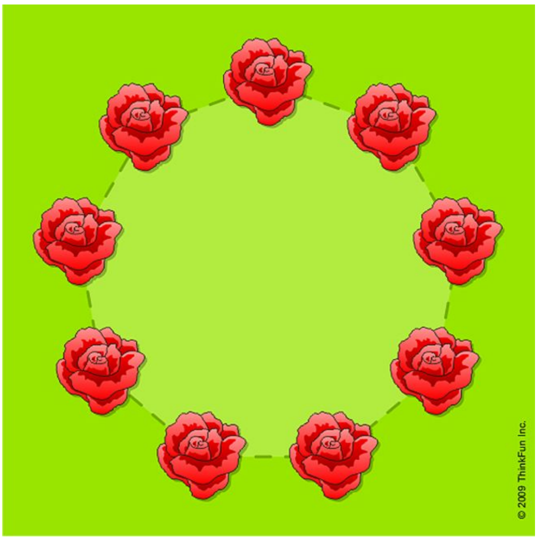
ES UNA FUNCIÓN INVERSA
$y = 2 . x$
$x = 2 . y$
$x /2 = y$
$y^{-1}= x/2$

En tu jardín, hay nueve rosas plantadas en un círculo perfecto. Pero ya te cansaste de ver lo mismo todo el tiempo. Tienes tres opciones para cambiarlas, pero cada una tiene sus reglas:

1. *Planta las 9 rosas de manera que crees* **8 filas con 3 rosas** *en cada fila.*

2. *Planta las 9 rosas de manera que crees* **9 filas con 3 rosas** *en cada fila.*

3. *Planta las 9 rosas de manera que crees* **10 filas con 3 rosas** *en cada fila.*



Las frases del sombrerero

Detrás de esa aparente locura, se encontraba alguien extremadamente sabio, dispuesto a compartir su sabiduría con todos aquellos que se sentaran con él a su eterna fiesta del té de “no-cumpleaños”.

De entre las frases de *Alicia en el País de las Maravillas*, las frases del Sombrerero Loco resultan ser las más significativas. Las reflexiones que esconden detrás ponen de relieve la necesidad de conectar con uno mismo, sin vivir pendiente del qué dirán. Por el contrario, el Sombrerero Loco defiende que sólo siguiendo lo que nos dicte nuestro corazón, nuestra “muchosidad” y nuestra esencia, podremos liberarnos y llegar a sentir la magia. Una magia a la que suplicamos que surta efecto cuando necesitamos salir de un apuro, pero en la que perdemos la fe demasiado a menudo, de igual modo que hacemos con la locura…

Y por último, para terminar con esta historia, se pide a los alumnos que interpreten las frases más famosas del sombrerero

1. **Si la locura es felicidad, ¡me declaro loco!**

2. **¿Sabes cuál es el problema de este mundo? Todos quieren una solución mágica a los problemas, pero todos rehúsan creer en la magia.**

3. **No estoy loco, sólo que mi realidad es diferente a la tuya.**

4. **A veces, para siempre es sólo un segundo.**

5. **Nunca pierdas tu muchosidad.**

6. **Alicia: Esto es imposible. Sombrerero loco: Sólo si tú crees que lo es.**

7. **Si conocieras el tiempo tan bien como yo, no hablarías de perderlo.**

8. **En un mundo de locos, tener sentido no tiene sentido.**

9. **Alicia: Pero un sueño no es la realidad. Sombrerero: Y, ¿quién te dice cuál es cuál?**

Mi idea es que los alumnos puedan disfrutar, participar, crear y sobre todo disfrutar de una historia en clase de Matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alicia en el País de las Maravillas de Lewis Carroll. Editorial Alianza.
- www.gaussianos.com/alicia-y-el-pais-de-las-matematicas-una-maravillosa-relacion/
- www.elespectador.com/noticias/actualidad/lewis-carroll-el-pais-de-matematicas-articulo-601460
- mundomorando.com/2012/02/23/las-contribuciones-matematicas-y-logicas-de-lewis-carroll
- algarabia.com/a-curiosidades/alicia-y-las-matematicas
- www.sinewton.org/numeros/numeros/34/Articulo05.pdf
- www.contralinea.com.mx/archivo-revista/2013/06/02/lewis-carroll-el-matematico-de-la-literatura
- www.investigacionyciencia.es/revistas/investigacion-y-ciencia/en-busca-del-planeta-x-669/el-legado-matemtico-de-lewis-carroll-14084
- www.thecult.es/tercera-cultura/lewis-carroll-un-matematico-en-el-pais-de-las-maravillas.html
- www.revistadelibros.com/articulo_imprimible.php?art=4561&t=artículos
- www.agenciasinc.es/Reportajes/Lewis-Carroll-en-el-pais-de-las-matematicas
- www.inglesporinternet.com/7-frases-alicia-pais-las-maravillas
- https://www.bbc.com/mundo/noticias-37451402
- http://www.epsilones.com/material/baul/016-lewis-carroll.pdf. “Matemáticas en el País de las Maravillas” de José María Sánchez Delgado.

Para hacer referencia al artículo:

Calles, Mª J. (2018). Las Matemáticas a través de Alicia. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”. (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 200-205). Lugar: Universidad de León

UNA EXPERIENCIA DIVULGATIVA BASADA EN LA TEORÍA DE GRAFOS

Elisa Frutos Bernal[a], María Teresa González Astudillo[b],

Ángel Martín del Rey[c], María Teresa Santos Martín[d]

[a]IES Leonardo Da Vinci (Salamanca), [b]Departamento de Didáctica de las Matemáticas y Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca, [c] Instituto de Física Fundamental y Matemáticas, Universidad de Salamanca, [d] Departamento de Estadística, Instituto de Física Fundamental y Matemáticas, Universidad de Salamanca

Resumen

La Teoría de Grafos es una de las ramas de las Matemáticas más adecuadas para ser utilizada en el ámbito de la divulgación científica dirigida a estudiantes de cualquier nivel educativo (desde la Educación Primaria hasta los estudios universitarios). El objetivo de este trabajo es realizar una descripción y análisis crítico de un proyecto divulgativo basado en la Teoría de Grafos y cuya actividad principal es la exposición "Undergraph" diseñada por los autores y que fue mostrada al público durante la Primavera Científica de 2018 en la Universidad de Salamanca.

Palabras clave: *Teoría de grafos*, *divulgación matemática*, *Educación Primaria y Secundaria*.

INTRODUCCIÓN

Podemos afirmar que la Teoría de Grafos nace en 1736 cuando Leonhard Euler resuelve el problema de los puentes de Königsberg, cuyo enunciado es el siguiente "*El río Pregel divide la ciudad de Königsberg en cuatro zonas distintas unidas entre sí mediante siete puentes. ¿Es posible encontrar un camino que recorra los siete puentes de manera que pase una única vez por cada uno de ellos y se regrese al punto de inicio?*" (Euler, 1736). Euler probó que no existía tal recorrido y su demostración se basó en la interpretación abstracta del mapa como una serie de puntos o nodos (cada uno de los cuales representaba una de las cuatro regiones en que quedaba dividida Königsberg) y de aristas que los unían (que representaban los 7 puentes entre ellas). Esta idealización de la situación dio lugar al concepto matemático de *grafo* (conjunto de puntos, nodos o vértices y de aristas que unen algunos de ellos). Posteriormente este concepto fue formalizado de manera algebraica y toda una teoría matemática se desarrolló en torno a él.

La Teoría de Grafos posee varias características que la hacen única:

(1) Por una parte se trata de una teoría de gran profundidad matemática y múltiples implicaciones en otras disciplinas de naturaleza, no sólo eminentemente teórica como la Geometría Algebraica, sino también "lúdica" como las recreaciones matemáticas (Wate-Mizuno, 2014).

(2) Los principales conceptos y los resultados más importantes son fáciles de comprender por los no especialistas. Es más, dado que se pueden visualizar gráficamente de manera sencilla, el público potencial que puede seguir esta teoría es muy amplio, no circunscribiéndose únicamente al ámbito universitario (Pepper, 2007).

(3) El espectro de aplicación de esta teoría es enorme: la Física, la Química, las Ciencias de la Computación, la Biología, etc. Además, a partir de ella se han construido nuevas e interesantes disciplinas científicas como el Análisis de Redes Complejas, tan de moda en la actualidad por su utilidad en el entendimiento de infinidad de situaciones y fenómenos sociales.

Estos aspectos hacen de ella un candidato ideal para erigirse en una disciplina sobre la que pivote una estrategia completa de divulgación y enseñanza de las Matemáticas en los diferentes niveles educativos (Grima, 2018).

Este trabajo se centra en el aspecto divulgativo de la misma. Así se propone, se describe y se analiza un proyecto divulgativo basado en la Teoría de Grafos, que se ha puesto en marcha en Salamanca durante la primavera de 2018 y cuyo público principal han sido los estudiantes de Educación Secundaria.
A continuación, se describe de manera detallada el proyecto divulgativo llevado a cabo, el análisis del mismo y las propuestas de mejora, por último, se muestran las conclusiones.

DESCRIPCIÓN DEL PROYECTO DIVULGATIVO

El proyecto divulgativo entre los estudiantes de Enseñanza Secundaria y cuyo hilo conductor ha sido la Teoría de Grafos se ha articulado en torno a cuatro actuaciones: la exposición “Undergraph”, un *escape room* en realidad virtual, una guía didáctica y un ciclo de conferencias. A continuación, detallaremos de manera individual cada una de estas actividades.

Exposición “Undergraph”

La exposición “Undergraph” tiene como objetivo mostrar, de manera divulgativa, los principales conceptos, resultados y aplicaciones de la Teoría de Grafos y el Análisis de Redes Complejas. Se desarrolló en el Edificio Trilingüe de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Salamanca entre el 3 de mayo y el 27 de julio de 2018.
En el desarrollo de la misma han participado miembros de los departamentos de Didáctica de las Matemáticas y Didáctica de las Ciencias Experimentales, Estadística, Matemática Aplicada y Matemáticas, y del grupo de investigación BISITE. Ha sido coordinada y producida por la Unidad de Cultura Científica de la Universidad de Salamanca y por el Vicerrectorado de Investigación y Transferencia, y, además, ha contado con la colaboración de la Facultad de Ciencias y del Instituto de Física Fundamental y Matemáticas. El diseño de los paneles ha corrido a cargo de David Escanilla y su equipo.
La exposición consta de 3 paneles iniciales dedicados a los créditos de la exposición y 17 paneles explicativos que se dividen en cuatro secciones ordenadas por orden de visita: “Conceptos, Historia y Ejemplos”, “Grafos, Redes y Sociedad”, “Redes de Ámbito Biosanitario” y “Redes, Ciencia y Tecnología”.

Conceptos, Historia y Ejemplos:

Este primer bloque, que es el primero que se visita, está formado por seis paneles:

Panel 1: “Teoría de Grafos”. En él se define de manera geométrica el concepto de grafo con sus elementos: nodos y aristas. Se distinguen los grafos dirigidos de los no dirigidos, mostrando la noción de grado en el primer caso y de grado de entrada y de salida en el segundo.

Panel 2: “Los mapas del metro”. En este panel se ilustra el concepto de grafo, utilizando el ejemplo paradigmático de los planos de metro.

Panel 3: “Los 7 puentes de Königsberg”. En él se muestra el considerado como punto de inicio de la Teoría de Grafos: el problema de los puentes de Königsberg.

Panel 4: “El problema de los 4 colores”. Se introduce otro de los problemas clásicos de la Teoría de Grafos “¿Cuál es el número mínimo de colores necesario para colorear un mapa sin que regiones adyacentes tengan el mismo?”

Panel 5: “Caminos de Hamilton”. Se introducen las nociones de camino y circuito hamiltonianos, ilustrándolas con el problema del recorrido mágico del caballo y el concepto de cuadrado mágico.

Panel 6: "Problema del laberinto". Se introducen la noción de camino euleriano y se ilustra con el algoritmo de Tarry para salir de un laberinto.

Como se puede comprobar, en este bloque se pretende familiarizar al alumno con los conceptos básicos de la Teoría de Grafos, ilustrándolos con aplicaciones a problemas que pueden resultar, a nuestro juicio, atractivos. Ahora bien, también se tiene como objetivo mostrar al alumno algunos rudimentos de la modelización matemática a través de la interpretación en términos de la Teoría de Grafos de las situaciones planteadas en los problemas.

Grafos, Redes y Sociedad:

Este segundo bloque consta de cuatro paneles y su objetivo es centrar la atención de manera sumamente divulgativa en los fundamentos del Análisis de Redes Complejas y algunas de sus aplicaciones más importantes:

Panel 7: "Redes complejas de mundo pequeño". En este panel se esboza el concepto de red compleja y se muestra uno de sus principales tipos: las redes de mundo pequeño, que es ilustrado con el principio de los cuatro grados de libertad.

Panel 8: "Redes complejas de escala libre". Se introduce el otro gran tipo de redes complejas: las redes de escala libre y el enlazamiento preferencial. Además, se muestran aplicaciones de las mismas en la vida real.

Panel 9: "Análisis de redes complejas". Se describe la utilidad del análisis de redes complejas y se muestran las principales métricas o medidas de centralidad utilizadas para determinar la "importancia" de los nodos dentro de una red: grado, centralidad de intermediación, centralidad de lejanía, coeficiente de agrupamiento y centralidad de vector propio.

Panel 10: "Aplicaciones del Análisis de Redes Complejas". Se muestra una aplicación del uso de las anteriores medidas de centralidad en el estudio de redes terroristas, en concreto en la correspondiente a los autores materiales de los atentados del 11 de septiembre en Estados Unidos.

El objetivo de este segundo bloque es ilustrar el concepto matemático de grafo (o red) con una de sus principales aplicaciones: el análisis de la importancia estructural y de las formas de relacionarse que tienen los nodos. En estos paneles las referencias matemáticas son mínimas, predominando la descripción clara y sencilla de los conceptos. Además, el papel que juegan las aplicaciones en la vida real es muy importante, ya que permite poner en contexto y entender muchísimo mejor las diferentes nociones de medidas de centralidad.

Redes de Ámbito Biosanitario:

Este tercer bloque está formado por únicamente dos paneles:

Panel 11: "Química de Cayley". En este panel se muestra una de las aplicaciones más sencillas al ámbito de la Química, como es el uso de los grafos para enumerar las distintas configuraciones de una fórmula química.

Panel 12: "Secuenciación de ADN". Se muestra el uso de las nociones de caminos hamiltonianos y eulerianos en el proceso de la secuenciación del ADN.

A pesar de ser un bloque con un número mínimo de paneles, su importancia es bastante grande ya que permite poner en relación la Teoría de Grafos con otras cuestiones que los estudiantes pueden haber visto en otras asignaturas.

Redes, Ciencia y Tecnología:

El último bloque de la exposición está formado por cinco paneles:

Panel 13: "Leyes de Kirchhoff". En este panel se muestra cómo Kirchhoff utilizó la Teoría de Grafos para calcular el voltaje y la corriente de los circuitos eléctricos, siendo ésta la primera aplicación propiamente dicha de los grafos en la Ingeniería.

Panel 14: "Análisis de redes eléctricas". Se describe de manera bastante divulgativa la importancia que tienen los grafos en el análisis de las vulnerabilidades que se pueden presentar en las redes eléctricas.

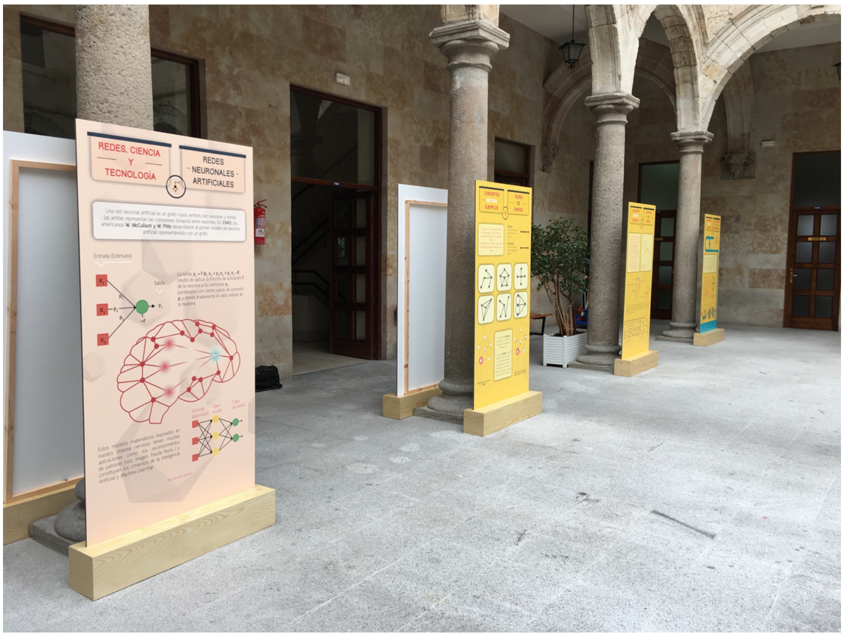
Panel 15: "Algoritmo de Dijkstra". Se explica de manera clara y sencilla los fundamentos del algoritmo de Dijkstra, introduciendo la noción de planificación de trayectorias y de grafo de visibilidad.

Panel 16: "Máquina de Turing". En este panel se describen los fundamentos de la máquina de Turing y se utiliza la Teoría de Grafos para representar la dinámica de la misma.

Panel 17: "Redes neuronales artificiales". Finalmente, el último panel de la exposición se dedica a la introducción de la noción de red neuronal artificial y a su interpretación en términos de grafos.

Tal como se indica en el nombre de este último bloque, el mismo está dedicado a mostrar algunas de las aplicaciones más interesantes de la Teoría de Grafos en el ámbito de la ciencia y la tecnología. Se ha realizado de manera muy divulgativa debido a la limitación del espacio y a la profundidad matemática de alguno de los contenidos.

Figura 4. Paneles mostrados en la exposición



Escape room en realidad virtual

Los visitantes de la exposición pueden interactuar y aplicar algunos de los conceptos mostrados en la misma a través de un juego de *escape room* en realidad virtual. Se trata de un juego individual, en el que el jugador debe salir de un laberinto e ir resolviendo acertijos matemáticos (relacionados con lo visto en la exposición) por el camino.

Guía didáctica

Aunque la Teoría de Grafos nació como una parte de las Matemáticas bastante abstracta y elaborada, actualmente se aplica en muchos campos muy cercanos a casi toda la población; de ahí la idea de diseñar tareas y que pudieran realizarse en las aulas de Matemáticas de Primaria y Secundaria.

En la guía sólo se muestran algunos de los aspectos de los grafos y algunos contenidos matemáticos, pero se puede comprobar cómo una rama de las Matemáticas, aparentemente muy abstracta, se puede hacer accesible a los alumnos. No sólo eso. Se relaciona la Matemática con aspectos cotidianos que son muy llamativos para los alumnos. Las redes sociales, los planos del metro, organizar un viaje, la computación, la robótica, los circuitos eléctricos, colorear un mapa, algunos juegos, la relación de amigos de Facebook, etc. son claros ejemplos que están incluidos en las diferentes tareas propuestas.

Están pensadas para despertar la curiosidad de los estudiantes, que estén motivados, que hagan Matemáticas, que justifiquen, razonen y se comuniquen utilizando el lenguaje matemático.

Los problemas o situaciones propuestas que parten de situaciones más o menos cotidianas se pueden transformar en problemas matemáticos abstractos para lo que, increíblemente, sólo se necesitan puntos y segmentos que conectan dichos puntos.

Se ha tratado de modelizar mediante los grafos diferentes tipos de situaciones, lo que ha permitido ir introduciendo los diferentes conceptos relativos a los grafos, sus tipos, sus propiedades, sus usos, los términos usados, todo de una forma muy accesible. Todo ello ligado a contextos muy cercanos a los alumnos para poder darles significado y que vean unas Matemáticas cercanas a ellos, a sus intereses, a las cosas que suelen hacer fuera del aula. Las tareas se plantean de forma guiada, así que no se necesitarán muchos conocimientos para poder avanzar en los contenidos y serán muy accesibles para los niños. Y aunque los contenidos parezcan muy elaborados se han tratado de desmenuzar para que no resulten difíciles. Es importante señalar que las actividades están graduadas en orden de dificultad y existen actividades tanto para alumnos de Primaria como de Enseñanza Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Además, todo esto se ha hecho teniendo presente el currículo de Matemáticas de forma integradora, de tal manera que en una misma tarea se estén manejando conceptos de diferentes ramas de la Matemática para que los alumnos realicen conexiones entre ellos y de esta manera puedan alcanzar una mejor compresión.

Evidentemente sólo se han tratado algunos contenidos de Matemáticas y algunos aspectos relativos a los grafos. Una vez hecho esto, los estudiantes podrán abordar otros muchos contenidos y situaciones. Además, se relacionan las Matemáticas con otras áreas del conocimiento como son la Física, la Química, la Biología o la Tecnología.

La guía se ha organizado en catorce bloques entre los que se han distribuido las actividades. Más o menos cuatro o cinco actividades por bloque. Las temáticas de cada bloque son muy dispersas y abarcan los temas siguientes: ¿Y esto son Matemáticas?, un ejemplo ilustrativo: los mapas del metro, los puentes de Königsberg, una cuestión de electricidad, el problema de los cuatro colores, los grafos en la química, el juego de Hamilton y el recorrido mágico del caballo, cómo salir de un laberinto, la máquina de Turing, redes neuronales artificiales, cifrando mensajes, el ADN, grafo de visibilidad y planificación de trayectorias o la aplicación de los grafos a la teoría de juegos.

Ciclo de conferencias

En paralelo con la exposición, se ha diseñado un ciclo de cuatro conferencias divulgativas sobre diferentes aspectos de la Teoría de Grafos y redes. Así, las conferencias planteadas son las siguientes:

- David Ríos Insua (ICMAT-CSIC) cuyo tema es el uso de la teoría de grafos en el análisis de ciber-riesgos.

- Clara Grima Ruíz (Universidad de Sevilla) impartió una conferencia amena y divulgativa sobre la teoría de grafos, centrando la atención en la paradoja de la mayoría.

- Cruz Enrique Borges (DeustoTech) introdujo el tema del uso del análisis de redes para el uso eficiente de los recursos eléctricos.

- Modesto Escobar Mercado (Universidad de Salamanca) centró la atención en el análisis reticular en el estudio de las colecciones fotográficas de Miguel de Unamuno.

Como se puede apreciar, los temas tratados y los enfoques empleados son muy variados, mostrando de esta forma la multidisciplinearidad de esta disciplina.

ANÁLISIS DEL PROYECTO DIVULGATIVO

La exposición ha estado abierta al público durante el periodo que se indicó anteriormente y la visita ha estado abierta al público en general, aunque también se han concertado visitas guiadas por parte de los docentes que han intervenido en su desarrollo. El público que ha realizado las visitas libres ha estado compuesto fundamentalmente por estudiantes universitarios y público adulto con formación media-alta. Por otra parte, las visitas guiadas han sido realizadas por grupos de alumnos de Educación Secundaria de centros de la provincia de Salamanca y Zamora (I.E.S. Torres Villarroel, I.E.S. Río Cuerpo de Hombre, etc.) Además, se contó también con la visita de un grupo de chicas y chicos de la Asociación Salmantina de Apoyo a las Altas Capacidades (ATENEA).

En el caso de las visitas guiadas se ha constatado que los bloques que resultaron más interesantes para los alumnos fueron el primero y el segundo. En el primero les resultó relativamente sencillo comprender el concepto de grafo, así como las nociones de caminos y circuitos eulerianos y hamiltonianos. Además, fue de gran utilidad el refuerzo de los mismos mediante los problemas planteados: los 7 puentes de Königsberg, el problema de los cuatro colores, el recorrido mágico del caballo y la búsqueda de la salida de un laberinto. En todos ellos mostraron gran atención e interés, planteando preguntas y debatiendo sobre los mismos, especialmente en el caso del recorrido del caballo y del laberinto. En este último caso utilizamos como apoyo didáctico la mención que se hace en “El nombre de la rosa” de Umberto Eco del algoritmo de Tarry.

Figura 5. Explicación durante una visita guiada

Este interés se mantuvo habitualmente durante el segundo bloque dedicado al análisis de redes complejas. Los recursos matemáticos empleados en el mismo son muy escasos y, consecuentemente, la explicación se basó en descripciones de situaciones en la realidad para justificar la introducción de las diferentes nociones; especial interés despertó el principio de los seis grados de libertad para justificar -de alguna manera- las redes de mundo pequeño.

Los dos últimos bloques fueron los dedicados a mostrar algunas aplicaciones en diferentes ámbitos de la Ciencia y la Tecnología. Se intentó que fuera un nexo de unión con otros contenidos estudiados por los alumnos (Física, Química, Biología, Tecnologías, etc.) pero teniendo en cuenta la experiencia adquirida durante las visitas, parece que no fueron diseñados adecuadamente para mantener el interés por parte de los alumnos. Se abordaron temas amplios y dispares y el grado de divulgación fue muy grande, con lo que se perdió profundidad.

Los visitantes de la exposición pudieron también participar en el escape room virtual diseñado. Conceptualmente no es complicado ya que los conocimientos teóricos requeridos se explican en los paneles (salir de un laberinto, cuadrados mágicos, etc.) pero la necesidad de familiarizarse con los mandos y el entorno virtual hizo poco eficaz y eficiente esta actividad.

El ciclo de conferencias estuvo fundamentalmente destinado a público adulto con un nivel educativo medio-alto. Algunos de los temas tratados fueron muy especializados, pero en todos los casos, se entabló un debate interesante entre los ponentes y el público asistente.

A pesar de haberse elaborado una guía didáctica para trabajar con los alumnos los distintos contenidos de la exposición, esta guía no pudo ser enviada a los centros educativos y por tanto no se le dio el uso divulgativo esperado.

Se tratará de involucrar a algunos centros educativos para trabajar contenidos relacionados con los grafos a través de la guía didáctica organizada al efecto. Como hay actividades muy variadas, algunas estarán más indicadas para la Educación Primaria, mientras que otras son más idóneas para la Educación Secundaria.

PROPUESTAS DE MEJORA

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, podemos destacar las siguientes propuestas de mejora:

- Reducir el número de paneles sobre todo de la parte de aplicaciones en Ciencia y Tecnología.
- Realizar explicaciones más detalladas y accesibles de las aplicaciones en Ciencia y Tecnología.
- Realizar actividades en los centros educativos: charlas sobre el tema.
- Búsqueda de conferencias destinadas fundamentalmente a público infantil y juvenil.
- Reformular el tema del escape room virtual: tal vez se pierda mucho tiempo en aprender los controles y a moverse; además es un juego individual.
- Tal vez sustituir el escape room virtual por juegos sobre tabletas -que era una de las ideas originales-: juegos colaborativos sobre tabletas gráficas.
- Crear una página web desde la cual se puedan consultar las distintas actividades de la guía didáctica para que desde los centros educativos se puedan trabajar las mismas. También se puede valorar el envío de las guías didácticas a los centros educativos.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un proyecto divulgativo en torno a la Teoría de Grafos y sus aplicaciones que, aunque está destinado a todos los públicos, se ha intentado focalizar en estudiantes de Educación Secundaria.

De las diferentes actividades diseñadas, creemos que la más provechosa para los alumnos ha sido la visita a la exposición y, más concretamente, el recorrido de los dos primeros bloques (dedicados a los fundamentos y aplicaciones básicas de los grafos y a los rudimentos del Análisis de Redes Complejas).

Creemos que hubiera sido mucho más provechoso para ellos si se hubiera contado con el refuerzo de actividades (charlas) realizadas en los centros educativos.

Aunque la participación en el escape room virtual ha sido del agrado de los estudiantes, desde un punto de vista didáctico ha presentado varias desventajas. En este sentido parece recomendable el uso de juegos colaborativos sobre tabletas gráficas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Euler, L. (1736). Solutio problematis ad geometriam situs pertinensis. *Commentarii Academiae Scientiarium Imperialis Petropolitanae*, *8*, 128-140.

Wate-Mizuno, M. (2014). Mathematical recreations of Dénes König and his work on graph theory. *Historia Mathematica*, *41*(4), 377-399.

Pepper, Ryan. (2007). On new didactics of mathematics: Learning graph theory via graffiti. *Graphs and Discovery, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 341-349. 10.1090/dimacs/069/19. Grima, C. (2018). ¡Que las Matemáticas te acompañen! *Ed. Ariel*

Para hacer referencia al artículo:

Frutos, E; González, Mª T.; Martín, A. y Santos, Mª T. (2018). Una experiencia divulgativa basada en la Teoría de Grafos. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”. (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 206-214). Lugar: Universidad de León

ENTORNOS VIRTUALES PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Autor/Mª Carmen Giraldo Pérez

IES Los Valles

Camarzana de Tera (Zamora)

Resumen

Los alumnos de Secundaria con dificultades en la materia de Matemáticas requieren de especial atención para lograr el desarrollo de su competencia matemática. Este estudio pretende diseñar un aula virtual que facilite su aprendizaje. Basándose en experiencias previas realizadas con alumnos con la materia pendiente, se dota al aula virtual de las herramientas y recursos necesarios para que los procesos de enseñanza y aprendizaje se desarrollen de forma óptima. Para garantizar la mejora de resultados académicos, el docente planifica su actuación en el aula y actúa como diseñador, facilitador o guía y evaluador, haciendo un seguimiento continuado del aprendizaje del alumno, mientras que éste adquiere un papel activo, siendo el principal responsable de su propio aprendizaje.

Palabras clave: *Matemáticas, Secundaria, virtual*

DESARROLLO

Este estudio consta de varias fases: La fase de análisis, en la que se reflexiona sobre las dificultades de los alumnos en la materia de Matemáticas y se contextualiza el problema para el caso de los alumnos de 3º de ESO que cursan la asignatura de Matemáticas orientadas a las ciencias aplicadas en el IES Los Valles de Camarzana de Tera (Zamora). La fase de diseño, en la que se hace un diseño tecno-pedagógico considerando aspectos tanto curriculares (objetivos, contenidos, metodología, actividades, evaluación, recursos, etc.) como estructurales (espacios de comunicación y colaboración, intercambio de archivos, información, etc.). La fase de desarrollo, en la que se seleccionan y crean todos los materiales y se organiza el entorno virtual. La fase de implementación, en la que tienen lugar las actuaciones de enseñanza y aprendizaje y la fase de evaluación, en la que se evalúa el aprendizaje de los alumnos, su grado de satisfacción, el propio proceso educativo y el entorno virtual, así como el cumplimiento de los objetivos propuestos en la investigación.

En esta investigación, que aún no ha concluido, se espera comprobar la eficacia de un entorno virtual para el aprendizaje de las Matemáticas en el contexto específico en el que se desarrolla.

Punto de partida.

La materia de Matemáticas es considerada por algunos alumnos como “difícil” y “aburrida”. El esfuerzo de docentes e investigadores por cambiar esta percepción ha dado lugar a replantearse la forma en que se desarrollan los procesos de enseñanza-aprendizaje y el propio entorno en el que tienen lugar estos procesos. La búsqueda de soluciones a este problema pasa por tener en cuenta múltiples factores que podrían influir en la “dificultad” de esta materia. La motivación, el uso de estrategias de refuerzo positivo, la selección y creación de materiales adecuados al nivel de competencia curricular del alumno, el seguimiento continuado, la atención personalizada, actividades enriquecidas con las TIC, etc. son sólo algunas de las consideraciones para lograr transformar esa animadversión hacia las Matemáticas.

Fase de análisis.

Previo al diseño de un entorno virtual de aprendizaje orientado al desarrollo de formación matemática, es necesario recabar información sobre las dificultades que pueden surgir en esta materia.

El análisis de las dificultades que presentan los alumnos en Matemáticas es amplio y puede enfocarse desde muy diversas perspectivas. En este estudio se han utilizado, para la obtención de datos, la percepción de los docentes en relación a las dificultades de los alumnos y la opinión de los propios alumnos recogida a través de un cuestionario basado en procesos matemáticos categorizados en el programa PISA[8].

En la concepción de PISA 2015 los alumnos se muestran como individuos que resuelven problemas de forma activa, participando básicamente en tres procesos matemáticos:

- Formulación matemática de las situaciones.
- Empleo de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos.
- Interpretación, aplicación y valoración de los resultados matemáticos.

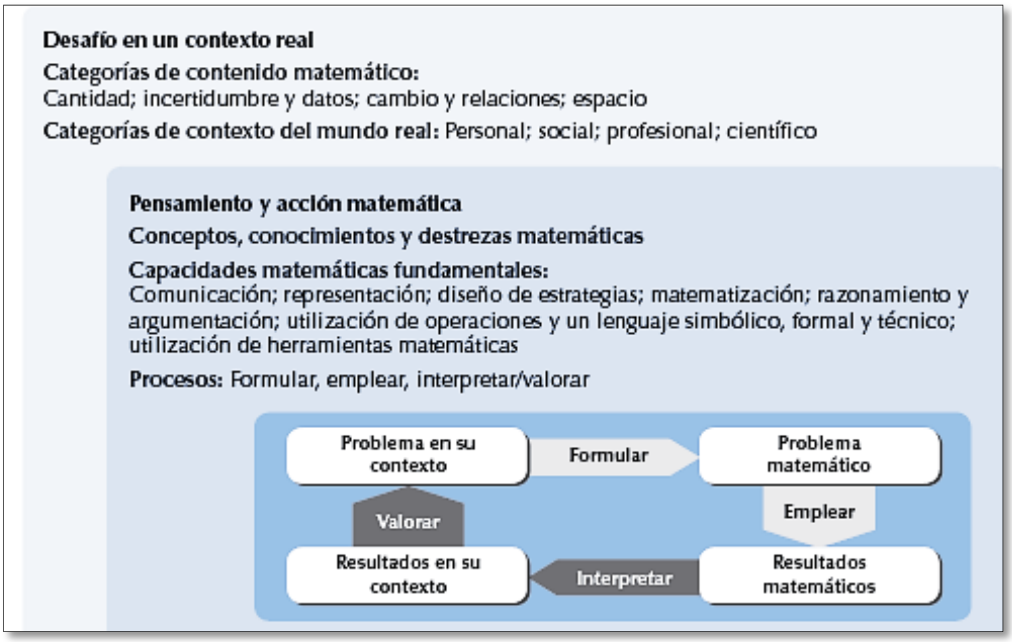


Figura 1. Modelo de competencia matemática en práctica. PISA 2015 marco de Matemáticas

En relación a los procesos matemáticos (formular, emplear e interpretar), existen siete capacidades matemáticas fundamentales que sustentan esos procesos según el marco PISA:

- Comunicación
- Matematización
- Representación
- Razonamiento y argumentación
- Diseño de estrategias para resolver problemas

[8] Programa para la Evaluación Internacional de Estudiantes (Programme for International Student Assessment) desarrollado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE)

- Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico
- Utilización de herramientas matemáticas

Estas capacidades están relacionadas y pueden intervenir simultáneamente al realizar cualquier actividad susceptible de ser tratada matemáticamente. La forma en que se produce la activación de las capacidades y las que intervienen en el proceso de ejecución de una tarea matemática repercute en la dificultad en Matemáticas.

Los problemas matemáticos suelen representar para los alumnos mayor dificultad ya que no solo se requiere la aplicación de estrategias matemáticas para su resolución, también implican comprender el enunciado y tomar decisiones, actuando muchas de las capacidades anteriormente mencionadas.

Fase de diseño.

En esta fase se destaca la necesidad de planificar las actuaciones del docente en el aula virtual.

Se consideran tres momentos en dicha planificación:

- Antes de iniciar el curso: se realiza una planificación curricular (objetivos, contenidos, metodología, recursos, tareas, evaluación,…etc.), de gestión del tiempo (fechas de entrega de trabajos, exámenes,…), de búsqueda, selección y creación de recursos o elaboración de instrumentos de evaluación (rúbricas, cuestionarios,…). También se toman decisiones sobre el entorno tecnológico (apariencia, herramientas de trabajo, información y comunicación del aula virtual, matriculación de alumnos, tutoriales de navegación, etc.).
- Durante el curso: se planifica la dinamización del proceso de enseñanza-aprendizaje a través de anuncios y recordatorios sobre actividades a realizar, instrucciones que guían el aprendizaje proporcionando información y herramientas, resolviendo dudas en foros y animando a los alumnos a participar ayudando a otros compañeros. Para la gestión del proceso de aprendizaje se organiza la información en los espacios generales del curso y en los específicos de cada unidad didáctica dependiendo de su finalidad, se informa al alumnado desde el principio del curso sobre las tareas a realizar, los recursos y herramientas disponibles, la temporización y cómo, dónde y cuándo se evaluará, recordando la importancia de la participación y continuidad. También se considera la forma de motivar y fomentar la interacción agilizando la comunicación dentro del aula virtual, respondiendo con prontitud a las dudas planteadas o enviando mensajes recordatorios con cierta frecuencia, creando un ambiente agradable de trabajo a través de mensajes con lenguaje cercano y estructura guiada (saludo, cuerpo del mensaje y despedida), ofreciendo ayuda, valorando las contribuciones de cada estudiante y haciendo que se sientan acompañados (aclarando, recordando o recomendando formas de proceder).
- Al finalizar el curso: se planifica la comunicación en el aula relacionada con aspectos de la evaluación de los alumnos como el recordatorio de los criterios de evaluación y calificación, las fechas para la entrega de actividades y la obtención de las calificaciones o la forma de recuperar. También hay que considerar el periodo de corrección y cómo proporcionar al alumno retroalimentación, así como los instrumentos de evaluación que van a utilizar tanto docentes como alumnos.

Básicamente se comienza el estudio con el diseño de un curso formativo en línea para la asignatura de Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas de 3º de ESO. Los aspectos relevantes del mismo se resumen en la siguiente imagen:

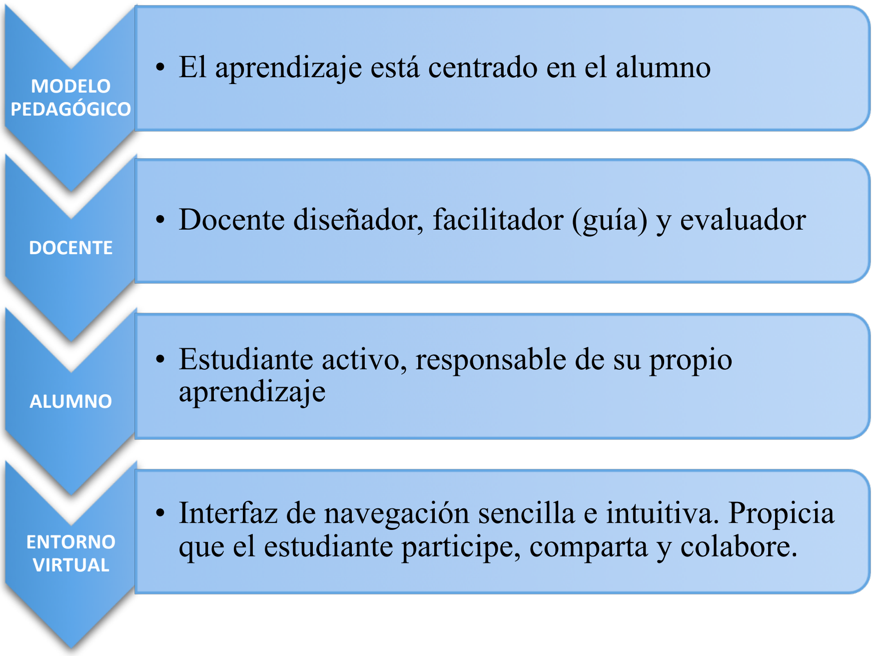


Figura 2. Marco teórico del curso en línea.

Fase de desarrollo.

Esta fase se centra en la creación de recursos para el aula virtual, actividades e instrumentos de evaluación y la puesta a punto del entorno tecnológico.

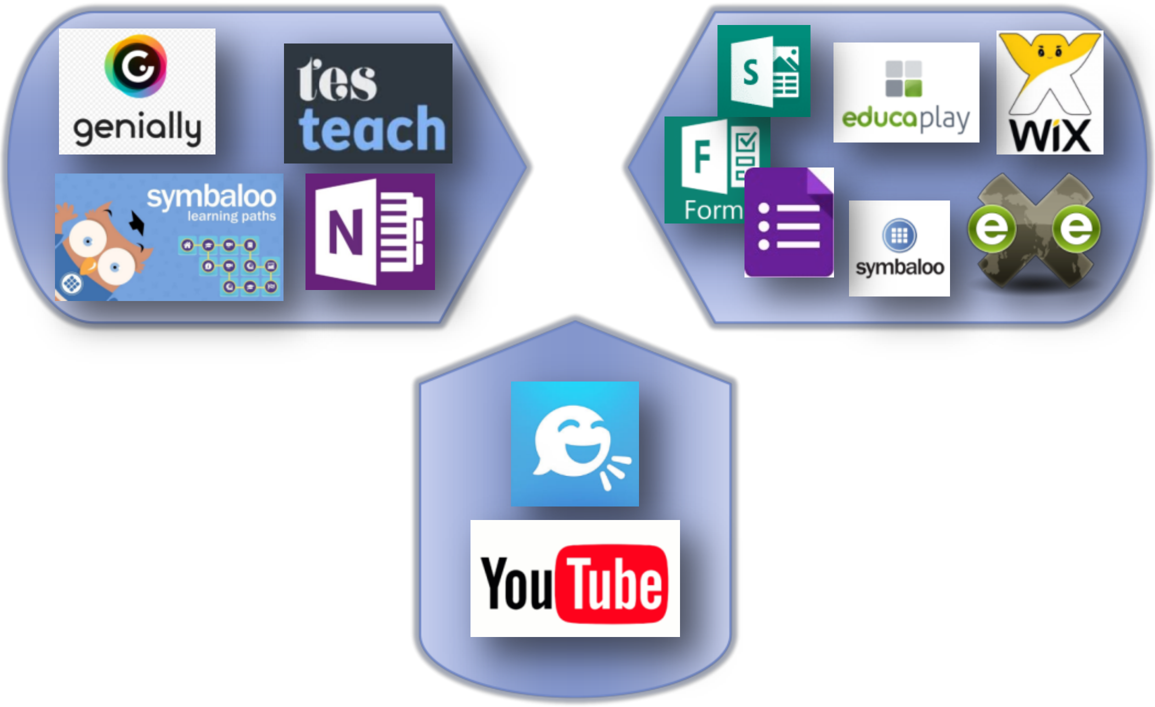


Figura 3. Herramientas para la creación de recursos.

Los itinerarios didácticos creados con herramientas como Lessonplans de Symbaloo, Genially, testeach, etc., permiten la inclusión de una gran variedad de contenidos (imágenes, páginas web, documentos, vídeos) y pueden adaptarse a las características de los alumnos. La personalización del aprendizaje es posible al introducir diferentes rutas de aprendizaje con recursos y tareas específicas para atender las necesidades de todo tipo de alumnado. Las actividades planteadas pueden ser abordadas en distintos espacios y tiempos de manera autónoma por el alumno.

Los paisajes de aprendizaje o imágenes dotadas de elementos activos sobre los que el alumno puede interactuar posibilitan que el alumno escoja el recorrido a seguir sin un orden prefijado por el profesor. También pueden añadirse actividades digitales y diversos niveles de dificultad en las tareas así como rutas especializadas con actividades de refuerzo o ampliación para abordar los casos detectados.

El carácter de los itinerarios de aprendizaje flexible, interactivo, atrayente y que, además, posibilita la gamificación logra un aprendizaje diferenciado y personalizado idóneo para la atención a la diversidad.

Fase de implementación.

El entorno virtual de aprendizaje utilizado es Moodle y contiene las herramientas necesarias para la implementación de cursos en línea. El docente puede crear y gestionar actividades, subir y descargar archivos, aportar hipervínculos a recursos interactivos y páginas web, comunicarse con el alumno a través de los espacios de comunicación del aula, proporcionar feedback y calificar tareas, crear cuestionarios de evaluación y rúbricas para evaluar actividades. El alumno, a su vez, dispone de un entorno de aprendizaje virtual intuitivo en el que intercambiar archivos con el profesor, comunicarse con éste o con otros compañeros, acceder a actividades y recursos, recibir orientaciones y retroalimentación evaluativa del docente, consultar información y noticias referentes al curso, etc.

Se destacan algunos factores considerados clave para la optimización del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas a través de un entorno virtual.

Figura 4. Factores clave de un curso de Matemáticas e-learning para secundaria.

Fase de evaluación.

En esta fase se utilizan los instrumentos de evaluación creados anteriormente en la fase de desarrollo. Se evalúa tanto el aprendizaje de los alumnos como el cumplimiento de los objetivos del curso o el funcionamiento del aula virtual. Los agentes que participan en la evaluación son docentes, alumnos y padres, estos últimos con objeto de determinar su grado de implicación en el proceso de aprendizaje de sus hijos.

Los alumnos pueden autoevaluar sus conocimientos y destrezas matemáticas a través de cuestionarios en línea que proporcionan corrección automática e instantánea. También pueden evaluar a sus compañeros o el trabajo en grupo a través de rúbricas. A través de la activación del rastreo en el aula virtual el docente puede obtener información sobre el uso del aula por el alumno.

Por otra parte para detectar el grado de satisfacción de los alumnos respecto al curso formativo y la valoración global del entorno tecnológico se utiliza un cuestionario y un checklist respectivamente.

Referencias Bibliográficas.

Honey, P. y Mumford, A., (1992), Manual of learningstyles, (3ª edición). Honey, Londres.

Williams, P., Schrum, L., Sangrà, A., & Guàrdia, L. Modelos de diseño instruccional.

Stephenson, J. & Sangrà, A. Modelos pedagógicos y e-learning.

Guitert, M., Romeu, T. (2012). La docencia en línea: de la teoría a la práctica.

Pérez-Mateo, M., Guitert, M. (2010). Aprender y enseñar en línea.

Barberà, E., Levin, E. (2005). Cambios en la acción docente: de las clases presenciales a les clases virtuales. Barcelona: UOC.

Benito, M. (2009). Desafíos pedagógicos de la escuela virtual. Las TIC y los nuevos paradigmas educativos. Telos, cuadernos de comunicación e innovación, 78.

Hernández Requena, S. (2008). El modelo constructivista con las nuevas tecnologías aplicado en el proceso de aprendizaje. Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC), 5(2).

Jonassen, J. (2005). Procesos de aprendizaje mediante las TIC.

Urbina, S. (1999). Informática y teorías del aprendizaje. Píxel-Bit: Revista de mitjans i educació.

Rodríguez, G. (2012). “Introducción a la e-evaluación”.

Modelo de Competencias Profesionales del Profesorado de la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León.

Giraldo, M (2016). Memoria del Proyecto de innovación educativa: “Aula virtual para pendientes”

OECD (2016). Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2015: Ciencias, Matemáticas, Lectura y Competencia financiera

Para hacer referencia al artículo:

Giraldo, Mª C. (2018). Entornos virtuales para el aprendizaje de las Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática “Miguel de Guzmán”. (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 215-220). Lugar: Universidad de León

CREACIÓN DE MATERIAL MANIPULATIVO PARA FUTUROS DOCENTES DE INFANTIL, PRIMARIA Y SECUNDARIA PARA EL APRENDIZAJE DE MATEMÁTICAS

Beatriz Sánchez Barbero[a], José Mª. Chamoso[a], Mª. José Cáceres[a], Mª. Mercedes Rodríguez[a], Mª. Soledad Salomón[a] y Mª. Teresa Astudillo[a]

[a]Universidad de Salamanca

{beatrizsanchezb, jchamoso, majocac, meros, msalomonp, maite}@usal.es

Resumen

Se muestra el diseño de una sesión formativa para futuros docentes de Infantil, Primaria y Secundaria basada en la creación de material manipulativo para el aprendizaje de Matemáticas. El objetivo más importante es que los estudiantes, en grupos, elaboren un material para introducir, explicar o reforzar un contenido matemático teniendo en cuenta la forma de hacerlo y exponerlo a los compañeros para favorecer la mejora conjunta. En los resultados de la experimentación que se ha desarrollado sobresale la variedad de materiales que los estudiantes utilizan, así como la motivación por la elaboración adecuada para el contenido considerado. Posteriormente, algunos de los materiales creados se adaptaron para alumnos con discapacidad o dificultad visual en colaboración con la ONCE.

Palabras clave: *enseñanza de las Matemáticas, materiales manipulativos, formación de docentes, creación de material, atención a la diversidad.*

INTRODUCCIÓN

El escaso interés del alumnado hacia las Matemáticas, puede deberse a la falta de materiales manipulativos en las aulas que les llame la atención, les motive y les acerque las Matemáticas a la vida diaria (Alsina, 2010). Existe una clara necesidad de cambio en la forma de enseñar y aprender Matemáticas en los centros (NCTM, 2010) y es por esto que la formación inicial de docentes debería contener diferentes materiales fundamentales para aprender Matemáticas, para que puedan hacer frente a diversas situaciones que surgirán en su entorno de aula (Cáceres, Chamoso y Azcárate, 2010). Una posibilidad es la creación de material manipulativo para explicar, introducir o reforzar un contenido matemático en las aulas, haciendo así que los alumnos sean participantes activos de su propio aprendizaje (Chamoso y Durán, 2002). Esta elaboración de material, favorece que se potencie la reflexión en las aulas, pues permitiría conocer, comprender e interiorizar sensaciones estudiadas (Área, 2010; Swenson, 1991), dando paso de este modo conocer, a una comprensión e interiorización de sensaciones estudiadas. Por todo ello, el objetivo de este trabajo es elaborar material manipulativo y didáctico en aulas con futuros docentes de Educación Infantil, Educación Primaria y primeros cursos de Educación Secundaria.

MATERIAL MANIPULATIVO PARA APRENDER MATEMÁTICAS

El desarrollo de la competencia matemática es uno de los principales objetivos que se persigue en la Educación Matemática, donde se pretende formar personas capaces de enfrentarse a diferentes problemas que se pueden plantear en la vida (Rodríguez, Chamoso y Rawson, 2002). Para el desarrollo de dicha competencia, la actual Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE) establece cinco bloques temáticos, de los cuales el primero recoge la importancia de la participación y la colaboración del alumnado en su propio aprendizaje, así como el interés y curiosidad por el mismo. Esto hace pensar que el modo de enseñar Matemáticas en las aulas ha de modificarse, y una posible modificación sería la introducción de recursos educativos como pueden ser materiales, juegos o cuentos. Esto estaría de acuerdo con la LOMCE, que concibe la manipulación de materiales como un elemento metodológico que permite una experimentación del alumno, siendo este protagonista de su propio aprendizaje.

Todo docente en el aula ha de ser capaz de, además de enseñar Matemáticas, facilitarlas (Chamoso, Mitchell y Rawson, 2004). La manipulación de materiales ayuda a los alumnos a elaborar esquemas mentales de conocimiento (Alsina, 2010), entendiendo como materiales “todos aquellos objetos, aparatos o medios de comunicación que ayudan a descubrir, consolidar o entender conceptos en las diferentes fases del aprendizaje” (Alsina, Burgués y Fortuny, 1988, p.13). La utilización de materiales y recursos en el aula de Matemáticas es de gran ayuda en el proceso de enseñanza-aprendizaje, puesto que favorecen la motivación y la participación del alumnado en dicho proceso, haciendo que el aprendizaje sea más significativo, ya que interiorizan mejor los conceptos y contenidos al haberlos trabajado de una forma visual (Martín, 2012). Estos materiales generan una motivación al alumnado, positivizan actitudes hacia la Matemática y su aprendizaje, facilitan el desarrollo del currículum, fomentan el pensamiento matemático, potencian una enseñanza activa, participativa y creativa, estimulan la confianza en el propio pensamiento y pueden ser empleados para favorecer la adquisición de rutinas, modelizar las ideas o conceptos matemáticos y plantear o resolver problemas; en definitiva, estimulan el aprendizaje (González, 2010). A la introducción de este tipo de recursos en el aula ha de seguir una serie de normas o reglas y ha de ser previamente planificada y programada, atendiendo a las necesidades de los alumnos y con unos objetivos perfectamente establecidos y claros. Asimismo, cada material debería ir acompañado de una ficha del mismo donde se organizaran diferentes aspectos importantes como: nombre del juego, nivel al que puede ir dirigido (el curso o edad más adecuado), procedencia (si es de elaboración propia, se ha extraído de internet o se encuentra comercializado), contenidos y objetivos (qué contenidos matemáticos se podrían trabajar y qué objetivos se quieren cubrir), materiales que se utilizan (qué ha sido necesario para su elaboración), descripción del juego (las reglas de su uso), variantes (posibles modificaciones del material), observaciones (peculiaridades a tener en cuenta),… (más detalle en Chamoso, Martín, Pereña y Revuelta, 1997).

A pesar de la existencia en el mercado de diversos materiales, éstos pueden ser confeccionados, dotándoles así de un toque de originalidad, con lo que pueden ser orientados en función de las necesidades particulares o dificultades en el aprendizaje de los alumnos con los que se va a trabajar. Pocos son los trabajos realizados sobre la creación de material manipulativo para aprender Matemáticas en aulas con futuros docentes de Educación Infantil y Primaria y, por tanto, esta es una aportación de nuestro trabajo.

EXPERIMENTACIÓN

Contexto y participantes

La experimentación se llevó a cabo con alumnos de los Grados en Maestro de Educación Primaria (65 alumnos) y del Doble Grado en Maestro de Educación Infantil y Primaria (15 alumnos) en la Escuela Universitaria de Magisterio de Zamora, perteneciente a la Universidad de Salamanca, dentro de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica I, en la que se trabaja la enseñanza de la numeración, operaciones y lógica (números, suma, resta, multiplicación, división exacta, división no exacta, raíz cuadrada, seriaciones, conjuntos, lógica, divisibilidad, descomposición numérica, sistema decimal, números pares e impares, números negativos, múltiplos y divisores). La metodología de esta asignatura es activa y favorece la participación del alumnado de manera que construyan su propio aprendizaje. A través de la plataforma que utiliza la Universidad de Salamanca, Studium (más detalle en Sánchez, Rodríguez, Cáceres, Manzanares y Chamoso, 2016), los alumnos conocen con antelación qué es lo que se va a trabajar en cada una de las sesiones, en las cuales han de ir entregando diferentes tareas a lo largo del curso. En este trabajo se presenta con detalle una de las sesiones, donde la elaboración de materiales juega un papel fundamental.

Objetivo

La sesión tiene por objetivo crear material manipulativo vinculado a un contenido matemático para aprender Matemáticas en aulas de Infantil, Primaria y primeros cursos de Secundaria.

Planteamiento de la sesión de elaboración de recurso para la enseñanza de las Matemáticas en aulas de Infantil, Primaria y primeros cursos de Secundaria

La sesión tiene lugar en los últimos días de clase de la asignatura, puesto que, de este modo, los alumnos han adquirido contenidos y conocimientos matemáticos y didácticos mencionados anteriormente a lo largo del cuatrimestre, y se han familiarizado con materiales y recursos matemáticos que ha enseñado la profesora, así como a realizar fichas de materiales manipulativos. La elaboración y entrega de este material manipulativo es una de las tareas que se deben realizar los alumnos para superar la asignatura.

En esta sesión de 2 horas de duración, los alumnos se organizan en grupos de 5 personas. Cada grupo de alumnos debe:

- Elaborar un material manipulativo referido a un determinado contenido matemático, diferente para cada grupo, y rellenar la ficha del mismo (conocida por los estudiantes). Previamente, la profesora informa a los alumnos por la plataforma Studium que en esta sesión deben llevar al aula material reciclable, material escolar o de manualidades -como tijeras, pegamento, reglas, cartulinas, goma eva-. Al inicio de la sesión, los temas se reparten de forma aleatoria, de forma que según van saliendo temas, éstos no pueden volver a repetirse, por lo que cada grupo tiene un contenido matemático diferente de entre los estudiados en la asignatura (60 minutos).
- Exponer, en cada caso, cómo utilizar el material elaborado para enseñar el contenido matemático en el aula. Al finalizar cada exposición, el grupo recibe comentarios constructivos tanto del resto de compañeros como de la profesora (45 minutos).
- Reflexionar de manera conjunta al finalizar la sesión sobre el trabajo realizado (15 minutos).

A partir de las consideraciones por parte de los compañeros y de la reflexión conjunta final, cada grupo tiene la posibilidad de mejorar su propuesta, además de poder adaptarlo a otras posibilidades como, por ejemplo, a estudiantes con necesidades educativas especiales (para los casos de adaptación a alumnos con discapacidad o dificultad visual se cuenta con la colaboración de profesionales de la ONCE).

RESULTADOS

Esta sesión se implementó en las aulas de futuros docentes en la Universidad de Salamanca. Organizados en grupos, cada uno de ellos creó un material diferente para aprender Matemáticas en el aula, junto con la ficha explicativa de dicho material.

Algunos de los materiales elaborados por los alumnos en función del contenido matemático que se quería trabajar son: Operaciones: resta: "Restando con margaritas"; Operaciones: suma: "Gusuma"; Operaciones: multiplicación: "Cubos locos"; Operaciones: raíz cuadrada: "Tablas de raíces cuadradas"; Seriaciones: "Series lógicas"; Lógica: "El chupa-chups traicionero"; Divisibilidad: "Averiguamos los divisores"; Descomposición numérica: "El cajón que resuelve el sistema numérico"; Números: "El bosque de contar"; Sistema decimal: "Sistema decimal"; Números pares-impares: "Aprende jugando"; Números negativos: "El termómetro loco"; Múltiplos/divisores: "Peco".

A continuación se puede ver con detalle el material elaborado para trabajar la divisibilidad de números naturales, junto con la ficha de material del mismo:

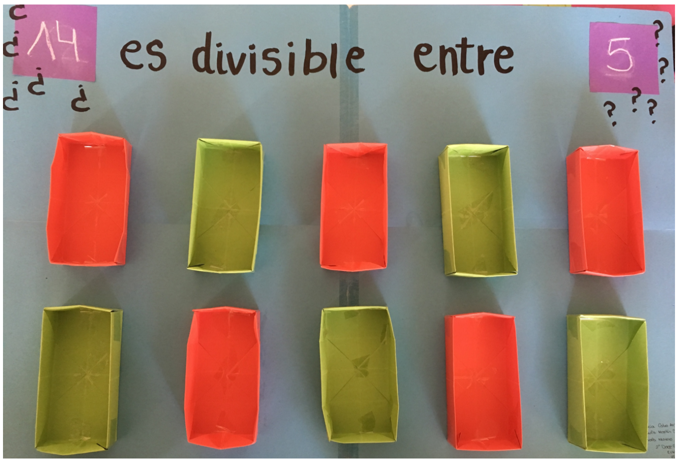


Figura 6. Material elaborado para trabajar la divisibilidad "Averiguamos los divisores"

Nombre: "Averiguamos los divisores"

Procedencia: elaboración propia.

Nivel: 3º de Educación Primaria.

Contenido y objetivos:

- La divisibilidad de números naturales.
- Introducir en el aula el contenido de la divisibilidad.

Materiales que se utilizan: cartulinas de colores, goma eva, tijeras y celo.

Descripción del juego: los alumnos deberán pensar un número del 1 al 50, que será representado con unas fichas rojas, una por unidad. Se les planteará el reto de saber si dicho número es divisible por "x" número, siendo este "x" número el número de cajitas que tendrá la base. Los alumnos deberán colocar en cada cajita tantas fichas como el número sobre el que quieren saber si es divisible. Si alguna caja queda incompleta, el número no será divisible por el divisor elegido.

Variantes: reducir el número de cajas y, así, que memoricen las fichas que había dentro.

Observaciones: el número de cajas y de fichas podrá aumentarse según el nivel.

Estos resultados (se detallan más ejemplos completos en el Anexo 1) muestran la diversidad de material interesante y original que los futuros docentes son capaces de elaborar, así como la motivación y disposición de creación que han tenido a lo largo de la sesión. Durante las exposiciones, los alumnos estuvieron atentos a los compañeros y se sintieron cómodos explicando el contenido matemático con el material elaborado. La reflexión final de la sesión fue productiva; en orden, los grupos fueron dando su opinión sobre la sesión, la cual les pareció realmente interesante, motivadora y original, puesto que fueron conscientes de qué dificultades pueden encontrar en las aulas y cómo la utilización de material que puede ser elaborado por ellos mismos puede ser un recurso apropiado para intentar paliar estas dificultades.

REFLEXIONES FINALES

El objetivo de esta sesión era elaborar material manipulativo para explicar, introducir o reforzar un contenido matemático en aulas de Infantil, Primaria y primeros cursos de Secundaria. A través de la formación y concienciación a los estudiantes de Magisterio, de diferentes formas de enseñanza de las Matemáticas (como, por ejemplo, los materiales manipulativos), fabricación de diferentes materiales y su experimentación en el aula, se pudo apreciar un proceso de enseñanza-aprendizaje basado en una participación activa del alumnado, donde las preguntas de estos mostraron el interés y la motivación, enseñando y aprendiendo Matemáticas de un modo lúdico y diferente a lo que se hace con otras metodologías tradicionales (Sánchez, Chamoso, Cáceres y Rodríguez, 2015).

Llama la atención la cantidad de materiales diferentes que elaboraron los alumnos, así como la motivación y emoción de los mismos a la hora de crear el material y de exponer sus creaciones al resto de sus compañeros. Esto nos lleva a concluir que si se trabaja en el aula de un modo abierto, son los propios alumnos los que construyen su conocimiento, aunque la enseñanza de las Matemáticas a través de materiales manipulativos no debe ser el único medio, sino, más bien, un medio complementario de otros modos de enseñanza (Cascallana, 1988).

Por todo lo anterior, si con la introducción de material manipulativo en las aulas se consigue un aprendizaje más significativo, quizás la introducción de este tipo de recurso en las aulas podría ser una pequeña modificación en la forma de enseñanza de las Matemáticas (independientemente del nivel educativo en el que se trabaje), que podría dotar a los docentes de un apoyo en ocasiones más que necesario, proporcionando una amplia gama de actividades diferentes del libro del texto, para motivar a los alumnos y apoyar a posibles alumnos con dificultades en el aprendizaje. Una limitación de esta experimentación es que no se ha podido realizar en todas las asignaturas relacionadas con Matemáticas y su didáctica que se imparten en los Grados de Infantil y de Primaria; por ello se intentará experimentar la sesión en dichas asignaturas en el futuro, para así poder crear una base de datos de material manipulativo elaborado y orientado a la enseñanza de todos los bloques de contenido matemático.

AGRADECIMIENTOS

Los autores son miembros de la “Red8-Educacion Matemática y Formación de Profesores” (EDU2016-81994-REDT), financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad, de los proyectos de investigación “New Rules for Assessing Mathematical Competencies (RULESMATH)” (2017-1-ESO1-KA203-038491), financiado por el programa Erasmus + y “Caracterización de la identidad profesional de futuros profesores de Matemáticas de Secundaria” (2017/00111/001), financiado por la Universidad de Salamanca y pertenecen al Grupo de Investigación Reconocido de Matemática Educativa de la Universidad de Salamanca (GIRME), según su filiación institucional. Una de las autoras fue la autora del proyecto “Elaborando recursos para aprender Matemáticas en aulas de Primaria” ganador del Premio de Educación Perfecta Corselas concedido por la Fundación Vicente y García Corselas en su XV Edición.

REFERENCIAS

Alsina, A. (2010). La pirámide de la Educación Matemática. Una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa, 189*,12-16.

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. M. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.

Área, M., Parcerisa, A. y Rodriguez, J. (Coords) (2010). *Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios*. Ed: Grao.

Cáceres, M.J., Chamoso, J.M. y Azcárate, P. (2010): Analysis of the revisions that pre-service teachers of Mathematics make of their own project included in their learning portfolio. *Teaching and TeacherEducation 26,* 5, 1186-1195.

Cascallana, M. T. (1988). *Iniciación de la Matemática. Materiales y recursos didácticos.* Madrid, Santillana, Aula XXI.

Chamoso, J.M. y Durán, J. (2002). Algunos juegos para aprender Matemáticas. *Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática,* 163-176. Ponferrada, León, España.

Chamoso, J. M., Martín, P., Pereña, J. C. y Revuelta, F. J. (1997). Algunos materiales para su utilización en el aula de Matemáticas. *Aula 9/1997*, 319-350.

Chamoso, J. M.; Mitchell, C. y Rawson, W. (2004). Reflexiones sobre experiencias matemáticas de estudiantes de 3 a 5 años. *Educación Matemática 16*, 1, 195-217.

González Marí, J.L. (2010). *Recursos, Material didáctico y juegos y pasatiempos para Matemáticas en Infantil, Primaria y ESO: consideraciones generales.* Málaga: Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Málaga.1-24.

Martín, S. (2012). Una propuesta didáctica con materiales manipulativos para la Educación Primaria. *Revista Suma*, *69*, 21-29.

N.C.T.M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.*Virginia: Reston, NCTM.

Rodríguez, M., Chamoso, J.M., Rawson, W.B. (2002).Tres profesores de Matemáticas en el supermercado. *Revista Suma, 39*, 83-93.

Sánchez, B., Chamoso, J.Mª., Cáceres, Mª. J. y Rodríguez, Mª. M. (2015). El dominó para aprender Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), Congreso: *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 491-504). Lugar: Academia de Artillería de Segovia, España.

Sánchez, B., Rodríguez Mª. M., Cáceres, Mª. J., Manzanares, J. y Chamoso, J. Mª. (2016). *Una plataforma virtual con soporte Moodle para mejorar la formación de maestros de Matemáticas.* Comunicación presentada en el XIII Congreso Regional de Matemáticas, Ávila, España.

Swenson, L. (1991). *C. Teorías del aprendizaje: perspectivas tradicionales y desarrollos contemporáneos*. Barcelona: Paidós.

ANEXO 1. EJEMPLOS DEL MATERIAL ELABORADO POR LOS ALUMNOS

FICHA DE UN MATERIAL

NOMBRE DEL MATERIAL/JUEGO: "El cubo de los números (2 en 1)"

PROCEDENCIA: elaboración propia

NIVEL: Educación Infantil. Alumnos de 2º y 3º de Educación Infantil

CONTENIDOS Y OBJETIVOS:

- **Objetivos:**
  - Conocer los números.
  - Asociar los números con la grafía y cantidad.
  - Identificar cantidades.
  - Realizar sumas
- **Contenidos:**
  - Números.
  - Sumas.

MATERIALES QUE SE UTILIZAN: tapones de colores, goma eva, caja, cartulina, tijeras y rotuladores.

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO: Dentro del cubo tendremos los tapones numerados del 1 al 10 (en número, letra y cantidad) este material trae consigo dos juegos:

- Emparejamos: consiste en indicarle al niño un número cualquiera, y de entre los tapones deberá coger todos los tapones que tengan relación con ese número.
- Los amigos del 10: en este juego van a tener que seleccionar los tapones (yasean los de la cifra o los de la cantidad) y deberán formar grupos que sumados obtengamos como resultado el número 10.

VARIANTES: A medida que el niño es más mayor se puede ir complicando:

- Añadir más tapones con más números
- Realizar otras operaciones matemáticas

OBSERVACIONES: En el material, los tapones de la cantidad están hechos en relieve con goma eva, se puede poner el resto de tapones de la misma forma para que si algún alumno presenta una discapacidad, mediante el tacto pueda reconocer el número o la cantidad de la que estamos hablando y así realizar la actividad igual que el resto de sus compañeros.

Figura 1. Material elaborado para Educación Infantil. "El cubo de los números"

FICHA DE UN MATERIAL

NOMBRE DEL MATERIAL: “El juego de las cajas mágicas”

PROCEDENCIA: Creación propia.

NIVEL: Educación Primaria. Alumnos de 1º y 2º de Primaria.

CONTENIDOS Y OBJETIVOS:

- **Objetivos:**
  - Aprender y ordenar los números del 1 al 10.
  - Comprender nociones de tamaño y progresiones numéricas básicas ascendientes y descendientes.
  - Aprender la suma
- **Contenidos:**
  - Números.
  - Suma.

MATERIALES QUE SE UTILIZAN: dos caja, goma eva, velcro, bolitas de poliesterino, pegamento, tubos de rollo de papel albal, forro de libro y tijeras.

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO: En primer lugar, colocaremos cuatro números cualesquiera, o los que algún alumno coja primeramente sin mirar.

Una vez que obtengamos los cuatro números, los pegaremos con el velcro uno a cada lado de la caja, en cada uno de los cuatro colores de la caja uno de los números. Una vez ya colocados, pasaremos a coger y contar todos juntos la cantidad de pelotas dada por el número que colocamos en el color correspondiente, de tal manera que si en el color amarillo pegamos con el velcro el número 3, deberemos coger y contar entre todos tres pelotas amarillas, y así con los otros diferentes colores según el número que hemos colocado.

Esta primera fase, irá dirigida a que los niños comprendan de una manera más visual el concepto de número y cantidad, ya que verán el número y comprobarán ellos mismos la similitud entre el número y su cantidad.

Una vez ya sacadas, *por ejemplo tres pelotas amarillas, dos verdes, cinco rojas y seis azules,* pasaremos a la segunda parte del material, otra de las cajas en la que realizaremos un acercamiento a las operaciones matemáticas, una aproximación a la suma y a la resta de una manera más visual.

Con los tres velcros pegados en la parte inferior de la caja, colocaremos nosotros los colores que queramos, como tenemos los cuatro colores, escogeremos los más fáciles para las restas ya que están comenzando a restar, y los más complejos para realizar las sumas.

Una vez hayamos escogido lo que sumaremos y restaremos, pasaremos a colocar dentro de cada rollo de papel las pelotas elegidas, *si por ejemplo restamos el amarillo menos el verde*, de tal manera que iremos tirando a un denominado **“cajón del deshecho”** las pelotas que haya en cada rollo iguales, por ejemplo, un rollo tendrá tres pelotas, y otro rollo tendrá dos, con lo cual ambos tendrán dos pelotas en común, estas cuatro, irán al cajón del deshecho, y finalmente, cuando solamente quede pelotas en un solo rollo, este será el resultado de la resta, en este caso uno. Para la suma, no tendremos que utilizar el cajón del deshecho ya que todo irá al resultado.


Figura 2. Material elaborado para Educación Primaria. “El juego de las cajas mágicas”

FICHA DE MATERIAL

NOMBRE DEL MATERIAL: "¿Quién soy? / How am I?"

PROCEDENCIA: Creación propia.

NIVEL: Educación Secundaria. Alumnos de 1º y 2º de la ESO.

CONTENIDOS Y OBJETIVOS:

- **Objetivos:**
    - Trabajar con las propiedades de los números.
    - Utilizar lenguaje matemático.
    - Diferenciar los diferentes tipos de números.
    - Desarrollar capacidad de razonamiento y deducción.
- **Contenidos:**
    - Los números.
    - Propiedades de los números (divisibilidad, número primo,…).
    - Conjuntos numéricos (natural, entero, racional, irracional, real).
    - Relaciones de números (mayor que, menor que,…).

MATERIALES QUE SE UTILIZAN: goma eva, tijeras, rotulador y celo.

DESCRIPCIÓN DEL JUEGO:

- Se reparte una carta a cada uno de los jugadores y con celo se la pega cada uno en su frente, de modo que cada jugador ve las cartas de los demás, pero no la suya.
- Cada jugador ha de adivinar la carta que tiene pegada en su frente.
- El jugador que comienza a intentar adivinar el número de la carta que tiene, hace una pregunta a los demás, de modo que éstos sólo pueden responder sí o no.
- Si la respuesta es sí, ese jugador continúa preguntando. Si la respuesta es no, el turno pasa al siguiente jugador.
- Gana el jugador que antes acierte el número que tiene.

VARIANTES: se podría jugar de forma individual o por grupos.

OBSERVACIONES:

Figura 3. Material elaborado para Educación Secundaria. "¿Quién soy? / How am I?"

Para hacer referencia al artículo:

Sánchez, B.; Chamoso, J.Mª; Cáceres, Mª J.; Rodríguez, Mª M.; Salomón, Mª S. y Astudillo, Mª T. (2018). Creación de material manipulativo para futuros docentes de Infantil, Primaria y Secundaria para el aprendizaje de Matemáticas. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 221-229). Lugar: Universidad de León

CONOCIMIENTO PROFESIONAL Y PRÁCTICA DE AULA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: LA RECTA DE EULER

María Soledad Salomón[a], José María Chamoso Sánchez[a], José Manuel Diego Mantecón[b], María Mercedes Rodríguez Sánchez[a], Beatriz Sánchez Barbero[c], María José Cáceres García[c], María Teresa González Astudillo[a]

[a]Facultad de Educación, Universidad de Salamanca, [b]Facultad de Educación, Universidad de Cantabria, [c]Escuela Universitaria de Magisterio de Zamora, Universidad de Salamanca

Nivel académico: Primaria, Secundaria y Bachillerato y Universidad.

Resumen

Enseñar Matemáticas no solo implica que el docente conozca el contenido matemático sino que, además, debe considerar e integrar otros aspectos. En este trabajo se tienen en cuenta dos de ellos referidos al profesor de Matemáticas: el conocimiento profesional, entendido como lo que debe saber, y la práctica de aula a partir del conocimiento profesional, referida a elementos relacionados con el desarrollo de las sesiones de aula. Ambos aspectos se ejemplifican con un contenido matemático: Rectas notables del triángulo, la recta de Euler. Posteriormente, se incluye una propuesta de aplicación de ese contenido en el aula, que puede ser adaptable a otros contenidos matemáticos en diferentes sentidos, no sólo con docentes en ejercicio sino también en formación de docentes.

Palabras clave: *Conocimiento profesional, práctica de aula, recta de Euler, profesor de Matemáticas, formación de docentes*.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad es comúnmente aceptado que enseñar Matemáticas no sólo implica conocer el contenido matemático sino que también intervienen otros conocimientos. Shulman (1986) fue el primero en considerar que un profesor debía saber, además del contenido científico, también el contenido pedagógico y el contenido curricular. Estudios posteriores intentaron avanzar su trabajo en diferentes sentidos, algunos de ellos centrados específicamente en el profesor de Matemáticas. Entre estos últimos, uno de los más aceptados es el de Ball, Thames y Phelps (2008), según el cual el conocimiento profesional de un profesor de Matemáticas engloba tanto Conocimiento matemático para la enseñanza como Conocimiento pedagógico del contenido.

Además de ese conocimiento profesional ,y a partir de él, es interesante considerar su concreción en aspectos relacionados directamente con la práctica de aula, como pueden ser, por ejemplo, la forma de trabajo que se va a emplear, el tipo de recursos, la forma de evaluación u otras estrategias metodológicas (por ejemplo, Lamote y Engels, 2010).

Son numerosos los estudios que centran su atención en el Conocimiento del Profesor de Matemáticas y en diferentes niveles educativos, aunque éste suele tratarse de forma general y no cuando se aborda una tarea o un contenido concreto en el aula. Algunos estudios referidos a contenidos matemáticos concretos como, por ejemplo, Buforn, Fernández, y Llinares (2015), centraron su atención en la competencia docente "mirar profesionalmente", que permite conocer cómo aprenden los alumnos e interpretar las situaciones que se dan en las interacciones de aula, es decir, se refiere a un aspecto concreto del conocimiento profesional. Si se consideran todos los dominios que engloba el conocimiento profesional, destacan los estudios de Muñoz-Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes y Climent (2015) en Educación Primaria, o Sosa, Flores-Medrano y Carrillo (2016) en Educación Secundaria, que emplearon el modelo propuesto por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013), que continúa depurándose, y otros como el de Sosa y Carrillo (2010), que siguieron el modelo de Ball et al. (2008). Todos ellos realizaron una investigación descriptiva con estudio de casos para estudiar el conocimiento profesional que emerge durante la enseñanza en el aula de un contenido matemático a partir de la interacción con los alumnos. Sin embargo, no se han encontrado estudios que aúnen conocimiento del profesor y práctica de aula con una visión global de los diversos dominios de conocimiento y de las relaciones entre ellos.

En el presente estudio, que constituye un primer paso hacia el conocimiento del profesor y su práctica de aula, se huye del enfoque descriptivo que analiza la práctica docente mediante el estudio de casos y se busca proporcionar herramientas que aporten una visión global que puede resultar de utilidad en la formación de docentes. A partir de las categorías relativas al conocimiento profesional y a la práctica de aula, se ejemplifica cada una de ellas considerando un contenido matemático concreto: *Rectas notables del triángulo, la recta de Euler*. Además, se propone una sesión formativa que concreta algunos de los ejemplos proporcionados en un contexto real.

CONOCIMIENTO PROFESIONAL DE UN PROFESOR DE MATEMÁTICAS Y SU RELACIÓN CON LA PRÁCTICA DE AULA

Cuando un profesor tiene que tratar un determinado contenido matemático con sus estudiantes debe tener en cuenta diversos aspectos. En este trabajo se van a considerar dos de ellos: conocimiento profesional y práctica de aula.

Se entiende conocimiento profesional como el conjunto de competencias, técnicas y herramientas que el profesor debe saber y dominar. De esta forma, el conocimiento profesional es común a todos los profesores y, a la vez, la base en la que se sustenta la reflexión docente de cada uno de ellos, que permite identificar y seleccionar los elementos que parecen adecuados para el proceso de enseñanza y aprendizaje y para responder a las peculiaridades que surjan (sea o no en las sesiones de aula) o a exigencias burocráticas, entre otras. Por otro lado, se entiende práctica de aula como el resultado de la aplicación en el aula de ese conocimiento profesional por cada docente con su propio criterio, fruto de su reflexión, para conseguir una determinada meta.

El conocimiento profesional tiene dos grandes dominios: el Conocimiento matemático para la enseñanza (con los subdominios Conocimiento común del contenido, Conocimiento especializado del contenido y Conocimiento del horizonte matemático) y el Conocimiento pedagógico del contenido (con los subdominios Conocimiento del contenido y del curriculum, Conocimiento del contenido y la enseñanza, y Conocimiento del contenido y los estudiantes). En la Tabla 1 se muestran las diferentes definiciones (adaptadas de Ball et al., 2008):

Tabla 7: Dominios y subdominios del conocimiento profesional

Subdominios		Definición
Conocimiento matemático para la enseñanza: Conocimiento del contenido matemático necesario para enseñar	**Conocimiento común del contenido**	Conocimiento matemático que se utiliza en la enseñanza, común al de otras profesiones u ocupaciones que también usan Matemáticas.
	Conocimiento especializado del contenido	Conocimiento matemático que permite a los profesores abordar la enseñanza y que incluye, por ejemplo, representar ideas matemáticas o proporcionar explicaciones matemáticas a reglas o procedimientos, y

		examinar y entender métodos no habituales de resolución de problemas.
	Conocimiento del horizonte matemático	Conocimiento de cómo diferentes tópicos matemáticos se relacionan entre ellos a lo largo del currículum. Incluye las conexiones con ideas matemáticas posteriores, así como conexiones intra o extra matemáticas.
Conocimiento pedagógico del contenido: Conocimiento de la relación entre el contenido matemático y la pedagogía para enseñarlo, atendiendo al propio entendimiento profesional	**Conocimiento del contenido y del curriculum**	Conocimiento de programas y materiales instruccionales para desarrollar o facilitar el aprendizaje.
	Conocimiento del contenido y la enseñanza	Conocimiento del diseño de instrucción que incluye el entendimiento de la relación entre el conocimiento y los objetivos pedagógicos que influyen en el aprendizaje del estudiante; por ejemplo, incluye atención a estrategias de enseñanza y tipos de tareas instruccionales.
	Conocimiento del contenido y los estudiantes	Conocimiento de cómo los estudiantes piensan, conocen o aprenden un determinado contenido, que permite, por ejemplo, conocer los errores que los estudiantes cometen con mayor frecuencia.

En la Tabla 2 se muestran las categorías relativas a la práctica de aula a partir de una adaptación de las categorías del estudio de Lamote y Engels (2010):

Tabla 8: Categorías de práctica de aula

Categorías		Definición
Metas educativas		Objetivos de enseñanza
Énfasis instruccional	**Atendiendo al estudiante**	Tiene en cuenta involucrar al estudiante en el desarrollo de las sesiones de aula y en el aprendizaje aludiendo, por ejemplo, al trabajo cooperativo
	Atendiendo a los elementos de enseñanza	Tiene en cuenta, por ejemplo, la utilización de recursos, juegos, realización de proyectos o evaluación formativa
Relación pedagógica entre profesor y estudiantes		Considera a los estudiantes en general y a cada estudiante en particular como objetivo de aprendizaje

UN EJEMPLO CONCRETO: LA RECTA DE EULER

Consideremos un determinado contenido matemático, *Las rectas notables del triángulo, la recta de Euler*. Este contenido, por ejemplo, empieza a estudiarse en Educación Infantil con el concepto de triángulo, continúa en Educación Primaria con los conceptos de base y altura, y finaliza en Educación Secundaria con la recta de Euler. En la Tabla 3 se muestran algunos ejemplos acerca de lo que el profesor debe saber, atendiendo a dicho contenido matemático, para cada uno de los dominios y subdominios del conocimiento profesional del profesor de Matemáticas:

Tabla 9: Ejemplos relativos al conocimiento profesional sobre La Recta de Euler

Subdominios	Ejemplos

Conocimiento matemático para la enseñanza	**Conocimiento común del contenido**	• Identificar y trazar los elementos notables como, por ejemplo, base, altura, mediana, mediatriz, bisectriz. • Las medianas dividen al triángulo en seis regiones de igual superficie. Por ello, el baricentro es el centro de gravedad del triángulo. • En cualquier triángulo, el circuncentro es el centro de la única circunferencia circunscrita, y el incentro el centro de la única circunferencia inscrita en dicho triángulo. • Baricentro, circuncentro y ortocentro están alineados y la distancia del baricentro al circuncentro es la mitad de la distancia del baricentro al ortocentro, a excepción de los triángulos equiláteros en los que los tres puntos coinciden.
	Conocimiento especializado del contenido	• Las propiedades de la recta de Euler se pueden demostrar analíticamente. A partir de las coordenadas de los vértices se calculan las ecuaciones de medianas, alturas y mediatrices y sus puntos de corte (baricentro, ortocentro y circuncentro, respectivamente), que siempre existen. La recta que pasa por baricentro y ortocentro contiene al circuncentro, por lo que los tres puntos están alineados. Mediante cálculo vectorial se concluye que la distancia del baricentro al circuncentro es la mitad de la distancia de baricentro a ortocentro.
	Conocimiento del horizonte matemático	• Los conceptos de base y altura son necesarios para construir el resto de elementos y rectas notables. El estudio de los elementos del triángulo será de utilidad cuando se aborden los elementos geométricos de las diferentes figuras considerando sus propiedades métricas. • Si el triángulo se apoya sobre su centro de gravedad, éste queda en equilibrio. De ahí sus aplicaciones en arquitectura, diseño o robótica, por ejemplo. Los robots cuadrúpedos (empleados en multitud de juguetes infantiles) son estables durante la locomoción gracias al cálculo del centro de gravedad del triángulo engendrado por los tres puntos en los que se apoya durante el movimiento. • Los triángulos se emplean en el diseño de edificios ya que proporcionan resistencia y estabilidad al distribuir la carga que se aplica sobre el vértice superior por todo el triángulo. Es el único polígono que no se deforma cuando actúa una fuerza sobre él.
Conocimiento pedagógico del contenido	**Conocimiento del contenido y del curriculum**	• Para aprender un contenido matemático siempre es importante utilizar recursos que favorezcan el aprendizaje: - Hay programas tecnológicos como, por ejemplo, Geogebra y Cabri, que ayudan a representar los elementos del triángulo y sus rectas notables.

	- La recta de Euler se puede construir con lápiz y papel (Chamoso y Rawson, 2004).
Conocimiento del contenido y la enseñanza	• En cualquier sesión de aula se debe partir de los conocimientos previos. Por ejemplo, los conceptos de base y altura deben recordarse, e identificarse, antes de comenzar con la construcción de los elementos restantes. • La Teoría de Van Hiele es útil en el estudio de la Geometría en general y del triángulo, en particular. Permite seleccionar y secuenciar el tipo de actividades que van a emplearse, así como valorar el conocimiento geométrico de los estudiantes. • Cualquier sesión de aula debe llevar asociada un instrumento de evaluación que permita valorar si su objetivo se ha cumplido.
Conocimiento del contenido y los estudiantes	Los alumnos pueden tener dificultades para (Reyes y Rodríguez, 2014): • Trazar las mediatrices y alturas en triángulos obtusángulos y rectángulos. • Trazar rectas notables exteriores al triángulo (suelen suponer que todas son interiores). • Calcular todas las alturas del triángulo (suelen suponer que sólo hay una).

Análogamente, en la Tabla 4 se muestran algunos ejemplos relativos a la práctica de aula atendiendo al contenido matemático *Las rectas notables del triángulo, la recta de Euler*:

Tabla 10: Ejemplos por categoría de práctica de aula relativa La Recta de Euler

Subcategorías		Ejemplos
Metas educativas		1. Que los alumnos sepan diferenciar los conceptos mediana, mediatriz y altura y construyan las rectas notables hasta llegar a la recta de Euler. 2. Que los alumnos construyan el conocimiento relativo a la recta de Euler ganando autonomía a medida que avanza el proceso de enseñanza, confíen en sus posibilidades y aprendan a trabajar de forma cooperativa. 3. Que los alumnos identifiquen la presencia de triángulos y sus elementos en objetos de su entorno.
Énfasis instruccional	**Atendiendo al estudiante**	1. Confiar en las posibilidades del estudiante. Para ello, el profesor puede dar indicaciones generales en gran grupo pero con la idea de que cada estudiante trabaje a su ritmo de forma autónoma.

		2. Las dudas o dificultades pueden resolverse entre los estudiantes o consultando el libro o internet, aunque se debe estar atento ante una duda general, que puede resolverse en gran grupo.
	Atendiendo a los elementos de enseñanza	1. Construir los conceptos fundamentales de geometría elemental plana hasta llegar a la recta de Euler con papel, Geogebra u otros. 2. Algunos conceptos, como el de base y altura, deberían ser conocidos por los estudiantes por haberlos tratado en cursos previos, aunque ello no impide que se recuerden de nuevo. 3. La entrega individual de la construcción de la recta de Euler puede ser una forma de evaluación de la sesión (hasta que sea adecuada, aunque sea entregada en una sesión posterior). 4. La construcción de la recta de Euler a partir del triángulo permitiría reflexionar que se puede trabajar de manera similar partiendo del cuadrilátero o círculo en lugar del triángulo.
Relación pedagógica entre profesor y estudiantes		1. Conceder confianza a las posibilidades de los estudiantes y respetar los diferentes ritmos de aprendizaje que pueden darse al construir el conocimiento relativo a la recta de Euler. 2. Permanecer atento a las dificultades con las que se pueden encontrar los alumnos y, especialmente, a los aspectos relacionados con el contenido matemático en que la literatura refleja que los alumnos pueden tener dificultades.

ALGUNAS POSIBILIDADES DE DESARROLLO EN EL AULA

A partir de lo anterior, se muestra una posibilidad para llevar el contenido *Las rectas notables del triángulo, la recta de Euler*, como objetivo de aprendizaje, al aula de Secundaria (basado en Chamoso y Rawson, 2004). Toda la explicación la realiza el profesor a partir de la construcción personal en gran grupo, en concreto, a partir de la manipulación de un folio de papel que se entiende infinito y que sería un plano. A partir de él y mediante dobleces se construyen los diferentes conceptos geométricos como, por ejemplo, recta, segmento, mediatriz, ángulo, bisectriz, triángulo, tipos de triángulos, baricentro, circuncentro, ortocentro, incentro y recta de Euler. Dicha propuesta se concreta en las categorías relativas a la práctica de aula de la siguiente forma:

Metas educativas:

- Que los alumnos construyan el conocimiento relativo a la Recta de Euler usando papel, con autonomía, confiando en sus posibilidades y cooperando con los compañeros.

Énfasis instruccional, *atendiendo al estudiante*:

- El profesor concede confianza a las posibilidades de los estudiantes, que trabajan en grupos de dos personas, aunque pueden estar en contacto con otros compañeros. Cada estudiante construye individualmente la recta de Euler con papel, a su ritmo.
- Las dudas o dificultades se deben resolver entre los estudiantes o consultando el libro o internet aunque se debe estar atento ante una duda general, que puede resolverse en gran grupo.

Énfasis instruccional, *atendiendo a los elementos de enseñanza*:

- El profesor recuerda que algunos conceptos deberían ser conocidos por los estudiantes por haberse tratado en cursos previos, aunque ello no impide que los recuerde de nuevo construyéndolos con papel, quizás de una forma diferente a como lo trabajaron.
- Como recursos, únicamente folios de papel reciclado que el profesor distribuye adecuadamente en diversos lugares de aula para que los estudiantes puedan usarlos cuando los necesiten.
- La forma de evaluación de la sesión consiste en la entrega individual de la construcción de la recta de Euler (en caso de que no sea adecuada deberá hacerlo de nuevo; si no es posible completarla en la sesión de aula, deberá entregarla al día siguiente).
- Finalmente puede reflexionar sobre cómo podría hacerse si en vez de considerar triángulos se hiciese con cuadriláteros o círculos o de otra forma.

Relación pedagógica entre profesor y estudiantes:

- El profesor debe tener en cuenta los aspectos relacionados con el contenido matemático en los que los alumnos pueden tener dificultades reflejados en la literatura.

Ese planteamiento se ha experimentado en Educación Secundaria con el objetivo de mostrar a los estudiantes cómo una hoja de papel es suficiente para construir un contenido que a los estudiantes les parecía complejo, basándose principalmente en el trabajo en grupos y en el que el trabajo del profesor consistió principalmente en una organización cuidadosa de la sesión que incluía la explicación de elementos clave pero sin apenas resolver dudas ante las dificultades que surgían que, en la mayor parte de los casos, se resolvían con la confianza de los estudiantes en sus posibilidades y, en ocasiones, con el apoyo de los compañeros.

No hay que olvidar que esa práctica de aula, con el mismo conocimiento profesional, podría desarrollarse de forma similar utilizando, por ejemplo, el programa Geogebra o de otras maneras.

ALGUNAS REFLEXIONES

A partir de un contenido matemático determinado, en este caso *Rectas notables del triángulo, la recta de Euler*, se han organizado ejemplos referidos a los distintos dominios de conocimiento profesional (a partir del sistema de categorías de Ball et al., 2008) y a las categorías relacionados con la práctica de aula (a partir de una adaptación del sistema de categorías de Lamote y Engels, 2010). Los ejemplos que se proporcionan permiten reflexionar sobre qué significa la profesión docente y la cantidad de aspectos que involucra en diferentes sentidos, y aporta una visión global que puede resultar de utilidad a los docentes, en general, y a los docentes en formación, en particular. Hay que reconocer que estos ejemplos son solamente algunas posibilidades porque sería imposible considerarlos todos. Constantemente surgen nuevas metodologías, nuevos instrumentos o nuevas ideas de aplicación de contenido matemático, por ejemplo, que hacen que puedan considerarse nuevas posibilidades en cualquier momento.

Los ejemplos que se proporcionan pueden ayudar a esclarecer la diferencia entre el Conocimiento del profesor y la Práctica de aula, lo cual no es tan obvio como pudiera parecer. La necesidad de ejemplificar cada uno de ellos ha generado ciertas dificultades que se han resuelto mediante un proceso de reflexión que ha permitido tomar consciencia de la necesidad de precisar a qué hace referencia cada uno de ellos, cómo se relacionan y, sobre todo, qué elementos son propios de cada caso. Dicha diferenciación debe perfilarse en estudios posteriores.

Estos ejemplos pueden, también, ayudar a clarificar, en un caso concreto, qué significan las categorías teóricas que la literatura considera, lo cual no siempre es sencillo. Una de esas dificultades surge, por ejemplo, al diferenciar el Conocimiento Común del Contenido y el Conocimiento Especializado del

Contenido. Avanzar en el conocimiento y la distinción de las diferentes categorías también puede resultar interesante desde el punto de vista de la formación de docentes dado que permite incidir en el conocimiento que es específico de un profesor de Matemáticas.

El trabajo que se presenta podría utilizarse como instrumento de reflexión para formación de docentes de Matemáticas de Secundaria para abordar el estudio del Conocimiento del profesor. En muchos casos, los futuros docentes no son plenamente conscientes de qué implica ser profesor de Matemáticas y de los múltiples aspectos que involucra, y este trabajo puede ayudar a ello. El objetivo podría ser mostrar aspectos que se consideran importantes para ser profesor de Matemáticas de Secundaria desde el punto de vista del conocimiento profesional y la práctica docente, a partir del contenido *Rectas notables del triángulo, la recta de Euler*. En concreto, previamente los alumnos, en grupos de 2 personas, prepararían el diseño de la planificación del contenido *Rectas notables del triángulo, recta de Euler* para impartir en un aula de Secundaria (entrega por escrito). La planificación de la sesión formativa sería: 1) Cada grupo presenta su trabajo en el aula (unos 5-10 minutos por grupo). 2) Parte formativa: Se explicará qué es el conocimiento profesional y su relación con la práctica de aula y se ejemplificarán sus categorías con el contenido *Rectas notables del triángulo, recta de Euler*. 3) Discusión conjunta en el que se confrontarán ideas y que servirá para comentar las carencias de cada trabajo y sugerencias de mejora. 4) Reflexión sobre el desarrollo de la sesión. Posteriormente, en el plazo de una semana, cada grupo deberá mejorar el trabajo considerando la formación recibida y entregarlo de nuevo por escrito.

Este estudio también podría realizarse con otros contenidos matemáticos y en diferentes niveles de Educación Infantil, Primaria o Secundaria. Ello permitiría depurar, clarificar y profundizar en las categorías consideradas y diferenciarlas en distintos niveles educativos. Otra posibilidad sería hacer un estudio similar considerando otros aspectos fundamentales para ser profesor de Matemáticas como, por ejemplo, los relacionados con la motivación.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo desarrollado al amparo de RED8-Educación matemática y formación de profesores (EDU2016-81994-REDT), Proyecto(2017/00111/001) de la Universidad de Salamanca, Proyecto Erasmus+ Unión Europea (2017-1-ES01-KA203-038491), Proyecto Ministerio de Economía y Competitividad España (PSI2015-66802-P).

Referencias.

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Buforn, À., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). El papel del conocimiento de Matemáticas en la identificación de la comprensión de los estudiantes: el significado de razón. Comunicación presentada en el XIV CIAEM, Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México. Mayo. Pere Ivars.

Carrillo, J. Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M.A. Mariotti (Eds.). Proceedings of the CERME 8. Middle East Technical Universitiy, Ankara, Turquía: ERME. pp. 2985-2994.

Chamoso, J. y Rawson, W. (2004): *Contando la Geometría.* Colección Diálogos de Matemáticas. Madrid: Nivola.

Lamote, C., y Engels, N. (2010): The development of student teachers' professional identity. *European Journal of Teacher Education, 33*(1), 3-18.

Muñoz-Catalán, M.C., Contreras, L.C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M.A. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de Matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 18*, 3, 589–605.

Shulman, L. S. (1986). Thosewho Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Reyes, L. E. y Rodríguez, F. M. (2014). Desarrollo conceptual de las rectas y puntos notables del triángulo en libros de texto de nivel básico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 543-551). Salamanca: SEIEM.

Sosa, L. y Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en Bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 569-580). Lleida: SEIEM.

Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de Álgebra Lineal. *Educación matemática*, 28(2), 151-174.

Para hacer referencia al artículo:

Salomón, Mª S.; Chamoso, J.Mª; Diego, J.M.; Rodríguez, Mª M. ; Sánchez, B. ; Cáceres, MªJ. y González, Mª.T (2018). Conocimiento Profesional y Práctica de aula del profesor de Matemáticas: la recta de Euler. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 230-238). Lugar: Universidad de León

EVALUACIÓN DE MATEMÁTICAS EN TÍTULOS DE GRADO EN INGENIERÍA

Mercedes Rodríguez Sánchez[a], Beatriz Sánchez Barbero[a], María Jesús Santos Sánchez[b], Ascensión Hernández Encinas[c], Araceli Queiruga Dios[c]

[a]Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, [b]Departamento de Física Aplicada, [c]Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Salamanca

Resumen

En los últimos años la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en Ingeniería, así como la evaluación de las competencias de Matemáticas que un ingeniero necesitará en su futuro profesional, ha cobrado gran importancia. Las destrezas y herramientas matemáticas que utilizará un ingeniero son diferentes a las de un matemático, puesto que la forma en la que cada uno desarrollará su carrera será también diferente, por eso debe ser distinta la forma de aprenderlas.

En este estudio detallamos las actuaciones que estamos llevando a cabo para llegar a un consenso en la forma de evaluar las competencias de Matemáticas en educación superior para los Grados en Ingeniería.

Palabras clave: evaluación, competencias matemáticas, Ingeniería.

INTRODUCCIÓN

En 2017 un grupo de profesores de Matemáticas de la Universidad de Salamanca y de otras 7 universidades europeas nos planteamos desarrollar del proyecto Erasmus+, Rules_Math (*New rules for assessing mathematical competencies*). Analizamos las dificultades que se encuentran los futuros ingenieros en las asignaturas de Matemáticas y tratamos de establecer un sistema de evaluación de las competencias matemáticas que adquiere un estudiante cuando cursa asignaturas de Matemáticas. El Acuerdo de Bolonia (EHEA, 2010) y los cambios en las titulaciones en educación superior han traído consigo una modificación profunda del sistema educativo universitario. Aunque el concepto de competencia matemática ya se había definido con anterioridad y ya se estaba utilizando, fueron los cambios hacia un espacio común europeo lo que nos hizo centrarnos más en las competencias que en los contenidos.

El Álgebra, Cálculo, Estadística o los Métodos Numéricos en ingeniería son las herramientas que un ingeniero utiliza para resolver problemas de mecánica, de electricidad, de electrónica, etc. Proponemos a los estudiantes que aprendan a pensar y razonar matemáticamente, a plantear y resolver problemas matemáticos, a modelar matemáticamente, a representar entidades matemáticas, manejando símbolos y formalismos matemáticos, a comunicarse en, con y sobre Matemáticas y a utilizar el material y herramientas necesarias. La adquisición de estas 8 competencias garantiza que el estudiante estará preparado para utilizar las Matemáticas en su entorno de trabajo profesional.

Además de una metodología basada en competencias, estamos desarrollando actividades y métodos que nos permitan evaluar las competencias matemáticas. Hasta ahora, la forma más común de evaluar es realizando un examen escrito al final del curso, sin que los estudiantes puedan consultar documentación durante los mismos. Menos común es el examen escrito permitiendo la consulta de libros o utilizando el ordenador, aunque también este método se utiliza. La duración de los exámenes escritos varía dependiendo de la asignatura, de la universidad y también del profesor que la imparte, pudiendo ser de 1 o 2 horas hasta 4 o 5. En general, consideramos en nuestro grupo de trabajo, que un examen escrito no permite evaluar todo el conocimiento del estudiante, aunque sí una buena parte.

Lo interesante es complementar este sistema con otras actividades, como pueden ser las pruebas orales (Alpers, 2013), la realización de trabajos en grupo, utilización de software matemático, etc., que permitan verificar de forma más precisa la adquisición de competencias.

COMPETENCIAS DE MATEMÁTICAS EN INGENIERÍA

En niveles educativos inferiores, se propuso el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (*Programme for International Student Assessment*, PISA) para establecer en qué medida los jóvenes de 15 años, al finalizar la escolarización obligatoria, están preparados para satisfacer los desafíos de la sociedad actual. Una de las finalidades principales de esta evaluación PISA/OCDE es establecer indicadores de calidad con los que expresar cómo preparan a los estudiantes los sistemas educativos para que puedan desempeñar un papel como ciudadanos activos (Rico, 2007).

La calidad de un programa de formación viene dada por la relevancia de las competencias que se propone alcanzar, mientras que su eficacia responde al modo en que estas se logran a medio y largo plazo. Para el estudio PISA, la competencia matemática se define como "*la capacidad de un individuo de formular, emplear e interpretar las Matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y usar los conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir los fenómenos*" (OECD, 2004). La competencia matemática que utilizamos en el contexto de los estudios de ingeniería es la utilizada en el proyecto PISA e incluida también en el proyecto danés KOM sobre competencias y aprendizaje de matemáticas (Niss, 2003).

Las competencias matemáticas detalladas en el proyecto KOM como una flor de competencias (ver Figura 1) se pueden especificar de la siguiente forma (Alpers, 2013; Niss, 2015):

- **Pensar matemáticamente**: está relacionada con el conocimiento del tipo de preguntas que se tratan en Matemáticas y los tipos de respuestas que las Matemáticas pueden o no proporcionar y también con la capacidad de plantear tales preguntas. Incluye además el reconocimiento de conceptos matemáticos y una comprensión de su alcance y limitaciones, así como la extensión de dicho alcance por abstracción y generalización de resultados. Esto también incluye una comprensión de la certeza que las consideraciones matemáticas pueden proporcionar.

- **Razonar matemáticamente**: incluye la capacidad de comprender y evaluar una argumentación matemática ya existente (cadena de argumentos lógicos), en particular para entender qué es una demostración y reconocer las ideas centrales en una demostración. También incluye el conocimiento y la capacidad de distinguir entre diferentes tipos de enunciados matemáticos (definición, instrucción if-then, sentencias iff, etc.), y la construcción de cadenas de argumentos lógicos y por tanto, la transformación del razonamiento heurístico en pruebas propias (razonamiento lógico).

- **Planteamiento y solución de problemas matemáticos**: comprende, por un lado, la capacidad de identificar y especificar problemas matemáticos y por otro la capacidad de resolverlos (incluyendo el conocimiento de los algoritmos adecuados).

- **Modelando matemáticamente**: tiene esencialmente dos componentes: la capacidad de analizar y trabajar con modelos existentes (encontrar propiedades, investigar rango y validez, relacionarse con la realidad modelada) y la capacidad de "realizar modelado activo" (estructurar la parte de la realidad que es de interés, establecer un modelo matemático y transformar las cuestiones de interés en preguntas matemáticas, responder a las preguntas matemáticamente, interpretar los resultados reales e investigar la validez del modelo, monitorizar y controlar todo el proceso de modelado).

- **Representación de entidades matemáticas**: incluye la capacidad de comprender y utilizar representaciones matemáticas (ya sean simbólicas, numéricas, gráficas y visuales, verbales, materiales, etc.) y conocer sus relaciones, ventajas y limitaciones. También incluye la posibilidad de elegir y cambiar entre una u otra representación basándose en este conocimiento.

- **Manejo de símbolos y formalismos matemáticos**: se refiere a la habilidad de entender el lenguaje simbólico y formal de las Matemáticas y su relación con el lenguaje natural, así como la traducción entre ambos. También incluye las reglas de los sistemas formales matemáticos y la capacidad de utilizar y manipular enunciados simbólicos y expresiones de acuerdo con las reglas.
- **Comunicarse en, con y sobre Matemáticas**: se trata de la capacidad de comprender las expresiones y enunciados matemáticos (de forma oral o escrita), realizados por otros y también la capacidad de expresarse uno mismo matemáticamente de diferentes formas.
- **Uso de recursos y herramientas**: incluye conocimientos sobre los recursos y herramientas que están disponibles, así como su potencial y limitaciones. Además, incluye la capacidad de utilizarlos de manera cuidadosa y eficiente.

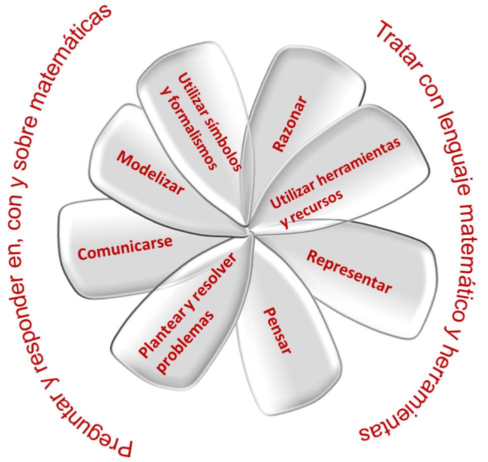


Figura 1: Flor de competencias del proyecto KOM.

LA ASOCIACIÓN EUROPEA DE EDUCACIÓN EN INGENIERÍA (SEFI)

SEFI (https://www.sefi.be/) es la mayor red de instituciones y profesores de educación superior en ingeniería de Europa. Es una organización sin ánimo de lucro (asociación científica) creada en 1973 para contribuir al desarrollo y mejora de la educación superior en Ingeniería en Europa (HEE por sus siglas en inglés), para fortalecer la posición de los profesionales de Ingeniería en la sociedad, promover la información sobre HEE y mejorar la comunicación entre profesores, investigadores y estudiantes, fortalecer la cooperación universitaria y fomentar la dimensión europea en la educación superior en Ingeniería.

La SEFI ha establecido grupos de trabajo para afrontar los diferentes aspectos de la educación en ingeniería: Física, Matemáticas, educación abierta y online, sostenibilidad, aseguramiento de la calidad y acreditación, investigación en la educación en Ingeniería, ética, etc.

El grupo de trabajo de Matemáticas (MWG, *Mathematics Working Group*) se estableció en 1982. Las Matemáticas están en el centro de la Ingeniería, sirviendo tanto para expresar ideas como para la comunicación de resultados. Un programa efectivo de estudio en Matemáticas para todos los estudiantes de Ingeniería es un requisito necesario para la formación de graduados en Ingeniería cualificados. La finalidad del MWG de la SEFI es proporcionar un foro de discusión y orientación para todo aquel que esté interesado en la educación de Matemáticas en Ingeniería en Europa.

Una contribución importante de este grupo, en 2012 y dentro del seminario bianual del MWG, en Salamanca (16th SEFI-MWG *Seminar on Mathematical Education of Engineers*), fue la presentación de un estudio exhaustivo de las competencias de Matemáticas en Ingeniería (Alpers, 2013). Este documento presenta un marco de lo que podría ser el currículo de las Matemáticas para Ingeniería, no tanto el currículo entendido como una enumeración de contenidos, conceptos y resultados, sino un currículo que incluye lo que denominamos salidas de aprendizaje. El documento marco proporciona un esquema que incluye, de forma sistemática, aquellas metas de aprendizaje en educación superior, basadas en la situación actual de la investigación educativa. Para ello se adoptó el concepto de competencia desarrollado en Dinamarca y más tarde adoptado en el estudio PISA/OCDE. Esto va en línea con las tendencias actuales de la educación en Ingeniería en general, donde la noción de competencia se utiliza para describir actividades educativas.

La estructura propuesta en el documento *Framework* se divide en 4 niveles: una parte central o nivel básico cero (*core zero*) de material esencial para todos los graduados en Ingeniería, que se asume que se ha adquirido en cursos anteriores a la universidad. El nivel básico 1 (*core Level 1*) abarca temas necesarios para todos los cursos de Ciencias e Ingeniería y que están incluidos en el currículo de los primeros cursos de los grados en Ingeniería. Los niveles 2 y 3 comprenden otros temas más especializados y específicos que no se imparten en todas las titulaciones de grado en Ingeniería.

PROYECTO RULES_MATH

En marzo de 2017, un equipo multidisciplinar de la Universidad de Salamanca, formado por profesores de Matemática Aplicada, Física Aplicada, Ingeniería Química y Textil y de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, junto con profesores de la Universidad Eslovaca de Tecnología de Bratislava (Eslovaquia), la Universidad de Gazi (Turquía), la Universidad Técnica Checa en Praga (República Checa), la Universidad Paisii Hilendarski de Plovdiv (Bulgaria), el Consejo Superior de Investigaciones Científicas (España), el Instituto Superior de Ingeniería de Coímbra (Portugal), el Instituto de Tecnología de Dublín (Irlanda) y la Universidad Civil de Ingeniería en Bucarest (Rumanía), presentamos la propuesta RULES_MATH – "*New Rules for assessing Mathematical Competencies*", en la convocatoria de Erasmus+, dentro de la Acción clave 2, de cooperación para la innovación e intercambio de buenas prácticas, de Asociaciones Estratégicas en educación superior. La resolución publicada en julio de ese mismo año resultó favorable, para desarrollar el proyecto entre el 1 de septiembre de 2017 y el 31 de agosto de 2020.

La idea básica del proyecto RULES_MATH (https://rules-math.com/), es desarrollar estándares de evaluación para un sistema de enseñanza-aprendizaje de Matemáticas en Ingeniería, basado en competencias y que opere a nivel transnacional.

Los objetivos de este proyecto se resumen en estos tres:

1. Desarrollar un modelo accesible de evaluación basada en competencias para Matemáticas en grados de Ingeniería.
2. Elaborar y recopilar recursos y materiales necesarios para diseñar cursos de evaluación basados en competencias.
3. Difundir el modelo propuesto a las instituciones de educación superior europeas, a través de los socios colaboradores y en toda Europa.

El principal resultado de este proyecto será el cambio de paradigma educativo y la obtención de un sistema europeo de enseñanza y aprendizaje común que se base en competencias en lugar de contenidos. Eso es lo que el proyecto RULES_MATH quiere lograr: nuevos estándares (consensuados) de evaluación de las competencias de Matemáticas en cursos de Ingeniería.

Las Matemáticas son una parte esencial de cualquier título de Ingeniería y son una herramienta que los ingenieros usan a lo largo de su vida. Es importante que tanto este conocimiento como las competencias estén debidamente establecidos.

EVALUACIÓN DE COMPETENCIAS MATEMÁTICAS

Con los nuevos títulos de grado, consecuencia del acuerdo de Bolonia, desde el curso 2010-2011, se modificaron las metodologías docentes y también, en muchos casos, los criterios e instrumentos de evaluación. El nuevo proceso de evaluación tiene en cuenta el trabajo realizado por el estudiante durante todo el curso: la realización de ejercicios, de prácticas dirigidas, exposición de trabajos propuestos, también la realización de exámenes y la participación en las diferentes actividades que se propongan.

En la mayoría de asignaturas se establece un porcentaje en la aportación de cada actividad de evaluación a la nota final, así por ejemplo, en las asignaturas de Álgebra Lineal y Cálculo del grado en Ingeniería Mecánica, en Ingeniería Electrónica y Automática y en Ingeniería Eléctrica utilizamos un baremo que establece que la entrega de problemas propuestos y resueltos individualmente, junto con las prácticas realizadas con el ordenador tiene un peso del 20% y el examen final escrito del 80%. En el caso de Estadística en las mismas titulaciones y de Métodos Numéricos en Ingeniería Química, esa ponderación es un 30 y 70% respectivamente.

Las competencias matemáticas se desarrollan en las asignaturas de Matemáticas, pero la mayoría de esas competencias también se trabajan cuando se estudian otras asignaturas de la titulación que no son las Matemáticas. Por ejemplo, la competencia de modelar matemáticamente se puede mejorar en cualquier asignatura cuando se utilizan modelos matemáticos, como un sistema de ecuaciones lineales para el caso de los circuitos eléctricos o el balanceo en sistemas químicos, o la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias en el caso de querer obtener los modos de vibración de un edificio.

Para la evaluación de competencias proponemos seguir utilizando los exámenes escritos, con cuestiones y problemas más aplicados. A partir de las salidas de aprendizaje propuestas en el documento *Framework* y las 8 competencias estableceremos un sistema de evaluación detallado con actividades específicas.

Durante el curso 2018-2019 hemos propuesto a un grupo de estudiantes de Ingeniería Química la participación activa en clase, trabajando en grupos y resolviendo problemas de Física, Química o de distribución del tráfico entre varias calles (ver Figura 2).

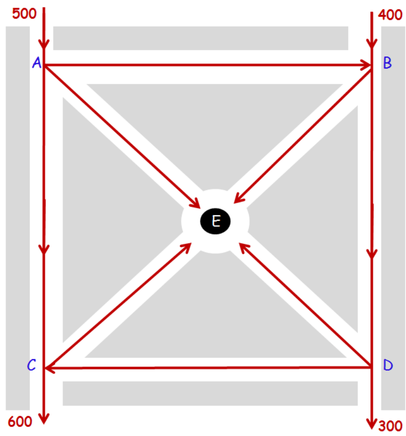


Figura 2: Ejemplo de un problema de distribución del tráfico en una red de calles (Villa Cuenca, 1994).

La evaluación propuesta para este curso concreto de Métodos Numéricos de 2º curso del Grado en Ingeniería Química son las siguientes:

- Examen final escrito: 70%.
- Cuestionarios en la plataforma online (1 solo intento y con tiempo limitado): 5%.
- Prácticas de ordenador (utilizando el programa Mathematica): 10%.
- Ejercicios propuestos y trabajos en grupo: 15%.

En cada una de las actividades de evaluación propuestas evaluamos las competencias que adquiere el estudiante. Así por ejemplo, el caso del problema de la distribución de tráfico se planteó como ejercicio para entregar resuelto individualmente. Cuando un estudiante se enfrenta a este problema debe razonar matemáticamente para representar el sistema de ecuaciones lineales (SEL) en forma matricial y también modelar matemáticamente. Si entiende cómo el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz aumentada se puede utilizar para analizar la solución, entonces están razonando matemáticamente. De esta forma establecemos la tabla dada en la Figura 3, que incluye el listado de salidas de aprendizaje (en este caso para Álgebra Lineal y solución de SEL) y también las 8 competencias. Se mide el grado en que estas competencias aparecen en las salidas de aprendizaje con la valoración +: mucho, o: medio, -: poco.

		1	2	3	4	5	6	7	8
LA	**Linear Algebra**								
LA4	4. Solution of simultaneous linear equations								
LA41	Represent a system of linear equations in matrix form	+	o	+	+	+	+	-	-
LA42	Understand how the general solution of an inhomogeneous linear system of *m* equations in *n* unknowns is obtained from the solution of the homogeneous system and a particular solution								
LA43	Recognise the different possibilities for the solution of a system of linear equations								
LA44	Give a geometrical interpretation of the solution of a system of linear equations								
LA45	Understand how and why the rank of the coefficient matrix and the augmented matrix of a linear system can be used to analyse its solution	+	+	+	-	o	+	o	-
LA46	Use the inverse matrix to find the solution of 3 simultaneous linear equations when possible								
LA47	Understand the term 'ill-conditioned'								
LA48	Apply the Gauss elimination method and recognise when it fails								
LA49	Understand the Gauss-Jordan variation								
LA50	Use appropriate software to solve simultaneous linear equations	o	+	-	o	+	o	-	+
LA50	5. Least squares curve fitting								
LA51	Define the least squares criterion for fitting a straight line to a set of data points								
LA52	Understand how and why the criterion is satisfied by the solution of AT A x = AT b								
LA53	Understand the effect of outliers								
LA54	Modify the method to deal with polynomial models								
LA55	Use appropriate software to fit a straight line to a set of data points								

Figura 3: Salidas de aprendizaje relacionadas con la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

CONCLUSIONES

En los últimos años varios profesores de escuelas y facultades de Ingeniería estamos desarrollando actividades de evaluación de competencias de Matemáticas. La evaluación de competencias en lugar de contenidos en los grados de ingeniería permite que el sistema de aprendizaje sea más acorde a la futura labor profesional que desarrollarán los estudiantes.

La evaluación en competencias mejora el entendimiento de las Matemáticas y la apreciación y motivación que los estudiantes tienen en las asignaturas de Matemáticas. La colaboración de profesores de varias universidades europeas en la puesta en marcha de un sistema de evaluación basado en competencias nos permite plantear una meta común y definir un nuevo sistema de evaluación.

En este estudio mostramos algunas de las actividades que estamos proponiendo a nuestros estudiantes durante el curso 2018-2019 y de las que aún no tenemos resultados definitivos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado dentro del proyecto del programa ERASMUS+ de la Unión Europea, 2017-1-ESO1-KA203-038491 (Rules_Math).

Referencias Bibliográficas:

Alpers, B. et al (2013). A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education, SEFI. Available at: http://sefi.htw-aalen.de/

EHEA (2010). European Higher Education Area Website 2010-2020. Available at: http://www.ehea.info. 2017.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of Mathematics: The Danish KOM project. *In 3rd Mediterranean conference on mathematical education*, 115-124.

Niss, M. (2015). *Mathematical competencies and PISA*. In Assessing mathematical literacy, 35-55. Springer, Cham.

OECD (2004). PISA Learning for Tomorrow's World: First Results from PISA 2003. Simon and Schuster, 659.

Queiruga-Dios, A., Sánchez, M.J.S., Pérez, J.J.B., Martín-Vaquero, J., Encinas, A.H., Gocheva-Ilieva, S., Dias Rasteiro, D., Caridade, C., Demlova, M., Gayoso-Martínez, V. (2018). Evaluating engineering competencies: A new paradigm. *In Global Engineering Education Conference (EDUCON), IEEE Library,* 2052-2055.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. En: *PNA* 1(2), 47-66.

Villa Cuenca, A. (1994). *Problemas de Álgebra con esquemas teóricos*. Ed. ClagSA.

Para hacer referencia al artículo:

Rodríguez, M.; Sánchez, B.; Santos, Mª J.; Hernández, A. y Queiruga, A. (2018). Evaluación de Matemáticas en Títulos de Grado en Ingeniería. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 239-245). Lugar: Universidad de León

DEL PAPEL A LAS *APPS* (…PASANDO POR *YOUTUBE*)

Carlos Pérez Villayandre[a]

[a]I.E.S. Padre Isla (Léon)

Resumen

La sociedad digital afecta a todos los ámbitos y, por ende, a las Matemáticas y a la forma de enseñarlas. En este contexto, el objetivo de esta ponencia es presentar varias herramientas diseñadas y pensadas para que los alumnos trabajen conceptos matemáticos, en el aula, en casa,…, o donde ellos quieran. En un primer momento, la accesibilidad de plataformas como Youtube, llevó a preparar videos que ya se podían consultar fuera del aula y que funcionaron como buen complemento a las clases teórico-prácticas. Posteriormente, la gran difusión de dispositivos inteligentes, que permiten el manejo de programas sin conexión a internet y con poco consumo de recursos, fue el punto de partida de las apps objeto de esta ponencia: percatic2, para segundo de ESO; percatic3, para tercero de ESO; y percatic4.1 y percatic4.2 para cuarto de ESO; y Funciones Percatic, para los cursos 2, 3 y 4 ESO.

Palabras clave: *Matemáticas, ESO, vídeos, apps*.

INTRODUCCIÓN.

Actualmente estamos en la sociedad digital en todos los ámbitos y, por ende, en las Matemáticas y en la forma de enseñarlas. Aprovechando las posibilidades que ofrece la tecnología, el objetivo de esta ponencia es presentar varias herramientas diseñadas y pensadas para que los alumnos trabajen conceptos matemáticos, en el aula, en casa, en la playa,…, o donde ellos quieran.

La idea original partió de los bits de inteligencia, metodología que se desarrolló en papel y que resultó muy interesante. Sin embargo, no era una metodología que se pudiera llevar fuera del aula. Algún tiempo más tarde, la accesibilidad y difusión de plataformas como *Youtube*, llevó a pensar y preparar videos que ya se podían consultar fuera del aula y que funcionaron como buen complemento a las clases teórico-prácticas. De hecho, algunos de esos vídeos tuvieron mucho éxito.

Pero, sin duda, el cambio más importante ha sido el acceso del gran público a dispositivos inteligentes, como *tablets* y *smartphones*, que permiten el manejo de programas especializados en un tema, sin conexión a internet y con poco consumo de recursos: las *apps*. Y ese fue el punto de partida de las *apps* objeto de esta ponencia: *percatic2,* para segundo de ESO; *percatic3*, para tercero de ESO; *percatic4.1* y *percatic 4.2* para cuarto de ESO; y *Funciones Percatic*, para los cursos 2, 3 y 4 ESO.

Tomando como referencia lo anterior, en primer lugar, se hará referencia a los vídeos disponibles en *Youtube*, analizando su éxito o no en cuanto al número de visitas, así como la página web que da apoyo al canal. En segundo lugar, se revisarán las apps disponibles ya mencionadas, repasando algunos aspectos de su manejo básico. Los manuales que han servido de guía para los contenidos de los recursos anteriores, constituyen el apartado de referencias.

VÍDEOS DE *YOUTUBE* (CANAL *PERCATIC*) Y WEB *PERCATIC.*

Como es conocido, el funcionamiento del *Youtube* requiere el registro y administración de un canal en el que colgar los diferentes vídeos. En este caso, es el canal *percatic*, como muestra la página de presentación. El canal se creó en el año 2012 y cuenta con 34.113 visualizaciones (datos 29 octubre 2018). El acceso al mismo es sencillo, tecleando en cualquier buscador *youtube* la palabra *percatic*.

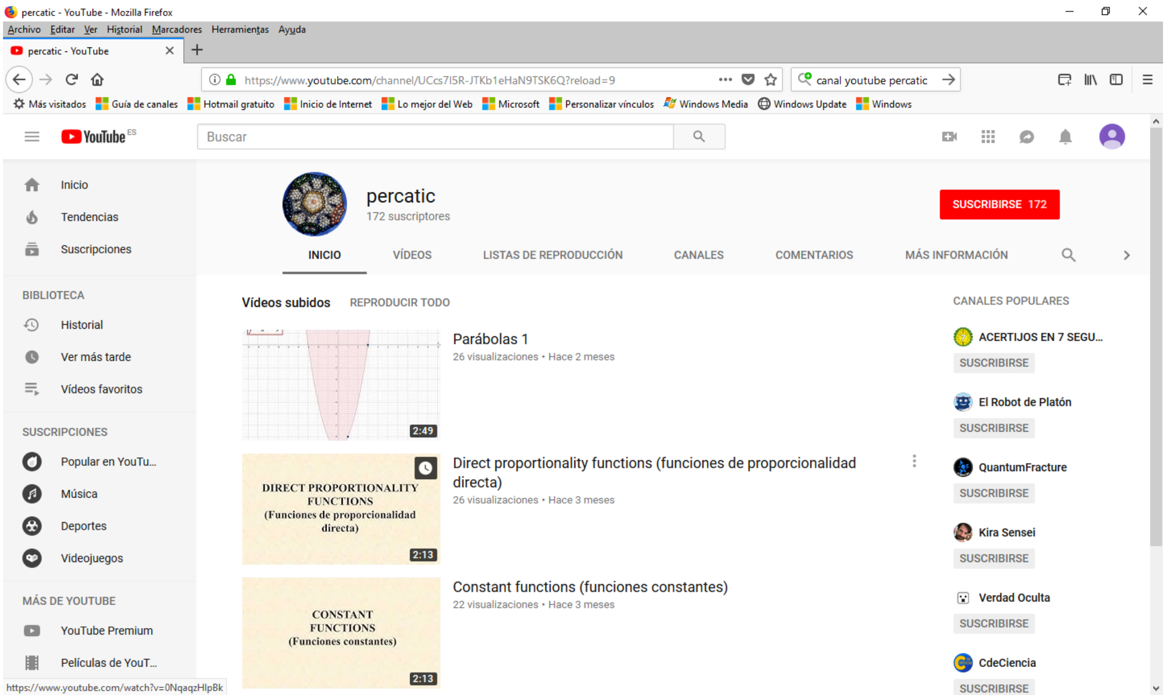


Figura 11. Página de presentación del canal *percatic*.

Como puede comprobarse en la Figura 1, la cifra de suscriptores alcanza los 172, en su mayoría de países sudamericanos, dado que los vídeos están en español. En inglés y en español hay únicamente 3 vídeos: funciones contantes, funciones de proporcionalidad directa, e interés compuesto.

Como todo recurso web, además del número de reproducciones global, resulta interesante analizar otros indicadores, como los recogidos en la Tabla 1. Como puede comprobarse, entre España, Colombia y México se concentran el 86 % de los suscriptores.

Tabla 1. País, visualizaciones, tiempo de visualización y el porcentaje medio reproducido (octubre 2018)

País	*Visualizaciones*	*Tiempo de visualización Minutos*	*Porcentaje medio reproducido*
España	179	133	36 %
Colombia	23	14	30%
México	23	13	20%

En total hay 43 vídeos disponibles, siendo los que recoge la Tabla 2 los que tienen un mayor número de reproducciones:

Tabla 12. Título del vídeo, fecha de creación y curso recomendado

	Fecha de creación	*Curso recomendado*	*Visualizaciones*

Interés compuesto capitalizable mensualmente.	29/11/2012	3º ESO	22.971
Función exponencial con exponente negativo	7/6/2017	3º- 4º ESO	4.124
Sumatorio logaritmo	22/9/2014	4º ESO - 1ºBACH	1.492
Parábola y recta	8/2/2015	4º ESO	574
Interés compuesto	23/11/2012	3º- 4º ESO	459

En el aula este recurso es muy interesante como complemento de la docencia, siendo empleado en una u otra medida según el tiempo disponible. En cualquier caso, nunca puede entenderse como un sustituto de la clase presencial. Según mi experiencia, los vídeos resultan interesantes para los alumnos no más de 5 minutos, después de los cuales el nivel de atención decae considerablemente. De hecho, pocos son los alumnos que se subscriben al canal y los visualizan desde casa (o desde su lugar de estudio) para resolver sus dudas. Cuando se insiste al alumno en el motivo de su falta de interés por el canal, la mayoría considera que los vídeos consumen muchos datos, siendo también bastante frecuente dar como respuesta la dificultad de reproducción en algunos dispositivos.

Por tanto, intentando dar una solución a esta falta de interés, surgió la idea de crear una página web. Esta página fue el paso previo a las *apps* desarrolladas. La página www.percatic.com permite el acceso de los estudiantes a diversos contenidos con un gasto menor de datos que los vídeos.

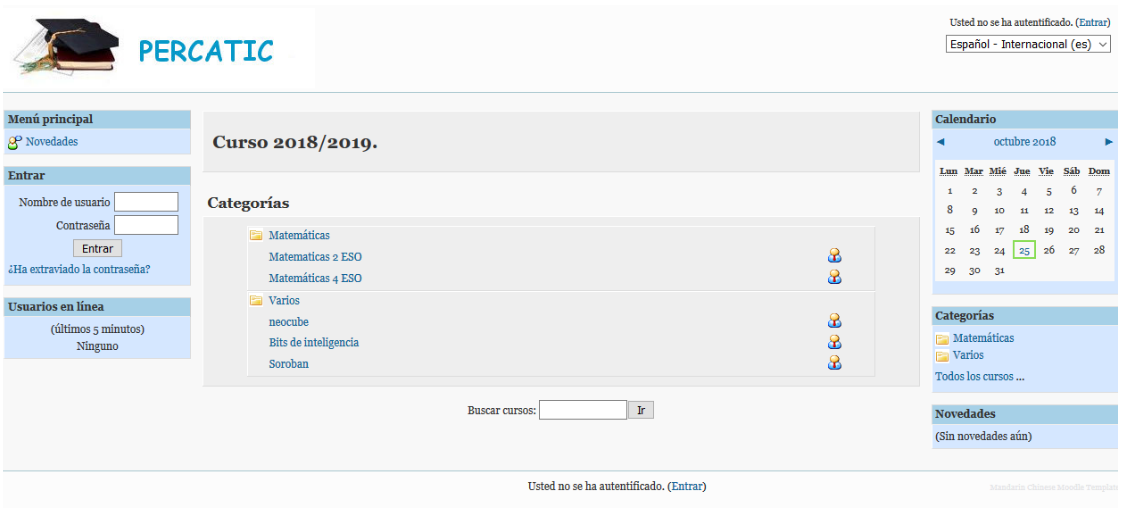


Figura 2. Aspecto de la página principal de www.percatic.com

Como puede comprobarse, además de contenidos matemáticos, también hay disponibles otros materiales. En cuanto a los primeros, se suelen actualizar periódicamente, según los cursos impartidos cada año. Por experiencia, decir que es un instrumento que permite poner a disposición del alumno materiales en tiempo real: colecciones de ejercicios, soluciones a algunos de ellos o revisión de algún concepto teórico. Sin embargo, la página web no resuelve el problema de aclarar dudas más profundas, dado que se trata de un recurso estático. Por otro lado, su acceso no es posible cuando los datos de internet no están habilitados o no hay redes *wifi*.

APPS PERCATIC

"Un dispositivo como el *iPad* o cualquier otra tableta en entorno *Android*, puede darnos las prestaciones que se requieren para un currículum que busque la mejora en la educación" (Santiago-Campión, Amo-Vilvà y Díez-Ochoa, 2014:3). Tomando como base esta idea, y la necesidad, ya mencionada, de facilitar al alumno el acceso a recursos dinámicos que permitan resolver sus dudas casi en cualquier lugar, se desarrolló la primera *app* en el año 2014. Tanto esta primera, denominada *percatic2,* como las demás están disponibles desde *Play Store.* Su descarga es rápida y gratuita.

La Tabla 3 recoge la fecha de creación y el número de descargas de todas ellas.

Tabla 3. *Apps*, año de creación y número de descargas (octubre 2018)

	Fecha de creación	*Número de Descargas*	*País y porcentaje*
percatic2	2015	222	España (69,4%)
percatic3	2015	289	España (24%)
percatic4.1	2017	61	España (24,6%)
percatic4.2	2018	11	España (36,4%)
Funciones Percatic	2018	24	España (45,8%)

La filosofía de funcionamiento de todas es la misma, siendo también el mismo su desarrollador (*ManiHome*): parten de una página principal, que permite el acceso directo a los contenidos de la *app,* a la página web **www.percatic.com**, o al canal de *Youtube* ya comentado (Figura 3).

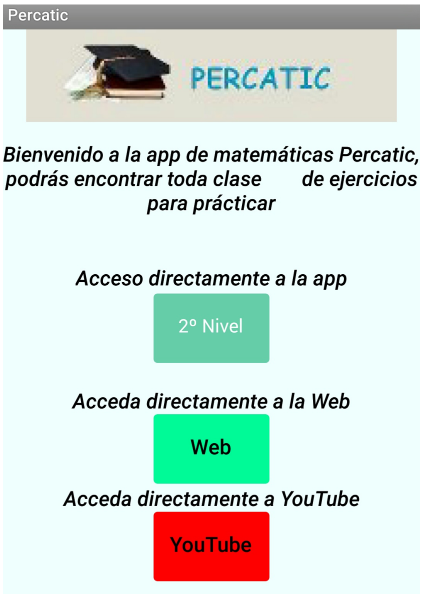


Figura 3. Ventana principal de *percatic2.*

El acceso directo a la app, permite revisar los contenidos organizados por temas (Figura 4):

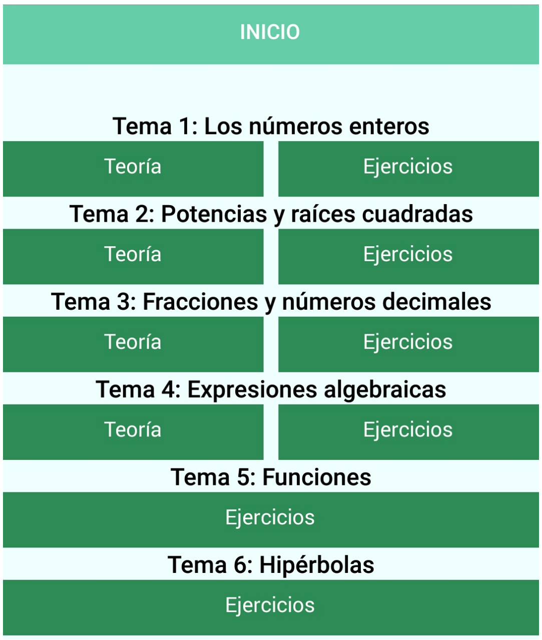


Figura 4. Ventana de acceso a contenidos de *percatic2*.

Cada tema realiza una revisión teórica breve (apartado *Teoría*) y propone al usuario unos cuantos ejercicios (apartado *Ejercicios*). Cada ejercicio se puede responder las veces deseadas, hasta llegar a la solución correcta.

percatic3 es la segunda *app* disponible. A diferencia de la anterior, *percatic3* tiene publicidad, si bien, esta publicidad no interrumpe su funcionamiento, limitándose a una franja en la parte inferior de la pantalla (Figura 5). Este elemento publicitario será eliminado o incorporado a las otras *apps* según los resultados obtenidos en *percatic3*, dado que es un ingreso extra para los desarrolladores.

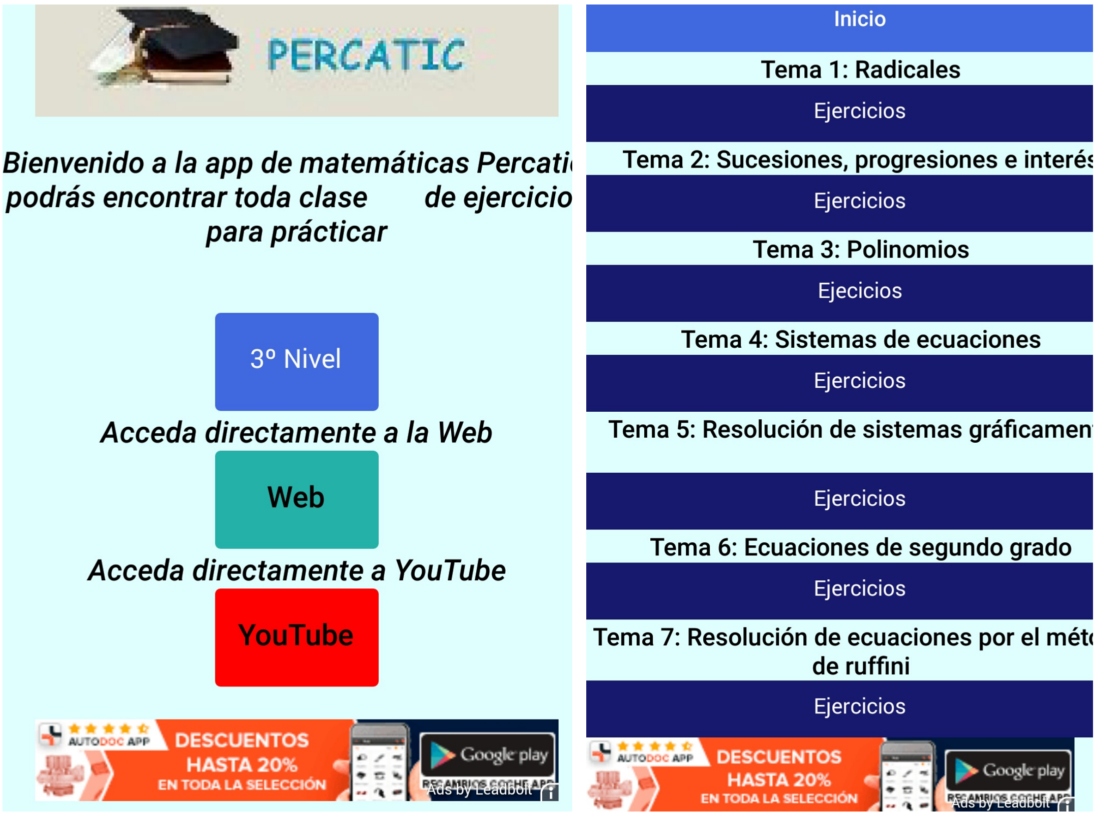


Figura 5. Ventana principal y de acceso a contenidos de *percatic3*.

Los contenidos de cuarto de la ESO se dividen en dos *apps: percatic4.1*.y *percatic4.2*. El aspecto y rasgos de funcionamiento es similar a *percatic2*, teniendo en cuenta que no tiene publicidad.

Por último, teniendo en cuenta la dificultad añadida que supone para algunos alumnos las funciones, la última *app* desarrollada se dedica a éstas: *Funciones Percatic*. La organización difiere de las anteriores: los ejercicios se organizan por temas, dedicando a cada uno un tipo de función. El último tema se dedica a un examen, con el que se pretende repasar los conceptos aprendidos. La Figura 6 muestra su aspecto.

Conviene señalar que, debido a esta reciente incorporación, su funcionamiento aún presenta alguna que otra deficiencia.

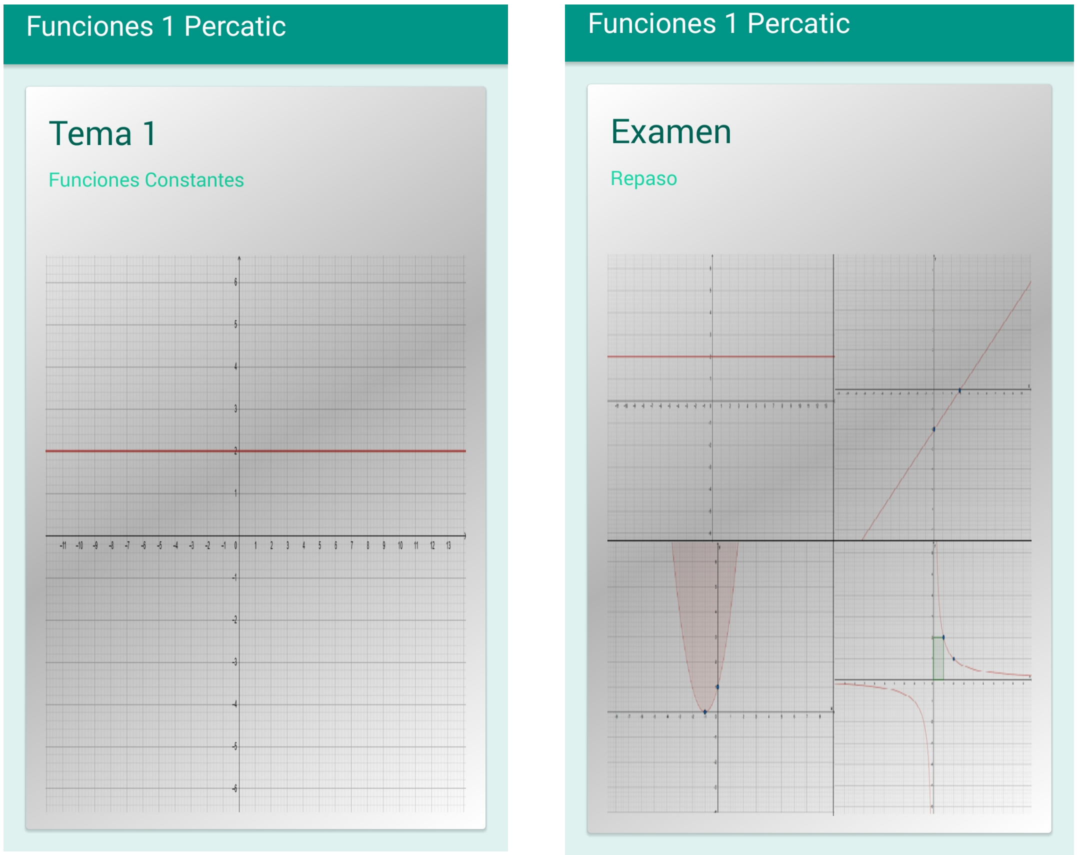


Figura 6. Ventana principal y de acceso a contenidos de *Funciones Percatic*

DESARROLLOS FUTUROS

El desarrollo de estas herramientas es un proceso dinámico, que exige su constante revisión y perfeccionamiento. Aunque ya se han ido corrigiendo ciertas erratas advertidas, a buen seguro otras quedarán sin corregir. En ese proceso han contribuido los alumnos que las han ido descargando, siendo bienvenidas cuántas correcciones sean sugeridas por los usuarios de las mismas. La dirección percatic@gmail.com

Dado que el mundo es cambiante, y mucho más el digital, el próximo paso está sin definir y no sabemos cuál será el siguiente instrumento que añada un granito de arena en el apasionante mundo de la enseñanza de las Matemáticas.

Agradecimientos.

El autor desea agradecer a la desarrolladora principal de las *apps* Dª Isabel Maniega Cuadrado, por su esfuerzo y tesón, y al revisor de las mismas D. José Manuel Peña Castro, por sus constructivos comentarios y aportaciones.

Referencias Bibliográficas.

Arias Cabezas, J.M., Maza Sáenz, I. (2012). Matemáticas 2º ESO. Madrid: Ed. Bruño.

Arias Cabezas, J.M., Maza Sáenz, I. (2012). Matemáticas 3º ESO. Madrid: Ed. Bruño.

Arias Cabezas, J.M., Maza Sáenz, I. (2012). Matemáticas 4º ESO. Madrid: Ed. Bruño.

Santiago-Campión, R., Amo-Vilvà, D. y Díez-Ochoa, A. (2014). ¿Pueden las aplicaciones educativas de los dispositivos móviles ayudar al desarrollo de las inteligencias múltiples? *EDUTEC. Revista electrónica de tecnología educativa,* 47, 1-10. DOI: https://doi.org/10.21556/edutec.2014.47.63.

Para hacer referencia al artículo:

Pérez, C. (2018). Del papel a las *apps* (…pasando por *Youtube*). En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (pp. 246-253). Lugar: Universidad de León

LAS MATEMÁTICAS EN EL ARTE SALMANTINO

Autora: Teodora Egido de La Iglesia

I.E.S. F. García Bernalt. Salamanca

Resumen

"Las Matemáticas en el Arte Salmantino" es un Proyecto de Innovación Educativa (P.I.E.) que se realizó en el I.E.S. García Bernalt de Salamanca durante el curso lectivo 2015/16. En dicho proyecto los alumnos estudiaron diversos monumentos de Salamanca y relacionaron algunos conceptos que se imparten en distintas áreas para llegar a la conclusión de que todas las materias están interrelacionadas. Fue un proyecto en el que se implicaron todos los alumnos del centro sin excepción, además de 9 departamentos didácticos. Las metodologías que se utilizaron fueron muy variadas, algunas muy manuales, como el dibujo o las medidas, y otras más tecnológicas, como el uso de programas informáticos.

***Palabras clave**: Matemáticas, Secundaria, arte, Salamanca.*

DESARROLLO

Este P.I.E. fue realizado por gran parte del profesorado del I.E.S. F. García Bernalt (25 profesores de 60 que componían el claustro) y 9 departamentos didácticos: Matemáticas, Lengua y Literatura, Geografía e Historia, Educación Plástica y Visual, Orientación, Música, Inglés, Francés y Filosofía. En dicho proyecto participó el 100% del alumnado de ESO y alumnado de, fundamentalmente, 1º de Bachillerato de la rama Científico-Técnica.

¿De dónde surgió esta idea? Fue algo casual. Después de haber participado en el programa P.R.O.M.E.C.E., descubriendo razones áureas en la escultura, nos planteamos una pregunta: "Cuando miras la Catedral de Salamanca, ¿qué ves?". Éste fue el interrogante que originó y desencadenó este proyecto. La respuesta que me proporcionaban los profesores del centro, mis compañeros de la facultad o mis alumnos en poco podían coincidir, salvo en la belleza que se puede contemplar en ese monumento. Mientras que unos describían el encanto de todos los elementos arquitectónicos, otros describían las peculiaridades históricas acontecidas durante la construcción de dicha obra, los matemáticos veían formas geométricas, razones áureas y proporcionalidad por doquier, los alumnos un edificio enorme y antiguo,…

Esta curiosidad nos llevó a plantearnos abordar un proyecto para mirar el arte que tenemos en nuestra ciudad, Salamanca, no desde una sola perspectiva, sino desde varios puntos de vista. Para desarrollar esta idea, y que los alumnos pudiesen contemplar el arte desde diversas vertientes, se desarrollaron distintas actividades desde los departamentos didácticos implicados.

Desde el departamento de Lengua se realizaron varias actividades, como por ejemplo, un libro de poesías ilustradas en las que aparecieran elementos matemáticos (números, geometría, simetrías) observados en lugares de la Plaza Mayor, ya fuera en el campanario del Ayuntamiento, en las puertas de los establecimientos, en los arcos, en los medallones, en los balcones o en las baldosas del suelo. Así, trabajaron de forma conjunta los departamentos didácticos de Matemáticas, Lengua y Educación Plástica y Visual. Otro ejemplo de actividad literaria fue la realización de un relato basado en la novela picaresca *El Lazarillo de Tormes* y la narración de leyendas de Salamanca en twits.

El departamento de Música participó realizando distintas actividades. Una de ellas consistió en estudiar las partituras de canciones tradicionales salmantinas y relacionarlas con las Matemáticas, ya que la frecuencia e intervalo entre las notas musicales se calculan matemáticamente. Otra actividad tuvo como escenario las dos catedrales de Salamanca donde se pudieron estudiar sus maravillosos órganos y, basado en ellos, los tubos por donde sale el sonido, la proporción entre ellos, la melodía que producen, la razón áurea que estos encierran y el material con el que los construyeron.

El departamento de Orientación, con sus alumnos de 3º y 4º de diversificación, participó en un curioso estudio de la iglesia de los Dominicos o iglesia de San Esteban, calculando alturas y distancias en la portada de este reconocido monumento. Las conclusiones las redactaron en un trabajo titulado *Problemas con arte*.

El departamento de Geografía e Historia realizó las fichas de salidas para las observaciones directas en la ciudad de los distintos monumentos (Plaza Mayor, Palacio de Anaya, Plaza de San Boal,….) pero también colaboró en la observación de todas estas obras de arte, como por ejemplo, en los medallones de la Plaza Mayor de Salamanca, en los que se estudiaron los personajes representados, los estilos en los que estaban realizadas estas esculturas, el contexto histórico referido a cada uno de los personajes,… así como el estudio emblemático de algunos monumentos como la Casa Lis de Salamanca.

El departamento de Matemáticas preparó distintas actividades como el estudio de figuras geométricas en los monumentos de Salamanca: fachada del Palacio de Anaya, Casa Lis, Puente Romano, Patio Chico, Palacio de Anaya, Catedrales, Plaza Mayor, Plaza de San Boal, mediante mediciones directas con distintos aparatos y con programas informáticos como Geogebra, para estudiar la proporcionalidad, las razones áureas, las simetrías, las cónicas, etc.

El departamento de Educación Plástica y Visual se implicó en todo el proyecto de manera directa, ya que fue el responsable de la ilustración, maquetación y dibujo de muchos de los trabajos de otros departamentos. Además realizó salidas, como la visita al barrio del Oeste, famoso por su arte urbano, el recorrido por las esculturas de artistas salmantinos, donde se explicó la proporción áurea entre las diversas partes de las obras, o como la realización de un rally fotográfico.

Como se puede ver, el estudio de los monumentos se realizó desde varios puntos de vista. Por ejemplo, una actividad consistía en que los alumnos eligiesen un monumento, estudiaran con el programa Geogebra sus medidas, contaran alguna leyenda o suceso acaecido en dicho lugar, dijesen el estilo arquitectónico al que pertenece,… Otro ejemplo fue la completa investigación del Colegio Mayor Fonseca, en donde estudiaron el estilo arquitectónico, el número de colegios mayores en aquella época, la canción de la tuna en la que aparece su historia, el estudio de sus medidas, de sus proporciones, su altura, etc.

Algunas actividades como ésta eran libres, mientras que otras estaban muy guiadas, como el estudio del Palacio de Anaya sobre el que se realizó un trabajo conjunto entre varios departamentos didácticos. Esto se observa en las fichas de salida que se les proporcionó a los alumnos para el estudio de los monumentos, donde anotaron el estilo arquitectónico al que pertenece, las medidas de las columnas y de los capiteles y el dibujo de los vítores en sus paredes. Fue un trabajo guiado por el departamento de Historia, pero en el que también participó el de Plástica porque realizó las distintas fotografías que tenían que aportar, el departamento de Lengua, inventando anécdotas y leyendas, y el departamento de Matemáticas, que fue el responsable de trabajar las medidas del Palacio, buscando las razones áureas mediante la ayuda de un rectángulo. El estudio se completó con la ponencia de D. Ricardo G. Núñez, profesor de la facultad de Bellas Artes, que mostró toda la geometría que oculta el Palacio, sus razones áureas, el porqué de todas las medidas y el número de oro. Explicó cómo construyó una maqueta a escala, parte de su tesis doctoral, en la que se pueden observar todos los pequeños detalles del monumento.

Otro monumento estudiado por varios departamentos fue la Plaza Mayor de Salamanca, donde no sólo tenían que realizar distintas mediciones con aparatos de medida sino que tenían que componer poesías, estudiar los medallones que adornan los pabellones o realizar fotos artísticas. En esta actividad se observó que la Plaza Mayor no es cuadrada sino que como decía Unamuno “es un cuadrilátero irregular, pero asombrosamente armónico”. En ella se buscaron las distintas simetrías, se contó el número de balcones y arcos, y se buscó el lugar exacto en el que aparece dicho número esculpido. Se estudiaron sus formas geométricas, las medidas de los distintos arcos que se pueden ver en los distintos pabellones, se conocieron anécdotas cotidianas de la vida diaria de mediados del siglo XX, como la forma de conocerse los hombres y mujeres, ya que caminaban en distintas direcciones según el sexo, bajo los soportales. Se analizaron las mejores perspectivas para realizar fotografías de los distintos medallones, se contó el número de mujeres y de hombres que aparecen, y los sucesos de la historia que les acompañan… Esta actividad se completó con la ponencia de un escultor que realizó uno de los últimos medallones que adornan la Plaza Mayor, el de la reina de España, Isabel II. Santiago Pérez López mostró todo el proceso de realización del medallón desde el modelado en barro, para presentarlo a concurso, como la fase de talla directa, hasta ver la obra concluida. También nos enseñó algunos instrumentos utilizados para la realización de la obra y cómo calculó la proporcionalidad.

Uno de los logros conseguidos en este proyecto fue la fuerte unión que se consiguió entre los alumnos, ya que colaboraron con gran entusiasmo de las actividades que se desarrollaban. También se notó una gran cohesión entre todos los profesores implicados en el proyecto, aportando cada uno todo su saber en la materia que le competía y ayudando al resto de profesores desinteresadamente. Todos los departamentos didácticos trabajaron de forma conjunta, consiguiendo que tanto profesores como alumnos disfrutaran del proyecto. Pero no nos podemos olvidar de los alumnos, que eran y son el centro del proyecto, pues lograron el objetivo de aprender cosas nuevas y de ver distintos puntos de vista de un mismo monumento, consiguieron aprender a aprender desde la diversidad y colaborar para conseguir un objetivo común.

Además, se impulsó el uso de las nuevas tecnologías, ya que los alumnos TIC crearon un apartado especial en su e-portafolio en el que plasmaron sus conclusiones, redactaron entradas para el blog del instituto, crearon videos explicativos y archivaron trabajos realizados con el programa Geogebra.

De esta forma, y mediante una colaboración entre todo el profesorado, se pudieron conseguir las siguientes competencias básicas: competencia para aprender a aprender, competencia en educación lingüística, competencia matemática, competencias en ciencia y tecnología, competencia digital, competencias sociales y cívica, competencia en sentido de iniciativa y espíritu emprendedor, conciencia social y expresiones culturales.

Estas actividades son una pequeña muestra de las distintas y variadas tareas que se llevaron a cabo en el proyecto. Lo más gratificante fue ver cómo los alumnos se acercaban al arte que invade nuestra ciudad y lo veían desde distintos puntos de vista, relacionando las distintas materias. Este era nuestro reto.

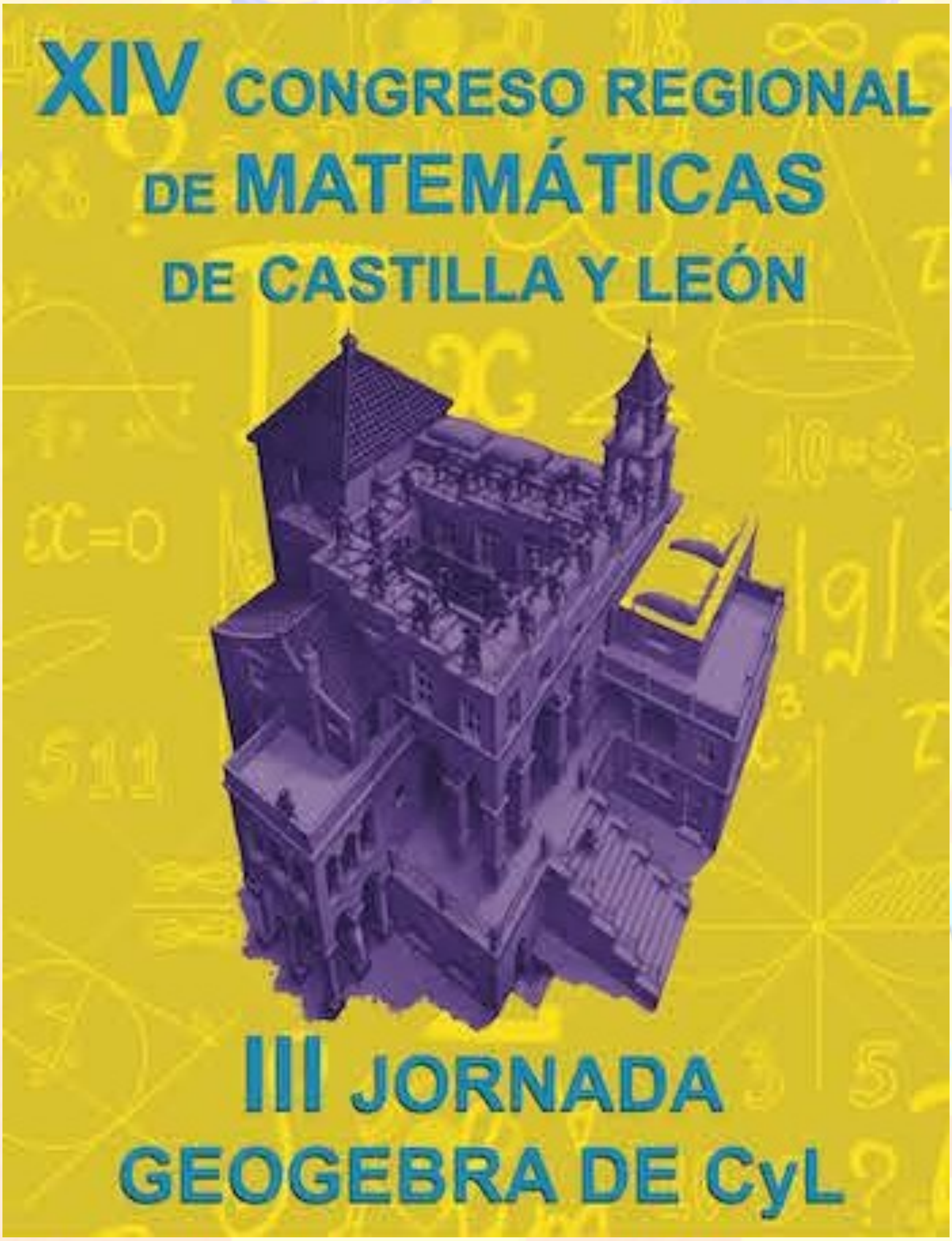
Desde aquí quisiera dar las gracias, en primer lugar, a todo el alumnado que participó en el plan porque sin ellos no hubiera sido posible la realización del mismo; en segundo lugar, al profesorado que programó e ideó este proyecto; en tercer lugar, al equipo directivo del IES García Bernalt que facilitó y permitió cambios de horarios, salidas grupales y reserva de aulas; y, por último, al CFIE y a la Dirección Provincial de Educación, por el apoyo recibido.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

P.I.E. Las Matemáticas en el Arte Salmantino

Para hacer referencia al artículo:

Egido, T. (2018). Las Matemáticas en el arte salmantino. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán". (Ed.), XIV Congreso Regional de Matemáticas de Castilla y León. (254-257). Lugar: Universidad de León



"Las matemáticas son un lugar en el que puedes hacer cosas que no puedes hacer en el mundo real"

Marcus du Satoy